SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2025 – 2026

ĐỀ THI MÔN: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút.

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Gọi S là tập hợp gồm các số tự nhiên có hai chữ số khác nhau, tạo thành từ các chữ số $0,1,2,3,4,5$ và 6. Mỗi bạn An và Bình viết ngẫu nhiên một số thuộc tập S lên bảng. Tính xác suất để tổng của hai số được viết lên bảng là số chẵn.

b) Lúc 6 giờ sáng, bạn Hải đi xe đạp từ vị trí A đến vị trí B, quãng đường AB dài 25 km. Khi đi được $\frac{2}{5}$ quãng đường AB, Hải dừng lại tại vị trí C để ăn sáng 35 phút. Sau đó, Hải tiếp tục đi từ C đến B với tốc độ chậm hơn 2 km/giờ so với tốc độ đi trên đoạn đường AC. Khi đến B, Hải nghỉ lại 45 phút và quay ngược trở lại A (theo tuyến đường ban đầu) với tốc độ bằng $\frac{3}{4}$ tốc độ đi đoạn đường từ A đến C. Hải về đến A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày. Hỏi bạn Hải đến B lúc mấy giờ (giả sử tốc độ trên từng đoạn đường là không đổi)?

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2+2x+2x\sqrt{x+1}=5-\sqrt{x+1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+1)=(y-1)(y-2) \\ 4x^2-3y+6=4x\sqrt{4-y}+2\sqrt{x-y} \end{cases}$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB<AC$) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF, tia DM cắt đường tròn (I) tại điểm H (H khác D).

a) Chứng minh $MA.MI=MH.MD$.

b) Tia AH cắt đường tròn (I) tại điểm P (P khác H). Chứng minh hai đường thẳng DP và EF song song.

c) Gọi X là trung điểm của đoạn thẳng BC, đoạn thẳng AX cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm N (N khác A), tia DI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm G (G khác I). Chứng minh tiếp tuyến tại G, tiếp tuyến tại N của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường thẳng EF đồng quy.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge 1.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên dương a,b sao cho các số $8a^3+18ab+1$ và $8b^3+18ab+1$ đều là lập phương của số nguyên.

b) Cho tập hợp $S=\{x\in\mathbb{Z} \mid 1\le x\le 15\}$. Xét T là một tập con của S và có tính chất: với a,b,c bất kì thuộc T (a,b,c đôi một khác nhau) thì tích abc không là số chính phương. Hỏi T có nhiều nhất bao nhiêu phần tử? (Tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B).

----------- HẾT -----------

Thí sinh làm bài trên giấy thi, không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:............................

Cán bộ coi thi số 1: .... Cán bộ coi thi số 2: ....

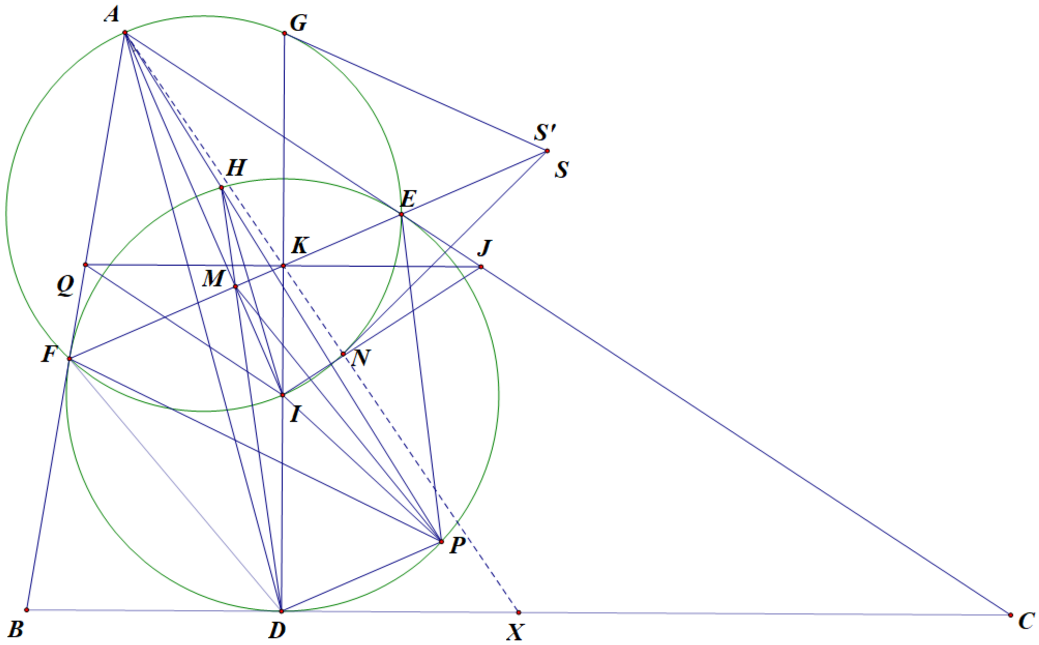
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

HDC ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2025 – 2026

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN (CHUYÊN)
(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1 (2,0 điểm)	**a) (1,0 điểm)**	
	Trong tập S có: Số số có hai chữ số khác nhau là: $6.6=36$ Số số lẻ có hai chữ số khác nhau là: $3.5=15$ Số số chẵn có hai chữ số khác nhau là: $36-15=21$	**0,25**
	$n(\Omega)=36^2$	**0,25**
	Biến cố A: “Tổng hai số là số chẵn” $\Rightarrow n(A)=15^2+21^2$	**0,25**
	Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{15^2+21^2}{36^2}=\dfrac{37}{72}$.	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Gọi x (km/giờ) là tốc độ của Hải khi đi quãng đường AC, $x>2$. Khi đó: tốc độ đi quãng đường theo hướng từ C đến B là: $x-2$ (km/giờ). Tốc độ khi đi quãng đường từ B về A là: $\dfrac{3x}{4}$ (km/giờ).	**0,25**
	Thời gian đi quãng đường AC là: $\dfrac{10}{x}$ (giờ). Thời gian đi quãng đường CB là: $\dfrac{15}{x-2}$ (giờ). Thời gian đi quãng đường từ B đến A là: $\dfrac{25}{\frac{3x}{4}}=\dfrac{100}{3x}$ (giờ).	**0,25**
	Theo đề ra ta có phương trình: $\dfrac{10}{x}+\dfrac{7}{10}+\dfrac{15}{x-2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{100}{3x}=\dfrac{13}{3}\Rightarrow\dfrac{10}{x}+\dfrac{15}{x-2}+\dfrac{100}{3x}=3\Rightarrow 9x^2-193x+260=0$. Suy ra $x_1=20$ (chọn) ; $x_2=\dfrac{13}{9}$ (loại). Vậy tốc độ của người đó đi trên đoạn đường AC là 20 (km/giờ).	**0,25**
	Thời gian từ lúc xuất phát đến khi đến B bằng: $\dfrac{10}{20}+\dfrac{7}{10}+\dfrac{15}{20-2}=\dfrac{23}{12}$ (giờ). Vậy người đó đến B lúc 7 giờ 55 phút.	**0,25**
2 (2,0 điểm)	**a) (1,0 điểm)**	
	ĐKXĐ: $x\ge -1$ $x^2+2x+2x\sqrt{x+1}=5-\sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x+1}\right)^2+\left(x+\sqrt{x+1}\right)-6=0$ $\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x+1}-2\right)\left(x+\sqrt{x+1}+3\right)=0$	**0,5**
	Suy ra $x+\sqrt{x+1}-2=0$ vì $x+\sqrt{x+1}+3>0$ với mọi $x\ge -1$.	**0,25**
	Từ đó ta có: $\sqrt{x+1}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x+1=4-4x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$.	**0,25**

	b) (1,0 điểm)	
	$\begin{cases} x(x+1)=(y-1)(y-2) & (1) \\ 4x^2-3y+6=4x\sqrt{4-y}+2\sqrt{x-y} & (2) \end{cases}$ Điều kiện xác định: $\begin{cases} y\le 4 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$ $(1)\Leftrightarrow x(x+1)=(y-1)(y-2)\Leftrightarrow (x-y+2)(x+y-1)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=-2<0\ \ (KTM) \\ y=1-x \end{array}\right.$	0,25
	Thay vào (2): $4x^2-3(1-x)+6=4x\sqrt{4-1+x}+2\sqrt{x-1+x}$ $\Leftrightarrow 4x^2+3x+3-4x\sqrt{x+3}-2\sqrt{2x-1}=0$ $\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{x+3}+(x+3)+(2x-1)-2\sqrt{2x-1}+1=0$ $\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\sqrt{x+3} \\ \sqrt{2x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Với $x=1\Rightarrow y=0$. Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;0)$.	0,25
3 (3,0 điểm)	**a) (1,0 điểm)**	
	 Ta có A, M, I thẳng hàng và $EF\perp AI$. Tam giác vuông AEI có $MA.MI=ME^2$.	0,5
	Ta có: $HEDF$ nội tiếp suy ra $MH.MD=MF.ME=ME^2$. Từ đó $MA.MI=MH.MD$.	0,5
	b) (1,0 điểm)	
	Theo a) suy ra tứ giác $AHID$ nội tiếp nên $\widehat{ADI}=\widehat{IHP}$.	0,25
	Mặt khác ΔIHP cân tại I nên $\widehat{IPH}=\widehat{IHP}$. Do đó $\widehat{ADI}=\widehat{IPH}$	0,25
	Lại có ΔIDP cân tại I nên $\widehat{IDP}=\widehat{IPD}$ Do đó $\widehat{ADP}=\widehat{ADI}+\widehat{IDP}=\widehat{IPH}+\widehat{IPD}=\widehat{APD}$ suy ra ΔADP cân tại A	0,25
	Do đó $AD=AP$. Mà $ID=IP$ nên AI là trung trực DP. Vì vậy $EF \parallel DP$ (do cùng vuông góc AI)	0,25

	c) (1,0 điểm)	
	Ta thấy ngay A, E, I, F, G, N cùng thuộc đường tròn đường kính AI. Gọi giao điểm DI và EF là K. Qua K kẻ đường vuông góc với KD cắt AB, AC tại Q, J. Ta có: $\widehat{IKQ} = \widehat{IFQ} = 90^o$ và $\widehat{IKJ} = \widehat{IEJ} = 90^o$. Do đó tứ giác $QKIF$ và $KEJI$ nội tiếp.	0,25
	Suy ra $\widehat{IQK} = \widehat{IFK} = \widehat{IFE} = \widehat{IEF} = \widehat{IEK} = \widehat{IJK}$. Vì vậy ΔIQJ cân tại I nên K là trung điểm QJ. Xét ΔABC có $QJ \parallel BC$ và K, X lần lượt là trung điểm QJ, BC. Suy ra A, K, X thẳng hàng (theo bổ đề hình thang).	0,25
	Ta có: $AENF$ nội tiếp suy ra $\widehat{ANE} = \widehat{AFE} = \widehat{AEF} = \widehat{ANF}$. Xét ΔNEF có NK là phân giác suy ra $\frac{NE}{NF} = \frac{KE}{KF}$ (1) Ta có $\widehat{FGI} = \widehat{FAI} = \widehat{EAI} = \widehat{EGI}$ nên GK là phân giác ΔGFE suy ra $\frac{GE}{GF} = \frac{KE}{KF}$ (2) Từ (1), (2) suy ra $\frac{NE}{NF} = \frac{GE}{GF}$ (3)	0,25
	Gọi giao điểm tiếp tuyến tại N, tiếp tuyến tại G của đường tròn đường kính AI và đường thẳng FE lần lượt là S, S'. Khi đó $\widehat{SNE} = \widehat{SFN}$ (góc tiếp tuyến) nên $\Delta SNE \backsim \Delta SFN\left(g.g\right)$ Suy ra $\frac{SN}{SF} = \frac{SE}{SN} = \frac{NE}{FN}$ nên $\frac{SE}{SF} = \frac{SE}{SN}.\frac{SN}{SF} = \left(\frac{NE}{NF}\right)^2$ (4) Tương tự $\Delta S'GE \backsim \Delta S'FG\left(g.g\right)$. Suy ra $\frac{S'G}{S'F} = \frac{S'E}{S'G} = \frac{GE}{FG}$ nên $\frac{S'E}{S'F} = \frac{S'E}{S'G}.\frac{S'G}{S'F} = \left(\frac{GE}{GF}\right)^2$ (5) Từ (3), (4), (5) suy ra $\frac{SE}{SF} = \frac{S'E}{S'F}$ Vì vậy S trùng S' và tiếp tuyến tại G, N và đường thẳng EF đồng quy.	0,25
4 (1,0 điểm)	**(1,0 điểm)**	
	Theo bất đẳng thức AM-GM cho hai số thực dương ta có: $\sqrt{x^3+8} = \sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)} \le \frac{(x+2)+(x^2-2x+4)}{2} = \frac{x^2-x+6}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} \ge \frac{2x^2}{x^2-x+6}$	0,25
	Tương tự $\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} \ge \frac{2y^2}{y^2-y+6}$; $\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge \frac{2z^2}{z^2-z+6}$. Từ đó suy ra: $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge \frac{2x^2}{x^2-x+6} + \frac{2y^2}{y^2-y+6} + \frac{2z^2}{z^2-z+6}$.	0,25
	Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz : $\frac{2x^2}{x^2-x+6} + \frac{2y^2}{y^2-y+6} + \frac{2z^2}{z^2-z+6} \ge \frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}$	0,25
	Ta chứng minh: $\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18} \ge 1$ (1) Ta có: (1) tương đương với $2\left(x+y+z\right)^2 \ge x^2+y^2+z^2-\left(x+y+z\right)+18$ $\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)^2 + 2\left(xy+yz+zx\right) + \left(x+y+z\right) \ge 18$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số $x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ và $xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{xy.yz.zx} = 3$. Khi đó (1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.	0,25

5 (2,0 điểm)	**a) (1,0 điểm)**	
	Do a,b vai trò như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b$. Khi đó $(2a)^3 < 8a^3 + 18ab + 1 < 8a^3 + 24a^2 + 24a + 8 = (2a+2)^3$. (vì $18ab + 1 \le 18a^2 + 1 < 24a^2$)	**0,25**
	Do đó $8a^3 + 18ab + 1 = (2a+1)^3 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$. Từ đó suy ra $3b = 2a + 1$ hay $2a = 3b - 1$.	**0,25**
	Do đó $8b^3 + 18ab + 1 = 8b^3 + 27b^2 - 9b + 1$ là lập phương của số nguyên. Ta có: $8b^3 < 8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 < 8b^3 + 36b^2 + 54b + 27$. Do đó $(2b)^3 < 8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 < (2b+3)^3$. Vì vậy $8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 \in \left\{(2b+1)^3; (2b+2)^3\right\}$.	**0,25**
	Mà $8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 = 8b^3 + 18ab + 1$ là số lẻ nên $8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 = (2b+1)^3$ Suy ra $15b^2 - 15b = 0$. Mà $b > 0$ nên $b = 1$. Suy ra $a = \dfrac{3b-1}{2} = 1$. Vậy $a = b = 1$.	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Ký hiệu $\|T\|$ là số phần tử của tập hợp T. Xét 4 tập hợp $A = \{1;4;9\}$, $B = \{2;6;12\}$, $C = \{3;5;15\}$, $D = \{7;8;14\}$ đều có tích 3 phần tử là số chính phương. Nếu $\|T\| \ge 12$ thì tồn tại 1 tập trong 4 tập A,B,C,D là tập con của T Khi đó T tồn tại 3 phần tử có tích là số chính phương.	**0,25**
	Nếu $\|T\| = 11$. Khi đó $T = S \setminus \{a;b;c;d\}$ mà $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$ (nếu không thì cũng tồn tại 1 tập trong A,B,C,D là tập con của T). Do đó $10 \in T$.	**0,25**
	Xét 4 tập hợp $A = \{1;4;9\}$; $D = \{7;8;14\}$; $E = \{2;5;10\}$ và $F = \{6;10;15\}$ đều có tích ba phần tử là số chính phương. Khi đó $T = S \setminus \{a;d;e;f\}$ với $a \in A, d \in D, e \in \{2;5\}, f \in \{6;15\}$. Do đó $3,12 \in T$ suy ra $1,4,9 \notin T$ (vì $1.3.12 = 6^2, 4.3.12 = 12^2, 9.3.12 = 18^2$) Khi đó $\{2;6;12\}$ hoặc $\{3;5;15\}$ là tập con của T. Suy ra T tồn tại 3 phần tử có tích là số chính phương. Vì vậy $\|T\| \le 10$ Dấu bằng xảy ra chẳng hạn tại $T = \{1;4;5;6;7;10;11;12;13;14\}$. Vậy T có nhiều nhất 10 phần tử.	**0,5**

Chú ý:- *Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.*

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.

- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.

- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai ở câu nào thì không chấm điểm câu đó (vẽ hình sai ở đề bài chung thì không chấm điểm toàn bộ bài hình học, tuy nhiên nếu học sinh vẽ AB > AC và làm đúng thì cho nửa số điểm của phần làm đúng)

- Bài hình học, thí sinh không vẽ hình ở câu nào thì cho nửa số điểm của phần làm đúng trong câu đó.

- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.

- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

ĐỀ DỰ BỊ

(Đề thi gồm 01 trang, 05 bài)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2025 – 2026

ĐỀ THI MÔN: TOÁN (CHUYÊN)
Thời gian làm bài: 150 phút.

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Mỗi bạn An, Bình, Cường viết ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 15 lên bảng. Tính xác suất để tổng của ba số viết lên bảng là một số chia hết cho 3.

b) Một canô xuôi dòng 60 (km) và ngược dòng 48 (km) mất 4 giờ với tốc độ dự định. Nếu canô xuôi dòng 20 (km) và ngược dòng 8 (km) với cùng tốc độ dự định đó thì mất 1 giờ. Tính tốc độ dự định của canô khi nước yên lặng và tốc độ dòng nước.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\left(x^2+4\right)\sqrt{2x+4}=3x^2+6x-4$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=4x+2y \\ x^2-1=3\left(1-y^2\right) \end{cases}$

Bài 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, có $AB<AC$. Lấy điểm D,E lần lượt đối xứng với A qua B,C. Đường trung trực của cạnh BC cắt DE tại F. Trong góc $\widehat{CBD}$ vẽ tia Bx, trong góc $\widehat{BCE}$ vẽ tia Cy sao cho $\widehat{DBx}=\widehat{FBC}=\widehat{ECy}$. P là giao điểm của Bx và Cy. Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác PBC. Tiếp tuyến tại P của đường tròn (O) cắt đường thẳng AB,AC lần lượt tại M,N.

a) Chứng minh bốn điểm M,N,D,E cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi giao điểm của (O) với đường thẳng AB,AC lần lượt là H và K (H khác B, K khác C). Chứng minh HK là đường trung bình của tam giác AMN.

c) Giả sử AP cắt đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại Q và S (Q khác P, S khác A). Chứng minh hai đường thẳng CQ và SE song song, từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE.

Bài 4. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Tìm số dư của phép chia $T=\prod\limits_{1\leq x\leq 107}\left(1+x+\cdots+x^6\right)$ khi chia cho 107.

b) Thầy giáo cho bạn A viết 90 số nguyên dương phân biệt lên bảng. Xét tất cả các cặp số (không tính thứ tự) bạn A viết, mỗi khi viết được cặp (a,b) thỏa mãn $100\leq|a-b|\leq 199$ thì bạn A được 1 điểm. Hỏi bạn A có tổng điểm nhiều nhất là bao nhiêu?

----------- HẾT -----------

- Thí sinh làm bài trên giấy thi, không sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:.................
Cán bộ coi thi số 1: .... Cán bộ coi thi số 2: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

HDC ĐỀ DỰ BỊ

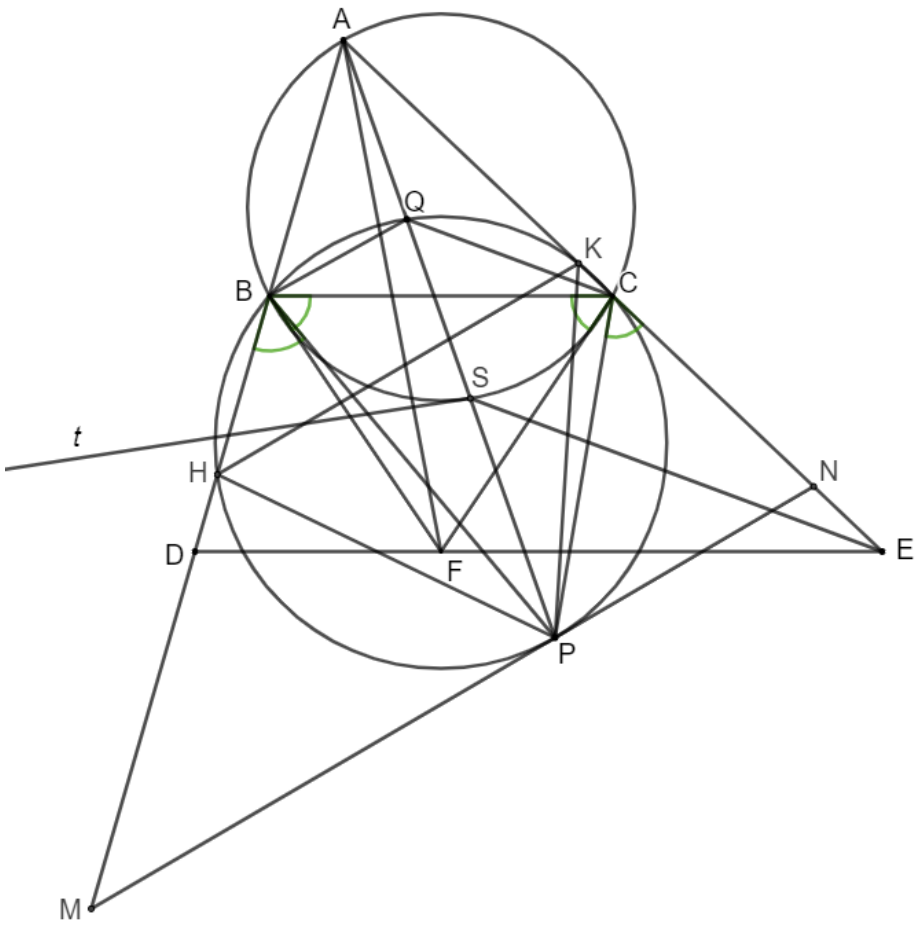
KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2025 – 2026

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN CHUYÊN

(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

Bài	Đáp án	Điểm
1 (2,0 điểm)	**a) (1,0 điểm)**	
	$n(\Omega)=14^3$ TH1: Cả ba số chia hết cho 3: có 4^3 cách chọn	**0,25**
	TH2: Cả ba số chia 3 dư 1: có 5^3 cách chọn	**0,25**
	TH3: Cả ba số chia 3 dư 2: có 5^3 cách chọn	**0,25**
	TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2: $4.5.5.3!$ cách chọn Xác suất cần tìm bằng $\dfrac{4^3+5^3+5^3+4.5.5.3!}{14^3}=\dfrac{457}{1372}$	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Canô xuôi dòng với tốc độ là $x+y$ (km/giờ), điều kiện: $x>y>0$. Canô ngược dòng với tốc độ là $x-y$ (km/giờ) Theo đề ra ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{60}{x+y}+\dfrac{48}{x-y}=4\\ \dfrac{20}{x+y}+\dfrac{8}{x-y}=1\end{cases}$	**0,5**
	Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{30}\\ \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=30\\ x-y=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=27\\ y=3\end{cases}(t/m)$ Vậy tốc độ của canô khi nước yên lặng là 27 (km/giờ), tốc độ của dòng nước là 3 (km/giờ).	**0,5**
2 (2,0 điểm)	**a) (1,0 điểm)**	
	Điều kiện xác định $x\ge -2$ $(x^2+4)\sqrt{2x+4}=3x^2+6x-4$ $\Leftrightarrow (x^2+4)\sqrt{2x+4}+x^2+4=4x^2+6x$ $\Leftrightarrow (x^2+4)(\sqrt{2x+4}+1)=2x(2x+3)$ Có $x=-\dfrac{3}{2}$ không thỏa mãn. Với $x\ne-\dfrac{3}{2}$ phương trình $\Leftrightarrow (x^2+4)\left(\dfrac{2x+4-1}{\sqrt{2x+4}-1}\right)=2x(2x+3)$ $\Leftrightarrow \dfrac{x^2+4}{\sqrt{2x+4}-1}-2x=0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow x^2+4-2x\sqrt{2x+4}+2x=0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+4}-x)^2=0$ $\Leftrightarrow x=\sqrt{2x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2x-4=0\end{cases}\Rightarrow x=1+\sqrt{5}$ Vậy phương trình có nghiệm: $x=1+\sqrt{5}$.	**0,5**
	b) (1,0 điểm)	

	$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y & (1) \\ x^2 - 1 = 3(1 - y^2) & (2) \end{cases}$ $(2) \Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 4$. Thay vào (1) , ta có: $x^3 - y^3 = \frac{1}{4}(4x + 2y)(x^2 - 3y^2)$ $\Leftrightarrow y(5y^2 + 6xy + x^2) = 0 \Leftrightarrow y(x + 5y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -x \\ x = -5y \end{array}\right.$	**0,25**
	Với $y = 0$ thay vào (2) ta được: $x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$	**0,25**
	Với $y = -x$ thay vào (2) ta được: $x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$	**0,25**
	Với $x = -5y$ thay vào (2) ta được: $y^2 = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \frac{-5\sqrt{7}}{7} \\ y = -\frac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{7}}{7} \end{array}\right.$ Vậy tập nghiệm của hệ đã cho là: $S = \left\{(2;0);(-2;0);(1;-1);(-1;1);\left(\frac{-5\sqrt{7}}{7};\frac{\sqrt{7}}{7}\right);\left(\frac{5\sqrt{7}}{7};\frac{-\sqrt{7}}{7}\right)\right\}$	**0,25**
3 (3,0 điểm)	**a) (1,0 điểm)**	
	$\widehat{MDE} = \widehat{MBC} = \widehat{DBP} + \widehat{PBC}$.	**0,5**
	$= \widehat{PCN} + \widehat{NPC} = \widehat{PNE} \Rightarrow$ Bốn điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.	**0,5**
	b) (1,0 điểm)	
	$\widehat{PKH} = \widehat{PBD} = \widehat{MPH}, \widehat{PHK} = \widehat{PCE} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{PHK} = \widehat{PKH} \Rightarrow PK = PH \\ \widehat{PHK} = \widehat{HPM} \Rightarrow HK // MN \end{cases}$	**0,25**
	$\Delta FBC \backsim \Delta PKH \Rightarrow \frac{FB}{PK} = \frac{BC}{HK} = \frac{AB}{AK}$,	**0,25**
	mà $\widehat{ABF} = \widehat{ABC} + \widehat{FBC} = \widehat{AKH} + \widehat{PKH} = \widehat{AKP} \Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta AKP$	**0,25**
	$\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{KAP} \Rightarrow \Delta ADF \backsim \Delta ANP \Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AF}{AP} = \frac{AD}{AN} \Rightarrow \frac{AN}{AK} = \frac{AD}{AB} = 2$ $\Rightarrow K$ là trung điểm của AN $\Rightarrow HK$ là đường trung bình của tam giác AMN.	**0,25**
	c) (1,0 điểm)	

	 $\widehat{ASB}=\widehat{ACB}=\widehat{AED}=\widehat{AMP} \Rightarrow BMPS$ là tứ giác nội tiếp	**0,25**
	$\Rightarrow AS.AP = AB.AM = 2.AB.AH = 2.AQ.AP \Rightarrow AS = 2AQ \Rightarrow QC//SE$	**0,25**
	Mà $BC//DE \Rightarrow \widehat{SED}=\widehat{QCB}=\widehat{QPB}=\widehat{SMD} \Rightarrow S,E,M,D$ thuộc một đường tròn $\Rightarrow S$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE .	**0,25**
	Kẻ tiếp tuyến St của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (trong góc $\widehat{BSD}$). $\widehat{BSM}=\widehat{BPM}=\widehat{BCP}$, $\widehat{BSt}=\widehat{BCS} \Rightarrow \widehat{MSt}=\widehat{PCS}=\widehat{SNP} \Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE tại S .	**0,25**
4 (1,0 điểm)	**(1,0 điểm)**	
	Khai triển vế trái ta có: $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z} \ge \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$	**0,25**
	Áp dụng AM – GM: $\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z} \ge 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{x}{y}.\frac{y}{z}} = \frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}$.	**0,25**
	Tương tự: $\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \ge \frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}$; $\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y} \ge \frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}$. Cộng theo vế, 3 bất đẳng thức trên ta được: $3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \ge \frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$ Suy ra : $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \ge \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$.	**0,25**
	Tương tự: $\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z} \ge \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.	**0,25**
5	**a) (1,0 điểm)**	

(2,0 điểm)	Ta thấy rằng $1+x+\cdots+x^6=\dfrac{x^7-1}{x-1}$, với mọi $x\neq 1$. Ta sẽ chứng minh rằng với $a,b\in\mathbb{Z}$ mà $a^7\equiv b^7 \pmod{107}$ thì $a\equiv b \pmod{107}$.	**0,25**
	Thật vậy, ta có thể giả sử a,b nguyên tố cùng nhau với 107. Theo định lý Fermat nhỏ thì $a^{106}\equiv b^{106}\equiv 1 \pmod{107}$. Suy ra $a^{106}\equiv b^{106}\equiv b^{105}\cdot b\equiv a^{105}\cdot b \pmod{107}$ nên $a\equiv b \pmod{107}$. Suy ra $2^7-1, 3^7-1,\ldots,107^7-1$ không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 107.	**0,25**
	Ta có $\prod\limits_{x=2}^{107}(x^7-1)\equiv 106!\equiv -1 \pmod{107}$ (theo định lý Wilson). Suy ra $\prod\limits_{x=2}^{107}(x-1)\cdot\prod\limits_{x=2}^{107}(x^6+\cdots+x+1)\equiv -1 \pmod{107}$.	**0,25**
	Do $\prod\limits_{x=2}^{107}(x-1)\equiv 106!\equiv -1 \pmod{107}$ nên $\prod\limits_{x=2}^{107}(x^6+\cdots+x+1)\equiv 1 \pmod{107}$, nhân thêm biểu thức khi $x=1$ vào, ta có $T\equiv 7 \pmod{107}$.	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Gọi 90 số nguyên dương này là $t_1,t_2,\ldots,t_{90}$ Cặp số $(a;b)$ được gọi là hoàn hảo nếu $100\leq \lvert a-b\rvert\leq 199$. Không mất tính tổng quát, xét t_1 là số nằm trong nhiều cặp "hoàn hảo" nhất, cụ thể là k cặp $(t_1,t_2);(t_1,t_3);...;(t_1,t_{k+1})$ Khi đó 2 số bất kỳ trong dãy $t_2,t_3,...,t_{k+1}$ không thể tạo thành cặp "hoàn hảo".	**0,25**
	Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại hai số $i,j\in\{2;3;...;k+1\}$ mà $i\neq j$ và $100\leq \lvert t_i-t_j\rvert\leq 199$ Mặt khác $100\leq \lvert t_1-t_i\rvert\leq 199$ và $100\leq \lvert t_1-t_j\rvert\leq 199$ Nếu $t_1>t_i>t_j$ thì $100\leq t_1-t_i$ và $100\leq t_i-t_j$ suy ra $t_1-t_j\geq 200$ (vô lý)	**0,25**
	Các khả năng khác xét tương tự Do đó giả sử sai Vì vậy, tất cả các cặp hoàn hảo đều chứa một trong các số $t_1,t_{k+2},...,t_{90}$ (có tất cả $90-k$ số)	**0,25**
	Mà mỗi số tạo tối đa k cặp hoàn hảo nên: Tổng số cặp hoàn hảo $\leq k(90-k)\leq \dfrac{(k+90-k)^2}{4}=2025$ Dấu = xảy ra chẳng hạn tại 90 số đó là $1,2,3,...,44,45,155,156,...,199$. Vậy bạn A đạt nhiều nhất 2025 điểm.	**0,25**

<u>Chú ý:</u>- *Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.*

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.

- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.

- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai ở câu nào thì không chấm điểm câu đó (vẽ hình sai ở đề bài chung thì không chấm điểm toàn bộ bài hình học).

- Bài hình học, thí sinh không vẽ hình ở câu nào thì cho nửa số điểm của phần làm đúng trong câu đó.

- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.

- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.