

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (3,0 điểm) Tính hợp lí giá trị các biểu thức sau:

$$A = 2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}$$

$$B = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2020}{2021}$$

Câu II. (4,0 điểm)

1. Tìm x biết: $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$.

2. Tìm x, y, z biết:

$$\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{1}{x+y+z-2} \quad (\text{với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa}).$$

Câu III. (2,0 điểm) Một đơn vị công nhân sửa đường dự định phân chia số mét đường phải sửa cho 3 tổ: Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỷ lệ 4 : 5 : 6. Nhưng sau đó, vì số người thay đổi nên đơn vị đã chia lại số mét đường phải sửa cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỷ lệ 3 : 4 : 5. Do đó, có một tổ làm ít hơn dự định là 20m đường. Tính số mét đường đơn vị đã chia lại cho mỗi tổ.

Câu IV. (4,0 điểm)

1. Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $3xy - 5 = x^2 + 2y$

2. Cho số nguyên tố $p > 3$ và hai số nguyên dương a, b sao cho: $p^2 + a^2 = b^2$.

Chứng minh a chia hết cho 12.

Câu V. (5,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD cắt đường thẳng AC tại E .

1. Chứng minh rằng $BE = CD$; $ED = BC$

2. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BE, CD . Chứng minh rằng A là trung điểm của PQ

3. Gọi M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC . Xác định vị trí của M để biểu thức $MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu VI. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$