

Câu 1. (1,0 điểm)

$$1) B = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} \cdot \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{10}{3^4}$$

$$2) A = \frac{1}{31} \left[\frac{31}{5} \left(9 - \frac{1}{2} \right) - \frac{17}{2} \left(4 + \frac{1}{5} \right) \right] + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{930} \right)$$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Với $x \geq 0$ và x, y thỏa mãn $8|x^2 - 81| + 3|y + 1|^{2025} = 0$

2) Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n + 4$ và $2n$ là số chính phương.

Câu 3. (3,0 điểm)

1) Cho dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2024}}{a_{2025}} = \frac{a_{2025}}{a_1}$ (giả sử các tỉ số đã cho đều có nghĩa)

$$\text{Tính giá trị biểu thức } B = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{2025})^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{2025}^2}.$$

2) Cho đa thức bậc hai: $A(x) = ax^2 + bx + c$ (x là ẩn; a, b, c là hệ số)

a) Tìm a, b, c biết rằng: $A(0) = 2024$; $A(1) = 2025$; $A(-1) = 2027$

b) Cho đa thức $B(x) = -2x^3 - 1$

Tìm đa thức $C(x)$, biết rằng: $A(x) \cdot B(x) - C(x) = -4x^5 + 2x^4 - 2x^2$.

3) Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có 2 chữ số lớn hơn 40. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: “Số tự nhiên được viết ra là số chia hết cho 7”

b) B: “Số tự nhiên được viết ra có tổng các chữ số hàng chục và hàng đơn vị bằng 9”.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D nằm giữa hai điểm B và C sao cho $CD < \frac{1}{2}CB$.

Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $BE = CD$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt các đường thẳng AC và AB lần lượt ở K và F.

a) Chứng minh rằng: $CK = BF$.

b) Đường thẳng BC cắt FK tại điểm I. Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng FK và $EK \parallel FD$.

c) Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với FK cắt đường cao AH của ΔABC ($H \in BC$)

tại O. Chứng minh: $AH > AB - OH$.

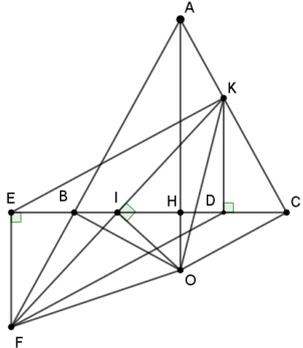
Câu 5. (1,0 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = (7x - 5y)^{2010} + (2z - 3x)^{2020} + (xy + yz + zx - 2000)^{2030} + 2025$$

--- HẾT ---

(Lưu ý: học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 (1,0đ)	1 (0,5đ)	$B = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} ; \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{10}{3^4}$	0,25
		$B = 81 \cdot \left[\frac{12 \cdot \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85}\right)}{4 \cdot \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85}\right)} ; \frac{5 \cdot \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91}\right)}{6 \cdot \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91}\right)} \right] \cdot \frac{10}{3^4}$	
		$B = 81 \cdot \left(\frac{12}{4} : \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{10}{81} = 36$	0,25
	2 (0,5đ)	$\text{Xét } M = \frac{1}{31} \left[\frac{31}{5} \left(9 - \frac{1}{2}\right) - \frac{17}{2} \left(4 + \frac{1}{5}\right) \right]$ $= \frac{1}{31} \left(\frac{31}{5} \cdot \frac{17}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{21}{5} \right)$ $= \frac{17}{31} \left(\frac{31 - 21}{10} \right) = \frac{17}{31}$ $\text{Xét } N = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{930} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{30 \cdot 31} \right)$ $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{30} - \frac{1}{31} \right) = 1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31}$	0,25
	$A = M + N = \frac{17}{31} + \frac{30}{31} = \frac{47}{31}$	0,25	
2 (2,0đ)	1 (1,0đ)	Ta có: $8 x^2 - 81 \geq 0$ với mọi x; $3 y + 1 ^{2025} \geq 0$ với mọi y	0,25
		Nên để $8 x^2 - 81 + 3 y + 1 ^{2025} = 0$	
		Thì $ x^2 - 81 = 0$ và $ y + 1 ^{2025} = 0$	
		Giải ra $x = \pm 9$ và $y = -1$	0,5
		Đổi chiều điều kiện $x \geq 0$, loại $x = -9$ Vậy $x = 9$ và $y = -1$	0,25
	2 (1,0đ)	Vì n là số tự nhiên có hai chữ số $\Rightarrow 9 < n < 100$ $\Rightarrow 18 < 2n < 200$	0,25
Mà 2n là số chính phương chẵn $\Rightarrow 2n \in \{36; 64; 100; 144; 196\}$		0,25	
$\Rightarrow n \in \{18; 32; 50; 72; 98\}$		0,25	
	Mà $n + 4$ là số chính phương $\Rightarrow n = 32$. Vậy $n = 32$	0,25	
3	1	Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :	

	(1,0đ))	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2024}}{a_{2025}} = \frac{a_{2025}}{a_1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2024} + a_{2025}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2025} + a_1} = 1$	0,25
		Suy ra : $a_1 = a_2 = \dots = a_{2014} = a_{2025}$	0,25
		Do đó $B = \frac{(a_1 + a_1 + \dots + a_1)^2}{a_1^2 + a_1^2 + \dots + a_1^2} = \frac{2025^2 a_1^2}{2025 \cdot a_1^2} = 2025$ Vậy B = 2025	0,25
	2 (1,0đ))	a) $A(0) = 2024$ suy ra $c = 2024$ $A(1) = 2025$ suy ra $a + b = 1$ $A(-1) = 2027$ suy ra $a - b = 3$	0,25
		$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 2024 \end{cases}$	0,25
		b) $A(x) = 2x^2 - x + 2024$ $A(x) \cdot B(x) - C(x) = -4x^5 + 2x^4 - 2x^2$ $C(x) = (2x^2 - x + 2024) \cdot (-2x^3 - 1) - (-4x^5 + 2x^4 - 2x^2)$	0,25
		$C(x) = -4048x^3 + x - 2024$	0,25
	3 (1,0đ))	a) Số kết quả có thể xảy ra là: 59 Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 42; 49; 56; 63; 70; 77; 84; 91; 98.	0,25
		Có 9 kết quả. Xác suất của biến cố A là: $\frac{9}{59}$	0,25
		b) Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 45; 54; 63; 72; 81; 90 Có 6 kết quả. Xác suất của biến cố B là: $\frac{6}{59}$	0,25
	4		0,25
		a (1,0đ))	Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ΔABC cân tại A) (1) $\widehat{ABC} = \widehat{EBF}$ (Hai góc đối đỉnh) (2) Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{EBF}$ hay $\widehat{KCD} = \widehat{EBF}$ Xét ΔCDK và ΔBEF có: $\widehat{KDC} = \widehat{FEB} = 90^\circ$; $DC = EB$ (GT); $\widehat{KCD} = \widehat{EBF}$ (C/m trên)

		$\triangle CDK = \triangle BEF$ (g.c.g)	
		$\Rightarrow CK = BF$ (hai cạnh tương ứng)	0,25
b (1,0đ)		Xét $\triangle DIK$ và $\triangle EIF$ có $\widehat{IDK} = \widehat{IEF} = 90^\circ$ $DK = EF$ ($\triangle CDK = \triangle BEF$); $\widehat{EFI} = \widehat{KCI}$ (cùng phụ $\widehat{DIK} = \widehat{EIF}$) Suy ra $\triangle DIK = \triangle EIF$	0,25
		$\Rightarrow IK = IF$ và $IE = ID$ (hai cạnh tương ứng)	0,25
		Xét $\triangle EIK$ và $\triangle DIF$ có: $IE = ID$ (chứng minh trên) $IF = IK$ (chứng minh trên) $\widehat{EIK} = \widehat{DIF}$ (đối đỉnh) Suy ra $\triangle EIK = \triangle DIF$ (c.g.c)	0,25
		Suy ra $\widehat{EKI} = \widehat{IFD}$ Suy ra $EK \parallel FD$	0,25
c (1,0đ)		Ta có $\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) nên $\widehat{HAB} = \widehat{HAC}$ Ta có $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.g.c) suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OCA}$ (3) $\triangle OIF = \triangle OIK$ (hai cạnh góc vuông bằng nhau) $\Rightarrow OF = OK$, từ đó suy ra $\triangle OBF = \triangle OCK$ (c.c.c) suy ra $\widehat{OBF} = \widehat{OCK}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OBF} = 90^\circ \Rightarrow OB \perp AB$ Xét $\triangle ABO$ vuông tại B có OA là cạnh huyền Nên $OA > AB$, mà $OA = OH + AH$ Suy ra $AH > AB - OH$	0,5
		Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OBF} = 90^\circ \Rightarrow OB \perp AB$ Xét $\triangle ABO$ vuông tại B có OA là cạnh huyền Nên $OA > AB$, mà $OA = OH + AH$ Suy ra $AH > AB - OH$	0,5
5		Ta có $(7x - 5y)^{2010} \geq 0$; $(2z - 3x)^{2020} \geq 0$ và $(xy + yz + zx - 2000)^{2030} \geq 0$ Nên $M = (7x - 5y)^{2010} + (2z - 3x)^{2020} + (xy + yz + zx - 2000)^{2030} + 2025 \geq 2025$	0,25
		Dấu bằng xảy ra khi: $(7x - 5y)^{2010} + (2z - 3x)^{2020} + (xy + yz + zx - 2000)^{2030} = 0$ suy ra $\begin{cases} 7x - 5y = 0 & \text{suy ra } 7x = 5y & \text{suy ra } \frac{x}{5} = \frac{y}{7} \\ 2z - 3x = 0 & \text{suy ra } 2z = 3x & \text{suy ra } \frac{z}{3} = \frac{x}{2} \\ xy + yz + zx - 2000 = 0 & \text{suy ra } xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$	0,25
		Từ đó tìm được $x = 20, y = 28, z = 30$ hoặc $x = -20, y = -28, z = -30$	0,25
		Vậy GTNN của M là $2025 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x, y, z) = (-20; -28; -30)$	0,25

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 7**
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-7>