

CHUYÊN ĐỀ 6. MẶT NÓN, MẶT CẦU, MẶT TRỤ

BÀI 3: MẶT CẦU – KHỐI CẦU

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được các trường hợp giao của mặt cầu với mặt phẳng, giao của mặt cầu với đường thẳng, vị trí của một điểm với mặt cầu.
- + Nắm vững công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

❖ Kỹ năng

- + Biết vẽ hình trong từng bài toán cụ thể.
- + Biết tính bán kính, diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu.
- + Giải được các bài toán liên quan đến khối cầu như bài toán tương giao với đường thẳng hay mặt phẳng, bài toán cực trị, bài toán thực tế...

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

- Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm O , bán kính R , kí hiệu là: $S(O; R)$. Khi đó $S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$.

- Khối cầu hay hình cầu $S(O; R)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \leq R$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và một điểm

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A . Nếu:

- +) $OA = R$ thì điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; R)$.
- +) $OA > R$ thì ta nói điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$.
- +) $OA < R$ thì ta nói điểm A nằm trong mặt cầu $S(O; R)$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của I lên Δ hay $d(I; \Delta) = IH$.

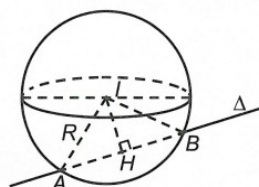
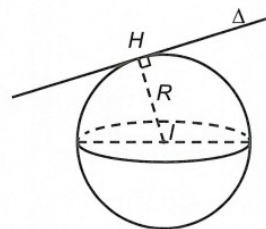
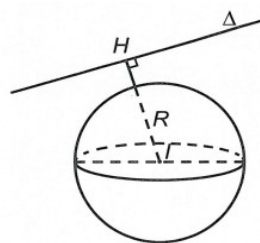
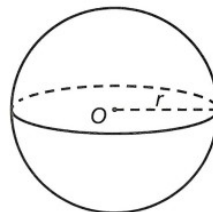
Nếu:

+) $IH > R$: Δ không cắt mặt cầu hay mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ không có điểm chung.

+) $IH = R$ thì Δ với mặt cầu $S(I; R)$ có một điểm chung duy nhất là H . Ta nói Δ là một tiếp tuyến của mặt cầu $S(I; R)$ và H là tiếp điểm.

+) $IH < R$: Δ cắt mặt cầu $S(I; R)$ tại hai điểm phân biệt.

Ta thường vẽ hay biểu diễn một mặt cầu hay khối cầu như hình sau:



Nhận xét:

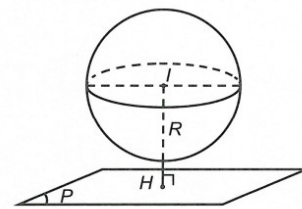
+) ΔIAB cân tại I , điểm H là trung điểm của AB và

$$R^2 = IH^2 + AH^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

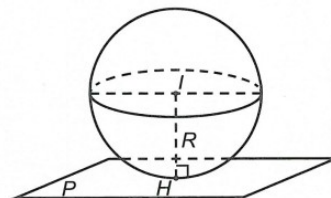
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) hay $d(I; (P)) = IH$. Nếu:

+) $IH > R$: Mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) không có điểm chung.



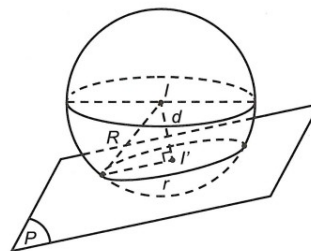
+) Nếu $IH = R$: Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu $S(I; R)$. Lúc này ta nói mặt phẳng (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm.



Lưu ý: $IH \perp (P)$

+) Nếu $IH < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' ($I' \equiv H$) và bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{R^2 - I'I^2}.$$



Nhận xét: Đường tròn giao tuyến có diện tích lớn nhất khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu $S(I; R)$. Đường tròn này ta gọi là đường tròn lớn.

Công thức cần nhớ

Cho mặt cầu $S(I; R)$.

- Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$.

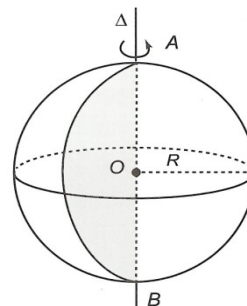
- Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

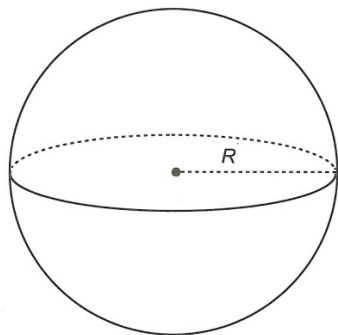
MẶT CẦU

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm O , bán kính R .

Kí hiệu: $S(O; R) = \{M | OM = R\}$.



MẶT CẦU – KHỐI CẦU



CÁC CÔNG THỨC

Diện tích mặt cầu

$$S = 4\pi R^2.$$

Thể tích khối cầu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Câu hỏi lí thuyết về mặt cầu, khối cầu



Phương pháp giải

Cần nắm vững phần kiến thức trọng tâm ở trên

Ví dụ: Cho hình cầu có bán kính R . Khi đó thể tích khối cầu là

A. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

B. $\frac{2}{3}\pi R^3$.

C. $\frac{1}{3}\pi R^3$.

D. $4\pi R^3$.

Hướng dẫn giải

Từ công thức tính thể tích của khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ta suy ra đáp án.

Chọn A.



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Diện tích mặt cầu có bán kính R là

A. $4\pi R^2$.

B. $4\pi R^3$.

C. $\frac{4}{3}\pi R^2$.

D. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Hướng dẫn giải

Từ công thức tính diện tích của mặt cầu $S = 4\pi R^2$ ta suy ra đáp án.

Chọn A.

Ví dụ 2. Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với mặt cầu?

A. Vô số.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$ có thể kẻ được vô số tiếp tuyến với mặt cầu.

Chọn A.

Chú ý: Nếu M nằm trên mặt cầu thì đáp án vẫn là vô số tiếp tuyến nhưng lúc này các tiếp tuyến đều nằm trên mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu tại M .

Ví dụ 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Hình chóp đều luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
- B. Hình lăng trụ đều luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
- C. Hình hộp đứng luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
- D. Hình chóp tam giác luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

Hướng dẫn giải

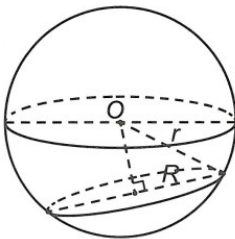
Đáy của hình hộp đứng không nội tiếp trong một đường tròn khi đáy của nó là hình bình hành (không phải các trường hợp đặc biệt như hình chữ nhật hay hình vuông) và khi đó hình hộp đứng không có mặt cầu ngoại tiếp.

Chọn C.

Ví dụ 4. Cho mặt cầu có tâm, bán kính. Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có bán kính. Kết luận nào sau đây sai?

- A. $R = \sqrt{r^2 + d^2} (O, (\alpha))$.
- B. $d(O, (\alpha)) < r$.
- C. Diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi r^2$.
- D. Đường tròn lớn của mặt cầu có bán kính bằng bán kính mặt cầu.

Hướng dẫn giải



Đáp án A sai vì $r = \sqrt{R^2 + d^2} (O, (\alpha))$.

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Mọi hình chóp đều luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
- B. Mọi tứ diện luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
- C. Mọi hình chóp luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
- D. Mọi hình hộp chữ nhật luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 2: Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là

- A. Vô số.
- B. 2.
- C. 4.
- D. 1.

Câu 3: Cho ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc một mặt cầu và $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Luôn có một đường tròn nằm trên mặt cầu sao cho đường tròn này ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- B. Đường tròn đi qua ba điểm $A; B; C$ nằm trên mặt cầu.
- C. AB là đường kính của đường tròn giao tuyến tạo bởi mặt cầu và mặt phẳng (ABC) .

D. AB là đường kính của mặt cầu đã cho.

Câu 4: Trong không gian, cho hai điểm phân biệt A, B cố định. Xét điểm M di động luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Hỏi điểm M thuộc mặt nào trong các mặt sau?

- A. Mặt cầu. B. Mặt nón. C. Mặt trụ. D. Mặt phẳng.

Câu 5: Trong không gian, cho hai điểm phân biệt A và B . Tập hợp tâm các mặt cầu đi qua A và B là

- A. một mặt phẳng. B. một đường thẳng.
C. một đường tròn. D. một mặt cầu.

Dạng 2. Tính bán kính, diện tích mặt, thể tích khối cầu. Bài toán tương giao của mặt cầu với đường thẳng hay mặt phẳng...

 Phương pháp giải

Nắm vững các công thức tính diện tích và thể tích. Nắm vững các trường hợp tương giao của mặt cầu với đường thẳng hay mặt phẳng để rồi vận dụng các kiến thức của phần quan hệ song song, quan hệ vuông góc, các hệ thức lượng trong tam giác... để giải các bài tập.

Ví dụ: Thể tích V của khối cầu có bán kính $R = a\sqrt{3}$ là

- A. $V = 4\pi a^3 \sqrt{3}$. B. $V = 12\pi a^3 \sqrt{3}$.
C. $V = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (a\sqrt{3})^3 = 4\pi a^3 \sqrt{3}.$$

Chọn A.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Một mặt cầu có diện tích xung quanh là π thì có bán kính bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Hướng dẫn giải

$$S_{mc} = 4\pi R^2 \Leftrightarrow 4\pi R^2 = \pi \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}.$$

Chọn C.

Ví dụ 2. Diện tích S của một mặt cầu có bán kính $R = a\sqrt{6}$ là

- A. $S = 6\pi a^2$. B. $S = 24\pi a^2$. C. $S = 8\pi a^2$. D. $S = \pi a^2$.

Hướng dẫn giải

Diện tích của một mặt cầu có bán kính $R = a\sqrt{6}$ là

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi (a\sqrt{6})^2 = 24\pi a^2.$$

Chọn B.

Ví dụ 3. Khối cầu (S_1) có thể tích bằng 54 cm^3 và có bán kính gấp 3 lần bán kính khối cầu (S_2) . Thể tích V của khối cầu (S_2) là

A. 2cm^3 .

B. 18cm^3 .

C. 4cm^3 .

D. 6cm^3 .

Hướng dẫn giải

Khối cầu (S_1) có bán kính R . Khi đó khối cầu (S_2) có bán kính $\frac{R}{3}$.

Từ giả thiết ta có $\frac{4}{3}\pi R^3 = 54$.

Do đó, thể tích khối cầu (S_2) là $V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{27} \cdot 54 = 2(\text{cm}^3)$.

Chọn A.

Ví dụ 4: Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng 4cm ta được một thiết diện là đường tròn có bán kính bằng 3cm. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. 10cm.

B. 7cm.

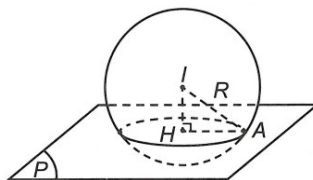
C. 12cm.

D. 5cm.

Hướng dẫn giải

Bán kính mặt cầu (S) là

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm}). \text{ Chọn D.}$$

**Bài tập tự luyện dạng 2**

Câu 1: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = \sqrt{6}$, $AB = 3$. Diện tích của mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{108\pi}{5}$.

B. $\frac{54\pi}{5}$.

C. 60π .

D. 18π .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 2a$. Mặt bên (SAB) vuông góc với đáy, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $SB = a$. Gọi (S) là mặt cầu tâm B và tiếp xúc với (SAC) . Bán kính r của mặt cầu (S) là

A. $r = 2a$.

B. $r = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

C. $r = 2a\sqrt{3}$.

D. $r = a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

Câu 3: Cho điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$. Biết rằng qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}R$. Tính độ dài đoạn thẳng OA theo R .

A. $\sqrt{3}R$.

B. $\sqrt{2}R$.

C. $2R$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Câu 4: Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R . M là điểm thỏa mãn $IM = \frac{3R}{2}$. Hai mặt phẳng (P) , (Q) qua M tiếp xúc với (S) lần lượt tại A và B . Biết góc giữa (P) và (Q) là 60° . Độ dài đoạn thẳng AB là

A. $AB = R$.

B. $AB = R\sqrt{3}$.

C. $AB = \frac{3R}{2}$.

D. $AB = R$ hoặc $AB = R\sqrt{3}$.

Câu 5: Cho mặt cầu (S) tâm O và các điểm A, B, C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB = 3, AC = 4, BC = 5$ và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1. Thể tích của khối cầu (S) bằng

- A. $\frac{7\sqrt{21}\pi}{2}$. B. 29π . C. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$. D. $\frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.

Dạng 3. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện

Các khái niệm cần lưu ý:

- **Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện:** là mặt cầu mà nó đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp cách đều tất cả các đỉnh của hình đa diện.

- **Trục của đa giác:** là đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác. Mọi điểm nằm trên trục thì cách đều các đỉnh của đa giác và ngược lại.

- **Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng:** Là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó. Mọi điểm nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai điểm mút của đoạn thẳng và ngược lại.

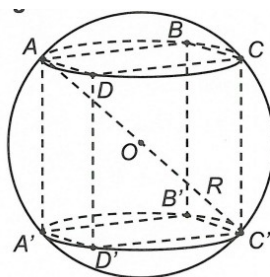
Phương pháp giải

Đối với bài toán mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện thì mấu chốt của vấn đề là phải xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện đó. Khi xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp thì ta có thể tính được các yếu tố còn lại như bán kính, diện tích mặt cầu, thể tích của khối cầu...

Ví dụ: Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $2a, 4a, 4a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. $6a$. B. $4a$. C. $3a$. D. $2a$.

Hướng dẫn giải



Giả sử hình hộp chữ nhật là $ABCD.A'B'C'D'$. Dễ thấy điểm O là trung điểm của AC' là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $R = OA$.

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{2} \sqrt{(A'A)^2 + (A'C')^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(A'A)^2 + (A'D')^2 + (D'C')^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2 + (4a)^2} = 3a. \end{aligned}$$

Chọn C.

Ví dụ mẫu

Cách 1. Tìm một điểm cách đều các đỉnh của khối đa diện theo định nghĩa mặt cầu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là điểm I với

- A. I là trung điểm của đoạn thẳng SD .
- B. I là trung điểm của đoạn thẳng AC .
- C. I là trung điểm của đoạn thẳng SC .
- D. I là trung điểm của đoạn thẳng SB .

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

$$\Rightarrow \widehat{SBC} = 90^\circ \quad (1).$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$CD \perp SD \Rightarrow \widehat{SDC} = 90^\circ \quad (2).$$

$$\text{Do } SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \widehat{SAC} = 90^\circ \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là mặt cầu đường kính SC nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm I của đoạn thẳng SC .

Chọn C.

Ví dụ 2. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là

- A. $V = 3\pi a^3 \sqrt{6}$.
- B. $V = \pi a^3 \sqrt{6}$.
- C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$.
- D. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có } OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}.a\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{2},$$

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy $OS = OA = OD = OB = OC$, nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

$$\text{Vậy thể tích khối cầu cần tìm là } V = \frac{4}{3}\pi.SO^3 = \pi a^3 \sqrt{6} \text{ (đvtt)}$$

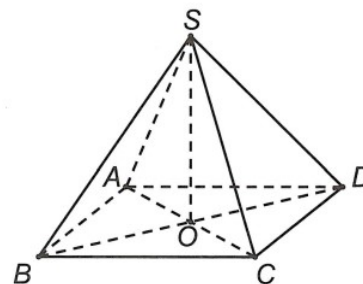
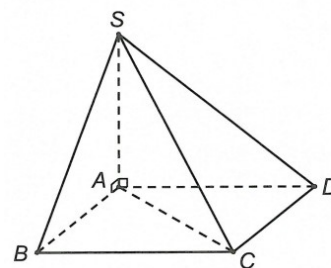
Chọn B.

Lưu ý:

Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp đều:

$$R = \frac{a^2}{2h}$$

với a : độ dài cạnh bên, h : chiều cao hình chóp.



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chứng minh tương tự như ví dụ 2 ta được kết quả

$\Rightarrow$ Ba đỉnh A, B, D đều nhìn cạnh SC dưới một góc vuông.

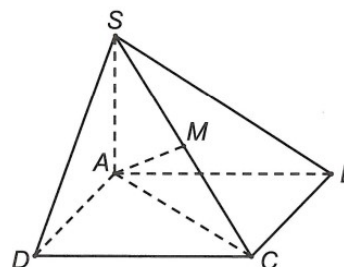
$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm SC và

bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \frac{SC}{2}$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SC = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn B.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\triangle ABC, \triangle BCD$ đều cạnh bằng 2 nên $AC = CD = 2 \Rightarrow \triangle ACD$ cân tại C .

Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow CI \perp AD$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} (ACD) \perp (ADB) \\ (ACD) \cap (ADB) = AD \Rightarrow CI \perp (ADB) \\ CI \perp AD \end{cases}$$

$$\Rightarrow CI \perp IB \text{ (do } IB \subset (ADB)) \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \triangle ACD = \triangle ABD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow CI = IB \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có ACB vuông cân tại

$$I \Rightarrow CB = IB\sqrt{2} \Rightarrow IB = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IC.$$

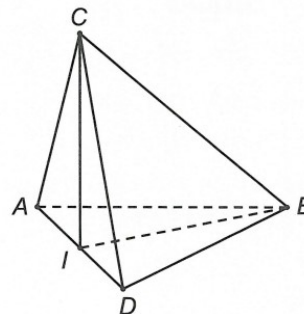
$$\triangle DIB \text{ vuông tại } I \Rightarrow ID = \sqrt{BD^2 - IB^2} = \sqrt{2} \Rightarrow AD = 2ID = 2\sqrt{2}.$$

Xét $\triangle ADB$ có $AB = DB = 2; AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại B .

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ.$$

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có đường kính là AD nên bán kính là $R = ID = \sqrt{2}$.

Chọn B.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B . Biết $SA = 4a, AB = 2a, BC = 4a$. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $3a$.

B. $2a$.

C. a .

D. $6a$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$$

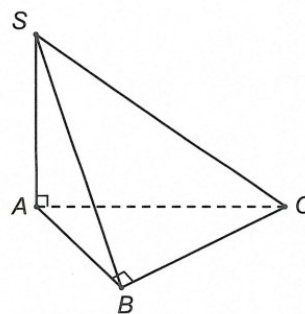
Suy ra hai điểm A, B cùng nhìn SC dưới một góc vuông. Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là trung điểm SC , bán kính mặt cầu là $R = \frac{SC}{2}$.

$$\text{Ta có } AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4a^2 + 16a^2 = 20a^2$$

$$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{16a^2 + 20a^2} = 6a$$

$$\begin{cases} (\alpha) // BD \\ (SBD) \cap (\alpha) = EF \end{cases} \Rightarrow BD // EF. \text{ Vậy } R = 3a.$$

Chọn A.



Ví dụ 6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = a\sqrt{3}, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{8}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Trong tam giác vuông } ABC \text{ có } AB = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $AB' \cap (ABC) = \{A\}$ và hình chiếu của B lên mặt phẳng (ABC) là B nên góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng AB' và AB , và bằng góc $\widehat{B'AB}$ (vì tam giác $AB'B$ vuông tại B). Do đó $\widehat{B'AB} = 60^\circ$.

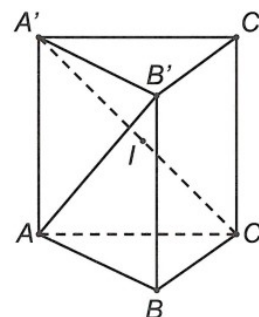
Trong tam giác vuông $AB'B$ có

$$BB' = AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$

Trong tam giác vuông $AA'C$ có

$$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}a.$$

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (ABB'A')$, suy ra $BC \perp A'B$ hay $\widehat{A'BC} = 90^\circ$. Mà $\widehat{A'AC} = 90^\circ$, suy ra hai điểm A, B cùng nhìn $A'C$ dưới một góc vuông.



Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng $R = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{21}}{4}a$.

Chọn A.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng (α) qua A và M đồng thời song song với đường thẳng BD cắt SB , SD lần lượt tại E , F . Bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm S , A , E , M , F nhận giá trị nào sau đây?

- A. a . B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của AM và SO .

Dễ thấy I là trọng tâm tam giác SAC và I , E , F thẳng hàng.

$$\text{Lại có } \frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow SF = \frac{2}{3}SD$$

$$\Rightarrow SF \cdot SD = \frac{2}{3}SD^2 = \frac{2}{3}(SA^2 + AD^2) = 2a^2$$

$$\Rightarrow SF \cdot SD = SA^2.$$

Xét tam giác vuông SAD có $SF \cdot SD = SA^2 \Rightarrow AF$ là đường cao tam giác $AF \perp SF$.

Chứng minh tương tự ta có $AE \perp SB$.

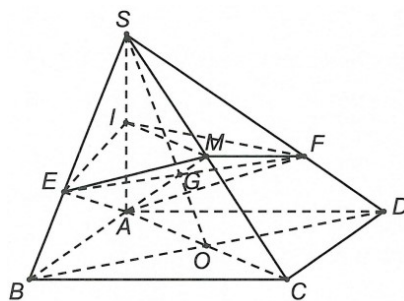
Tam giác $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao tam giác $AM \perp SC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp SM \\ AF \perp SF \\ AE \perp SE \end{cases}$ nên mặt cầu đi qua 5 điểm S , A , E , M , F có tâm là trung điểm SA và bán kính bằng

$$\frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn C.

Chú ý: Ta có thể làm như sau



Do $EF = (\alpha) \cap (SBD)$ và $(\alpha) \parallel BD$ nên $EF \parallel BD$.

Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp SC$.

Tam giác SAC có $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên $AM \perp SC$.

Do đó $SC \perp (AMEF) \Rightarrow SC \perp AE$ (1).

Lại có $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB$.

Chứng minh tương tự, ta được $AF \perp SD$. Từ đây, suy ra kết quả như cách bên.

Cách 2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên

Chú ý: Trong khuôn khổ bài tập thường xoay quanh hình chóp, hình lăng trụ nên đa giác đáy ta nói đến ở đây là đáy của hình chóp hay hình lăng trụ.

Ví dụ 1. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (S) bằng

- A. $\frac{32\pi a^3}{81}$. B. $\frac{32\pi a^3}{77}$. C. $\frac{64\pi a^3}{77}$. D. $\frac{72\pi a^3}{39}$.

Hướng dẫn giải

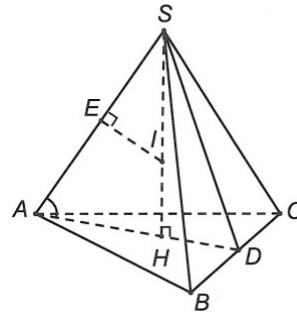
Gọi H là tâm của tam giác ABC , SH là trục của đường tròn ngoại tiếp ABC , mặt phẳng trung trực của SA qua E là trung điểm của SA và cắt SH tại I . Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Xét trong tam giác SAH ta có

$$SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 60^\circ = a; SA = \frac{SH}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Xét hai tam giác đồng dạng $\triangle SEI$ và $\triangle SHA$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{SI}{SA} &= \frac{SE}{SH} \Rightarrow SI = \frac{SA \cdot SE}{SH} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{2\sqrt{3}}}{a} = \frac{2a}{3} \\ \Rightarrow R &= \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$



Suy ra thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (S) bằng $\frac{4}{3}\pi \left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{32\pi a^3}{81}$.

Chọn A.

Ví dụ 2. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a .

- A. $\frac{7\pi a^2}{5}$. B. $\frac{7\pi a^2}{3}$. C. $\frac{7\pi a^2}{6}$. D. $\frac{3\pi a^2}{7}$.

Hướng dẫn giải

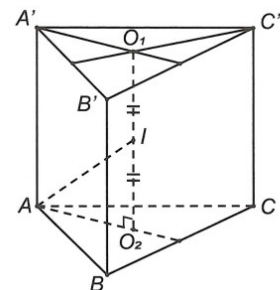
Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy lăng trụ $\Rightarrow O_1O_2$ là trục đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đáy.

Gọi I là trung điểm của $O_1O_2 \Rightarrow IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$.

Suy ra trung điểm I của O_1O_2 là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Bán kính

$$R = IA = \sqrt{AO_2^2 + IO_2^2} = \sqrt{AO_2^2 + \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \cdot \sqrt{\frac{7}{12}}.$$



Do đó diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

$$S = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(a.\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2 = \frac{7\pi a^3}{3}.$$

Chọn B.

Lưu ý:

Mặt phẳng trung trực của một cạnh bên cắt O_1O_2 tại I là trung điểm của O_1O_2 .

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2$, $AC = 4$, $SA = \sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là

- A. $R = \frac{25}{2}$. B. $R = \frac{5}{2}$. C. $R = 5$. D. $R = \frac{10}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M , H lần lượt là trung điểm của BC , SA

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d \perp (ABC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trong mặt phẳng kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA , cắt d tại I

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Dễ thấy tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

Ta có

$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5},$$

$$IM = \frac{1}{2}SA = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{2}.$$

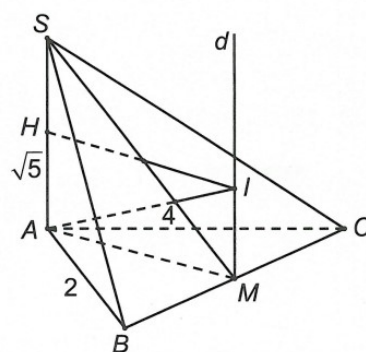
Chọn B.

Lưu ý: có thể thay mặt phẳng trung trực của SA bằng đường trung trực của SA xét trong mặt phẳng (SAM) .

Ví dụ 4. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $2a$.

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Vậy SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

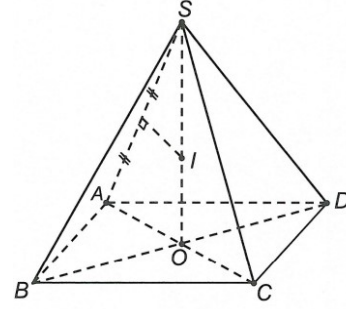
Trong (SAC) gọi (d) là trung trực của SA và I là giao điểm của (d) với SO

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SO) \\ I \in (d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IA = IS \end{cases}$$

$$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS.$$

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{Bán kính mặt cầu là } R = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AO^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn C.

Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, các mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $S_{mc} = \frac{25\pi a^2}{3}$.

B. $S_{mc} = \frac{32\pi a^2}{3}$.

C. $S_{mc} = \frac{8\pi a^2}{3}$.

D. $S_{mc} = \frac{a^2}{12}$.

Hướng dẫn giải

Trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là SO . Mặt phẳng trung trực của SB cắt SO tại I , cắt SB tại K thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Gọi H là trung điểm BC thì $\widehat{SHO} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông SHO , ta có

$$\tan 60^\circ = \frac{SO}{OH} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}.$$

Từ đó suy ra

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{3a^2 + 2a^2} = a\sqrt{5}.$$

Ta có $\triangle SKI \sim \triangle SOB$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow SI = \frac{SK \cdot SB}{SO} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{5a}{2\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$$S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{75a^2}{36} = \frac{25\pi a^2}{3}.$$

Chọn A.

Ví dụ 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $a\sqrt{2}$, cạnh bên $2a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện $ABCDMNPQ$.

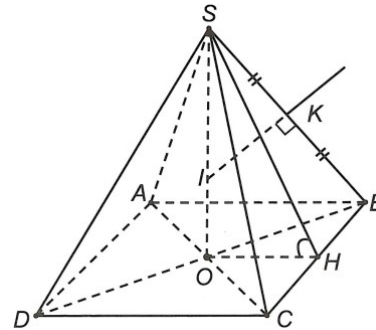
A. $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

B. $R = a$.

C. $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $(ABCD) // (MNPQ)$. Gọi $\{O\} = AC \cap BD$.

Mà $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$. Nên SO là trục của hai đáy $(ABCD)$ và $(MNPQ)$.

Trong mặt phẳng (SAO) kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng AM cắt SA, SO tại H, I .

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCDMNPQ$ và bán kính là IA .

Ta có $SA = SB = SC = SD = 2a$

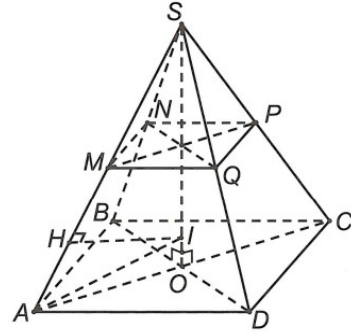
$$AB = BC = CD = DA = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Lại có } SH = \frac{3}{4}SA = \frac{3}{4}.2a = \frac{3a}{2} \Rightarrow HA = \frac{1}{4}SA = \frac{a}{2}.$$

$$\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 2a \Rightarrow AO = a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Mặt khác } \triangle SHI \sim \triangle SOA (g.g) \Rightarrow \frac{HI}{OA} = \frac{SH}{SO} \Rightarrow HI = \frac{OA \cdot SH}{SO} = \frac{a \cdot \frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu cần tìm là } R = AI = \sqrt{HI^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a.$$



Chọn B.

Cách 3. Dựa vào trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$, hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của $AD, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16\pi a^2}{3}$.

B. $\frac{16\pi a^2}{9}$.

C. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{4\pi a^2}{3}$.

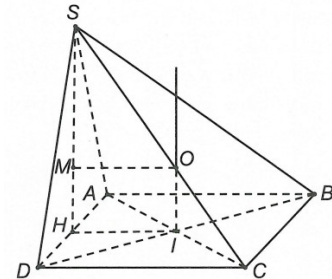
Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của AC và BD , qua I dựng đường thẳng d song song với $SH \Rightarrow d \perp (ABCD)$.

Gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD , qua M kẻ đường thẳng d' vuông góc với $mp(SAD)$, d' cắt d tại $O \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính bằng $R = OS = \sqrt{MO^2 + MS^2}$.

Với $OM = IH = \frac{AB}{2} = a, MS = r$ (r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB).

Lại có, $\triangle SAD$ cân tại A , cạnh $AD = a$, đường cao $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra tam giác SAD đều $r = AM = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R^2 = \frac{4a^2}{3}$ (R là bán kính



mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$).

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng $S = 4\pi R^2 = \frac{16\pi a^2}{3}$.

Chọn A.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Biết $\widehat{BAC} = \alpha, BC = a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là

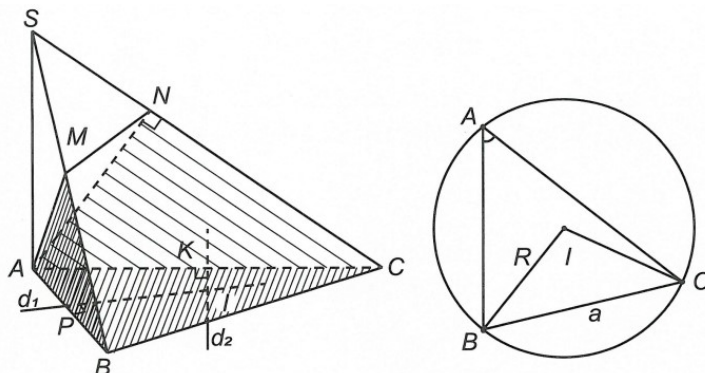
A. $\frac{\pi}{\cos^2 \alpha} a^2$.

B. $\frac{\pi}{\sin^2 \alpha} a^2$.

C. $\frac{4\pi}{\cos^2 \alpha} a^2$.

D. $\frac{4\pi}{\sin^2 \alpha} a^2$.

Hướng dẫn giải



+) Gọi K, P lần lượt là trung điểm của AC và AB .

$\triangle ACN$ vuông tại $N \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACN$.

$\triangle ABM$ vuông tại $M \Rightarrow P$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$.

+) Hai mặt phẳng $(SAB), (ABC)$ vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến AB nên gọi d_1 là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$ thì d_1 qua $P, d_1 \subset (ABC)$ và $d_1 \perp AB$. Tương tự, gọi d_2 là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACN$ thì d_2 qua $K, d_2 \subset (ABC)$ và $d_2 \perp AC$.

+) Rõ ràng, trong mặt phẳng (ABC) thì $d_1 d_2$ lần lượt là đường trung trực của các cạnh AB, AC nên hai đường này cắt nhau tại tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, bán kính R của mặt cầu này cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

+) Áp dụng định lý sin cho $\triangle ABC$ ta được $R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin \alpha}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là $S = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{\sin^2 \alpha}$.

Chọn B.

Lưu ý:

Cách 2: Vẽ đường kính AE của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó A, M, N, B, C cùng nhìn AE góc 90° .

Áp dụng định lý sin cho $\triangle ABC$ ta được

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{a}{2\sin \alpha}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là

$$S = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{\sin^2 \alpha}.$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a , (S) là mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện $ABCD$. M là một điểm thay đổi trên (S) . Tổng $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ bằng

- A. $\frac{3a^2}{8}$. B. a^2 . C. $4a^2$. D. $2a^2$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt bên (SAB) , (SCA) lần lượt là các tam giác vuông tại B , C . Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{2}{3}a^3$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

- A. $R = a\sqrt{2}$. B. $R = a$. C. $R = \frac{3a}{2}$. D. $R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 3: Cho lăng trụ đứng có chiều cao bằng h không đổi, một đáy là tứ giác $ABCD$ với A , B , C , D di động. Gọi I là giao của hai đường chéo AC và BD của tứ giác đó. Cho biết $IA \cdot IC = IB \cdot ID = h^2$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho là

- A. $2h$. B. $\frac{h\sqrt{5}}{2}$. C. h . D. $\frac{h\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$ bằng

- A. $\frac{7\sqrt{21}}{54}\pi a^3$. B. $\frac{7\sqrt{21}}{162}\pi a^3$. C. $\frac{7\sqrt{21}}{216}\pi a^3$. D. $\frac{49\sqrt{21}}{36}\pi a^3$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = \sqrt{3}a$, $AD = a$, $\triangle SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $S = 5\pi a^2$. B. $S = 10\pi a^2$. C. $S = 4\pi a^2$. D. $S = 2\pi a^2$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là hai tam giác đều chung cạnh $BC = 2$. Gọi I là trung điểm của BC , $\widehat{AID} = 2\alpha$ với $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Hãy xác định tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

- A. O là trung điểm của AD . B. O là trung điểm của BD .
C. O thuộc mặt phẳng (ADB) . D. O là trung điểm của AB .

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp tam giác $S.ABC$ bằng

- A. $6\pi a^2$. B. $10\pi a^2$. C. $3\pi a^2$. D. $5\pi a^2$.

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Kẻ $EK \perp SD$ tại K . Bán kính mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K là

- A. $R = \frac{1}{2}a$. B. $R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. C. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. D. $R = a$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác với $AB = 2cm$, $AC = 3cm$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABC)$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Thể tích khối cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1 bằng

- A. $\frac{28\sqrt{21}\pi}{27}cm^3$. B. $\frac{76\sqrt{57}\pi}{27}cm^3$. C. $\frac{7\sqrt{7}\pi}{6}cm^3$. D. $\frac{27\pi}{6}cm^3$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, B , $AB = BC = a$, $SA = AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$, gọi E là trung điểm của AD . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CDE$ theo a là

- A. $R = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. B. $R = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$. D. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$ là

- A. $\frac{3\pi a^2}{12}$. B. $\frac{31\pi a^2}{12}$. C. $\frac{\pi a^2}{12}$. D. $\frac{5\pi a^2}{12}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có các tam giác ABC, SAB là các tam giác đều cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

- A. $R = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. B. $R = \frac{a}{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. D. $R = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D và $AB = AD = a$, $DC = 2a$ tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC và M là trung điểm của HC . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BDM$ theo a là.

- A. $\frac{7\pi a^2}{9}$. B. $\frac{13\pi a^2}{9}$. C. $\frac{13\pi a^2}{3}$. D. $\frac{7\pi a^2}{3}$.

Dạng 4. Mặt cầu nội tiếp khối đa diện

Mặt cầu nội tiếp khối đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của khối đa diện.

Phương pháp giải

Xác định được và hiểu rõ khoảng cách từ tâm của mặt cầu nội tiếp khối đa diện tới các mặt của khối đa diện chính là bán kính của mặt cầu nội tiếp khối đa diện. Từ đó có thể tính được bán kính, diện tích xung quanh của mặt cầu, thể tích của khối cầu và giải được các bài toán liên quan.

Ví dụ: Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương có cạnh bằng 1 là

- A. $\frac{\pi}{12}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có tâm trùng với tâm của hình lập phương và tiếp xúc với các mặt của hình lập phương tại tâm của các hình vuông là các mặt của hình lập phương.

$$\text{Suy ra bán kính } R = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}.$$

Chọn D.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp của hình lập phương đó bằng

$$\text{A. } V = \frac{64\pi a^3}{3}. \quad \text{B. } V = \frac{8\pi a^3}{3}. \quad \text{C. } V = \frac{32\pi a^3}{3}. \quad \text{D. } V = \frac{16\pi a^3}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$, suy ra cạnh hình lập phương là $4a$.

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có bán kính bằng $\frac{1}{2}$ cạnh hình lập phương $\Rightarrow R = 2a$.

$$\text{Vậy } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi a^3}{3}.$$

Chọn C.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và SA vuông góc với $mp(ABC)$. Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$.

$$\text{A. } \frac{16}{9}\pi. \quad \text{B. } \frac{625}{81}\pi. \quad \text{C. } \frac{256}{81}\pi. \quad \text{D. } \frac{25}{9}\pi.$$

Hướng dẫn giải

Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính của hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$.

Khi đó

$$V_{S.ABC} = V_{I.ABC} + V_{I.SBC} + V_{I.SAB} + V_{I.SAC} = \frac{1}{3}r(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SAC}) = \frac{r.S_{TP}}{3}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.6.\frac{1}{2}.8.6 = 48;$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SAB} = 24; S_{\Delta SBC} = S_{\Delta SAC} = 30 \Rightarrow S_{TP} = 108.$$

$$\text{Vậy } r = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}} = \frac{3.48}{108} = \frac{4}{3} \Rightarrow V_{mc} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{256}{81}\pi.$$

Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có chiều cao là h và bán kính mặt cầu nội tiếp là r ($h > 2r > 0$). Giá trị của V là

A. $V = \frac{4r^2h^2}{3(h+2r)}$. B. $V = \frac{4r^2h^2}{(h+2r)}$. C. $V = \frac{4r^2h^2}{3(h-2r)}$. D. $V = \frac{3r^2h^2}{4(h-2r)}$.

Câu 2: Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều ngoại tiếp mặt cầu bán kính bằng a , thể tích V của khối chóp có thể tích nhỏ nhất là

A. $V = \frac{8a^3}{3}$. B. $V = \frac{10a^3}{3}$. C. $V = 2a^3$. D. $V = \frac{32a^3}{3}$.

Câu 3: Cho hình cầu (S) tâm I , bán kính R không đổi. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp hình cầu. Chiều cao h theo R sao cho diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất là

A. $h = R\sqrt{2}$. B. $h = R$. C. $h = \frac{R}{2}$. D. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4: Hình nón gọi là nội tiếp mặt cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu. Tìm chiều cao h của hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp mặt cầu có bán kính R cho trước.

A. $h = \frac{3R}{2}$. B. $h = \frac{5R}{2}$. C. $h = \frac{5R}{4}$. D. $h = \frac{4R}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp đa giác đều có các cạnh bên bằng a và tạo với mặt đáy một góc 30° . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. B. $4\pi a^3$. C. $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $4\pi a^3\sqrt{3}$.

Dạng 5. Bài toán cực trị

Phương pháp giải

Tương tự như bài toán cực trị về hình nón, hình trụ ta thường đánh giá trực tiếp dựa vào hình hoặc biểu diễn hay quy đại lượng cần tìm cực trị phụ thuộc vào một yếu tố sau đó đánh giá tìm ra đáp án.

Ví dụ: Cho mặt cầu bán kính $R = 5\text{cm}$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $8\pi\text{cm}$. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C) , điểm D thuộc $(S) \setminus (C)$ và tam giác ABC đều. Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $20\sqrt{3}\text{cm}^3$. B. $32\sqrt{3}\text{cm}^3$. C. $60\sqrt{3}\text{cm}^3$. D. $96\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng (P) . Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có chu vi bằng $8\pi\text{cm}$.

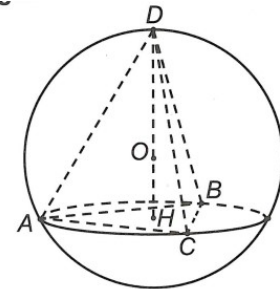
Suy ra bán kính đường tròn $R = \frac{8\pi}{2\pi} = 4(\text{cm})$.

Suy ra cạnh của tam giác ABC bằng $4\sqrt{3}(\text{cm})$

Suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}(\text{cm}^2)$ không đổi

Do đó thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi $d(D, (ABC))$ lớn nhất $\Leftrightarrow D$ và O nằm cùng phía SO với mặt phẳng (P) và D, O, H thẳng hàng

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow DH &= DO + OH = DO + \sqrt{OA^2 - AH^2} \\ &= 5 + \sqrt{25 - 16} = 8. \end{aligned}$$



Khi đó $V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 8 = 32\sqrt{3} (cm^3)$.

Chọn B.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng tâm I và bán kính lần lượt là 2 và $\sqrt{10}$. Các điểm A, B thay đổi thuộc (S_1) còn C, D thay đổi thuộc (S_2) sao cho có tứ diện $ABCD$. Khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. 3. C. $\sqrt{5}$. D. 2.

Hướng dẫn giải

Để có tứ diện $ABCD$ thì AB và CD không đồng phẳng.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của các mặt cầu (S_1) và $(S_2) \Rightarrow R_1 = 2; R_2 = \sqrt{10}$.

Gọi K là trung điểm của CD và h là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

Ta $CD = 2CK, AB \leq 2R_1 = 4, \sin(AB, CD) \leq 1$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \sin(AB, CD) \cdot d(AB, CD) \leq \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot CD \cdot h$$

$$\leq \frac{4}{3} \sqrt{h^2 + CK^2} \leq \frac{4}{3} \sqrt{IK^2 + CK^2}.$$

Xét $\triangle ICK$ vuông tại K có $IK^2 + CK^2 = CI^2 = R_2^2$.

Khi đó $V_{ABCD} \leq \frac{4}{3} R_2 = \frac{4}{3} \sqrt{10}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp CD \\ AB = 4 \\ h = IK = CK = \sqrt{5} \end{cases}$

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi S là điểm thay đổi trên đường thẳng d , H là trực tâm tam giác SBC . Biết rằng khi S thay đổi trên đường thẳng d thì điểm H nằm trên đường (C) . Trong số các mặt cầu chứa đường (C) , bán kính mặt cầu nhỏ nhất là

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm BC suy ra $AM \perp BC; SM \perp BC$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , vì tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MG = \frac{1}{3} MA = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

suy ra $MG \cdot MA = \frac{a^2}{4}$.

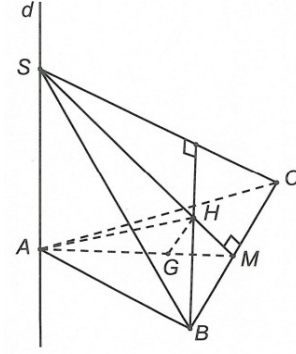
Mặt khác H trực tâm tam giác SBC nên tam giác BMH và tam giác SMC là hai tam giác đồng dạng nên

$$\frac{BM}{SM} = \frac{MH}{MC} \Leftrightarrow MH.MS = BM.MC = \frac{a^2}{4}.$$

Do đó $MH.MS = MG.MA$ hay $\frac{MH}{MG} = \frac{MA}{MS}$ nên tam giác MHG và tam giác MAS đồng dạng suy ra $GH \perp SM$.

Vì H thuộc (SAM) cố định khi S thay đổi trên d và $GH \perp SM$ nên (C) là một phần của đường tròn đường kính GM do đó trong các mặt cầu chứa (C) , mặt cầu có bán kính nhỏ nhất là mặt cầu nhận GM làm đường

kính nên bán kính mặt cầu $R = \frac{GM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.



Chọn C.

Bài tập tự luyện dạng 5

Câu 1: Cho hình chóp $SABC$ có $SA = 3, AB = 1, AC = 2$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Mặt cầu tâm O và qua A cắt các tia SB, SC lần lượt tại D và E . Khi độ dài đoạn BC thay đổi, giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ADE$ là

- A. $\frac{81}{130}$. B. 6. C. 21. D. $\frac{87}{130}$.

Câu 2: Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng một đôi một tiếp xúc nhau và tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Mặt cầu (S) bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kì trên (S) , MH là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của MH bằng

- A. $3 + \frac{\sqrt{30}}{2}$. B. $3 + \frac{\sqrt{69}}{3}$. C. $3 + \frac{\sqrt{123}}{4}$. D. $\frac{52}{9}$.

Câu 3: Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu có bán kính bằng 9. Thể tích V của khối chóp có giá trị lớn nhất là

- A. $144\sqrt{6}$. B. 144. C. 576. D. $576\sqrt{2}$.

Câu 4: Cho mặt cầu đường kính $AB = 2R$. Mặt phẳng (P) vuông góc AB tại I (I thuộc đoạn AB), cắt mặt cầu theo đường tròn (C) . Tính $h = AI$ theo R để hình nón đỉnh A , đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất.

- A. $h = R$. B. $h = \frac{R}{3}$. C. $h = \frac{4R}{3}$. D. $h = \frac{2R}{3}$.

Dạng 6. Bài toán thực tế

Phương pháp giải

Nắm vững kiến thức các dạng toán trên để giải bài toán thực tế liên quan đến mặt cầu.

$$EV_0 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi (cm^3)$$

Ví dụ: Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu với bán kính bằng 3cm vào một cái ly dạng hình trụ đang chứa nước. Người ta thấy viên bi chìm xuống đáy ly và chiều cao của mực nước dâng lên thêm 1cm. Biết rằng chiều cao của mực nước ban đầu trong ly bằng 7,5cm. Tính thể tích V của khối nước ban đầu trong ly (kết quả lấy xấp xỉ).

- A. $V = 282,74cm^3$. B. $V = 848,23cm^3$.
C. $V = 636,17cm^3$. D. $V = 1272,35cm^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi V_0 là thể tích của viên bi.

Gọi R là bán kính của cái ly (không tính vỏ).

Theo bài ra ta có thể tích của cột nước dâng lên 1cm bằng thể tích viên bi nên ta có $\pi R^2 \cdot 1 = 36\pi \Rightarrow R = 6(cm)$

Suy ra thể tích V của khối nước ban đầu trong ly $\pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 36 \cdot 7,5 = 848,23(cm^3)$

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho ba hình cầu tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc với một mặt phẳng. Các tiếp điểm của các hình cầu trên mặt phẳng lập thành tam giác có các cạnh là 4, 2 và 3. Tích bán kính của ba hình cầu trên là

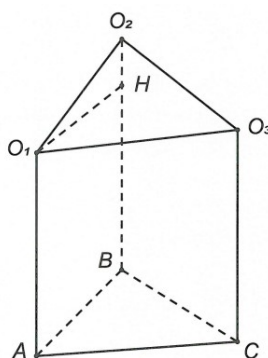
A. 12.

B. 3.

C. 6.

D. 9.

Hướng dẫn giải



Gọi $(O_1, r_1), (O_2, r_2), (O_3, r_3)$ lần lượt là 3 hình cầu thỏa mãn. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của O_1, O_2, O_3 trên mặt phẳng. Giả sử $AB = 4, BC = 2, AC = 3$.

Ta có $O_1A = r_1; O_2B = r_2; O_3C = r_3; O_1O_2 = r_1 + r_2; O_2O_3 = r_2 + r_3; O_3O_1 = r_3 + r_1$.

Kẻ $O_1H \perp BO_2 (H \in BO_2) \Rightarrow BH = r_1; O_2H = r_2 - r_1$.

Theo định lý Py-ta-go ta có

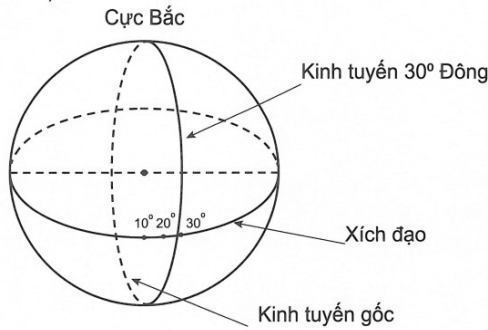
$$O_1O_2^2 = O_1H^2 + O_2H^2 \Leftrightarrow (r_1 + r_2)^2 = AB^2 + (r_2 - r_1)^2 \Leftrightarrow r_1r_2 = \frac{AB^2}{4}.$$

Tương tự ta có $r_2r_3 = \frac{BC^2}{4}; r_3r_1 = \frac{AC^2}{4}$.

$$\text{Vậy } r_1r_2r_3 = \sqrt{\frac{AB^2 BC^2 CA^2}{64}} = 3.$$

Chọn B

Ví dụ 2. Cho quả địa cầu có độ dài đường kinh tuyến 30° Đông là $40\pi cm$ (tham khảo hình vẽ).



Độ dài đường xích đạo là:

- A. $40\sqrt{3}\pi \text{ cm}$. B. $40\pi \text{ cm}$. C. $80\pi \text{ cm}$. D. $\frac{80\pi}{\sqrt{3}} \text{ cm}$.

Hướng dẫn giải

Đường xích đạo là đường vĩ tuyến lớn nhất. Độ dài đường xích đạo gấp hai lần đường kinh tuyến 30° Đông.

Vậy độ dài đường xích đạo là: $2 \cdot 40\pi = 80\pi \text{ (cm)}$.

Chọn C.

Ví dụ 3. Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi của thiết diện qua tâm là $68,5\text{cm}$. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích $49,83\text{cm}^2$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?

- A. ≈ 40 (miếng da). B. ≈ 20 (miếng da).
C. ≈ 35 (miếng da). D. ≈ 30 (miếng da).

Hướng dẫn giải

Vì thiết diện qua tâm là đường tròn có chu vi là $68,5\text{cm}$, nên giả sử bán kính mặt cầu là R ta có

$$2\pi R = 68,5 \Rightarrow R = \frac{68,5}{2\pi}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu: } S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{68,5}{2\pi} \right)^2 \approx 1493,59 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

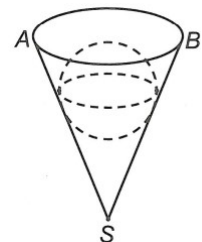
Vì mỗi miếng da có diện tích $49,83\text{cm}^2$ nên để phủ kín được mặt của quả bóng thì số miếng da cần là $\frac{1493,59}{49,83} \approx 29,97$. Vậy phải cần ≈ 30 miếng da.

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 6

Câu 1: Bạn An có một cốc giấy hình nón có đường kính đáy là 10cm và độ dài đường sinh là 8cm . Bạn dự định đựng một viên kẹo hình cầu sao cho toàn bộ viên kẹo nằm trong cốc (không phần nào của viên kẹo cao hơn miệng cốc). Hỏi bạn An có thể đựng được viên kẹo có đường kính lớn nhất bằng bao nhiêu?

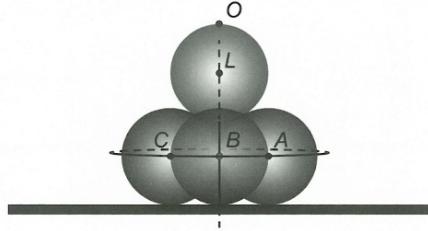
- A. $\frac{64}{\sqrt{39}} \text{ cm}$. B. $\frac{5\sqrt{39}}{13} \text{ cm}$.



C. $\frac{32}{\sqrt{39}}cm.$

D. $\frac{10\sqrt{39}}{13}cm.$

Câu 2: Có 4 viên bi hình cầu có bán kính bằng 1cm. Người ta đặt 3 viên bi tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt bàn. Sau đó đai chặt 3 viên bi đó lại và đặt 1 viên bi thứ 4 tiếp xúc với cả 3 viên bi trên như hình vẽ dưới đây. Gọi O là điểm thuộc bề mặt của viên bi thứ tư có khoảng cách đến mặt bàn là lớn nhất. Khoảng cách từ O đến mặt bàn bằng



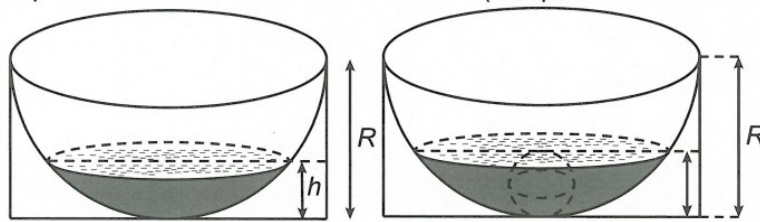
A. $\frac{6+2\sqrt{6}}{3}.$

B. $\frac{7}{2}.$

C. $\frac{3+2\sqrt{6}}{3}.$

D. $\frac{4\sqrt{6}}{3}.$

Câu 3: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R = 10cm$. Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chòm cầu có chiều cao $h = 4cm$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi. Bán kính của viên bi là (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân)



A. 3,24cm.

B. 2,09cm.

C. 4,28cm.

D. 4,03cm.

Câu 4: Một người dùng một cái ca hình bán cầu có bán kính là 3 cm để múc nước đổ vào trong một thùng hình trụ chiều cao 3cm và bán kính đáy bằng 12 cm. Hỏi người ấy sau bao nhiêu lần đổ thì nước đầy thùng? (Biết mỗi lần đổ, nước trong ca luôn đầy)

A. 10 lần.

B. 20 lần.

C. 24 lần.

D. 30 lần.

Dạng 7. Dạng toán tổng hợp

Phương pháp giải

Sử dụng kiến thức về hình nón, hình trụ, hình cầu ở các dạng toán trên để giải bài toán tổng hợp.

Ví dụ: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA' , M là trung điểm của BC . Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM , ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 . Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{4}.$

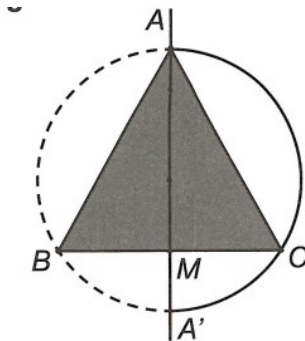
B. 49

C. $\frac{27}{32}.$

D. $\frac{9}{32}.$

Hướng dẫn giải

Gọi a là cạnh $\triangle ABC$ đều, suy ra $BM = \frac{a}{2}$; $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



$$\text{Ta có } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi BM^2 \cdot AM}{\frac{4}{3} \pi \cdot IA^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3} = \frac{9}{32}.$$

Chọn D.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh là $2a$, có thể tích V_1 và hình cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có thể tích V_2 . Khi đó tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}.$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}.$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$

D. $\frac{V_1}{V_2} = 1.$

Hướng dẫn giải

Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh là $2a$

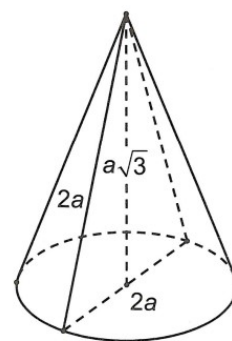
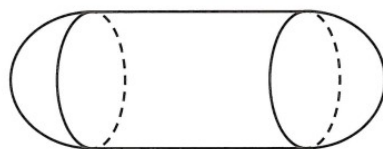
$$\Rightarrow I = 2a, R = a, h = a\sqrt{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \pi a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi a^3;$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^3.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}.$$

Chọn B.

Ví dụ 2. Một cái bồn chứa nước gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (như hình vẽ).



Đường sinh của hình trụ bằng hai lần đường kính của hình cầu. Biết thể tích của bồn chứa nước là $\frac{128\pi}{3} m^3$. Tính diện tích xung quanh của cái bồn chứa nước theo đơn vị m^2 .

A. $48\pi \text{ m}^2$.

B. $50\pi \text{ m}^2$.

C. $40\pi \text{ m}^2$.

D. $64\pi \text{ m}^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi x là bán kính hình cầu.

Ta có $l_t = 2d_c = 4R_c = 4R_t = 4x$.

Thể tích của bể nước là

$$V = V_t + V_c = \pi R_t^2 l_t + \frac{4}{3} \pi R_c^3 = \pi x^2 \cdot 4x + \frac{4}{3} \pi x^3 = \frac{128\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2.$$

Diện tích xung quanh của bể nước là

$$S = 2\pi R_t l_t + 4\pi R_c^2 = 2 \cdot 2\pi \cdot 8 + 4\pi \cdot 2^2 = 48\pi (\text{m}^2).$$

Chọn A.

📌 Bài tập tự luyện dạng 7

Câu 1: Một cốc nước hình trụ có đường kính đáy bằng 6cm, chiều cao bằng 15cm. Giả sử mức nước trong cốc cao 7cm so với đáy bên trong cốc. Người ta thả viên bi hình cầu có bán kính bằng 2cm vào cốc nước. Hỏi mức nước dâng lên trong cốc là bao nhiêu cm?

A. 22.

B. $\frac{7}{6}$.

C. 8.

D. $\frac{32}{27}$.

Câu 2: Một cái cốc hình trụ có bán kính đáy là 2cm, chiều cao 20cm. Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là 12cm. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá 6cm. Con quạ thông minh mổ những viên bi đá hình cầu có bán kính 0,6cm thả vào cốc nước để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?

A. 29.

B. 30.

C. 28.

D. 27.

Câu 3: Người ta xếp bảy viên bi là các khối cầu có cùng bán kính R vào một cái lọ hình trụ. Biết rằng các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với sáu viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính theo R thể tích lượng nước cần dùng để đổ đầy vào lọ sau khi đã xếp bi.

A. $6\pi R^3$.

B. $\frac{26\pi R^3}{3}$.

C. $18\pi R^3$.

D. $\frac{28\pi R^3}{3}$.

Câu 4: Cho khối cầu (S) tâm I , bán kính R không đổi. Một khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.

A. $h = R\sqrt{2}$.

B. $h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

C. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

D. $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Đáy ABC nội tiếp trong đường tròn có đường kính $AC = 4a$. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ nội tiếp hình trụ T . Thể tích khối trụ T bằng

A. $\frac{\sqrt{17}\pi a^3}{4}$.

B. $\frac{17\sqrt{17}\pi a^3}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{17}\pi a^3}{8}$.

D. $\frac{17\sqrt{17}\pi a^3}{4}$.

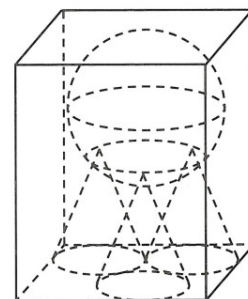
Câu 6: Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2a$ nằm trong mặt phẳng (P) . Gọi I là điểm đối xứng với O qua A . Lấy điểm S sao cho $SI \perp (P)$ và $SI = 2a$. Bán kính R mặt cầu đi qua đường tròn đã cho và điểm S có độ dài là

- A. $R = \frac{a\sqrt{65}}{4}$. B. $R = \frac{a\sqrt{65}}{16}$. C. $R = \frac{a\sqrt{65}}{2}$. D. $R = \frac{7a}{4}$.

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có diện tích $84\pi \text{ cm}^2$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng

- A. $\frac{2\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$. B. $\frac{3\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$. D. $\frac{6\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$.

Câu 8: Có một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể. Sau đó người ta đặt lên đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước và lượng nước trào ra là $\frac{337\pi}{3} \text{ cm}^3$. Tính thể tích nước ban đầu ở trong bể (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



- A. $885,2 \text{ cm}^3$. B. $1209,2 \text{ cm}^3$. C. $1106,2 \text{ cm}^3$. D. $1174,2 \text{ cm}^3$.

Dạng 1: Câu hỏi lí thuyết về mặt cầu, khối cầu

1- C	2- A	3- D	4- A	5- A					
------	------	------	------	------	--	--	--	--	--

Dạng 2. Bài toán tính bán kính, diện tích, thể tích mặt cầu. Bài toán tương giao của mặt cầu với đường thẳng hay mặt phẳng

1- A	2- B	3- B	4- A	5- D					
------	------	------	------	------	--	--	--	--	--

Dạng 3. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện

1- D	2- C	3- B	4- A	5- A	6- A	7- D	8- D	9- A	10- C
11- B	12- D	13- D							

Dạng 4: Mặt cầu nội tiếp khối đa diện

1- C	2- D	3- A	4- D	5- A					
------	------	------	------	------	--	--	--	--	--

Dạng 5. Bài toán cực trị

1- A	2- B	3- C	4- C						
------	------	------	------	--	--	--	--	--	--

Dạng 6: Bài toán thực tế

1- D	2- A	3- B	4- C						
------	------	------	------	--	--	--	--	--	--

Dạng 7: Dạng bài toán tổng hợp

1- D	2- C	3- B	4- D	5- D	6- A	7- D	8- B		
------	------	------	------	------	------	------	------	--	--