

BÀI 1. ĐƯỜNG TRÒN. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

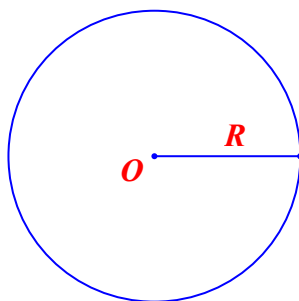
Kiến thức cần nhớ

I. Khái niệm đường tròn

Trong mặt phẳng, cho đường tròn tâm O bán kính R là tập hợp các điểm cách điểm O một khoảng R ($R > 0$), kí hiệu là $(O; R)$.

Chú ý:

- Một đường tròn hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính.
- Khi không qua tâm đến bán kính của đường tròn $(O; R)$, ta cũng có thể kí hiệu đường tròn là (O) .



Nhận xét:

- Nếu điểm M thuộc đường tròn (O) (hay ta còn nói điểm M nằm trên đường tròn (O) , hoặc đường tròn (O) đi qua điểm M) thì $OM = R$ và ngược lại.
- Nếu điểm M nằm bên trong (hay nằm trong, ở trong) đường tròn (O) thì $OM < R$ và ngược lại.
- Nếu điểm M nằm bên ngoài (hay nằm ngoài, ở ngoài) đường tròn (O) thì $OM > R$ và ngược lại.

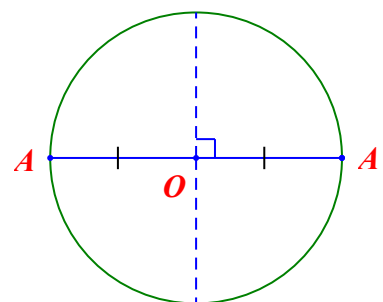
II. Liên hệ giữa đường kính và dây của đường tròn.

Chú ý:

- Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là dây (hay dây cung) của đường tròn.
- Dây đi qua tâm là đường kính của đường tròn. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

III. Tính đối xứng của đường tròn.

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mỗi đường thẳng đi qua tâm là một trục đối xứng của đường tròn đó.



IV. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

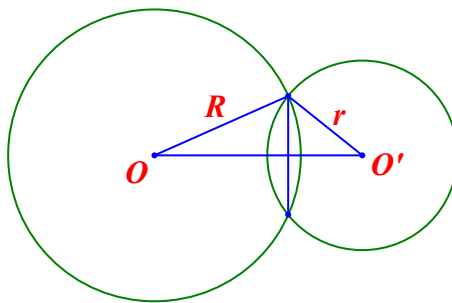
1) Hai đường tròn cắt nhau

Hai đường tròn có đúng hai điểm chung gọi là hai đường tròn cắt nhau.

- Mỗi điểm chung của hai đường tròn cắt nhau được gọi là một giao điểm của hai đường tròn

đó.

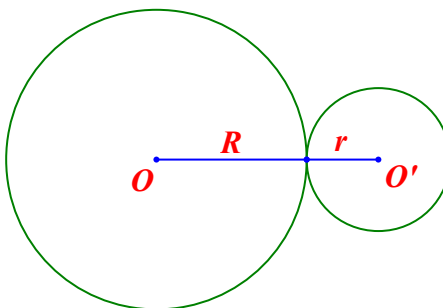
- Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R \geq r$. Nếu hai đường tròn đó cắt nhau thì $R - r < OO' < R + r$. Điều ngược lại cũng đúng.



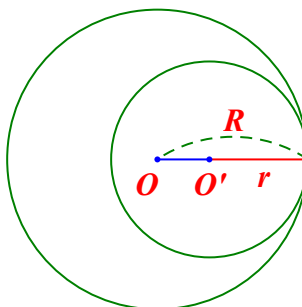
2) Hai đường tròn tiếp xúc nhau

Hai đường tròn có đúng một điểm chung gọi là hai đường tròn tiếp xúc nhau (tại điểm chung đó).

- Điểm chung của hai đường tròn tiếp xúc nhau được gọi là tiếp điểm.
- Ta có hai trường hợp về hai đường tròn tiếp xúc nhau: hai đường tròn tiếp xúc ngoài, hai đường tròn tiếp xúc trong.
- Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$
- Nếu hai đường tròn đó tiếp xúc ngoài thì tiếp điểm A nằm giữa O, O' và $OO' = R + r$. Điều ngược lại cũng đúng.



- Giả sử $R > r$. Nếu hai đường tròn đó tiếp xúc trong thì điểm O' nằm giữa O, A và $OO' = R - r$. Điều ngược lại cũng đúng.

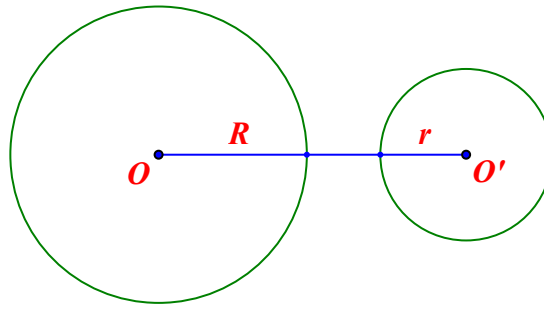


3) Hai đường tròn không giao nhau

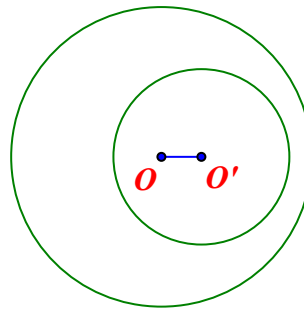
Hai đường tròn không có điểm chung gọi là hai đường tròn không giao nhau.

- Ta có hai trường hợp về hai đường tròn tiếp xúc nhau: hai đường tròn ở ngoài nhau, đường tròn (O) đựng đường tròn (O') .
- Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$

- Nếu hai đường tròn ở ngoài nhau thì $OO' > R + r$. Điều ngược lại cũng đúng.



- Giả sử $R > r$. Nếu đường tròn (O) đựng đường tròn (O') thì $OO' < R - r$. Điều ngược lại cũng đúng.



B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì số điểm chung của hai đường tròn là:

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 2: Hai đường tròn có đúng hai điểm chung được gọi là:

- A. hai đường tròn cắt nhau B. hai đường tròn tiếp xúc nhau
C. hai đường tròn trùng nhau D. hai đường tròn trùng nhau

Câu 3: Hai đường tròn không có điểm chung được gọi là:

- A. hai đường tròn cắt nhau B. hai đường tròn tiếp xúc nhau
C. hai đường tròn không giao nhau D. hai đường tròn trùng nhau

Câu 4: Cho đường tròn tâm O có hai điểm M và N nằm trên đường tròn. Kết luận đúng là:

- A. $OM > ON$ B. $OM = ON$
C. $OM < ON$ D. $OM = ON + MN$

Câu 5: Tâm đối xứng của đường tròn là:

- A. Tâm của đường tròn B. Điểm bất kì bên trong đường tròn.
C. Điểm bất kì bên ngoài đường tròn D. Điểm bất kì trên đường tròn.

Câu 6: Trong các câu sau, câu nào sai?

- A. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài tại A thì A thuộc đoạn thẳng nối tâm.
B. Nếu hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ không giao nhau thì $OO' > R + R'$.
C. Nếu hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc trong thì $OO' = |R - R'|$.
D. Hai đường tròn tiếp xúc trong tại A thì A thuộc đoạn thẳng nối tâm.

Câu 7: Hai đường tròn có hai tiếp tuyến chung trong thì vị trí tương đối của chúng là:

- A. tiếp xúc trong B. ngoài nhau C. cắt nhau D. tiếp xúc ngoài

Câu 8: Điền cụm từ thích hợp vào chỗ chấm: “Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây có độ dài.....”.

- A. nhỏ nhất B. bằng tổng hai dây bất kì
C. lớn nhất D. bằng trung bình cộng của hai dây bất kì.

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12cm$; $BC = 5cm$. Bán kính đường tròn đi qua bốn đỉnh A ; B ; C ; D của hình chữ nhật là:

- A. $13cm$ B. $12,5cm$ C. $7cm$ D. $6,5cm$

Câu 10. Cho đường tròn tâm O dây $AB = 16cm$. Gọi K là trung điểm của AB , biết $OK = 6cm$. Tính bán kính đường tròn?

- A. $R = 10cm$ B. $R = 7cm$ C. $R = 12cm$ D. $R = 8cm$

Câu 11. Cho hai đường tròn $(O; 4cm)$ và $(I; 6cm)$. Biết $OI = 2cm$. Tìm vị trí tương đối của hai đường tròn.

- A. tiếp xúc trong B. tiếp xúc ngoài
C. cắt nhau D. không cắt nhau

Câu 12. Cho hai đường tròn $(I; 7cm)$ và $(K; 5cm)$. Biết $IK = 2cm$. Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

- A. trùng nhau B. tiếp xúc nhau
C. cắt nhau tại 2 điểm phân biệt D. không cắt nhau

Câu 13. Cho đường tròn tâm O , bán kính OA . Lấy C ; D là hai điểm thuộc đường tròn sao cho CD là đường trung trực của OA . Tứ giác $OCAD$ là hình gì?

- A. Hình thoi B. Hình bình hành
C. Hình vuông D. Hình thang

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2cm$. Gọi I ; J lần lượt là trung điểm của AC ; CD . Vị trí tương đối của đường tròn $(A; AI)$ và $(C; CJ)$ là:

- A. trong nhau B. tiếp xúc ngoài
C. ngoài nhau D. cắt nhau

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 12cm$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó bằng:

- A. 5 B. 6 C. 8 D. 4

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 16. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 120^\circ$. Biết rằng các đỉnh của tam giác nằm trên đường tròn tâm O bán kính $3cm$. Tính diện tích tam giác ABC ?

- A. $3\sqrt{3}cm^2$ B. $\frac{9\sqrt{3}}{4}cm^2$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}cm^2$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$

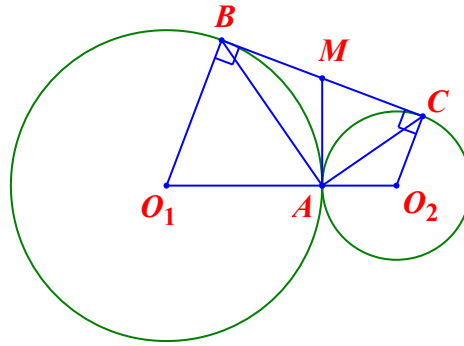
Câu 17. Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 12cm$, đường cao $AH = 4cm$. Tính bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC ?

- A. $12cm$ B. $6,5cm$ C. $8,5cm$ D. $10cm$

Câu 18. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Kẻ $OK \perp BC$ ($K \in BC$). Tính tỉ số $\frac{OK}{AH}$?

- A. 1 B. $\frac{1}{4}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

Câu 19. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A và một đường thẳng d tiếp xúc với (O_1) ; (O_2) lần lượt tại $B; C$. Lấy M là trung điểm của BC .

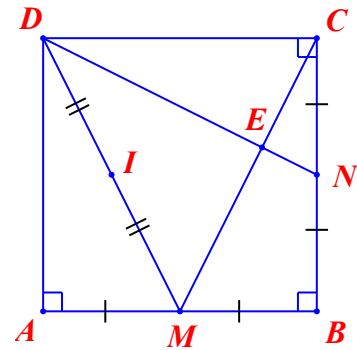


Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A. $AM = \frac{BO_1 + CO_2}{2}$ B. $AM \perp AO_1; AM \perp AO_2$
C. $AM = \frac{1}{2}BC$ D. $AM = MC$

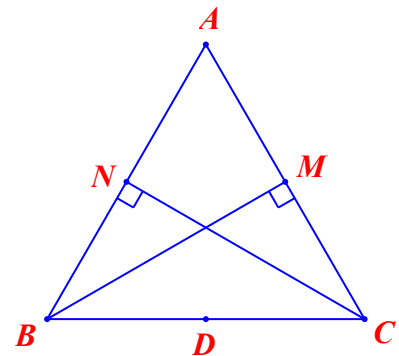
Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi E là giao điểm của CM và DN . Bán kính của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, E, M là:

- A. $R = \sqrt{10}cm$
B. $R = \sqrt{5}cm$
C. $R = 5cm$
D. $R = 2\sqrt{5}cm$

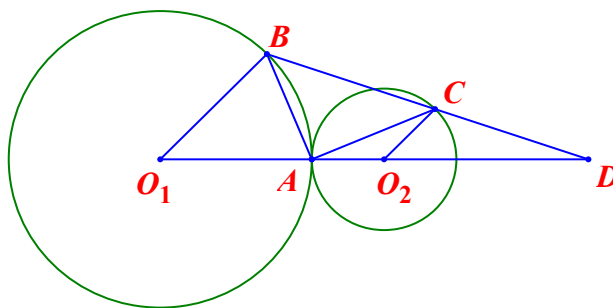


Câu 21. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a , các đường cao là BM và CN . Gọi D là trung điểm của BC . Đường tròn đi qua bốn điểm B, N, M, C là:

- A. Đường tròn tâm D bán kính $\frac{BC}{2}$
B. Đường tròn tâm D bán kính BC
C. Đường tròn tâm B bán kính $\frac{BC}{2}$
D. Đường tròn tâm C bán kính $\frac{BC}{2}$



Câu 22. Cho $(O_1; 3cm)$ tiếp xúc ngoài với $(O_2; 1cm)$. Vẽ bán kính O_1B và O_2C song song với nhau cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ O_1O_2 . Gọi D là giao điểm của BC và O_1O_2 . Số đo $\widehat{BAC}$ là:



- A. 90° B. 60° C. 80° D. 100°

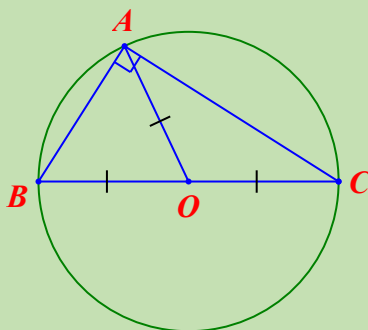
C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Chứng minh các điểm cho trước cùng nằm trên một đường tròn tính bán kính đường tròn

Phương pháp giải

Cách 1: Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều 1 điểm cho trước nào đó.

Cách 2: Nếu $\widehat{BAC} = 90^\circ$ thì A thuộc đường tròn đường kính BC .



Xét tam giác vuông ABC , có AO là đường trung tuyến nên $AO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AO = OB = OC$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 5cm, AC = 12cm$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.
- Tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9cm, BC = 12cm$.

- Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.
- Tính bán kính đường tròn đó.

Bài 3. Cho tam giác đều $\triangle ABC$ cạnh bằng a , các đường cao BM, CN . Gọi O là trung điểm của BC

- Chứng minh rằng B, C, M, N cùng thuộc đường tròn (O) .
- Gọi G là giao điểm của BM và CN . Chứng minh điểm G nằm trong, điểm A nằm ngoài đối với đường tròn đường kính BC .

Bài 4. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$), đường cao AH . Từ M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh 5 điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O) , đường kính AB và một dây AC bằng bán kính đường tròn. Tính các góc của $\triangle ABC$.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh 4 điểm B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên 1 đường tròn

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên 1 đường tròn

Bài 9. Cho tam giác ABC và điểm M là trung điểm của BC . Hạ MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB, AC . Trên tia đối của tia DB và EC lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI , E là trung điểm của CK . Chứng minh rằng B, I, C, K cùng nằm trên 1 đường tròn.

Bài 10. Gọi I, K theo thứ tự là các điểm nằm trên AB, AD của hình vuông $ABCD$ sao cho $AI = AK$. Đường thẳng kẻ qua A vuông góc với DI ở P và cắt BC ở Q . Chứng minh rằng C, D, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Bài 11. Cho tam giác ABC , ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, AC, HC, HB . Chứng minh rằng 5 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB, CD

- Chứng minh rằng A, M, N, D thuộc 1 đường tròn.
- So sánh AN và DM .

Bài 13. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi E là giao điểm của CM và DN

- Tính số đo góc CEN
- Chứng minh A, D, E, M cùng nằm trên 1 đường tròn
- Xác định tâm của đường tròn đi qua 3 điểm B, D, E

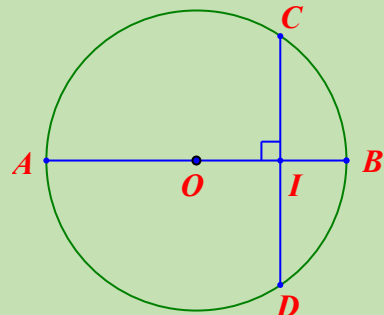
Dạng 2. Liên hệ giữa đường kính và dây của đường tròn**Phương pháp giải**

- Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.
- Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

Bổ đề 1: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy

Chứng minh:

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OB là đường cao nên OB là đường trung trực của đoạn thẳng CD , do đó OB là trung tuyến vì vậy OB đi qua trung điểm CD .

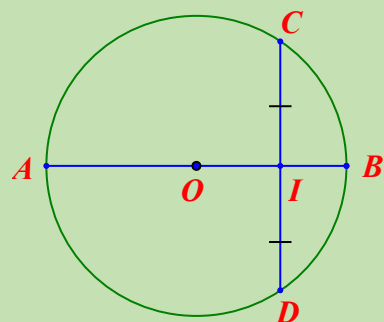


Bổ đề 2: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

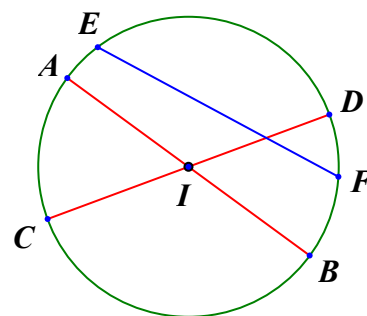
Chứng minh:

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OB là đường trung tuyến nên OB là đường trung trực của đoạn thẳng CD , do đó OB vuông góc CD .

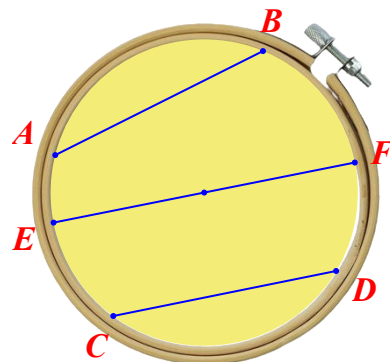
Chú ý: Khi dùng 2 bổ đề trên thì phải chứng minh vì trong sách giáo khoa không có nói đến chúng.



Bài 1. Cho đường tròn (I) có các dây cung AB, CD, EF . Cho biết AB và CD đi qua tâm I , EF không đi qua I (Hình vẽ). Hãy so sánh độ dài AB, CD, EF .



Bài 2. Bạn Minh Hiền căng ba đoạn chỉ AB, CD, EF có độ dài lần lượt là 32cm , 28cm và 40cm trên một khung thêu hình tròn bán kính 20cm (Hình vẽ). Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn? Giải thích.



Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính $3cm$ và hai dây AB và AC . Cho biết $AB = 5cm$ $AC = 2cm$, hãy tính khoảng cách từ O đến dây AB và dây AC

Bài 4. Cho đường tròn tâm $(O; R)$ và một dây cung

AB . Gọi I là trung điểm của AB Tia OI cắt cung AB tại M

- Cho $R = 5cm, AB = 6cm$. Tính độ dài dây cung MA
- Gọi N là điểm đối xứng của M qua O , giả sử $MA = 5cm; AB = 6cm$. Tính bán kính R

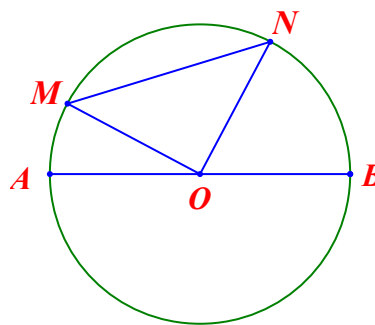
Bài 5. Cho đường tròn tâm O , hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M . Biết $AB = 18cm$, $CD = 14cm$, $MC = 4cm$. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB và một dây cung CD . Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F . Chứng minh:

- $CE = DF$
- E và F đều ở ngoài (O)

Bài 7. Quan sát hình vẽ bên dưới.

- So sánh MN và $OM + ON$.
- So sánh MN và AB .



Bài 8. Cho đường tròn (O) và dây CD . Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M , cắt (O) tại H . Tính bán kính R của (O) biết: $CD = 16cm, MH = 4cm$

Bài 9. Cho đường tròn (O) bán kính $OA = 11cm$. Điểm M thuộc bán kính AO và cách O khoảng $7cm$. Qua M kẻ dây CD có độ dài $18cm$. Tính độ dài các đoạn thẳng MC và MD

Bài 10. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I . Giả sử $IA = 2cm, IB = 4cm$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây

Bài 11. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Dây CD cắt AB tại M , biết $MC = 4cm, MD = 12cm$. $\widehat{BMD} = 30^\circ$. Hãy tính :

- Khoảng cách từ O đến CD
- Bán kính của (O)

Bài 12. Cho đường tròn (O) có các dây $AB = 24cm, AC = 20cm, \widehat{BAC} < 90^\circ$ và O nằm trong góc BAC . Gọi M là trung điểm của AC . Khoảng cách từ điểm M đến AB bằng $8cm$

- Chứng minh tam giác ABC cân
- Tính bán kính của (O)

Bài 13. Cho đường tròn tâm $(O; R)$, A và B di động trên đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Vẽ $OH \perp AB = H$

- Chứng minh H là trung điểm của AB
- Tính OH, AB và S_{OAB} theo R
- Tia OH cắt đường tròn $(O; R)$ tại C . Tứ giác $OABC$ là hình gì? Vì sao

Bài 14. Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD

- Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành
- Kẻ đường kính OI vuông góc BC tại I . Chứng minh I, H, D thẳng hàng
- Chứng minh $AH = 2OI$

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD cắt AB tại I . Gọi H, K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD . Chứng minh rằng: $CH = DK$

Bài 16. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H . Lấy I là trung điểm của BC

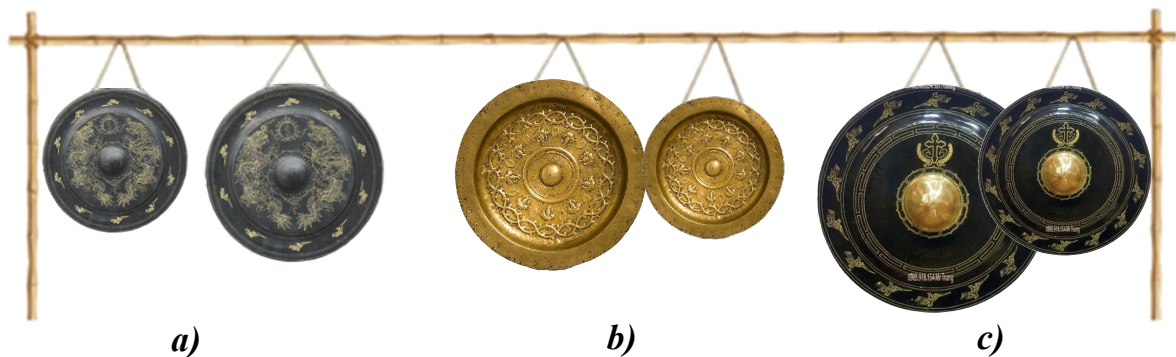
- Gọi K là điểm đối xứng của H qua I . Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành
- Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C
- Chứng minh: $OI \parallel CH$
- Chứng minh rằng: $BE \cdot BA + CD \cdot CA = BC^2$

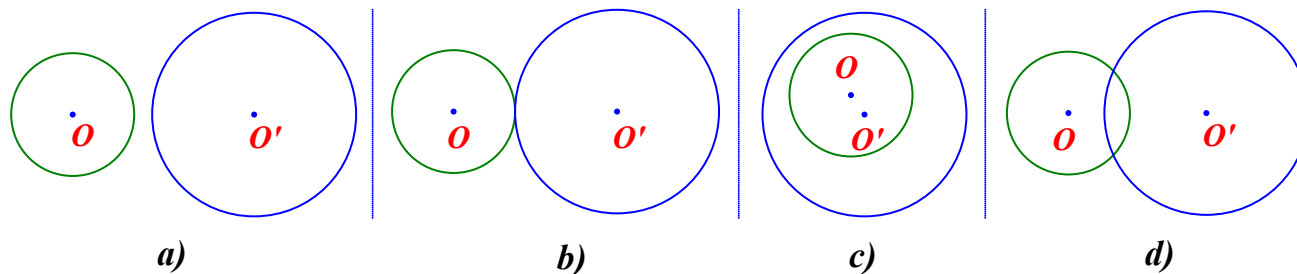
Bài 17. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đoạn thẳng OA lấy điểm C và trên đoạn thẳng OB lấy điểm D sao cho $OC = OD$. Từ C và D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở E và F . Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh rằng: $S_{CEF} + S_{DEF} = EF \cdot OI$

Bài 18. Cho đường tròn $(O; R)$. Các điểm A, B, C, D thuộc $(O; R)$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

Dạng 3. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Bài 1. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên trong hình vẽ bên dưới.





Bài 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O') trong mỗi hình a, b, c, d:

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A, B . Chứng minh OO' là đường trung trực của AB .

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O; 13cm)$ và $(O'; 15cm)$ cắt nhau tại A, B sao cho $AB = 24(cm)$. Tính độ dài $O'O$.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B . Gọi I là trung điểm của OO' . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt (O) tại C và cắt (O') tại D . So sánh AC và AD .

Bài 6. Cho đường tròn (O) , đường kính $AD = R$. Vẽ cung tròn tâm D bán kính R cắt (O) ở B và C

- Tứ giác $OBDC$ là gì? vì sao?
- Tính số đo các góc $\widehat{CBD}$; $\widehat{CBO}$; $\widehat{OBA}$
- Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	A	C	B	A	B	B	C	D	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	B	A	C	B	B	B	D	A	B
Câu	21	22								
Đáp án	A	A								

Vì CD là trung trực của OA nên $CO = CA; DO = DA$

Mà $OC = DO$ (bán kính đường tròn)

Suy ra $CO = CA = DO = DA$

Vậy tứ giác $OCAD$ là hình thoi.

Vậy chọn câu A.

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2cm$. Gọi $I; J$ lần lượt là trung điểm của $AC; CD$. Vị trí tương đối của đường tròn $(A; AI)$ và $(C; CJ)$ là:

A. trong nhau

C. ngoài nhau

B. tiếp xúc ngoài

D. cắt nhau

Hướng dẫn:

Áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle ABC$ vuông tại B có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}cm$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AI = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}cm \\ CJ = \frac{CD}{2} = 1cm \end{cases}$$

Ta có: $AI + CJ < AC$ ($1 + \sqrt{2} < 2\sqrt{2}$).

Suy ra hai đường tròn ở vị trí ngoài nhau.

Vậy chọn câu C.

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 12cm$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó bằng:

A. 5

C. 8

B. 6

D. 4

Hướng dẫn:

Gọi O là trung điểm của BC . Do tam giác ABC vuông tại A nên $OA = OB = OC$

Hay O là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh $A; B; C$ của tam giác ABC .

Khi đó, bán kính của đường tròn là:

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6cm.$$

Vậy chọn câu B.

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 16. Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 120^\circ$. Biết rằng các đỉnh của tam giác nằm trên đường tròn tâm O bán kính $3cm$. Tính diện tích tam giác ABC ?

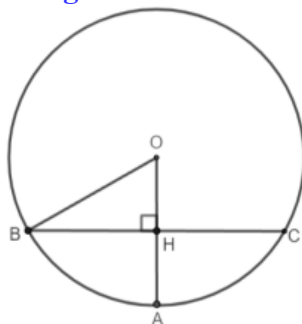
A. $3\sqrt{3}cm^2$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}cm^2$

B. $\frac{9\sqrt{3}}{4}cm^2$

D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$

Hướng dẫn:



Kẻ AH vuông góc với BC .

Ta có AH là đường trung trực của BC nên AH đi qua O và tam giác AOC đều.

$$\text{Do đó: } HC = \frac{R\sqrt{3}}{2}; HA = \frac{R}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = HC \cdot HA = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

Vậy chọn câu B.

Câu 17. Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 12\text{cm}$, đường cao $AH = 4\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC ?

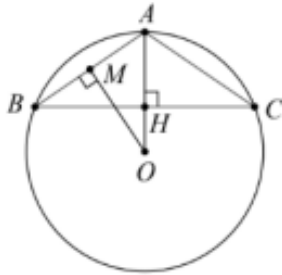
A. 12cm

B. $6,5\text{cm}$

C. $8,5\text{cm}$

D. 10cm

Hướng dẫn:



Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH là đường trung trực của đoạn BC

Qua trung điểm M của AB kẻ đường trung trực của AB cắt AH tại O . Khi đó tâm đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC .

Bán kính đường tròn (O) là $R = OA = OB$

Tam giác OBH vuông tại H ta có:

$$BO^2 = BH^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow BO^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + (OA - AH)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 36 + (R - 4)^2 \Rightarrow R = 6,5$$

Vậy chọn câu B.

Câu 18. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Kẻ

$OK \perp BC$ ($K \in BC$). Tính tỉ số $\frac{OK}{AH}$?

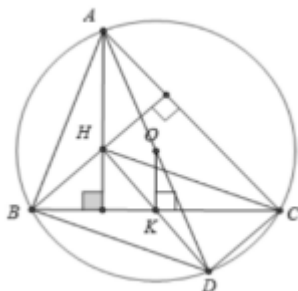
A. 1

B. $\frac{1}{4}$

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn:



Kẻ đường kính AD .

Vì tam giác ABD và tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên
 $BD \perp AB$; $CD \perp AC$

Mà $CH \perp AB$; $BH \perp AC$

Suy ra $BHCD$ là hình bình hành.

Mặt khác: $OK \perp BC$; $AH \perp BC$

$\Rightarrow OK \parallel AH$

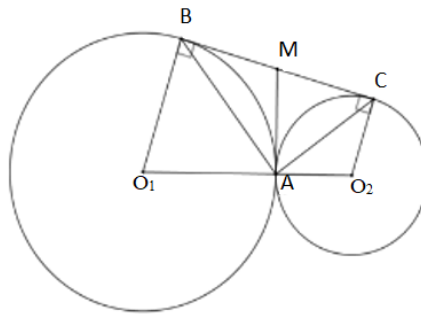
Xét tam giác AHD có $OA = OD$; $OK \parallel AH$ và K là trung điểm của HD .

Do đó OK là đường trung bình của tam giác AHD .

Vậy $\frac{OK}{AH} = \frac{1}{2}$

Vậy chọn câu D.

Câu 19. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A và một đường thẳng d tiếp xúc với (O_1) ; (O_2) lần lượt tại B ; C . Lấy M là trung điểm của BC .



Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $AM = \frac{BO_1 + CO_2}{2}$

B. $AM \perp AO_1$; $AM \perp AO_2$

C. $AM = \frac{1}{2}BC$

D. $AM = MC$

Hướng dẫn:

Xét (O_1) có $O_1B = O_1A$

$\Rightarrow \Delta O_1AB$ cân tại $O_1 \Rightarrow \widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$.

Xét (O_2) có $O_2C = O_2A$

$\Rightarrow \Delta O_2CA$ cân tại $O_2 \Rightarrow \widehat{O_2CA} = \widehat{O_2AC}$.

Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360^\circ - \widehat{C} - \widehat{B} = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{O_1BA} - \widehat{O_1AB} + 180^\circ - \widehat{O_2CA} - \widehat{O_2AC} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2(\widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC}) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

Vì tam giác ABC vuông tại A có AM là trung tuyến nên $AM = BM = DM = \frac{BC}{2}$

Xét tam giác BMA cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MAB}$ mà $\widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$ (cmt) nên:

$$\widehat{O_1BA} + \widehat{MBA} = \widehat{O_1AB} + \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{O_1AM} = \widehat{O_1BM} = 90^\circ$$

$\Rightarrow MA \perp AO_1$ tại A nên AM là tiếp tuyến của (O_1)

Tương tự ta cũng có $\Rightarrow MA \perp AO_2$ tại A nên AM là tiếp tuyến của (O_2)

Vậy chọn câu A.

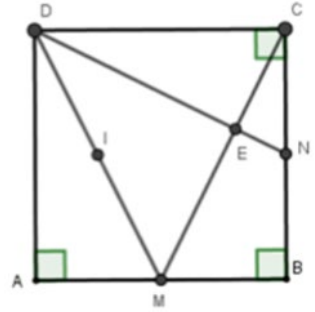
Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi E là giao điểm của CM và DN . Bán kính của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, E, M là:

A. $R = \sqrt{10}cm$

B. $R = \sqrt{5}cm$

C. $R = 5cm$

D. $R = 2\sqrt{5}cm$



Hướng dẫn:

Ta có $\widehat{CDN} = \widehat{ECN}$ (vì cùng phụ với $\widehat{CNE}$ nên $\widehat{CNE} + \widehat{ECN} = \widehat{CNE} + \widehat{CDN} = 90^\circ$).

Suy ra $\widehat{CEN} = 90^\circ \Rightarrow CM \perp DN$

Gọi I là trung điểm của DM .

Xét tam giác vuông ADM ta có: $AI = ID = IM = \frac{DM}{2}$.

Xét tam giác vuông DEM ta có: $EI = ID = IM = \frac{DM}{2}$

Nên $EI = ID = IM = IA = \frac{DM}{2}$

Do đó bốn điểm A, D, E, M cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{DM}{2}$.

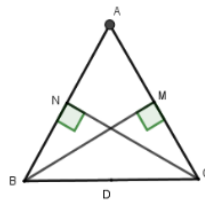
Xét tam giác ADM vuông tại A , có $AD = 4cm$; $AM = \frac{AB}{2} = 2cm$ nên theo định lý Pythagore ta có:

$$DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

Suy ra bán kính đường tròn đi qua bốn điểm A, D, E, M là $R = \frac{DM}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Vậy chọn câu B.

Câu 21. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a , các đường cao là BM và CN . Gọi D là trung điểm của BC . Đường tròn đi qua bốn điểm B, N, M, C là:



A. Đường tròn tâm D bán kính $\frac{BC}{2}$

B. Đường tròn tâm D bán kính BC

C. Đường tròn tâm B bán kính $\frac{BC}{2}$

D. Đường tròn tâm C bán kính $\frac{BC}{2}$

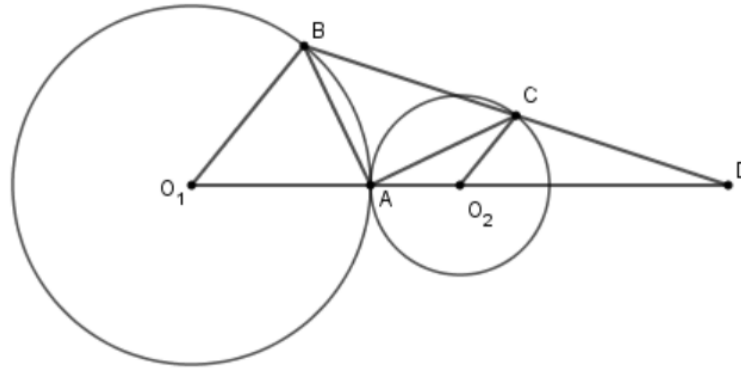
Hướng dẫn:

Xét hai tam giác vuông BNC và BMC có ND, MD là hai đường trung tuyến

$\Rightarrow DN = DB = DC = DM = \frac{BC}{2}$ nên bốn điểm B, N, M, C cùng thuộc đường tròn tâm D bán kính $\frac{BC}{2}$.

Vậy chọn câu A.

Câu 22. Cho $(O_1; 3cm)$ tiếp xúc ngoài với $(O_2; 1cm)$. Vẽ bán kính O_1B và O_2C song song với nhau cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ O_1O_2 . Gọi D là giao điểm của BC và O_1O_2 . Số đo $\widehat{BAC}$ là:



A. 90°

B. 60°

C. 80°

D. 100°

Hướng dẫn:

Xét (O_1) có $O_1B = O_1A \Rightarrow \Delta O_1AB$ cân tại $O_1 \Rightarrow \widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$.

Xét (O_2) có $O_2C = O_2A \Rightarrow \Delta O_2CA$ cân tại $O_2 \Rightarrow \widehat{O_2CA} = \widehat{O_2AC}$.

Lại có: $O_1B \parallel O_2C$

$\Rightarrow \widehat{O_1BC} + \widehat{O_2CB} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía bù nhau)

Suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360^\circ - \widehat{O_2CB} - \widehat{O_1BC} = 180^\circ$

$\Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{O_1BA} - \widehat{O_1AB} + 180^\circ - \widehat{O_2CA} - \widehat{O_2AC} = 180^\circ$

$\Leftrightarrow 2(\widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC}) = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

Vậy chọn câu A.

HƯỚNG DẪN GIẢI

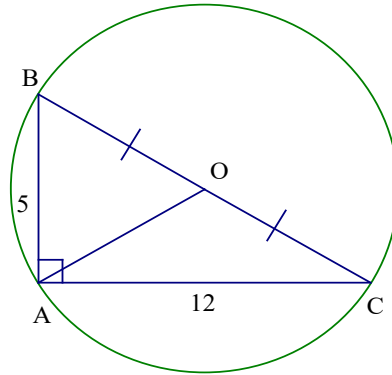
Dạng 1: Chứng minh nhiều điểm thuộc 1 đường tròn

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 5cm, AC = 12cm$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm BC

Xét tam giác vuông ABC , có AO là đường trung tuyến nên $AO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AO = OB = OC$

Do đó ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông ABC , ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13cm$

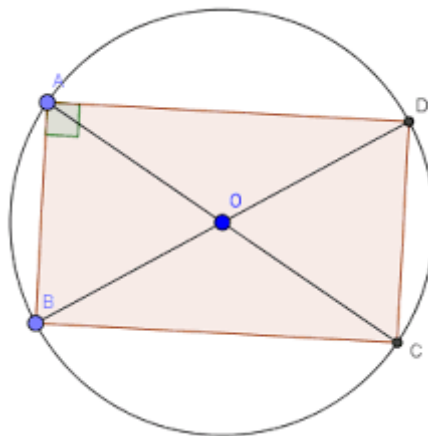
$$\Rightarrow AO = OB = OC = \frac{1}{2}BC = 6,5cm$$

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9cm, BC = 12cm$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải



a) Theo tính chất hình chữ nhật: Hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$ABCD$ là hình chữ nhật, ta có: $OA = OB = OC = OD \Rightarrow A, B, C, D \in (O)$

b) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông ABC , ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 15\text{cm}$

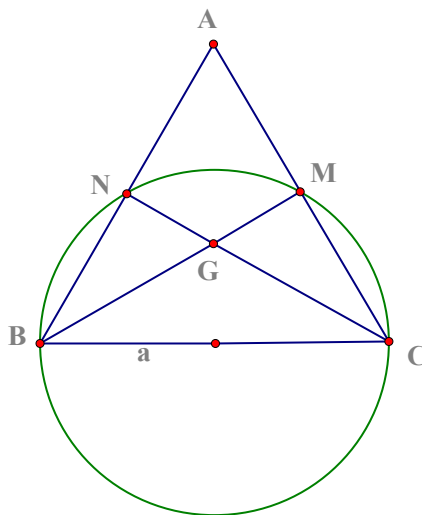
$$\Rightarrow AO = OB = OC = OD = \frac{1}{2}BC = 7,5\text{cm}$$

Bài 3. Cho tam giác đều $\triangle ABC$ cạnh bằng a , các đường cao BM, CN . Gọi O là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng B, C, M, N cùng thuộc đường tròn (O) .

b) Gọi G là giao điểm của BM và CN . Chứng minh điểm G nằm trong, điểm A nằm ngoài đối với đường tròn đường kính BC .

Lời giải



a) Ta có:

Xét tam giác vuông BNC , có NO là đường trung tuyến nên $NO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow NO = OB = OC$

$$\Rightarrow N \in \left(O; \frac{BC}{2}\right)$$

Xét tam giác vuông BMC , có MO là đường trung tuyến nên $MO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MO = OB = OC$

$$\Rightarrow M \in \left(O; \frac{BC}{2}\right)$$

Vậy B, C, M, N cùng thuộc 1 đường tròn $\left(O; \frac{BC}{2}\right)$

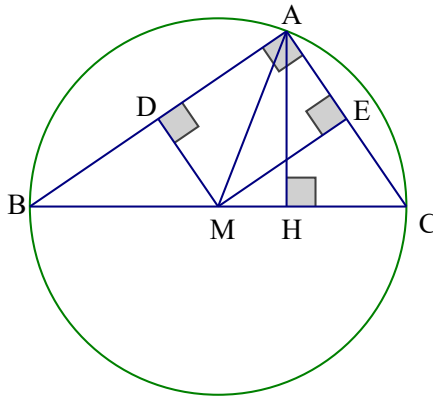
b) Ta có $\triangle ABC$ đều có G trực tâm đồng thời là trọng tâm

Xét $\triangle AOB (\hat{O} = 90^\circ)$, $R = ON = \frac{a}{2} \cdot OA = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow A$ nằm ngoài đường tròn (O)

Ta lại có: $OG = \frac{1}{3} OA = \frac{a\sqrt{3}}{6} < R \Rightarrow G$ nằm trong (O).

Bài 4. Cho tam giác $ABC (\hat{A} = 90^\circ)$, đường cao AH . Từ M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh 5 điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn

Lời giải



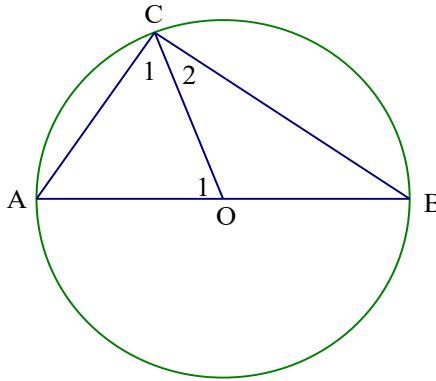
Vì ba tam giác ADM, AEM, AHM có chung cạnh huyền AM nên ba đỉnh góc vuông D, E, H

Nằm trên đường tròn đường kính AM có tâm là trung điểm của AM

Vậy 5 điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB và một dây AC bằng bán kính đường tròn. Tính các góc của $\triangle ABC$.

Lời giải



Tam giác OAC có ba cạnh bằng nhau ($AC = OA = OC$) nên là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}_1 = \widehat{O}_1 = 60^\circ$

Ta có: OAC có $OB = OC$ nên cân tại $O \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}_2$

$\widehat{O}_1$ là góc ngoài của $\triangle OBC \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{B} + \widehat{C}_2 = 2\widehat{B} = 2\widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{O}_1 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ$

Vậy $\widehat{A} = 60^\circ; \widehat{B} = 30^\circ; \widehat{C} = 90^\circ$

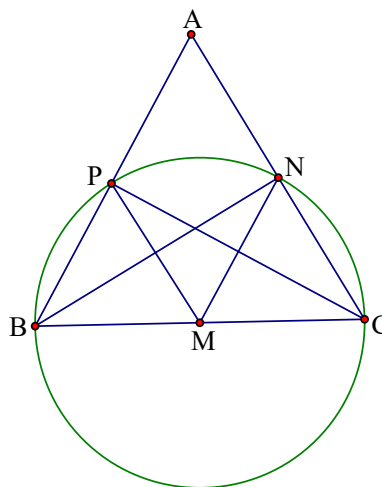
Có thể lí giải như sau: $\triangle CAB$ có trung tuyến CO bằng nửa cạnh đối xứng AB nên vuông tại C

$\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ$

Vậy $\triangle ABC$ có $\widehat{C} = 90^\circ; \widehat{A} = 60^\circ; \widehat{B} = 30^\circ$

Bài 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh 4 điểm B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải



Vì tam giác ABC đều nên các trung tuyến đồng thời cũng là đường cao, Suy ra AM, BN, CP lần lượt vuông góc với BC, AC, AB .

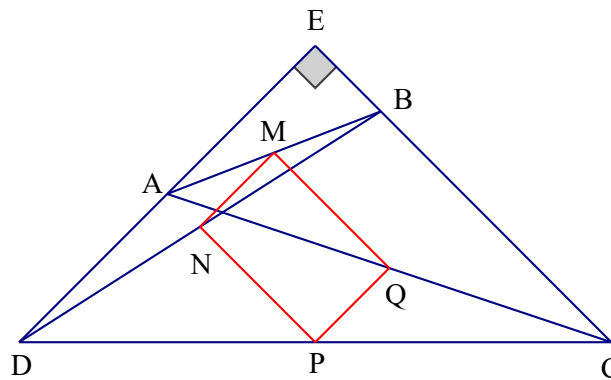
+ $\triangle BPC$ là tam giác vuông, có BC là cạnh huyền nên $\Rightarrow MP = \frac{1}{2}BC = BM = MC$ (1)

+ $\triangle BNC$ là tam giác vuông, có BC là cạnh huyền nên $\Rightarrow NM = \frac{1}{2}BC = BM = MC$ (2)

Từ (1) và (2) $PM = NM = MB = MC$. Hay các điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn, đường kính $BC = a$, tâm đường tròn là trung điểm M của BC

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên 1 đường tròn

Lời giải



Xét tứ giác $MNPQ$, ta có: $\begin{cases} MQ \parallel NP \\ MN \parallel PQ \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành

Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E

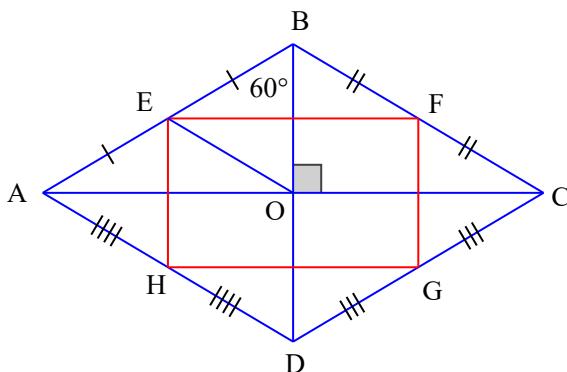
Ta có: $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} = 90^\circ$

Lại có: $\begin{cases} MN \parallel ED \\ MQ \parallel EC \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow M, N, P, Q$ nằm trên 1 đường tròn với tâm là giao điểm của 2 đường chéo của hình chữ nhật, bán kính bằng nửa đường chéo.

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên 1 đường tròn

Lời giải



Xét tứ giác $EFGH$, có: $\begin{cases} EF \parallel GH \\ EH \parallel FG \end{cases} \Rightarrow EFGH$ là hình bình hành

Lại có: $\widehat{HEF} = 90^\circ \Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

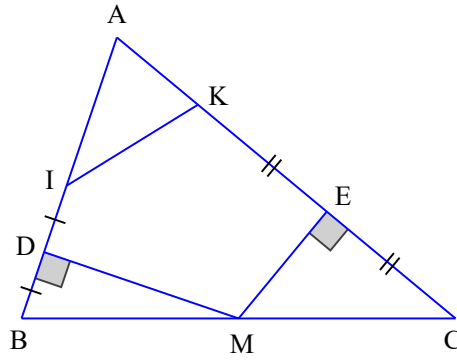
$$\Rightarrow OE = OF = OG = OH(1)$$

Xét tam giác OBE có: $\begin{cases} OE = BE \\ \hat{B} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle OBE$ đều $\Rightarrow OE = OB = OD(2)$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow OE = OB = OF = OG = OH = OD \Rightarrow E, B, F, G, D, H \in (O)$$

Bài 9. Cho tam giác ABC và điểm M là trung điểm của BC . Hạ MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB, AC . Trên tia đối của tia DB và EC lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI , E là trung điểm của CK . Chứng minh rằng B, I, C, K cùng nằm trên 1 đường tròn.

Lời giải



Cách 1: sử dụng định nghĩa

Ta có: M là trung điểm $BC \Rightarrow MB = MC = \frac{1}{2}BC$ (1)

MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB$ (2)

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MC = MK$ (3)

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow MB = MC = MI = MK = \frac{1}{2}BC$ (đpcm)

Cách 2:

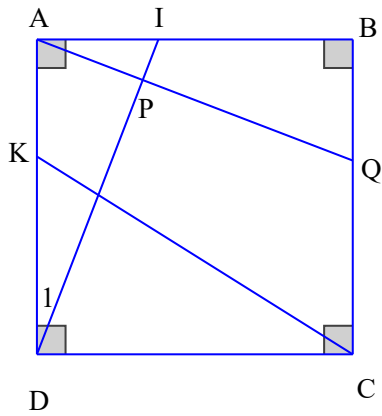
Ta có: MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \triangle BIC$ vuông tại $I \Rightarrow I \in (O; BC)$

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MK = MC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \triangle BKC$ vuông tại $K \Rightarrow K \in (O; BC)$

Vậy: $B, I, C, K \in (O; BC)$.

Bài 10. Gọi I, K theo thứ tự là các điểm nằm trên AB, AD của hình vuông $ABCD$ sao cho $AI = AK$. Đường thẳng kẻ qua A vuông góc với DI ở P và cắt BC ở Q . Chứng minh rằng C, D, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Lời giải



Ta có $\triangle ADI = \triangle BAQ (g - c - g) \Rightarrow AI = BQ \Rightarrow \begin{cases} KD = CQ \\ KD \parallel CQ \end{cases} \Rightarrow KDCQ$ là hình bình hành, mà $\widehat{C} = 60^\circ$

$\Rightarrow \diamond CDKQ$ là hình chữ nhật.

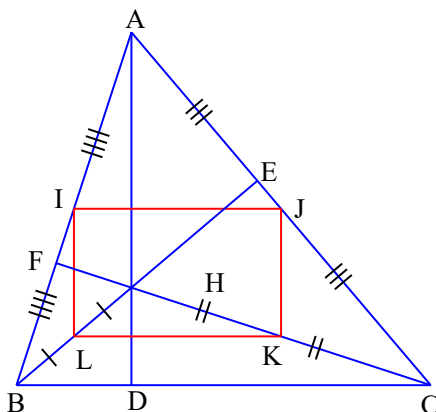
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo CK và DQ $\Rightarrow OC = OD = OK = OQ$

$\triangle PDQ$ vuông cân tại P $\Rightarrow PQ = OD = OC$

Vậy 5 điểm C, D, K, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Bài 11. Cho tam giác ABC, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, AC, HC, HB. Chứng minh rằng 5 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn.

Lời giải



Ta có tứ giác IJKL là hình bình hành (đhnb)

Mà $\widehat{ILK} = 90^\circ \Rightarrow \diamond IJKL$ là hình chữ nhật có hai đường chéo là LJ và IK

Xét tam giác vuông ELJ vuông tại $E \Rightarrow OE = \frac{1}{2}LJ = OJ$

Xét tam giác vuông FLK vuông tại $I \Rightarrow OF = \frac{1}{2}IK = OJ$

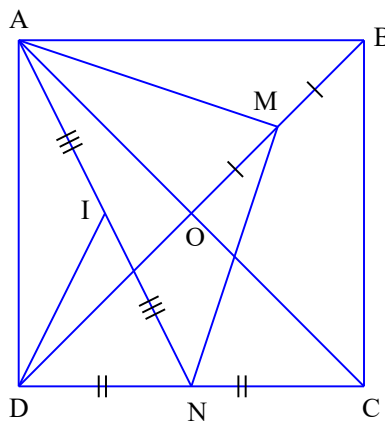
Vậy 6 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn đường kính là đường chéo của hình chữ nhật.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB, CD

a) Chứng minh rằng A, M, N, D thuộc 1 đường tròn.

b) So sánh AN và DM .

Lời giải



a. Kẻ NH vuông góc với BD tại H

Xét tam giác OCD , có: $\begin{cases} DN = NC \\ NH \parallel OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HO = HD = \frac{1}{2}CD \\ MO = MB = \frac{1}{2}OB \end{cases} \Rightarrow MH = \frac{1}{2}BD = OA$

Ta có: $\triangle OAM = \triangle HNM$ (cgc) $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{M_1} \\ \widehat{A_1} + \widehat{M_2} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AMN} = 90^\circ$

+) Gọi I là trung điểm của $AN \Rightarrow IA = IN = \frac{1}{2}AN$ (1)

$$\text{Xét } \triangle ADN (\widehat{D} = 90^\circ) \Rightarrow ID = \frac{1}{2} AN(2); \triangle AMN (\widehat{M} = 90^\circ) \Rightarrow MI = \frac{1}{2} AN(3)$$

$$\text{Từ (1)(2)(3)} \Rightarrow IA = IN = IM = ID \Rightarrow A, M, N, D \in (O)$$

b. Xét đường tròn $(I; IA)$ có AN là đường kính, DM là dây không đi qua tâm $\Rightarrow AN > DM$

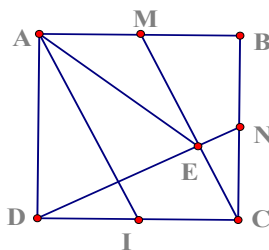
Bài 13. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi E là giao điểm của CM và DN

a) Tính số đo góc CEN

b) Chứng minh A, D, E, M cùng nằm trên 1 đường tròn

c) Xác định tâm của đường tròn đi qua 3 điểm B, D, E

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle CMB = \triangle DNC \Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{CDN} \Rightarrow \widehat{CEN} = 90^\circ$

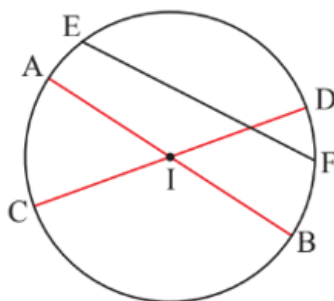
b) Ta có: A, D, E, M thuộc đường tròn đường kính DM

c) Gọi I là trung điểm CD , chứng minh được $AI \parallel MC$

$$\Rightarrow \triangle ADE \text{ cân tại } A \Rightarrow B, D, E \in (A; AB)$$

Dạng 2:

Bài 1. Cho đường tròn (I) có các dây cung AB, CD, EF . Cho biết AB và CD đi qua tâm I , EF không đi qua I (Hình vẽ). Hãy so sánh độ dài AB, CD, EF .



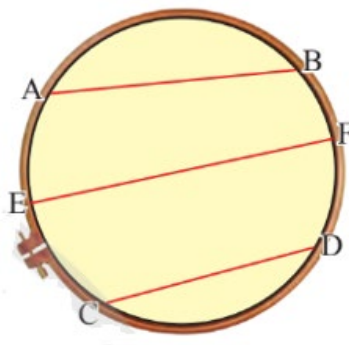
Lời giải

Trong đường tròn (I), AB và CD là đường kính đi qua tâm I, EF là dây cung không đi qua I.

Do đó $AB = CD$ và $EF < AB$, $EF < CD$.

Vậy $EF < AB = CD$.

Bài 2. Bạn Minh Hiền căng ba đoạn chỉ AB, CD, EF có độ dài lần lượt là 32 cm, 28 cm và 40 cm trên một khung thêu hình tròn bán kính 20 cm (Hình vẽ). Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn? Giải thích.



Lời giải

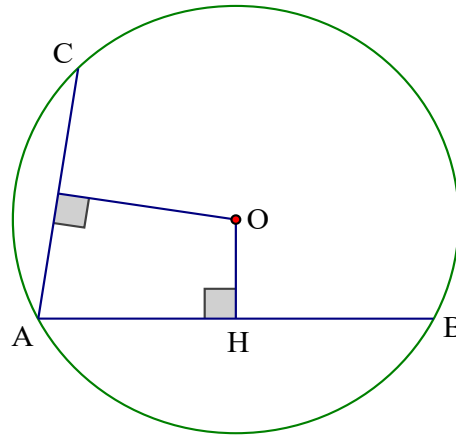
Gọi (O; R) là đường tròn có bán kính $R = 20$ cm, suy ra đường kính 40 cm.

Ta có $EF = 40$ cm $= 2 \cdot 20$ cm $= 2R$.

Do đó, trong ba dây AB, CD và EF thì có dây EF đi qua tâm của đường tròn.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính 3cm và hai dây AB và AC. Cho biết $AB = 5$ cm $AC = 2$ cm, hãy tính khoảng cách từ O đến dây AB và dây AC

Lời giải



Tính được: $OH = \frac{\sqrt{11}}{2}(cm)$; $OK = 2\sqrt{2}(cm)$

AB . Gọi I là trung điểm của AB Tia OI cắt cung AB tại M

b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua O , giả sử $MA = 5cm; AB = 6cm$. Tính bán kính R

$$\cdot \Delta OIA \left(\hat{I} = 90^\circ \right) \Rightarrow OI^2 = OA^2 - IA^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow OI = 4cm \Rightarrow IM = 1cm$$

$$- \Delta AIM (\hat{I} = 90^\circ) \Rightarrow AM^2 = AI^2 + IM^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

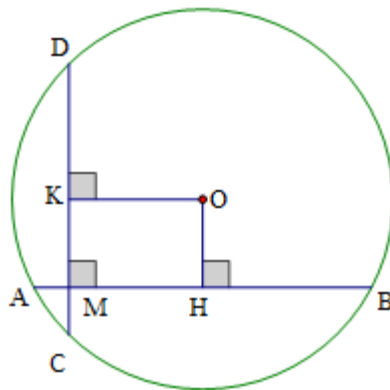
b) Gọi E là trung điểm của dây AN

Ta có: $OE \perp NA$; $NE = EA = 2,5cm$

$$- \text{Xét } \Delta NEO \text{ đồng dạng với } \Delta NIA (gg) \Rightarrow \frac{NE}{NI} = \frac{ON}{NA} \Rightarrow ON = \frac{NA \cdot NE}{NI} = \frac{2,5 \cdot 5}{4} = 3,125 (cm).$$

Bài 5. Cho đường tròn tâm O , hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M . Biết $AB = 18cm, CD = 14cm, MC = 4cm$. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD

Lời giải



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của O trên AB và CD

$$\text{Ta có: } \begin{cases} OH \perp AB \Rightarrow HA = HB = 9cm \\ OK \perp CD \Rightarrow KD = KC = 7cm \end{cases}$$

$$\text{Mà: } KC = KM + MC \Rightarrow KM = KC - MC = 7 - 4 = 3cm \Rightarrow OH = MK = 3cm$$

$$\text{Xét } \Delta OHB (\hat{H} = 90^\circ) \Rightarrow OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow OB = OD = 3\sqrt{10} (cm)$$

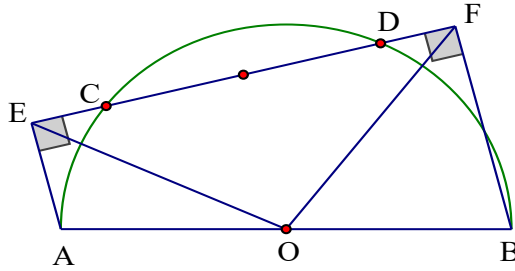
$$\text{Xét } \Delta OKD (\hat{K} = 90^\circ) \Rightarrow OD^2 = OK^2 + DK^2 \Rightarrow OK = \sqrt{41} (cm)$$

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB và một dây cung CD . Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F . Chứng minh:

a) $CE = DF$

b) E và F đều ở ngoài (O)

Lời giải



a) Gọi I là Trung điểm $CD \Rightarrow CI = ID$

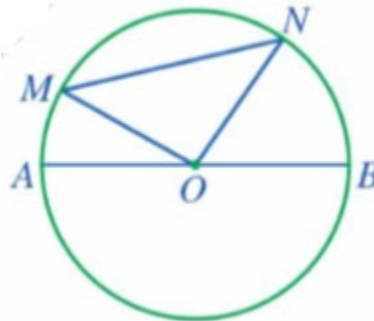
Xét hình thang $AEFB$, I là trung điểm $EF \Rightarrow IE = IF \Rightarrow CE = DF$

b) Ta có $\widehat{EAB}$ và $\widehat{FBA}$ bù nhau nên có một góc tù và một góc nhọn

Giả sử $\widehat{EAB} > 90^\circ \Rightarrow \Delta EAO$ có $OE > OA = R \Rightarrow E$ ở ngoài đường tròn mà $OE = OF$

Nên F cũng ở ngoài đường tròn.

Bài 7. Quan sát hình vẽ bên dưới.



a) So sánh MN và $OM + ON$.

b) So sánh MN và AB .

Lời giải

a) Xét ΔOMN ta có $MN < OM + ON$ (1) (Bất đẳng thức tam giác).

b) Vì A, M, N, B cùng thuộc đường tròn (O) nên $OA = OB = OM = ON$.

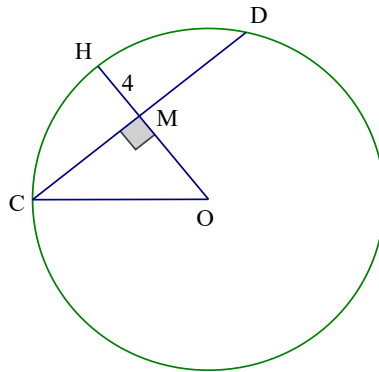
Ta có: $OM + ON = OA + OB$.

Lại có $AB = OA + OB$, do đó $OM + ON < AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN < AB$.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và dây CD . Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M , cắt (O) tại H . Tính bán kính R của (O) biết: $CD = 16\text{cm}$, $MH = 4\text{cm}$

Lời giải



Đặt $OH = x(\text{cm})$.

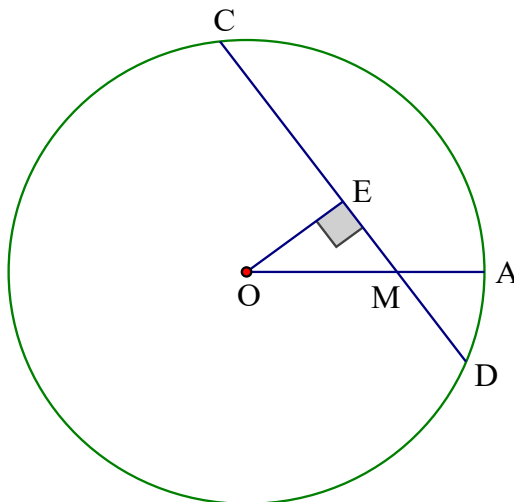
Ta có $OM = (x - 4)(\text{cm})$

Áp dụng định lý Pythagore ta được: $x = 10(\text{cm})$

Bài 9. Cho đường tròn (O) bán kính $OA = 11\text{cm}$. Điểm M thuộc bán kính AO và cách O khoảng 7cm .

Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm . Tính độ dài các đoạn thẳng MC và MD

Lời giải



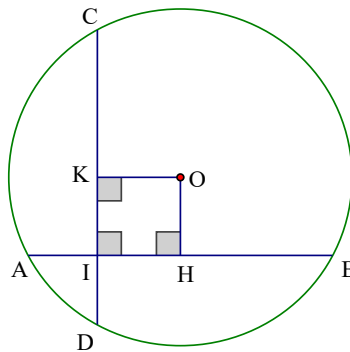
Kẻ $OE \perp CD, E \in CD$. Ta có $OC = 11cm, CE = 9cm \Rightarrow OE = 2\sqrt{10}cm$

$OM = 7cm \Rightarrow ME = 43cm \Rightarrow MC = 6cm, MD = 12cm$

Hoặc: $MD = 6cm, MC = 12cm$

Bài 10. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I . Giả sử $IA = 2cm, IB = 4cm$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây

Lời giải



Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, CD

Ta có: $OH = OK = 1(cm)$

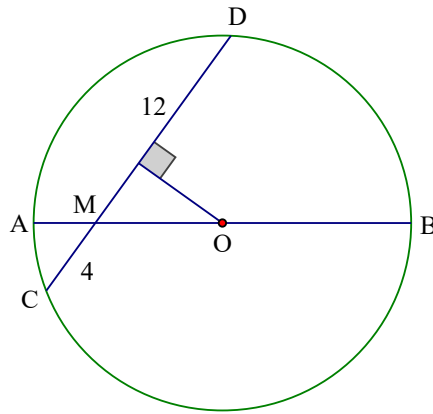
Bài 11. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Dây CD cắt AB tại M , biết $MC = 4cm, MD = 12cm$.

$\widehat{BMD} = 30^\circ$. Hãy tính :

a) Khoảng cách từ O đến CD

b) Bán kính của (O)

Lời giải



a. Gọi OH là khoảng cách từ O đến $CD \Rightarrow OH \perp CD \Rightarrow CH = HD = 8 \Rightarrow MH = 4cm$

$$\text{Xét } \triangle MHO (\widehat{H} = 90^\circ), \tan 30^\circ = \frac{OH}{MH} \Rightarrow OH = \frac{4\sqrt{3}}{3} (cm)$$

b. Bán kính của đường tròn (O) chính là đoạn OD

Ta đi tính độ dài đoạn thẳng OD dựa vào định lý pytago.

$$\text{Xét } \triangle OHD (\widehat{H} = 90^\circ) \Rightarrow OD^2 = OH^2 + HD^2 (\text{pytago}) \Leftrightarrow OD^2 = 8^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow OD = \frac{4\sqrt{39}}{3} (cm)$$

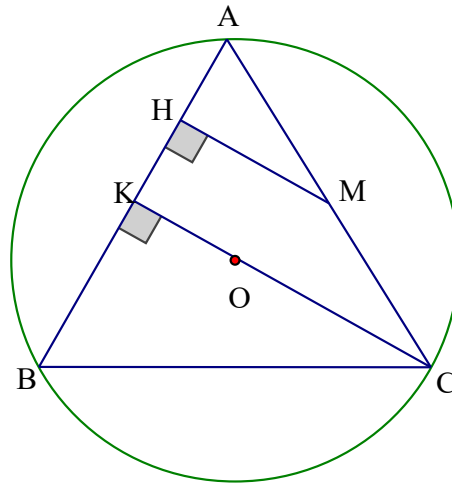
Bài 12. Cho đường tròn (O) có các dây $AB = 24cm, AC = 20cm, \widehat{BAC} < 90^\circ$ và O nằm trong góc BAC .

Gọi M là trung điểm của AC . Khoảng cách từ điểm M đến AB bằng $8cm$

a) Chứng minh tam giác ABC cân

b) Tính bán kính của (O)

Lời giải



a) Vẽ $MH \perp AB = H; CK \perp AB = K \Rightarrow MH$ là đường trung bình của

$$\Delta CAK \Rightarrow AM = 10cm; AH = 6cm \Rightarrow AK = 12cm \Rightarrow AK = \frac{1}{2} AB$$

Từ đó chứng minh được ΔABC cân tại C

b) Ta có $CK = 2MH = 16cm$

$$\text{Đặt } OC = x \Rightarrow OK = 16 - x \Rightarrow CO = 12,5cm$$

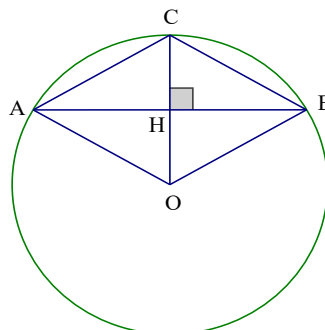
Bài 13. Cho đường tròn tâm $(O; R)$, A và B di động trên đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Vẽ $OH \perp AB$

a) Chứng minh H là trung điểm của AB

b) Tính OH, AB và S_{OAB} theo R

c) Tia OH cắt đường tròn $(O; R)$ tại C . Tứ giác $OABC$ là hình gì? Vì sao

Lời giải



a) Ta có AB là dây cung của đường tròn (O) ; $OH \perp AB \Rightarrow H$ là trung điểm của đoạn thẳng AB

b) $\triangle OAB$ cân tại O ($OA = OB = R$) có: OH là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác

$$\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{HOB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 60^\circ$$

$\triangle HAO$ vuông tại H , có $\widehat{AOH} = 60^\circ$ nên là nửa tam giác đều

$$\Rightarrow OH = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} R; AH = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{\sqrt{3}}{2} R; AB = 2AH = \sqrt{3}R$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} R \cdot \sqrt{3}R = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \text{ (đvdt)}$$

$$\text{c) } HC = OC - OH = R - \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} R$$

$\diamond OACB$ có $HA = HB$; $HO = HC = \frac{1}{2} R \Rightarrow \diamond OACB$ là hình bình hành

Mà: $OA = OB (= R) \Rightarrow \diamond OACB$ là hình thoi.

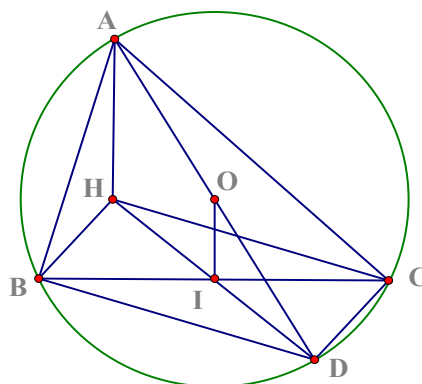
Bài 14. Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD

a) Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành

b) Kẻ đường kính OI vuông góc BC tại I . Chứng minh I, H, D thẳng hàng

c) Chứng minh $AH = 2OI$

Lời giải



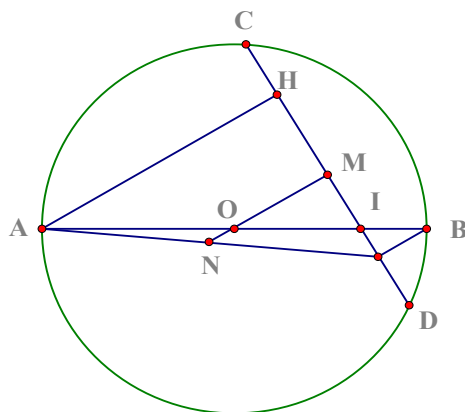
a. Ta có : $\begin{cases} BD // CH \\ BH // CD \end{cases} \Rightarrow BHCD \text{ là hình bình hành}$

b. I là trung điểm của $BC \Rightarrow I$ là trung điểm của HD

c. Ta có OI là đường trung bình $\triangle AHD \Rightarrow AH = 2OI$

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD cắt AB tại I . Gọi H, K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD . Chứng minh rằng: $CH = DK$

Lời giải



Ta kẻ OM vuông góc với CD tại $M \Rightarrow MC = MD$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

Gọi N là giao điểm của OM và AK

Xét $\triangle AKB \Rightarrow NA = NK$

Xét $\triangle AHK \Rightarrow MH = MK \Rightarrow MC - MH = MD - MH \Leftrightarrow CH = DK$

Bài 16. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H . Lấy I là trung điểm của BC

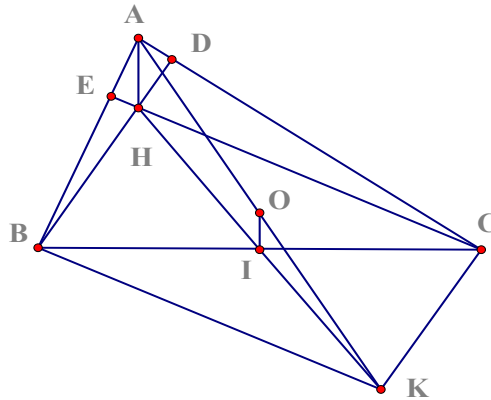
a) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I . Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C

c) Chứng minh: $OI // CH$

d) Chứng minh rằng: $BE.BA + CD.CA = BC^2$

Lời giải



a. Xét $BHCK$ có: $\begin{cases} HI = IK(gt) \\ BI = IC(gt) \end{cases} \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

b. Ta có $\triangle AKB, \triangle ACK$ vuông tại B và C nên bốn điểm A, B, K, C nằm trên đường tròn đường kính AC tâm O .

c. Xét $\triangle AHB$ có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI \parallel AH$

d. Gọi M là giao điểm của AH và BC

Ta có

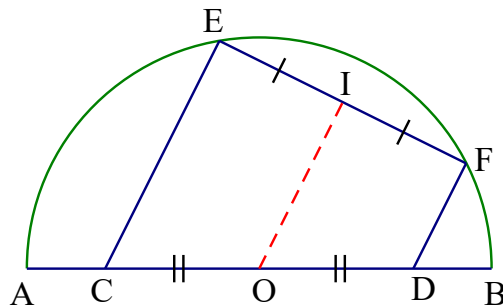
$$\triangle BMA \text{ đồng dạng } \triangle BEC(gg) \Rightarrow BE.BA = BM.BC$$

$$\triangle CMA \text{ đồng dạng } \triangle CDB(gg) \Rightarrow CA.CD = CM.BC$$

$$\Rightarrow BE.BA + CD.CA = (BM + CM).BC = BC^2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 17. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đoạn thẳng OA lấy điểm C và trên đoạn thẳng OB lấy điểm D sao cho $OC = OD$. Từ C và D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở E và F . Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh rằng: $S_{CEF} + S_{DEF} = EF.OI$

Lời giải



Vì I là trung điểm của EF nên $OI \perp EF$

Ta có: $CE \parallel EF$ và O là trung điểm của CD nên $\diamond CEFD$ là hình thang

Lại có OI là đường trung bình của hình thang $\Rightarrow OI \parallel CE \parallel DF$

Mà $OI \perp EF \Rightarrow CE \perp EF; DF \perp EF \Rightarrow OI = \frac{1}{2}(CE + DF)$

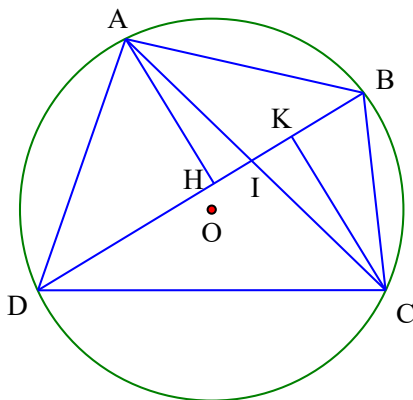
$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF$$

$$S_{DEF} = \frac{1}{2} DE \cdot EF$$

$$\Rightarrow S_{CEF} + S_{DEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF + \frac{1}{2} DE \cdot EF = \frac{1}{2} EF (CE + DF) = EF \cdot OI$$

Bài 18. Cho đường tròn $(O; R)$. Các điểm A, B, C, D thuộc $(O; R)$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

Lời giải



Vẽ $AH \perp BD (H \in BD), CK \perp BD (K \in BD)$

Gọi I là giao điểm của AC, BD

Ta có: $AH \perp HI \Rightarrow AH \leq AI; CK \perp KI \Rightarrow CK \leq CI \Rightarrow AH + CK \leq AI + CI = AC$

Mà $AC, BD \leq 2R$ (AC, BD là các dây cung của đường tròn $(O; R)$)

Ta có: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD.AH + \frac{1}{2}BD.CK = \frac{1}{2}BD.(AH + CK) \leq \frac{1}{2}BD.AC$

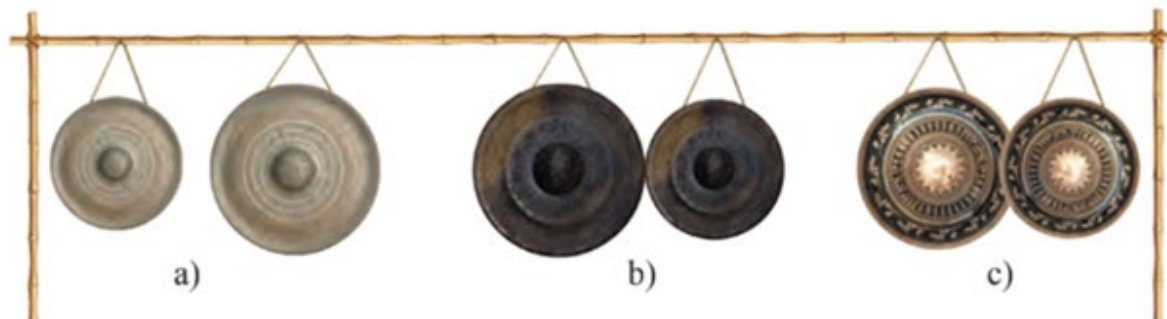
Do vậy $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}2R.2R = 2R^2$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} BD = 2R \\ AC = 2R \\ H \equiv I \equiv K \end{cases} \Leftrightarrow AC, BD$ là hai đường kính vuông góc nhau

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$ là $2R^2$.

Dạng 3:

Bài 1. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên trong hình vẽ bên dưới.



Lời giải

Hình a): Hai đường tròn ở ngoài nhau.

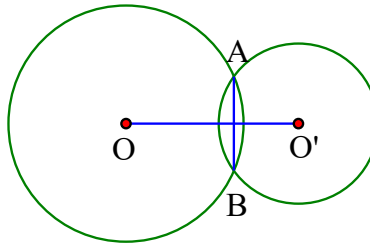
Hình b): Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Hình c): Hai đường tròn cắt nhau.

d) Một cặp đường tròn không giao nhau: Đường tròn màu vàng và đường tròn màu tím (quả lắc).

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A, B . Chứng minh OO' là đường trung trực của AB .

Lời giải



Ta có:

$$OA = OB = R$$

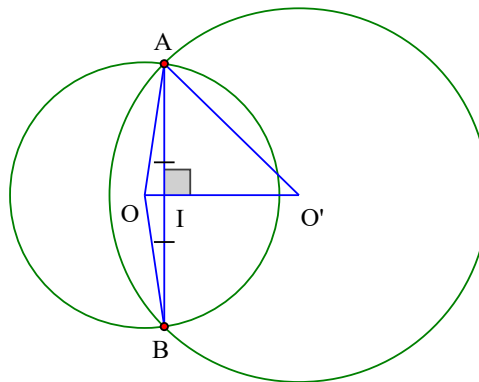
$$O'A = O'B = R'$$

Do đó O, O' thuộc đường trung trực của AB

Vậy OO' là đường trung trực của dây AB .

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O; 13cm)$ và $(O'; 15cm)$ cắt nhau tại A, B sao cho $AB = 24(cm)$. Tính độ dài $O'O$.

Lời giải



$$\text{Gọi } I = OO' \cap AB \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AIO} = \widehat{AIO'} = 90^\circ \\ IA = IB = \frac{1}{2}AB = 12(cm) \end{cases}$$

Từ $\triangle AIO$ vuông tại I , ta có: $OI = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5(cm)$

Từ $\triangle AIO'$ vuông tại I , ta có: $O'I = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9(cm)$

Do đó $OO' = 5 + 9 = 14(cm)$.

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O; 11,5\text{cm})$ và $(O'; 6,5\text{cm})$. Biết rằng $OO' = 4\text{cm}$. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Lời giải

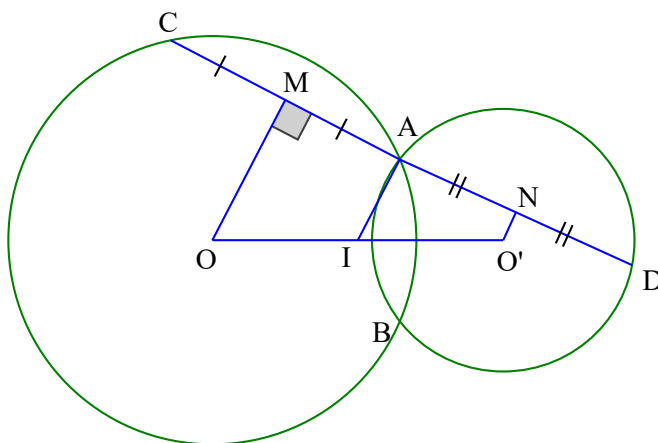
Ta thấy bán kính của hai đường tròn (O) và (O') lần lượt là $R = 11,5\text{cm}$ và $r = 6,5\text{cm}$.

Do $R - r = 5\text{cm}$ nên $OO' < R - r$.

Vậy đường tròn $(O; 11,5\text{cm})$ đựng đường tròn $(O'; 6,5\text{cm})$.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B . Gọi I là trung điểm của OO' . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt (O) tại C và cắt (O') tại D . So sánh AC và AD .

Lời giải



$$\text{Vẽ } OM \perp AC = M \Rightarrow MA = MC = \frac{1}{2} AC (1)$$

$$O'N \perp AD = N \Rightarrow NA = ND = \frac{1}{2} AD (2)$$

Hình thang $OO'NM$ có: $IO = IO'$ và $IA \parallel OM \parallel O'N \Rightarrow MA = NA$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow AC = AD$$

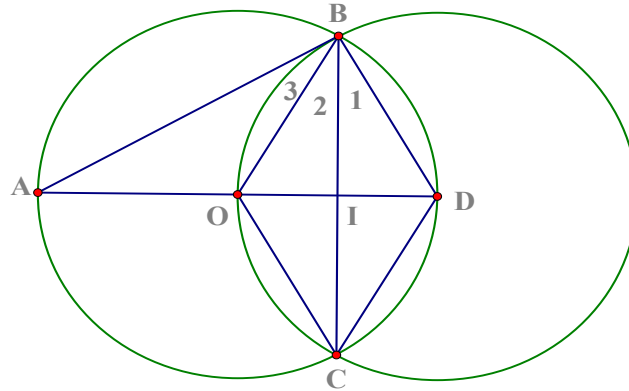
Bài 6. Cho đường tròn (O) , đường kính $AD = R$. Vẽ cung tròn tâm D bán kính R cắt (O) ở B và C

a) Tứ giác $OBDC$ là gì? vì sao?

b) Tính số đo các góc $\widehat{CBD}$; $\widehat{CBO}$; $\widehat{OBA}$

c) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều

Lời giải



a) Xét $\diamond OBDC$, có: $OB = OC = DC = R \Rightarrow \diamond OBDC$ là hình thoi

b) Xét $\triangle OBD$, có: $OB = OD = BD = R \Rightarrow \triangle OBD$ là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{OBD} = 60^\circ = \widehat{ODB} \Rightarrow BC$ là tia phân giác $\widehat{OBD}$

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2} \widehat{OBD} = 30^\circ$$

Ta có $B \in (O) \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B_3} = 30^\circ$

c) $OBDC$ là hình thoi $\Rightarrow OD \perp BC \equiv I; IB = IC$

Xét $\triangle ABC$, có AI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên $\triangle ABC$ cân tại A

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều.

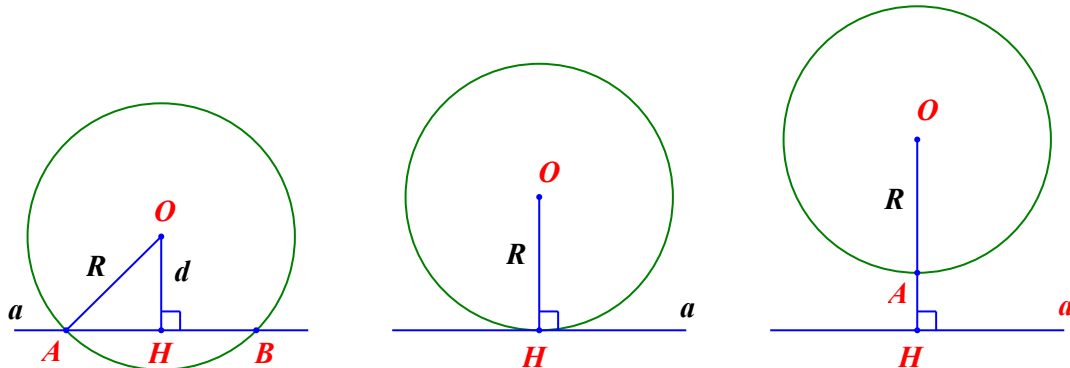
BÀI 2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn :

- Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là cắt nhau nếu chúng có đúng hai điểm chung
- Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là tiếp xúc nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung H . Điểm chung ấy gọi là tiếp điểm.
- Khi đó, đường thẳng a còn gọi là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H .
- Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là không giao nhau nếu chúng không có điểm chung,

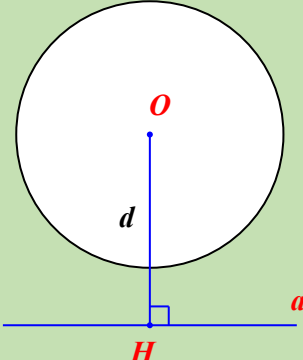
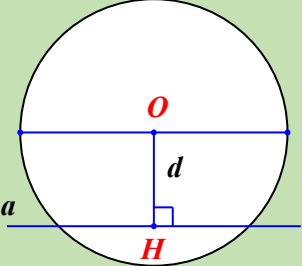
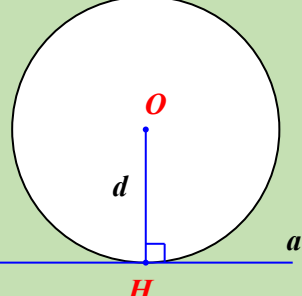


- **Nhận xét:** Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ cắt nhau khi $d < R$, tiếp xúc với nhau khi $d = R$ và không giao nhau khi $d > R$

Ghi chú : $d = OH$ là khoảng cách từ tâm đường tròn (O, R) đến đường thẳng a

B. CÁC DẠNG TỰ LUẬN**Dạng 1. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn**

Phương pháp giải:

<i>Đường thẳng và đường tròn không giao nhau :</i>	<i>Đường thẳng và đường tròn cắt nhau</i>	<i>Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc :</i>
- Số điểm chung : 0 - Hệ thức : $d > R$ 	- Số điểm chung : 2 - Hệ thức : $d < R$ + Trường hợp này đường thẳng a gọi là cát tuyến của đường tròn (O, R) 	- Số điểm chung : 1 - Hệ thức : $d = R$ + Trường hợp này đường thẳng a gọi là tiếp tuyến của đường tròn (O, R) và H gọi là tiếp điểm 

Bài 1:

Điền thông tin phù hợp vào chỗ trống.

Cho đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$, gọi d là khoảng cách từ O đến a . Khi đó,

Vị trí tương đối	Dấu hiệu nhận biết
Đường thẳng a đường tròn (O)	$d < R$
Đường thẳng a tiếp xúc đường tròn (O)	$d \dots \dots R$
Đường thẳng a và đường tròn (O)	$d > R$

Bài 2: Cho đường thẳng a và điểm O cách a một khoảng bằng 4cm. Không vẽ hình, hãy xét vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn (O) .a) $(O; 3\text{cm})$ b) $(O; 5\text{cm})$ c) $(O; 4\text{cm})$ **Bài 3:** Cho đường thẳng b và một điểm I cách b một khoảng $d = 6\text{cm}$. Xác định vị trí tương đối của b với các đường tròn sau:a) Đường tròn $(I; 3\text{cm})$ b) Đường tròn $(I; 6\text{cm})$ c) Đường tròn $(I; 8\text{cm})$

Bài 4: Cho đường tròn $(J; 5\text{cm})$ và đường thẳng c . Gọi K là chân đường vuông góc vẽ từ J xuống c , d là độ dài của đoạn thẳng JK . Xác định vị trí tương đối của đường thẳng c và đường tròn $(J; 5\text{cm})$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $d = 4\text{cm}$

b) $d = 5\text{cm}$

c) $d = 6\text{cm}$

Bài 5: Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(4; 3)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn tâm A , bán kính $R = 3$ với các hệ trục tọa độ.

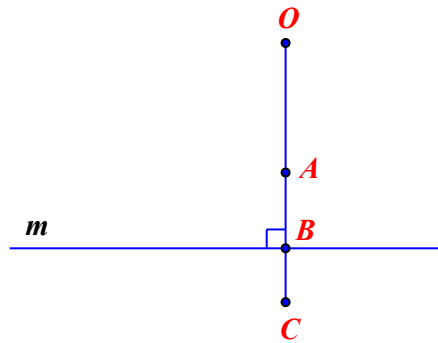
Bài 6: Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 8cm . Vẽ đường tròn tâm O , bán kính 10cm

a) Giải thích vì sao a và (O) cắt nhau

b) Gọi M và N là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn $(O; 10\text{cm})$. Tính độ dài của dây MN .

Bài 7: Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH . Đường thẳng BC có tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$ hay không? Vì sao?

Bài 8: Cho bốn điểm O, B, C, D thẳng hàng như trong hình. Giả sử đường thẳng m đi qua B và vuông góc với đường thẳng thẳng OC . Nêu vị trí tương đối của đường thẳng m và ba đường tròn cùng tâm O lần lượt đi qua các điểm A, B, C .



Bài 9: Cho điểm A nằm trong đường tròn (O) . Chứng minh rằng mọi đường thẳng d đi qua A đều cắt (O) ở hai điểm phân biệt.

Bài 10: Chứng minh rằng một đường thẳng và một đường tròn không thể có quá hai điểm chung.

Bài 11: Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 4\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$ và $CD = 9\text{cm}$. Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính BC .

Bài 12: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có BD là đường phân giác. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA

Bài 13: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$

Vẽ đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.

Bài 14: Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$, $AD = 2cm$, $BC = 6m$, $CD = 8cm$. Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD

Do đó, đường thẳng c cắt đường tròn tại hai điểm.

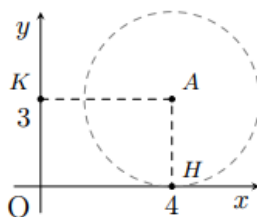
b) $d = 5\text{cm}$; Ta có $d = R = 5\text{cm}$, nên JK tiếp xúc với đường tròn tại điểm K .

c) $d = 6\text{cm}$; Ta có $d > R = 5\text{cm}$, nên JK nằm ngoài đường tròn ($J; 5\text{cm}$)

Do đó, đường thẳng c cắt đường tròn không cắt nhau.

Bài 5: Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(4;3)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn tâm A , bán kính $R = 3$ với các trục tọa độ.

Lời giải



Khoảng cách từ A đến trục Ox là $d = AH = OK = 3$

Khoảng cách từ A đến trục Oy là $d' = AK = OH = 4$

Do đó đường tròn $(A;3)$ tiếp xúc với trục Ox , vì $d = R = 3$

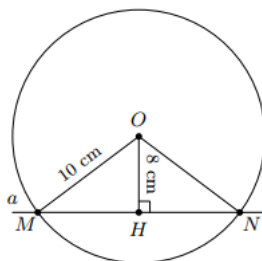
Đường tròn $(A;3)$ không cắt trục Oy vì $d' = 4 > 3 = R$

Bài 6: Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 8cm . Vẽ đường tròn tâm O , bán kính 10cm

a) Giải thích vì sao a và (O) cắt nhau

b) Gọi M và N là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn $(O;10\text{cm})$. Tính độ dài của dây MN .

Lời giải



a) Vẽ OH vuông góc với a tại H . Ta có $OH = 8\text{cm}$, $R = 10\text{cm}$ suy ra $OH < R$

Suy ra a cắt $(O;10\text{cm})$ tại hai điểm.

b) Do M, N thuộc (O) nên ta có $OM = ON = R$ suy ra $\triangle AMN$ cân tại O

Có OH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến. Do đó, H là trung điểm của dây MN .

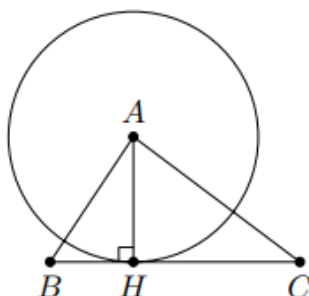
Trong tam giác OMH vuông tại H , ta có:

$$MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{cm})$$

Suy ra $MN = 2MH = 2 \cdot 6 = 12(\text{cm})$

Bài 7: Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH . Đường thẳng BC có tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$ hay không? Vì sao?

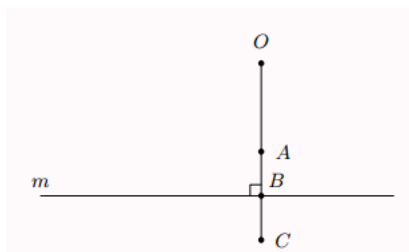
Lời giải



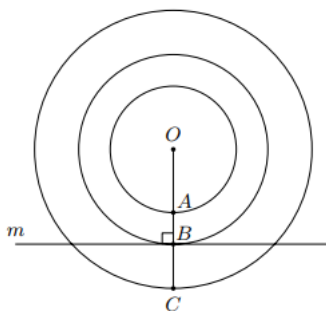
Vì $AH \perp BC$ và H thuộc đường thẳng BC nên khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC bằng AH . Do đó, khoảng cách từ tâm A của đường tròn $(A; AH)$ đến đường thẳng BC bằng bán kính AH của đường tròn.

Vậy đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$.

Bài 8: Cho bốn điểm O, B, C, D thẳng hàng như trong hình. Giả sử đường thẳng m đi qua B và vuông góc với đường thẳng thẳng OC . Nêu vị trí tương đối của đường thẳng m và ba đường tròn cùng tâm O lần lượt đi qua các điểm A, B, C .



Lời giải



Đặt $OB = d$. Khi đó, d là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng m

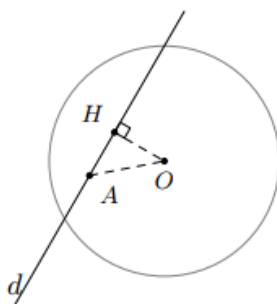
+ Vì $OA < OB$ và $OB = d$ nên $OA < d$. Vậy đường thẳng m và đường tròn $(O; OA)$ không giao nhau

+ Vì $OB = d$ nên đường thẳng m và đường tròn $(O; OB)$ tiếp xúc nhau.

+ Vì $OC > OB$ và $OB = d$ nên $OC > d$. Vậy đường thẳng m và đường tròn $(O; OC)$ cắt nhau

Bài 9: Cho điểm A nằm trong đường tròn (O) . Chứng minh rằng mọi đường thẳng d đi qua A đều cắt (O) ở hai điểm phân biệt.

Lời giải



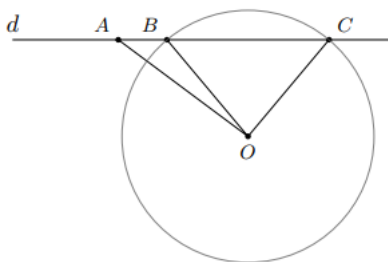
Vẽ $OH \perp d$ tại $H \Rightarrow OH \leq OA$ (quan hệ đường xiên và đường vuông góc)

Vì A nằm trong (O) nên $OA < R$

Suy ra $OH < R \Rightarrow$ đường thẳng d luôn cắt (O) tại hai điểm phân biệt.

Bài 10: Chứng minh rằng một đường thẳng và một đường tròn không thể có quá hai điểm chung.

Lời giải



Giả sử đường thẳng d và đường tròn (O) có ba điểm chung A, B, C theo thứ tự như hình vẽ bên.

Vì A, B, C thuộc (O) nên $OA = OB = OC$. Do đó tam giác OAB cân tại O

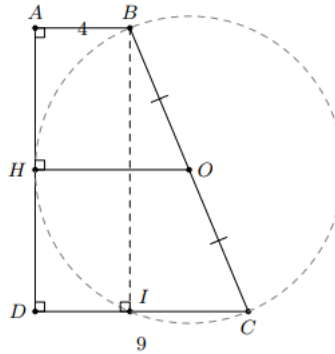
$$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} < 90^\circ$$

Suy ra $\widehat{OBA} + \widehat{OBC} < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, điều này vô lí vì A, B, C thẳng hàng theo thứ tự ấy thì $\widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 180^\circ$

Vậy điều giả sử là sai, do đó một đường thẳng và một đường tròn có không quá hai điểm chung.

Bài 11: Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 4\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$ và $CD = 9\text{cm}$. Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính BC .

Lời giải



Gọi O là trung điểm của BC

Vẽ $BI \perp CD$ tại $I \Rightarrow AD = BI$, vẽ $OH \perp AD$ tại H

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác BIC có:

$$BI = \sqrt{BC^2 - IC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$\Rightarrow AD = 12\text{cm}$$

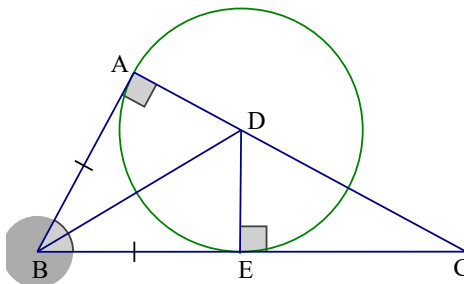
Hình thang $ABCD$ có OH là đường trung bình nên:

$$OH = \frac{AB + CD}{2} = \frac{4 + 9}{2} = 6,5 = \frac{BC}{2} = R$$

Suy ra đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với AD .

Bài 12: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có BD là đường phân giác. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA

Lời giải



Vẽ $DE \perp BC$ ($E \in BC$)

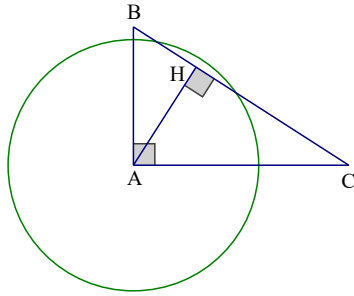
D thuộc tia phân giác $\widehat{ABC}$; $DA \perp AB$, $DE \perp BC \Rightarrow DE = DA$

Do đó đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA tiếp xúc nhau.

Bài 13: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$

Vẽ đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.

Lời giải



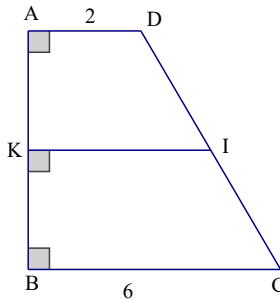
Vẽ AH là đường cao của tam giác vuông ABC

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \Rightarrow AH = 2,4cm < 2,8(d < r)$$

Do đó đường thẳng BC và đường tròn $(A; 2,8cm)$ cắt nhau

Bài 14: Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $AD = 2cm$, $BC = 6cm$, $CD = 8cm$. Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD

Lời giải



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của CD và AB

$$\text{Ta có: } IK \text{ là đường trung bình của hình thang } ABCD \Rightarrow IK = \frac{AD + BC}{2} = 4(cm)$$

$$\text{Lại có: } AD \parallel IK, AD \perp AB \Rightarrow IK \perp AB; IK = \frac{CD}{2} (= 4cm), IK \perp AB$$

Do đó AB tiếp xúc với đường tròn tâm I đường kính CD .

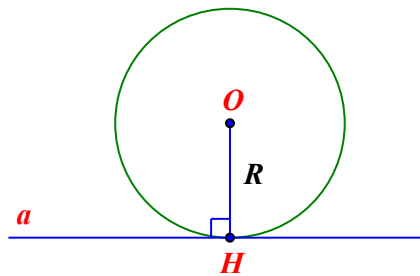
BÀI 3. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

I. Định nghĩa, tính chất của tiếp tuyến

a) **Định nghĩa:** Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là tiếp xúc nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung là H . Điểm chung ấy gọi là tiếp điểm. Khi đó, đường thẳng a còn gọi là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H



Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O) tại H . Điểm H là tiếp điểm.

b) **Tính chất:** Nếu đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O) tại H thì $OH \perp a$

c) **Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn:**

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

II. Hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn.

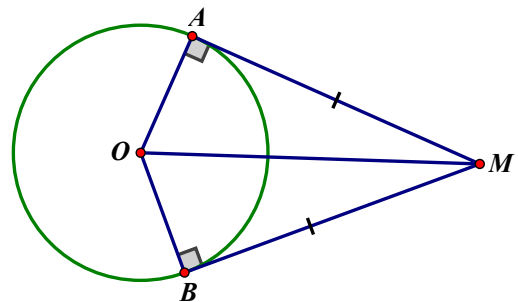
Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm M thì:

- Điểm M các đều hai tiếp điểm;
- MO là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;
- OM là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.

Chứng hạn: Xét đường tròn (O) có MA, MB là

hai tiếp tuyến cắt nhau tại M thì ta có:

- ✓ $MA = MB$
- ✓ OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$
- ✓ MO là tia phân giác của $\widehat{AMB}$



B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Cho $(O; R)$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại tiếp điểm A khi:

- A. $d \perp OA$ tại A và $A \in (O)$ B. $d \perp OA$
 C. $A \in (O)$ D. $d \parallel OA$

Câu 2: “ Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và ...thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn”. Cụm từ thích hợp điền vào chỗ trống là

- A. song song với bán kính đi qua tiếp điểm đó
 B. vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm đó
 C. song song với bán kính đường tròn
 D. vuông góc với bán kính bất kì

Câu 3: Cho $(O; R)$, AB, AC theo thứ tự là các tiếp tuyến tại B , tại C của đường tròn (O) , khẳng định nào sau đây là đúng:

- A. $AB \neq AC$ B. $AB = AC$
 C. AO là tia phân giác của $\widehat{BOC}$ D. OA là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Câu 4: Cho $(O; R)$, AB, AC theo thứ tự là các tiếp tuyến tại B , tại C của đường tròn (O) , điền vào ô trống để được các khẳng định đúng:

- A. $AB = \dots$ B. $\dots = \widehat{OAC}$
 C. $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} (= \dots)$ D. $\widehat{BOA} = \dots$

Câu 5: Cho hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm. Chọn khẳng định **sai**

- A. Khoảng cách từ điểm đó đến hai tiếp tuyến bằng nhau
 B. Tia nối từ điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính
 C. Tia nối từ tâm tới điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính
 D. Tia nối từ điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi tiếp tuyến

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 6: Cho tam giác ABC đường cao AH . Đường thẳng nào là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$

- A. AB B. AC C. AH D. BC

Câu 7: Cho tam giác MNP có $MN = 5cm, NP = 12cm, MP = 13cm$. Vẽ đường tròn (M, MN) . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. NP là tiếp tuyến của (M, MN) B. MP là tiếp tuyến của (M, MN)
 C. $\triangle MNP$ vuông tại M D. $\triangle MNP$ vuông tại P

Câu 8: Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A . Biết $OB = 3cm, OA = 5cm$. Vẽ đường kính CD của (O) . Tính độ dài đoạn BD

- A. $BD = 2cm$ B. $BD = 4cm$ C. $BD = 1,8cm$ D. $BD = 3,6cm$

Câu 9: Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A . Biết $OB = 3cm, OA = 5cm$. Khẳng định **sai** là:

A. $AC = AB = 4cm$

B. $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$

C. $\sin \widehat{OBA} = \frac{4}{5}$

D. $\sin \widehat{COA} = \frac{3}{5}$

Câu 10: Cho hình chữ nhật $ABCD$, H là hình chiếu của A trên BD . M, N lần lượt là trung điểm của BH, CD . Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AM)$?

A. BN

B. MN

C. AB

D. CD

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG THẤP

Câu 11: Cho đường tròn $(O; 2cm)$ bán kính OB . Vẽ dây BC sao cho $\widehat{OBC} = 60^\circ$. Trên tia OB lấy điểm M sao cho $BM = 2cm$. Tính độ dài MC

A. $MC = 2\sqrt{2} cm$

B. $MC = \sqrt{3} cm$

C. $MC = 2\sqrt{3} cm$

D. $MC = 4 cm$

Câu 12: Cho đường tròn (O) , dây MN khác đường kính. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với MN , cắt tiếp tuyến tại M của đường tròn ở điểm P . Cho bán kính của đường tròn bằng $10cm$, $MN = 12cm$. Tính OP

A. $OP = 12,5cm$

B. $OP = 17,5cm$

C. $OP = 25cm$

D. $OP = 15cm$

Câu 13: Cho nửa đường tròn $(O; R)$, AB là đường kính. Dây BC có độ dài R . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 3R$. Chọn câu đúng:

A. AD là tiếp tuyến của đường tròn (O)

B. $\widehat{ACB} = 90^\circ$

C. AD cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt.

D. Cả A, B đều đúng

Câu 14: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía với AB . Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C, D . Khi đó $MC.MD$ bằng:

A. OC^2

B. OM^2

C. OD^2

D. OM

Câu 15: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là trung điểm cạnh AC , tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E . Chọn các khẳng định đúng:

A. $AE \parallel OD$

B. $AE \parallel BC$

C. $AE \parallel OC$

D. $AE \parallel OB$

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 16: Cho nửa đường tròn $(O; R)$, AB là đường kính. Dây BC có độ dài R . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 3R$. Chọn khẳng định đúng.

A. AD là tiếp tuyến của (O)

B. $\widehat{ACB} = 90^\circ$

C. AD cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt

D. Cả A, B đều đúng

Câu 17: Cho góc $\widehat{xOy}$, trên tia Ox lấy điểm P , trên tia Oy lấy điểm Q sao cho chu vi ΔPOQ bằng $2a$ không đổi. Chọn câu đúng:

A. PQ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

C. $PQ = a$

B. PQ không tiếp xúc với một đường tròn cố định nào

D. $PQ = OP$

Câu 18: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là trung điểm cạnh AC , tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E . Tứ giác $ABCE$ là hình gì?

- A. Hình bình hành B. Hình thang C. Hình thoi D. Hình thang cân

Câu 19: Hai tiếp tuyến tại hai điểm B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại A tạo thành $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Số đo của $\widehat{BOC}$ chắn cung nhỏ BC bằng

- A. 30° B. 40° C. 130° D. 310°

Câu 20: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC . Lấy D đối xứng với B qua (O) Gọi E là giao điểm của đoạn thẳng AD với (O) (E không trùng với D). Tỉ số $\frac{DE}{BE}$ bằng:

- A. $\frac{DA}{BA}$ B. $\frac{BA}{DA}$ C. $\frac{BD}{BA}$ D. $\frac{BA}{BD}$

CÁC DẠNG TỰ LUẬN

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn.

Phương pháp giải

- **Bước 1: Chứng minh: đường thẳng a và đường tròn (O) có một điểm chung là H**
- **Bước 2: Chứng minh: $OH \perp a$**

Bài 1. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm). Lấy một điểm C trên đường tròn sao cho $AC = AB$. Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài 2. Cho đường tròn (O) dây BC khác đường kính, qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn ở A . Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài 3. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến tại B với đường tròn (O) , trên tiếp tuyến lấy điểm. Qua A kẻ đường thẳng song song với OP cắt (O) tại Q . Chứng minh PQ là tiếp tuyến của (O) .

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH và BK cắt nhau tại I . Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng của H qua AB và AC . Chứng minh đường tròn đường kính BC tiếp xúc với MN tại A .

Dạng 2. Vận dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau để chứng minh các yếu tố hình học**Phương pháp giải**

Vận dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau để chứng minh các góc bằng nhau các đoạn thẳng bằng nhau. Từ đó chứng minh hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song, tam giác đồng dạng, các đẳng thức hình học...

Bài 6. Cho đường tròn (O) và điểm A bên ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm)

- Chứng minh rằng OA là đường trung trực của đoạn BC
- Vẽ đường kính BD . Chứng minh rằng CD song song với AO

Bài 7. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BD . Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt đường thẳng BC tại E .

- Chứng minh: $\triangle ACO$ đồng dạng với $\triangle DCE$
- Chứng minh: $\triangle ACD$ đồng dạng với $\triangle OCE$
- Gọi giao điểm của CD và OE ; K là giao điểm của AD và OE . Chứng minh: AD vuông góc với OE tại K .

Bài 8. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi C là một điểm nằm trên đường tròn (O) , các tiếp tuyến của đường tròn tại A và C cắt nhau ở D .

- Chứng minh: $DO \parallel CB$ và $AO.HC = AD.HB$
- Kẻ CH vuông góc với AB tại H . Gọi I là giao điểm của CH và BD . Chứng minh: I là trung điểm của CH .

Bài 9. Cho B, C là hai điểm trên đường tròn $(O; R)$. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt đường phân giác $\widehat{BOC}$ tại A . H là giao điểm của AO và BC .

- Chứng minh $\triangle BOH$ vuông và $OB^2 = OH.OA$.
- Chứng minh AC là tiếp tuyến của $(O; R)$.
- CD là đường kính của $(O; R)$. Qua O dựng đường thẳng vuông góc với AD tại E và cắt CB tại F . Chứng minh: FD là tiếp tuyến của đường tròn tâm O .

Bài 10. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By . Qua một điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở C và D . Các đường thẳng AD và BC cắt nhau ở N .

- Chứng minh rằng: $MN \parallel AC$
- Chứng minh rằng: $CD.MN = CM.DB$
- Gọi H là giao điểm của MN và AB . Chứng minh: $MN = HN$

Dạng 3. Chứng minh hệ thức**Phương pháp giải**

- Vận dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông
- Sử dụng các phép biến đổi tương đương để tạo ra mối liên hệ giữa các hệ thức, từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AH^2 + HB^2 + AH^2 + CH^2 = 2AH^2 + HB^2 + CH^2$$

Bài 11. Cho đường tròn $(O; 6\text{cm})$. Điểm M nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 10\text{cm}$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

- Chứng minh: MO là đường trung trực của AB
- Tính độ dài các cạnh của tam giác MAB .

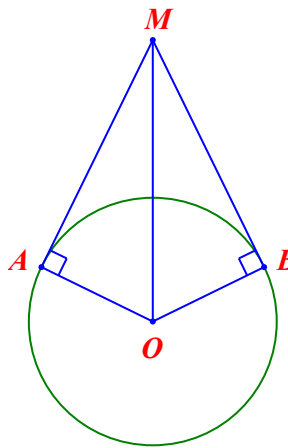
Bài 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ với $OA = R$. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (với B, C là các tiếp điểm). Chứng minh: $\triangle ABC$ là tam giác đều và tính các cạnh của $\triangle ABC$.

Bài 13. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hai đường thẳng c, d qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B . Biết $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Chứng minh: $AB = R$

Bài 14. Một chiếc gương có dạng hình tròn được treo bằng hai sợi dây không dẫn, mỗi sợi dây đều tiếp xúc với gương (Hình a). Biết tổng độ dài hai dây treo là 6 dm và góc giữa hai sợi dây là 60° . Hỏi bán kính của chiếc gương là bao nhiêu decimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



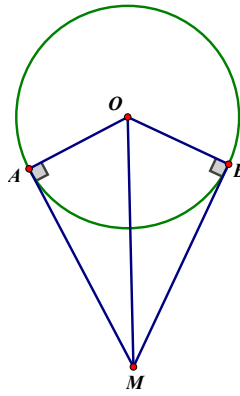
a)



b)

Bài 15. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O , bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M . Cho biết khoảng cách OM là 35 cm.

- Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).
- Tính số đo $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AOB}$ (làm tròn kết quả đến phút)



C. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	B	B	C	B	D	B	D	D	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	C	C	D	B	B	D	A	A	C	C

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Cho $(O; R)$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại tiếp điểm A khi:

- A. $d \perp OA$ tại A và $A \in (O)$ B. $d \perp OA$
 C. $A \in (O)$ D. $d \parallel OA$

Câu 2: “ Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và ...thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn”. Cụm từ thích hợp điền vào chỗ trống là

- A. song song với bán kính đi qua tiếp điểm đó B. vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm đó
 C. song song với bán kính đường tròn D. vuông góc với bán kính bất kì

Câu 3: Cho $(O; R)$, AB, AC theo thứ tự là các tiếp tuyến tại B , tại C của đường tròn (O) , khẳng định nào sau đây là đúng:

- A. $AB \neq AC$ B. $AB = AC$
 C. AO là tia phân giác của $\widehat{BOC}$ D. OA là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Câu 4: Cho $(O; R)$, AB, AC theo thứ tự là các tiếp tuyến tại B , tại C của đường tròn (O) , điền vào ô trống để được các khẳng định đúng:

- A. $AB = AC$ B. $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$
 C. $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} (= 90^\circ)$ D. $\widehat{BOA} = \widehat{COA}$

Câu 5: Cho hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm. Chọn khẳng định sai

- A. Khoảng cách từ điểm đó đến hai tiếp tuyến bằng nhau
 B. Tia nối từ điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính
 C. Tia nối từ tâm tới điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính
 D. Tia nối từ điểm đó tới tâm là tia phân giác của góc tạo bởi tiếp tuyến

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 6: Cho tam giác ABC đường cao AH . Đường thẳng nào là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$

- A. AB B. AC
 C. AH D. BC

Câu 7: Cho tam giác MNP có $MN = 5cm, NP = 12cm, MP = 13cm$. Vẽ đường tròn (M, MN) . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. NP là tiếp tuyến của (M, MN) B. MP là tiếp tuyến của (M, MN)

C. $\triangle MNP$ vuông tại M D. $\triangle MNP$ vuông tại P

Câu 8: Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A . Biết $OB = 3\text{ cm}$, $OA = 5\text{ cm}$. Vẽ đường kính CD của (O) . Tính độ dài đoạn BD

A. $BD = 2\text{ cm}$ B. $BD = 4\text{ cm}$ C. $BD = 1,8\text{ cm}$ D. $BD = 3,6\text{ cm}$

Câu 9: Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A . Biết $OB = 3\text{ cm}$, $OA = 5\text{ cm}$. Khẳng định sai là:

A. $AC = AB = 4\text{ cm}$ B. $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ C. $\sin \widehat{OBA} = \frac{4}{5}$ D. $\sin \widehat{COA} = \frac{3}{5}$

Câu 10: Cho hình chữ nhật $ABCD$, H là hình chiếu của A trên BD . M, N lần lượt là trung điểm của BH, CD . Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AM)$?

A. BN B. MN C. AB D. CD

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG THẤP

Câu 11: Cho đường tròn $(O; 2\text{ cm})$ bán kính OB . Vẽ dây BC sao cho $\widehat{OBC} = 60^\circ$. Trên tia OB lấy điểm M sao cho $BM = 2\text{ cm}$. Tính độ dài MC

A. $MC = 2\sqrt{2}\text{ cm}$ B. $MC = \sqrt{3}\text{ cm}$ C. $MC = 2\sqrt{3}\text{ cm}$ D. $MC = 4\text{ cm}$

Câu 12: Cho đường tròn (O) , dây MN khác đường kính. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với MN , cắt tiếp tuyến tại M của đường tròn ở điểm P . Cho bán kính của đường tròn bằng 10 cm , $MN = 12\text{ cm}$. Tính OP

A. $OP = 12,5\text{ cm}$ B. $OP = 17,5\text{ cm}$ C. $OP = 25\text{ cm}$ D. $OP = 15\text{ cm}$

Câu 13: Cho nửa đường tròn $(O; R)$, AB là đường kính. Dây BC có độ dài R . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 3R$. Chọn câu đúng:

A. AD là tiếp tuyến của đường tròn (O) B. $\widehat{ACB} = 90^\circ$ C. AD cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt.

D. Cả A, B đều đúng

Câu 14: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía với AB . Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C, D . Khi đó $MC \cdot MD$ bằng:

A. OC^2 B. OM^2 C. OD^2 D. OM

Câu 15: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là trung điểm cạnh AC , tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E . Chọn các khẳng định đúng:

A. $AE \parallel OD$ B. $AE \parallel BC$ C. $AE \parallel OC$ D. $AE \parallel OB$

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 16: Cho nửa đường tròn $(O; R)$, AB là đường kính. Dây BC có độ dài R . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 3R$. Chọn khẳng định đúng.

A. AD là tiếp tuyến của (O)

B. $\widehat{ACB} = 90^\circ$

C. AD cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt

D. Cả A, B đều đúng

Câu 17: Cho góc $\widehat{xOy}$, trên tia Ox lấy điểm P , trên tia Oy lấy điểm Q sao cho chu vi $\triangle POQ$ bằng $2a$ không đổi. Chọn câu đúng:

A. PQ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

B. PQ không tiếp xúc với một đường tròn cố định nào

C. $PQ = a$

D. $PQ = OP$

Câu 18: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là trung điểm cạnh AC , tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E . Tứ giác $ABCE$ là hình gì?

A. Hình bình hành

B. Hình thang

C. Hình thoi

D. Hình thang cân

Câu 19: Hai tiếp tuyến tại hai điểm B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại A tạo thành $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Số đo của $\widehat{BOC}$ chắn cung nhỏ BC bằng

A. 30°

B. 40°

C. 130°

D. 310°

Câu 20: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC . Lấy D đối xứng với B qua (O) Gọi E là giao điểm của đoạn thẳng AD với (O) (E không trùng với D). Tỉ số $\frac{DE}{BE}$ bằng:

A. $\frac{DA}{BA}$

B. $\frac{BA}{DA}$

C. $\frac{BD}{BA}$

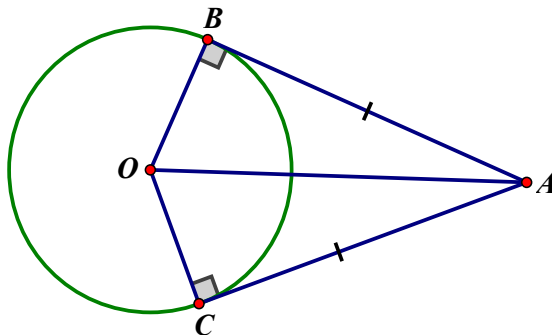
D. $\frac{BA}{BD}$

E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

Bài tập 1. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm). Lấy một điểm C trên đường tròn sao cho $AC = AB$. Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Lời giải



Nối A với O

Xét $\triangle ACO$ và $\triangle ABO$ có:

OA là cạnh chung

$AC = AB$ (gt)

$OB = OC = R$

Do đó: $\triangle ACO = \triangle ABO$ (c.c.c)

Nên $\widehat{ACO} = \widehat{ABO}$ (2 góc tương ứng) (1)

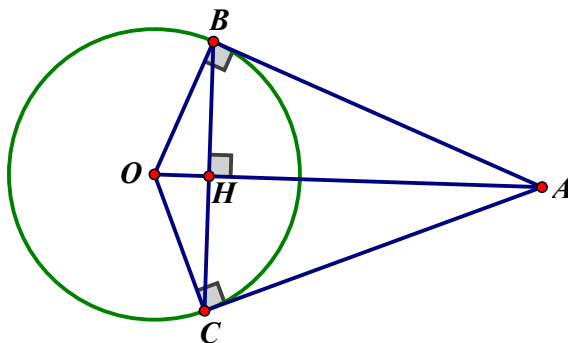
Vì AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B nên $AB \perp OB \Rightarrow \widehat{ABO} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{ACO} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp OC$ tại C

Do đó AC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài tập 2. Cho đường tròn (O) dây BC khác đường kính, qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn ở A . Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Lời giải



Gọi H là giao điểm của OA và BC

Vì AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $OB \perp AB \Rightarrow \widehat{ABO} = 90^\circ$

Vì $OB = OC = R$ nên tam giác OBC cân tại O

Vì $\triangle OBC$ cân tại O có $OA \perp BC$ nên OA là đường cao đồng thời là đường phân giác của tam giác OBC . Do đó: $\widehat{COA} = \widehat{BOA}$

Xét $\triangle ACO$ và $\triangle ABO$ có:

OA là cạnh chung

$\widehat{COA} = \widehat{BOA}$

$OB = OC = R$

Nên $\triangle ACO = \triangle ABO$ (c.g.c)

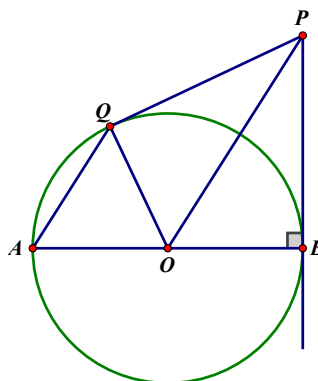
$\Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ (2 góc tương ứng) mà $\widehat{ABO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACO} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp OC$

Nên AC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài tập 3. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến tại B với đường tròn (O) , trên tiếp tuyến lấy điểm. Qua A kẻ đường thẳng song song với OP cắt (O) tại Q . Chứng minh PQ là tiếp tuyến của (O) .

Lời giải



* Vì $OA = OQ = R$ nên $\triangle AQO$ cân tại O

* Ta có: $PQ \parallel OP$ (gt)

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{QAO} = \widehat{POB} \text{ (d/v)} \\ \widehat{AQO} = \widehat{QOP} \text{ (slt)} \end{cases}$$

Mà $\widehat{QAO} = \widehat{AQO}$ (do $\triangle AQO$ cân tại O)

Nên $\widehat{QOP} = \widehat{BOP}$

* Xét $\triangle PQO$ và $\triangle PBO$ có:

OP là cạnh chung

$\widehat{QOP} = \widehat{BOP}$ (cmt)

$OQ = OB = R$

Nên $\triangle PQO = \triangle PBO$ (c.g.c) do đó $\widehat{PQO} = \widehat{PBO}$ (2 góc tương ứng)

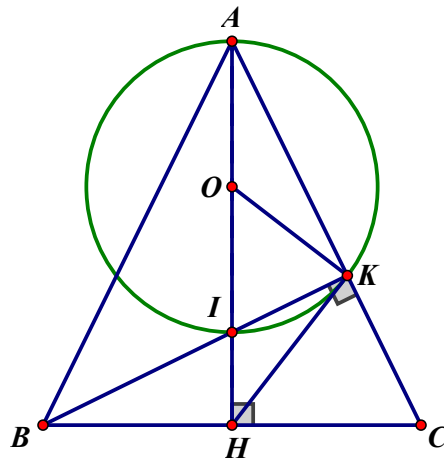
Mà $\widehat{PBO} = 90^\circ$ (do PB là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{PQO} = 90^\circ \Rightarrow OQ \perp PQ$

$\Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của (O)

Bài tập 4. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH và BK cắt nhau tại I . Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .

Lời giải



* Gọi O là trung điểm của AI

Vì tam giác AIK vuông tại K nên $OA = OK = OI = \frac{AI}{2}$ (tính chất)

Nên O là tâm đường tròn đường kính AI và $K \in (O)$

* Vì $\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao nên AH đồng thời là đường trung tuyến.

Nên $BH = HC = \frac{BC}{2}$ do đó $\triangle BHK$ cân tại H

$\Rightarrow \widehat{BKH} = \widehat{KBH}$ (tính chất)

* Ta có: $OK = OI$ nên $\triangle IOK$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OIK} = \widehat{OKI}$ (tính chất)

Mà $\widehat{OIK} = \widehat{BIH}$ (đối đỉnh) do đó: $\widehat{BIH} = \widehat{OKI}$

* Vì $\triangle BHI$ vuông tại H nên $\widehat{BIK} + \widehat{IBH} = 90^\circ$

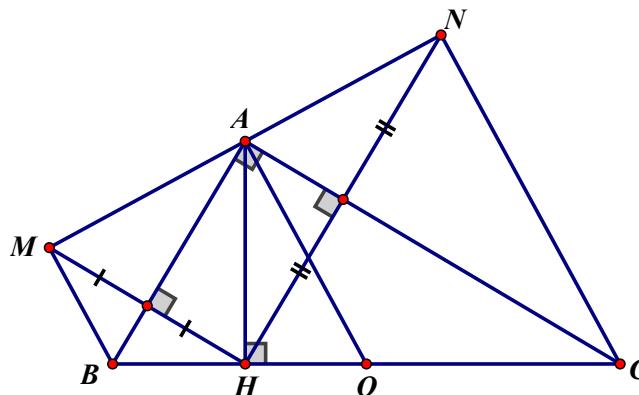
Hay $\widehat{BKH} + \widehat{BIH} = 90^\circ$ mà $\widehat{BIH} = \widehat{OKI}$

Do đó $\widehat{OKI} + \widehat{BKH} = 90^\circ \Rightarrow OI \perp OK$ mà $K \in (O)$

Nên HK là tiếp tuyến của (O) hay HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI

Bài tập 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng của H qua AB và AC . Chứng minh đường tròn đường kính BC tiếp xúc với MN tại A .

Lời giải



* Ta có M đối xứng với H qua AB nên AB là đường trung trực của MH

$\Rightarrow AM = AH$ và $BM = BH$ (tính chất của điểm thuộc đường trung trực)

Do đó $\triangle AMB = \triangle AHB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{HAB}$ và $\widehat{AMB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ (2 góc tương ứng)

* Ta có N đối xứng với H qua AC nên AC là đường trung trực của NH

$\Rightarrow AN = AH$ và $CN = CH$ (tính chất của điểm thuộc đường trung trực)

Do đó $\triangle ANC = \triangle AHC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{NAC} = \widehat{HAC}$ và $\widehat{ANC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ (2 góc tương ứng)

* Ta có: $\widehat{MAN} = \widehat{MAB} + \widehat{BAH} + \widehat{HAC} + \widehat{CAN}$

Mà $\widehat{MAB} = \widehat{HAB}$; $\widehat{NAC} = \widehat{HAC}$ (cmt)

Nên $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAH} + 2\widehat{HAC} = 2\widehat{BAC} = 180^\circ$

Suy ra M, N, A thẳng hàng

* Vì $\widehat{AMB} = 90^\circ$; $\widehat{ANC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BMNC$ là hình thang vuông

Gọi O là trung điểm của BC mà $\triangle ABC$ vuông tại A

Nên $OB = OC = OA = \frac{BC}{2}$. Suy ra A thuộc đường tròn đường kính BC

* Hình thang $BMNC$ có: $AM = AN = AH$ và $OB = OC$

Nên AO là đường trung bình của hình thang $BMNC$

$\Rightarrow AO \parallel BM$ mà $BM \perp MN$. Do đó $OA \perp MN$

* Ta có $A \in \left(O; \frac{BC}{2}\right)$ và $OA \perp MN$ nên MN là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC

Hay đường tròn đường kính BC tiếp xúc với MN

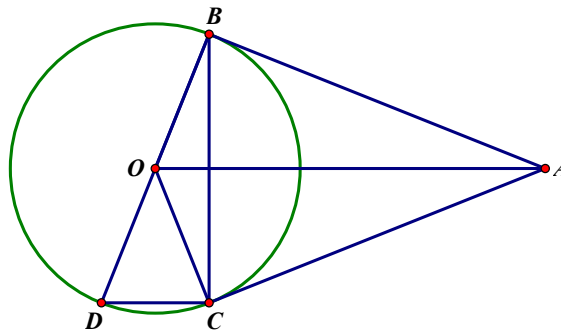
Dạng 2: Vận dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau để chứng minh các yếu tố hình học

Bài tập 6. Cho đường tròn (O) và điểm A bên ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng OA là đường trung trực của đoạn BC

b) Vẽ đường kính BD . Chứng minh rằng CD song song với AO .

Lời giải



a) Xét đường tròn (O) có AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A

nên $AB = AC$ (tính chất) mà $OB = OC = R$

Suy ra A, O thuộc đường trung trực của BC

Do đó AO là đường trung trực của BC .

b) +) Vì BD là đường kính của $(O; R)$ nên $OB = OD = R = \frac{BD}{2}$

Xét tam giác ABC có: $OB = OD = OC = \frac{BD}{2} = R$

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại C (tính chất)

Do đó $DC \perp BC$

+) Vì AO là đường trung trực của BC nên $AO \perp BC$

+) Ta có: $DC \perp BC$ và $AO \perp BC$ nên $AO \parallel DC$ (tính chất)

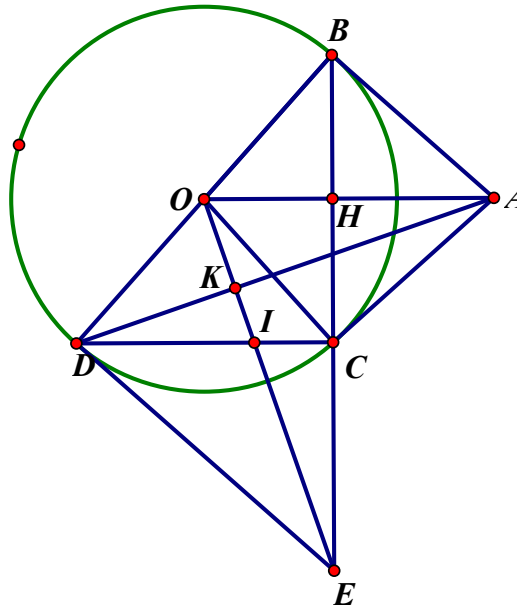
Bài tập 7. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi giao điểm của AO và BC là H . Kẻ đường kính BD . Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt đường thẳng BC tại E .

a) Chứng minh: $\triangle ACO$ đồng dạng với $\triangle DCE$

b) Chứng minh: $\triangle ACD$ đồng dạng với $\triangle OCE$

c) Gọi giao điểm của CD và OE ; K là giao điểm của AD và OE . Chứng minh: AD vuông góc với OE tại K .

Lời giải



a) Xét đường tròn (O) có AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A

nên $AB = AC$ (tính chất) mà $OB = OC = R$

Suy ra A, O thuộc đường trung trực của BC

Do đó AO là đường trung trực của BC $\Rightarrow AO \perp BC$

* Xét đường tròn (O) có B, C, D thuộc đường tròn mà BD là đường kính

Nên tam giác BDC vuông tại C $\Rightarrow BC \perp DC$ mà $AO \perp BC$ do đó $AO \parallel DC$

* Vì AB và DE là các tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp BD$ và $DE \perp BD$

Do đó $AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{BED}$ (so le trong)

* Xét $\triangle AHB$ vuông tại H và $\triangle DCE$ vuông tại C (do $CD \perp BC$) có $\widehat{ABE} = \widehat{BED}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AHB$ đồng dạng với $\triangle DCE$ (g.g)

Nên $\widehat{BAH} = \widehat{CDE}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$ (do AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A của (O))

Do đó $\widehat{CAO} = \widehat{CDE}$

* Xét $\triangle ACO$ vuông tại C và $\triangle DCE$ vuông tại C (do $CD \perp BC$) có $\widehat{CAO} = \widehat{CDE}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle ACO$ đồng dạng với $\triangle DCE$ (g.g)

b) * Vì $\triangle ACO$ đồng dạng với $\triangle DCE$ nên $\frac{AC}{CD} = \frac{OC}{CE} \Rightarrow \frac{AC}{OC} = \frac{CD}{CE}$ (2 góc tương ứng)

* Ta có: $\widehat{ACD} = \widehat{ACO} + \widehat{OCD} = 90^\circ + \widehat{OCD}$

$\widehat{ECO} = \widehat{ECD} + \widehat{OCD} = 90^\circ + \widehat{OCD}$

Nên $\widehat{ACD} = \widehat{ECO}$

* Xét $\triangle ACD$ và $\triangle OCE$ có:

$$\widehat{ACD} = \widehat{ECO} \text{ (cmt)}$$

$$\frac{AC}{OC} = \frac{CD}{CE} \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow \Delta ACD$ đồng dạng với ΔOCE (c.g.c)

c) Vì ΔACD đồng dạng với ΔOCE (cmt)

nên $\widehat{CEO} = \widehat{CDA}$ (2 góc tương ứng).

* Xét ΔCIE và ΔKID có

$$\widehat{CEO} = \widehat{CDA} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{CIE} = \widehat{KID} \text{ (đối đỉnh)}$$

Nên ΔCIE và ΔKID (g.g)

Do đó $\widehat{ECI} = \widehat{DKI}$ (2 góc tương ứng) mà $\widehat{ECI} = 90^\circ$ (do $CD \perp BC$)

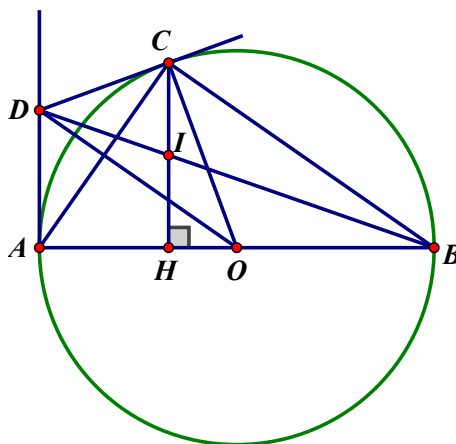
Nên $\widehat{DKI} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp OE$ tại K

Bài tập 8. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên đường tròn (O) , các tiếp tuyến của đường tròn tại A và C cắt nhau ở D.

a) Chứng minh: $DO \parallel CB$ và $AO.HC = AD.HB$

b) Kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là giao điểm của CH và BD. Chứng minh: I là trung điểm của CH.

Lời giải



a) Xét đường tròn (O) có DA và DC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D.

nên $DA = DC$ (tính chất) mà $OA = OC = R$

Suy ra D, O thuộc đường trung trực của AC

Do đó DO là đường trung trực của AC $\Rightarrow DO \perp AC$

* Xét đường tròn (O) có đường kính AB mà A, B, C là các điểm thuộc đường tròn

Nên $OA = OB = OC = R = \frac{AB}{2}$. Do đó ΔABC vuông tại C

$\Rightarrow AC \perp BC$ mà $DO \perp AC$ (cmt) $\Rightarrow DO \parallel BC$

b) * Vì $DO \parallel BC$ nên $\widehat{AOD} = \widehat{ABC}$ (đồng vị)

* Xét $\triangle AOD$ và $\triangle HBC$ có:

$$\widehat{DAO} = \widehat{ACB} = 90^\circ$$

$$\widehat{AOD} = \widehat{ABC} \text{ (cmt)}$$

Nên $\triangle AOD$ đồng dạng với $\triangle HBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AO}{HB} = \frac{AD}{CH}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

Suy ra $AO \cdot CH = AD \cdot HB$ (1)

* Xét tam giác ADB có $IH \parallel AD$ (do cùng vuông góc với AB)

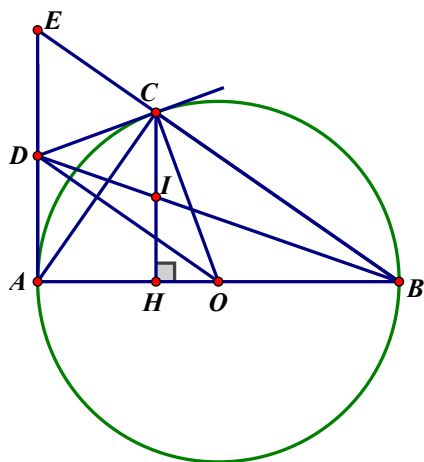
Suy ra $\triangle BIH$ đồng dạng với $\triangle BDA$ (tính chất) $\Rightarrow \frac{IH}{AD} = \frac{BH}{BA}$

Suy ra $IH \cdot BA = AD \cdot BH$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $AO \cdot CH = IH \cdot BA \Rightarrow \frac{IH}{CH} = \frac{AO}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$

Mà I thuộc CH nên I là trung điểm của CH .

* Cách khác:



Kẻ tia BC cắt tia AD tại E .

+) C/m: $\triangle ADC$ và $\triangle DEC$ cân từ đó suy ra $DA = DE$

+) Vì $CH \parallel AE$ nên $\frac{IH}{AD} = \frac{CI}{DE} \left(= \frac{BI}{BD} \right)$ mà $DA = DE$ nên $IH = IC$

Mà I thuộc CH nên I là trung điểm của CH .

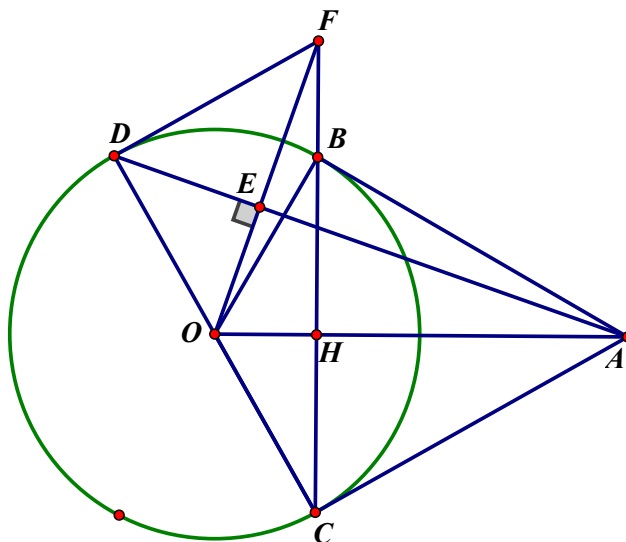
Bài tập 9. Cho B, C là hai điểm trên đường tròn $(O; R)$. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt đường phân giác $\widehat{BOC}$ tại A . H là giao điểm của AO và BC .

a) Chứng minh $\triangle BOH$ vuông và $OB^2 = OH \cdot OA$.

b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của $(O; R)$.

c) CD là đường kính của $(O; R)$. Qua O dựng đường thẳng vuông góc với AD tại E và cắt CB

Lời giải



a) Xét tam giác BOC cân tại O (do $OB = OC = R$) mà OA là tia phân giác của góc BOC nên OA đồng thời là đường cao của tam giác BOC

suy ra OA vuông góc với BC tại H

Do đó $\triangle BOH$ vuông tại H

* Xét tam giác ABO vuông tại B (do AB là tiếp tuyến của (O))

Có $BH \perp AO$ tại H nên $OB^2 = OH.OA$ (tính chất)

b) * Xét $\triangle ABO$ và $\triangle ACO$ có

OA là cạnh chung

$\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ (do OA là phân giác của góc BOC)

$OB = OC = R$

Nên $\triangle ABO = \triangle ACO$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$

Do đó AC là tiếp tuyến của (O)

c) * Xét $\triangle OEA$ và $\triangle OHF$ có

$\widehat{OEA} = \widehat{OHF} = 90^\circ$

$\widehat{AOE}$ chung

Nên $\triangle OEA$ và $\triangle OHF$ đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \frac{OE}{OH} = \frac{OA}{OF} \Rightarrow OH.OA = OE.OF$ mà $OB^2 = OH.OA$ và $OB = OD = R$

Nên $OD^2 = OF.OE$

* Xét $\triangle OED$ và $\triangle ODF$ có

$\widehat{DOE}$ chung

$$\frac{DO}{FO} = \frac{OE}{OD} \text{ (do } OD^2 = OF \cdot OE \text{)}$$

Nên $\triangle OED$ và $\triangle ODF$ đồng dạng (c.g.c)

Suy ra $\widehat{OED} = \widehat{ODF} = 90^\circ \Rightarrow OD \perp DF$

Do đó DF là tiếp tuyến của đường tròn (O)

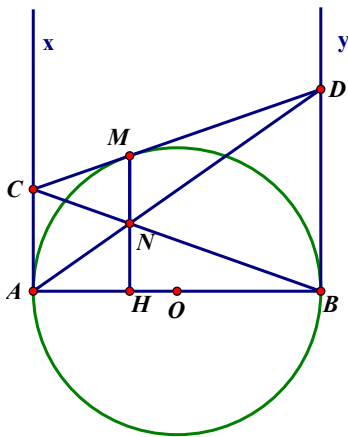
Bài tập 10. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By. Qua một điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau ở N.

a) Chứng minh rằng: $MN \parallel AC$

b) Chứng minh rằng: $CD \cdot MN = CM \cdot DB$

c) Gọi H là giao điểm của MN và AB. Chứng minh: $MN = HN$

Lời giải



a) Ta có Ax và By là các tiếp tuyến của (O)

nên $Ax \perp AB; By \perp AB$. Do đó, $Ax \parallel By$

Suy ra $\triangle ANC$ đồng dạng với $\triangle CNB$ (tính chất)

$$\Rightarrow \frac{CA}{BD} = \frac{AN}{ND} \text{ lại có } AC = CM; BD = DM \text{ (tính chất các tiếp tuyến cắt nhau).}$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{MD} = \frac{AN}{ND} \Rightarrow MN \parallel AC \text{ (định lý Thales đảo trong tam giác ACD)}$$

b) Ta có $MN \parallel AC$ mà $AC \parallel BD$ nên $MN \parallel BD$

$\Rightarrow \triangle CMN$ đồng dạng với $\triangle CDB$ (tính chất)

$$\Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow CD \cdot MN = CM \cdot BD$$

c) Xét tam giác ACD có $MN \parallel AC$ nên $\triangle DMN$ đồng dạng với $\triangle DCA$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AC} = \frac{ND}{AD} \text{ (cạnh tương ứng tỉ lệ) (1)}$$

* Xét tam giác ACB có HN // AC nên ΔBNH đồng dạng với ΔBCA

$$\Rightarrow \frac{NH}{AC} = \frac{NB}{CB} \text{ (cạnh tương ứng tỉ lệ) (2)}$$

$$\text{* Ta có } AC // BD \text{ nên } \frac{ND}{AN} = \frac{NB}{NC} \Rightarrow \frac{ND}{ND + AN} = \frac{NB}{NB + NC} \Rightarrow \frac{ND}{AD} = \frac{NB}{BC} \text{ (3)}$$

$$\text{Từ (1); (2); (3), ta có: } \frac{MN}{AC} = \frac{NH}{AC} \Rightarrow MN = NH$$

Dạng 3. Tính toán.

Phương pháp giải

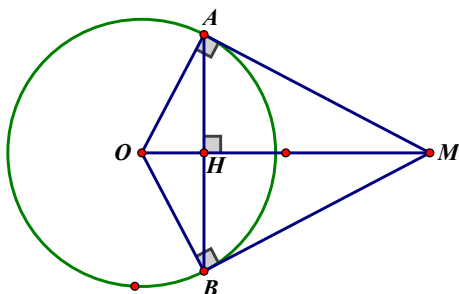
- Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau để tính toán.

Bài tập 11. Cho đường tròn $(O; 6cm)$. Điểm M nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 10cm$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh: MO là đường trung trực của AB

b) Tính độ dài các cạnh của tam giác MAB.

Lời giải



a) Xét đường tròn (O) có MA và MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M.

nên $MA = MB$ (tính chất) mà $OA = OB = R$

Suy ra M, O thuộc đường trung trực của AB

Do đó MO là đường trung trực của AB $\Rightarrow MO \perp AB$

b) Vì MA là tiếp tuyến của (O) nên $MA \perp OA$

nên ΔMAO vuông tại A. Theo định lý Pythagore ta có: $MA^2 = MO^2 - OA^2$

$$MA^2 = 10^2 - 6^2$$

$$MA = 8(cm)$$

Ta có $MA = MB = 8cm$ (cmt)

* Xét tam giác MAO vuông tại A có đường cao AH. Ta có:

$$OA^2 = MO.HO \Rightarrow HO = \frac{OA^2}{MO} = \frac{6^2}{10} = 3,6(cm)$$

$$* \text{ Ta có: } HM = MO - HO = 10 - 3,6 = 6,4(cm)$$

* Xét tam giác MAO vuông tại A có đường cao AH. Ta có:

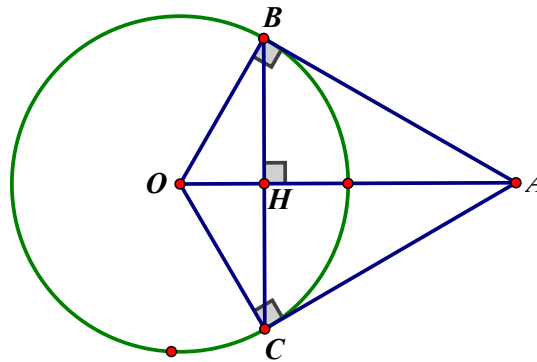
$$AH^2 = HM.HO = 6,4.3,6 \Rightarrow AH = 4,8(cm)$$

* Vì MO là đường trung trực của AB nên H là trung điểm của AB

$$\text{Do đó } AB = 2.AH = 2.4,8 = 9,6(cm)$$

Bài tập 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ với $OA = R$. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (với B, C là các tiếp điểm). Chứng minh: $\triangle ABC$ là tam giác đều và tính các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải



* Vì AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $AB \perp OB$. Do đó tam giác ABO vuông tại B. Ta có: $\sin A_1 = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ$

* Vì $\triangle ABO$ vuông tại A nên ta có:

$$+) \widehat{BAO} + \widehat{BOA} = 90^\circ \text{ mà } \widehat{BAO} = 30^\circ \text{ nên } \widehat{BOA} = 60^\circ$$

$$+) AB^2 = AO^2 - OB^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2$$

$$\text{Nên } AB = R\sqrt{3}$$

* Xét đường tròn (O) có AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A

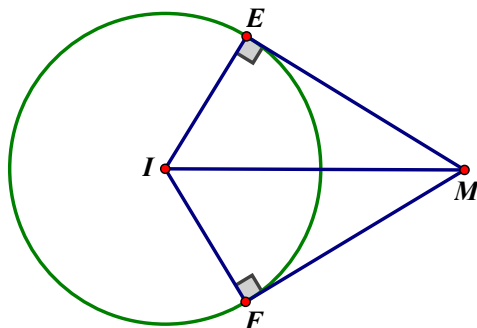
Nên $AB = AC$ (tính chất). Do đó $\triangle ABC$ cân tại A mà $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác đều và $AB = AC = BC = R\sqrt{3}$

Bài 13. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(I; 6cm)$ và ME, MF là hai tiếp tuyến của đường tròn này tại E và F. Cho biết $\widehat{EMF} = 60^\circ$

a) Tính số đo $\widehat{EMI}$ và $\widehat{EIF}$.

b) Tính độ dài MI

Lời giải



a) * Xét đường tròn (I) có ME, MF là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M

Nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$$+ IE \perp ME; IF \perp MF$$

+ MI là tia phân giác của góc EMF.

+ IM là tia phân giác của góc EIF.

$$+ ME = MF$$

* Vì MI là tia phân giác của góc EMF nên $\widehat{EMI} = \widehat{IMF} = \frac{\widehat{FME}}{2} = 30^\circ$

* Xét tứ giác MEIF có: $\widehat{IEM} + \widehat{FME} + \widehat{MFI} + \widehat{FIE} = 360^\circ$

Mà $\widehat{IEM} = 90^\circ (IE \perp EM)$; $\widehat{IFM} = 90^\circ (IF \perp FM)$; $\widehat{FME} = 60^\circ$

Nên $\widehat{FIE} = 120^\circ$

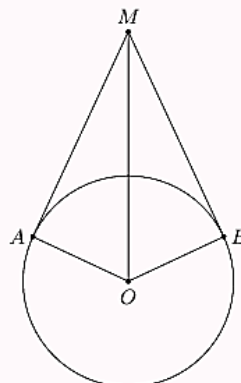
b) Xét tam giác IEM vuông tại E có:

$$\sin \widehat{EMI} = \frac{IE}{IM} \Rightarrow IM = \frac{IE}{\sin \widehat{EMI}} = 12 (cm)$$

Bài 14. Một chiếc gương có dạng hình tròn được treo bằng hai sợi dây không dẫn, mỗi sợi dây đều tiếp xúc với gương (Hình a). Biết tổng độ dài hai dây treo là 6 dm và góc giữa hai sợi dây là 60° . Hỏi bán kính của chiếc gương là bao nhiêu decimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

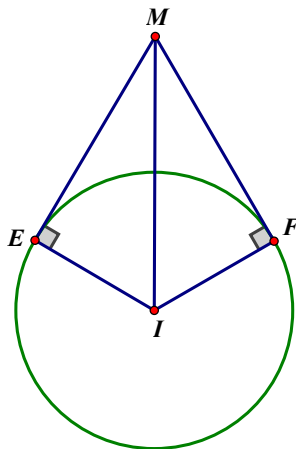


Hình a



Hình b

Lời giải



* Giả sử hai sợi dây không giãn ME và MF tiếp xúc với gương hình tròn tâm I

Nên theo tính chất ta có:

+) $ME = MF$ mà tổng độ dài hai sợi dây là 6dm nên $ME = MF = 3dm$

+) MI là tia phân giác của góc EMF

+) $ME \perp EI$

* Có MI là tia phân giác của góc EMF mà $\widehat{FME} = 60^\circ$

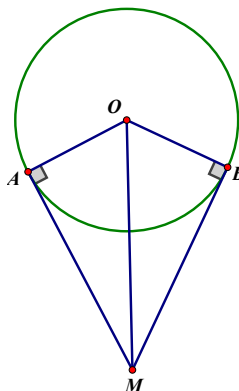
$$\text{Nên } \widehat{EMI} = \frac{\widehat{FME}}{2} = 30^\circ$$

* Xét tam giác MEI có: $EI = ME \cdot \tan \widehat{EMI} = 3 \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3} \approx 1,73dm$

Bài 15. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa (được biểu diễn bởi MA và MB là các tiếp tuyến của (O)). Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M. Cho biết khoảng cách OM là 35 cm.

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) Tính số đo $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AOB}$ (làm tròn kết quả đến phút)



Lời giải

a) * Ta có MA và MB là các tiếp tuyến của (O) nên theo tính chất ta có:

+) $MA = MB$

+) $OA \perp MA$

+) MO là tia phân giác của góc AMB

* Xét tam giác AOM vuông tại A theo định lý Pythagore có:

$$MA = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{35^2 - 15^2} \approx 31,6(dm)$$

b) * Xét tam giác AOM vuông tại A có

$$\tan \widehat{AMO} = \frac{AO}{AM} = \frac{15}{35} \Rightarrow \widehat{AMO} \approx 23^{\circ}12'$$

Mà $\widehat{AMB} = 2.\widehat{AMO}$ (do MO là tia phân giác của góc AMB)

Nên $\widehat{AMB} \approx 46^{\circ}24'$

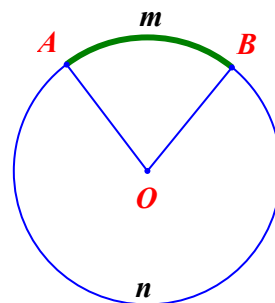
BÀI 4. GÓC Ở TÂM. GÓC NỘI TIẾP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

1. Góc ở tâm

- Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.
- Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn.
- $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm, $\widehat{AmB}$ là cung bị chắn bởi $\widehat{AOB}$.



2. Số đo cung

- Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.

$$sđ\widehat{AmB} = sđ\widehat{AOB}$$
- Số đo cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).

$$sđ\widehat{AnB} = 360^\circ - sđ\widehat{AmB}$$
- Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

3. So sánh hai cung

Ta chỉ so sánh hai cung trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau. Khi đó:

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

$$sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$
- Trong hai cung, cung có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

$$sđ\widehat{AB} > sđ\widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD}$$

4. Khi nào thì $sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB} \Rightarrow sđ\widehat{AB}$

- Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB}$

5. Góc nội tiếp

Định nghĩa

- Góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn gọi là góc nội tiếp.
- Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Định lý

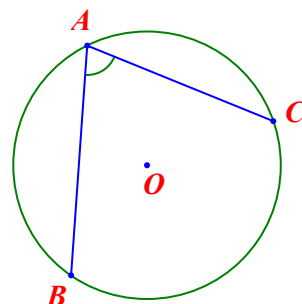
Mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Hệ quả

Trong một đường tròn, góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn.
 Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90°

Nhận xét

Số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.
 Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau



A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. Góc ở tâm là góc có đỉnh nằm trên đường tròn.
- B. Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.
- C. Góc ở tâm là góc có hai cạnh là hai đường kính của đường tròn.
- D. Góc ở tâm là góc có đỉnh nằm trên bán kính của đường tròn.

Câu 2: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

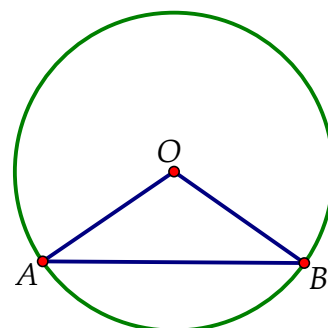
- A. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung nhỏ.
- B. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo nhỏ hơn 90° .
- C. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung lớn.
- D. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

Câu 3: Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{AC} + sđ \widehat{CB}$.
- B. Cung lớn có số đo nhỏ hơn 180° .
- C. Số đo của nửa đường tròn bằng 90° .
- D. Cung nhỏ có số đo lớn hơn 180° .

Câu 4: Trong hình vẽ sau, góc ở tâm là

- A. $\widehat{AOB}$.
- B. $\widehat{ABO}$.
- C. $\widehat{BAO}$.
- D. Không có góc ở tâm trong hình vẽ.

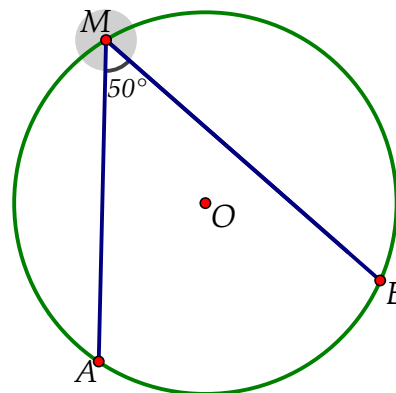


Câu 5: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Trong một đường tròn, số đo góc nội tiếp bằng số đo cung bị chắn.
- B. Trong một đường tròn, các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
- C. Trong một đường tròn, các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- D. Trong một đường tròn, các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn thì bằng 90° .

Câu 6: Cho góc $\widehat{AMB} = 50^\circ$ như hình vẽ. Khi đó khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$ là 50° .
- B. Góc $\widehat{AMB}$ là góc ở tâm.
- C. Số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$ là 25° .
- D. Số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$ là 100° .



Câu 7: Trong một đường tròn, cho góc $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $\widehat{AMB}$ là góc nhọn.
- B. $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
- C. $\widehat{AMB}$ là góc tù.
- D. $\widehat{AMB} = 180^\circ$.

Câu 8: Nhận định nào sau đây là **sai**?

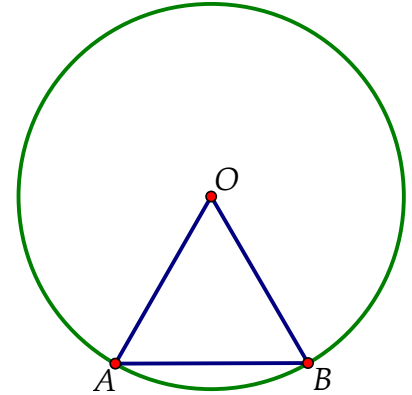
- A. Trong một đường tròn, số đo góc nội tiếp bằng số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.
- B. Trong một đường tròn, số đo của cung AB được kí hiệu là $sđ \widehat{AB}$.
- C. Trong một đường tròn, mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.

D. Trong một đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau chắn cùng một cung hoặc các cung bằng nhau.

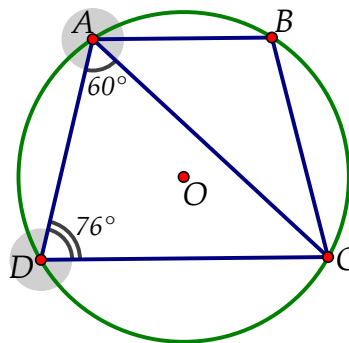
II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9: Cho $\triangle OAB$ đều như trong hình vẽ sau, chọn khẳng định **đúng**.

- A.** Số đo cung nhỏ AB là 100° .
- B.** Số đo cung nhỏ AB là 30° .
- C.** Số đo cung nhỏ AB là 60° .
- D.** Số đo cung nhỏ AB là 90° .



Câu 10: Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $AB \parallel CD$, $\widehat{ADC} = 76^\circ$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$. Khẳng định nào sau đây **sai**.



- A.** $\widehat{BAC} = 44^\circ$.
- B.** Số đo cung nhỏ BC là 88° .
- C.** Số đo cung nhỏ AD là 88° .
- D.** Số đo cung nhỏ AC là 104° .

Câu 11: Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A và B sao cho $\widehat{AOB} = 80^\circ$. Vẽ dây AM vuông góc với bán kính OB tại H . Số đo cung nhỏ AM bằng

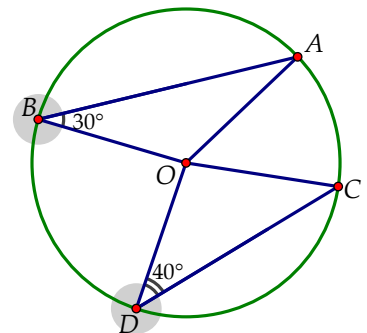
- A.** 80° .
- B.** 100° .
- C.** 140° .
- D.** 160° .

Câu 12: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB sao cho số đo cung lớn $\widehat{AB}$ gấp ba lần số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$. Số đo cung $\widehat{AB}$ nhỏ là

- A.** 90° .
- B.** 60° .
- C.** 120° .
- D.** 150° .

Câu 13: Tìm số đo cung nhỏ AB và cung nhỏ CD qua hình vẽ sau

- A.** số $\widehat{AB} = 120^\circ$, số $\widehat{CD} = 80^\circ$.
- B.** số $\widehat{AB} = 130^\circ$, số $\widehat{CD} = 100^\circ$.
- C.** số $\widehat{AB} = 115^\circ$, số $\widehat{CD} = 80^\circ$.
- D.** số $\widehat{AB} = 120^\circ$, số $\widehat{CD} = 100^\circ$.



Câu 14: Trên đường tròn (O, R) lấy hai điểm A và B sao cho số đo cung nhỏ AB bằng 90° . Độ dài dây cung AB bằng?

- A.** R .
- B.** $R \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- C.** $R\sqrt{2}$.
- D.** $R\sqrt{3}$.

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

- Câu 15:** Đường thẳng m cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Số đo góc AOB bằng
A. 150° . **B.** 120° . **C.** 90° . **D.** 60° .
- Câu 16:** Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Số đo cung AB nhỏ bằng
A. 240° . **B.** 120° . **C.** 360° . **D.** 210° .
- Câu 17:** Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Số đo cung AB nhỏ bằng
A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** a . **D.** $2a$.
- Câu 18:** Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ OO' lấy $B \in (O), C \in (O')$ sao cho $s\widehat{AB} = 20^\circ, s\widehat{AC} = 90^\circ$. Hỏi góc BAC bằng bao nhiêu?
A. 35° . **B.** 65° . **C.** 80° . **D.** 55° .

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

- Câu 19:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Lấy M là điểm chính giữa cung AB , hai điểm C và D di chuyển trên cung MA, MB sao cho $CM \parallel AD$. Hỏi độ dài cạnh CD bằng bao nhiêu?
A. $\frac{2R}{3}$. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R\sqrt{2}$.
- Câu 20:** Cho H là trực tâm tam giác nhọn ABC ($\hat{A} = 60^\circ$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Hỏi AH bằng bao nhiêu?
A. $R\sqrt{3}$. **B.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{R}{2}$. **D.** R .

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm số đo góc ở tâm – Số đo cung bị chắn

Phương pháp giải

Để tính số đo của góc ở tâm, số đo của cung bị chắn, ta sử dụng các kiến thức sau:

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
 - Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa và số đo của cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).
 - Số đo của nửa đường tròn bằng 180° . Cung cả đường tròn có số đo 360° .
 - Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính góc.
- Sử dụng quan hệ đường kính và dây cung.

Bài 1: Cho tam giác đều ABC . Gọi O là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C . Tính số đo góc ở tâm $\widehat{AOB}$.

Bài 2: Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau

- a) 3 giờ. b) 5 giờ. c) 6 giờ. d) 22 giờ.

Bài 3: Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại điểm M . Cho biết $OM = 2R$. Tính số đo

- a) Góc ở tâm $\widehat{AOB}$;
b) Mỗi cung AB (cung lớn và cung nhỏ).

Bài 4: Trên đường tròn tâm O lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AOB} = 130^\circ$, $\widehat{AC} = 60^\circ$. Tính số đo mỗi cung BC (cung lớn và cung nhỏ) trong các trường hợp

- a) C nằm trên cung nhỏ AB ;
b) C nằm trên cung lớn AB .

Bài 5: Cho $(O; R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ $OI \perp MN$ tại I . Tính số đo cung nhỏ MN .

Dạng 2. Chứng minh hai cung bằng nhau

Phương pháp giải

Để chứng minh hai cung (của một đường tròn) bằng nhau, ta chứng minh hai cung này có cùng một số đo.

Bài 1. Trên đường tròn (O) , lấy hai điểm A và B phân biệt. Kẻ các đường kính AOC và BOD . Chứng minh $\widehat{AD} = \widehat{BC}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ đường tròn tâm O , đường kính BC . Đường tròn (O) cắt AB , AC tương ứng tại M và N . Chứng minh các cung nhỏ BM và CN có số đo bằng nhau

Bài 3: Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M . Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B . Tia OM cắt đường tròn lớn tại C . Chứng minh rằng $\widehat{CA} = \widehat{CB}$.

Bài 4: Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $(O; R')$ với $R > R'$. Qua điểm M ở ngoài $(O; R)$, vẽ hai tiếp tuyến với $(O; R')$. Một tiếp tuyến cắt $(O; R)$ tại A và B (A nằm giữa M và B); một tiếp tuyến cắt $(O; R)$ tại C và D (C nằm giữa D và M). Chứng minh hai cung AB và CD bằng nhau.

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$. Trên dây AB không đi qua tâm O lấy hai điểm C và D sao cho: $AC = CD = DB$. Kẻ bán kính OE qua C và kẻ bán kính OF qua D . Chứng minh: $\widehat{AE} = \widehat{BF}$.

Dạng 3. Chứng minh hai góc nội tiếp bằng nhau, đoạn thẳng bằng nhau, tam giác đồng dạng**Phương pháp giải****Phương pháp giải:**

- Chứng minh trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau
- Chứng minh hai đoạn thẳng đó là hai cạnh bên của một tam giác cân
- Dùng tam giác đồng dạng hoặc hệ thức lượng trong tam giác vuông

Bài 1: Cho đường tròn (O) và góc nội tiếp $\widehat{BAD} = 130^\circ$ như hình vẽ. E là một điểm thuộc cung lớn $\widehat{CD}$. Tính số đo của $\widehat{BED}$.

Bài 2: Cho đường tròn (O) , hai dây cung AB và CD của đường tròn (O) cắt nhau tại I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng: $IA \cdot IB = IC \cdot ID$

Bài 3: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) , đường kính AM . Dựng đường cao AH của tam giác. Chứng minh: $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$

Bài 4: Cho đường tròn (O) có các dây cung AB, BC, CA . Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB . Vẽ dây MN song song với BC và gọi S là giao điểm của MN và AC . Chứng minh $SM = SC$ và $SN = SA$.

Bài 5: Cho 2 điểm A và B thuộc đường tròn (O) . Các tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau tại M . Từ A kẻ đường thẳng song song với MB , cắt (O) tại C . MC cắt (O) tại P . Các tia AP và MB cắt nhau tại K .

a) Chứng minh $MK^2 = AK \cdot PK$

b) Chứng minh $MK = KB$

Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba điểm thẳng hàng**Phương pháp giải**

- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90°
- Hoặc dùng tính chất ba đường cao của tam giác gặp nhau tại một điểm
- Chứng minh hai tia trùng nhau hoặc đối nhau.
- Hai đầu đường kính thì thẳng hàng với tâm.
- Từ một điểm chỉ có thể vẽ được một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước

Bài 1: Cho đường tròn (O) , đường kính AB . S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N . Gọi H giao điểm của BM và AN . Chứng minh rằng $SH \perp AB$.

Bài 2: Trong đường tròn (O) có dây AC và BD vuông góc với nhau tại I . Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh rằng $IM \perp AD$.

Bài 3: Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB .

- Chứng minh ba điểm A, O, B thẳng hàng.
- Gọi P là giao điểm của AK và BI . Chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$

Bài 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AF .

- Tứ giác $BFCH$ là hình gì?
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.
- Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

Bài 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên một nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D , đường tròn này cắt CA và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N . Chứng minh rằng:

- Ba điểm M, I, N thẳng hàng.
- $ID \perp MN$.
- Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra cách dựng đ/tròn (I) nói trên.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	D	A	A	A	D	B	A	C	D
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	A	D	C	B	B	B	D	D	D

Câu 1: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Góc ở tâm là góc có đỉnh nằm trên đường tròn.
- B. Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.
- C. Góc ở tâm là góc có hai cạnh là hai đường kính của đường tròn.
- D. Góc ở tâm là góc có đỉnh nằm trên bán kính của đường tròn.

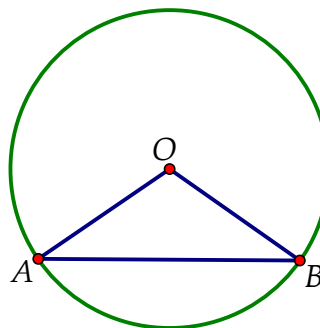
Câu 2: Chọn câu **đúng**.

- A. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung nhỏ.
- B. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo nhỏ hơn 90° .
- C. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung lớn.
- D. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

Câu 3: Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{AC} + sđ \widehat{CB}$.
- B. Cung lớn có số đo nhỏ hơn 180° .
- C. Số đo của nửa đường tròn bằng 90° .
- D. Cung nhỏ có số đo lớn hơn 180° .

Câu 4: Trong hình vẽ sau, góc ở tâm là



- A. $\widehat{AOB}$.
- B. $\widehat{ABO}$.
- C. $\widehat{BAO}$.
- D. Không có góc ở tâm trong hình vẽ.

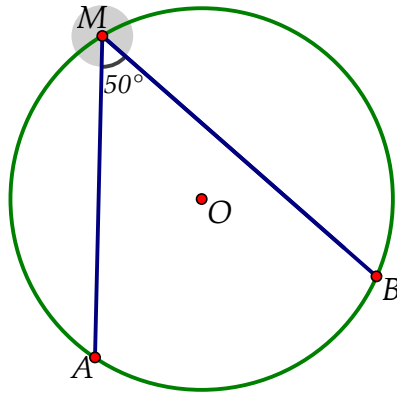
Câu 5: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng số đo của cung bị chắn.
- B. Trong một đường tròn, các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
- C. Trong một đường tròn, các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- D. Trong một đường tròn, các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn thì bằng 90° .

Lời giải

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo của cung bị chắn.

Câu 6: Cho góc $\widehat{AMB} = 50^\circ$ như hình vẽ. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$ là 50° .
 B. Góc $\widehat{AMB}$ là góc ở tâm.
 C. Số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$ là 25° .
 D. Số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$ là 100° .

Lời giải

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo của cung bị chắn.

Do đó: Số đo cung nhỏ AB bằng $2\widehat{AMB} = 2 \cdot 50 = 100^\circ$.

Câu 7: Trong một đường tròn, cho góc $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\widehat{AMB}$ là góc nhọn. B. $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
 C. $\widehat{AMB}$ là góc tù. D. $\widehat{AMB} = 180^\circ$.

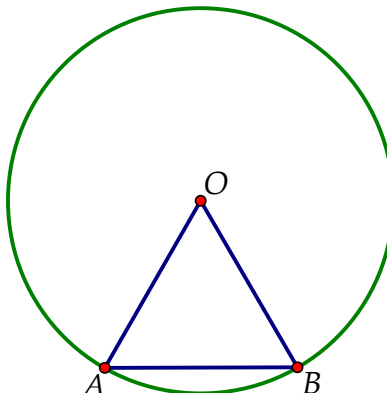
Lời giải

Số đo góc nội tiếp chắn nửa đường tròn thì bằng 90° .

Câu 8: Nhận định nào sau đây là sai?

- A. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
 B. Trong một đường tròn, số đo của cung AB được kí hiệu là $sđ \widehat{AB}$.
 C. Trong một đường tròn, mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.
 D. Trong một đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau chắn cùng một cung hoặc các cung bằng nhau.

Câu 9: Cho $\triangle OAB$ đều như trong hình vẽ sau, chọn khẳng định đúng.



A. Số đo cung nhỏ AB là 100° .

B. Số đo cung nhỏ AB là 30° .

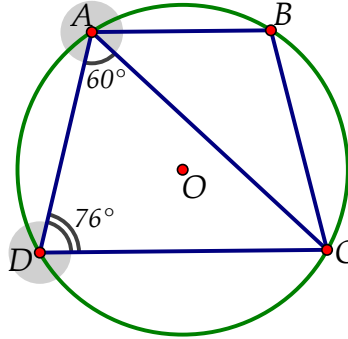
C. Số đo cung nhỏ AB là 60° .

D. Số đo cung nhỏ AB là 90° .

Lời giải

Vì $\triangle OAB$ đều suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên số đo cung nhỏ AB là 60° .

Câu 10: Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $AB \parallel CD$, $\widehat{ADC} = 76^\circ$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$. Khẳng định nào sau đây sai.



A. $\widehat{BAC} = 44^\circ$.

B. Số đo cung nhỏ BC là 88° .

C. Số đo cung nhỏ AD là 88° .

D. Số đo cung nhỏ AC là 104° .

Lời giải

Góc nội tiếp $\widehat{ADC} = 76^\circ$ suy ra số đo cung nhỏ AC bằng $2 \cdot 76^\circ = 152^\circ$.

Câu 11: Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A và B sao cho $\widehat{AOB} = 80^\circ$. Vẽ dây AM vuông góc với bán kính OB tại H . Số đo cung nhỏ AM bằng

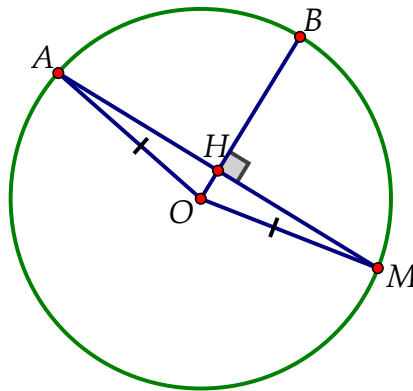
A. 80° .

B. 100° .

C. 140° .

D. 160° .

Lời giải



$\triangle OAM$ cân tại O ($OA = OM = R$).

$OB \perp AM$ tại H suy ra OB đồng thời là đường phân giác của $\widehat{AOM}$;

$\widehat{AOB} = \widehat{BOM} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{AOB} + \widehat{BOM} = 80^\circ + 80^\circ = 160^\circ$.

Do đó số đo của cung nhỏ AM bằng: $\widehat{AOM} = 160^\circ$.

Câu 12: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB sao cho số đo cung lớn $\widehat{AB}$ gấp ba lần số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$. Số đo cung $\widehat{AB}$ nhỏ là

A. 90° .

B. 60° .

C. 120° .

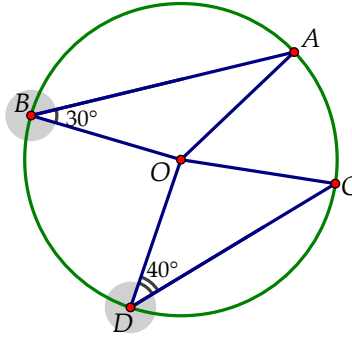
D. 150° .

Lời giải

Giả sử số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$ là $sđ \widehat{AnB}$, số đo cung lớn AB là $sđ \widehat{AmB}$.

Ta có: $360^\circ = sđ \widehat{AmB} + sđ \widehat{AnB} = 4 \cdot sđ \widehat{AnB} \Rightarrow sđ \widehat{AnB} = 90^\circ$.

Câu 13: Tìm số đo cung nhỏ AB và cung nhỏ CD qua hình vẽ sau



A. $sđ \widehat{AB} = 120^\circ$, $sđ \widehat{CD} = 80^\circ$.

B. $sđ \widehat{AB} = 130^\circ$, $sđ \widehat{CD} = 100^\circ$.

C. $sđ \widehat{AB} = 115^\circ$, $sđ \widehat{CD} = 80^\circ$.

D. $sđ \widehat{AB} = 120^\circ$, $sđ \widehat{CD} = 100^\circ$.

Lời giải

❖ Vì $\triangle OAB$ cân tại O ($OA = OB = R$) $\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BOA} = 180^\circ - \widehat{OBA} - \widehat{OAB}$

$\widehat{BOA} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ suy ra số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$ bằng: $\widehat{BOA} = 120^\circ$.

❖ Vì $\triangle OCD$ cân tại O ($OC = OD = R$) $\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 180^\circ - \widehat{OCD} - \widehat{ODC}$

$\widehat{COD} = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$ suy ra số đo cung nhỏ $\widehat{CD}$ bằng: $\widehat{COD} = 100^\circ$.

Câu 14: Trên đường tròn (O, R) lấy hai điểm A và B sao cho số đo cung nhỏ AB bằng 90° . Độ dài dây cung AB bằng?

A. R .

B. $R \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $R\sqrt{2}$.

D. $R\sqrt{3}$.

Lời giải

Số đo cung nhỏ AB bằng 90° suy ra $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

Áp dụng Pythagore vào tam giác vuông cân OAB ta có: $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = R\sqrt{2}$.

Câu 15: Đường thẳng m cắt đường tròn (O, R) tại hai điểm A, B sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Số đo góc AOB bằng

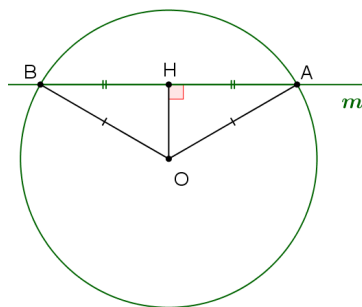
A. 150° .

B. 120° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải



Kẻ $OH \perp AB (H \in AB)$ thì H là trung điểm của AB .

Tam giác OAB cân tại O ($OA = OB = R$) nên đường cao OH cũng là đường trung tuyến và

đường phân giác, suy ra $AH = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ và $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOH}$.

Xét tam giác vuông HOA , ta có

$$\sin \widehat{AOH} = \frac{AH}{AO} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{AOH} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{AOH} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ.$$

Câu 16: Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Số đo cung AB nhỏ bằng

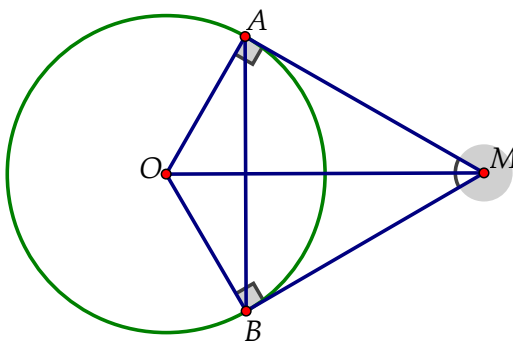
A. 240° .

B. 120° .

C. 360° .

D. 210° .

Lời giải



Xét đường tròn (O) có $MA; MB$ là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.

Suy ra $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOM} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ mà $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm chắn cung AB nên số đo cung nhỏ AB là 120° .

Câu 17: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O) . Biết $AB = a$; $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Bán kính của (O) là

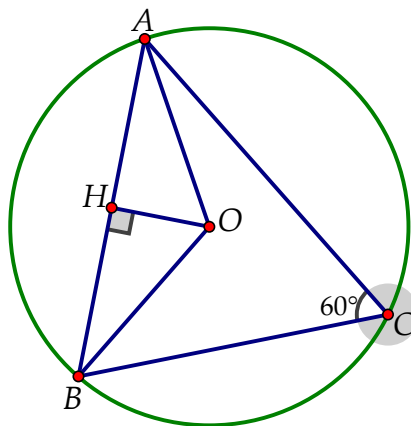
A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. a .

D. $2a$.

Lời giải



Ta có: $\widehat{ACB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$.

Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow HA = HB = \frac{a}{2}$ (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây).

$\triangle AOB$ cân tại O ; OH là đường cao nên OH là đường phân giác của $\widehat{AOB}$. Do đó: $\widehat{AOH} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông AOH có: $OA = \frac{AH}{\sin \widehat{AOH}} = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ OO' lấy $B \in (O)$, $C \in (O')$ sao cho $\widehat{sđAB} = 20^\circ$, $\widehat{sđAC} = 90^\circ$. Hỏi góc BAC bằng bao nhiêu?

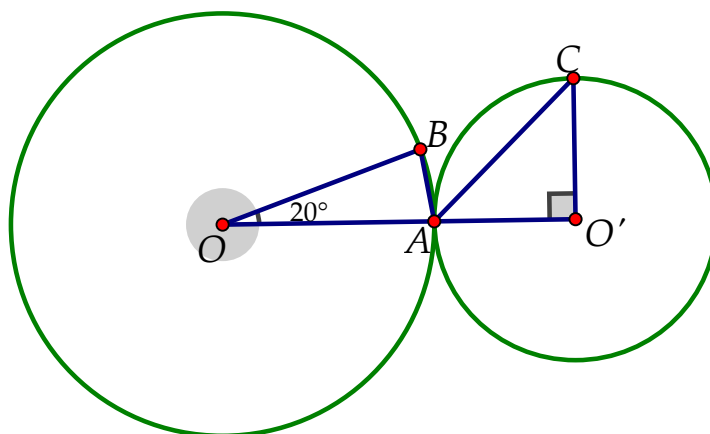
A. 35° .

B. 65° .

C. 80° .

D. 55° .

Lời giải



Ta có $\widehat{sđAB} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 20^\circ$ mà $\triangle OAB$ cân tại A nên $\widehat{OAB} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$.

Tương tự, ta có $\widehat{O'AC} = 45^\circ$.

Vậy $\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{OAB} - \widehat{O'AC} = 180^\circ - 80^\circ - 45^\circ = 55^\circ$.

Câu 19: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Lấy M là điểm chính giữa cung AB , hai điểm C và D di chuyển trên cung MA, MB sao cho $CM \parallel AD$. Hỏi độ dài cạnh CD bằng bao nhiêu?

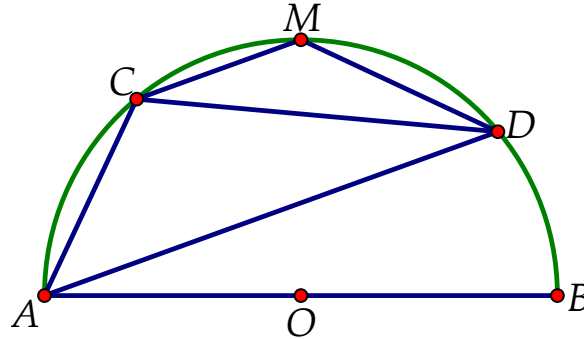
A. $\frac{2R}{3}$.

B. $R\sqrt{3}$.

C. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

D. $R\sqrt{2}$.

Lời giải



M là điểm chính giữa của cung AB nên $sđ\widehat{AM} = 90^\circ$.

Do $MC \parallel AD$ nên

$$\widehat{AC} = \widehat{MD} \Rightarrow \widehat{CD} = \widehat{CM} + \widehat{MD} = \widehat{CM} + \widehat{CA} = \widehat{MA}.$$

$$\Rightarrow sđ\widehat{CD} = sđ\widehat{MA} = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow \widehat{COD} = 90^\circ \text{ (góc ở tâm chắn cung } CD)$$

$$\Rightarrow \triangle COD \text{ vuông cân tại } O \Rightarrow CD = CO\sqrt{2} = R\sqrt{2}.$$

Với bài tập này ta cũng có thể lí luận $ACMD$ là hình thang cân nên $CD = AM = R\sqrt{2}$.

Câu 20: Cho H là trực tâm tam giác nhọn ABC ($\hat{A} = 60^\circ$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Hỏi AH bằng bao nhiêu?

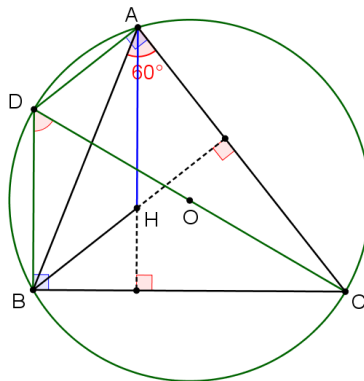
A. $R\sqrt{3}$.

B. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{R}{2}$.

D. R .

Lời giải



Kẻ đường kính CD .

Vì $AH \parallel DB$ (cùng vuông góc với BC), $BH \parallel DA$ (cùng vuông góc với AC).

$\Rightarrow ADBH$ là hình bình hành $\Rightarrow AH = DB$.

Ta có

$$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60^\circ \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } BC \text{)}.$$

Tam giác vuông DBC có $BD = DC \cdot \cos 60^\circ = \frac{DC}{2} = R \Rightarrow AH = R$.

B. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm số đo góc ở tâm – Số đo cung bị chắn

Phương pháp giải

Để tính số đo của góc ở tâm, số đo của cung bị chắn, ta sử dụng các kiến thức sau:

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa và số đo của cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).
- Số đo của nửa đường tròn bằng. Cung cả đường tròn có số đo.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính góc.
- Sử dụng quan hệ đường kính và dây cung.

Bài 1: Cho tam giác đều ABC . Gọi O là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C . Tính số đo góc ở tâm $\widehat{AOB}$.

Lời giải

Vì tam giác ABC đều có tâm O là giao điểm của ba đường trung trực trong $\triangle ABC$ đều, nên O cũng là giao ba đường phân giác $AO; BO; CO$

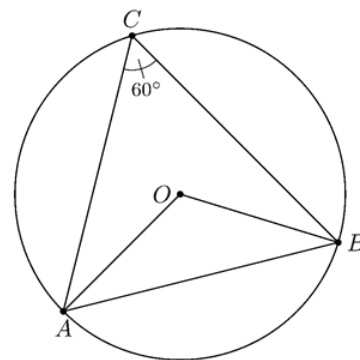
Ta có: $\widehat{OAB} = \widehat{OAC} = \widehat{BAC} \div 2 = 30^\circ$ và

$$\widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{CBA} \div 2 = 30^\circ.$$

Xét $\triangle ABC$ cân tại O , ta thấy

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - (\widehat{OAB} + \widehat{OBA}) = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ.$$

Vậy số đo góc ở tâm $\widehat{AOB}$ là 120° .



Bài 2: Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau

- a) 3 giờ. b) 5 giờ. c) 6 giờ. d) 22 giờ.

Lời giải

Ta sẽ xem mặt đồng hồ như hình tròn nên cung cả đường tròn có số đo là 360° .

a) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 3 giờ thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ \div 12 \times 3 = 90^\circ$.

b) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 5 giờ thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ \div 12 \times 5 = 150^\circ$.

c) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 6 giờ thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ \div 12 \times 6 = 180^\circ$.

d) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 22 giờ hay 10 giờ đêm thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ : 12 \cdot 10 = 300^\circ$

Bài 3: Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại điểm M . Cho biết $OM = 2R$. Tính số đo

a) Góc ở tâm $\widehat{AOB}$;

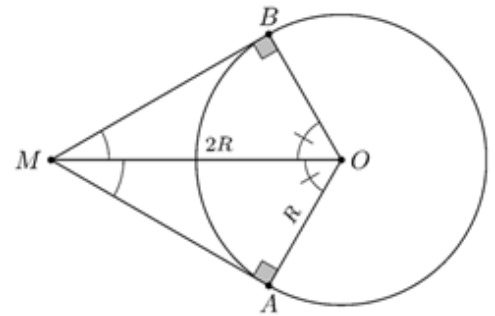
b) Mỗi cung AB (cung lớn và cung nhỏ).

Lời giải.

a) Ta có: $\cos \widehat{AOM} = \frac{OA}{OM} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ$.

Vậy $\widehat{AOB} = \widehat{AOM} \cdot 2 = 120^\circ$.

b) Vì $\widehat{AOB} = 120^\circ$ nên số đo $\widehat{AB}$ nhỏ là 120° và số đo $\widehat{AB}$ lớn là $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.



Bài 4: Trên đường tròn tâm O lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AOB} = 130^\circ$, số đo $\widehat{AC} = 60^\circ$. Tính số đo mỗi cung BC (cung lớn và cung nhỏ) trong các trường hợp

a) C nằm trên cung nhỏ AB ;

b) C nằm trên cung lớn AB .

Lời giải.

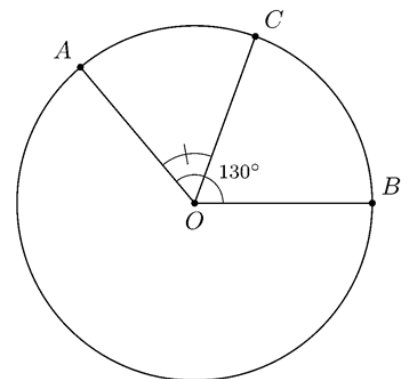
a) Vì số đo $\widehat{AC} = \widehat{AOC}$ nên $\widehat{AOC} = 60^\circ$.

Mà $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC}$ (vì C nằm trên cung nhỏ AB)

do đó $\widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC}$.

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 130^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

Vậy cung nhỏ BC là 70° và cung lớn BC là $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

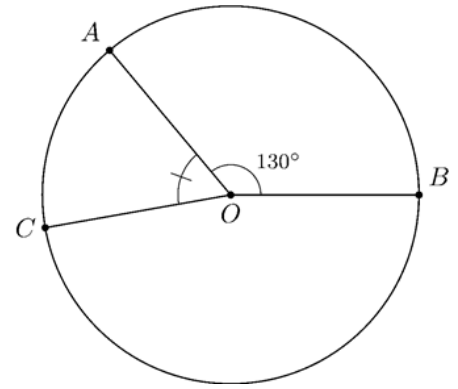


b) Vì số $\widehat{AC} = \widehat{AOC}$ nên $\widehat{AOC} = 60^\circ$.

Mà $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} + \widehat{BOA}$ (vì C nằm trên cung lớn AB)

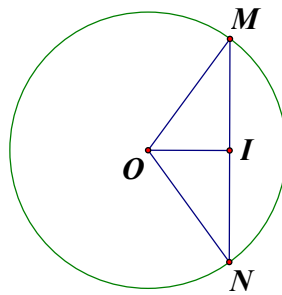
do đó $\widehat{BOC} = 60^\circ + 130^\circ = 190^\circ$.

Vậy cung nhỏ BC là $360^\circ - 190^\circ = 170^\circ$, cung lớn BC là 190° .



Bài 5: Cho $(O; R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OI vuông góc với MN tại I . Tính số đo cung nhỏ MN .

Lời giải.



Xét tam giác OIM vuông tại I ta có:

$$\sin \widehat{MOI} = \frac{MI}{MO} = \frac{R\sqrt{3}}{2} : R = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{MOI} = 60^\circ$$

$\triangle MON$ cân tại O có OI là vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên:

$$\widehat{MON} = 2\widehat{MOI} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

Suy ra số $\widehat{MN}$ nhỏ $= 120^\circ$

Dạng 2. Chứng minh hai cung bằng nhau

Phương pháp giải

Để chứng minh hai cung (của một đường tròn) bằng nhau, ta chứng minh hai cung này có cùng một số đo.

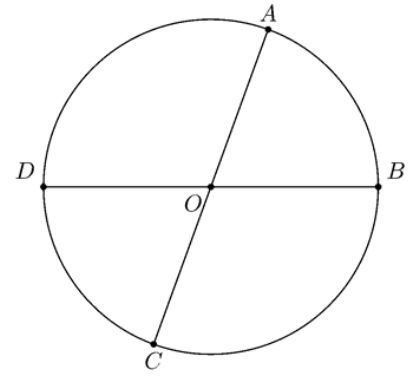
Bài 1. Trên đường tròn (O) , lấy hai điểm A và B phân biệt. Kẻ các đường kính AOC và BOD . Chứng minh $\widehat{AD} = \widehat{BC}$.

Lời giải

Vì AC, BD cắt nhau tại O nên $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (hai góc đối đỉnh).

Mà số đo $\widehat{AD} = \widehat{AOD}$ và số đo $\widehat{BC} = \widehat{BOC}$ do đó số đo $\widehat{AD} = \widehat{BC}$.

Vậy $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ (đpcm).



Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ đường tròn tâm O , đường kính BC . Đường tròn (O) cắt AB, AC tương ứng tại M và N . Chứng minh các cung nhỏ BM và CN có số đo bằng nhau

Lời giải

Ta có $OM = OB$ (bán kính) $\Rightarrow \triangle OBM$ cân tại O ;

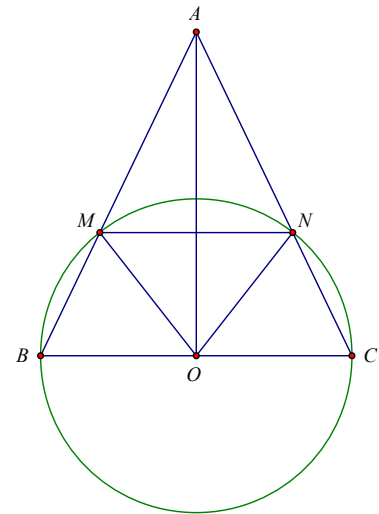
$$\widehat{BOM} = 180^\circ - 2\widehat{MBO} \quad (1);$$

Ta có $ON = OC$ (bán kính) $\Rightarrow \triangle ONC \Rightarrow \triangle ONC$ cân tại O ;

$$\widehat{CON} = 180^\circ - 2\widehat{NCO} \quad (2);$$

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (3)

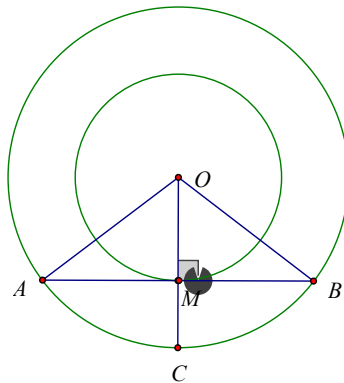
Từ (1); (2), (3) suy ra $\widehat{BOM} = \widehat{NOC} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{BM} = \text{sđ } \widehat{NC}$
 $\Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{NC}$



Bài 3: Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Trên đường

tròn nhỏ lấy một điểm M . Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B . Tia OM cắt đường tròn lớn tại C . Chứng minh rằng $\widehat{CA} = \widehat{CB}$.

Lời giải



Ta có $OA = OB$ (bán kính)

$\Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O

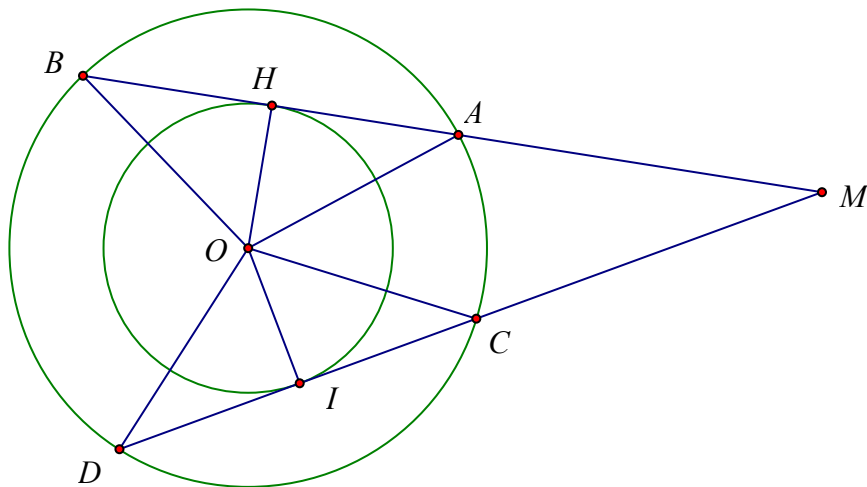
Mà $OM \perp AB$ (Tính chất của tiếp tuyến)

Do đó đường cao OM đồng thời là đường phân giác.

$$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{MOB} \text{ hay } \widehat{AOC} = \widehat{COB} \text{ sđ } \widehat{AC} = \text{sđ } \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{CA} = \widehat{CB}$$

Bài 4: Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $(O; R')$ với $R > R'$. Qua điểm M ở ngoài $(O; R)$, vẽ hai tiếp tuyến với $(O; R')$. Một tiếp tuyến cắt $(O; R)$ tại A và B (A nằm giữa M và B); một tiếp tuyến cắt $(O; R)$ tại C và D (C nằm giữa D và M). Chứng minh hai cung AB và CD bằng nhau.

Lời giải



Gọi H, I là các tiếp điểm

$$\Delta OAB \text{ và } \Delta OCD \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} \text{ và } \widehat{OCD} = \widehat{ODC}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 180^\circ - 2\widehat{OAB} \text{ và } \widehat{COD} = 180^\circ - 2\widehat{OCD} \quad (1)$$

Lại có MH, MI là các tiếp tuyến của $(O; R')$

$$\Rightarrow OH \perp MH \text{ và } OI \perp MI$$

Xét ΔOAH và ΔOIC có

$$\widehat{OHA} = \widehat{OIC} = 90^\circ$$

$$OH = OI \text{ (bán kính)}$$

$$OA = OC \text{ (bán kính)}$$

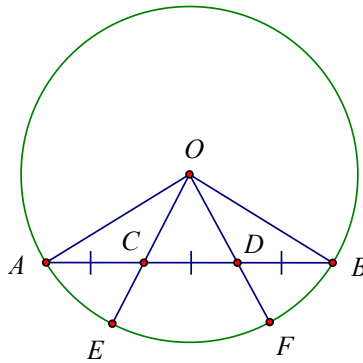
$$\Rightarrow \Delta OHA = \Delta OIC \text{ (ch - cgv)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{OCI} \text{ hay } \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OCD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } \widehat{AOB} = \widehat{COD} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AOB} = \text{sđ } \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$. Trên dây AB không đi qua tâm O lấy hai điểm C và D sao cho $AC = CD = DB$. Kẻ bán kính OE qua C và kẻ bán kính OF qua D . Chứng minh: $\widehat{AE} = \widehat{BF}$.

Lời giải



Ta có $OA = OB (= R) \Rightarrow \Delta OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$

Xét ΔOAC và ΔOBD có:

$$OA = OB (= R)$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} \text{ (cmt)}$$

$$AC = DB \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD} \text{ (2 góc tương ứng)}$$

$$\text{Hay } \widehat{AOE} = \widehat{BOF}$$

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{AE} = \text{sđ } \widehat{BF} \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BF}$$

Dạng 3. Chứng minh hai góc nội tiếp bằng nhau, đoạn thẳng bằng nhau, tam giác đồng dạng

Phương pháp giải

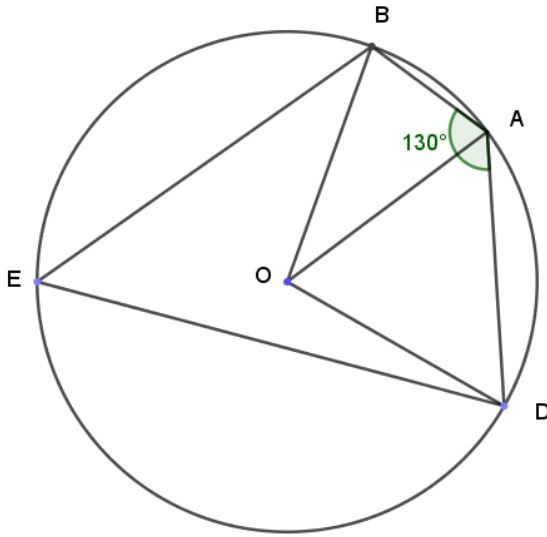
Phương pháp giải:

- Chứng minh trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau
- Chứng minh hai đoạn thẳng đó là hai cạnh bên của một tam giác cân
- Chứng minh hai tia trùng nhau hoặc đối nhau.
- Hai đầu đường kính thì thẳng hàng với tâm.
- Từ một điểm chỉ có thể vẽ được một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước
- Dùng tam giác đồng dạng hoặc hệ thức lượng trong tam giác vuông

Bài 1: Cho đường tròn (O) và góc nội tiếp $\widehat{BAD} = 130^\circ$ như hình vẽ. E là một điểm thuộc cung lớn $\widehat{CD}$.

Tính số đo của $\widehat{BED}$.

Lời giải



Ta có $\triangle OAB$ là tam giác cân tại O nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ (1).

Tam giác $\triangle OAD$ là tam giác cân tại O nên $\widehat{OAD} = \widehat{ODA}$ (2).

Suy ra $\widehat{OBA} + \widehat{ODA} = \widehat{OAB} + \widehat{OAD} = 130^\circ$.

Xét tứ giác $ODAB$ có $\widehat{DOB} + \widehat{OBA} + \widehat{BAD} + \widehat{ODA} = 360^\circ$.

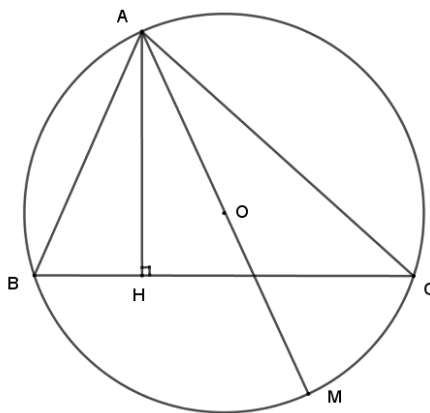
$$\Rightarrow \widehat{DOB} = 360^\circ - (\widehat{OBA} + \widehat{BAD} + \widehat{ODA}) = 360^\circ - (130^\circ + 130^\circ) = 100^\circ.$$

Xét đường tròn (O) có góc $\widehat{BED}$ là góc nội tiếp chắn $\widehat{BD}$, $\widehat{BOD}$ là góc ở tâm chắn $\widehat{BD}$.

$$\text{Vậy nên: } \widehat{BED} = \frac{1}{2} sđ \widehat{BOD} = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ.$$

Bài 2: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) , đường kính AM . Dựng đường cao AH của tam giác. Chứng minh : $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$

Lời giải



Xét (O) có $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp chắn cung AC và $\widehat{CAM}$ là góc nội tiếp chắn cung CM .

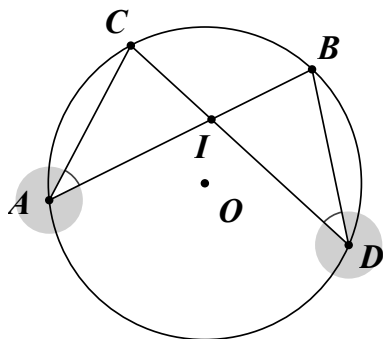
$$\text{Ta có } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC}; \quad \widehat{CAM} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{CM}$$

$$\text{Lại có } \text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{CM} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{ABC} + \widehat{CAM} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} + \widehat{BAH} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{BAH} = \widehat{CAM} \text{ hay } \widehat{BAH} = \widehat{OAC}.$$

Bài 3: Cho đường tròn (O) , hai dây cung AB và CD của đường tròn (O) cắt nhau tại I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng : $IA \cdot IB = IC \cdot ID$

Lời giải



Xét $\triangle ICA$ và $\triangle IBD$ có $\widehat{AIC} = \widehat{BID}$ (đối đỉnh)

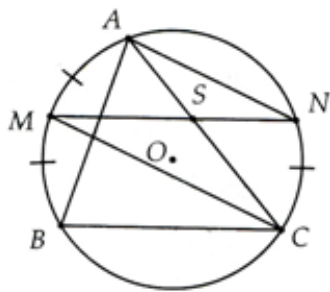
$\widehat{ICA} = \widehat{IBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

Do đó $\triangle ICA \sim \triangle IBD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{IC}{IB} \Rightarrow IA \cdot IB = IC \cdot ID.$$

Bài 4: Cho đường tròn (O) có các dây cung AB, BC, CA . Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB . Vẽ dây MN song song với BC và gọi S là giao điểm của MN và AC . Chứng minh $SM = SC$ và $SN = SA$.

Lời giải



* Ta có $MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{BCM}$ (hai góc so le trong)

Vì M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB .

Nên $\widehat{MA} = \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{ACM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{M} = \widehat{ACM} \Rightarrow \Delta SMC$ cân tại S

$\Rightarrow SM = SC$

* Ta có $\widehat{M} = \widehat{CAN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN)

Mà $\widehat{ACM} = \widehat{ANM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Lại có $\Rightarrow \widehat{M} = \widehat{ACM}$ (cmt)

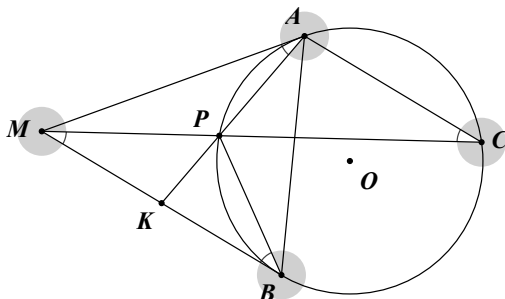
$\Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{ANM} \Rightarrow \Delta SAN$ cân tại $S \Rightarrow SN = SA$

Bài 5: Cho 2 điểm A và B thuộc đường tròn (O) . Các tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau tại M . Từ A kẻ đường thẳng song song với MB , cắt (O) tại C . MC cắt (O) tại P . Các tia AP và MB cắt nhau tại K .

a) Chứng minh $MK^2 = AK.PK$

b) Chứng minh $MK = KB$

Lời giải



a) Ta có $AC \parallel MB \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{BMC}$ (Hai góc so le trong).

Mà $\widehat{C} = \widehat{MAP}$ (Góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn $\widehat{AP}$).

$$\Rightarrow \widehat{MAP} = \widehat{BMC} \text{ (Cùng bằng } \widehat{C} \text{)}.$$

Xét $\triangle KMP$ và $\triangle KAM$ có:

$$\widehat{MAP} = \widehat{BMC} \text{ (Chứng minh trên).}$$

$\widehat{MKA}$ là góc chung.

$$\Rightarrow \triangle KMP \sim \triangle KAM \text{ (g.g).}$$

$$\Rightarrow \frac{MK}{AK} = \frac{PK}{MK} \Rightarrow MK^2 = AK \cdot PK \quad (1)$$

b) Xét $\triangle KBP$ và $\triangle KAB$ có:

$$\widehat{KBP} = \widehat{KAB} \text{ (Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây, góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{PB} \text{)}.$$

$\widehat{AKB}$ là góc chung.

$$\Rightarrow \triangle KBP \sim \triangle KAB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{KB}{AK} = \frac{PK}{KB} \Rightarrow KB^2 = AK \cdot PK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MK = KB$.

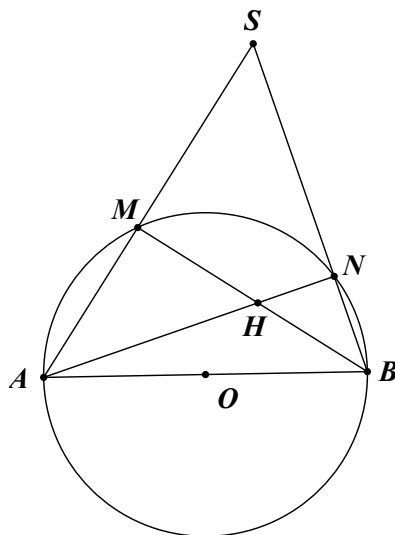
Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải

- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90°
- Hoặc dùng tính chất ba đường cao của tam giác gặp nhau tại một điểm
- Chứng minh hai tia trùng nhau hoặc đối nhau.
- Hai đầu đường kính thì thẳng hàng với tâm.
- Từ một điểm chỉ có thể vẽ được một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước

Bài 1: Cho đường tròn (O) , đường kính AB . S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N . Gọi H giao điểm của BM và AN . Chứng minh rằng $SH \perp AB$.

Lời giải



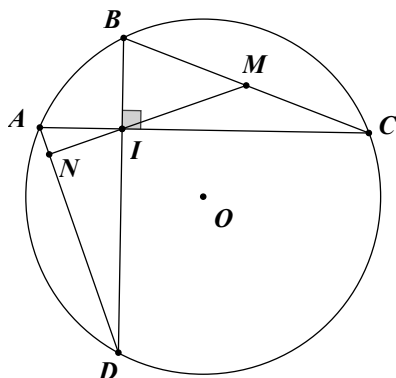
Ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle SAB$ có AN, BM là hai đường cao. Mà H là giao điểm của AN và BM suy ra H là trọng tâm $\triangle SAB$

$\Rightarrow SH$ là đường cao trong thứ ba của $\triangle SAB \Rightarrow SH \perp AB$.

Bài 2: Trong đường tròn (O) có dây AC và BD vuông góc với nhau tại I . Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh rằng $IM \perp AD$.

Lời giải



Gọi $N = IM \cap AD$.

$AC \perp BD$ tại I nên $\triangle BCI$ vuông tại I .

Mà $MB = MC \Rightarrow MI = MB$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông) nên $\triangle MBI$ cân.

do đó $\widehat{MIB} = \widehat{MBI}$ mà $\widehat{NID} = \widehat{BIM}$ đối đỉnh do đó $\widehat{MBI} = \widehat{NID}$.

Ta có $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ (góc nội tiếp chắn $\widehat{AB}$).

Mà $\widehat{BCA} + \widehat{MBI} = 90^\circ$ ($\triangle BCI$ vuông tại I .)

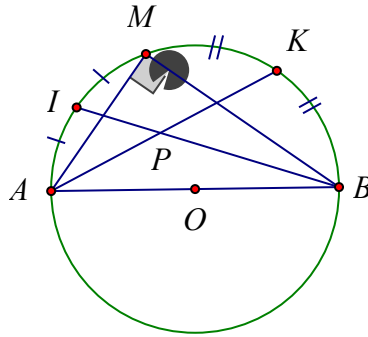
Suy ra $\widehat{NID} + \widehat{BDA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEI} = 90^\circ$ hay $MI \perp AD$.

Bài 3: Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB .

a) Chứng minh ba điểm A, O, B thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm của AK và BI . Chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$

Lời giải



a, Ta có $A, M, B \in (O) \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$

Mà $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm, $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow A, O, B$ thẳng hàng

b, Ta có I là điểm chính giữa của cung nhỏ $MA \Rightarrow \widehat{IA} = \widehat{IM}$

$\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow BI$ là đường phân giác của $\triangle AMB$

Lại có K là điểm chính giữa của cung nhỏ $MB \Rightarrow \widehat{KM} = \widehat{KB}$

$\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{KAM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow AK$ là đường phân giác của $\triangle AMB$

Mà P là giao điểm của hai đường phân giác AK và BI .

Do đó P là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AMB$

Bài 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AF .

a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2} AH$.

$$\Rightarrow FB \perp AB; \quad FC \perp AC$$
$$\Rightarrow BD \perp AC; CE \perp AB$$

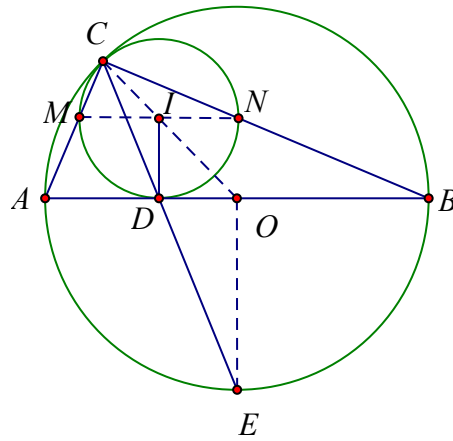
$\Rightarrow$ Tứ giác $BFCH$ là hình bình hành

Vaayh ba điểm H, M, F thẳng hàng.

$$\Rightarrow MO \text{ là đường trung bình của } \triangle AHF \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$$

c) Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định.

Hình học 9


$$\Rightarrow \widehat{MIN} = 90^\circ \Leftrightarrow MN \text{ là đường kính của đường tròn } (I)$$

b) Vì đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C nên C, I, O thẳng hàng

$$\Delta ICN \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{ICN} = \widehat{INC}$$
$$\Rightarrow \widehat{INC} = \widehat{OBC} \text{ mà hai góc này ở vị trí đồng vị} \Rightarrow MN \parallel AB \quad (2)$$
$$\text{Ta có } ID \perp AB \Leftrightarrow \widehat{DM} = \widehat{DN} \Leftrightarrow \widehat{MCD} = \widehat{NCD} \Leftrightarrow \widehat{ACE} = \widehat{BCE} \Rightarrow \widehat{EA} = \widehat{EB}$$

Do đó E cố định. Vậy CD luôn đi qua một điểm cố định E

BÀI 5. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

I. Độ dài đường tròn. Cung tròn

1. Độ dài C (chu vi) của một đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$

Nếu gọi d là độ dài đường kính của đường tròn ($d = 2R$) thì $C = \pi d$

Trong đó $\pi \approx 3.14$

2. Trên đường tròn bán kính R , độ dài l của một cung n° là: $l = \frac{n}{180} \pi R$.

II. Diện tích hình tròn, quạt tròn.

1. Diện tích S của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$

2. Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó. Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° là:

$$S_q = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{l \cdot R}{2} \quad (l \text{ là độ dài cung } n^\circ \text{ của hình quạt tròn})$$

3. Hình vành khăn (vành khuyên) là phần hình tròn giới hạn bởi đường tròn đồng tâm

Diện tích hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm bán kính R và r là:

$$S_v = \pi(R^2 - r^2) \quad (R > r).$$

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Công thức tính độ dài của đường tròn, bán kính R là

- A. $C = 2\pi R^2$. B. $C = \pi R$. C. $C = \pi d^2$. D. $C = 2\pi R$.

Câu 2: Công thức tính độ dài của một cung tròn n° , bán kính R là

- A. $l = \frac{\pi R n}{180}$. B. $l = \frac{\pi R n}{360}$. C. $l = \frac{\pi R n^2}{180}$. D. $l = \pi R n$.

Câu 3: Một cung tròn của đường tròn bán kính R có độ dài là l . Khi đó diện tích hình quạt tròn ứng với cung đó là

- A. $\frac{l \cdot R}{4}$. B. $\frac{l \cdot R}{2}$. C. $\frac{l^2 \cdot R}{4}$. D. $\frac{l^2 \cdot R}{2}$.

Câu 4: Công thức tính diện tích S của hình tròn bán kính R là

- A. $S = 2\pi R$. B. $S = \pi R^2$. C. $S = 2\pi R^2$. D. $S = \pi^2 R$.

Câu 5: Diện tích S của hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức

A. $S = \frac{\pi Rn}{360}$.

B. $S = \frac{\pi R^2 n}{180}$.

C. $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$.

D. $S = \frac{\pi Rn}{180}$.

Câu 6: Diện tích hình tròn có bán kính $r = 4\text{ cm}$ là

A. $16\pi\text{ cm}^2$.

B. $2\pi\text{ cm}^2$.

C. $8\pi\text{ cm}^2$.

D. $4\pi\text{ cm}^2$.

Câu 7: Chu vi hình tròn có đường kính $d = 4\text{ cm}$ là

A. $16\pi\text{ cm}$.

B. $2\pi\text{ cm}$.

C. $8\pi\text{ cm}$.

D. $4\pi\text{ cm}$.

Câu 8: Chu vi hình tròn có bán kính $r = 5\text{ cm}$ là

A. $5\pi\text{ cm}$.

B. $10\pi\text{ cm}$.

C. $25\pi\text{ cm}$.

D. $20\pi\text{ cm}$.

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9: Hai bán kính OA, OB của đường tròn $(O; R)$ tạo với nhau một góc 75° , độ dài cung nhỏ AB là

A. $\frac{3\pi R}{4}$.

B. $\frac{5\pi R}{12}$.

C. $\frac{7\pi R}{24}$.

D. $\frac{4\pi R}{5}$.

Câu 10: Chu vi vành xe đạp có đường kính 65 cm bằng

A. $65\pi\text{ cm}$.

B. $32,5\pi\text{ cm}$.

C. $1,3\pi\text{ cm}$.

D. $130\pi\text{ cm}$.

Câu 11: Độ dài cung AB của đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ là 20 cm , diện tích hình quạt tròn OAB bằng

A. 500 cm^2 .

B. 50 cm^2 .

C. 100 cm^2 .

D. 20 cm^2 .

Câu 12: Cho đường tròn $(O; 2\text{ cm})$, khi đó độ dài cung 60° của đường tròn này bằng

A. $\frac{\pi}{3}\text{ cm}$.

B. $\frac{3\pi}{2}\text{ cm}$.

C. $\frac{\pi}{2}\text{ cm}$.

D. $\frac{2\pi}{3}\text{ cm}$.

Câu 13: Độ dài của một đường tròn là $25,12\text{ cm}$ thì bán kính đường tròn đó bằng (lấy $\pi \approx 3,14$)

A. 8 cm .

B. 4 cm .

C. 16 cm .

D. $12,56\text{ cm}$.

Câu 14: Diện tích của hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và $(O; 3\text{ cm})$ bằng

A. 7 cm^2 .

B. 25 cm^2 .

C. $7\pi\text{ cm}^2$.

D. $25\pi\text{ cm}^2$.

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15: Một vườn cỏ hình vuông có cạnh là 50 m , người ta buộc một con bò ở góc vườn với sợi dây thừng dài 15 m . Hỏi với cách buộc đó thì con bò có thể ăn diện tích cỏ lớn nhất là

A. $2500\pi\text{ m}^2$.

B. $300\pi\text{ m}^2$.

C. $\frac{225}{4}\pi\text{ m}^2$.

D. $450\pi\text{ m}^2$.

Câu 16: Một hình quạt tròn OAB của đường tròn (O, R) có diện tích $\frac{7\pi R^2}{24}$ (đvdt). Vậy số đo $\widehat{AB}$ bằng

- A. 90° . B. 150° . C. 120° . D. 105° .

Câu 17: Hình vuông có diện tích 16 cm^2 thì hình tròn ngoại tiếp hình vuông có diện tích là

- A. $8\pi\text{ cm}^2$. B. $16\pi\text{ cm}^2$. C. $4\pi\text{ cm}^2$. D. $2\pi\text{ cm}^2$.

Câu 18: Diện tích hình quạt tròn có bán kính 6 cm và số đo cung bằng 36° là

- A. $\frac{6}{5}\pi\text{ cm}^2$. B. $\frac{36}{5}\pi\text{ cm}^2$. C. $\frac{18}{5}\pi\text{ cm}^2$. D. $\frac{12}{5}\pi\text{ cm}^2$.

IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 19: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = R\sqrt{3}$. Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB là

- A. $\frac{R^2}{12}(3\sqrt{3} - 4\pi)$. B. $\frac{R^2}{12}(\pi - 3)$. C. $\frac{R^2}{12}(4\pi - \sqrt{3})$. D. $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$

Câu 20: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp hình vuông $ABCD$. Biết $R + r = 3\sqrt{2}\text{ cm}$. Khi đó, độ dài đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có kết quả bằng

- A. $(12 - 6\sqrt{2})\pi\text{ cm}$. B. $(18 - 6\sqrt{2})\pi\text{ cm}$. C. 8 cm . D. $12 - 6\sqrt{2}\text{ cm}$.

B. CÁC DẠNG TỰ LUẬN

Dạng 1. Tính độ dài đường tròn, cung tròn

Phương pháp giải:

Vận dụng các công thức để tính yếu tố chưa biết

$$C = 2\pi R = \pi d ; l = \frac{\pi R n}{180}$$

Bài 1: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	4		
Đường kính d của đường tròn		6	
Độ dài C của đường tròn			31,4

Bài 2: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	2	3	
Số đo n° của cung tròn		30°	125°
Độ dài l của đường tròn	4,28		15,26

Bài 3: a) Tính độ dài cung tròn có số đo $n = 80^\circ$ và bán kính $R = 3,5\text{cm}$ (lấy số $\pi \approx 3,14$)

b) Tính chu vi vành xe biết đường kính 600mm (lấy số $\pi \approx 3,14$)

Bài 4: Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, hai bánh xe sau có đường kính là $1,672\text{m}$ và bánh trước có đường kính là 88cm . Hỏi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng? (lấy số $\pi \approx 3,14$)

Bài 5: Đường xích đạo của trái đất có độ dài 4000km . hãy tính bán kính trái đất (lấy số $\pi \approx 3,14$).

Bài 6: Cho đường tròn (O, R) , dây $AB = R$

a) Tính số đo góc AOB

b) Tính độ dài cung nhỏ AB

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Hãy tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 8: Vĩ độ của Hà Nội là $20^\circ 01'$, mỗi vòng kinh tuyến dài khoảng 4000km . Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo.

Dạng 2. Diện tích hình tròn, quạt tròn.

Phương pháp giải: Vận dụng công thức về diện tích.

$$\text{Diện tích hình tròn: } S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\text{Diện tích hình quạt tròn có số đo cung } n^\circ: S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}$$

Bài 9: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	3		
Độ dài C của đường tròn		21,98	
Diện tích S của đường tròn			314
Số đo n° của cung tròn	55°		27°
Diện tích hình quạt tròn cung n°		2,67	

Bài 10: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	3		
Độ dài C của đường tròn			
Diện tích S của đường tròn			31,4
Số đo n° của cung tròn			
Diện tích hình quạt tròn cung n°			

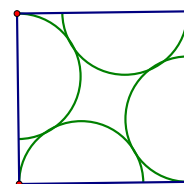
Bài 11: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm M thuộc AB . Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M . Giả sử $AM = 1\text{cm}$; $CD = 2\sqrt{3}\text{cm}$. Tính

- Độ dài đường tròn (O)
- Độ dài cung CAD

Bài 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2\sqrt{3}\text{cm}$; $BC = 2\text{cm}$. Vẽ đường tròn (O) đi qua 4 đỉnh của hình chữ nhật này.

- Tính diện tích đường tròn (O)
- Tính tổng diện tích 4 hình viên phân
- Tính diện tích hình viên phân do dây BC tạo với cung nhỏ BC

Bài 13: Bốn nửa hình tròn với bán kính là 2 được đặt trong hình vuông như hình bên. Hãy tính diện tích hình vuông?



Bài 14: Một cửa sổ dạng hình vòm gồm phần hình chữ nhật phía dưới và nửa hình tròn phía trên. Phần hình chữ nhật có chiều dài của cạnh đứng là 1m chiều dài cạnh ngang là $1,2\text{m}$. Biết giá mỗi mét vuông cửa là 700000 đồng. Hãy tính giá tiền của cửa sổ trên?



Bài 15: Cho đường tròn $(O, 10\text{cm})$, đường kính AB . Điểm $M \in (O)$ sao cho $\widehat{BAM} = 45^\circ$. Tính diện tích hình quạt AOM .

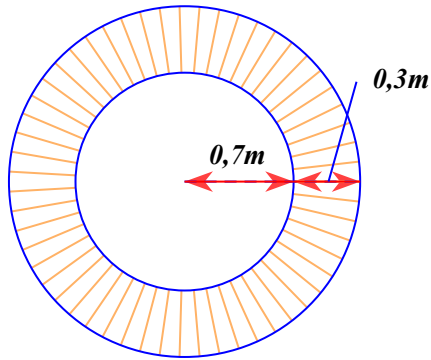
Dạng 3. Diện tích hình vành khuyên.

Phương pháp giải: Vận dụng công thức về diện tích.

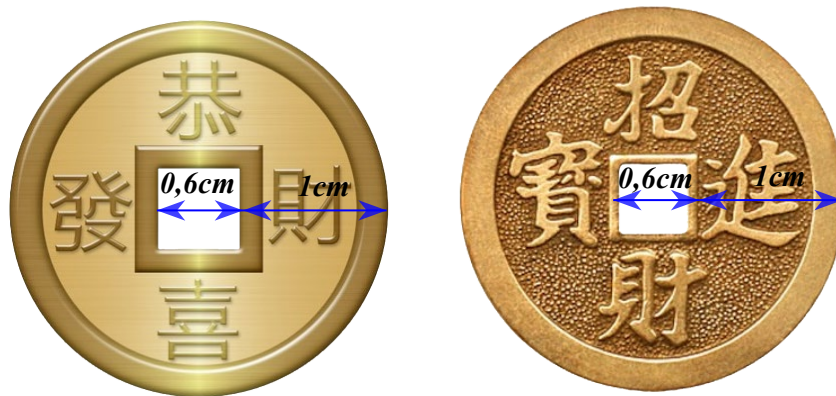
$$\text{Diện tích } S = \pi(R_1^2 - R_2^2)$$

Bài 16: Tính diện tích của hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là 4cm, 7cm.

Bài 17: Miệng giếng nước là một hình tròn có bán kính $0,7\text{m}$. Người ta xây thành giếng rộng $0,3\text{m}$ bao quanh miệng giếng. Tính diện tích của thành giếng đó.



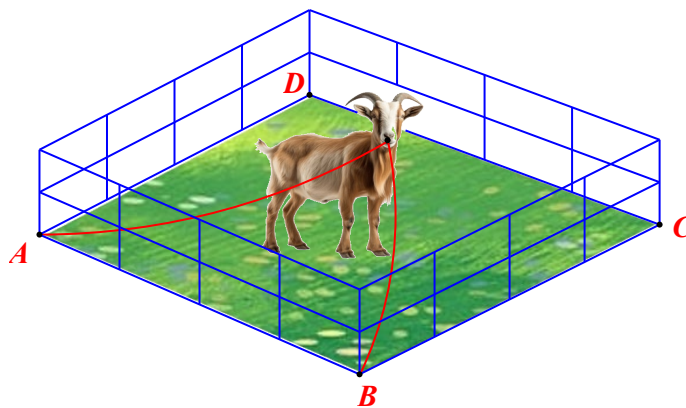
Bài 18: Người ta làm đồng xu có kích thước như hình vẽ. Hãy tính diện tích hai bề mặt trên và dưới phần kim loại làm đồng xu.



Bài 19: Một vườn có hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 40m$, $AD = 30m$. Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B . Có hai cách buộc:

- Mỗi dây thừng dài $20m$.
- Một dây thừng dài $30m$ và dây thừng kia dài $10m$.

Hỏi với cách buộc nào thì diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn?



Bài 20: Tính diện tích của hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là $3cm$, $8cm$.

ĐÁP ÁN VÀ GIẢI CHI TIẾT:**D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	A	B	B	C	A	B	B	B	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	D	B	C	D	D	A	C	D	A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT**

Câu 1: _NB_ Công thức tính độ dài của đường tròn, bán kính R là

- A. $C = 2\pi R^2$. B. $C = \pi R$. C. $C = \pi d^2$. **D. $C = 2\pi R$.**

Lời giải

Chọn D

Độ dài đường tròn = Chu vi hình tròn = $2\pi R$.

Câu 2: _NB_ Công thức tính độ dài của một cung tròn n° , bán kính R là

- A. $l = \frac{\pi R n}{180}$.** B. $l = \frac{\pi R n}{360}$. C. $l = \frac{\pi R n^2}{180}$. D. $l = \pi R n$.

Lời giải

Chọn A

Công thức: SGK.

Câu 3: _NB_ Một cung tròn của đường tròn bán kính R có độ dài là l . Khi đó diện tích hình quạt tròn ứng với cung đó là

- A. $\frac{l.R}{4}$. **B. $\frac{l.R}{2}$.** C. $\frac{l^2.R}{4}$. D. $\frac{l^2.R}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Công thức: SGK.

Câu 4: _NB_ Công thức tính diện tích S của hình tròn bán kính R là

- A. $S = 2\pi R$. **B. $S = \pi R^2$.** C. $S = 2\pi R^2$. D. $S = \pi^2 R$.

Lời giải

Chọn B

Công thức: SGK.

Câu 5: _NB_ Diện tích S của hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức

A. $S = \frac{\pi R n}{360}$.
B. $S = \frac{\pi R^2 n}{180}$.
C. $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$.
D. $S = \frac{\pi R n}{180}$.

Lời giải**Chọn C**

Công thức: SGK.

Câu 6: _NB_ Diện tích hình tròn có bán kính $r = 4$ cm là

A. $16\pi \text{ cm}^2$.
B. $2\pi \text{ cm}^2$.
C. $8\pi \text{ cm}^2$.
D. $4\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải**Chọn A**

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi (\text{cm}^2).$$

Câu 7: _NB_ Chu vi hình tròn có đường kính $d = 4$ cm là

A. $16\pi \text{ cm}$.
B. $2\pi \text{ cm}$.
C. $8\pi \text{ cm}$.
D. $4\pi \text{ cm}$.

Lời giải**Chọn D**

$$C = \pi d = \pi \cdot 4 = 4\pi (\text{cm}).$$

Câu 8: _NB_ Chu vi hình tròn có bán kính $r = 5$ cm là

A. $5\pi \text{ cm}$.
B. $10\pi \text{ cm}$.
C. $25\pi \text{ cm}$.
D. $20\pi \text{ cm}$.

Lời giải**Chọn B**

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 5 = 10\pi (\text{cm})$$

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU**Câu 9:** _TH_ Hai bán kính OA, OB của đường tròn $(O; R)$ tạo với nhau một góc 75° , độ dài cung nhỏ AB là

A. $\frac{3\pi R}{4}$.
B. $\frac{5\pi R}{12}$.
C. $\frac{7\pi R}{24}$.
D. $\frac{4\pi R}{5}$.

Lời giải**Chọn B**

$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi R \cdot 75}{180} = \frac{5\pi R}{12}.$$

Câu 10: _TH_ Chu vi vành xe đạp có đường kính 65cm bằng

- A.** 65π cm. **B.** $32,5\pi$ cm. **C.** $1,3\pi$ cm. **D.** 130π cm.

Lời giải

Chọn A

$$C = \pi d = \pi \cdot 65 = 65\pi (cm).$$

Câu 11: _TH_ Độ dài cung AB của đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ là 20 cm, diện tích hình quạt tròn OAB bằng

- A.** 500 cm^2 . **B.** 50 cm^2 . **C.** 100 cm^2 . **D.** 20 cm^2 .

Lời giải

Chọn B

$$S = \frac{lR}{2} = \frac{20 \cdot 5}{2} = 50 (cm^2).$$

Câu 12: _TH_ Đường tròn $(O; 2\text{ cm})$, độ dài cung 60° của đường tròn này bằng

- A.** $\frac{\pi}{3}$ cm. **B.** $\frac{3\pi}{2}$ cm. **C.** $\frac{\pi}{2}$ cm. **D.** $\frac{2\pi}{3}$ cm.

Lời giải

Chọn D

$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 60}{180} = \frac{2\pi}{3} (cm).$$

Câu 13: _TH_ Độ dài của một đường tròn là 25,12 cm thì bán kính đường tròn đó (lấy $\pi \approx 3,14$) bằng

- A.** 8 cm. **B.** 4 cm. **C.** 16 cm. **D.** 12,56 cm.

Lời giải

Chọn B

$$C = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{C}{2\pi} = \frac{25,12}{2 \cdot 3,14} = 4 (cm).$$

Câu 14: _TH_ Diện tích của hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và $(O; 3\text{ cm})$ bằng

- A.** 7 cm^2 . **B.** 25 cm^2 . **C.** $7\pi\text{ cm}^2$. **D.** $25\pi\text{ cm}^2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Diện tích hình vành khăn } S = \pi(R_1^2 - R_2^2) = \pi(4^2 - 3^2) = 7\pi(\text{cm}^2)$$

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15: _VD_ Một vườn cỏ hình vuông có cạnh là 50m, người ta buộc một con bò ở góc vườn với sợi dây thừng dài 15m. Hỏi với cách buộc đó thì con bò có thể ăn diện tích cỏ lớn nhất là

- A. $2500\pi \text{ m}^2$. B. $300\pi \text{ m}^2$. C. $\frac{225}{4}\pi \text{ m}^2$. D. $450\pi \text{ m}^2$.

Lời giải

Chọn C

$$R = 15 \text{ m}$$

Người ta buộc một con bò ở góc vườn $\Rightarrow n^\circ = 90^\circ$

$$\text{Con bò có thể ăn diện tích cỏ lớn nhất là } S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 90}{360} = \frac{225}{4}\pi (\text{m}^2).$$

Câu 16: _VD_ Một hình quạt tròn OAB của đường tròn (O, R) có diện tích $\frac{7\pi R^2}{24}$ (đvdt). Vậy số đo $\widehat{AB}$ bằng

- A. 90° . B. 150° . C. 120° . D. 105° .

Lời giải

Chọn D

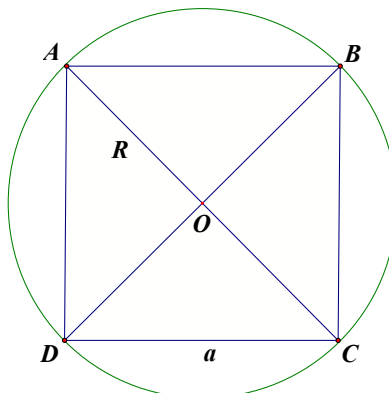
$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \Rightarrow n = \frac{360S}{\pi R^2} = \frac{360 \cdot \frac{7\pi R^2}{24}}{\pi R^2} = 105 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AB} = 105^\circ.$$

Câu 17: _VD_ Hình vuông có diện tích 16cm^2 thì hình tròn ngoại tiếp hình vuông có diện tích là

- A. $8\pi \text{ cm}^2$. B. $16\pi \text{ cm}^2$. C. $4\pi \text{ cm}^2$. D. $2\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Diện tích hình vuông } 16\text{cm}^2 \Rightarrow \text{Cạnh hình vuông } a = 4\text{cm}$$

Bán kính hình tròn ngoại tiếp hình vuông là $R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

Diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông là $S = \pi R^2 = \pi (2\sqrt{2})^2 = 8\pi (\text{cm}^2)$.

Câu 18: _VD_. Diện tích hình quạt tròn có bán kính 6 cm số đo cung bằng 36° là

A. $\frac{6}{5}\pi \text{ cm}^2$.

B. $\frac{36}{5}\pi \text{ cm}^2$.

C. $\frac{18}{5}\pi \text{ cm}^2$.

D. $\frac{12}{5}\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải

Chọn C

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 36}{360} = \frac{18\pi}{5} (\text{cm}^2)$$

IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 19: _VDC_. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = R\sqrt{3}$. Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB là

A. $\frac{R^2}{12}(3\sqrt{3} - 4\pi)$.

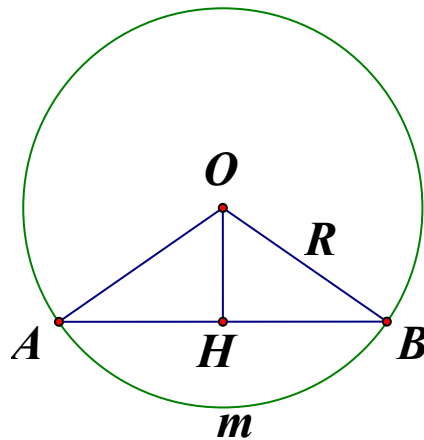
B. $\frac{R^2}{12}(\pi - 3)$.

C. $\frac{R^2}{12}(4\pi - \sqrt{3})$.

D. $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $OH \perp AB$ tại H . Khi đó ta có:

$$HB = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \sin HOB = \frac{HB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{HOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$\text{Diện tích hình quạt tạo bởi cung nhỏ } AB \text{ là } S_1 = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \frac{R}{2}$$

$$\text{Diện tích tam giác } OAB \text{ là } S_2 = \frac{1}{2}OH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB là

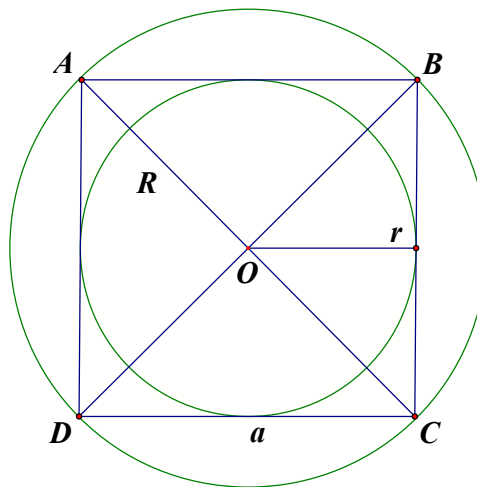
$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Câu 20: _VDC_ Cho hình vuông $ABCD$ Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp hình vuông $ABCD$. Biết $R + r = 3\sqrt{2}$ cm. Tính độ dài đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ được kết quả bằng

- A.** $(12 - 6\sqrt{2})\pi$ cm. **B.** $(18 - 6\sqrt{2})\pi$ cm. **C.** 8 cm. **D.** $12 - 6\sqrt{2}$ cm.

Lời giải

Chọn A



Giả sử: Cạnh hình vuông là a (cm)

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\text{cm}), r = \frac{a}{2}(\text{cm}) \Rightarrow R = r\sqrt{2} \text{ mà } R + r = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = 6 - 3\sqrt{2}(\text{cm})$$

Chu vi đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là

$$C = 2\pi r = 2\pi(6 - 3\sqrt{2}) = (12 - 6\sqrt{2})\pi(\text{cm})$$

Dạng 1. Tính độ dài đường tròn, cung tròn

Phương pháp giải: Vận dụng các công thức để tính yếu tố chưa biết

$$C = 2\pi R = \pi d ; l = \frac{\pi R n}{180}$$

Bài 1: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	4		
Đường kính d của đường tròn		6	
Độ dài C của đường tròn			31,4

Giải:

Bán kính R của đường tròn	4	3	5
Đường kính d của đường tròn	8	6	10
Độ dài C của đường tròn	25,12	18,84	31,4

Bài 2: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	2	3	
Số đo n° của cung tròn		30°	125°
Độ dài l của đường tròn	6,28		15,26

Giải:

Bán kính R của đường tròn	6	3	7
Số đo n° của cung tròn	60°	30°	125°
Độ dài l của đường tròn	6,28	1,57	15,26

Bài 3: a) Tính độ dài cung tròn có số đo $n = 80^\circ$ và bán kính $R = 3,5\text{cm}$ (lấy số $\pi \approx 3,14$)

b) Tính chu vi vành xe biết đường kính 600mm (lấy số $\pi \approx 3,14$)

Giải: a) Độ dài cung tròn là $l = \frac{\pi R n}{180} \approx \frac{3,14 \cdot 3,5 \cdot 80}{180} = 4,88 \text{ cm}$

b) Chu vi vành xe là $C = \pi d \approx 3,14 \cdot 600 = 1884 \text{ mm}$

Bài 4: Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, hai bánh xe sau có đường kính là $1,672\text{m}$ và hai bánh trước có đường kính là 88cm . Hỏi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng? (lấy số $\pi \approx 3,14$)

Giải: Độ dài bánh xe sau là $C_s = \pi d \approx 3,14 \cdot 167,2 = 525,01 \text{ cm}$

Khi bánh sau quay được 20 vòng thì đi được quãng đường là $S_1 = 20C_s = 10500,2 \text{ cm}$

Độ dài bánh xe trước là $C_t = \pi d \approx 3,14.88 = 276,32 \text{ cm}$

Khi bánh sau lăn được 20 vòng thì bánh trước lăn được số vòng là $\frac{10500,2}{276,32} = 38$.

Bài 5: Đường xích đạo của trái đất có độ dài 4000km. Hãy tính bán kính trái đất (lấy số $\pi \approx 3,14$).

Giải: Độ dài đường xích đạo là độ dài đường tròn lớn nhất của quả địa cầu, nên bán kính

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{4000}{2.3,14} \approx 6,370 \text{ km}$$

Bài 6: Cho đường tròn (O,R), dây $AB = R$

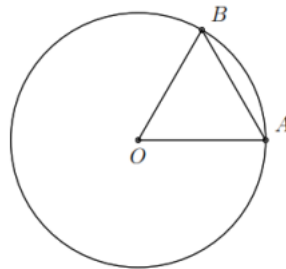
- a) Tính số đo góc AOB b) Tính độ dài cung nhỏ AB

Giải:

- a) Vì $OA = OB = AB = R$ nên tam giác $\triangle AOB$ đều

$$\text{Suy ra } n^\circ = \widehat{AOB} = 60^\circ$$

- b) Ta có độ dài cung nhỏ AB là $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot R \cdot 60}{180} = \frac{\pi \cdot R}{3}$



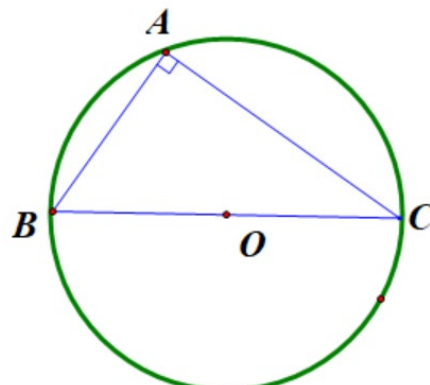
Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$. Hãy tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Giải: Xét tam giác ABC vuông tại A

$$\begin{aligned} \text{Theo định lý Py ta có } BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ BC^2 &= 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Vì tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của BC và BC là đường kính. Khi đó bán kính đường tròn là $R = BC : 2 = 5 : 2 = 2,5 \text{ cm}$

Độ dài đường tròn là $C = 2\pi R \approx 2.3,14.2,5 = 15,7 \text{ cm}$



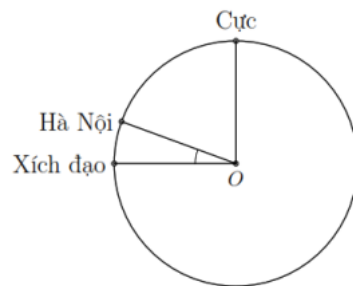
Bài 8: Vĩ độ của Hà Nội là $20^\circ 01'$, mỗi vòng kinh tuyến dài khoảng 4000km. Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo.

Giải: Bán kính trái đất là $R \approx 6370 \text{ km}$

Số đo cung từ Hà Nội đến xích đạo là $n = 20^\circ 01' = 20,00167^\circ$

Độ dài cung từ Hà Nội đến xích đạo là

$$l = \frac{Rn\pi}{180} = \frac{6370.20,00167.3,14}{180} \approx 2222,61 \text{ km}$$



Dạng 2. Diện tích hình tròn, quạt tròn.

Phương pháp giải: Vận dụng công thức về diện tích.

$$\text{Diện tích hình tròn: } S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\text{Diện tích hình quạt tròn có số đo cung } n^{\circ}: S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}$$

Bài 9: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	3		
Độ dài C của đường tròn		21,98	
Diện tích S của đường tròn			314
Số đo n° của cung tròn	55°		27°
Diện tích hình quạt tròn cung n°		2,67	

Giải:

Bán kính R của đường tròn	3	3,5	10
Độ dài C của đường tròn	18,84	21,98	62,8
Diện tích S của đường tròn	28,26	38,47	314
Số đo n° của cung tròn	55°	25°	27°
Diện tích hình quạt tròn cung n°	4,32	2,67	23,55

Bài 10: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn			
Độ dài C của đường tròn	31,4		
Diện tích S của đường tròn		58,06	
Số đo n° của cung tròn	65°		70°
Diện tích hình quạt tròn cung n°		2,21	49,46

Giải:

Bán kính R của đường tròn	5	4,3	9
Độ dài C của đường tròn	31,4	27	56,52
Diện tích S của đường tròn	78,5	58,06	254,34
Số đo n° của cung tròn	65°	38°	70°
Diện tích hình quạt tròn cung n°	14,17	2,21	49,46

Bài 11: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm M thuộc AB . Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M . Giả sử $AM = 1\text{cm}$; $CD = 2\sqrt{3}\text{ cm}$. Tính

- Độ dài đường tròn (O)
- Độ dài cung CAD

Giải: a) Xét đường tròn (O) có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Từ $AB \perp CD$ với AB là đường kính, CD là dây nên $MC = MD = \sqrt{3}\text{cm}$ và $CM \perp AB$

Xét $\triangle ACB$ vuông tại C có $CM \perp AB$ nên $CM^2 = MA.MB$ (HTL trong TGV) $MB = \frac{CM^2}{MA} = \frac{(\sqrt{3})^2}{1} = 3\text{cm}$

Khi đó $AB = AM + MB = 1 + 3 = 4\text{cm}$

$\Rightarrow R = AB : 2 = 2\text{cm}$

Độ dài đường tròn là: $C = 2\pi R = 2\pi.2 = 4\pi\text{ cm}$

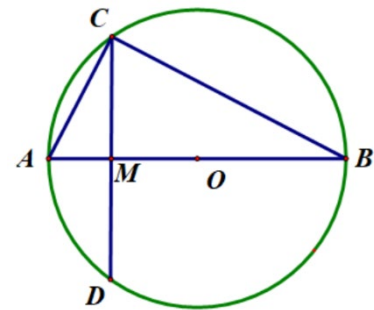
b) Ta có $OA = 2\text{cm}, MA = 1\text{cm} \Rightarrow MA = MO$

Từ giả thiết $CM \perp OA \Rightarrow CA = CO$ và $OC = OA = R$

$\Rightarrow CA = CO = OA \Rightarrow \triangle AOC$ đều

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ$. Do đó $\widehat{DOC} = 120^\circ$

Độ dài cung CAD là $\frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi.2.120}{180} = \frac{4\pi}{3}\text{ cm}$



Bài 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2\sqrt{3}\text{ cm}$; $BC = 2\text{cm}$. Vẽ đường tròn (O) đi qua 4 đỉnh của hình chữ nhật này.

- Tính diện tích đường tròn (O)
- Tính tổng diện tích 4 hình viên phân
- Tính diện tích hình viên phân do dây BC tạo với cung nhỏ BC

Giải:

a) Vì tam giác ABC vuông tại B nên theo định lý Py-ta-go ta có

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4\text{cm}$$

$$OA = OC = AC : 2 = R = 2\text{cm}$$

Diện tích hình tròn là

$$S_{(O)} = \pi R^2 = 4\pi \approx 12,56\text{cm}^2$$

b) Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = AB.BC = 2\sqrt{3}.2 = 4\sqrt{3} \approx 5,73\text{ cm}^2$$

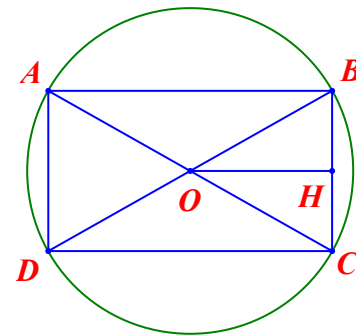
Diện tích 4 hình viên phân là

$$S_{VP} = S_{(O)} - S_{ABCD} \approx 12,56 - 5,73 = 6,83\text{ cm}^2$$

c) Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $OA = OB = OC = OD$

Xét tam giác AOB có $OA = OB = BC = 2\text{cm}$ nên tam giác AOB đều $\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{OBC} = 60^\circ$

Kẻ $OH \perp BC$ ta có $OH = BC.\sin OBC = R.\sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$



Diện tích hình viên phân tạo bởi dây BC và cung nhỏ BC là

$$\begin{aligned} S_{vpBC} &= S_{qBOC} - S_{\Delta BOC} = \frac{\pi R^2 n}{360} - \frac{OH \cdot BC}{2} = \frac{\pi R^2 n}{360} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\pi R^2 60}{360} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = 2^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \approx 4 \left(\frac{3,14}{6} - \frac{1,73}{4} \right) \approx 0,36 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Bài 13: Bốn nửa hình tròn với bán kính là 2 được đặt trong hình vuông như hình bên. Hãy tính diện tích hình vuông?

GIẢI

Áp dụng định lý py-ta-go trong tam giác vuông ABC ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\text{hay } 4^2 = 2^2 + (2+x)^2$$

$$x^2 + 4x - 8 = 0$$

Giải phương trình ta được (nhận) $x_1 = 2\sqrt{3} - 2$

$$x_2 = -2\sqrt{3} - 2 < 0 \text{ (loại)}$$

Do đó cạnh hình vuông là: $4 + 2\sqrt{3} - 2 = 2 + 2\sqrt{3}$

Diện tích hình vuông là $s = (2 + 2\sqrt{3})^2 = 16 + 8\sqrt{3}$ (dvdt) (đvdt)

Bài 14: Một cửa sổ dạng hình vòm gồm phần hình chữ nhật phía dưới và nửa hình tròn phía trên. Phần hình chữ nhật có chiều dài của cạnh đứng là $1m$ chiều dài cạnh ngang là $1,2m$. Biết giá mỗi mét vuông cửa là 700000 đồng. Hãy tính giá tiền của cửa sổ trên?

GIẢI

Diện tích cửa phần hình chữ nhật là: $1.1,2 = 1,2m^2$

Diện tích phần nửa hình tròn là $3,14.0,6^2 = 1,13m^2$

Tổng diện tích của cửa sổ là: $1,2 + 1,13 = 2,33m^2$

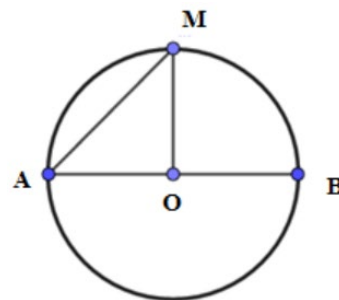
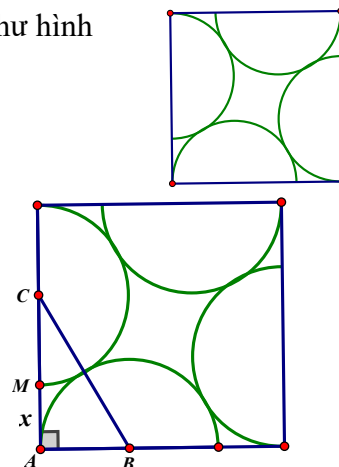
Giá thành cửa sổ là $700000.2,33 = 1631000$ đồng

Bài 15: Cho đường tròn $(O, 10 \text{ cm})$, đường kính AB . Điểm $M \in (O)$ sao cho $\widehat{BAM} = 45^\circ$. Tính diện tích hình quạt AOM .

Giải: Tam giác AOM cân vì $OA = OM$ mà $\widehat{OAM} = \widehat{BAM} = 45^\circ$

Nên tam giác AOM vuông tại O , khi đó $\widehat{AOM} = 90^\circ$

Diện tích hình quạt $S_{AOM} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{3,14.10^2.90}{360} \approx 78,5 \text{ cm}^2$



Dạng 3. Diện tích hình vành khuyên.**Phương pháp giải:** Vận dụng công thức về diện tích.

$$\text{Diện tích } S = \pi(R_1^2 - R_2^2)$$

Bài 16: Tính diện tích của hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là 4cm, 7cm.

Giải:

Diện tích miệng giếng là diện tích hình vành khuyên

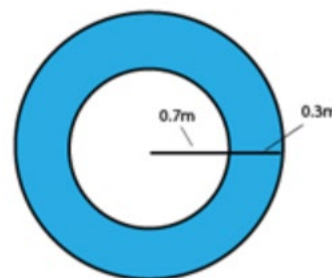
$$S = \pi(7^2 - 4^2) \approx 103,62 \text{ cm}^2$$

Bài 17: Miệng giếng nước là một hình tròn có bán kính 0,7m. Người ta xây thành giếng rộng 0,3m bao quanh miệng giếng. Tính diện tích của thành giếng đó.

Giải: Bán kính của của đường tròn ngoài miệng giếng là
 $0,7 + 0,3 = 1 \text{ m}$

Diện tích miệng giếng là diện tích hình vành khuyên

$$S = \pi(1^2 - 0,7^2) \approx 1,6 \text{ m}^2$$



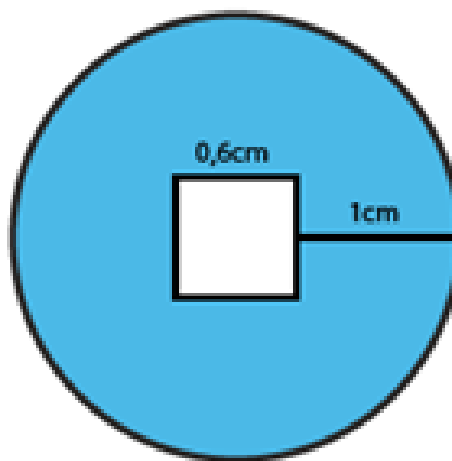
Bài 18: Người ta làm đồng xu có kích thước như hình vẽ. Hãy tính diện tích hai bề mặt trên và dưới phần kim loại làm đồng xu.

Giải: Bán kính đường tròn là: $\frac{0,6}{2} + 1 = 1,3 \text{ cm}$

Diện tích một bề mặt miếng kim loại bằng hiệu diện tích của hình tròn và hình vuông.

Diện tích hai bề mặt miếng kim là:

$$2(3,14 \cdot 1,3^2 - 0,6^2) = 9,9 \text{ cm}^2$$



Bài 19: Một vườn có hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 40 \text{ m}$, $AD = 30 \text{ m}$.

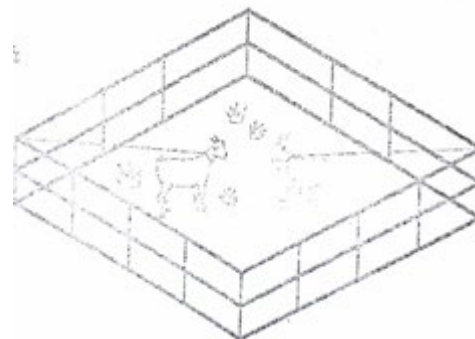
Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B . Có hai cách buộc:

- Mỗi dây thừng dài 20 m .
- Một dây thừng dài 30 m và dây thừng kia dài 10 m .

Hỏi với cách buộc nào thì diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn?

Giải:

Theo cách buộc thứ nhất thì tổng diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được là bằng tổng diện tích của hai hình tròn chia 4, nên ta có:



$$S_1 = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} + \frac{\pi \cdot 20^2}{4} \approx 628m^2$$

Theo cách buộc thứ hai thì tổng diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được là:

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 30^2}{4} + \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \approx 785m^2$$

Vì $S_2 > S_1$ nên với cách buộc thứ hai thì diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn.

Bài 20: Tính diện tích của hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là 4cm, 7cm.

Giải:

Diện tích miếng giềng là diện tích hình vành khuyên

$$S = \pi(8^2 - 3^2) \approx 172,7cm^2$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

1) Định nghĩa đường tròn:

Tập hợp các điểm cách điểm O một khoảng $R > 0$ là đường tròn tâm O bán kính R . Kí hiệu là $(O; R)$

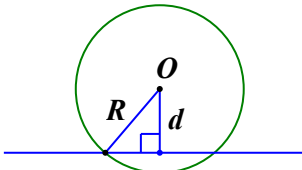
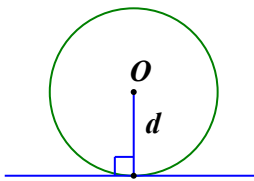
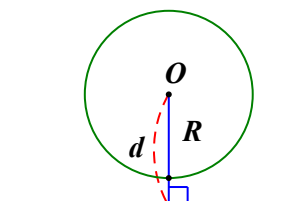
2) Cách xác định đường tròn:

- Biết tâm và bán kính của đường tròn đó.
- Biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn đó.
- Biết 3 điểm không thẳng hàng thì tâm của đường tròn là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác tạo bởi 3 điểm đó.

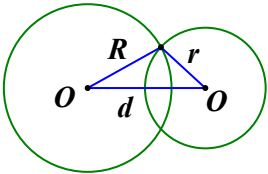
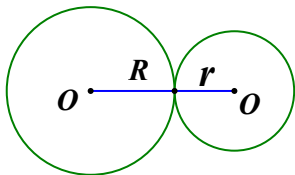
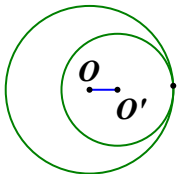
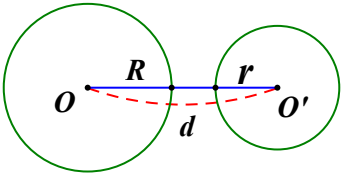
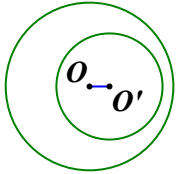
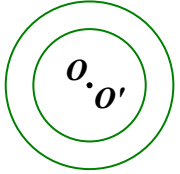
3) Tâm đối xứng, trục đối xứng:

- Đường tròn là hình có 1 tâm đối xứng. Và tâm đối xứng là tâm đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có vô số trục đối xứng, mỗi đường kính của đường tròn là 1 trục đối xứng

4) Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

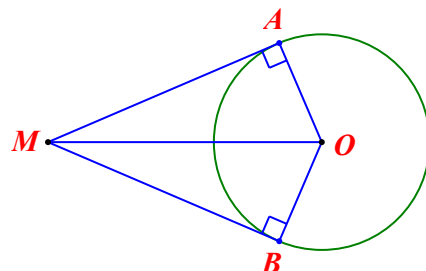
Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d và R
- Đường thẳng và đường tròn cắt nhau 	2	$d < R$
- Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau 	1	$d = R$
- Đường thẳng và đường tròn không giao nhau 	0	$d > R$

5. Vị trí tương đối của hai đường tròn:

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d và R
- Hai đường tròn cắt nhau 	2	$R - r < OO' < R + r$
- Hai đường tròn tiếp xúc nhau + Tiếp xúc ngoài  + Tiếp xúc trong 	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r$
- Hai đường tròn không giao nhau + (O) và (O') ở ngoài nhau  + (O) đựng (O')  + (O) và (O') đồng tâm 	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$ $OO' = 0$

6. Tiếp tuyến của đường tròn

- **Tính chất của tiếp tuyến:** Tiếp tuyến vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
- **Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến:**
 - + Đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung
 - + Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính
 - + Đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.
- **Tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau**
 MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau thì:
 - + $MA = MB$
 - + MO là phân giác của $\widehat{AMB}$
 - + MO là phân giác của $\widehat{AOB}$
- **Tiếp tuyến chung của hai đường tròn:** là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó:



Tiếp tuyến chung ngoài	Tiếp tuyến chung trong

7) Góc ở tâm

- a) Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn (*định nghĩa*)
- b) Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.
- c) Số đo cung lớn bằng hiệu của 360° và số đo cung nhỏ (có cung hai mút với cung lớn).
- d) Số đo của nửa đường tròn bằng 180°

8) Góc nội tiếp

- a) Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa 2 dây cung (*định nghĩa*)
- b) Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo của cung bị chắn.
- c) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- d) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
- e) Góc nội tiếp có số đo nhỏ hơn hoặc bằng 90° có số đo bằng nửa góc ở tâm cùng chắn 1 cung
- f) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông, ngược lại góc vuông nội tiếp thì chắn nửa đường tròn.

9) Độ dài cung tròn, diện tích hình quạt tròn, diện tích hình vành khăn**a. Công thức tính độ dài đường tròn (chu vi đường tròn), cung tròn**

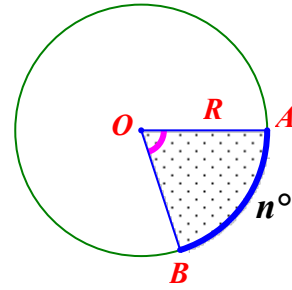
$$C = \pi d = 2\pi R$$

$$l = \frac{n}{180} \pi R$$

b. Công thức tính diện tích hình quạt tròn

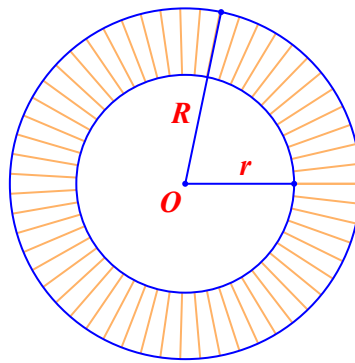
- + Hình quạt tròn là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó.

$$+ \text{ Diện tích hình quạt: } S_q = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{l \cdot R}{2}$$

**c. Công thức tính diện tích hình vành khuyên (hình vành khăn)**

- + Hình vành khuyên (hình vành khăn) là phần nằm giữa hai đường tròn có cùng tâm và bán kính khác nhau (còn gọi là hai đường tròn đồng tâm).

$$+ \text{ Diện tích hình vành khuyên } S_v = \pi(R^2 - r^2) \quad (R > r)$$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT****Câu 1:** Đường tròn là hình**A.** có một trục đối xứng.**B.** có hai trục đối xứng.**C.** không có trục đối xứng.**D.** có vô số trục đối xứng.**Câu 2:** Cho $(O; R)$ và đường thẳng a , gọi d là khoảng cách từ O đến a . Phát biểu nào sau đây là sai:**A.** Nếu $d < R$, thì đường thẳng a cắt đường tròn (O) .**B.** Nếu $d > R$, thì đường thẳng a không cắt đường tròn (O) .**C.** Nếu $d = R$, thì đường thẳng a đi qua tâm O của đường tròn.**D.** Nếu $d = R$, thì đường thẳng a tiếp xúc với (O) .**Câu 3:** Có bao nhiêu đường tròn đi qua ba điểm thẳng hàng?**A.** Một đường tròn**B.** Vô số đường tròn**C.** Không có đường tròn nào**D.** Ba đường tròn**Câu 4:** Hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O'; 2cm)$ $OO' = 5cm$ chúng có vị trí tương đối.**A.** Cắt nhau**B.** Tiếp xúc ngoài**C.** Tiếp xúc trong**D.** (O) đựng (O')

Câu 5: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong. Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó là

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 1 hoặc 3

Câu 6: Chọn khẳng định **đúng**. Trong một đường tròn, số đo cung nhỏ bằng

- A. Số đo cung lớn. B. Số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
C. Số đo của góc ở tâm chắn cung lớn. D. Số đo của cung nửa đường tròn.

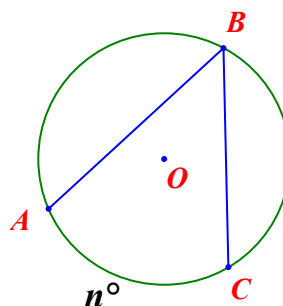
Câu 7: Cho hình vẽ bên, hãy chọn đáp án đúng.

A. $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AnC}$

B. $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{COA}$

C. $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{BC}$

D. A và B đúng.



Câu 8: Hai bán kính OA, OB của đường tròn $(O; R)$ tạo với nhau một góc 75° thì độ dài cung nhỏ AB là

- A. $\frac{3\pi R}{4}$. B. $\frac{5\pi R}{12}$. C. $\frac{7\pi R}{24}$. D. $\frac{4\pi R}{5}$.

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9: Cho hai đường tròn $(O; 15 \text{ cm})$ và $(O'; 8 \text{ cm})$ biết $OO' = 12 \text{ cm}$. Số điểm chung của hai đường tròn là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 10: Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O) , biết $\widehat{B} = 50^\circ$. Khi đó góc $\widehat{BOC}$ có số đo là

- A. 100° . B. 140° . C. 160° . D. 200° .

Câu 11: Đường tròn đường kính $d = 10 \text{ cm}$ có chu vi bằng

- A. $10\pi \text{ cm}$. B. $20\pi \text{ cm}$. C. $30\pi \text{ cm}$. D. $100\pi \text{ cm}$.

Câu 12: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , lấy M thuộc tia đối của tia AB sao cho: $AM = R$. Kẻ tiếp tuyến MC tới đường tròn $(O; R)$. Số đo cung nhỏ $\widehat{BC}$ là:

- A. 120° . B. 100° . C. 60° . D. 80° .

Câu 13: Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O) , biết $\widehat{A} = 50^\circ$. Số đo cung $\widehat{AB}$ là

- A. 130° . B. 140° . C. 65° . D. 100° .

Câu 14: Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có số đo ba góc A, B, C tỉ lệ với các số $3:2:5$. Số đo $\widehat{BOC}$ bằng

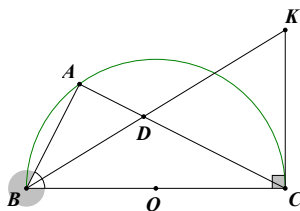
- A. 108° . B. 110° . C. 90° . D. 54° .

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15: Tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm của tam giác ABC , E là hình chiếu của H trên AB . Nếu $\widehat{AOC} = 120^\circ$ thì $\widehat{AHE}$ có số đo là

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 120° .

- Câu 16:** Tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm của tam giác ABC , M là hình chiếu của H trên AC . Nếu $\widehat{AOB} = 140^\circ$ thì $\widehat{AHM}$ có số đo là
A. 140° . **B.** 40° . **C.** 70° . **D.** 120° .
- Câu 17:** Từ một tờ giấy hình vuông người ta cắt ra một hình tròn có diện tích lớn nhất. Biết diện tích phần cắt bỏ đi là 86cm^2 . Diện tích của hình tròn là
A. $\frac{86\pi}{4+\pi}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{86\pi}{4-\pi}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{86}{4-\pi}\text{cm}^2$. **D.** $\frac{86}{4+\pi}\text{cm}^2$.
- Câu 18:** Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 5\text{cm}$. Lấy điểm A trên nửa đường tròn. Phân giác của góc ABC cắt tiếp tuyến tại C và (O) tại K và cắt AC tại D . Biết $AB = 4\text{cm}$. Khi đó.



- A.** $BK = \frac{5\sqrt{10}}{3}$. **B.** $BK = \frac{5\sqrt{10}}{3} - 1$. **C.** $BK = \frac{5\sqrt{10}}{3} + 1$. **D.** $BK = \frac{5\sqrt{10}}{3} + 2$.

IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

- Câu 19:** Cho ba đường tròn $(A; 10\text{cm})$; $(B; 15\text{cm})$; $(C; 15\text{cm})$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tại $M; N; P$ như hình vẽ bên. Diện tích tam giác MNP là
A. 36cm^2 . **B.** 72cm^2 . **C.** 144cm^2 . **D.** 96cm^2 .
- Câu 20:** Từ một tờ giấy hình tròn người ta cắt ra một hình lục giác đều có diện tích lớn nhất. Biết diện tích phần cắt bỏ đi là 54cm^2 . Tính diện tích hình lục giác đều (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).
A. $258,12\text{cm}^2$. **B.** $258,67\text{cm}^2$. **C.** $258,27\text{cm}^2$. **D.** $258,13\text{cm}^2$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	C	C	B	C	B	D	B	C	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	A	A	A	B	C	B	A	B	D

HƯỚNG DẪN**I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT**

Câu 1: Hai bán kính OA, OB của đường tròn $(O; R)$ tạo với nhau một góc 75° thì độ dài cung nhỏ AB là

A. $\frac{3\pi R}{4}$.

B. $\frac{5\pi R}{12}$.

C. $\frac{7\pi R}{24}$.

D. $\frac{4\pi R}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Hai bán kính OA, OB của đường tròn $(O; R)$ tạo với nhau một góc 75° thì độ dài cung nhỏ AB

là: $l = \frac{\pi R \cdot 75^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi R}{12}$.

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 2: Cho hai đường tròn $(O; 15 \text{ cm})$ và $(O'; 8 \text{ cm})$ biết $OO' = 12 \text{ cm}$. Số điểm chung của hai đường tròn là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $R - r < OO' < R + r$ ($15 \text{ cm} - 8 \text{ cm} < 12 \text{ cm} < 15 \text{ cm} + 8 \text{ cm}$)

$\Rightarrow (O; 15 \text{ cm})$ và $(O'; 8 \text{ cm})$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O) , biết $\widehat{B} = 50^\circ$. Khi đó góc $\widehat{BOC}$ có số đo là

A. 100° .

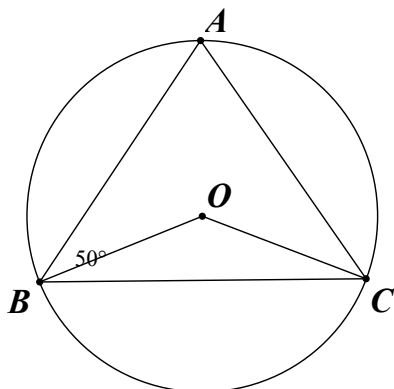
B. 140° .

C. 160° .

D. 200° .

Lời giải

Chọn C



$\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{A} = 180^\circ - 2\widehat{ABC} = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$

Ta có $\widehat{COB}$ là góc ở tâm chắn cung $\widehat{BC}$ nhỏ;

$\widehat{BAC}$ (nhỏ) là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BC}$ nhỏ

Suy ra $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$.

Câu 4: Đường tròn đường kính $d = 10\text{ cm}$ có chu vi bằng

A. $10\pi\text{ cm}$.

B. $20\pi\text{ cm}$.

C. $30\pi\text{ cm}$.

D. $100\pi\text{ cm}$.

Câu 5: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , lấy M thuộc tia đối của tia AB sao cho: $AM = R$. Kẻ tiếp tuyến MC tới đường tròn $(O; R)$. Số đo cung nhỏ $\widehat{BC}$ là:

A. 120° .

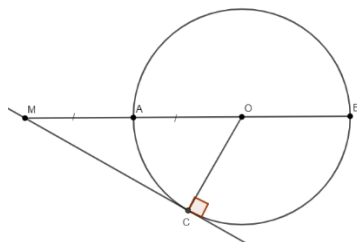
B. 100° .

C. 60° .

D. 80° .

Lời giải

Chọn A



Vì MC là tiếp tuyến với đường tròn $(O; R)$ nên $\triangle MOC$ là tam giác vuông.

$$\Rightarrow \cos \widehat{MOC} = \frac{OC}{OM} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ.$$

Vậy số đo cung nhỏ $\widehat{BC}$ là: 120° .

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O) , biết $\widehat{A} = 50^\circ$. Số đo cung $\widehat{AB}$ là

A. 130° .

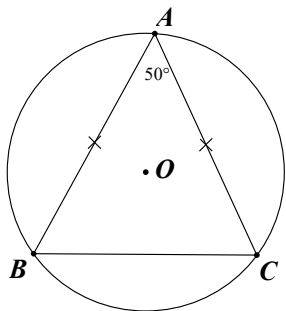
B. 140° .

C. 65° .

D. 100° .

Lời giải

Chọn A



$$\Delta ABC \text{ cân tại } A, \hat{A} = 50^\circ \text{ suy ra } \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

Ta có $sđ \widehat{AB} = 2.\widehat{ACB} = 2.65^\circ = 130^\circ$ (góc nội tiếp).

Câu 7: Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có số đo ba góc A, B, C tỉ lệ với các số $3:2:5$. Số đo $\widehat{BOC}$ bằng

A. 108° .

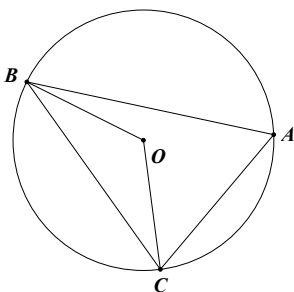
B. 110° .

C. 90° .

D. 54° .

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có số đo ba góc A, B, C tỉ lệ với các số $3:2:5$.

$$\text{nên có } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ và } \frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{5}$$

$$\text{Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau có } \frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{3 + 2 + 5} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ.$$

$$\text{suy ra } \hat{A} = 3.18^\circ = 54^\circ.$$

$$\text{Theo hệ quả góc nội tiếp ta có } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$$

$$\text{Do đó } \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2.54^\circ = 108^\circ.$$

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 8: Tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm của tam giác ABC , E là hình chiếu của H trên AB . Nếu $\widehat{AOC} = 120^\circ$ thì $\widehat{AHE}$ có số đo là

A. 90° .

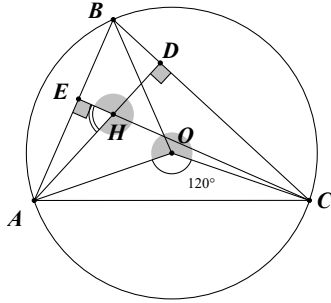
B. 60° .

C. 45° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{AC}$)

Tứ giác $BDHE$ có $\widehat{BDH} + \widehat{DHE} + \widehat{HEB} + \widehat{DBE} = 360^\circ$ (định lý tổng các góc của tứ giác)

$$\Rightarrow \widehat{DHE} = 360^\circ - (\widehat{BDH} + \widehat{HEB} + \widehat{DBE}) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 120^\circ.$$

mà $\widehat{AHE} + \widehat{DHE} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\text{suy ra } \widehat{AHE} = 180^\circ - \widehat{DHE} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Câu 9: Tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm của tam giác ABC , M là hình chiếu của H trên AC . Nếu $\widehat{AOB} = 140^\circ$ thì $\widehat{AHM}$ có số đo là

A. 140° .

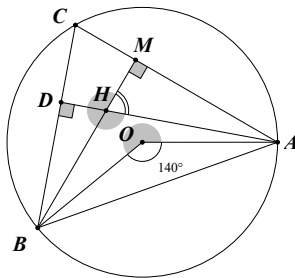
B. 40° .

C. 70° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 140^\circ = 70^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{AB}$)

Tứ giác $CDHM$ có $\widehat{CDH} + \widehat{DHM} + \widehat{HMC} + \widehat{MCD} = 360^\circ$ (định lý tổng các góc của tứ giác)

$$\Rightarrow \widehat{DHM} = 360^\circ - (\widehat{CDH} + \widehat{HMC} + \widehat{MCD}) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 70^\circ) = 110^\circ.$$

mà $\widehat{AHM} + \widehat{DHM} = 180^\circ$ (kề bù)

suy ra $\widehat{AHM} = 180^\circ - \widehat{DHM} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Bài 17. Từ một tờ giấy hình vuông người ta cắt ra một hình tròn có diện tích lớn nhất. Biết diện tích phần cắt bỏ đi là 86cm^2 . Diện tích của hình tròn là

A. $\frac{86\pi}{4+\pi}\text{cm}^2$.

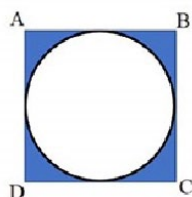
B. $\frac{86\pi}{4-\pi}\text{cm}^2$.

C. $\frac{86}{4-\pi}\text{cm}^2$.

D. $\frac{86}{4+\pi}\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi R là bán kính hình tròn.

Suy ra cạnh của hình vuông là $2R$.

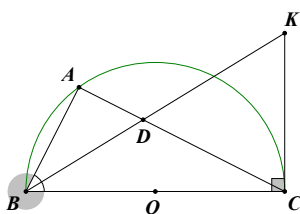
Diện tích phần cắt bỏ đi là 86cm^2 nên ta có phương trình

$$(2R)^2 - \pi R^2 = 86$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{86}{4-\pi}$$

Vậy diện tích hình tròn có diện tích là $S = \pi R^2 = \frac{86\pi}{4-\pi}\text{cm}^2$

Câu 10: Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 5\text{cm}$. Lấy điểm A trên nửa đường tròn. Phân giác của góc ABC cắt tiếp tuyến tại C và (O) tại K và cắt AC tại D . Biết $AB = 4\text{cm}$. Khi đó BK là.



A. $BK = \frac{5\sqrt{10}}{3}$.

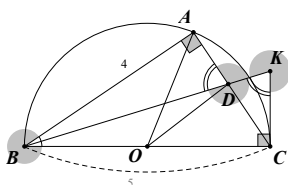
B. $BK = \frac{5\sqrt{10}}{3} - 1$.

C. $BK = \frac{5\sqrt{10}}{3} + 1$.

D. $BK = \frac{5\sqrt{10}}{3} + 2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Áp dụng định lí Pytago cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Áp dụng định lí tính chất đường phân giác cho $\triangle ABC$ có

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \text{ hay } \frac{DA}{BA} = \frac{DA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{4} = \frac{DC}{5}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{DA}{4} = \frac{DC}{5} = \frac{DA+DC}{4+5} = \frac{AC}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Do đó $AD = \frac{4}{3} \text{ cm}$.

Áp dụng định lí Pytago cho $\triangle ABD$ vuông tại A có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + \frac{4^2}{9}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$.

Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BCK} = 90^\circ$ (giả thiết)

$\widehat{ABD} = \widehat{CBK}$ (BD là phân giác $\widehat{ABC}$)

Suy ra $\triangle ABD \square \triangle CBK$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BK} = \frac{AB}{CB} \text{ hay } BK = \frac{BC \cdot BD}{AB} = \frac{5 \cdot \frac{4\sqrt{10}}{3}}{4} = \frac{5\sqrt{10}}{3}.$$

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

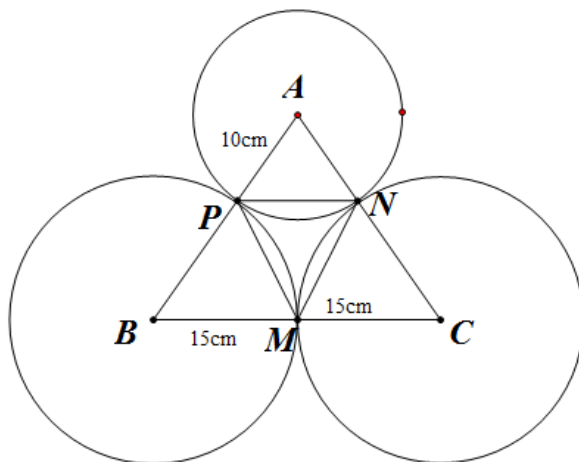
Câu 11: Cho ba đường tròn $(A; 10\text{cm})$; $(B; 15\text{cm})$; $(C; 15\text{cm})$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tại $M; N; P$ như hình vẽ bên. Diện tích tam giác MNP là

A. 36cm^2 .

B. 72cm^2 .

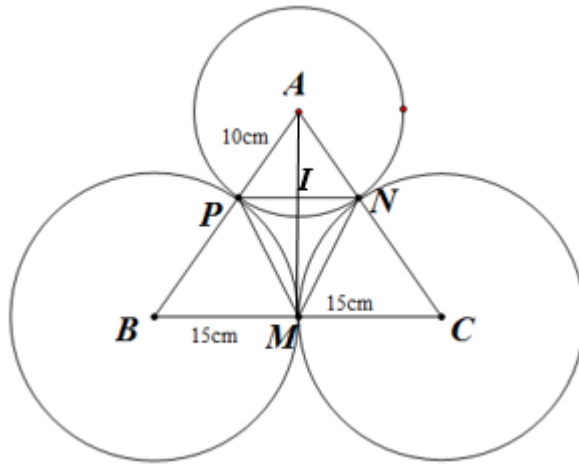
C. 144cm^2 .

D. 96cm^2 .



Lời giải

Chọn B



Theo tính chất đoạn nối tâm trong trường hợp hai đường tròn tiếp xúc ngoài ta có:

$$AB = AC = 10 + 15 = 25 (cm); \quad BC = 15 + 15 = 30 (cm)$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A và M là trung điểm của BC

$\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến đồng thời là đường cao, đường phân giác của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 (cm)$$

$$S_{ABC} = \frac{AM \cdot BC}{2} = \frac{20 \cdot 30}{2} = 300 (cm^2)$$

$$S_{BPM} = \frac{1}{2} BM \cdot BP \cdot \sin B = \frac{1}{2} BM \cdot BP \cdot \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \cdot \frac{20}{25} = 90 (cm^2)$$

$$\text{Chứng minh được } \triangle BPM = \triangle CNM \Rightarrow S_{CNM} = 90 (cm^2)$$

$$\triangle APN \text{ cân tại } A \Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} \text{ (tính chất góc ở đáy của tam giác cân)}$$

$\Rightarrow PN \parallel BC$ (có hai góc đồng vị bằng nhau)

$$\Rightarrow \triangle APN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{APN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AP}{AB} \right)^2 = \left(\frac{10}{25} \right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow S_{APN} = \frac{4}{25} \cdot S_{ABC} = \frac{4}{25} \cdot 300 = 48 (cm^2)$$

$$\text{Diện tích tam giác } MNP \text{ là } S_{MNP} = S_{ABC} - S_{APN} - S_{BPM} - S_{CMN} = 300 - 48 - 90 - 90 = 72 (cm^2)$$

Câu 12: Từ một tờ giấy hình tròn người ta cắt ra một hình lục giác đều có diện tích lớn nhất. Biết diện tích phần cắt bỏ đi là $54 cm^2$. Tính diện tích hình lục giác đều (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

- A. $258,12 cm^2$. B. $258,67 cm^2$. C. $258,27 cm^2$. D. $258,13 cm^2$.

Lời giải

Chọn D

- Xét lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$

Suy ra $AB = R$

Khoảng cách từ O đến AB là $OI = R \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

- Diện tích hình thang $ABCF$ là

$$S_{ABCF} = \frac{1}{2}(AB + CF) \cdot OI = \frac{1}{2}(R + 2R) \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

- Diện tích hình lục giác đều nội tiếp hình tròn $(O; R)$

$$S = 2S_{ABCF} = 2 \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

Vì diện tích phần cắt bỏ đi là 54cm^2 nên ta có phương trình

$$\pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = 54 \Leftrightarrow R^2 = \frac{108}{2\pi - 3\sqrt{3}}$$

Diện tích hình lục giác đều nội tiếp hình tròn $(O; R)$

$$S_{ABCDEF} = R^2 \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{108}{2\pi - 3\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{162\sqrt{3}}{2\pi - 3\sqrt{3}} \approx 258,13\text{cm}^2.$$

