SỞ GD&ĐT HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHÚ XUYÊN B

(*Đề thi có 02 trang*)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
Năm học 2025 - 2026
Môn Toán - lớp 11
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I: (*4,0 điểm*).

1. Cho phương trình lượng giác: $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$ (1).

a. Giải phương trình (1).

b. Tìm các nghiệm của phương trình (1) trong đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

2. Tìm điều kiện của tham số *m* để phương trình: $2\cos^2 x - 3\sin x - 2m + 3 = 0$ vô nghiệm.

Câu II: (*3,0 điểm*).

1. Cho các số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $5x - y, 2x - 3y, x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, và các số $(y+1)^2, xy + 1, (x-1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm x, y .

2. Học sinh Nam tới Hội chợ Xuân 2026 và tham gia trò chơi ném bóng, mỗi lần ném người chơi phải đặt cược một số tiền sau đó mới được chơi. Lần chơi đầu tiên Nam đặt 20 000 đồng, mỗi lần chơi tiếp theo tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Nam chơi thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi Nam thắng hay thua bao nhiêu tiền?

Câu III: (*5,0 điểm*).

1. Tính giới hạn. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x + 1 - \sqrt[3]{x^3 - x}\right)$

2. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 5x^2 - mx & \text{khi } x \le 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

3. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$, dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy sẽ nhận được một dãy các tam giác. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ …

Câu IV: (*7,0 điểm*).

Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là hình bình hành. G là trọng tâm của tam giác SAC. Gọi I là điểm nằm trong tam giác SAB.

1. Xác định giao điểm E của đường thẳng IG với mặt phẳng (SCD)

2. Trên đoạn AC lấy điểm F (F khác A và C). Gọi (α) là mặt phẳng qua F và song song với hai đường SC , BD. Xác định giao tuyến (nếu có) của (α) với các mặt của hình chóp S.ABCD

3. Gọi M là điểm thay đổi trên cạnh SB (M khác S và B). Đường thẳng MG cắt SD tại N. Chứng minh rằng giá trị biểu thức $T = \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Câu V: (1,0 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 5$, và $u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(u_n^2 - u_n + 9\right)$, $\forall n \in N; n \geq 1$. Chứng minh rằng:

1) (u_n) là dãy số tăng

2) $\frac{1}{u_1+2} + \frac{1}{u_2+2} + \ldots + \frac{1}{u_{2026}+2} < \frac{1}{2}, \forall n \in N; n \geq 1$

-------------------------*Hết*--------------------------

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Câu 1 :

1.

a. $2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

b. $x\in\left[-2\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow x\in\left\{-\dfrac{11\pi}{6};-\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right\}$

2.

$\Rightarrow 2(1-\sin^2 x)-3\sin x-2m+3=0$, Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1] \Rightarrow 2t^2+3t-5=-2m$

Vẽ đồ thị ta thấy hàm số $2t^2+3t-5=f(t)$ ta thấy $f(t)\in\left[\dfrac{-49}{8};0\right] \Rightarrow$ Để pt vô nghiệm thì $\left[\begin{array}{l}-2m>0\\ -2m<\dfrac{-49}{8}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\dfrac{49}{16}\end{array}\right.$

Câu 2 :

1.

Theo bài ta có : $5x-y+x+2y=2(2x-3y)$ và $(y+1)^2.(x-1)^2=(xy+1)^2$

$\Rightarrow (x;y)\in\left\{(0;0),\left(\dfrac{14}{9};\dfrac{-4}{9}\right),\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{-9}{14}\right)\right\}$

2.

Số tiền Nam đặt mỗi lần lập thành 1 cấp số nhân $u_1=20.000, q=2$

$\Rightarrow$ Số tiền Nam có sau 10 lần chơi là : $20000.2^9-20000.\dfrac{2^9-1}{2-1}=20000$ (đồng) >0

$\Rightarrow$ Nam thắng

Câu 3 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\sqrt[3]{x^3-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2+3x+1-x^3+x}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3-x}+\sqrt[3]{(x^3+x)^2}}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\left(\dfrac{1}{x}+1\right).\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1}}\right)=\dfrac{3}{1+1+1}=1$

2.

Ta có : $f(x)=\dfrac{2x-1-x^2}{x^2-1}=\dfrac{-(x-1)}{x+1}$

Để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\dfrac{-(1-1)}{1+1}=5.1^2-m \Rightarrow m=5$

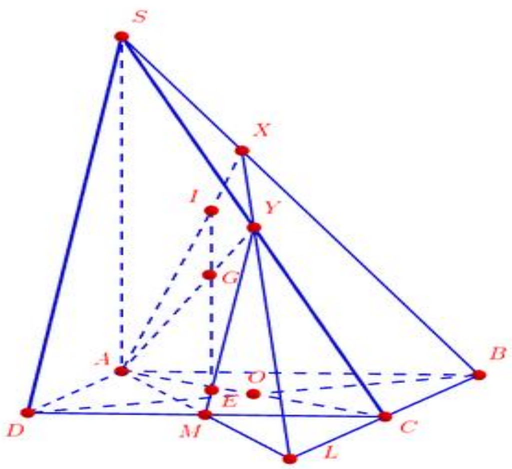
Giải : Phạm Quang Minh

3.

Dễ dàng nhận thấy $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, S_2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}, S_3 = \frac{9a^2\sqrt{3}}{64} \Rightarrow S_1, S_2, S_3........$ lập thành 1 cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, q = \frac{3}{4} \Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{-1}{\frac{3}{4}-1} = a^2\sqrt{3}$

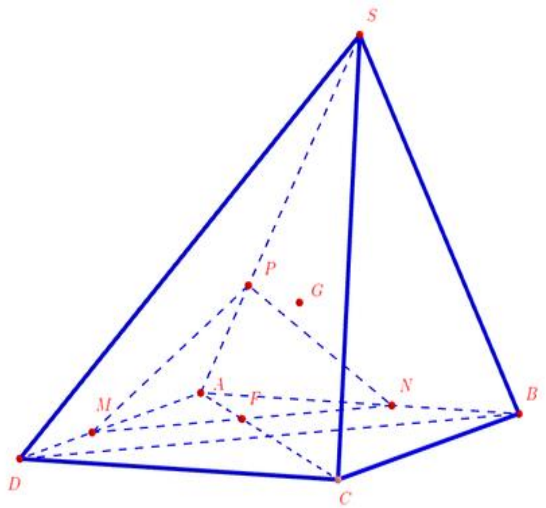
Câu 4 :

a. $E = MY \cap IG$

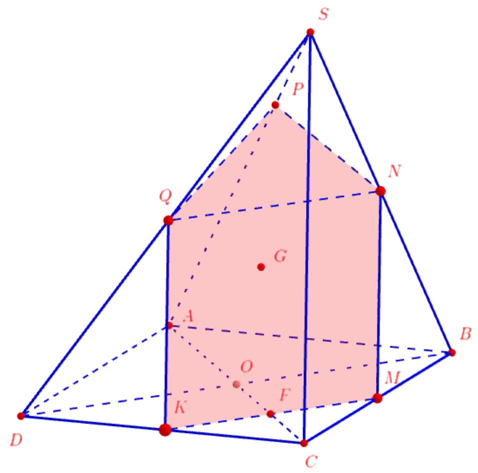


b.

TH1 : $F \in OA$



TH2 : $F \in OC$



c.

Áp dụng bổ đề $\frac{SM}{SP} + \frac{SD}{SN} = 2\frac{SO}{SG} = 2.\frac{3}{2} = 3$

Giải : Phạm Quang Minh

Câu 5 :

1. Dễ dàng chứng minh được $u_n > 3 \forall n \in N^*$ bằng pp quy nạp

Mà $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(u_n - 3)^2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow$ Đây là dãy tăng

2.

Từ công thức truy hồi ta có : $u_{n+1} - 3 = 0,2.(u_n - 3)(u_n + 2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{(u_n - 3)} - \frac{1}{(u_n + 2)} \Rightarrow \frac{1}{(u_n + 2)} = \frac{1}{(u_n - 3)} - \frac{1}{u_{n+1} - 3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_1 + 2} + \ldots + \frac{1}{u_{2026} + 2} = \frac{1}{u_1 - 3} - \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_{n+1} - 3}$$

Mà $u_n > 3 \forall n \in N^* \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 3} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{u_{n+1} - 3} < \frac{1}{2} \forall n \in N^*$

Giải : Phạm Quang Minh