CHƯƠNG 6

HÀM SỐ MŨ
HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 01 LŨY THỪA VỚI MŨ SỐ THỰC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

- Với a là số thực tuỳ ý: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thua so?}}$.
- Với a là số thực khác 0: $a^0 = 1$; $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Trong biểu thức a^m, a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

Lưu ý: 0^0 và $0^{-n}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ không có nghĩa.

Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

- Với $a \neq 0, b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}; \quad (ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Chú ý:

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

2 Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a và số nguyên dương n. Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét:

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a.
- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

Lưu ý: $\sqrt[n]{0}=0\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Giả sử n,k là các số nguyên dương, m là số nguyên. Khi đó:

$$\oplus\ \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\oplus\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$\oplus\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m};$$

$$\oplus\ \sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & khi\ \ n\ \ le\\ |a| & khi\ \ n\ \ chan\end{cases}$$

$$\oplus\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$$

(Giả thiết các biểu thức ở trên đều có nghĩa).

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r=\frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương.

Luỹ thừa của a với số mũ r, kí hiệu là a^r, xác định bởi $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Chú ý: Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

3 Lũy thừa với số mũ thực

Khái niệm luỹ thừa với số mũ thực

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ $\left(r_n\right)$ mà $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=\alpha$. Khi đó, dãy số $\left(a^{r_n}\right)$ có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ $\left(r_n\right)$ đã chọn. Giới hạn đó gọi là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^α.

$$a^\alpha=\lim_{n\to+\infty}a^{r_n}$$

Chú ý: Luỹ thừa với số mũ thực (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp: Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa. Chọn $a;b$ là các số thực dương và $\alpha;\beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

⊕ $a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$ ⊕ $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$ ⊕ $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha.\beta}$

⊕ $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}.b^{\alpha}$ ⊕ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$ ⊕ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\alpha}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) Cho hai số thực x,y thỏa mãn $4^{x}=5;4^{y}=3$. Tính 4^{x+y}

b) Cho a là số thực dương thỏa mãn $a^{2b}=3$. Tính $K=2a^{6b}+4$.

c) Tính $P=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+(0,25)^{\frac{-5}{2}}$

d) Biết rằng α ; β là các số thực thỏa mãn $2^{\beta}\left(2^{\alpha}+2^{\beta}\right)=8\left(2^{-\alpha}+2^{-\beta}\right)$. Tính $\alpha+2\beta$

Bài tập 2: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) Tính giá trị của biểu thức $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-0,2}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

b) Tính giá trị biểu thức $A=3\left(3^{3x}+3^{-3x}\right)$ biết $3^{x}+3^{-x}=4$.

c) Tính giá trị của biểu thức $A=\left(5^{\frac{-2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$

d) Tính $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2021}.\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2000}$.

e) Biết $4^{x}+4^{-x}=23$. Tính giá trị của biểu thức $P=2^{x}+2^{-x}$

Bài tập 3: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) Biết $9^{x}+9^{-x}=23$. Tính giá trị của biểu thức $P=3^{x}+3^{-x}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2^{3}.2^{-1}+5^{-3}.5^{4}}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^{0}}$

c) Cho $9^{x}+9^{-x}=47$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{13+3^{x}+3^{-x}}{2-3^{x}-3^{-x}}$

Dạng 2: Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp: Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa. Chọn $a;b$ là các số thực dương và $\alpha;\beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

⊕ $a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$ ⊕ $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$ ⊕ $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha.\beta}$

⊕ $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}.b^{\alpha}$ ⊕ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$ ⊕ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\alpha}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}\,(x>0)$ b) $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$ (với a,b là hai số thực dương)

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức sau với a,b là các số thực dương:

a) $P=a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a}$ b) $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$

c) $M=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0,a\neq 1$. d) $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$

e) $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ f) $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$

Bài tập 3: Thực hiện các yêu cầu sau đây:

a) Rút gọn biểu thức $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$

b) Cho x,y là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$

c) Cho số thực $a>0$ và $a\neq 1$. Hãy rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}$

d) Cho x,y là các số thực dương và $x\neq y$. Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{\left(x^{2x}+y^{2x}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{2x}}xy\right)^{2x}}$

Dạng 3: So sánh các lũy thừa

Phương pháp: Sử dụng kiến thức cơ bản để so sánh

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh:

a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{2}{3}}$.

Bài tập 2: Tìm điều kiện của a để $(2a-3)^{-3} \geq (2a-3)^{-7}$?

Bài tập 3: Với những giá trị nào của a thì

a) $a^e > a^\pi$

b) $(a-1)^2 > (a-1)^{\sqrt{5}}$.

Bài tập 4: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Cho $A = 199^{2023}; B = \sqrt{199}^{2024}$. So sánh A, B.

b) Sắp theo $A = 3^{4999}, B = 11^{4001}$ và $C = 1331^{1000}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

Bài tập 5: So sánh ba số sau: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,2}$

Dạng 4: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Phương pháp: Bài toán lại kép

Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ. Công thức: $T_n = T_0(1+r)^n$

Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
T_0 : Số tiền gửi ban đầu;
n : Số kỳ hạn tính lãi;
r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm $r(r$ được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau: $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^N$. Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

Bài tập 2: Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

Bài tập 3: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Số lượng vi khuẩn sau 10 giờ là

Bài tập 4: Cho biết đầu năm 2018 dân số Việt Nam là 93,7 triệu và tỉ lệ tăng dân số hằng năm là 1,2%. Giả sử rằng tỉ lệ tăng dân số từ năm 2018 đến năm 2030 không thay đổi thì dân số nước ta đầu năm 2030 khoảng bao nhiêu (Biết dân số Việt Nam được tính theo công thức $S = A.e^{ni}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là số dân sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số.

Bài tập 5: Dân số Việt Nam được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2020, Việt Nam có khoảng $97,76$ triệu người và tỉ lệ tăng dân số là $1,14\%$. Hỏi năm 2030 Việt Nam sẽ có bao nhiêu triệu người nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Bài tập 6: Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = A.e^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017 dân số Việt Nam là 93671600 người Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $0,81\%$, dự báo dân số Việt Nam năm 2030 là bao nhiêu người?

(Tổng cục thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr. 79).

Bài tập 7: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền bao nhiêu, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

Bài tập 8: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho 200000000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $243\,101\,250$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

Bài tập 9: Ông Đại mới xin được việc làm nên gửi tiết kiệm vào ngân hàng với hình thức cứ mỗi đầu tháng đóng vào 5 triệu đồng với lãi suất 0,33%/ tháng. Tính số tiền mà ông Đại thu được từ ngân hàng sau 5 năm.

Bài tập 10: Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền 100000000 đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là $1,2\%$ và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ bằng:

A. $a^{\frac{3}{2}}$. **B.** $a^{\frac{-2}{3}}$. **C.** $a^{\frac{2}{3}}$. **D.** $a^{\frac{4}{3}}$.

Câu 2: Cho các số thực $a, b, m, n\ (a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a^m.a^n = a^{m+n}$. **B.** $(a^m)^n = a^{m+n}$.

C. $(a+b)^m = a^m + b^m$. **D.** $\dfrac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Câu 3: Cho $a = \dfrac{1}{256}$ và $b = \dfrac{1}{27}$. Tính $A = a^{-\frac{3}{4}} + b^{-\frac{4}{3}}$

A. 23. **B.** 89. **C.** 145. **D.** 26.

Câu 4: Với a là số thực dương, biểu thức $P = a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** $a^{\frac{2}{5}}$. **C.** $a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $a^{\frac{4}{3}}$.

Câu 5: Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}$ bằng:

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** a^5. **C.** $a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $a^{\frac{1}{6}}$.

Câu 6: Giá trị $\sqrt[3]{2021}.\sqrt[5]{2021}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $2021^{\frac{2}{5}}$ **B.** $2021^{\frac{1}{15}}$ **C.** $2021^{\frac{8}{15}}$ **D.** $2021^{\frac{1}{10}}$

Câu 7: Cho a là một số thực dương. Viết biểu thức $P = a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a^2}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $P = a^{\frac{2}{5}}$. **B.** $P = a^{-\frac{1}{15}}$. **C.** $P = a^{\frac{1}{15}}$. **D.** $P = a^{\frac{19}{15}}$.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \sqrt[3]{x\sqrt{x}}\ (x > 0)$ bằng

A. $x^{\frac{4}{3}}$. **B.** $x^{\frac{1}{2}}$. **C.** $x^{\frac{1}{6}}$. **D.** $x^{\frac{1}{3}}$.

Câu 9: Cho a là số thực dương khác 1, biểu thức $a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $a^{\frac{14}{15}}$. **B.** $a^{\frac{2}{15}}$. **C.** $a^{\frac{1}{15}}$. **D.** $a^{\frac{17}{3}}$.

Câu 10: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\sqrt{10^\alpha} = \left(\sqrt{10}\right)^\alpha$. **B.** $(10^\alpha)^2 = 10^{\alpha^2}$. **C.** $(10^\alpha)^2 = (100)^\alpha$. **D.** $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$.

Câu 11: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\left(5^{\alpha}\right)^2=25^{\alpha}$. **B.** $\left(5^{\alpha}\right)^2=5^{\alpha^2}$. **C.** $\sqrt{5^{\alpha}}=\left(\sqrt{5}\right)^{\alpha}$. **D.** $\sqrt{5^{\alpha}}=5^{\frac{\alpha}{2}}$.

Câu 12: Cho a là số thực dương. Giá trị của biểu thức $P=a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** $a^{\frac{7}{6}}$. **C.** a^5. **D.** $a^{\frac{5}{6}}$.

Câu 13: Nếu $a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{3}}>b^{\sqrt{5}}$ thì

A. $a<1;0<b<1$. **B.** $a>1;b<1$. **C.** $0<a<1;b<1$ **D.** $a>1;0<b<1$.

Câu 14: Xét α,β là hai số thực bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3^{\alpha}>3^{\beta}\Leftrightarrow\alpha=\beta$. **B.** $3^{\alpha}>3^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$. **C.** $3^{\alpha}>3^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$. **D.** $3^{\alpha}<3^{\beta}\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

Câu 15: Cho $a>1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{a^{2016}}<\frac{1}{a^{2017}}$. **B.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **C.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **D.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$.

Câu 16: So sánh hai số m và n nếu $\left(\sqrt{3}-1\right)^m<\left(\sqrt{3}-1\right)^n$.

A. Không so sánh được. **B.** $m<n$. **C.** $m=n$. **D.** $m>n$.

Câu 17: Cho a,b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{16}\right)^{a^2+ab}=\left(\sqrt[8]{64}\right)^{a^2-7ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{19}$. **D.** $\frac{76}{3}$.

Câu 18: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}},\left(x>0\right)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 19: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Biểu thức $P=\frac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=-\frac{5}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Câu 20: Biết $4^x+4^{-x}=14$, tính giá trị của biểu thức $P=2^x+2^{-x}$.

A. 4. **B.** 16. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** ±4.

Câu 21: Cho a là một số thực dương, tính giá trị của biểu thức $P=\left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 1.

Câu 22: Cho $9^x+9^{-x}=23$. Khi đó biểu thức $A=\frac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tích $a.b$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** -8. **D.** 8.

Câu 23: Cho a là một số thực dương. Giá trị của biểu thức $P=\left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 1.

Câu 24: Cho biểu thức $T=\frac{1}{2^{-x-1}}+3.\sqrt{2}^{2x}-4^{\frac{x-1}{2}}$. Khi $2^x=\sqrt{3}$ thì giá trị của biểu thức T là

A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Khi đó biểu thức $P=\frac{5-2^x-2^{-x}}{3+2^{x+1}+2^{1-x}}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản và $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}^+$. Tính tổng $a+b$ có giá trị bằng

A. 8. **B.** 11. **C.** 17. **D.** 4.

Câu 26: Cho x là số thực dương. Biết $\sqrt{x.\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}}=x^{\frac{b}{a}}$ với a, b là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 17.

Câu 27: Cho hai số thực dương a,b. Rút gọn biểu thức $A=\frac{a^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{b}+b^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}+\sqrt[12]{b}}$ ta thu được $A=a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Câu 28: Biết biểu thức $P=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ $(x>0)$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là x^α. Khi đó, giá trị của α bằng

A. $\frac{37}{15}$. **B.** $\frac{23}{36}$. **C.** $\frac{23}{30}$. **D.** $\frac{53}{30}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(a)=\frac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0,a\neq1$. Giá trị của $M=f\left(2021^{2022}\right)$ là

A. 2021^{1011} **B.** $2021^{1011}+1$ **C.** $-2021^{1011}+1$ **D.** $-2021^{1011}-1$

Câu 30: Cho a là số thực dương. Rút gọn biểu thức $A=a\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}$ về dạng $a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T=m^2+n^2$.

A. 2425. **B.** 539. **C.** 593. **D.** 1369.

Câu 31: Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m,n\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3m^2-2n=2$. **B.** $m^2+n^2=43$. **C.** $2m^2+n=15$. **D.** $m^2+n^2=25$.

Câu 32: Cho m, n là hai số dương không đồng thời bằng 1, biểu thức $\dfrac{m^{2\sqrt{2}}-n^{2\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)^2}-1$ bằng

A. $\dfrac{2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$. **B.** $\dfrac{-2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$. **C.** $\dfrac{2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$. **D.** $\dfrac{-2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$.

Câu 33: Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn: $3^x.6^y=\dfrac{2^{15}.6^{40}}{9^{50}.12^{25}}$. Tính $x.y$?

A. -445. **B.** -755. **C.** -450. **D.** -425.

Câu 34: Tại thời điểm ban đầu nếu đầu tư P đô la với tỷ lệ lãi suất được tính gộp liên tục hàng năm không đổi là r thì giá trị tương lai của khoản đầu tư này sau t năm là $B(t)=P.e^{rt}$ đô la. Giả sử tỷ lệ lãi suất tính gộp hàng năm là 8%. Hỏi sau bao nhiêu năm thì số tiền đầu tư ban đầu tăng thêm ít nhất 50%.

A. 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 35: Trong khuôn viên một trường đại học có 5000 sinh viên, một sinh viên vừa trở về sau kì nghỉ và bị nhiễm virus cúm truyền nhiễm kéo dài. Sự lây lan này được mô hình hóa bởi công thức $y=\dfrac{5000}{1+4999e^{-0,8t}}, \forall t\geq 0$. Trong đó y là tổng số học sinh bị nhiễm sau t ngày. Các trường đại học sẽ cho các lớp học nghỉ khi có nhiều hơn hoặc bằng 40% số sinh viên bị lây nhiễm. Sau ít nhất bao nhiêu ngày thì trường cho các lớp nghỉ học?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 36: Số người trong cộng đồng sinh viên đã nghe một tin đồn nào đó là $N=P\left(1-\mathrm{e}^{-0,15d}\right)$ trong đó P là tổng số sinh viên của cộng đồng và d là số ngày trôi qua kể từ khi tin đồn bắt đầu. Trong một cộng đồng 1000 sinh viên, cần bao nhiêu ngày để 450 sinh viên nghe được tin đồn?

A. 4. **B.** $3\cdot$ **C.** $5\cdot$ **D.** $2\cdot$

Câu 37: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S=A.\mathrm{e}^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

A. 2029. **B.** 2020. **C.** 2025. **D.** 2026.

Câu 38: Bác An gửi tiết kiệm số tiền 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất kép 5% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) bác An thu được sau 5 năm (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $125,628$. **B.** $130,432$. **C.** $127,628$. **D.** $125,000$.

Câu 39: Bác An gửi tiết kiệm số tiền 300 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất kép 5% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Sau ba năm vì cần tiền nên bác An đến ngân hàng rút ra 100 triệu đồng, phần còn lại vẫn tiếp tục gửi. Hết bốn năm tiếp theo, bác An lại đến ngân hàng rút toàn bộ tiền tiết kiệm (cả gốc và lãi) về, hỏi bác An sẽ thu về được bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $294,000$. **B.** $296,688$. **C.** $300,580$. **D.** $225,178$.

Câu 40: Dân số thế giới được dự đoán theo công thức $P(t)=ae^{bt}$, trong đó a,b là các hằng số, t là năm tính dân số. Theo số liệu thực tế, dân số thế giới năm 1950 là 2 tỉ 560 triệu người và năm 1980 là 4 tỉ 440 triệu người. Hãy dự đoán dân số thế giới năm 2030? (Làm tròn đến hàng triệu)

A. 19 tỉ 280 triệu. **B.** 10 tỉ 141 triệu. **C.** 15 tỉ 236 triệu. **D.** 11 tỉ 116 triệu.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho a,b là các số thực dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a^m.b^n=(ab)^{m+n}$

b) $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

c) $(a^m)^n=a^{m.n}$

d) $a^m+a^n=a^{m+n}$

Câu 2: Cho biểu thức $9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}=A$ và $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}=B$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}=(9.27)^{\frac{2}{5}}$

b) $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}=3^k$ thì $k=3$

c) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}=2^k$ thì $k=3$

d) Phép toán $A-B$ thu được kết quả là một số tự nhiên

Câu 3: Cho các biểu thức $A=\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}};B=-\sqrt[4]{b}$; với $a>0,b>0,a\neq b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau khi rút gọn, thì A chỉ chứa biến b

b) Biểu thức luôn $A>0$

c) $A=B+\sqrt{a}$

d) $\frac{A-1}{B}=1-\frac{1}{B}$

Câu 4: Với mọi $a>0,b>0$ và m,n là các số thực tùy ý. Giả sử các biểu thức xuất hiện trong các công thức của mỗi mệnh đề đều có nghĩa. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a^m.a^n=a^{m+n}$.

b) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ với n là số nguyên dương.

c) Nếu $\left(\frac{5}{2}\right)^m>\left(\frac{5}{2}\right)^n$ thì $m>n$.

d) Nếu $\left(\frac{\pi}{4}\right)^m>\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3m-2}$ thì $m<1$.

Câu 5: Với mọi số thực $a>0,b>0$. Giả sử các biểu thức xuất hiện trong các công thức của mỗi mệnh đề đều có nghĩa. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$

b) $a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{1}{6}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{b^7}}{b^3}=b^{\frac{7}{9}}$

d) $\dfrac{\left(\sqrt{ab^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}}=ab^2$

Câu 6: Cho $a>0$, $b>0$ và hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Biết m,n là các số thực thỏa mãn $\sqrt{a}.\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}=a^m$, $\dfrac{b^{\frac{4}{3}}\left(b^{\frac{-1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{b^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{-1}{4}}\right)}=b^n$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(0)=0$.

b) $m\in\mathbb{Z}$.

c) $m=n$.

d) Nếu $f(m-a)+f(n-b)=2$ thì $f\left(a^m\right)+f\left(b^n\right)=0$.

Câu 2. Cho a,b là số thực dương và $x,y\in\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\left(a^x\right)^y=a^{x^y}$

b) Nếu $\sqrt{2}-1^{\,x}<\sqrt{2}-1^{\,y}$ thì $x<y$

c) Rút gọn $P=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1}.a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ ta được $P=a^5$.

d) Nếu $f(x)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}$ thì $S=f\left(\dfrac{1}{2023}\right)+f\left(\dfrac{2}{2023}\right)+...+f\left(\dfrac{2022}{2023}\right)=\dfrac{1011}{3}$.

Câu 7: Một người gửi số tiền 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Lãi suất của ngân hàng là $0,65$ trong một năm

b) Sau khi gửi 1 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng là $532\,500\,000$ đồng

c) Sau khi gửi 3 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng nhiều hơn $600\,000\,000$ đồng.

d) Do thiếu tiền nên ở cuối năm thứ 3, người đó đã rút 100 triệu đồng từ ngân hang và tiếp tục gửi thêm 2 năm nữa thì rút toàn bộ số tiền. Lúc này người này có số tiền ít hơn $670\,000\,000$ đồng.

Câu 8: Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Sau năm 2019. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Công thức sau *n* năm thì diện tích trồng rừng của tỉnh A là $A=1000.(1+0,06)^{n+1}$.

b) Vào năm 2032, diện tích rừng năm đó hơn gấp đôi năm 2019.

c) Vào năm 2025 thì diện tích rừng năm đó đạt trên 1400 ha.

d) Diện tích rừng vào hai năm sau kể từ năm 2019 sẽ đạt 1123,6 ha.

Câu 9: Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp với lãi suất $0,5\%$ / tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 30 triệu đồng. Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian trả nợ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền nợ sau 8 tháng là $796464780,4$.

b) Số tiền nợ sau 10 tháng là $744299339,8$.

c) Sau 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

d) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 45 triệu đồng thì sau hai năm anh Nam trả hết nợ.

Câu 10: Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là $A=P\cdot\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^n$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 6% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau một năm sẽ còn lại là 95 triệu đồng.

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại là 84,64 triệu đồng.

b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là 5,13%

c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau 14 năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Giá trị của biểu thức $A=(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ và $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ và $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$ là bao nhiêu?

Câu 2: Tính giá trị biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-0.75}+\left(\dfrac{1}{625}\right)^{-0,25}-\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-0,6}$.

Câu 3: Cho $0<a<1$ và $b>1$. Biết rằng biểu thức $\sqrt{\left(a^{\pi}+b^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}ab\right)^{\pi}}=ma^{\pi}+nb^{\pi}$. với $m,n\in\mathbb{Z}$.

Giá trị của $m+n$ bằng bao nhiêu?

Câu 4: Trong năm 2022, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 7% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Hỏi năm 2030, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là tính theo ha? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) là bao nhiêu?

Câu 5: Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là $850.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán xe X là bao nhiêu đồng (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Câu 6: Rút gọn biểu thức sau đây: $P=\left[\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}\right]\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)^{-1}+\sqrt[6]{a}$, với $a>0,b>0,a\neq b$

Câu 7: Tính $P=\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\dfrac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}$ khi $x=2024, y=2023$

Câu 8: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}}-\dfrac{a+4}{a^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{2}}\right).\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)$, với a là số thực dương. Tìm giá trị của a để biểu thức $A=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 9: Bác An gửi ngân hàng số tiền 200 triệu đồng theo thể thức lãi kép với kỳ hạn 6 tháng với lãi suất $3,5\%/\text{kỳ}$. Số tiền cả vốn và lãi được ngân hàng tính theo công thức $T=T_0\left(1+r\right)^n$, trong đó T_0 là số tiền gốc và n là số kỳ đã gửi. Hỏi sau 3 năm bác An mới rút tiền thì bác thu được số tiền lãi là bao nhiêu triệu đồng?

Câu 10: Cường độ ánh sáng tại độ sâu $h\left(\text{m}\right)$ dưới một mặt hồ được tính bởi công thức $I=I_0.2^{-\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ. Tại độ sâu $3\left(\text{m}\right)$, cường độ ánh sáng giảm bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại độ sâu $1\left(\text{m}\right)$?

-----------------HẾT-----------------

BÀI 02 LOGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Khái niệm Logarit

Cho a là một số thực dương khác 1 và M là một số thực dương. Số thực α để $a^{\alpha}=M$ được gọi là lôgarit cơ số a của M và kí hiệu là $\log_a M$.

$$\alpha=\log_a M \Leftrightarrow a^{\alpha}=M.$$

Chú ý: Không có lôgarit của số âm và số 0. Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

Từ định nghĩa lôgarit, ta có các tính chất sau. Với $0<a\neq 1, M>0$ và α là số thực tuỳ ý, ta có:

$\oplus$ $\log_a 1=0$; $\oplus$ $\log_a a=1$;

$\oplus$ $a^{\log_a M}=M$; $\oplus$ $\log_a a^{\alpha}=\alpha$.

2 Tính chất của Logarit

Quy tắc tính Logarit:

Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tuỳ ý.
Khi đó:

$\oplus$ $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

$\oplus$ $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

$\oplus$ $\log_a M^{\alpha}=\alpha\log_a M$.

Đổi cơ số của Logarit:

Với các cơ số lôgarit a và b bất kì $(0<a\neq 1, 0<b\neq 1)$ và M là số thực dương tuỳ ý, ta luôn có:

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$$

3 Logarit thập phân và Logarit tự nhiên

Lôgarit thập phân

Trong thực hành, ta hay dùng hệ đếm thập phân (hệ đếm cơ số 10); lôgarit cơ số 10 đóng vai trò quan trọng trong tính toán.

Lôgarit cơ số 10 của một số dương M gọi là lôgarit thập phân của M, kí hiệu là $\log M$ hoặc $\lg M$.

Đọc là lốc của M.

Số e và lôgarit tự nhiên

Bài toán lãi kép liên tục và số e

Ta đã biết: Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau tm kì) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}$$

Nếu kì tính lãi được chia càng ngày càng nhỏ, tức là tính lãi hằng ngày, hằng giờ, hằng phút, hằng giây,... thì dẫn đến việc tính giới hạn của dãy số A_m khi $m \to +\infty$. Ta có:

$$A_m = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} = P\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr}.$$

Để tính giới hạn $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m$, ta cần xét giới hạn $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}$.

Một cách tổng quát, ta xét giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Người ta chứng minh được giới hạn trên tồn tại, nó là một số vô tỉ có giá trị bằng 2,718281828... và kí hiệu là e. Vậy $e = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \approx 2,7183$.

Từ các kết quả trên suy ra $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = Pe^{tr}$.

Thể thức tính lãi khi $m \to +\infty$ theo cách trên gọi là thể thức lãi kép liên tục.

Như vậy, với số vốn ban đầu là P, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là $A = Pe^{tr}$.

Công thức trên gọi là công thức lãi kép liên tục.

Lôgarit tự nhiên

Ta có định nghĩa sau: Lôgarit cơ số e của một số dương M gọi là lôgarit tự nhiên của M, kí hiệu là $\ln M$ (đọc là lôgarit Nêpe của M)

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa logarit

Phương pháp: Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tuỳ ý. Khi đó:

$$\oplus\ \log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$$

$$\oplus\ \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$$

$$\oplus\ \log_a M^{\alpha}=\alpha\log_a M.$$

Đổi cơ số của Logarit:

Với các cơ số lôgarit a và b bất kì $(0<a\neq 1, 0<b\neq 1)$ và M là số thực dương tuỳ ý, ta luôn có:

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) $\log_2 2^{-13}$ b) $\ln e^{\sqrt{2}}$

c) $\log_8 16-\log_8 2$ d) $\log_2 6.\log_6 8$.

Bài tập 2: Cho a là số thực dương và $a\neq 1$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $T=\log_a\left(a^3\right)$.

b) Tính $I=\log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a^3}{64}\right)$ với $a\neq 4$.

c) $T=\log_a\left(\frac{a^2\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[15]{a^4}}\right)$.

d) $\log_{a^2}\left(a\sqrt{a}\right)$.

e) $a^{\log_{\sqrt{a}}4}$.

f) $P=\log_{\sqrt[3]{a}}\frac{1}{a^3}$.

Bài tập 3: Tính giá trị các biểu thức:

a) $\log_2\frac{1}{8}$ b) $\log_{\sqrt{3}}9$.

c) $\log_3 3\sqrt{3}$ d) $\log_{\frac{1}{2}}32$.

e) $\log_4 2+\log_4 32$ f) $\log_2 80-\log_2 5$.

Bài tập 4: Cho các số a,b,c thỏa mãn: $\log_a 3=2, \log_b 3=\frac{1}{4}, \log_{abc}3=\frac{2}{15}$. Tính giá trị của $\log_c 3$.

Bài tập 5: Cho các số thực dương $x\neq 1$, $y\neq 1$ thỏa mãn $\log_2 x=\log_y 16$ và tích $xy=64$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\log_2\frac{y}{x}\right)^2$

Bai tập 6: Cho $a,b>0$ thỏa mãn $\log_4 a=\log_{25} b=\log\dfrac{4b-a}{4}$. Tính giá trị của $\log_{\sqrt{6}}\left(\dfrac{a}{2}+4b\sqrt{2}\right)-\log_{\sqrt{6}} b$

Bai tập 7: Cho các số dương a,b,c khác 1 thoả mãn $\log_a(bc)=3$ và $\log_b(ac)=4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

Dạng 2: Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa logarit

Phương pháp: Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của logarit

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\frac{4}{3}} x = \log_3 y = \log_2 (2x - 3y)$. Tính $\frac{x}{y}$.

Bài tập 2: Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

Bài tập 3: Đặt $a = \log_2 5$, $b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b.

Bài tập 4: Cho hai số thực a,b thỏa mãn: $2\log_3 (a - 3b) = \log_3 a + \log_3 (4b)$ và $a > 3b > 0$. Tính $\frac{a}{b}$

Bài tập 5: Đặt $a = \log_3 2$, khi đó $\log_{72} 768$ được biểu diễn dưới dạng $\frac{ma + n}{pa + 2}$, với m, n, p là các số nguyên. Tính $m + n^2 + p^3$

Bài tập 6: Cho các số nguyên dương x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn biểu thức dưới đây $x\log_{200} 5 + y\log_{200} 2 = z$. Tính giá trị của biểu thức $29x - y - 2021z$.

Bài tập 7: Cho hai số thực a,b dương khác 1 thỏa mãn $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^n} b} = \frac{1}{\log_{a^8} b}$. Tìm n

Dạng 3: So sánh các logarit

Phương pháp: Sử dụng kiến thức cơ bản để so sánh

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho các số dương a,b. Tìm điều kiện của a, b để $\log_a \frac{1}{2} > \log_a \frac{1}{3}$ và $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$.

Bài tập 2: Cho các số dương a,b. Tìm điều kiện của a, b để $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) > \log_b\left(2+\sqrt{3}\right)$ và $a^{\frac{13}{7}} < a^{\frac{15}{8}}$

Bài tập 3: Cho hai số thực a, b biết $0 < a < b < 1$. Hãy so sánh $\log_a b$ và $\log_b a$

Bài tập 4: Xét a và b là hai số thực dương tùy ý. Đặt $x = \ln\left(a^2 - ab + b^2\right)^{1000}$; $y = 1000\ln a - \ln\frac{1}{b^{1000}}$. Hãy so sánh x và y

Bài tập 5: Cho hai số thực dương m, n $(n \neq 1)$ thỏa mãn $\frac{\log_7 m.\log_2 7}{\log_2 10 - 1} = 3 + \frac{1}{\log_n 5}$. Tìm mối quan hệ giữa m và n.

Bài tập 6: Cho các số thực dương a,b khác 1 thoả mãn $\log_2 a = \log_b 16$ và $ab = 64$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\log_2 \frac{a}{b}\right)^2$

Bài tập 7: Cho các số dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a(bc) = 2, \log_b(ca) = 4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

Bài tập 8: Cho biết hai số thực dương a và b thỏa mãn $\log_a^2(ab) = 4$; với $b > 1 > a > 0$. Tính giá trị của biểu thức $\log_a^3\left(ab^2\right)$.

Bài tập 9: Cho $a,b > 0; a,b \neq 1$ thỏa mãn $\log_a{}^2 b - 8\log_b\left(a\sqrt[3]{b}\right) = \frac{-8}{3}$. Tính giá trị $P = \log_a\left(a\sqrt[3]{ab}\right) + 2019$

Bài tập 10: Cho các số thực a,b,c,d thoả mãn $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^b} + \frac{1}{8^c} + \frac{1}{16^d} = \frac{1}{4}$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b + 3c + 4d$. Giá trị của biểu thức $\log_2 m$ bằng

Dạng 4: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Phương pháp: Bài toán lại kép

Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ. Công thức: $T_n = T_0\left(1+r\right)^n$

Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
T_0 : Số tiền gửi ban đầu;
n : Số kỳ hạn tính lãi;
r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là: $a = 15500\left(5 - \log p\right)$ trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal).Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển.

Bài tập 2: Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau: $L\left(I\right) = 10\log\dfrac{I}{I_0}$ trong đó $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là *ngưỡng nghe*). Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$.

b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $\mathrm{I} = 10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$.

Bài tập 3: Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $\left[H^+\right]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $\left[H^+\right] = 8\cdot 10^{-8}$. Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

(*Nguồn: https://nongnghiep.farmvina.com*)

Bài tập 4:a) Nước cất có nồng độ H^+ là $10^{-7}\ \mathrm{mol/L}$. Tính độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Bài tập 5: Một vi khuẩn có khối lượng khoảng 5.10^{-13} gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần. Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6\cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

(Nguồn: Câu hỏi và Câu tập vi sinh học, NXB ĐHSP, 2008)

Bài tập 6: Gia đình bác An gửi tiết kiệm 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $6{,}5\%$/năm. Biết rằng tiền lãi của kì trước được cộng vào gốc tính lãi kì sau (lãi kép).

a) Hỏi sau ba năm, gia đình bác nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu? Nếu tính theo thể thức lãi kép liên tục thì số tiền cả vốn lẫn lãi của gia đình bác An thu được là bao nhiêu (sau ba năm)?
b) Vẫn với 500 triệu đồng, gia đình bác An gửi tiết kiệm với lãi kép $6,5\%$/năm theo kì hạn 6 tháng. Hỏi để nhận được cả gốc và lãi là 1 tỉ đồng thì gia đình bác An cần gửi bao nhiêu năm?

Bài tập 7: Người ta sử dụng công thức $S = A.e^{n.r}$ để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó A là số dân của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau n năm và r là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là $78.685.800$ người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $1,2\%$, hỏi dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

Bài tập 8: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho 200000000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $243\,101\,250$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

Bài tập 9: Cường độ một trận động đất M được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ $8,3$ độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở gần đó đo được $7,1$ độ Richter. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu trận động đất này.

Bài tập 10: Trong nuôi trồng thuỷ sản , độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản . Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất trong khoảng từ 7,8 đến 8,5 . Phân tích nồng độ $\left[H^+\right]$ trong một đầm nuôi tôm sú thu được $\left[H^+\right] = 8.10^{-8}$. Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho nuôi tôm sú phát triển không ?

Bài tập 11: Một vi khuẩn có khối lượng khoảng 5.10^{-13} gam và cứ sau 20 phút vi khẩn đó tự nhân đôi một lần . Giả sử được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại ít nhất là 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đât là 6.10^{-23} gam (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính giá trị biểu thức $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$

A. -2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 2: Tính giá trị biểu thức $3^{2\log_3 5}$

A. 10. **B.** 25. **C.** 7. **D.** 20.

Câu 3: Cho $\log_a 3 = 5$. Tính $P = \log_a\left(3a^5\right)$.

A. $P = 10$ **B.** $P = 25$ **C.** $P = 12$ **D.** $P = 125$

Câu 4: Với mọi số thực a dương, $\log_2 \frac{a}{2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log_2 a$. **B.** $\log_2 a + 1$. **C.** $\log_2 a - 1$. **D.** $\log_2 a - 2$.

Lời giải

Có $\log_2 \frac{a}{2} = \log_2 a - \log_2 2 = \log_2 a - 1$.

Câu 5: Với mọi a,b thỏa mãn $\log_2 a - 3\log_2 b = 2$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a = 4b^3$. **B.** $a = 3b + 4$. **C.** $a = 3b + 2$. **D.** $a = \frac{4}{b^3}$.

Câu 6: Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

A. $1 - \log a$. **B.** $2 + \log a$. **C.** $2 - \log a$. **D.** $1 + \log a$.

Câu 7: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Câu 8: Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a\left(b^2c^3\right)$.

A. $P = 13$ **B.** $P = 31$ **C.** $P = 30$ **D.** $P = 108$

Câu 9: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Giá trị của $3\log_2 a + 2\log_2 b$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 32.

Câu 10: Cho a,b là các số thực dương lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_{a^2} b + \log_{ab^2} b^5$

A. $P = 3$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 5$.

Câu 11: Cho $\log_7 25 = m$ và $\log_2 5 = n$. Tính $A = \log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$ theo m và n

A. $\frac{9m + 12n}{mn}$ **B.** $\frac{-9m + 12n}{mn}$ **C.** $-9m + 12n + mn$ **D.** $\frac{-3m + 4n}{3mn}$

Câu 12: Cho $\log 2 = a$. Tính $A = \log \frac{125}{4}$ theo a?

A. $6 + 7a$ **B.** $2(a + 5)$ **C.** $4(1 + a)$ **D.** $3 - 5a$

Câu 13: Cho $a=\log_3 5$, $b=\log_2 7$, $c=\log_2 3$ và $I=\dfrac{-1}{\log 126}\left(\log\dfrac{1}{2}+\log\dfrac{2}{3}+\log\dfrac{3}{4}+...+\log\dfrac{149}{150}\right)$. Tính I theo a, b, c.

A. $\dfrac{1+c+2ac}{1+2c+b}$. **B.** $\dfrac{1+c-2ac}{1+2c+b}$. **C.** $\dfrac{1+c-2ac}{1+2c-b}$. **D.** $\dfrac{1+c+2ac}{1+2c-b}$.

Câu 14: Cho số thực dương a khác 1. Giá trị của biểu thức $\log_2(4a)$ bằng

A. $4+\log_2 a$. **B.** $2+\log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $4\log_2 a$.

Câu 15: Cho a và b là các số thực dương tùy ý. Nếu $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ và $\log_b\left(\dfrac{1}{3}\right)<\log_b\left(\dfrac{1}{4}\right)$ thì

A. $a>1, 0<b<1$. **B.** $0<a<1, 0<b<1$. **C.** $a>1, b>1$. **D.** $0<a<1, b>1$.

Câu 16: Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^2}\left(\dfrac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right)=3$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $-\dfrac{1}{5}$.

Câu 17: Cho số $a>0, a\neq 1$ thỏa mãn $a^x=b$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a=\log_x b$. **B.** $a=\log_b x$. **C.** $x=\log_a b$. **D.** $x=\log_b a$.

Câu 18: Tính giá trị của biểu thức $P=2^{\log_2 a}+\log_a\left(a^b\right)$ $(a>0, a\neq 1)$.

A. $P=2^a+b$. **B.** $P=a-b$. **C.** $P=2a+b$. **D.** $P=a+b$.

Câu 19: Với a,b là các số thực dương, khác 1. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_3(ab)=\log_3 a+\log_3 b$. **B.** $\log_a b=\dfrac{\log_{2022} b}{\log_{2022} a}$.

C. $1-\log_a b=\log_a\dfrac{a}{b}$. **D.** $\log_a b^3=\dfrac{1}{3}\log_a b$.

Câu 20: Giá trị của biểu thức $P=\log_2 8+\log_{\sqrt{3}} 9$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 21: Cho a là số thực dương khác 1. Tính $P=\log_a\left(a^4.a^{\frac{1}{3}}\right)$.

A. $P=\dfrac{3}{4}$. **B.** $P=12$. **C.** $P=1$. **D.** $P=\dfrac{13}{3}$.

Câu 22: Với mọi a,b dương thỏa mãn $\log_2\sqrt{a}-\log_2 b=3$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a=64b^2$. **B.** $ab^2=64$. **C.** $\sqrt{a}-b=8$. **D.** $\dfrac{\sqrt{a}}{b}=3$.

Câu 23: Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a\sqrt[5]{a}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $-\dfrac{1}{5}$.

Câu 24: Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a\sqrt[2021]{a^{2022}}$ bằng

A. 2021. **B.** $\dfrac{2022}{2021}$. **C.** $\dfrac{2021}{2022}$. **D.** 2022.

Câu 25: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Câu 26: Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I=\log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a^3}{125}\right)$.

A. $I=-\frac{1}{3}$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=3$.

Câu 27: Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_5 a=5$ và $\log_3 b=\frac{2}{3}$. Tính giá trị biểu thức $I=2\log_6\left[\log_5(5a)\right]+\log_{\frac{1}{9}}b^3$.

A. $I=3$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=2\log_6 5+1$.

Câu 28: Cho a,b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^3}\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}=2$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Câu 29: Cho $a,\ b$ là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b=\sqrt{3}$. Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)$ là

A. $-\sqrt{3}$. **B.** $-2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 30: Cho số thực $a>0$; $a\neq 1, a\neq\frac{1}{27}$ và số thực x thỏa mãn $\log_a 3=x$. Tính $\log_{27a}9$ theo x.

A. $\frac{2x}{x+3}$. **B.** $\frac{2x}{3x+1}$. **C.** $2(3x+1)$. **D.** $\frac{2}{3x+1}$.

Câu 31: Cho $\log_a b=3,\ \log_a c=-4$. Khi đó $P=\log_a\left(\frac{a^3\sqrt{c}}{b^2}\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $P=7$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=11$. **D.** $P=-5$.

Câu 32: Cho x,y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}}y=\frac{2y}{5},\log_{25}x=\frac{5}{2y}$. Tính giá trị của $P=y^2-2x^2$.

A. $P=1$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-25$. **D.** $P=25$.

Câu 33: Cho a,b,c là các số thực dương, trong đó $a,b>1$ và thỏa mãn $\log_a c=3,\ \log_b c=4$. Tính giá trị biểu thức $P=\log_{ab}c$?

A. $P=\frac{12}{7}$. **B.** $P=\frac{7}{12}$. **C.** $P=\frac{1}{12}$. **D.** $P=12$.

Câu 34: Với mọi a,b thoả mãn $\frac{\log_3 a.\log_2 3}{1+\log_2 5}+\log b=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a=1-b\log_2 5$. **B.** $ab=10$. **C.** $a\log_2 5+b=1$. **D.** $a+b=1$.

Câu 35: Cho $\log_2 5 = m$, $\log_3 5 = n$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo m và n là

A. $m^2 + n^2$. **B.** $\dfrac{mn}{m+n}$. **C.** $m+n$. **D.** $\dfrac{1}{m+n}$.

Câu 36: Với mọi số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2 a + \log_4 b = 1$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^2b = 1$. **B.** $ab^2 = 4$. **C.** $ab^2 = 1$. **D.** $a^2b = 4$.

Câu 37: Đặt $a = \ln 2$ và $b = \ln 5$. Rút gọn biểu thức $P = \ln\dfrac{2}{5} + \ln\dfrac{5}{8} + \ln\dfrac{8}{11} + \ln\dfrac{11}{4} + ... + \ln\dfrac{7997}{8000}$.

A. $P = 6a - 3b$. **B.** $P = 5a - 3b$. **C.** $P = 3a - 6b$. **D.** $P = -5a - 3b$.

Câu 38: Cho $a = \log_7 5, b = \log_3 5$. Biểu thức $M = \log_{21} 5$ bằng

A. $\dfrac{ab}{a+b}$. **B.** ab. **C.** $\dfrac{1}{ab}$. **D.** $\dfrac{a+b}{ab}$.

Câu 39: Cho a, $b > 0$. Nếu $\ln x = 5\ln a + 2\ln\sqrt{b}$ thì x bằng

A. $10a\sqrt{b}$. **B.** $\dfrac{a^5}{b}$. **C.** a^5b. **D.** $a^5 + b$.

Câu 40: Cho x, y là hai số thực dương, $x \neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}} y = \dfrac{2y}{5}, \log_{25} x = \dfrac{5}{2y}$. Tính giá trị của $P = y^2 - 2x^2$.

A. $P = 1$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = -25$. **D.** $P = 25$.

Câu 41: Cho số thực dương a,b thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25}\dfrac{2a-b}{3}$. Tỉ số $\dfrac{a}{b}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 42: Cho x, y là hai số thực dương, $x \neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt[3]{x}} y = \dfrac{3y}{8}, \log_{\sqrt{2}} x = \dfrac{32}{y}$. Tính giá trị của $P = x^2 - y^2$.

A. $P = 120$. **B.** $P = 132$. **C.** $P = 240$. **D.** $P = 340$.

Câu 43: Với hai số thực dương a,b tùy ý và $\dfrac{\log_3 5 \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a = b\log_6 2$. **B.** $a = 36b$. **C.** $2a + 3b = 0$. **D.** $a = b\log_6 3$.

Câu 44: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$ và $\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{\log_{ab} b} - \dfrac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

A. $\sqrt{2014}$. **B.** $\sqrt{2016}$. **C.** $\sqrt{2018}$. **D.** $\sqrt{2020}$.

Câu 45: Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 24$, $\log_y w = 40$ và $\log_{xyz} w = 12$. Tính $\log_z w$.

A. 52. **B.** -60. **C.** 60. **D.** -52.

Câu 46: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}+\frac{1}{\log_2 z}=\frac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz)=2020$. Tính $\log_2\left(xyz\left(x+y+z\right)-xy-yz-zx+1\right)$

A. 4040. **B.** 1010. **C.** 2020. **D.** 2020^2.

Câu 47: Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x}{1-x}\right)$ và hai số thực m, n thuộc khoảng $\left(0;1\right)$ sao cho $m+n=1$. Tính $f\left(m\right)+f\left(n\right)$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 48: Cho x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với a là số thực dương khác 1. Giá trị của $p=\frac{9x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{3z}{x}$ là

A. 13. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên dương n để $\log_n 256$ là một số nguyên dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 50: Giả sử $\log_{27}5=a;\ \log_8 7=b;\ \log_2 3=c$. Hãy biểu diễn $\log_{12}35$ theo $a,\ b,\ c$?

A. $\frac{3b+3ac}{c+2}$. **B.** $\frac{3b+3ac}{c+1}$. **C.** $\frac{3b+2ac}{c+3}$. **D.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$.

Câu 51: Cho $\log_3 5=a$, $\log_3 6=b$, $\log_3 22=c$. Tính $P=\log_3\left(\frac{90}{11}\right)$ theo a, b, c.

A. $P=2a+b-c$. **B.** $P=a+2b-c$. **C.** $P=2a+b+c$. **D.** $P=2a-b+c$.

Câu 52: Đặt $a=\log_2 3;b=\log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20}12$ theo a,b.

A. $\log_{20}12=\frac{a+b}{b+2}$. **B.** $\log_{20}12=\frac{ab+1}{b-2}$. **C.** $\log_{20}12=\frac{a+1}{b-2}$. **D.** $\log_{20}12=\frac{a+2}{ab+2}$.

Câu 53: Cho $\log_{12}3=a$. Tính $\log_{24}18$ theo a.

A. $\frac{3a+1}{3-a}$. **B.** $\frac{3a+1}{3+a}$. **C.** $\frac{3a-1}{3+a}$. **D.** $\frac{3a-1}{3-a}$.

Câu 54: Nước chanh có độ pH bằng $2,4$; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)?

A. $3,9$. **B.** $3,98$. **C.** $4,3$. **D.** $4,5$.

Câu 55: Trên một chiếc đài Radio FM có vạch chia để người dùng có thể dò sóng cần tìm. Vạch ngoài cùng bên trái và vạch ngoài cùng bên phải tương ứng với $88\,Mhz$ và $108\,Mhz$. Hai vạch này cách nhau $10\,\text{cm}$. Biết vị trí của vạch cách vạch ngoài cùng bên trái $d\left(\text{cm}\right)$ thì có tần số bằng $k.a^d\left(Mhz\right)$ với k và a là hai hằng số. Tìm vị trí tốt nhất của vạch để bắt sóng VOV_1 với tần số $102,7\,Mhz$.

A. Cách vạch ngoài cùng bên phải $7,35\,\text{cm}$. **B.** Cách vạch ngoài cùng bên phải $2,46\,\text{cm}$.

C. Cách vạch ngoài cùng bên trái $7,54\,\text{cm}$. **D.** Cách vạch ngoài cùng bên trái $8,23\,\text{cm}$

Câu 56: Biết rằng vi khuẩn E. coli là vi khuẩn gây tiêu chảy đường ruột, gây đau bụng dữ dội, ngoài ra cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi, nghĩa là số lượng tính theo công thức $S=S_0.2^n$

, S_0 là số lượng ban đầu, n là số lần nhân đôi. Ban đầu chỉ có 40 con vi khuẩn nói trên trong đường ruột, hỏi sau bao lâu số lượng vi khuẩn là 671088640 con?

A. 20 giờ. **B.** 8 giờ. **C.** 12 giờ. **D.** 6 giờ.

Câu 57: Vào cuối năm 2022, báo Rossiyskaya Gazeta dẫn lời Bộ trưởng Tài nguyên Nga cảnh báo nước này sẽ cạn kiệt dầu mỏ sau 28 năm nữa nếu sản lượng khai thác hằng năm vẫn giữ như năm 2022. Bắt đầu từ năm 2023, nếu nước Nga mỗi năm giảm sản lượng khai thác 2% so với năm trước thì sau bao nhiêu năm nữa nước này cạn kiệt dầu mỏ (chọn phương án có kết quả gần nhất với tính toán của bạn)?

A. 52. **B.** 32. **C.** 44. **D.** 40.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_{a^5} b = 5\log_a b$

b) $\log_a b > 1$

c) $\log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = \dfrac{6}{\log_b a}$

d) Nếu $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_3(a+b) = 1 + \log_3 a + \log_3 b$

Câu 2: Biết $a = \log_{27} 5$, $b = \log_8 7$, $c = \log_2 3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $c > 2$

b) $a.c = \dfrac{1}{3}\log_2 5$

c) $\dfrac{a.c}{b} = \log_7 5$

d) $\log_{12} 35 = \dfrac{3(b+ac)}{c+2}$

Câu 3: Cho số thực $x, y > 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_2 x = \log_4 x^2$

b) $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(2x^2y) + \log_4(2y^2) = 1$

c) $\log_3 x + \log_3 x^2 + ... + \log_3 x^{2023} = 2023.2024\log_3 x$

d) Nếu $x = \log_2 6$, $y = \log_3 10$. Khi đó $\dfrac{xy + 2x - y}{x+2} = \log_2 30$.

Câu 4: Cho số thực dương $a \neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\ln a - \ln 2 = \ln(a-2)$

b) $\log_5\left(125a^2\right) = 3 + 2\log_5 a$

c) $2\log_9 a - \dfrac{\log_2 a}{\log_2 3} = 0$

d) $\dfrac{1}{\log_2 a} + \dfrac{1}{\log_3 a} + \dfrac{1}{\log_4 a} + ... + \dfrac{1}{\log_{100} a} = \log_a 5050$

Câu 5: Với mọi số thực dương a,b và $a,b \neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log(ab) = \log a + \log b$

b) $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$

c) $\log_3^2 a^2 = 2\log_3^2 a$

d) Biết $\ln\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2\ln a + \ln b}{3}$. Khi đó $a^3 + b^3 = 3\left(8a^2b - ab^2\right)$.

Câu 6: Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $0 < a < 1$

b) $bc = \log_7 2$

c) $\log_6 45 = \dfrac{6ac + 2c}{1 + c}$

d) Biết $\log_6 35 = \dfrac{(ma + nb)c}{1 + pc}$ với $m,n,p \in \mathbb{Z}$. Khi đó $m^2 + n^2 + p^2 = 11$.

Câu 7: Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_3 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $b > 1$

b) $ab = \log_2 3$

c) $\log_{12} 5 = \dfrac{2}{a + b}$

d) Biết $\log_{24} 250 = \dfrac{mab + nb}{pa + qb}$ với $m,n,p,q \in \mathbb{Z}$. Khi đó $A = mnpq = 9$.

Câu 8: Cho $a,b,c > 1$ và $m,n \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_a \sqrt{a\sqrt{a}} = \dfrac{3}{4}$

b) $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c.\log_{c^2} a^3 = \dfrac{1}{6}$

c) Cho $\log 3 = m, \log 7 = n$. Khi đó $\log_3 70 = \dfrac{n+1}{m}$.

d) Cho $\log_5 2 = m, \log_5 3 = n$. Khi đó $\log_{250} 30 = (m + n + 1)(3 + m)$.

Câu 9: Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_a b < 1 < \log_b a$.

b) $1 < \log_a b < \log_b a$.

c) $\log_b a < \log_a b < 1$.

d) $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Câu 10: Công thức $\log x = 11,8 + 1,5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng x tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương 10^{-7} jun) với độ lớn M theo thang Richter của một trận động đất. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Trận động đất có độ lớn 2 độ Richter tạo ra năng lượng khoảng $6,3.10^{34}$ erg.

b) Trận động đất có độ lớn 3 độ Richter tạo ra năng lượng khoảng 2.10^{9} (J)

c) Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp 100 lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter.

d) Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng $10^{17,8} \le x \le 10^{20,8}$ erg.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho ba số thực dương a,b,c đều khác 1 thoả mãn $\log_a b = 2\log_b c = 4\log_c a$ và $a + 2b + 3c = 48$. Khi đó $P = abc$ bằng bao nhiêu

Câu 2: Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{8}$, $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $G = a + b$.

Câu 3: Cho $\log_2 3 = a$ và $\log_3 5 = b$. Biết $\log_{12} 150 = \frac{2ab + ma + n}{a + 2}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $L = m + n$ là

Câu 4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^{\log_3 7} = 9$, $b^{\log_7 11} = 7$, $c^{\log_{11} 25} = 11$. Tính giá trị biểu thức $T = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11} + c^{\log_{11}^2 25}$.

Câu 5: Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 12$, $\log_y w = 20$ và $\log_{xyz} w = 6$. Tính $\log_z w$.

Câu 6: Cho $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ với mọi $m,n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log\left[\frac{f(96) - f(69) - 241}{2}\right]$.

Câu 7: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} + \frac{1}{\log_2 z} = \frac{1}{10}$ và $\log_2(xyz) = 10$. Tính $\log_2\left(xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1\right)$

Câu 8: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $P_n = P_0.e^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001 dân số Việt Nam là 76.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 115 triệu người

Câu 9: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right)$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 10: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) là một đại lượng được tính theo công thức $P = P_0 e^{xi}$ trong đó x là độ cao (đo bằng mét, so với mực nước biển), $P_0 = 760$ mmHg là áp suất ở mực nước biển, i là hệ số suy giảm. Biết rằng, ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,72 mmHg. Hỏi áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số nào trong các số sau?

Câu 11: Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{r.t}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây?

Câu 12: Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t) = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}} (\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3754 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ là 79%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

Câu 13: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = S_0.e^{r.t}$. Trong đó S_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng $(r > 0), t$ (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc ban đầu có 500 con để số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

Câu 14: Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$ độ Richter, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

Câu 15: Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t được tính theo công thức là $N(t) = N_o.e^{kt}$, trong đó N_o là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t = 0$ và k là hằng số tăng trưởng của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày và biết $N_0 = 100$ con. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

Câu 16: Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutolium ^{239}Pu là 24360 năm (tức là một lượng chất ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S = Ae^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 20 gam ^{239}Pu sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam ?

Câu 17: Cho áp suất không khí P (đo bằng milimet thuỷ ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P = P_0 e^{xi}$ trong đó $P_0 = 760mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $(x = 0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000m$ thì áp suất của không khí là $672,71mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3580m$ gần với số nào sau đây nhất

Câu 18: Áp suất không khí P theo công thức $P = P_0.e^{kx}$ (mmHg), trong đó x là độ cao, $P_0 = 760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển $(x=0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71$ (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao $4000m$

Câu 19: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ ?

Câu 20: Gọi $I(t)$ là số ca bị nhiễm bệnh Covid-19 ở quốc gia X sau t ngày khảo sát. Khi đó ta có công thức $I(t) = A.e^{r_0(t-1)}$ với A là số ca bị nhiễm trong ngày khảo sát đầu tiên, r_0 là hệ số lây nhiễm. Biết rằng ngày đầu tiên khảo sát có 500 ca bị nhiễm bệnh và ngày thứ 10 khảo sát có 1000 ca bị nhiễm bệnh. Hỏi ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh gần nhất với số nào dưới đây, biết rằng trong suốt quá trình khảo sát hệ số lây nhiễm là không đổi?

Câu 21: Người ta thả một lượng bèo vào một hồ nước. Kết quả cho thấy sau 9 giờ bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì lượng bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ mặt hồ?

Câu 22: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log\frac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A = 3$ (Ben) và $L_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

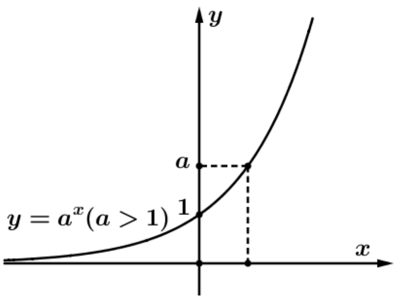
----------------HẾT----------------

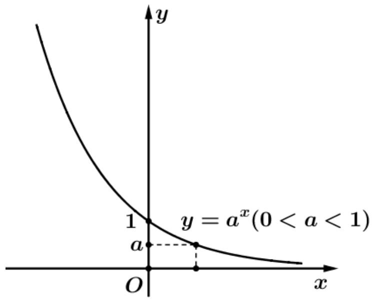
BÀI 03 HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số mũ

Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y=a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.





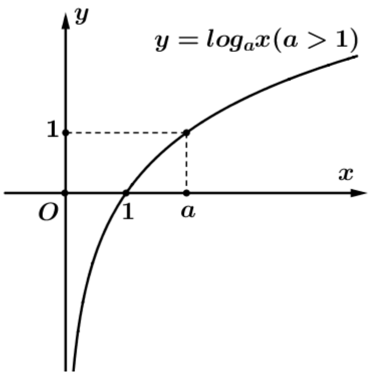
Hàm số mũ $y=a^x$.

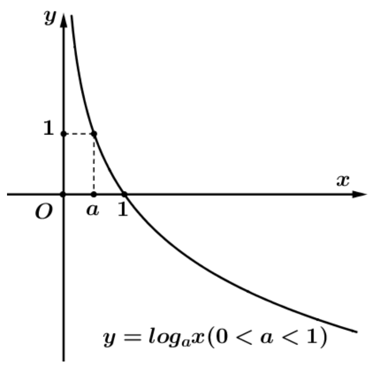
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0;+\infty)$
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0<a<1$
- Liên tục trên $\mathbb{R}$
- Có đồ thị đi qua các điểm $(0;1),(1;a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.

Lưu ý: Hàm số $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ còn được viết dưới dạng $y=2^{-x}$.

2 Hàm số logarit

Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y=\log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.





Hàm số lôgarit $y=\log_a x$:

- Có tập xác định là $(0;+\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $a>1$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi $0<a<1$
- Liên tục trên $(0;+\infty)$
- Có đồ thị đi qua các điêm $(1;0),(a;1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số mũ và hàm số logarit

Phương pháp: Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tuỳý.

Xét $1 \neq a > 0$:

- Hàm số $y = a^{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$.

Đặc biệt: Với hàm số $y = \log_{g(x)}\left[f(x)\right]^n$ ta lưu ý "*mũ n*" của $f(x)$:

- Nếu $n \vdots 2 \longrightarrow$ Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_{g(x)}\left[f(x)\right]^n$: $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$.
- Nếu $n \not\vdots\, 2 \longrightarrow$ Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_{g(x)}\left[f(x)\right]^n$: $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

Tóm lại nếu $f(x)$ hoặc $g(x)$ có "*mũ n*" ta chú ý xem "*n*" chẵn hay lẻ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tập xác định D của các hàm số sau:

a) $y = \log_3(x+2)$

b) $y = \log(x+1)^2$

c) $y = \log_2(2-x) + (x+1)^{-2}$

d) $y = \ln\left(-x^2 + 5x - 6\right)$

e) $y = \left(x^2 - x - 2\right)^{-3}$

f) $y = \log_2 \dfrac{x+3}{2-x}$

Bài tập 2: Tìm tập xác định D của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\log_{0,2}\left(x^2 - 2x + 1\right)}$

b) $y = \left(x^2 - 4\right)^{-2} + \log_{\sqrt{3}}(2x+1)$

c) $y = \log_2(\log_3 x)$

d) $y = (x-3)^{-2} + \log_4(x-2)$

e) $y = (1-x)^{\frac{2}{3}} + \log_2(x+1)$.

f) $y = \dfrac{2}{\log_4 x - 3}$.

Bài tập 3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \log_3(x-4)$

b) $y = (\pi + 1)^x$

c) $y = \ln(3x - 6)$

d) $y = \left[\ln(x-2)\right]^{\pi}$

e) $y = \dfrac{1}{\log_3\left(2x^2 - x\right)}$.

Bài tập 4: Tập xác định của hàm số $y = \log_2\left(-x^2 + 2023x - 2022\right)$ có bao nhiêu số nguyên?

Bài tập 5: Tìm m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Bai tập 6: Tìm m để hàm số $y=\log\ x^2-2mx+9$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

Bài tập 7: Tìm m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x\sqrt{m+2}+26\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$?

Bài tập 7: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(-2023;2023)$ để hàm số $y=\dfrac{2023}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$

Dạng 2: Đồ thị hàm số mũ và hàm số logarit

Phương pháp: Sử dụng kiến thức đã được nêu ở phần lý thuyết

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Vẽ đồ thị các hàm số sau đây:

a) $y=3^x$

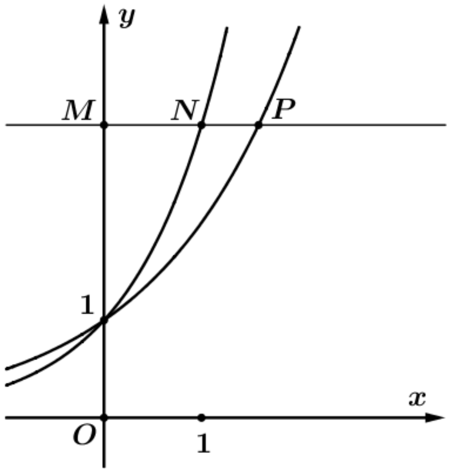
b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

c) $y=\log x$

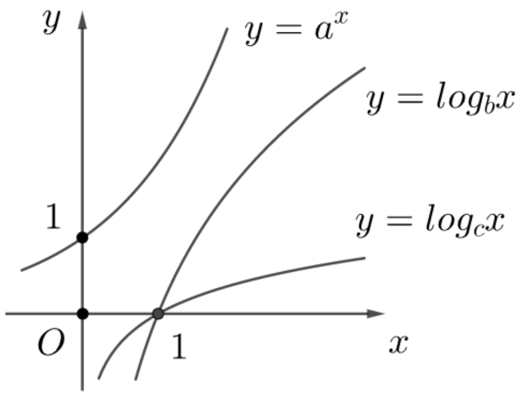
d) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

Bài tập 2: Biết đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_b x$ cắt nhau tại điểm $A\left(\frac{1}{2};2\right)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+2b^2$.

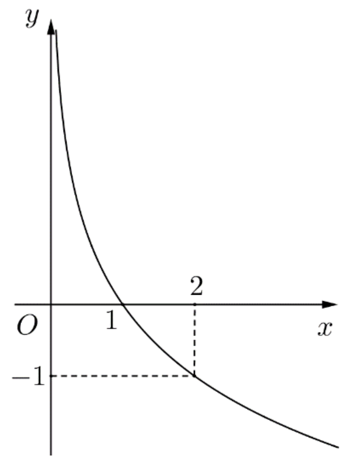
Bài tập 3: Cho hai hàm số $y=a^x, y=b^x$ (a,b là các số dương khác 1) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$ như hình vẽ. Vẽ đường thẳng $y=c>1$ cắt trục tung và $(C_1),(C_2)$ lần lượt tại M,N,P. Biết rằng $S_{OMN}=3S_{ONP}$. Tìm mối liên hệ giữa a và b.



Bài tập 4: Cho a,b,c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình bên. Hãy so sánh các số thực a,b,c

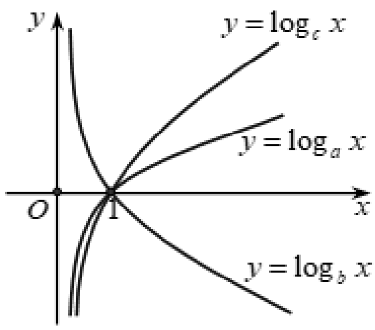


Bài tập 5: Cho hàm số $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ có đồ thị như hình vẽ.

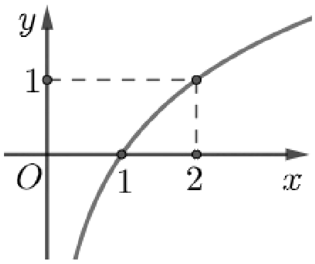


Tìm giá trị của a.

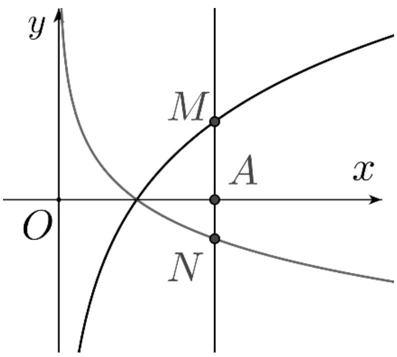
Bài tập 6: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. So sánh các số a,b,c.



Bài tập 7: Cho các hàm số $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ và $y=2^x$. Đồ thị hàm số dưới đây là của hàm số nào đã cho?



Bài tập 8: Cho số thực dương a khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào vuông góc với trục hoành mà cắt các đồ thị của hàm số $y=\log_2 x$, $y=\log_a x$ và trục hoành lần lượt tại M,N và A thì $AM=2AN$ (hình vẽ bên). Tính giá trị của a.



Dạng 3: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Phương pháp: Sử dụng kiến thức cơ bản để áp dụng vào các bài toán thực tế

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t)=13e^{-0,015t}$.

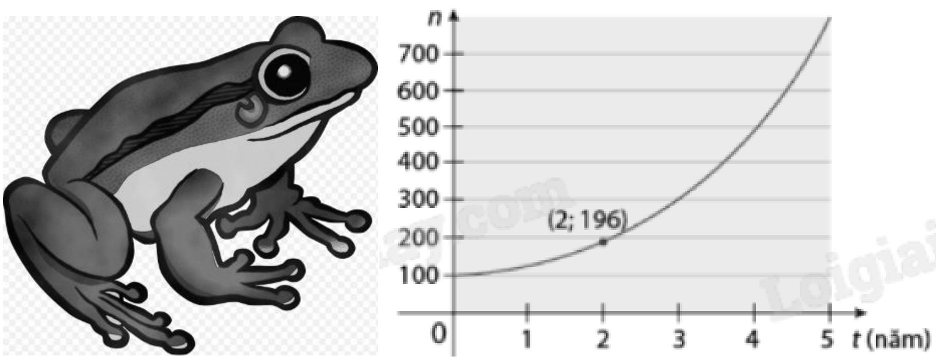
a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t=0$.

b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

Bài tập 2: Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t)=75-20\ln(t+1), 0\le t\le 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Bài tập 3: Cường độ một trận động đất M (Richter) được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$ với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu?

Bài tập 4: Lúc đầu trong ao có một số con ếch. Người ta ghi nhận số lượng ếch trong 5 năm đầu như hình vẽ. Giả sử số lượng ếch tăng theo hàm số $n(t)=C.a^t$



a) Tính số lượng ếch lúc ban đầu.

b) Tìm hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao.

c) Dự đoán số lượng ếch sau 20 năm.

Bài tập 5: Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I=I_0.a^d$ trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số $(a>0)$ và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

a) Có thể khẳng định rằng $0<a<1$ không? Vì sao?

b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0,95I_0$. Tìm a

c) Tại độ sâu 20 m thì cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = x^{\frac{3}{2}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y = \log x$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 3: Tập xác định D của hàm số $y = \ln(1-x)$ là

A. $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $D = \mathbb{R}$. **C.** $D = (-\infty;1)$. **D.** $D = (1;+\infty)$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 5: Hàm số $y = (x-1)^{2022}$ có tập xác định là

A. $D = \mathbb{R}$. **B.** $D = [1;+\infty)$. **C.** $D = (1;+\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2-\ln x}$ là

A. $(0;e^2]$. **B.** $(-\infty;e^2)$. **C.** $(-\infty;e^2]$. **D.** $[e^2;+\infty)$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y = 5^{x+1} + 12$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+7x)+3}$ là:

A. $(-8;-7)\cup(0;1)$. **B.** $[-8;-7)\cup(0;1]$. **C.** $[-8;-7)\cup(0;1)$. **D.** $[-8;-7]\cup(0;1]$.

Câu 9: Tập xác định D của hàm số $y = (x-3)^{-5} + \log_3(4-x)$ là

A. $D = (3;4)$. **B.** $D = (-\infty;4)\setminus\{3\}$. **C.** $D = (4;+\infty)$. **D.** $D = (-\infty;4)$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_3(x^2-4x-m+1)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m < -3$. **B.** $m > 3$. **C.** $m > -3$. **D.** $m < 3$.

Câu 11: Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln(3-x) + x^{\pi}$

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(0;3)$.

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y = x^{\frac{1}{3}} + \log_3(1-x)$.

A. $D = (0;1]$. **B.** $D = (0;+\infty)$. **C.** $D = (0;1)$. **D.** $D = (1;+\infty)$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\log_2 x-1}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Câu 14: Tập xác định của hàm số $y=(x-2021)^{\frac{2019}{2021}}$ là

A. $(-2021;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2021\}$. **C.** $(2021;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2021)$.

Câu 15: Tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_3\dfrac{2x}{x+1}-1}}$ là:

A. $D=(-\infty;-3)$. **B.** $D=(-1;+\infty)$. **C.** $D=(-3;-1)$. **D.** $D=(0;3)$.

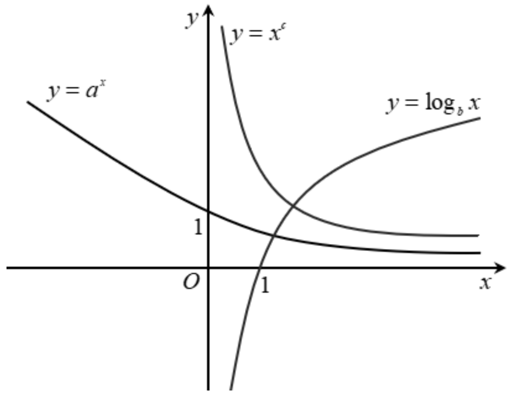
Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+1}}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m>2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<2$.

Câu 17: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

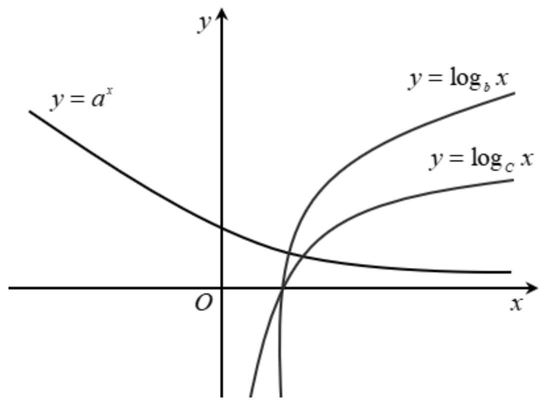
Câu 18: Cho các đồ thị hàm số $y=a^x, y=\log_b x, y=x^c$ ở hình vẽ sau đây.



Khẳng định nào sau đây đúng?

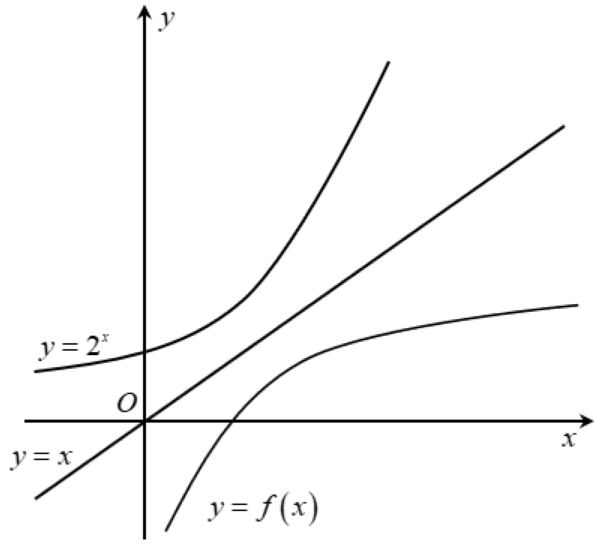
A. $0<c<1<a<b$. **B.** $c<0<a<1<b$. **C.** $c<0<a<b<1$. **D.** $0<c<a<b<1$.

Câu 19: Cho các hàm số $y=a^x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn khẳng định **đúng**?



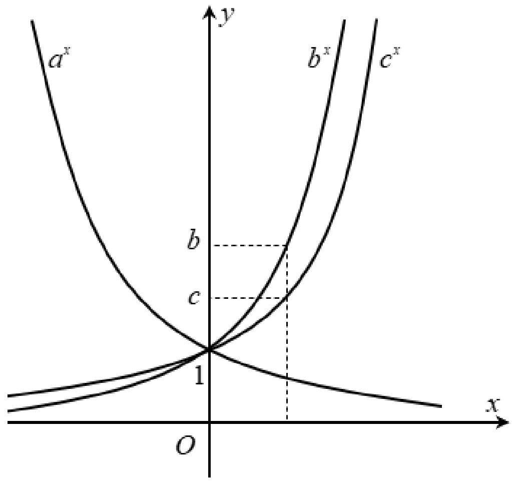
A. $b>c>a$. **B.** $b>a>c$. **C.** $a>b>c$ **D.** $c>b>a$.

Câu 20: Cho ba hàm số $y=2^x$, $y=x$, $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên, mệnh đề nào sau đây **đúng**?



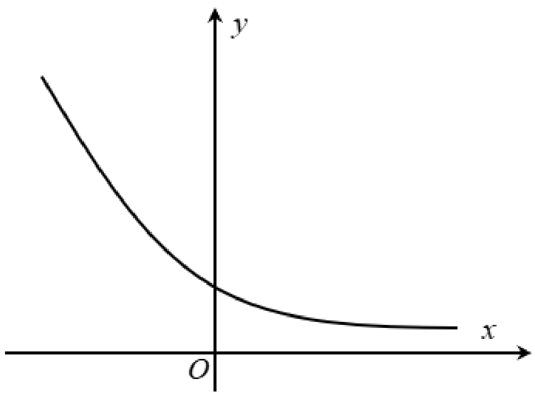
A. $y=f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{2}}x$. **B.** $y=f\left(x\right)=\ln x$. **C.** $y=f\left(x\right)=\log_2 x$. **D.** $y=f\left(x\right)=\log x$.

Câu 21: Cho a, b, c là ba số thực dương khác 1. Đồ thị hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho ở hình vẽ dưới đây. Mệnh nào nào sau đây đúng?



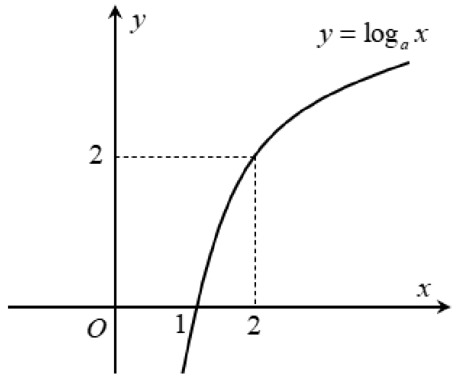
A. $a<b<c$. **B.** $b<c<a$. **C.** $c<a<b$. **D.** $a<c<b$.

Câu 22: Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào sau đây?



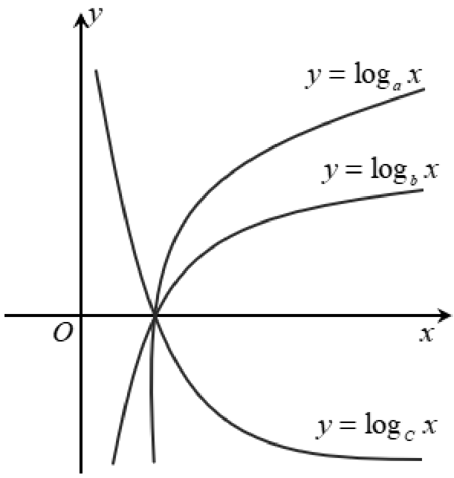
A. $y=\log_2 x$. **B.** $y=\left(0,8\right)^x$. **C.** $y=\log_{0,4}x$. **D.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$.

Câu 23: Tìm a để đồ thị hàm số $y=\log_a x\left(0<a\neq 1\right)$ có đồ thị là hình bên.



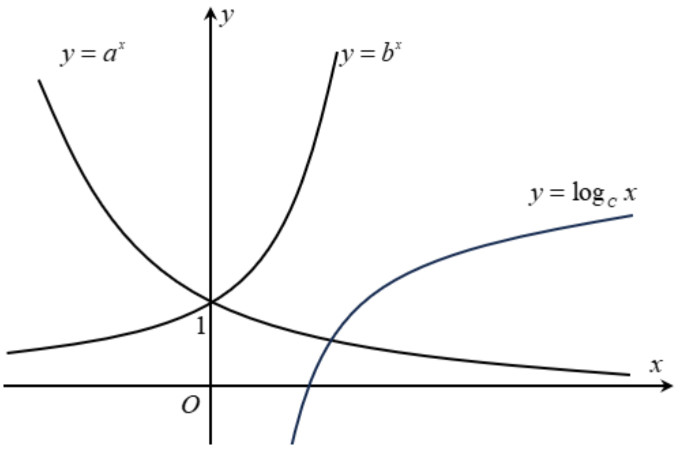
A. $a=\sqrt{2}$. **B.** $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=2$

Câu 24: Cho a,b,c là ba số dương khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?



A. $a<b<c$. **B.** $b<c<a$. **C.** $c<a<b$. **D.** $c<b<a$.

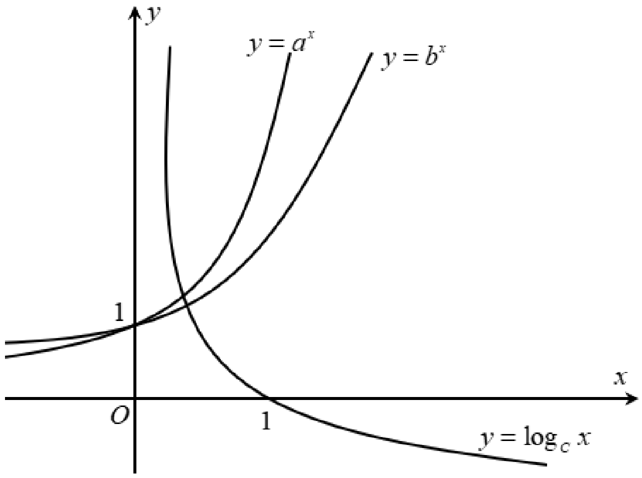
Câu 25: Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=\log_c x$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

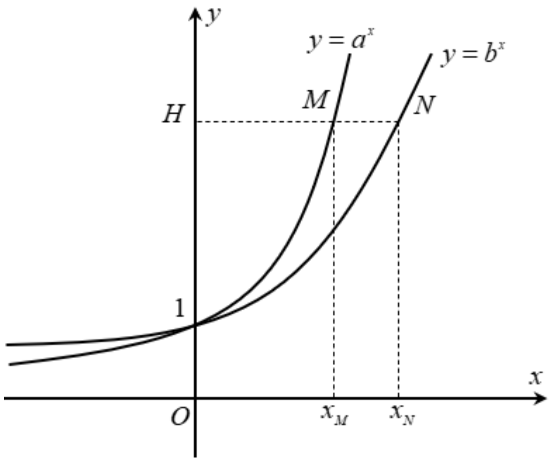
A. $a<b<c$. **B.** $a<b=c$. **C.** $b<c<a$. **D.** $a<c<b$.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y=a^x$; $y=b^x$; $y=\log_c x$ như hình vẽ. Tìm mối liên hệ của a, b, c.



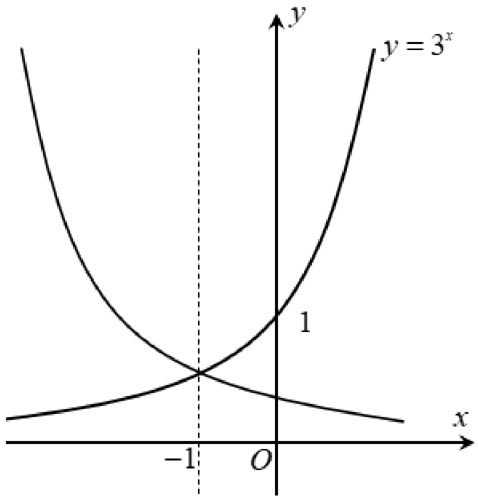
A. $c < b < a$. **B.** $b < a < c$. **C.** $a < b < c$. **D.** $c < a < b$.

Câu 27: Cho a, b là các số thực dương khác 1, đường thẳng d song song trục hoành cắt trục tung, đồ thị hàm số $y = a^x$, đồ thị hàm số $y = b^x$ lần lượt tại H, M, N (như hình bên). Biết $HM = 3MN$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $4a = 3b$. **B.** $b^4 = a^3$. **C.** $b^3 = a^4$. **D.** $3a = 4b$.

Câu 28: Biết hàm số $f(x) = \dfrac{a}{b^2 \cdot 3^x}$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = 3^x$ qua đường thẳng $x = -1$. Biết a, b là các số nguyên. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



A. $b^2 = 9a$. **B.** $b^2 = 4a$. **C.** $b^2 = 6a$. **D.** $b^2 = a$.

Câu 29: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = 2022^x$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_{2022}\frac{1}{2023}\right)$ bằng

A. -2021. **B.** -2023. **C.** -2020. **D.** 2020.

Câu 30: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x\,(a > 0, a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a\frac{1}{2023}\right)$ bằng

A. 2022. **B.** 2024. **C.** -2023. **D.** -2021.

Câu 31: Ông An gửi 500 triệu vào ngân hàng theo hình thức lãi kép trong một thời gian khá lâu với lãi suất ổn định trong suốt thời gian tiết kiệm là 10% 1 năm. Tết năm nay do dịch bệnh nên ông rút hết tiền trong ngân hàng ra để gia đình chi tiêu. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra 20 triệu để sắm sửa đồ Tết thì ông còn 860 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu năm?

A. 9 năm. **B.** 20 năm. **C.** 12 năm. **D.** 6 năm.

Câu 32: Một người gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $6,3\%$ / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y = \log_{1,063}\left(\frac{x}{20}\right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 7 năm. **B.** $6,6$ năm. **C.** 6 năm. **D.** 5 năm.

Câu 33: Một sinh viên ra trường đi làm ngày $1/1/2023$ với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 60% lương, phần còn lại tiết kiệm hết để mua nhà. Giá trị hiện tại của căn nhà là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị tăng thêm 5%. Với mức lương khởi điểm a là bao nhiêu thì sau 12 năm anh ta mua được nhà (kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 19028000 đồng. **B.** 16092000 đồng. **C.** 20092000 đồng. **D.** 18092000 đồng.

Câu 34: Ông A có số tiền 120 triệu đồng gửi tiết kiệm theo thể thức lãi suất kép, có hai loại để lựa chọn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất $12,5\%$ trên một năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1% trên một tháng. Ông A muốn gửi 12 năm. Theo anh chị ông A gửi loại nào sau 12 năm sẽ nhận được tổng số tiền nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. Gửi theo kì hạn năm lãi hơn kì hạn tháng 9879000 đồng.

B. Gửi theo kì hạn tháng lãi hơn kì hạn năm 9687000 đồng.

C. Gửi theo hai loại bằng nhau.

D. Gửi theo kì hạn năm lãi hơn kì hạn tháng 9678000 đồng.

Câu 35: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết năm 2023 dân số thành phố Cần Thơ năm 2023 ước tính là 1282000 người và tỉ lệ gia tăng dân số là $1,03\%$. Hỏi đến năm bao nhiêu thì dân số thành phố Cần Thơ đạt hơn $1,5$ triệu người?

A. 2038. **B.** 2039. **C.** 2040. **D.** 2041.

Câu 36: Ông B vay ngân hàng 600 triệu đồng và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất 0,8% trên tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sao bao lâu ông B sẽ trả hết số nợ ngân hàng

A. 50. **B.** 55. **C.** 60. **D.** 65.

Câu 37: Áp suất không khi P (đo bằng milimet thủy ngân, ki hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P = P_0 e^{ni}$ trong đó $\mathrm{P0} = 760\mathrm{mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển $(\mathrm{x} = 0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000\mathrm{m}$ thì áp suất của không khí là $672,7\mathrm{mmHg}$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3000\mathrm{m}$ gân với số nào sau đây nhất?

A. $530,23\mathrm{mmHg}$. **B.** $540,23\mathrm{mmHg}$. **C.** $520,23\mathrm{mmHg}$. **D.** $510,23\mathrm{mmHg}$.

Câu 38: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức: $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau 3,5 ngày đêm? (Kết quả làm tròn đến 3 chữ số thập phân sau dấu phầy)

A. 22,097 (gam). **B.** 23,097 (gam). **C.** 20,097 (gam). **D.** 24,097 (gam)

Câu 39: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để' đo mức cường độ của âm là đềxinben (viết tắt là đB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(db) = 10\log\frac{I}{I_0}$ trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe $\left(I_0 = 10^{-12} w/m^2\right)$. Tiếng ồn phát ra từ tiềng gõ phím liên tục ở một bàn phím của máy vi tính, có cường độ âm đo được là $10^{-5} w/m^2$. Giả sử trong phòng làm việc của một công ty có hai nhân viên văn phòng cùng thực hiện thao tác gõ phím trên hai bàn phím máy vi tính giống nhau thì mức cường độ âm tổng cộng đo cả hai bàn phím phát ra cùng lúc là bao nhiêu?.

A. $73dB$. **B.** $140dB$. **C.** $100dB$. **D.** $72dB$.

Câu 40: Cho biết chu kì bán hủy của chất phỏng xạ plutônium Pu^{239} là 24.360 năm (tức là lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chi còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính bởi công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $(r < 0)$, t là thời gian phân huỷ, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam?

A. 48720. **B.** 10000. **C.** 82333. **D.** 82235.

Câu 41: Cường độ một trận động đất M (Richte) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu?

A. 8.4. **B.** 32. **C.** 12. **D.** 8.6.

Câu 42: Cường độ một trận động đất M (Richte) được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richte. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản.

A. $\frac{1}{100}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** 100.

Câu 43: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đềxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(dB)=10\log\frac{I}{I_0}$, trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0=10^{-12}\ w/m^2$). Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là $68\ dB$. Hãy tính cường độ âm tương ứng ra đơn vị w/m^2

A. $6{,}3.10^{-6}\ w/m^2$. **B.** $6{,}3.10^{-72}\ w/m^2$. **C.** $6{,}3.10^{6}\ w/m^2$. **D.** $6{,}3\ w/m^2$.

Câu 44: Năm 2020, dân số thế giới là $7{,}795$ tỉ người và tốc độ tăng dân số $1{,}05\%$/năm. Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì đến năm bao nhiêu năm dân số đạt 10 tỉ người.

A. 2040. **B.** 2044. **C.** 2048. **D.** 2052.

Câu 45: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đềxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(dB)=10\log\frac{I}{I_0}$, trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0=10^{-12}\ w/m^2$). Hai cây đàn ghita giống nhau, cùng hoà tấu một bản nhạc. Mỗi chiếc đàn phát ra âm có mức cường độ âm trung bình là 60 d**B.** Hỏi mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra là bao nhiêu?

A. 120. **B.** 80. **C.** 180. **D.** 63.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho các hàm số $y=\log_{\frac{2024}{2023}}x$ và $y=\left(\frac{2023}{2024}\right)^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=\log_{\frac{2024}{2023}}x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y=\left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{2024}{2023}}x$ nằm bên phải trục tung.

d) Đồ thị hàm số $y=\left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ cắt trục tung.

Câu 2: Cho hàm số $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$ và tập giá trị của hàm số là $T=\mathbb{R}$

b) Đồ thị (C) đi qua điểm $(1;0)$, nằm bên phải trục tung

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1$.

d) Đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y=2-\log_a(4-x)$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\log_5 x$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳn định sau:

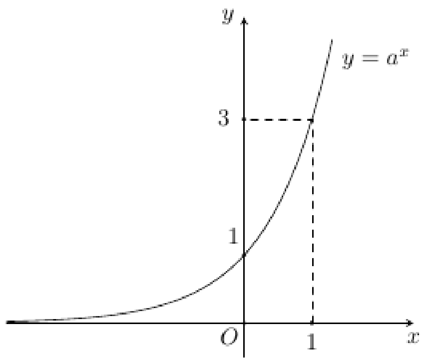
a) Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) Đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành.

d) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số cho bởi công thức $y=3^x$.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=\dfrac{1}{3}$ tại điểm có hoành độ không âm.

d) Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-x+1$ tại điểm có hoành độ dương.

Câu 5: Cho các hàm số $y=\log_a x$, $y=a^x$ với a là số thực dương khác 1. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

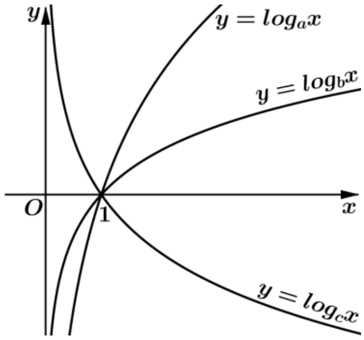
a) Đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

b) Hàm số $y=\log_a x$ và hàm số $y=a^x$ có cùng tập giá trị.

c) Hàm số $y=a^x$ với $0<a<1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số $y=a^x$ với $a>0$ và $a\neq 1$ luôn đi qua điểm $A(a;1)$.

Câu 6: Cho các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ với a,b,c là ba số thực dương khác 1. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Đồ thị các hàm số trên đều đi qua điểm $A(1;0)$.

b) Hàm số $y=\log_c x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) Từ đồ thị ta có: $0<c<1<a<b$.

d) Đường thẳng $y=3$ cắt hai đồ thị $y=\log_a x,\ y=\log_b x$ tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x_1;x_2$ sao cho $x_2=2x_1$. Khi đó $\dfrac{a}{b}=\sqrt[3]{2}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=a^x$ với $0<a\neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=a^x$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$

b) Đồ thị hàm số $y=a^x$ đi qua điểm $(0;1)$.

c) Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0<a<1$.

d) Hàm số $y=a^x$ có tập giá trị là $(a;+\infty)$ nếu $x>1$ và $a>1$.

Câu 8: Cho hàm số $y=2^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;4)$

d) Đồ thị hàm số $y=2^x$ đối xứng với đồ thị $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ qua trục tung.

Câu 9: Cho hàm số $y=\log_4 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

b) Hàm số có tập giá trị $T=\mathbb{R}$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=1$ tại điểm có hoành độ bằng 3

Câu 10: Cho các hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ và $y=2^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có hai hàm số mũ.

b) Đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ đi qua điểm $M(2;-1)$.

c) Đồ thị hàm số $y=2^x$ đi qua điểm $N(1;-1)$.

d) Hai đồ thị hàm số $y=2^x$ và $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ cắt nhau tại 1 điểm.

Câu 11: Cho các hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$; $y=2^x$; $y=\log_{\sqrt{3}}x$; $y=\log_{0,5}x$ và $y=(0,5)^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=2^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

b) Hàm số $y=\log_{\sqrt{3}}x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

c) Có hai hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

d) Có hai hàm số có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

Câu 12: Cho các hàm số $y=\log_{\frac{1}{3}}x$; $y=\pi^x$; $y=\ln x$; $y=\log_{0,2}x$ và $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y=\log_{\pi}x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

c) Có ba hàm số nghịch biến trên tập xác định.

d) Có hai hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\log_3(5x-3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2;7)$.

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[\frac{4}{5};\frac{12}{5}\right]$ là 2

Câu 14: Cho ba điểm $A(b;\log_a b)$, $B(c;2\log_a c)$ và $C(b;3\log_a b)$ với a,b,c dương và đều khác 1.

a) B là trung điểm của AC khi và chỉ khi $b=c>0$.

b) Ba điểm A,B,C tạo thành tam giác vuông tại A khi và chỉ khi $b=2c$.

c) Khi ba điểm A,B,C tạo thành tam giác thì có diện tích là $S=\left|(c-b).\log_a b^2\right|$.

d) Khi B là trọng tâm của tam giác OAC (với O là gốc tọa độ) thì giá trị của biểu thức $S=2b+c$ là bằng 9.

Câu 15: Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ ax-4 & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$

a) Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

b) $a^x=\frac{1}{16}$ khi $x=-4$.

c) Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ đi qua điểm $(2;1)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=a^{x-1}+a^{1-2x}$ bằng $\frac{3}{2}$.

Câu 16: Một người gửi số tiền 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Lãi suất của ngân hàng là $0,65$ trong một năm

b) Sau khi gửi 1 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng là $532\,500\,000$ đồng

c) Sau khi gửi 3 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng nhiều hơn $600\,000\,000$ đồng.

d) Do thiếu tiền nên ở cuối năm thứ 3, người đó đã rút 100 triệu đồng từ ngân hang và tiếp tục gửi thêm 2 năm nữa thì rút toàn bộ số tiền. Lúc này người này có số tiền ít hơn $670\,000\,000$ đồng.

Câu 17: Cô Nga gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Nga không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (triệu đồng), cô Nga sử dụng công thức $y=\log_{1,06}\left(\frac{x}{100}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tổng số tiền x thu được tăng lên khi số năm gửi y tăng lên do đó hàm số $y=\log_{1,06}\left(\frac{x}{100}\right)$ đồng biến trên tập xác định.

b) Sau ít nhất 12 năm thì cô Nga có thể rút ra được số tiền gấp đôi số tiền đã gửi từ tài khoản tiết kiệm đó.

c) Có một dự án đầu tư đòi hỏi chi phí hiện tại là 100 triệu đồng và sau 5 năm sẽ đem lại 150 triệu đồng. Xét khẳng định: "Cô Nga nếu đầu tư vào dự án này sẽ thu về khoản lợi nhuận nhiều hơn là gửi tiền vào ngân hàng đã nêu".

d) Do tham gia bảo hiểm nhân thọ nên hàng năm cô Nga phải đóng phí là 20 triệu đồng. Cô dự kiến sau khi gửi tiền được một năm thì hàng năm sẽ rút 20 triệu đồng từ tiền gốc và lãi thu được để đóng bảo hiểm, số tiền còn lại thì cô tiếp tục gửi ngân hàng (giả sử quy định về lãi suất tiền gửi không thay đổi). Xét khẳng định: "Cô Nga sử dụng số tiền theo cách đó sẽ đóng bảo hiểm được tối đa 6 năm từ số tiền 100 triệu vốn ban đầu".

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: E.coli là vi khuẩn đường ruột gây bệnh tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E.coli tăng gấp đôi. Ban đầu có 20 vi khuẩn E.coli trong đường ruột. Hỏi sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn E.coli lớn hơn 81920 con?

Câu 2: Anh Trung gửi vào ngân hàng 180 triệu đồng với lãi suất 0,6%/tháng. Sau mỗi tháng, anh Trung đến ngân hàng rút mỗi tháng 5 triệu đồng để chi tiêu đến khi hết tiền thì thôi. Biết trong suốt thời gian đó, ngoài số tiền rút mỗi tháng anh Trung không rút thêm một đồng nào kể cả gốc lẫn lãi và lãi suất không đổi. Vậy tháng cuối cùng anh Trung sẽ rút được số tiền là bao nhiêu triệu đồng (Kết quả làm tròn đến đến hàng phần trăm)?

Câu 3: Chị Lan chuẩn bị mua nhà trị giá 1 tỷ đồng. Chị Lan thực hiện việc tiết kiệm bằng cách mỗi tháng gửi đều đặn vào ngân hàng 20 triệu đồng/tháng. Biết rằng trong thời gian chị Lan gửi tiền thì ngân hàng áp dụng mức lãi suất $0,6\%$ tháng và chị Lan không rút lãi lần nào. Hỏi chị Lan phải gửi tối thiểu bao nhiêu tháng để có được số tiền 1 tỷ đồng bao gồm cả tiền gốc và tiền lãi?

Câu 4: Vợ chồng anh Bình dự định lương của vợ dùng chi trả sinh hoạt phí, lương của anh Bình được gửi tiết kiệm hàng tháng. Biết đầu tháng này anh mới được tăng lương nhận mức lương 8 triệu đồng/tháng và cứ sau 2 năm lương của anh được tăng lên 10% so với 2 năm trước đó. Giả sử rằng dự định của vợ chồng anh được thực hiện từ đầu tháng này và lãi suất ngân hàng ổn định ở $0,6\%$ một tháng. Tính số tiền vợ chồng anh A tiết kiệm được sau 50 tháng (Kết quả làm tròn đến triệu đồng)

Câu 5: Chị Lan muốn mua một chiếc điện thoại Iphone 14 Pro Max trị giá 27 triệu đồng, nhưng vì chưa đủ tiền nên chị chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12% một năm và trả trước 10 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng chị phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 1 năm kể từ ngày mua điện thoại, chị sẽ trả hết nợ, biết kì trả nợ đầu tiên sau ngày mua điện thoại đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó

Câu 6: Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1500 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày. Công thức $P(t)=P_0.a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Sau 6 ngày thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu con.

Câu 7: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $7,5\%$ một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Câu 8: Anh Minh muốn sau 3 năm nữa có một khoản tiền 500 triệu đồng để mua ôtô. Để thực hiện việc đó, anh Minh xây dựng kế hoạch ngay từ bây giờ, hàng tháng phải gửi một khoản tiền không đổi vào ngân hàng theo thể thức lãi kép và không rút tiền ra trong 3 năm đó. Giả sử rằng lãi suất không đổi là $0,65\%$ /tháng. Hỏi số tiền anh Minh phải gửi hàng tháng là bao nhiêu để sau 3 năm anh có được 500 triệu? (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

Câu 9: Anh Bình mua xe ô tô trị giá 600 triệu đồng theo phương thức trả góp với lãi suất là $9\%/1$ năm và lãi chỉ tính trên số tiền chưa trả. Cứ cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất, anh Bình trả 10 triệu đồng. Anh Bình trả hết số tiền trên sau số tháng là

Câu 10: Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên 1 tháng (chuyển vào tài khoản ngân hàng của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2019 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi 1% trên 1 tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2019 mẹ đi rút toàn số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền gửi từ tháng1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

Câu 11: Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất $0,85\%$ / tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng?

Câu 12: Cường độ ánh sáng đi qua môi trường khác không khí (chẳng hạn sương mù, nước,…) sẽ giảm dần tùy thuộc độ dày của môi trường và hằng số μ gọi là khả năng hấp thu của môi trường, tùy thuộc môi trường thì khả năng hấp thu tính theo công thức $I=I_0e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó và được tính bằng đơn vị mét. Biết rằng nước biển có $\mu=1,4$. Biết cường độ ánh sáng giảm đi e^m khi từ độ sâu 2m xuống đến 20m. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

----------------HẾT----------------

BÀI 04 PHƯƠNG TRÌNH, BPT MŨ VÀ LOGARIT

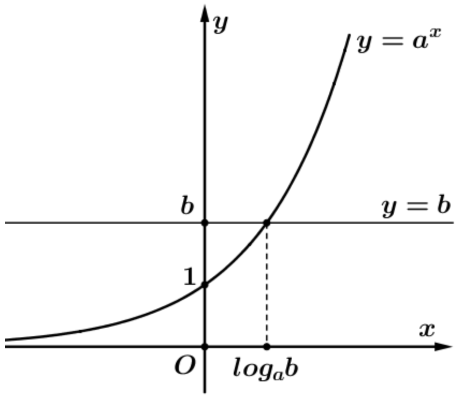
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phương trình mũ

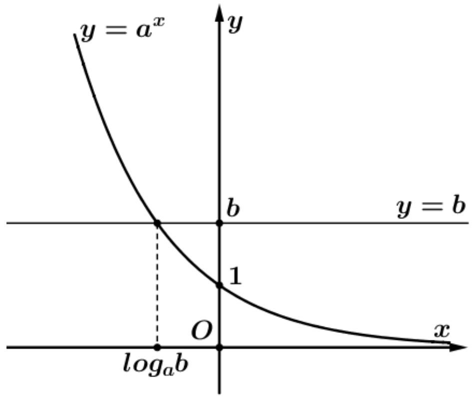
Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ với $0 < a \neq 1$.

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Minh họa bằng đồ thị như sau:



$(a > 1)$



$(0 < a < 1)$

Chú ý: Phương pháp giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số:

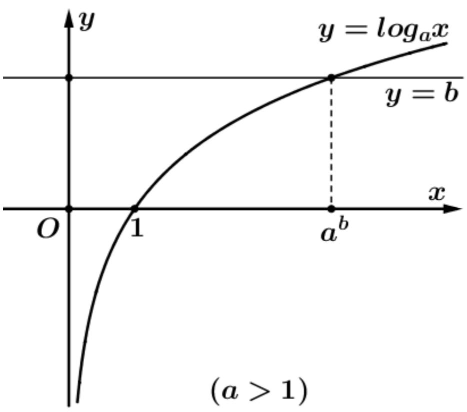
Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$.

2 Phương trình logarit

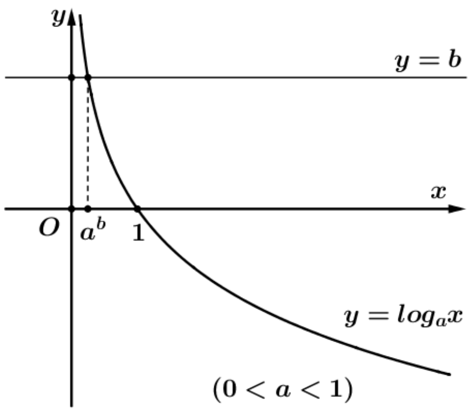
Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ với $0 < a \neq 1$.

Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Minh hoạ bằng đồ thị:



$(a > 1)$



$(0 < a < 1)$

Chú ý. Phương pháp giải phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số:

Nếu $u, v > 0$ và $0 < a \neq 1$ thì $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$.

3 Bất phương trình mũ

- Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \ge b, a^x < b, a^x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.
- Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:

  Nếu $b \le 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

  Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

  Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

  Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Chú ý: Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

- Nếu $a > 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$.

4 Bất phương trình logarit

- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \ge b, \log_a x < b, \log_a x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.
- Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:

  Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > a^x$.

  Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Chú ý: Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow x > a^b$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < a^b$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Giải các phương trình mũ và logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x = b,\ (a>0,\ a\neq 1)$.

- Nếu $b>0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b\ \left(a>0,\ a\neq 1\right)$.

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình mũ sau:

a) $3^{x+1} = 2$

b) $3^{2x^2+5x+4} = 9$

c) $2^x = \dfrac{1}{8}$

d) $3^{2x^2-x} = 3$

e) $2^{x^2+3x-6} = \dfrac{1}{4}$

f) $2^{x-1}.3^x = 18$

Ví dụ 2: Giải các phương trình logarit sau:

a) $\log_3(x-2) = 2$

b) $\log_3 x = \dfrac{1}{3}$

c) $\log_3\left(x^2-3x+3\right) = 1$

d) $\log_2\left(x^2-x+2\right) = 1$

e) $\log_3(x-1)^2 = 2$

f) $\log_{x-4}\left(x^2-7x+12\right) = \log_{x-4}(x-3)$

g) $\log x + \log(x-9) = 1$

h) $\log_3(\log_2 a) = 0$

i) $\left(x^2-2x-3\right)\log_2 x = 0$

k) $\left(x^2+2x-3\right)\left(\log_2 x - 3\right) = 0$.

Dạng 2: Phương pháp đưa về cùng cơ số giải phương trình mũ và logarit

Sử dụng tính chất $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ (0 < a \neq 1)$.

Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0\ (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình mũ sau đây:

a) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$

b) $4^{5x-2} = 64$

c) $2^{x-6} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x+1}$

d) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x}$

e) $\left(\dfrac{2020}{2021}\right)^{4x} = \left(\dfrac{2021}{2020}\right)^{2x-6}$

f) $2^{\sqrt{x+3}} = 2^{3-x}$

g) $3^{x^2-4} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{3x-1}$

Ví dụ 4: Giải các phương trình logarit sau:

a) $\log_5(2x-1) = \log_5(2-x)$

b) $\log_3(x^2+4x-3) = \log_3(x+1)$

c) $2\log_2(2x+3) = \log_2 x^2$

d) $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$

e) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

f) $\log_5 x = \log_5(x+6) - \log_5(x+2)$

g) $\log_2(x+1) - 2\log_{\frac{1}{4}}(x-1) = 3$

h) $\log_3(6+x) + \log_3(9x) - 5 = 0$

i) $\log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x$

k) $\log_3(9^x - 5.3^x + 7) = x + 1$

l) $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x = \dfrac{2}{3}$

Dạng 3: Phương pháp đặt ẩn phụ giải phương trình mũ và logarit

Đặt ẩn phụ giải phương trình mũ: $\alpha.a^{x}+\beta.a^{x}+\gamma=0$. Đặt $t=a^{x}\quad(t>0)$

Đặt ẩn phụ giải phương trình logarit: $\alpha.\log_a^2 x+\beta.\log_a x+\gamma=0$. Đặt $t=\log_a x\quad(x>0)$

Ví dụ 5: Giải các phương trình mũ sau:

a) $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$ b) $9^{x}-12.3^{x}+27=0$

c) $9^{x+1}-3^{x+1}-30=0$ d) $4^{x}-2^{x+2}+3=0$

e) $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$ f) $-25^{x}+5^{x+1}+6=0$

g) $9^{x}-12.3^{x}+27=0$ h) $4^{x}-2^{x+2}+3=0$

i) $9^{x+1}-12.3^{x+2}+243=0$ k) $7^{x}+2.7^{1-x}-9=0$

Ví dụ 6: Giải các phương trình logarit sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+4=0$ b) $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$

c) $\log_{\frac{1}{2}}{}^2 x-6\log_8(4x)+1=0$ d) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+6=0$

e) $\log^2 x-\log(2020x)-1=0$ f) $\log_2(5^{x}-1).\log_4(2.5^{x}-2)=1$

Ví dụ 7: Tìm tham số m để phương trình phương trình $\log_2^2(x^2+1)-m\log_2(x^2+1)+8-m=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt ?

Ví dụ 8: Tìm tham số m để phương trình $\log_2^2 x-m\log_2 x+15-m=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $2\le x_1<4<x_2$.

Ví dụ 9: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1x_2=27$.

Ví dụ 10: Tìm tham số m để phương trình $\log^2 x-2(m+1)\log x+4=0$ có hai nghiệm thực phân biệt thoả mãn $0<x_1<10<x_2$.

Dạng 4: Phương pháp mũ hóa và logarit hóa

1. Phương pháp logarit hóa:

- **Dạng 1:** $a^{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = \log_a f(x) \end{cases}$ với $0 < a \neq 1$.
- **Dạng 2:** $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$.

2. Phương pháp mũ hóa: $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$

Ví dụ 11: Giải các phương trình sau:

a) $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1} = 2-\sqrt{3}$ b) $3^x.5^{\frac{2x-1}{x}} = 15$ c) $2^{x-2} = 3^{x^2+2x-8}$

Ví dụ 12: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\frac{4}{3}} x = \log_3 y = \log_2(2x-3y)$. Tính tỷ số $\frac{x}{y}$.

Ví dụ 13: Cho phương trình $x^{\log_{2020}\left(x^3\right)-a} = 2021$ với a là số thực dương. Biết tích các nghiệm của phương trình là 32. Tìm giá trị của a.

Dạng 5: Giải các bất phương trình mũ và logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x = b,\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Ví dụ 14: Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} > \frac{1}{49}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 128$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} > 8$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}$

f) $2^{2x^2-11x+5} \leq 1$

g) $7^{4-2x-x^2} \leq \frac{1}{49^x}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16}$

i) $3^{x^2-4x+5} \leq 9$

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$

Ví dụ 15: Giải các bất phương trình logarit sau:

a) $\log_2(2x+4) < 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -1$

c) $\log_2 x < 3$

d) $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+4x\right) \geq -1$

e) $\log_2\left(3.2^x - 2\right) < 2x$

f) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-9) > \log_{\frac{1}{3}}(x+10)$

g) $\log_3\left(x^2-2x\right) \leq 1$

h) $\log_5(4x-9) \leq \log_5(3x+7)$

i) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x\right) \geq -1$

k) $\log_3\left(5x-2x^2+7\right) < 2$

Dạng 6: Đưa về cùng cơ số giải bất phương trình mũ và logarit

Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
- **Trường hợp 2:** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Ví dụ 16: Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $3^{x+2} \ge \frac{1}{9}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}$

c) $2^{x^2-4x+5} = 8$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16}$

e) $2^{x^2-3x+4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$

g) $4^{x-1} \ge 2^{x^2-3x+2}$

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7} \ge 8$

k) $2^{x^2-3x+2} \ge 4$

Ví dụ 17: Giải các bất phương trình logarit sau :

a) $\log_2(x-1) > \log_2 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

c) $\log_4\left(x^2-3x\right) > \log_2(9-x)$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1)$

e) $\log_{2-\sqrt{3}}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \ge 0$

Ví dụ 18: Tìm tham số m để bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right) \ge \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 19: Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\ln\left(9x^2+9\right) \ge \ln\left(mx^2+6x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$?

Dạng 7: Đặt ẩn phụ giải bất phương trình mũ và logarit

Ta thường gặp các dạng: $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p>0 \quad (1)$.

- Đặt $t=a^{f(x)},\ t>0$ đưa pt (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2+nt+p>0$.
- Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t>0$ sau đó tìm nghiệm x.
- $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p>0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)},\ t>0$, suy ra $b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}>0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t>0$.

Ví dụ 20: Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $4^x-3.2^x-4\geq 0$

b) $4^x-17.2^x+16\leq 0$

c) $25^x-5^x-2<0$

d) $4^x-17.2^x+16\leq 0$

e) $4^x-3.2^x-4\geq 0$

f) $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x<3.2^x$

Ví dụ 21: Giải các bất phương trình logarit sau:

a) $\log_{\sqrt{2}}^2(x-4)-43\log_2(4x-16)+75\leq 0$

b) $\log_2^2 x-5\log_2 x-6\leq 0$

c) $\log_3^2 x-2\log_{\sqrt{3}} x+3>0$

d) $\left(2^x+2^{4-x}-17\right)\sqrt{10-\log_2 x}\geq 0$

Ví dụ 22: Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ví dụ 23: Tìm tham số m để bất phương trình $\frac{\log_3^2 x-3\log_3 x+2}{\sqrt{m-2^x}}<0$ có không quá 3 nghiệm nguyên dương?

Ví dụ 24: Tìm tham số m để bất phương trình $\left|\frac{3\ln^2 x+2\ln x+12}{\ln^2 x-(m+1)\ln x+4}\right|\geq 2$ nghiệm đúng với mọi $x>0$.

Dạng 8: Mũ hóa, logarit hóa giải bất phương trình mũ và logarit

Ví dụ 25: Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$

b) $5.6^{x+1} \leq 2.3^{x+1}$

c) $5^{x^2-4} \leq 625$

d) $(0,1)^{\ln(x-4)} \geq 1$

e) $\log_2\left(3^x - 2\right) < 0$

Ví dụ 26: Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2}.m^{x+1} - 3^{-x} < 0$ chứa đúng một số nguyên

Dạng 9: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Ví dụ 27: Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi $7,5\%$ một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là: $A = 500.(1+0,075)^n$ (triệu đồng). Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Ví dụ 28: Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N(t) = 500e^{0,4t}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80 000 con?

Ví dụ 29: Giả sử nhiệt độ $T\left({}^\circ\mathrm{C}\right)$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 25 + 70e^{-0.5t}$ trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại $30^\circ\mathrm{C}$?

Ví dụ 30: Tính nồng độ Ion Hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tính tổng các nghiệm của phương trình $\ln\left(x^2-3x+1\right)=-9$

Câu 2: Giải phương trình $(4,5)^{4x-5}=\left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1}$ là

Câu 3: Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2}\le\left(\frac{11}{7}\right)^{x^2}$.

Câu 4: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4.9^x-13.6^x+9.4^x=0$.

Câu 5: Tìm tham số m để phương trình: $4^x-m.2^{x+1}+2m^2-27=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 6: Cho phương trình $4^x-2m.2^x+3m-2=0(*)$ (m là tham số thực). Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

Câu 7: Tìm tham số m để phương trình $4^x-(m+3)2^{x+1}+m+9=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Câu 8: Cho phương trình $m4^x-m2^{x+1}+2m-12=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt?

Câu 9: Tìm tham số m để phương trình $4^x-(2m+1).2^x+(m-11).0,5^x+m+11=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 10: Tìm tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 11: Cho phương trình $\log_3^2(3x)-(m+2)\log_3 x+2m-5=0$ (m là tham số thực). Tìm tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[9;27]$.

Câu 12: Tìm tham số m để bất phương trình $9\left(\log_3\sqrt[3]{x}\right)^2+\log_3 x+2m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x\in(3;81)$.

Câu 13: Biết phương trình $\log_2^2\left(x^2+1\right)-m\log_2\left(x^2+1\right)+8-m=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Tìm m

Câu 14: Cho phương trình $\log_3^2 x-(2m+1)\log_3 x+m^2+m=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1<x_2$) thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+3)=48$.

Câu 15: Tìm tham số m để bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-m\right)<0$ có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên

Câu 16: Tìm tham số m để bất phương trình $1-\log_{\frac{1}{7}}\left(x^2+1\right)\ge\log_7\left(mx^2+4x+m\right)$ có nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Câu 17: Tìm số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình $3^{x+1}-2^{2x+1}-12^{\frac{x}{2}}<0$

Câu 18: Tìm tham số m để bất phương trình: $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Câu 19: Năm 2020, một doanh nghiệp X có tổng doanh thu là 150 tỉ đồng. Dự kiến trong 10 năm tiếp theo, tổng doanh thu mỗi năm sẽ tăng thêm 12% so với năm liền trước. Theo dự kiến đó thì kể từ năm nào, tổng doanh thu của doanh nghiệp X vượt quá 360 tỉ đồng?

Câu 20: Bạn An gửi tiết kiệm một số tiền ban đầu là 1000000 đồng với lãi suất $0,58\%$ tháng (không kỳ hạn). Hỏi bạn An phải gửi ít nhất bao nhiêu tháng thì được cả vốn lẫn lãi bằng hoặc vượt quá 1300000 đồng?

Câu 21: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tích lãi cho năm tiếp theo. Hỏi người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm để nhận được tổng số tiền cả vốn ban đầu và lãi nhiều hơn 140 triệu đồng nếu trong khoảng thời gian gửi người đó không tút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Câu 22: Năm 2020, độ che phủ rừng của nước ta đạt $41,89\%$. Giả sử độ che phủ rừng mỗi năm tiếp theo đều tăng $1,6\%$ so với độ che phủ rừng của năm liền trước. Kể từ sau năm 2020, năm nào là năm đầu tiên nước ta có độ che phủ rừng trong năm đó đạt trên 58%?

Câu 23: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6% / năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả sử trong suốt thời gian gửi lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Phương trình mũ

Câu 1: Nghiệm của phương trình $3^{3x+5}=3^{1-x}$ là :

A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $10^x=5$ là

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\log 5$. **D.** $x=\log_5 10$.

Câu 3: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x}=8$ là

A. 3 **B.** 2. **C.** -3 **D.** 0

Câu 4: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x}=5$.

A. $S=\{0;2\}$. **B.** $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Câu 5: Tập nghiệm của phương trình $2^{x+1}=5$ có bao nhiêu phần tử?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 6: Số nghiệm thực của phương trình $3^{x^2-2}=81$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3}=5^{x+1}$ là

A. $x=-1;x=2$. **B.** Vô nghiệm. **C.** $x=1;x=2$. **D.** $x=1;x=-2$.

Câu 8: Nghiệm của phương trình $5^{x-4}=125$ là

A. $x=4$. **B.** $x=5$. **C.** $x=7$. **D.** $x=6$.

Câu 9: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-4}=3^{x-2}$ là

A. $\log_2 3$. **B.** $2\log_2 3-4$. **C.** $\log_3 2$. **D.** 3.

Câu 10: Cho phương trình $2^{x^2}.3^{x+1}=2$. Tổng các nghiệm của phương trình bằng

A. $\log_3 2$. **B.** $\log_2\frac{3}{2}$. **C.** $-\log_2 3$. **D.** $\log_2 3$.

Câu 11: Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+2}=4$ là

A. $S=\{-1;0\}$. **B.** $S=\{-1\}$. **C.** $S=\{0\}$. **D.** $S=\{0;1\}$.

Câu 12: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x-\frac{1}{3}}=9^{x+\frac{4}{3}}$

A. 31. **B.** 19. **C.** 35. **D.** 22.

Câu 13: Tổng các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-3x+4}=4^{2x-3}$ bằng

A. 6. **B.** 7. **C.** -7. **D.** 5.

Câu 14: Số nghiệm phương trình $2^{2x^2-7x+5}=1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15: Phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x^3}=4^{x^2-2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 16: Số nghiệm thực của phương trình $9^{x^2+4x+3}=1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17: Số nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}=\frac{9}{4}$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 18: Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** -2

Câu 19: Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$ ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2+2t-3=0$. **B.** $2t^2-3t=0$. **C.** $t^2+t-3=0$. **D.** $4t-3=0$.

Câu 20: Số nghiệm thực của phương trình: $1+\ln(x+3)-\ln(x-1)^2=0$ là

A. 2. **B.** 1 **C.** 0. **D.** 3.

Câu 21: Số nghiệm của phương trình $3^{2x^2-6x+2}-4.3^{x^2-3x+2}+27=0$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 22: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x+1}-5.2^x+2=0$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Câu 23: Cho phương trình $4.4^x-9.2^{x+1}+8=0$. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó tích x_1,x_2 bằng:

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y+1}=3^{x^2+y^2}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 25: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $4^{3-2x^2}=5^{x+1}$ gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $-1,07$. **B.** $-0,92$. **C.** $0,92$. **D.** $1,07$.

Câu 26: Biết phương trình $9^x-3.3^x-4=0$ có nghiệm $x=\log_a b$ (a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 10), giá trị của $a-b$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 27: Biết phương trình $\log_5^2 x-m\log_5 x-7=0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tích $x_1.x_2$

A. $x_1.x_2=5^{-m}$. **B.** $x_1.x_2=-7$. **C.** $x_1.x_2=5^{-7}$. **D.** $x_1.x_2=5^m$.

Câu 28: Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$. Giá trị $2x_1+3x_2$ bằng

A. $4\log_2 3$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $3\log_3 2$.

Câu 29: Tổng tất các các nghiệm của phương trình $9^x - 5.6^x + 6.4^x = 0$ bằng

A. $\log_{\frac{3}{2}} 2$. **B.** $\log_{\frac{3}{2}} 6$. **C.** $\log_{\frac{3}{2}} 3$. **D.** $\log_{\frac{2}{3}} 6$.

Câu 30: Tổng các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 31: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

A. 3. **B.** 18. **C.** 27. **D.** 9.

Câu 32: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $100^x - 7.10^x + 10 = 0$.

A. 7. **B.** $\log 7$. **C.** 1. **D.** $\ln 7$

Câu 33: Biết phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Giá trị của $x_1.x_2$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** -3. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 34: Giả sử phương trình $25^x + 15^x = 6.9^x$ có một nghiệm duy nhất được viết dưới dạng $\frac{a}{\log_b c - \log_b d}$ với a là số nguyên dương và b, c, d là các số nguyên tố. Tính $S = a^2 + b + c + d$.

A. $S = 14$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = 19$. **D.** $S = 12$.

Câu 35: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(9^x - 244.3^x + 243\right).\sqrt{8 - \log_2(x+2)} \ge 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 252. **B.** 250. **C.** 249. **D.** 254.

Câu 36: Phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(-5;0)$. **D.** $(-7;-5)$.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - (m+1).2^x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + x_1 + x_2 \le 2$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 38: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Câu 39: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các giá trị của S bằng.

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Câu 40: Cho phương trình $4^x - (m+3)2^x + 8 = 0$ (m là tham số). Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3) = 8$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(29;30)$. **B.** $(27;28)$. **C.** $(30;31)$. **D.** $(28;29)$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-21;21]$ để hai phương trình $4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16$ và $|m-9|.3^{x-2}+m.9^{x-1}=1$ là hai phương trình tương đương?

A. 32. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 31.

Câu 42: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x-m.5^{x+1}+7m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}}+2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x}<3^{2x-3}$ có nghiệm?

A. 9. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 44: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m.4^{x+1}+5m^2-45=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử là số chẵn?

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

2. Phương trình logarit

Câu 45: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{2023}\left(x^2+2022x\right)=1$ bằng

A. -2022. **B.** -2023. **C.** 2023. **D.** 2022.

Câu 46: Nghiệm của phương trình $\log_2(2x-6)=3$ là

A. $x=6$ **B.** $x=9$ **C.** $x=8$ **D.** $x=7$

Câu 47: Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=1$ là

A. $x=3$. **B.** $x=-1$ **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 48: Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là

A. $x=10$. **B.** $x=9$. **C.** $x=7$. **D.** $x=8$.

Câu 49: Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+1\right)=2$ là

A. $S=\left\{\sqrt{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$. **C.** $S=\{-1;1\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Câu 50: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2x-3\log_2x+2=0$ bằng

A. 8 **B.** 6 **C.** 16 **D.** 2

Câu 51: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(1-x)=2$ là

A. $x=-4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=5$.

Câu 52: Tập nghiệm của phương trình $\ln(x+4)-\ln(2x-3)=0$ là

A. $\left\{7;\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $\{7\}$. **C.** $\left\{-4;\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $\varnothing$.

Câu 53: Tập nghiệm S của phương trình $\log_2\left(x^2+3x\right)=2$ là

A. $S=\{1;-4\}$. **B.** $S=\{-1;4\}$. **C.** $S=\{1\}$. **D.** $S=\{4\}$.

Câu 54: Phương trình $\log(4x+1)=\log(2x+5)$ có nghiệm là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Câu 55: Tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-3)=\log_2(2x-1)$ là

A. $S=\{0\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{-2\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Câu 56: Nghiệm của phương trình $\log_2(2x)=3$ là?

A. $x=3$. **B.** $x=4$. **C.** $x=\frac{9}{2}$. **D.** $x=\frac{5}{2}$.

Câu 57: Nghiệm của phương trình $\log_4(x-1)=3$ là

A. $x=66$. **B.** $x=68$. **C.** $x=65$. **D.** $x=63$.

Câu 58: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2 x=2$ là

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{3}{2}$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=2$.

Câu 59: Biết phương trình $2\log_3 x+2\log_x 3=5$ có ai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=6{x_1}^2-x_2+1$.

A. $T=16$. **B.** $T=10$. **C.** $T=8$. **D.** $T=12$.

Câu 60: Tổng các nghiệm của phương trình $\log^2 x-\log x-2=0$ bằng

A. $\frac{1001}{100}$. **B.** 101. **C.** $\frac{1001}{10}$. **D.** 1

Câu 61: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 9. **D.** -7.

Câu 62: Tích các nghiệm của phương trình $6\log^2{}_4 x-\log_4 x^3+\frac{1}{5}=0$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\sqrt[3]{2}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Câu 63: Biết phương trình $\log_9^2 x+\log_3\frac{x}{27}=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 với $x_1<x_2$. Hiệu x_2-x_1 bằng

A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{6560}{729}$. **C.** $\frac{80}{27}$. **D.** $\frac{6560}{27}$.

Câu 64: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\left(9^x-5.3^x+7\right)=x+1$ bằng

A. $\log_7 3$. **B.** $1+\log_3 7$. **C.** $\log_3 7$. **D.** $1+\log_3 7$.

Câu 65: Phương trình $\left(x^2-4x+3\right)\log_{2023}\left(x^2-4\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 66: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(3x+6)=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 67: Biết rằng phương trình $\log_3\left(x^2-2021x\right)=2022$ có 2 nghiệm x_1,x_2. Tính tổng x_1+x_2.

A. $x_1 + x_2 = -3^{2022}$. **B.** $x_1 + x_2 = -2022^3$.

C. $x_1 + x_2 = 2021$. **D.** $x_1 + x_2 = -2021$.

Câu 68: Số nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$?

A. 0. **B.** 3 **C.** 1. **D.** 2.

Câu 69: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3 5$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 70: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 71: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2) - \log_2 x = 2$ là

A. $x = \frac{1}{2}$. **B.** $x = \frac{3}{2}$. **C.** $x = \frac{2}{3}$. **D.** $x = 2$.

Câu 72: Cho phương trình $\log_2(2x-1)^2 = 2\log_2(x-2)$. Số nghiệm thực của phương trình là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 73: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 4x - 1\right) = \log_{\frac{1}{3}} 8x - \log_{\frac{1}{3}} 4x$ bằng

A. 5 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Câu 74: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 75: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_8(x+2)^3 + \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 4x + 2\right) = 0$. Tổng các phần tử của S là

A. 2. **B.** -5. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 76: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\frac{1}{2}\log\left(x^2 - 4x - 1\right) = \log 8x - \log 4x$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 77: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(2x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1

Câu 78: Phương trình $\log_x 5.\log_5 x = 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 21.

Câu 79: Phương trình $\log_3(x+2) + \frac{1}{2}\log_3(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{3}} 8 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 80: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. $4+\sqrt{2}$. **B.** $8+\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $6+\sqrt{2}$.

Câu 81: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(12-2^x\right)=5-x$ bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 32. **D.** 5.

Câu 82: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+x+1\right)=2+\log_2 x$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 83: Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $|m|<2023$ và phương trình $\log_{16}(mx)=\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2023. **D.** 2022.

Câu 84: Có bao nhiêu số nguyên dương a để tồn tại đúng hai số thực b phân biệt, thỏa mãn điều kiện $\left(4\log_2^2 b+\log_2 b-5\right)\sqrt{7^b-a}=0$.

A. 48. **B.** 47. **C.** 49. **D.** 46.

Câu 85: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\log_2(x-3)+(2m+5)\log_{\sqrt{x-3}}2=2m$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<5$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 86: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi x tồn tại đúng hai số thực y thỏa mãn $\left(\log_2^2 y-3\log_2 y+2\right)\sqrt{3^y-x}=0$?

A. 78. **B.** 72. **C.** 79. **D.** 73.

Câu 87: Biết tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(4^x+48\right)=x+4$ bằng $a+b\log_2 3$ với $(a;b\in\mathbb{Z})$. Tính $2a+b$.

A. $2a+b=8$. **B.** $2a+b=5$. **C.** $2a+b=9$. **D.** $2a+b=6$.

Câu 88: Cho hai số thực x, y thỏa $1<x<y$ và $\log_x\left(y^4\right)+\log_y\left(x^5\right)=9$. Tính $\log_{xy}\frac{x^5+y^4}{2}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{20}{9}$. **D.** $\frac{45}{4}$.

3. Bất phương trình mũ

Câu 89: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}>3$ là

A. $[-2;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Câu 90: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x-2}\geq 2$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Câu 91: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x-5\leq 0$ là

A. $S=(-\infty;\log_2 5]$. **B.** $S=(0;\log_2 5]$. **C.** $S=[0;\log_2 5]$. **D.** $S=(0;\log_5 2]$.

Câu 92: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x>27$

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(9;+\infty)$ **D.** $(0;3)$.

Câu 93: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{27}$ là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Câu 94: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$ là

A. $(-\infty;0)$. **B.** $[-4;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;4]$.

Câu 95: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} < 4$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 96: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{2x+3} > \frac{1}{25}$ là

A. $\left(-\frac{5}{2};+\infty\right)\cdot$ **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\cdot$ **C.** $(0;+\infty)\cdot$ **D.** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cdot$

Câu 97: Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} < 16$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1]$

Câu 98: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Câu 99: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \leq \left(\frac{11}{17}\right)^{x^2}$ là

A. $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$. **B.** $[0;3]$. **C.** $[-3;0]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)$.

Câu 100: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \geq 8$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Câu 101: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1} > 9-4\sqrt{5}$

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 102: Số nghiệm nguyên trong khoảng $(-50;50)$ của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ là

A. 100. **B.** 98. **C.** 99. **D.** 51.

Câu 103: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{x}} - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} > 15$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $2a+5b$ bằng

A. -5. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -3.

Câu 104: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}}-5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}}>14$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $3a+4b$ bằng

A. -3. **B.** -2. **C.** -5. **D.** 0.

Câu 105: Số nghiệm nguyên của phương trình $\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}}>0$.

A. 45 **B.** 48 **C.** 49. **D.** 44.

Câu 106: Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}}>0$ là

A. 45. **B.** 48. **C.** 49. **D.** 44.

Câu 107: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x}\geq 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x}$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $[-1:3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Câu 108: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x<4-3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 109: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x}\leq\left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Câu 110: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 111: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x}\geq 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x}$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $[-1:3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Câu 112: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2}<5^{5x+2}$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 113: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2}<5^{5x+2}$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 114: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}<32$ là

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 115: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S = (1;+\infty)$. **B.** $S = (-\infty;1)$. **C.** $S = (2;+\infty)$. **D.** $S = (-\infty;2)$.

Câu 116: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^x + 2\right)\left(4^{x+1} - 8^{2x+1}\right) \le 0$

A. $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;4]$ **D.** $[4;+\infty)$.

Câu 117: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 118: Bất phương trình $3^{|x|} < 81$ có tập nghiệm là

A. $[0;4]$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(-4;4)$.

Câu 119: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+2} \le 25$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0]$.

Câu 120: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[0;1)$.

Câu 121: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -3$ là

A. $(-1;5)$. **B.** $(7;+\infty)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $[-1;7)$.

Câu 122: Số các số nguyên dương x thỏa mãn $4^x + 2023(x+1) < (x+2024).2^x$ là:

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 123: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1} - \sqrt{2}\right)\left(2^x - y\right) < 0$?

A. 2047. **B.** 1022. **C.** 1023. **D.** 1024.

Câu 124: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x + 12 \le 2^{x+1} + 2.3^{x+1}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 125: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 126: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;100]$ để bất phương trình $4^{2x-m} - 4.2^{3x-2m} + 4.2^{x-m} < 1$ nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty;4]$?

A. 99. **B.** 92. **C.** 98. **D.** 93.

4. Bất phương trình logarit

Câu 127: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\le 1$ là

A. $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;\log_2 5)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 128: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x+4)\le 3$ là:

A. $(-4;23]$. **B.** $(-\infty;23]$. **C.** $(-\infty;27]$. **D.** $(-4;5]$.

Câu 129: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)<-2.$ là

A. $(12;+\infty)\cdot$ **B.** $(-\infty;12)\cdot$ **C.** $\left(-\infty;\frac{7}{3}\right)\cdot$ **D.** $(3;12)\cdot$

Câu 130: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x)<\log(x+6)$ là:

A. $[0;6)$ **B.** $(0;6)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-\infty;6)$

Câu 131: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+10)<\log_{\frac{1}{3}}(4x-9)$

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Câu 132: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 2x<\log_2(x+2)$ là

A. $(0;2)$. **B.** $[0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Câu 133: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\log_3^2 x-2\log_3(3x)-1\le 0$. Số phần tử của tập S là

A. 27. **B.** 230. **C.** 103. **D.** 54.

Câu 134: Bất phương trình $\log_2^2 x-4\log_2 x+3\ge 0$ có tập nghiệm S là

A. $S=(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;0]\cup[\log_2 5;+\infty)$.

C. $S=(0;2]\cup[8;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;2]\cup[8;+\infty)$.

Câu 135: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(5^x-125\right)\left(\log_3{}^2 x-8\log_3 x+15\right)<0$

A. 242. **B.** 217. **C.** 220. **D.** 215.

Câu 136: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn điều kiện $\left(7^x-49\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+6\right)<0$?

A. 728. **B.** 726. **C.** 725. **D.** 729.

Câu 137: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $(1;3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Câu 138: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2)<1$ là

A. $(-\infty;8)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;8)$. **D.** $(8;+\infty)$.

Câu 139: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_4(x+6)<2-2\log_4 x$ bằng

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 140: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(6-5x)>0$ là

A. $S=(1;+\infty)$. **B.** $S=\left(\frac{2}{3};1\right)$. **C.** $S=\left(1;\frac{6}{5}\right)$. **D.** $S=\left(1;\frac{6}{5}\right]$.

Câu 141: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S=(-\infty;2)$. **B.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(-1;2)$.

Câu 142: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x+3)<\log_3(1-x)$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a.b$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 143: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)<\log_2(3-x)$ là

A. $S=(-1;1)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(1;3]$. **D.** $S=(-\infty;1)$

Câu 144: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)+\log_2(3x-3)<0$ là

A. $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(1;2)$.

C. $S=(-1;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Câu 145: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-1)>4$.

A. $S=(-\infty;17)$. **B.** $S=(1;17)$. **C.** $S=(17;+\infty)$. **D.** $S=(0;17)$

Câu 146: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)\le 3$ là

A. $(-\infty;9]$. **B.** $[1;9]$. **C.** $(1;9]$. **D.** $(1;10]$.

Câu 147: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)>2$ là

A. $(-5;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Câu 148: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(x+1)<2$ là

A. $S=(0;8)$. **B.** $S=(-\infty;8)$. **C.** $S=(8;+\infty)$. **D.** $S=(-1;8)$.

Câu 149: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 26. **B.** 25. **C.** vô số. **D.** 24.

Câu 150: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(7x+2)\le 2$ là

A. $(-\infty;14)$. **B.** $\left[-\frac{2}{7};14\right]$. **C.** $(-\infty;14]$. **D.** $\left(-\frac{2}{7};14\right]$.

Câu 151: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<2$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(5;+\infty)$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $(1;5)$.

Câu 152: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(4-x)>2$ là

A. $(-5;4)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(-\infty;-5]$. **D.** $(-\infty;-5)$.

Câu 153: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ là:

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;2)$. **C.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $S=(-1;2)$.

Câu 154: Số các giá trị nguyên của x thỏa $\left(2^{x^2}-16\right)(\log_3 x-4)\le 0$ là

A. Vô số. **B.** 80. **C.** 17. **D.** 78.

Câu 155: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thoả mãn bất phương trình $\log_3\left(\frac{2x^2-7}{625}\right)\le\log_5\left(\frac{2x^2-7}{81}\right)$

.Số tập hợp con của S là

A. 2^{316}. **B.** 2^{318}. **C.** 319. **D.** 2^{319}.

Câu 156: Số nghiệm nguyên của bất phương trình thỏa mãn $[1-\log_2(x+8)]\sqrt{2.4^{x+1}-17.2^x+2}\ge 0$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 157: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1$ là:

A. $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$. **B.** $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$.

C. $S=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. **D.** $S=\left[-\sqrt{5};1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Câu 158: Tổng các giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\log_x\left(\log_3\frac{9^x-328}{78}\right)<1$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 159: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 28. **D.** 26.

Câu 160: Bất phương trình $\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,5}(x-1)+1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc $[0;2023]$

?

A. 2019. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Câu 161: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\left(8x^2\right)+\log_3\left(3x^3\right)\ge\log_2 x.\log_3 x$?

A. 27. **B.** 8. **C.** 134. **D.** 133.

Câu 162: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(2x).\log\left(\frac{100}{x}\right)>2$?

A. 198. **B.** 48. **C.** 96. **D.** 149.

Câu 163: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3(x+40)\right)\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. Vô số. **B.** 38. **C.** 36. **D.** 37.

Câu 164: Cho bất phương trình $\log_3(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geq\log_4(x+1)^2-\log_3\left(\frac{x-2}{4}\right)-2$. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 165: Số nghiệm nguyên thuộc $[-100;100]$ của bất phương trình $\log_5\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3^x-1}{25}\right)\leq -143$ là

A. 81. **B.** 79. **C.** 83. **D.** 84.

5. Vận dụng kiến thức vào toán thực tế

Câu 166: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất *Oxyz*, năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo(lãi kép). Hỏi sau ít nhất n năm $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ thì người đó có được số tiền nhiều hơn 200 triệu đồng.

A. $n=8$. **B.** $n=9$. **C.** $n=10$. **D.** $n=7$.

Câu 167: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6{,}1\%$ / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 13 năm. **D.** 10 năm.

Câu 168: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 8% / năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Câu 169: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 13 năm. **B.** 12 năm. **C.** 14 năm. **D.** 11 năm.

Câu 170: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0{,}4\%$ / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

A. 102423000 (đồng). **B.** 102160000 (đồng).
C. 102017000 (đồng). **D.** 102424000 (đồng).

Câu 171: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 8% / năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Câu 172: Ông A bị nhiễm một loại virus nên phải nhập viện và được điều trị ngay lập tức. Kể từ ngày nhập viện, sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì ông A sẽ được xuất viện, biết rằng ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện?

A. 11 ngày **B.** 12 ngày **C.** 13 ngày **D.** 14 ngày

Câu 173: Năm 2022, một hãng công nghệ có 30 triệu người dùng phần mềm của họ. Hãng đặt kế hoạch, tron 3 năm tiếp theo, mỗi năm số lượng người dùng phần mềm tăng 8% so với năm trước và từ năm thứ 4 trở đi, số lượng người dùng phần mềm sẽ tăng 5% so với năm trước đó. Theo kế hoạch đó, hỏi bắt đầu từ năm nào số lượng người dùng phần mềm của hãng sẽ vượt quá 50 triệu người?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2031. **D.** Năm 2030.

-------------------HẾT-------------------

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho phương trình $9^{2x}.27^{x^2}=\dfrac{1}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x=0$ là một nghiệm của phương trình.

b) $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình.

c) $S=\{1;-1\}$ là tập nghiệm của phương trình.

d) $(x_1)^2+(x_2)^2=\dfrac{10}{9}$, với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Câu 2: Cho phương trình $9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $m=-\dfrac{1}{2}$ phương trình (1) không phải phương trình mũ cơ bản

b) Phương trình có nghiệm $x=2$ khi $m=\dfrac{5}{2}$

c) Với $m=\dfrac{1}{4}$ phương trình (1) có một nghiệm

d) Phương trình (1) có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Giá trị của m thuộc khoảng $(1;3)$

Câu 3: Cho phương trình $2^{x^2-x}+2^{x^2-x-2}=4^{x^2-x-1}+1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình có nghiệm $x=1$.

b) Phương trình có ngiệm $x=-1$.

c) Đặt $2^{x^2-x-1}=t$ phương trình đã cho trở thành $2t^2-5t+2=0$

d) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 2.

Câu 4: Cho phương trình $3^{x-5}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+1}}\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x=1$ là nghiệm của phương trình (1).

b) $x=3$ không là nghiệm của phương trình (1).

c) Điều kiện của x để vế phải của (1) có nghĩa là $x\ge -1$.

d) Phương trình (1) có tổng bình phương các nghiệm lớn hơn 30.

Câu 5: Cho phương trình $27^{2x-3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+2}\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình (1) tương đương với phương trình $27^{2x-3}=3^{-x^2+2}$.

b) $x=1$ là một nghiệm của phương trình (1).

c) Phương trình (1) tương đương với phương trình $3^{3(2x-3)}=3^{-x^2-2}$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình (1) bằng 6.

Câu 6: Cho phương trình $4^{x^2}+(m-2).2^{x^2}-2m=0\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m=-1$ thì phương trình (1) có đúng hai nghiệm và hai nghiệm đó trái dấu nhau.

b) Phương trình (1) luôn có ít nhất hai nghiệm.

c) Khi $m<-1$ thì phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

d) Khi phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $x_1>x_2>0>x_3>x_4$; số giá trị nguyên m để $x_1+x_2<3$ là 14.

Câu 7: Cho phương trình $25^x-6.5^x+5\geq 0$ (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x=\dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình (1).

b) $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $t=5^x, (t>0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình $t^2-6t+5\geq 0$.

d) Tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $S=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$

Câu 8: Cho hai biểu thức $f(x)=0{,}1^{x^2-3x+m}$ và $g(x)=10^{1-x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Bất phương trình $g(x)>100$ có tập nghiệm là $(-\infty;3)$.

b) Khi $m=-4$ thì bất phương trình $f(x)<1$ có tập nghiệm là $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

c) Khi $m=2$ thì bất phương trình $f(x)\geq g(x)$ có 3 nghiệm nguyên.

d) $f(x)\leq g(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m\leq 3$.

Câu 9: Cho bất phương trình: $9^x-2(m+1)3^x-3-2m>0$ (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu đặt $t=3^x(t>0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình $t^2-2(m+1)t-3-2m>0$.

b) Bất phương trình (1) luôn có nghiệm $x=0$ với mọi giá trị của tham số m.

c) Với $m=1$ bất phương trình (1) có tập nghiệm là $S=(1;+\infty)$.

d) Có 2 giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^x-2(m+1)3^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi số thực x.

Câu 10: Cho phương trình $\log_2^2(x)=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện của phương trình là $x>0$.

b) $x=2$ là nghiệm của phương trình.

c) Phương trình tương đương với $\log_2 x=1$.

d) Phương trình đã cho chỉ có một nghiệm.

Câu 11: Cho phương trình $\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x>0$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Tổng bình phương các nghiệm là 1.

d) Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Câu 12: Cho hai hàm số $y=\log_2 x, y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2x-1}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=\log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

b) Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2x-1}\right)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=1$.

d) Phương trình $\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2x-1}\right)$ có 2 nghiệm.

Câu 13: Cho phương trình $\log_3\left(3^x-1\right).\log_{27}\left(3^{x+2}-9\right)=m$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 0$.

b) Khi $m=1$ phương trình có một nghiệm là $x=\log_3 2$.

c) Đặt $\log_3\left(3^x-1\right)=t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2+2t-3m=0$.

d) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>-\frac{1}{3}$.

Câu 14: Cho phương trình $\log_2\left(x^2-3x\right)=\log_4\left(x-3\right)^2+2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x<0$ hoặc $x>3$.

b) Phương trình tương đương với $\log_2\left(x^2-3x\right)=\log_2\left(x-3\right)+2$.

c) Phương trình có một nghiệm duy nhất.

d) Tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 32.

Câu 15: Cho phương trình $\log_2\left(x-1\right)-\log_2\left(x^2-5x+m\right)=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $m=0$ điều kiện xác định của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x>5\\x<0\end{array}\right.$.

b) Với $m=0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

c) Với $m=7$ thì tổng các nghiệm của phương trình bằng 6.

d) Với $m<3$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Câu 16: Cho phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ (1) với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình (1) là $x \in [0; +\infty)$.

b) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m \in \mathbb{R}$.

c) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 81$ khi $m = 4$.

d) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt phân biệt trái dấu khi $m < \frac{7}{2}$.

Câu 17: Cho phương trình $3\log_{27}\left[2x^2 - (m+3)x + 1 - m\right] + \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - x + 1 - 3m\right) = 0$ (1) với m là tham số thực. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình (1) tương đương $\log_3\left[2x^2 - (m+3)x + 1 - m\right] = \log_3\left(x^2 - x + 1 - 3m\right)$

b) Khi $m = 0$ thì tích tất cả các nghiệm của phương trình (1) bằng 2.

c) Có 14 giá trị nguyên của m để phương trình (1) có tập xác định là $\mathbb{R}$.

d) Có 21 giá trị nguyên của m trên đoạn $[-20; 20]$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Câu 18: Cho bất phương trình $\log_m\left(x^2 + x + 3\right) \le \log_m\left(2x^2 - x\right)$ (1). Với m là tham số thực dương khác $1, x$ là số thực dương và $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Với $m > 1$ thì bất phương trình $(1) \Leftrightarrow x^2 + x + 3 \ge 2x^2 - x$.

b) Điều kiện của bất phương trình (1) là $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

c) Với $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình (1) suy ra $m > 1$.

d) Gọi $S = (a; b], (a, b \in \mathbb{Q})$ là tập nghiệm của bất phương trình thì $2a + 3b = 10$.

Câu 19: Cho bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - m\right) < \log_{\frac{1}{2}}\left(4x - x^2\right)$ (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vế phải của bất phương trình (1) xác định khi $0 < x < 4$.

b) Với $0 < x < 4$ thì bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình $2x^2 - 4x - m > 0$.

c) Với $m = 6$ thì bất phương trình (1) có tập nghiệm là $S = (3; +\infty)$.

d) Bất phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 2)$ khi $-2 < m < 0$.

Câu 20: Cho bất phương trình $3\log_2^2 2x - 12\log_2 x - 1 - m \ge 0$ $(*)$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện để bất phương trình $(*)$ có nghĩa là $x \ge 0$,

b) Khi $m = 0$ thì $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình $(*)$.

c) Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ khi $m \le -1$.

d) Bất phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in \left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ khi $m \le -\frac{1}{4}$.

Câu 21: Dân số nước ta năm 2023 ước tính là $A = 100,3$ triệu người. *(Nguồn:Tổng Cục Thống Kê https://gso.gov.vn)*. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta là $r = 0,84\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2023) được tính theo công thức: $S = A.e^{rt}$ triệu người. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) Sau 1 năm nữa dân số Việt Nam đạt 101,1 triệu người.

b) Đến năm 2030, dân số Việt Nam ước đạt 120 triệu người.

c) Người ta ước tính rằng, đến năm 2035. Mức sinh của Việt Nam có xu hướng giảm, tỉ lệ tăng dân số hằng năm chỉ còn khoảng $r = 0,4\%$. Dân số Việt Nam vào năm 2040 là hơn 120 triệu người.

d) Dân số nước ta vượt 110 triệu người trong vòng 10 năm nữa.

Câu 22: Cô Minh lần đầu gởi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) Sau 6 tháng cô Minh có tổng số tiền là $104,04$ triệu.

b) Để số tiền nhận được là 150 triệu thì cô Minh phải gởi ngân hàng 18 quý.

c) Sau đúng 6 tháng cô Minh gởi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền cô Minh nhận được 1 năm sau khi gởi thêm tiền gần nhất là 216 triệu

d) Để nhận được số tiền 200 triệu trong 30 tháng với lãi suất như trên thì ban đầu cô Minh phải gởi ít nhất 164 triệu.

Câu 23: Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: $m(t) = m_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ bạn đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã là 138 ngày (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) Sau 138 ngày thì khối lượng Poloni còn lại là $50\,(gam)$

b) Khối lượng Poloni còn lại sau 30 ngày nhiều hơn $85\,(gam)$

c) Kể từ ngày thứ 55 trở đi thì khối lượng Poloni còn lại ít hơn $75\,(gam)$

d) Kể từ ngày thứ 117 trở đi thì khối lượng Poloni mất đi nhiều hơn 80% so với khối lượng Poloni còn lại.

Câu 24: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,6\%$ /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo (thể thức lãi kép) và trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 1 tháng, số tiền cả vốn lẫn lãi là 106 triệu đồng.

b) Sau 2 tháng, số tiền lãi thu được là 1.203.600 đồng.

c) Sau n tháng, số tiền cả vốn lẫn lãi là: $100.\left(1+0,6\%\right)^{n+1}$ (triệu đồng).

d) Để thu được nhiều hơn 10 triệu tiền lãi, cần phải gửi ít nhất 16 tháng.

Câu 25: Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 3 tháng số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được nhiều hơn 101 triệu đồng

b) Sau ít nhất 40 tháng, người đó nhận được tổng số tiền nhiều hơn 125 triệu.

c) Số tiền lãi thu được sau 3 tháng khi gửi lãi suất 0,5% một tháng *nhiều hơn* số tiền lãi thu được sau 4 tháng nếu gửi lãi suất 0,4% một tháng.

d) Tổng số tiền gốc và lãi gấp đôi số tiền ban đầu sau 10 năm.

Câu 26: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đề xi ben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L=10\log\dfrac{I}{I_o}$. Trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét I_o cường độ âm ở ngưỡng nghe $\left(I_o=10^{-12}w/m^2\right)$.

a) Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là 68 dB. Cường độ âm tương ứng ra lớn hơn $6,5.10^{-6}\left(w/m^2\right)$?

b) Hai cây đàn ghi ta giống nhau, cùng hòa tấu một bản nhạc. Mỗi chiếc phtá ra âm có mức âm trung bình là 60 dB. Mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra xấp xỉ $63\,\text{dB}$?

c) Tiếng ồn phát ra ở xưởng cưa ở mức cường độ âm đo được là 93 dB, do 7 chiếc cưa máy giống nhau cùng hoạt động gây ra. Giả sử có 3 chiếc cưa máy đột ngột ngừng hoạt động thì mức cường độ âm trong xưởng lúc này nhỏ hơn 90 dB?

d) Tiếng ồn phát ra từ tiếng phím liên tục ở một bàn phím của máy tính có cường độ âm đo được là $10^{-5}\left(w/m^2\right)$. Giả sử phòng làm việc của một công ty có hai nhân viên văn phòng cùng thực hiện thao tác gõ phím trên hai bàn phím máy tính giống nhau thì mức cường độ âm tổng cộng đo cả hai bàn phím phát ra cùng lúc là 70dB?

Câu 27: Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian (tính bằng cent) giữa hai nốt nhạc có tần số a và b $(a>b)$là $n=1200.\log_2\dfrac{a}{b}$

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008) (Lưu ý: Làm tròn số đến hàng phần mười)

a) Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 443 Hz và 415 Hz là 131 cent.

b) Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 345 Hz và 398 Hz nằm trong khoảng $(246;250)$.

c) Giả sử khoảng thời gian là 230 cent và tần số đầu là 328 Hz thì tần số cuối cùng là $287,2$ Hz.

d) Với tần số đầu không vượt quá 355 Hz và tần số cuối cùng là 384 Hz thì khoảng thời gian chênh lệnh giữa hai nốt nhạc không vượt quá 178 cent.

Câu 28: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng 1 tỷ đồng (với lãi suất $0,5\%$/tháng, lãi tính theo từng tháng và cộng dồn vào gốc). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) 8 tháng sau người đó lấy về tất cả số tiền cả gốc và lãi là $1.020.175.878$ đồng.

b) 2 năm sau thì người đó thu được số tiền số tiền cả gốc và lãi là $1.127.159.776$ đồng.

c) Kể từ lúc gửi sau mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi người đó rút 10 triệu đồng để chi tiêu (nếu tháng cuối cùng không đủ 10 triệu thì rút hết) thì đến 139 tháng người đó rút hết tiền trong tài khoàn.

d) Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành $1,15\%$ / tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn $0,9\%$ / tháng. Người đó tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được $1.143.816.503$ đồng. Vậy người đó gửi tiền vào ngân hàng với tổng thời gian là 16 tháng.

Câu 29: Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng. Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là $A = P(1-r\%)^n$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại là $86.490.000$ đồng.

b) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại $96.490.000$ đồng.

c) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau ba năm chỉ còn lại 80 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của ba năm đó là $9,17\%$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

d) Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là 6% một năm thì sau ít nhất 15 năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại không quá một nửa.

Câu 30: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con.

a) Phương trình thể hiện tỷ lệ tăng trưởng là $300 = 100.e^{5r}$

b) Tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $r = \ln\dfrac{3}{5}$ mỗi giờ.

c) Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.\frac{\ln 3}{5}} = 900$ con.

d) Phải cần ít nhất 20 giờ để số con vi khuẩn lớn hơn 10000 con.

Câu 31: Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililít nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 4000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là 1000. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) α nằm trong khoảng $(1,2)$.

b) Sau 3 giờ 30 phút thì lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước ít hơn 500.

c) Lượng vi khuẩn mất đi trong mỗi mililít trong khoảng thời gian từ 1 giờ đến 2,5 giờ tính từ lúc dùng thuốc thì lớn hơn 1200.

d) Lượng vi khuẩn sau khoảng 1,32 giờ sẽ bằng 40% lượng vi khuẩn ban đầu.

Câu 32: Ông A đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi. Lãi suất được cho là không đổi trong suốt thời gian vay tiền. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền cả gốc và lãi ông A rút về sau một năm lớn hơn 850 triệu đồng?

b) Ông A định dùng tiền lãi sau 2 năm để mua chiếc xe SH trị giá 100 triệu đồng. Sau đúng 2 năm tiền lãi thu được đủ để ông A mua chiếc xe đó.

c) Sau ít nhất 45 tháng thì số tiền thu về cả gốc lẫn lãi lớn hơn 1 tỷ đồng?

d) Sau khi gửi, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Một năm sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại ít hơn 776 triệu đồng?

Câu 33: Ông Xuân gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng theo phương thức lãi kép với lãi suất cố định là $0,5\%$ một tháng. Cùng thời điểm đó, ông Thắng gửi 10 triệu đồng mỗi tháng vào ngân hàng đó theo phương thức lãi kép với lãi suất cố định là $0,5\%$ một tháng. (Các kết quả trong khẳng định **a)** và **c)** làm tròn đến hàng nghìn). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền cả gốc và lãi ông Xuân nhận được sau 10 tháng là 210228000.

b) Sau ít nhất 81 tháng thì số tiền (cả gốc và lãi) của ông Xuân nhiều hơn 300 triệu đồng.

c) Sau 1 năm số tiền cả gốc và lãi trong ngân hàng của ông Thắng là 123972000.

d) Sau ít nhất 22 tháng thì số tiền của ông Thắng lớn hơn số tiền của ông Xuân.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Chú Thanh gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 4%/năm. Biết rằng lãi kép là hình thức gửi tiền, nếu đến kỳ hạn người gửi không rút tiền lãi thì số tiền lãi sẽ được cộng dồn vào tiền vốn cho kỳ tiếp theo. Hãy tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 8 năm.

Câu 2: Chất phóng xạ polonium ${}^{210}Po$ có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong mẫu chỉ còn lại một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium ${}^{210}Po$ còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}(g)$. Điều kiện về thời gian để mẫu chất ngày còn lại không nhiều hơn 25 g là

Câu 3: Chú Việt gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 5%/năm. Biết rằng lãi kép là hình thức gửi tiền, nếu đến kỳ hạn người gửi không rút tiền lãi thì số tiền lãi sẽ được cộng dồn vào tiền vốn cho kỳ tiếp theo. Hãy tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm.

Câu 4: Mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L=10\log\left(\frac{I}{I_o}\right)(dB)$, trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_o=10^{-12}\ W/m^2$. Biết rằng mức cường độ âm lớn nhất mà tai người có thể nghe được là 130 dB. Điều kiện của cường độ âm để tai người không bị tổn thương là

Câu 5: Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ radi ${}^{226}Ra$ là 1602 năm (tức là một lượng ${}^{226}Ra$ sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S=A.e^{-r.t}$ trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $(r<1)$, t là thời gian phân hủy, s là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam ${}^{226}Ra$ sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?

Câu 6: Số lượng của loại vi khuẩn C trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t)=S(0).5^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn C lúc ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn C có sau t phút. Biết sau 4 phút thì số lượng vi khuẩn C là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn C là 390625000 con?

Câu 7: Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutolium ${}^{239}Pu$ là 24360 năm (tức là một lượng chất ${}^{239}Pu$ sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S=Ae^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 20 gam ${}^{239}Pu$ sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam?

Câu 8: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) theo công thức $P=P_0.e^{kx}$ (mmHg),trong đó x là độ cao (đo bằng mét), $P_0=760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển $(x=0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71$ (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao 3000 m.

Câu 9: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức: $m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t=0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Giả sử khối lượng còn lại của 250 gam chất đó sau t ngày là 23 gam, xác định t.

Câu 10: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$, t là thời gian tăng trưởng). Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Để số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng t bằng bao nhiêu?

Câu 11: Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Một vật có khối lượng Cacbon ^{14}C ban đầu là m_0 thì sau khoảng thời gian t năm, khối lượng Cacbon ^{14}C còn lại của vật đó là $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Các nhà khảo cổ đã tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác đinh được nó đã mất khoảng 25% lượng Cacbon ^{14}C ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

Câu 12: Biết rằng năm 2023, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nt}$ (trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm), cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

Câu 13: Biết rằng nếu gọi các loại cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây xanh đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng dừng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp và chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5750}}(\%)$. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%. Hãy xác định niên đại của công trình đó.

Câu 14: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log\frac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A = 3$ (Ben) và $L_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

Câu 15: Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M = \log\frac{A}{A_0}$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỉ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Tính cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ.

Câu 16: Thang đo Richte được Charles Francis đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị Richte. Công thức tính độ chấn động như sau: $M_L = \log A - \log A_o$, M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa được đo bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn. Hỏi theo thang độ Richte, cùng với một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một chận động đất 7 độ Richte sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richte?

Câu 17: Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ Trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $2°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $5°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái đất tăng thêm $t°C$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t)=k.a^t$ trong đó k,a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu độ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%?

Câu 18: Vào năm 1938, nhà vật lí Frank Benford đã đưa ra công thức ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của một bộ số trong tự nhiên (ví dụ: độ dài một con sông, chiều cao một tòa nhà, lợi nhuận một công ty, các hằng số vật lý cơ bản…).

Trích nguồn https://vi.wikipedia.org/wiki/Lu%E1%BA%ADt_Benford

$$P(d)=\log\left(1+\frac{1}{d}\right)$$

Chữ số có xác suất bằng $12,5\%$ được chọn là

Câu 19: Năm 2023, hãng xe ô tô Vinfast niêm yết giá bán loại xe điện VF8 là $850.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2028 Vinfast niêm yết giá bán loại xe điện VF8 là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Câu 20: Thang Richter, một hàm logarit được sử dụng để đo cường độ của các trận động đất. Cường độ của một trận động đất có liên quan đến lượng năng lượng được giải phóng bởi trận động đất. Dụng cụ gọi là địa chấn phát hiện chuyển động trong trái đất; chuyển động nhỏ nhất có thể được phát hiện sẽ hiển thị trên máy đo địa chấn dưới dạng sóng có biên độ A0.
A – thước đo biên độ của sóng động đất

A0 – biên độ của sóng nhỏ nhất có thể phát hiện được (hoặc sóng chuẩn)

Từ đó, bạn có thể tìm thấy R, thước đo độ Richter về cường độ của trận động đất bằng côngthức:

$$R=\log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

Cường độ của một trận động đất thường sẽ đo được từ 2 đến 10 độ Richter. Bất kỳ trận động đất nào đăng ký dưới 5 là khá nhỏ; chúng có thể làm rung chuyển mặt đất một chút, nhưng hiếm khi đủ mạnh để gây ra nhiều thiệt hại. Các trận động đất có cường độ từ 5 đến 7,9 độ Richter thường nghiêm trọng hơn nhiều và bất kỳ trận động đất nào trên 8 độ Richter đều có khả năng gây ra thiệt hại lớn. (Đánh giá cao nhất từng được ghi nhận cho một trận động đất là 9,5 trong trận động đất Valdivia năm 1960 ở Chile.)

(Nguồn: Mathematical Modeling with Exponential and Logarithmic Functions (nroc.org))

Nếu biên độ của sóng động đất đo được gấp 256 lần biên độ của sóng nhỏ nhất thì máy sẽ đo được độ lớn là

Câu 21: Sau khi tốt nghiệp đại học, anh Nam thực hiện một dự án khởi nghiệp. Anh vay vốn từ ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất $0,6\%$ một tháng. Phương án trả nợ của Nam là sau đúng một tháng kể từ thời điểm vay anh tao bắt đầu trả nợ, hai lần liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền trả của mỗi lần là như nhau và hoàn thành sau đúng 5 năm kể từ khi vay. Tuy nhiên sau khi dự án có hiệu quả và trả nợ được 12 tháng theo phương án cũ, anh Nam muốn rút ngắn thời gian trả nợ nên từ tháng tiếp theo, mỗi tháng anh trả nợ cho ngân hàng 9 triệu đồng. Biết rằng ngân hàng chỉ tính tiền lãi trên số dưnợ thực tế của tháng đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng từ thời điểm vay anh Nam trả hết nợ?

Câu 22: Mùa hè năm 2023, để chuẩn bị cho "học kì quân đội" dành cho các bạn nhỏ, một đơn vị bộ đội chuẩn bị thực phẩm cho các bạn nhỏ, dự kiến đủ dùng trong 45 ngày (năng suất ăn của mỗi ngày là như nhau). Nhưng bắt đầu từ ngày thứ 11, do số lượng thành viên tham gia tăng lên, nên lượng tiêu thụ thực phẩm tăng lên 10% mỗi ngày (ngày sau tăng 10% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn đó đủ dùng cho bao nhiêu ngày?

-----------------HẾT-----------------

CHƯƠNG 6

HÀM SỐ MŨ
HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 01 LŨY THỪA VỚI MŨ SỐ THỰC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

- Với a là số thực tuỳ ý: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thua so?}}$.
- Với a là số thực khác 0: $a^0 = 1$; $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Trong biểu thức a^m, a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

Lưu ý: 0^0 và $0^{-n}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ không có nghĩa.

Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

- Với $a \neq 0, b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}; \quad (ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Chú ý:

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

2 Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a và số nguyên dương n. Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét:

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a.
- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

Lưu ý: $\sqrt[n]{0}=0\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Giả sử n,k là các số nguyên dương, m là số nguyên. Khi đó:

$\oplus$ $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

$\oplus$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}};$

$\oplus$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m};$

$\oplus$ $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & khi\ \ n\ \ le \\ |a| & khi\ \ n\ \ chan \end{cases}$

$\oplus$ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$

(Giả thiết các biểu thức ở trên đều có nghĩa).

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r=\dfrac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương.

Luỹ thừa của a với số mũ r, kí hiệu là a^r, xác định bởi $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Chú ý: Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

3 Lũy thừa với số mũ thực

Khái niệm luỹ thừa với số mũ thực

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ $\left(r_n\right)$ mà $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=\alpha$. Khi đó, dãy số $\left(a^{r_n}\right)$ có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ $\left(r_n\right)$ đã chọn. Giới hạn đó gọi là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^α.

$$a^\alpha=\lim_{n\to+\infty}a^{r_n}$$

Chú ý: Luỹ thừa với số mũ thực (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp: Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa. Chọn $a;b$ là các số thực dương và $\alpha;\beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

⊕ $a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$ ⊕ $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$ ⊕ $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha.\beta}$

⊕ $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}.b^{\alpha}$ ⊕ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$ ⊕ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\alpha}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) Cho hai số thực x,y thỏa mãn $4^{x}=5;4^{y}=3$. Tính 4^{x+y}

b) Cho a là số thực dương thỏa mãn $a^{2b}=3$. Tính $K=2a^{6b}+4$.

c) Tính $P=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+(0,25)^{\frac{-5}{2}}$

d) Biết rằng α ; β là các số thực thỏa mãn $2^{\beta}\left(2^{\alpha}+2^{\beta}\right)=8\left(2^{-\alpha}+2^{-\beta}\right)$. Tính $\alpha+2\beta$

Lời giải

a) $4^{x+y}=4^{x}.4^{y}=5.3=15$.

b) Ta có: $K=2a^{6b}+4=2\left(a^{2b}\right)^{3}+4=58$.

c) Ta có: $P=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+(0,25)^{\frac{-5}{2}}=\left(2^{-4}\right)^{\frac{-3}{4}}+\left(2^{-2}\right)^{\frac{-5}{2}}=2^{3}+2^{5}=40$.

d) Ta có: $2^{\beta}\left(2^{\alpha}+2^{\beta}\right)=8\left(2^{-\alpha}+2^{-\beta}\right)\Leftrightarrow 2^{\beta}\left(2^{\alpha}+2^{\beta}\right)=8\left(\dfrac{2^{\alpha}+2^{\beta}}{2^{\alpha+\beta}}\right)\Leftrightarrow 2^{\beta}.2^{\alpha+\beta}=8$

$\Leftrightarrow 2^{\alpha+2\beta}=2^{3}\Leftrightarrow \alpha+2\beta=3$.

Bài tập 2: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) Tính giá trị của biểu thức $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-0,2}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

b) Tính giá trị biểu thức $A=3\left(3^{3x}+3^{-3x}\right)$ biết $3^{x}+3^{-x}=4$.

c) Tính giá trị của biểu thức $A=\left(5^{\frac{-2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$

d) Tính $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2021}.\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2000}$.

e) Biết $4^x+4^{-x}=23$. Tính giá trị của biểu thức $P=2^x+2^{-x}$

Lời giải

a) Ta biến đổi $\left(\frac{1}{32}\right)^{-0,2}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(2^{-5}\right)^{-0,2}+\left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}}=2^1+2^4=18$.

b) Ta có:

$3^x+3^{-x}=4\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^3=4^3\Leftrightarrow 3^{3x}+3^{-3x}+3.3^x.3^{-x}\left(3^x+3^{-x}\right)=64\Rightarrow 3^{3x}+3^{-3x}=52$.

Vậy $A=3\left(3^{3x}+3^{-3x}\right)=3.52=156$.

c) $A=\left(5^{\frac{-2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}=(5)^{\frac{(-2)}{5}.(-5)}+\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}.(-4)}=5^2+\left((5)^{-1}\right)^{-3}=5^2+5^3=25+125=150$.

d) Ta có $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2021}.\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2000}=\left(7+4\sqrt{3}\right).\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2000}.\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2000}$.

$=\left(7+4\sqrt{3}\right).\left[\left(7+4\sqrt{3}\right).\left(7-4\sqrt{3}\right)\right]^{2000}=\left(7+4\sqrt{3}\right).1^{2000}=7+4\sqrt{3}$.

e) Ta có: $4^x+4^{-x}=23\Leftrightarrow 2^{2x}+2+2^{-2x}=25\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=25\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=5$

(Do $2^x+2^{-x}>0$). Vậy $P=2^x+2^{-x}=5$.

Bài tập 3: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) Biết $9^x+9^{-x}=23$. Tính giá trị của biểu thức $P=3^x+3^{-x}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}$

c) Cho $9^x+9^{-x}=47$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{13+3^x+3^{-x}}{2-3^x-3^{-x}}$

Lời giải

a) $P=3^x+3^{-x}\Leftrightarrow P^2=9^x+9^{-x}+2=25\Rightarrow P=5$.

b) Ta có $P=\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}=\dfrac{2^2+5}{10^{-1}-1}=\dfrac{4+5}{\frac{1}{10}-1}=-10$.

c) Ta có $\left(3^x+3^{-x}\right)^2=9^x+9^{-x}+2\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^2=49\Leftrightarrow 3^x+3^{-x}=7$.

Do vậy $P=\dfrac{13+3^x+3^{-x}}{2-3^x-3^{-x}}=\dfrac{13+3^x+3^{-x}}{2-\left(3^x+3^{-x}\right)}=\dfrac{13+7}{2-7}=-4$. Vậy $P=\dfrac{13+3^x+3^{-x}}{2-3^x-3^{-x}}=-4$.

Dạng 2: Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp: Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa. Chọn $a;b$ là các số thực dương và $\alpha;\beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

⊕ $a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$ ⊕ $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$ ⊕ $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha.\beta}$

⊕ $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}.b^{\alpha}$ ⊕ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$ ⊕ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\alpha}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}\,(x>0)$ b) $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$ (với a,b là hai số thực dương)

Lời giải

a) $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}=\sqrt[3]{x.x^{\frac{1}{4}}}=\sqrt[3]{x^{\frac{5}{4}}}=x^{\frac{5}{12}}$.

b) $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}=\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}}=\sqrt[5]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{5}{6}}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức sau với a,b là các số thực dương:

a) $P=a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a}$ b) $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$

c) $M=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0,a\neq 1$. d) $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$

e) $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ f) $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$

Lời giải

a) Ta có $P=a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{11}{6}}$.

b) $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{\sqrt[7]{a^{-2}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{7}{3}}}{a^{-\frac{2}{7}}}=a^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+\frac{2}{7}}=a^{\frac{30}{7}}$

c) Ta có $M=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(a^{\frac{3}{8}}-a^{-\frac{1}{8}}\right)}=\dfrac{a^{0}-a}{a^{\frac{1}{2}}-a^{0}}=\dfrac{1-a}{\sqrt{a}-1}=-\left(\sqrt{a}+1\right)$.

d) Ta có: $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\dfrac{a^3b^2}{\left(\left(a^{12}b^6\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^3b^2}{\left(a^{12}b^6\right)^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{a^3b^2}{a^2b}=ab$.

e) Ta có: $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}$.

f) $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{b^3}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\dfrac{\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{b^2a^3}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\dfrac{\sqrt[6]{a^2b^2}\left(\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{a}\right)}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$

$=\sqrt[6]{a^2b^2}=\sqrt[3]{ab}$.

Bài tập 3: Thực hiện các yêu cầu sau đây:

a) Rút gọn biểu thức $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$

b) Cho x,y là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$

c) Cho số thực $a>0$ và $a\neq 1$. Hãy rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}$

d) Cho x,y là các số thực dương và $x\neq y$.Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{\left(x^{2x}+y^{2x}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{2x}}xy\right)^{2x}}$

Lời giải

a) Dựa vào hằng đẳng thức thứ ba ta có

$K=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)=\left[\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\sqrt{X}\right]\left(x-\sqrt{x}+1\right)$

$=\left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)=\left[\left(x+1\right)^2-x\right]=x^2+x-1$.

b) Viết biểu thức K dưới dạng: $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(1-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^{-2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2}=x$

c) Ta có $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{7}{12}}\left(1-a\right)}=\dfrac{a^{\frac{5}{6}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{5}{6}}\left(1-a\right)}=1+a$

d) $S=\sqrt{x^{4x}+2\left(xy\right)^{2x}+y^{4x}-4\left(xy\right)^{2x}}=\sqrt{x^{4x}-2\left(xy\right)^{2x}+y^{4x}}$

$=\sqrt{\left(x^{2x}-y^{2x}\right)^{2x}}=\left|x^{2x}-y^{2x}\right|$

Dạng 3: So sánh các lũy thừa

Phương pháp: Sử dụng kiến thức cơ bản để so sánh

- Nếu $a>1$ thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi $m>n$.
- Nếu $0<a<1$ thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi $m<n$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh:

a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

a) Nếu $x>y>0$ và $a>1$, thì $a^x>a^y$.

Áp dụng bất đẳng thức này với $x=3\sqrt{2}, y=1$, và $a=5$ ta được: $5^{3\sqrt{2}}>5^1=5$

Vậy $5^{6\sqrt{3}}>5^{3\sqrt{6}}$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(2^{-1}\right)^{-\frac{4}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$

Với $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{2}{3}}$ ta có thể viết lại thành $2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{7}{6}}$ $2^{\frac{4}{3}}<2^{\frac{7}{6}}$.

Vậy $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}<\sqrt{2}.2^{\frac{2}{3}}$.

Bài tập 2: Tìm điều kiện của a để $(2a-3)^{-3}\ge(2a-3)^{-7}$?

Lời giải

Điều kiện $2a-3\ne 0\Leftrightarrow a\ne\frac{3}{2}$

Trường hợp 1: nếu $2a-3>0\Leftrightarrow a>\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}(2a-3)^{-3}\ge(2a-3)^{-7}\\-3>-7\end{cases}\Rightarrow 2a-3\ge 1\Leftrightarrow a\ge 2$

Trường hợp 2: nếu $2a-3<0\Rightarrow 3-2a>0$

$(2a-3)^{-3}\ge(2a-3)^{-7}\Leftrightarrow-(3-2a)^{-3}\ge-(3-2a)^{-7}\Leftrightarrow(3-2a)^{-7}\ge(3-2a)^{-3}$

$\Rightarrow\begin{cases}(3-2a)^{-7}\ge(3-2a)^{-3}\\-7<-3\end{cases}\Rightarrow 0<3-2a\le 1\Leftrightarrow 1\le a<\frac{3}{2}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $\left[\begin{array}{l}1\le a<\frac{3}{2}\\a\ge 2\end{array}\right.$

Bài tập 3: Với những giá trị nào của a thì

a) $a^e>a^\pi$ b) $(a-1)^2>(a-1)^{\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $a > 0$. Vì $\begin{cases} e < \pi \\ a^e > a^\pi \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$ nên $0 < a < 1$.

b) Điều kiện: $a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Vì $\begin{cases} 2 < \sqrt{5} \\ (a-1)^2 > (a-1)^{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 2$ nên $1 < a < 2$.

Bài tập 4: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Cho $A = 199^{2023}$; $B = \sqrt{199}^{2024}$. So sánh A, B.

b) Sắp theo $A = 3^{4999}$, $B = 11^{4001}$ và $C = 1331^{1000}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

Lời giải

a) $B = \sqrt{199}^{2024} = 199^{\frac{1}{2}.2024} = 199^{1012}$

Ta có $199 > 1$ nên $\Rightarrow 199^{2023} > 199^{1012} \Rightarrow A > B$ nên ta suy ra $A > B$.

b) $C = 1331^{1000} = \left(11^3\right)^{1000} = 11^{3000}$

Ta có: $11 > 1; 11^{4001} > 11^{2000} \Rightarrow B > C$

Lại có: $3^{4999} < 3^{5000} = \left(3^5\right)^{1000} = 243^{1000} < 1331^{1000} \Rightarrow A < C$

Vậy $B > C > A$.

Bài tập 5: So sánh ba số sau: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,2}$

Lời giải

Ta có: $(0,2)^{0,3} = (0,2)^{\frac{3}{10}} = \left[(0,2)^3\right]^{\frac{1}{10}} = (0,008)^{\frac{1}{10}}$.

$(0,7)^{3,2} = (0,7)^{\frac{32}{10}} = \left[(0,7)^{32}\right]^{\frac{1}{10}}$.

$\sqrt{3}^{0,2} = (3)^{\frac{1}{2}.\frac{2}{10}} = 3^{\frac{1}{10}}$.

Do $(0,7)^{32} < 0,008 < 3$ nên $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2}$.

$10^7 = 78125.2^t \Rightarrow t = \log_2\left(\frac{10^7}{78125}\right) = 7$.

Dạng 4: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Phương pháp: Bài toán lại kép

Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ. Công thức: $T_n = T_0(1+r)^n$

Trong đó:

T_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
T_0: Số tiền gửi ban đầu;
n: Số kỳ hạn tính lãi;
r: Lãi suất định kỳ, tính theo %.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm $r(r$ được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau: $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^N$. Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

Lời giải

Với số tiền gốc $P = 120$ triệu đồng, lãi suất $r = 0.05$ (vì lãi suất được biểu thị dưới dạng số thập phân), và số kỳ gửi trong một năm $n = 2$ (vì một năm có 2 kỳ gửi 6 tháng), số kỳ gửi trong 2 năm là $N = 4$.

Áp dụng công thức tính lãi suất kép: $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^N = 120\left(1+\frac{0.05}{2}\right)^4 \approx 136.047$ triệu đồng.

Vậy sau 2 năm, bác An sẽ nhận được khoản tiền là khoảng 136.047 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Bài tập 2: Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

Lời giải

Sau 30 năm, dân số của quốc gia sẽ tăng gấp đôi, tức là sẽ đạt mức 38 triệu người. Ta có công thức tính tỉ số tăng trưởng dân số là: $2 = 2^{\frac{t}{30}}$

Từ đó, ta có thể tìm được số năm tương ứng với tốc độ tăng dân số như vậy là:

$$\frac{t}{30} = \log_2 2 = 1 \Rightarrow t = 30.$$

Vậy sau 30 năm kể từ năm 2021, tức là năm 2051, dân số của quốc gia này sẽ đạt mức 38 triệu người.

Để tính dân số sau 20 năm kể từ năm 2021, ta có thể tính tỉ số tăng trưởng dân số trong 20 năm nhưr sau: $2^{\frac{20}{30}} = 2^{\frac{2}{3}}$

Vậy dân số của quốc gia này sau 20 năm, tức là năm 2041, sẽ đạt mức: $19\times 2^{\frac{2}{3}}\approx 27.076$ triệu người

Bài tập 3: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức $S=A.\mathrm{e}^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Số lượng vi khuẩn sau 10 giờ là

Lời giải

Số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con nên ta có

$300=100.\mathrm{e}^{5r}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{5r}=3\Leftrightarrow 5r=\ln 3\Leftrightarrow r=\frac{1}{5}\ln 3$.

Số lượng vi khuẩn sau 10 giờ là

$S_{10}=100.\mathrm{e}^{10r}=100.\mathrm{e}^{10.\frac{1}{5}\ln 3}=100.\mathrm{e}^{2.\ln 3}=100.\mathrm{e}^{\ln 9}=100.9=900$ (con).

Bài tập 4: Cho biết đầu năm 2018 dân số Việt Nam là 93,7 triệu và tỉ lệ tăng dân số hằng năm là 1,2%. Giả sử rằng tỉ lệ tăng dân số từ năm 2018 đến năm 2030 không thay đổi thì dân số nước ta đầu năm 2030 khoảng bao nhiêu (Biết dân số Việt Nam được tính theo công thức $S=A.e^{ni}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là số dân sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số.

Lời giải

Ta có $S=A.e^{ni}=93,7.e^{12.0,012}=108,21$ triệu dân.

Bài tập 5: Dân số Việt Nam được ước tính theo công thức $S=Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2020, Việt Nam có khoảng $97,76$ triệu người và tỉ lệ tăng dân số là $1,14\%$. Hỏi năm 2030 Việt Nam sẽ có bao nhiêu triệu người nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Áp dụng công thức $S=Ae^{ni}$ ta có dân số năm 2030 là:

$$S=97,76.\mathrm{e}^{10.1,14\%}=109,56 \text{ (triệu người)}.$$

Bài tập 6: Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S=A.e^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017 dân số Việt Nam là 93671600 người Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $0,81\%$, dự báo dân số Việt Nam năm 2030 là bao nhiêu người?

(Tổng cục thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr. 79).

Lời giải

Ta có $S=A.e^{nr}=93671600.e^{13.0,0081}\approx 104073257$.

Bài tập 7: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền bao nhiêu, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép ta có sau đúng 6 tháng, người đó lĩnh được số tiền:

Ta có: $A_n = A_0(1+r)^n = 100.000.000\left(1+\dfrac{0,4}{100}\right)^6 = 102.424.128$

Bài tập 8: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho $200\,000\,000$ VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $243\,101\,250$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi lãi suất kỳ hạn một năm của ngân hàng MSB là r. Áp dụng công thức lãi suất kép $P = a\left(1+r\right)^n$ trong đó ta có :

$$243101250 = 200000000\left(1+r\right)^4 \Leftrightarrow \left(1+r\right)^4 = \frac{243101250}{200000000}$$

$$\Leftrightarrow 1+r = \sqrt[4]{\frac{243101250}{200000000}} \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{\frac{243101250}{200000000}} - 1 \Leftrightarrow r = 0,05.$$

Bài tập 9: Ông Đại mới xin được việc làm nên gửi tiết kiệm vào ngân hàng với hình thức cứ mỗi đầu tháng đóng vào 5 triệu đồng với lãi suất 0,33%/ tháng. Tính số tiền mà ông Đại thu được từ ngân hàng sau 5 năm.

Lời giải

Với a là số tiền ông Đại đóng vào hằng tháng, $r\%$ lãi suất ông Đại gửi tiết kiệm hằng tháng.

Gọi P_n là số tiền mà ông Đại thu được sau n tháng $\left(n \ge 1\right)$.

Suy ra

$P_1 = a.\left(1+r\%\right)$.

$P_2 = \left(P_1 + a\right)\left(1+r\%\right) = a.\left(1+r\%\right)^2 + a.\left(1+r\%\right)$

$P_3 = \left(P_2 + a\right)\left(1+r\%\right) = a.\left(1+r\%\right)^3 + a.\left(1+r\%\right)^2 + a.\left(1+r\%\right)$

……………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………

$P_n = \left(P_{n-1} + a\right)\left(1+r\%\right) = a.\left(1+r\%\right)^n + a.\left(1+r\%\right)^{n-1} + ... + a.\left(1+r\%\right)$

Xét cấp số nhân có số hạng đầu là $u_1 = a.\left(1+r\%\right)$ và công bội $q = 1+r\%$ thì $P_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Vậy số tiền ông Đại nhận được từ ngân hàng sau 5 năm là

$$P_{60} = u_1\frac{1-q^{60}}{1-q} = 5.\left(1,0033\right).\frac{1-\left(1,0033\right)^{60}}{0,0033} \approx 332 \text{ triệu đồng.}$$

Bài tập 10: Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền $100\,000\,000$ đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là $1,2\%$ và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

Lời giải

Gọi m, r, T_n, a lần lượt là số tiền vay ngân hàng, lãi suất hàng tháng, tổng số tiền vay còn lại sau n tháng, số tiền trả đều đặn mỗi tháng.

Sau khi hết tháng thứ nhất $\left(n=1\right)$ thì còn lại: $T_1 = m\left(r+1\right) - a$.

Sau khi hết tháng thứ hai $(n=2)$ thì còn lại: $T_2=\left[m(r+1)-a\right](r+1)-a$

$=m(r+1)^2-a(r+1)-a=m(r+1)^2-a(r+2)=m(r+1)^2-\dfrac{a}{r}\left[(r+1)^2-1\right].$

Sau khi hết tháng thứ ba $(n=3)$ thì còn:

$T_3=\left[m(r+1)^2-\dfrac{a}{r}\left[(r+1)^2-1\right]\right](r+1)-a=m(r+1)^3-\dfrac{a}{r}\left[(r+1)^3-1\right].$

Sau khi hết tháng thứ n thì còn lại: $T_n=m(r+1)^n-\dfrac{a}{r}\left[(r+1)^n-1\right]$

Áp dụng công thức trên, ta có $T_n=0\Leftrightarrow a=\dfrac{m(r+1)^n r}{(r+1)^n-1}=\dfrac{12.10^5\left(\dfrac{1,2}{100}+1\right)^{60}}{\left(\dfrac{1,2}{100}+1\right)^{60}-1}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ bằng:

A. $a^{\frac{3}{2}}$. **B.** $a^{\frac{-2}{3}}$. **C.** $a^{\frac{2}{3}}$. **D.** $a^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải

Với $a>0$, ta có $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt{a.a^{\frac{1}{3}}}=\sqrt{a^{\frac{4}{3}}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Câu 2: Cho các số thực $a, b, m, n\ (a, b>0)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a^m.a^n=a^{m+n}$. **B.** $\left(a^m\right)^n=a^{m+n}$.

C. $(a+b)^m=a^m+b^m$. **D.** $\frac{a^m}{a^n}=\sqrt[n]{a^m}$.

Lời giải

Theo tính chất của lũy thừa ta có: $a^m.a^n=a^{m+n}$.

Câu 3: Cho $a=\frac{1}{256}$ và $b=\frac{1}{27}$. Tính $A=a^{-\frac{3}{4}}+b^{-\frac{4}{3}}$

A. 23. **B.** 89. **C.** 145. **D.** 26.

Lời giải

Thay $a=\frac{1}{256}$, $b=\frac{1}{27}$ vào $A=a^{-\frac{3}{4}}+b^{-\frac{4}{3}}$ ta được

$$A=a^{-\frac{3}{4}}+b^{-\frac{4}{3}}=\left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(4^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(3^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}}=4^3+3^4=145.$$

Câu 4: Với a là số thực dương, biểu thức $P=a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** $a^{\frac{2}{5}}$. **C.** $a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $a^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải

$P=a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}$.

Câu 5: Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P=a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}$ bằng:

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** a^5. **C.** $a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

$P=a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}$.

Câu 6: Giá trị $\sqrt[3]{2021}.\sqrt[5]{2021}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $2021^{\frac{2}{5}}$ **B.** $2021^{\frac{1}{15}}$ **C.** $2021^{\frac{8}{15}}$ **D.** $2021^{\frac{1}{10}}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt[3]{2021}.\sqrt[5]{2021}=(2021)^{\frac{1}{3}}.(2021)^{\frac{1}{5}}=(2021)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=(2021)^{\frac{8}{15}}$.

Câu 7: Cho a là một số thực dương. Viết biểu thức $P=a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a^2}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $P=a^{\frac{2}{5}}$. **B.** $P=a^{-\frac{1}{15}}$. **C.** $P=a^{\frac{1}{15}}$. **D.** $P=a^{\frac{19}{15}}$.

Lời giải

Ta có $P=a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{3}{5}}.a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}=a^{\frac{19}{15}}$.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P=\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\,(x>0)$ bằng

A. $x^{\frac{4}{3}}$. **B.** $x^{\frac{1}{2}}$. **C.** $x^{\frac{1}{6}}$. **D.** $x^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

$P=\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=\sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}$.

Câu 9: Cho a là số thực dương khác 1, biểu thức $a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $a^{\frac{14}{15}}$. **B.** $a^{\frac{2}{15}}$. **C.** $a^{\frac{1}{15}}$. **D.** $a^{\frac{17}{3}}$.

Lời giải

Với a là số thực dương ta có $a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a}=a^{\frac{3}{5}}.a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{5}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{14}{15}}$

Câu 10: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\sqrt{10^{\alpha}}=\left(\sqrt{10}\right)^{\alpha}$. **B.** $\left(10^{\alpha}\right)^2=10^{\alpha^2}$. **C.** $\left(10^{\alpha}\right)^2=(100)^{\alpha}$. **D.** $\sqrt{10^{\alpha}}=10^{\frac{\alpha}{2}}$.

Lời giải

Công thức đúng: $\left(10^{\alpha}\right)^2=10^{2\alpha}$.

Câu 11: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\left(5^{\alpha}\right)^2=25^{\alpha}$. **B.** $\left(5^{\alpha}\right)^2=5^{\alpha^2}$. **C.** $\sqrt{5^{\alpha}}=\left(\sqrt{5}\right)^{\alpha}$. **D.** $\sqrt{5^{\alpha}}=5^{\frac{\alpha}{2}}$.

Lời giải

Ta có: $\left(5^{\alpha}\right)^2=25^{\alpha}=5^{2\alpha}$ và $\sqrt{5^{\alpha}}=\left(\sqrt{5}\right)^{\alpha}=5^{\frac{\alpha}{2}}$.

Câu 12: Cho a là số thực dương. Giá trị của biểu thức $P=a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** $a^{\frac{7}{6}}$. **C.** a^5. **D.** $a^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải

$P=a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}=a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{6}}$.

Câu 13: Nếu $a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{3}}>b^{\sqrt{5}}$ thì

A. $a<1;0<b<1$. **B.** $a>1;b<1$. **C.** $0<a<1;b<1$ **D.** $a>1;0<b<1$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{3}>\frac{1}{6}$, lại có $a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{6}}\Rightarrow a>1$.

Ta có: $\sqrt{3}<\sqrt{5}$, lại có $b^{\sqrt{3}}>b^{\sqrt{5}}\Rightarrow 0<b<1$.

Câu 14: Xét α,β là hai số thực bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3^{\alpha}>3^{\beta}\Leftrightarrow\alpha=\beta$. **B.** $3^{\alpha}>3^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$. **C.** $3^{\alpha}>3^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$. **D.** $3^{\alpha}<3^{\beta}\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

Lời giải

Ta có $3^{\alpha}>3^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Câu 15: Cho $a>1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{a^{2016}}<\frac{1}{a^{2017}}$. **B.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **C.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **D.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$.

Lời giải

Vì $a>1$ nên $a^{\sqrt{3}}<a^{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{1}{a^{\sqrt{3}}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Rightarrow a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Câu 16: So sánh hai số m và n nếu $\left(\sqrt{3}-1\right)^m<\left(\sqrt{3}-1\right)^n$.

A. Không so sánh được. **B.** $m<n$. **C.** $m=n$. **D.** $m>n$.

Lời giải

Vì $0<\sqrt{3}-1<1$ nên ta có: $\left(\sqrt{3}-1\right)^m<\left(\sqrt{3}-1\right)^n\Leftrightarrow m>n$.

Câu 17: Cho a,b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{16}\right)^{a^2+ab}=\left(\sqrt[8]{64}\right)^{a^2-7ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{19}$. **D.** $\frac{76}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{1}{16}\right)^{a^2+ab}=\left(\sqrt[8]{64}\right)^{a^2-7ab}\Leftrightarrow 4^{-2\left(a^2+ab\right)}=4^{\frac{3}{8}\left(a^2-7ab\right)}\Leftrightarrow 19a^2-5ab=0\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{5}{19}$.

Câu 18: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$, $(x>0)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ

A. $P = x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P = x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P = x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P = x^{\frac{5}{12}}$.

Lời giải

Ta có $P = \sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}} = \sqrt[3]{x.x^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{5}{4}}} = x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 19: Cho $4^x + 4^{-x} = 7$. Biểu thức $P = \dfrac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4.2^x - 4.2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P = \dfrac{3}{2}$. **B.** $P = -\dfrac{5}{2}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = -2$.

Lời giải

$4^x + 4^{-x} = 7 \Leftrightarrow \left(2^x + 2^{-x}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 3.$

Suy ra $P = \dfrac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4.2^x - 4.2^{-x}} = \dfrac{5+3}{8-12} = -2.$

Câu 20: Biết $4^x + 4^{-x} = 14$, tính giá trị của biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$.

A. 4. **B.** 16. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** ± 4.

Lời giải

Ta có $4^x + 4^{-x} = 14 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 + \left(2^{-x}\right)^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow \left(2^x + 2^{-x}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x + 2^{-x} = 4 \\ 2^x + 2^{-x} = -4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 4$ (vì $2^x + 2^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$). Vậy $P = 4$.

Câu 21: Cho a là một số thực dương, tính giá trị của biểu thức $P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}} = \left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{4}{a}} = 2^{\frac{a}{2}.\frac{4}{a}} = 2^2 = 4$.

Câu 22: Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đó biểu thức $A = \dfrac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tích $a.b$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** -8. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $9^x + 9^{-x} = 23 \Leftrightarrow \left(3^x + 3^{-x}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 5$ vì $3^x + 3^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A = \dfrac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \dfrac{5+5}{1-5} = \dfrac{-5}{2}$.

Vậy $a.b = -10$.

Câu 23: Cho a là một số thực dương. Giá trị của biểu thức $P=\left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $P=\left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}=\left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{4}{a}}=2^{\frac{4}{a}.\frac{a}{2}}=2^2=4$.

Câu 24: Cho biểu thức $T=\frac{1}{2^{-x-1}}+3.\sqrt{2}^{2x}-4^{\frac{x-1}{2}}$. Khi $2^x=\sqrt{3}$ thì giá trị của biểu thức T là

A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$$T=\frac{1}{2^{-x-1}}+3.\sqrt{2}^{2x}-4^{\frac{x-1}{2}}=2^{x+1}+3.\left(\sqrt{2}^2\right)^x-\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{x-1}=2.2^x+3.2^x-\frac{1}{2}.2^x=\frac{9}{2}.2^x=\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 25: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Khi đó biểu thức $P=\frac{5-2^x-2^{-x}}{3+2^{x+1}+2^{1-x}}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản và $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}^+$. Tính tổng $a+b$ có giá trị bằng

A. 8. **B.** 11. **C.** 17. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\left(2^x+2^{-x}\right)^2=4^x+4^{-x}+2.2^x.2^{-x}=7+2=9$. Suy ra: $2^x+2^{-x}=3$.

$$P=\frac{5-2^x-2^{-x}}{3+2^{x+1}+2^{1-x}}=\frac{5-\left(2^x+2^{-x}\right)}{3+2\left(2^x+2^{-x}\right)}=\frac{5-3}{3+2.3}=\frac{2}{9}$$

Suy ra: $a=2$, $b=9\Rightarrow a+b=11$.

Câu 26: Cho x là số thực dương. Biết $\sqrt{x.\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}}=x^{\frac{b}{a}}$ với a, b là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 17.

Lời giải

Ta có $\sqrt{x.\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}}=\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x.x^{\frac{1}{3}}}}}=\sqrt{x\sqrt[3]{x.x^{\frac{2}{3}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{5}{9}}}=x^{\frac{7}{9}}$.

Khi đó $a=7$; $b=7$ nên $a+b=16$.

Câu 27: Cho hai số thực dương a,b. Rút gọn biểu thức $A=\frac{a^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{b}+b^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}+\sqrt[12]{b}}$ ta thu được $A=a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $A=\dfrac{a^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{b}+b^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}+\sqrt[12]{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{1}{12}}+a^{\frac{1}{12}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{12}}+b^{\frac{1}{12}}\right)}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}$

Suy ra $m.n=\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

Câu 28: Biết biểu thức $P=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ $(x>0)$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là x^{α}. Khi đó, giá trị của α bằng

A. $\frac{37}{15}$. **B.** $\frac{23}{36}$. **C.** $\frac{23}{30}$. **D.** $\frac{53}{30}$.

Lời giải

Ta có $P=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[6]{x^3.x^{\frac{5}{6}}}=x^{\frac{23}{36}}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0, a\neq 1$. Giá trị của $M=f\left(2021^{2022}\right)$ là

A. 2021^{1011} **B.** $2021^{1011}+1$ **C.** $-2021^{1011}+1$ **D.** $-2021^{1011}-1$

Lời giải

Ta có: $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{-2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(a^{\frac{3}{8}}-a^{\frac{1}{8}}\right)}=\dfrac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}-1}=\dfrac{-\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}-1}=-a^{\frac{1}{2}}-1$

Khi đó $M=f\left(2021^{2022}\right)=-\left(2021^{2022}\right)^{\frac{1}{2}}-1=-2021^{1011}-1$.

Câu 30: Cho a là số thực dương. Rút gọn biểu thức $A=a\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}$ về dạng $a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T=m^2+n^2$.

A. 2425. **B.** 539. **C.** 593. **D.** 1369.

Lời giải

Ta có $A=a\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}=a.a^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}=a^{1+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=a^{\frac{23}{8}}\Rightarrow m=23;n=8$

$\Rightarrow T = m^2 + n^2 = 23^2 + 8^2 = 593$.

Câu 31: Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m,n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3m^2 - 2n = 2$. **B.** $m^2 + n^2 = 43$. **<u>C</u>.** $2m^2 + n = 15$. **D.** $m^2 + n^2 = 25$.

Lời giải

Ta có: $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}} = \dfrac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.a^{\frac{-2}{7}}} = \dfrac{a^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}}}{a^{4-\frac{2}{7}}} = \dfrac{a^4}{a^{\frac{26}{7}}} = a^{4-\frac{26}{7}} = a^{\frac{2}{7}} \Rightarrow m = 2; n = 7 \Rightarrow 2m^2 + n = 15$.

Câu 32: Cho m, n là hai số dương không đồng thời bằng 1, biểu thức $\dfrac{m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}\right)^2} - 1$ bằng

<u>A</u>. $\dfrac{2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}$. **B.** $\dfrac{-2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}$. **C.** $\dfrac{2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}$. **D.** $\dfrac{-2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}\right)^2} - 1 = \dfrac{m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}} - \left(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}} - m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{3}} + 2m^{\sqrt{2}}n^{\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \dfrac{-2n^{\sqrt{3}} + 2m^{\sqrt{2}}n^{\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{2n^{\sqrt{3}}\left(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}\right)}{\left(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{3}}}$.

Câu 33: Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn: $3^x.6^y = \dfrac{2^{15}.6^{40}}{9^{50}.12^{25}}$. Tính $x.y$?

A. -445. **B.** -755. **<u>C</u>.** -450. **D.** -425.

Lời giải

Ta có: $3^x.6^y = \dfrac{2^{15}.6^{40}}{9^{50}.12^{25}} \Leftrightarrow 3^x.3^y.2^y = \dfrac{2^{15}.2^{40}.3^{40}}{3^{100}.3^{25}.2^{50}} \Leftrightarrow 3^{x+y}.2^y = 3^{-85}.2^5$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = -85 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -90 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow xy = -450$

Câu 34: Tại thời điểm ban đầu nếu đầu tư P đô la với tỷ lệ lãi suất được tính gộp liên tục hàng năm không đổi là r thì giá trị tương lai của khoản đầu tư này sau t năm là $B(t) = P.e^{rt}$ đô la. Giả sử tỷ lệ lãi suất tính gộp hàng năm là 8%. Hỏi sau bao nhiêu năm thì số tiền đầu tư ban đầu tăng thêm ít nhất 50%.

A. 5. **B.** 8. **C.** 7. **<u>D</u>.** 6.

Lời giải

Theo đề ra ta có: $P.e^{0,08.t} > 1,5P \Leftrightarrow e^{0,08t} > 1,5 \Rightarrow 0,08t > \ln 1,5 \Rightarrow t > \dfrac{\ln 1,5}{0,08} \simeq 5,06$.

Câu 35: Trong khuôn viên một trường đại học có 5000 sinh viên, một sinh viên vừa trở về sau kì nghỉ và bị nhiễm virus cúm truyền nhiễm kéo dài. Sự lây lan này được mô hình hóa bởi công thức $y = \dfrac{5000}{1+4999e^{-0,8t}}, \forall t \geq 0$. Trong đó y là tổng số học sinh bị nhiễm sau t ngày. Các trường đại học sẽ cho các lớp học nghỉ khi có nhiều hơn hoặc bằng 40% số sinh viên bị lây nhiễm. Sau ít nhất bao nhiêu ngày thì trường cho các lớp nghỉ học?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{5000}{1+4999e^{-0,8t}} : 5000 \geq \frac{40}{100} \Leftrightarrow 1+4999e^{-0,8t} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow e^{-0,8t} \leq \frac{3}{9998} \Leftrightarrow t \geq -\frac{\ln\frac{3}{9998}}{0,8} \approx 10,14.$$

Vậy sau ít nhất 11 ngày thì trường cho các lớp nghỉ học

Câu 36: Số người trong cộng đồng sinh viên đã nghe một tin đồn nào đó là $N = P\left(1-e^{-0,15d}\right)$ trong đó P là tổng số sinh viên của cộng đồng và d là số ngày trôi qua kể từ khi tin đồn bắt đầu. Trong một cộng đồng 1000 sinh viên, cần bao nhiêu ngày để 450 sinh viên nghe được tin đồn?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $N = P\left(1-e^{-0,15d}\right) \Leftrightarrow 450 = 1000.\left(1-e^{-0,15d}\right) \Leftrightarrow e^{-0,15d} = \ln\dfrac{11}{20} \Leftrightarrow d \simeq 3,98$

Vậy cần 4 ngày để 450 sinh viên nghe được tin đồn.

Câu 37: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

A. 2029. **B.** 2020. **C.** 2025. **D.** 2026.

Lời giải

Từ công thức $S = A.e^{Nr} \Leftrightarrow N = \dfrac{1}{r}\ln\dfrac{S}{A}$ với $A = 78685800$, $r = 1,7\% = 0,017$, $S = 120000000$

Vậy $N = \dfrac{1}{0,017}\ln\dfrac{120000000}{78685800} \Leftrightarrow N \approx 24,83$ (năm)

Vậy sau 25 năm thì dân số nước ta ở mức 120 triệu người hay đến năm 2026 thì dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

Câu 38: Bác An gửi tiết kiệm số tiền 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất kép 5% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) bác An thu được sau 5 năm (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $125,628$. **B.** $130,432$. **C.** $127,628$. **D.** $125,000$.

Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép $A=P(1+r)^N$ với $P=100; r=0,05; N=5$ ta được số tiền bác An thu về cả vốn và lãi sau 5 năm là $A=100.(1,05)^5\approx 127,628$ (triệu đồng).

Câu 39: Bác An gửi tiết kiệm số tiền 300 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất kép 5% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Sau ba năm vì cần tiền nên bác An đến ngân hàng rút ra 100 triệu đồng, phần còn lại vẫn tiếp tục gửi. Hết bốn năm tiếp theo, bác An lại đến ngân hàng rút toàn bộ tiền tiết kiệm (cả gốc và lãi) về, hỏi bác An sẽ thu về được bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $294,000$. **B.** $296,688$. **C.** $300,580$. **D.** $225,178$.

Lời giải

Số tiền cả gốc và lãi bác An có được sau 3 năm là $A_1=P_1(1+r)^{N_1}$ với $P_1=300; r=0,05; N_1=3$

Bác An rút về 100 triệu đồng nên số tiền còn lại tiếp tục gửi tiết kiệm là $P_2=A_1-100$.

Hết 4 năm tiếp theo, số tiền cả gốc và lãi bác An thu được là $A_2=P_2.(1,05)^4\approx 300,580$ (triệu đồng).

Câu 40: Dân số thế giới được dự đoán theo công thức $P(t)=ae^{bt}$, trong đó a,b là các hằng số, t là năm tính dân số. Theo số liệu thực tế, dân số thế giới năm 1950 là 2 tỉ 560 triệu người và năm 1980 là 4 tỉ 440 triệu người. Hãy dự đoán dân số thế giới năm 2030? (Làm tròn đến hàng triệu)

A. 19 tỉ 280 triệu. **B.** 10 tỉ 141 triệu. **C.** 15 tỉ 236 triệu. **D.** 11 tỉ 116 triệu.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} a.e^{1950b}=2560 \ (1) \\ ae^{1980b}=4440 \end{cases} \Rightarrow e^{1980b-1950b}=\dfrac{4440}{2560}\Rightarrow e^{30b}=\dfrac{111}{64}$.

Khi đó: $\dfrac{P(2030)}{P(1950)}=\dfrac{a.e^{2030b}}{a.e^{1950b}}=e^{80b}=\left(e^{30b}\right)^{\frac{8}{3}}=\left(\dfrac{111}{64}\right)^{\frac{8}{3}}\Rightarrow P(2030)=\left(\dfrac{111}{64}\right)^{\frac{8}{3}}.2560\approx 11116$.

Vậy dự đoán dân số thế giới đến năm 2030 là 11 tỉ 116 triệu người.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho a,b là các số thực dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a^m.b^n=(ab)^{m+n}$

b) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

c) $\left(a^m\right)^n=a^{m.n}$

d) $a^m+a^n=a^{m+n}$

Lời giải

a) Sai: $a^m.b^n=(ab)^{m+n}$.

b) Đúng: $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

c) Đúng: $\left(a^m\right)^n=a^{m.n}$.

d) Sai: $a^m+a^n=a^{m+n}$.

Câu 2: Cho biểu thức $9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}=A$ và $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}=B$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}=(9.27)^{\frac{2}{5}}$

b) $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}=3^k$ thì $k=3$

c) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}=2^k$ thì $k=3$

d) Phép toán $A-B$ thu được kết quả là một số tự nhiên

Lời giải

a) Đúng: $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}=(9.27)^{\frac{2}{5}}$

b) Sai: $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}=(9.27)^{\frac{2}{5}}=\left(3^2.3^3\right)^{\frac{2}{5}}=\left(3^5\right)^{\frac{2}{5}}=3^2=9$.

c) Sai: $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{144}{9}\right)^{\frac{3}{4}}=16^{\frac{3}{4}}=\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$.

d) Đúng: $A=9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}=(9\cdot 27)^{\frac{2}{5}}=\left(3^2\cdot 3^3\right)^{\frac{2}{5}}=\left(3^5\right)^{\frac{2}{5}}=3^2=9$

và $B=144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{144}{9}\right)^{\frac{3}{4}}=16^{\frac{3}{4}}=\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$

Khi đó $A-B=1$

Câu 3: Cho các biểu thức $A=\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}};B=-\sqrt[4]{b}$; với $a>0,b>0,a\neq b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau khi rút gọn, thì A chỉ chứa biến b

b) Biểu thức luôn $A>0$

c) $A=B+\sqrt{a}$

d) $\frac{A-1}{B}=1-\frac{1}{B}$

Lời giải

Ta có: $\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-\left(\sqrt[4]{B}\right)^2}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$

$=\frac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a}-\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)=-\sqrt[4]{b}$

$\begin{cases}A=-\sqrt[4]{b}\\B=-\sqrt[4]{b}\end{cases}\Rightarrow A=B$

a) Đúng: Sau khi rút gọn, thì A chỉ chứa biến b

b) Sai: Thu gọn $A=-\sqrt[4]{b}<0\ \forall b>0$

c) Sai: $A=B+\sqrt{a}$

d) Đúng: $\dfrac{A-1}{B}=1-\dfrac{1}{B}$. Do $A=B\Rightarrow \dfrac{A-1}{B}=\dfrac{B-1}{B}=\dfrac{B}{B}-\dfrac{1}{B}=1-\dfrac{1}{B}$

Câu 4: Với mọi $a>0,b>0$ và m,n là các số thực tùy ý. Giả sử các biểu thức xuất hiện trong các công thức của mỗi mệnh đề đều có nghĩa. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a^m.a^n=a^{m+n}$.

b) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ với n là số nguyên dương.

c) Nếu $\left(\dfrac{5}{2}\right)^m>\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ thì $m>n$.

d) Nếu $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^m>\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{3m-2}$ thì $m<1$.

Lời giải

a) Đúng: $a^m.a^n=a^{m+n}$, với $a>0$ và m,n là các số thực tùy ý.

b) Đúng: $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ với n là số nguyên dương.

c) Đúng: Do $\dfrac{5}{2}>1$ nên $\left(\dfrac{5}{2}\right)^m>\left(\dfrac{5}{2}\right)^n\Leftrightarrow m>n$.

d) Sai: Do $0<\dfrac{\pi}{4}<1$ nên $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^m>\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{3m-2}\Leftrightarrow m<3m-2\Leftrightarrow m>1$.

Câu 5: Với mọi số thực $a>0,b>0$. Giả sử các biểu thức xuất hiện trong các công thức của mỗi mệnh đề đều có nghĩa. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$

b) $a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{1}{6}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{b^7}}{b^3}=b^{\frac{7}{9}}$

d) $\dfrac{\left(\sqrt{ab^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}}=ab^2$

Lời giải

a) Đúng: $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$, với $a>0$.

b) Sai: $a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}\neq a^{\frac{1}{6}}$.

c) Sai: $\dfrac{\sqrt[3]{b^7}}{b^3}=b^{\frac{7}{3}-3}=b^{-\frac{2}{3}}\neq b^{\frac{7}{9}}$.

d) Đúng: $\dfrac{\left(\sqrt{ab^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}}=\dfrac{\left(ab^2\right)^2}{\sqrt[6]{a^6b^{12}}}=\dfrac{a^2b^4}{ab^2}=ab^2$.

Câu 6: Cho $a>0$, $b>0$ và hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Biết m,n là các số thực thỏa mãn $\sqrt{a}.\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}=a^m$, $\dfrac{b^{\frac{4}{3}}\left(b^{\frac{-1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{b^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{-1}{4}}\right)}=b^n$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(0)=0$.

b) $m\in\mathbb{Z}$.

c) $m=n$.

d) Nếu $f(m-a)+f(n-b)=2$ thì $f\left(a^m\right)+f\left(b^n\right)=0$.

Lời giải

a) Sai: $f(0)=\dfrac{9^0}{9^0+3}=\dfrac{1}{4}$

b) Đúng: $\sqrt{a}.\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{2}}\left(a^2.a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=a\Rightarrow m=1\in\mathbb{Z}$

c) Đúng: $\dfrac{b^{\frac{4}{3}}\left(b^{\frac{-1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{b^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{-1}{4}}\right)}=\dfrac{b+b^2}{b+1}=b\Rightarrow n=1\Rightarrow m=n$

d) Đúng: $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}\Rightarrow f(1-x)=\dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\dfrac{3}{9^x+3}=1-f(x)$

$f(m-a)+f(n-b)=2\Rightarrow 2=f(1-a)+f(1-b)=2-f(a)-f(b)=2-f\left(a^m\right)-f\left(b^n\right)$

Suy ra: $f\left(a^m\right)+f\left(b^n\right)=0$

Câu 2. Cho a,b là số thực dương và $x,y\in\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\left(a^x\right)^y=a^{x^y}$

b) Nếu $\sqrt{2}-1^{\,x}<\sqrt{2}-1^{\,y}$ thì $x<y$

c) Rút gọn $P=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1}.a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ ta được $P=a^5$.

d) Nếu $f(x)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}$ thì $S=f\left(\dfrac{1}{2023}\right)+f\left(\dfrac{2}{2023}\right)+...+f\left(\dfrac{2022}{2023}\right)=\dfrac{1011}{3}$.

Lời giải

a) Sai: $\left(2^1\right)^3 = 2^3 \neq 2^{1^3}$

b) Sai: $\begin{cases} \sqrt{2}-1^{\,x} < \sqrt{2}-1^{\,y} \\ 0<\sqrt{2}-1<1 \end{cases} \Rightarrow x>y$

c) Đúng : $P=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1}.a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1+2-\sqrt{5}}}{a^{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}}=\dfrac{a^3}{a^{-2}}=a^5$

d) Đúng: $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}+\dfrac{9^{1-x}-2}{9^{1-x}+3}=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}+\dfrac{9-2.9^x}{9+3.9^x}$

$=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}+\dfrac{3-\dfrac{2}{3}.9^x}{3+9^x}=\dfrac{1+\dfrac{1}{3}.9^x}{9^x+3}=\dfrac{3+9^x}{3\left(9^x+3\right)}=\dfrac{1}{3}$

Do đó $S=\sum\limits_{k=1}^{1011}\left[f\left(\dfrac{k}{2023}\right)+f\left(1-\dfrac{k}{2023}\right)\right]=\sum\limits_{k=1}^{1011}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1011}{3}$.

Câu 7: Một người gửi số tiền 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Lãi suất của ngân hàng là $0,65$ trong một năm

b) Sau khi gửi 1 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng là $532\,500\,000$ đồng

c) Sau khi gửi 3 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng nhiều hơn $600\,000\,000$ đồng.

d) Do thiếu tiền nên ở cuối năm thứ 3, người đó đã rút 100 triệu đồng từ ngân hang và tiếp tục gửi thêm 2 năm nữa thì rút toàn bộ số tiền. Lúc này người này có số tiền ít hơn $670\,000\,000$ đồng.

Lời giải

a) Sai: Lãi suất ngân hàng là $0,065$ trong một năm.

b) Đúng: Sau một năm số tiền gửi là $500\left(1+6,5\%\right)^1=532,5$ (triệu đồng).

c) Đúng: Đến hết năm thứ ba, số tiền người đó có được là $500\left(1+6,5\%\right)^3>600$ triệu đồng.

d) Sai: Sau khi rút về 100 triệu đồng và tiếp tục gửi trong vòng 2 năm tiếp theo, người đó có số tiền là $\left[500\left(1+6,5\%\right)^3-100\right].\left(1+6,5\%\right)^2\approx 571,621$ triệu đồng. Tổng số tiền người đó có được sau 5 năm (sau khi làm tròn) là $571,621+100=671,621$ triệu đồng, gần nhất với 671,620 triệu đồng.

Câu 8: Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Sau năm 2019. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Công thức sau *n* năm thì diện tích trồng rừng của tỉnh A là $A=1000.\left(1+0,06\right)^{n+1}$.

b) Vào năm 2032, diện tích rừng năm đó hơn gấp đôi năm 2019.

c) Vào năm 2025 thì diện tích rừng năm đó đạt trên 1400 ha.

d) Diện tích rừng vào hai năm sau kể từ năm 2019 sẽ đạt 1123,6 ha.

Lời giải

Áp dụng công thức $A=a(1+r)^n$

a) Sai: Ta có sau n năm thì diện tích trồng mới của tỉnh A là: $A=1000(1+0,06)^n$.

b) Đúng: $1000.(1+0,06)^n>2000\Rightarrow 1,06^n>1\Rightarrow n>11,8$.

Vào năm 2032, diện tích rừng năm đó hơn gấp đôi năm 2019.

c) Đúng: Theo đề bài, ta có $1000.(1+0,06)^n>1400\Rightarrow 1,06^n>1,4\Rightarrow n>5,774$

Vậy vào năm 2025 thì diện tích rừng mới năm đó đạt trên 1400 ha.

d) Đúng: $n=2\Rightarrow 1000(1+0,06)^2=1123,6$ ha.

Câu 9: Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp với lãi suất $0,5\%$ / tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 30 triệu đồng. Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian trả nợ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền nợ sau 8 tháng là $796464780,4$.

b) Số tiền nợ sau 10 tháng là $744299339,8$.

c) Sau 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

d) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 45 triệu đồng thì sau hai năm anh Nam trả hết nợ.

Lời giải

a) Đúng: Gọi a là số tiền vay, r là lãi suất, m là số tiền hàng tháng trả.

Số tiền nợ sau tháng thứ nhất là: $N_1=a(1+r)-m$.

Số tiền nợ sau tháng thứ hai là: $N_2=\left[a(1+r)-m\right]+\left[a(1-r)-m\right]r-m$

$=a(1+r)^2-m\left[(1+r)+1\right]$

….

Số tiền nợ sau n tháng là:

$$N_n=a(1+r)^n-m\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+...+1\right]=a(1+r)^n-m\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Sau n tháng anh Nam còn nợ số tiền là: $N_n=10^9(1+0,5\%)^n-30.10^6.\dfrac{(1+0,5\%)^n-1}{0,5\%}$.

Số tiền nợ sau 8 tháng là $796464780,4$.

b) Đúng: Số tiền nợ sau 10 tháng là 744299339.8.

c) Đúng: Sau n tháng anh Nam trả hết nợ: $N_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$

$\Leftrightarrow 1000(1+0,005)^n - 30\dfrac{(1+0,005)^n - 1}{0,005} = 0 \Leftrightarrow n = 36,55$

Vậy 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

d) Đúng: Sau n tháng anh Nam trả hết nợ: $N_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$

$\Leftrightarrow 1000(1+0,005)^n - 45.\dfrac{(1+0,005)^n - 1}{0,005} = 0 \Leftrightarrow n = 23,615$

Vậy sau hai năm anh Nam trả hết nợ.

Câu 10: Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là $A = P\cdot\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^n$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 6% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau một năm sẽ còn lại là 95 triệu đồng.

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại là 84,64 triệu đồng.

b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là 5,13%

c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau 14 năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa.

Lời giải

a) Sai: Theo công thức $A = P.\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^n$ ta có: $A = 100.\left(1-\dfrac{6}{100}\right)^1 = 94$ triệu đồng

Vậy sức mua của 100 triệu đồng sau một năm với tỉ lệ lạm phát là 6% một năm chỉ còn lại khoảng 94 triệu đồng.

b) Đúng: Theo công thức $A = P.\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^n$ ta có: $A = 100.\left(1-\dfrac{8}{100}\right)^2 = 84,64$ triệu đồng

Vậy sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm với tỉ lệ lạm phát là 8% một năm chỉ còn lại khoảng 84,64 triệu đồng.

c) Đúng: Thay $P = 100$ triệu đồng, $A = 90$ triệu đồng, $n = 2$ vào phương trình ta có:

$90 = 100.\left(1-\dfrac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow r = 5,13\%$

Vậy tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là khoảng 5.13 %.

d) Đúng: Thay $P=1$ và $A=\frac{1}{2}$ vào phương trình ta có: $\frac{1}{2}=\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=n\ln\left(1-\frac{r}{100}\right)\Leftrightarrow n=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1-\frac{r}{100}\right)}\Leftrightarrow n=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1-\frac{5}{100}\right)}\approx 13,51$$

Vậy sau khoảng 14 năm thì sức mua của số tiền ban đầu sẽ chỉ còn lại một nửa nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Giá trị của biểu thức $A=(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ và $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ và $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$A=(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}=\left(2+\sqrt{3}+1\right)^{-1}+\left(2-\sqrt{3}+1\right)^{-1}=\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{3-\sqrt{3}}=1.$$

Câu 2: Tính giá trị biểu thức $A=\left(\frac{1}{81}\right)^{-0.75}+\left(\frac{1}{625}\right)^{-0,25}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-0,6}$.

Lời giải

Ta có: $A=\left(\frac{1}{81}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{625}\right)^{-0,25}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-0,6}=\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

$=\left(3^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(5^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}}-\left(2^{-5}\right)^{-\frac{3}{5}}=3^3+5-2^3=24$

Câu 3: Cho $0<a<1$ và $b>1$. Biết rằng biểu thức $\sqrt{\left(a^\pi+b^\pi\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}ab\right)^\pi}=ma^\pi+nb^\pi$. với $m,n\in\mathbb{Z}$.

Giá trị của $m+n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\sqrt{\left(a^\pi+b^\pi\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}ab\right)^\pi}=\sqrt{a^{2\pi}+b^{2\pi}+2a^\pi b^\pi-4a^\pi b^\pi}=\sqrt{a^{2\pi}+b^{2\pi}-2a^\pi b^\pi}=\left|a^\pi-b^\pi\right|$..

Vì $0<a<1$ và $b>1$ nên $a^\pi<b^\pi$ do đó $\left|a^\pi-b^\pi\right|=b^\pi-a^\pi$.

Suy ra $\sqrt{\left(a^\pi+b^\pi\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}ab\right)^\pi}=b^\pi-a^\pi$ suy ra $m=-1;n=1$.

Vậy $m+n=0$.

Câu 4: Trong năm 2022, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 7% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Hỏi năm 2030, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là tính theo ha? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) là bao nhiêu?

Lời giải

Năm 2030 thì diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là: $800.(1+7\%)^8 \approx 1375$ (ha).

Câu 5: Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là $850.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán xe X là bao nhiêu đồng (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Lời giải

Năm 2025, giá bán loại xe X là $850000000.(1-2\%)^5 \approx 768333000$ (đồng).

Câu 6: Rút gọn biểu thức sau đây: $P=\left[\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}\right]\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)^{-1}+\sqrt[6]{a}$, với $a>0, b>0, a\neq b$

Lời giải

Ta có: $P=\left[\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}-\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}\right]\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)^{-1}+\sqrt[6]{a}$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\right]\frac{1}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}+\sqrt[6]{a}=-\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\frac{1}{\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)}+\sqrt[6]{a}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}+\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{b}-\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{b}$$

Câu 7: Tính $P=\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\dfrac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}$ khi $x=2024, y=2023$

Lời giải

Ta có: $P=\left[\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}\right]\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)^{-1}+\sqrt[6]{a}$

$$=\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}=\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}\right]\frac{xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$$

$$=\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x-y)}\right]\frac{xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}=\frac{2(x+y)}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x-y)}\frac{xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}=\frac{2x}{x-y}-\frac{2y}{x-y}$$

$=\dfrac{2(x-y)}{x-y}=2$ (không phụ thuộc vào x,y)

Câu 8: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}}-\dfrac{a+4}{a^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{2}}\right).\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)$, với a là số thực dương. Tìm giá trị của a để biểu thức $A=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Với a là số thực dương, ta có: $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}-\dfrac{a+4}{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^3}\right).\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$

$=\left(\dfrac{a-\sqrt{2}.\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^3}-\dfrac{a+4}{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^3}\right).\left(\dfrac{a-\sqrt{2}.\sqrt{a}+2}{2\sqrt{a}}\right)$

$=\left(\dfrac{-\sqrt{2}.\sqrt{a}-2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)\left(a-\sqrt{2}.\sqrt{a}+2\right)}\right).\left(\dfrac{a-\sqrt{2}.\sqrt{a}+2}{2\sqrt{a}}\right)$

$=\left(\dfrac{-\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)\left(a-\sqrt{2}.\sqrt{a}+2\right)}\right).\left(\dfrac{a-\sqrt{2}.\sqrt{a}+2}{2\sqrt{a}}\right)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2a}}$.

Khi đó $A=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{-1}{\sqrt{2a}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{2a}=2\Rightarrow a=2$ (thỏa mãn).

Vậy $A=-\dfrac{1}{2}$ khi $a=2$.

Câu 9: Bác An gửi ngân hàng số tiền 200 triệu đồng theo thể thức lãi kép với kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 3,5% / kỳ. Số tiền cả vốn và lãi được ngân hàng tính theo công thức $T=T_0\left(1+r\right)^n$, trong đó T_0 là số tiền gốc và n là số kỳ đã gửi. Hỏi sau 3 năm bác An mới rút tiền thì bác thu được số tiền lãi là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

Số tiền cả vốn và lãi sau 3 năm gửi là $T=200.(1+0,035)^6\approx 245,85$ (triệu đồng).

Vậy số tiền lãi mà bác An thu được sau 3 năm gửi xấp xỉ là $245,85-200\approx 45,85$ (triệu đồng).

Câu 10: Cường độ ánh sáng tại độ sâu $h\left(\text{m}\right)$ dưới một mặt hồ được tính bởi công thức $I=I_0.2^{-\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ. Tại độ sâu $3\left(\text{m}\right)$, cường độ ánh sáng giảm bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại độ sâu $1\left(\text{m}\right)$?

Lời giải

Cường độ ánh sáng tại độ sâu $1\left(\text{m}\right)$ là $I_1=I_0.2^{-\frac{1}{4}}$.

Cường độ ánh sáng tại độ sâu $3\left(\mathrm{m}\right)$ là $I_2=I_0.2^{-\frac{3}{4}}$.

Ta có $\dfrac{I_2}{I_1}=\dfrac{I_0.2^{-\frac{3}{4}}}{I_0.2^{-\frac{1}{4}}}=2^{-\frac{1}{2}}\approx 0,71=71\%$

Vậy cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 (m) giảm khoảng 29% so với cường độ ánh sáng tại độ sâu $1\left(\mathrm{m}\right)$.

-----------------HẾT-----------------

BÀI 02 LOGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Khái niệm Logarit

Cho a là một số thực dương khác 1 và M là một số thực dương. Số thực α để $a^{\alpha}=M$ được gọi là lôgarit cơ số a của M và kí hiệu là $\log_a M$.

$$\alpha=\log_a M \Leftrightarrow a^{\alpha}=M.$$

Chú ý: Không có lôgarit của số âm và số 0. Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

Từ định nghĩa lôgarit, ta có các tính chất sau. Với $0<a\neq 1, M>0$ và α là số thực tuỳ ý, ta có:

⊕ $\log_a 1=0$; ⊕ $\log_a a=1$;

⊕ $a^{\log_a M}=M$; ⊕ $\log_a a^{\alpha}=\alpha$.

2 Tính chất của Logarit

Quy tắc tính Logarit:

Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tuỳ ý.
Khi đó:

⊕ $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

⊕ $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

⊕ $\log_a M^{\alpha}=\alpha\log_a M$.

Đổi cơ số của Logarit:

Với các cơ số lôgarit a và b bất kì $(0<a\neq 1, 0<b\neq 1)$ và M là số thực dương tuỳ ý, ta luôn có:

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$$

3 Logarit thập phân và Logarit tự nhiên

Lôgarit thập phân

Trong thực hành, ta hay dùng hệ đếm thập phân (hệ đếm cơ số 10); lôgarit cơ số 10 đóng vai trò quan trọng trong tính toán.

Lôgarit cơ số 10 của một số dương M gọi là lôgarit thập phân của M, kí hiệu là $\log M$ hoặc $\lg M$.

Đọc là lốc của M.

Số e và lôgarit tự nhiên

Bài toán lãi kép liên tục và số e

Ta đã biết: Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau tm kì) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}$$

Nếu kì tính lãi được chia càng ngày càng nhỏ, tức là tính lãi hằng ngày, hằng giờ, hằng phút, hằng giây,... thì dẫn đến việc tính giới hạn của dãy số A_m khi $m\to+\infty$. Ta có:

$$A_m = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} = P\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr}.$$

Để tính giới hạn $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m$, ta cần xét giới hạn $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}$.

Một cách tổng quát, ta xét giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Người ta chứng minh được giới hạn trên tồn tại, nó là một số vô tỉ có giá trị bằng 2,718281828... và kí hiệu là e. Vậy $e=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\approx 2,7183$.

Từ các kết quả trên suy ra $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = Pe^{tr}$.

Thể thức tính lãi khi $m\to+\infty$ theo cách trên gọi là thể thức lãi kép liên tục.

Như vậy, với số vốn ban đầu là P, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là $A=Pe^{tr}$.

Công thức trên gọi là công thức lãi kép liên tục.

Lôgarit tự nhiên

Ta có định nghĩa sau: Lôgarit cơ số e của một số dương M gọi là lôgarit tự nhiên của M, kí hiệu là $\ln M$ (đọc là lôgarit Nêpe của M)

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa logarit

Phương pháp: Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tuỳ ý. Khi đó:

$$\oplus \ \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\oplus \ \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\oplus \ \log_a M^{\alpha} = \alpha \log_a M.$$

Đổi cơ số của Logarit:

Với các cơ số lôgarit a và b bất kì $(0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$ và M là số thực dương tuỳ ý, ta luôn có:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) $\log_2 2^{-13}$

b) $\ln e^{\sqrt{2}}$

c) $\log_8 16 - \log_8 2$

d) $\log_2 6.\log_6 8$.

Lời giải

a) $\log_2 2^{-12} = -12\log_2 2 = -12$.

b) $\ln e^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ln(e) = \sqrt{2}.1 = \sqrt{2}$.

c) $\log_8 16 - \log_8 2 = \log_8 \dfrac{16}{2} = \log_8 8 = 1$.

d) $\log_2 6.\log_6 8 = \dfrac{\log_2 6}{\log_2 6}.\dfrac{\log_6 8}{\log_6 2} = \dfrac{\log_2 2.\log_2 4}{\log_2 2.\log_2 3} = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_3 4 \approx 1,26186$

Bài tập 2: Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $T = \log_a\left(a^3\right)$.

b) Tính $I = \log_{\frac{a}{4}}\left(\dfrac{a^3}{64}\right)$ với $a \neq 4$.

c) $T = \log_a\left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[15]{a^4}}\right)$.

d) $\log_{a^2}\left(a\sqrt{a}\right)$.

e) $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.

f) $P = \log_{\sqrt[3]{a}} \dfrac{1}{a^3}$.

Lời giải

a) Ta có $T = \log_a\left(a^3\right) = 3$.

b) $I=\log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a^3}{64}\right)=\log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a}{4}\right)^3=3$.

c) Ta có $T=\log_a\left(\frac{a^2\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[15]{a^4}}\right)=\log_a\left(\frac{a^2a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{15}}}\right)=\log_a\left(\frac{a^2a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{15}}}\right)=\log_a a^{\frac{8}{3}}=\frac{8}{3}$.

d) Ta có: $\log_{a^2}\left(a\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\log_a a^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\log_a a=\frac{3}{4}$.

e) Ta có $a^{\log_{\sqrt{a}}4}=a^{2\log_a 4}=(a)^{\log_a 4^2}=4^2=16.$

f) Ta có: $P=\log_{\sqrt[3]{a}}\frac{1}{a^3}=\log_{a^{\frac{1}{3}}}a^{-3}=-3.3\log_a a=-9$.

Bài tập 3: Tính giá trị các biểu thức:

a) $\log_2\frac{1}{8}$

b) $\log_{\sqrt{3}}9$.

c) $\log_3 3\sqrt{3}$

d) $\log_{\frac{1}{2}}32$.

e) $\log_4 2+\log_4 32$

f) $\log_2 80-\log_2 5$.

Lời giải

a) $\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$.

b) $\log_{\sqrt{3}}9=\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^4=4$.

c) $\log_2\left(3\sqrt{3}\right)=\log_2 3+\log_2\sqrt{3}=\log_2 3+\log_2 3^{\frac{1}{2}}=\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{3}{2}\log_2 3$

d) $\log_{\frac{1}{2}}32=\frac{\log_2 32}{\log_2\frac{1}{2}}=\frac{5}{-1}=-5$

e) $\log_4 2+\log_4 32=\log_4(2.32)=\log_4 64=\log_4 4^3=3\log_4 4=3$.

f) $\log_2 80-\log_2 5=\log_2\frac{80}{5}=\log_2 16=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$.

Bài tập 4: Cho các số a,b,c thỏa mãn: $\log_a 3=2,\log_b 3=\frac{1}{4},\log_{abc}3=\frac{2}{15}$. Tính giá trị của $\log_c 3$.

Lời giải

Ta có: $\log_a 3=2\Rightarrow\log_3 a=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\log_b 3=\frac{1}{4}\Rightarrow\log_3 b=4$

Ta có $\log_{abc}3=\frac{2}{15}\Leftrightarrow\log_3 abc=\frac{15}{2}\Leftrightarrow\log_3 a+\log_3 b+\log_3 c=\frac{15}{2}$

$\Leftrightarrow \log_3 c = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} - 4 = 3 \Leftrightarrow \log_c 3 = \frac{1}{3}$.

Bài tập 5: Cho các số thực dương $x \neq 1$, $y \neq 1$ thỏa mãn $\log_2 x = \log_y 16$ và tích $xy = 64$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\log_2 \frac{y}{x}\right)^2$

Lời giải

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$ và $t = \log_y 16 \Rightarrow y = 16^{\frac{1}{t}} = 2^{\frac{4}{t}} \Rightarrow \frac{y}{x} = 2^{\frac{4}{t} - t}$

$x.y = 64 \Rightarrow 2^t.2^{\frac{4}{t}} = 2^6 \Rightarrow t + \frac{4}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 + \sqrt{5} \\ t = 3 - \sqrt{5} \end{array}\right. \to \left(\log_2 2^{\frac{4}{t} - t}\right)^2 = 20$.

Bai tập 6: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_4 a = \log_{25} b = \log \frac{4b - a}{4}$. Tính giá trị của $\log_{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{2} + 4b\sqrt{2}\right) - \log_{\sqrt{6}} b$

Lời giải

Đặt $\log_4 a = \log_{25} b = \log \frac{4b - a}{4} = t \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 25^t \\ \frac{4b - a}{4} = 10^t \end{cases} \Rightarrow \frac{4.25^t - 4^t}{4} = 10^t \Leftrightarrow 4.25^t - 4^t = 4.10^t$

$\Leftrightarrow 4.\left(\frac{5}{2}\right)^{2t} - 4.\left(\frac{5}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^t = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2t} = 12 - 8\sqrt{2}$.

Ta có: $\log_{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{2} + 4b\sqrt{2}\right) - \log_{\sqrt{6}} b = \log_{\sqrt{6}}\left(\frac{\frac{a}{2} + 4b\sqrt{2}}{b}\right) = \log_{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{2b} + 4\sqrt{2}\right)$

$= \log_{\sqrt{6}}\left(6 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right) = \log_{\sqrt{6}}(6) = 2$.

Bai tập 7: Cho các số dương a, b, c khác 1 thoả mãn $\log_a(bc) = 3$ và $\log_b(ac) = 4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \log_a(bc) = 3 \\ \log_b(ac) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = a^3 \\ ac = b^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3.c^{-1} \\ ac = \left(a^3.c^{-1}\right)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3.c^{-1} \\ ac = a^{12}.c^{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c^{\frac{5}{11}} \\ b = c^{\frac{4}{11}} \end{cases}$.

$\Rightarrow \log_c(ab) = \log_c\left(c^{\frac{5}{11}}.c^{\frac{4}{11}}\right) = \log_c c^{\frac{9}{11}} = \frac{9}{11}$.

Dạng 2: Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa logarit

Phương pháp: Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của logarit

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\frac{4}{3}} x = \log_3 y = \log_2(2x - 3y)$. Tính $\frac{x}{y}$.

Lời giải

Đặt $\log_{\frac{4}{3}} x = \log_3 y = \log_2(2x - 3y) = t$.

Suy ra $\begin{cases} x = \left(\frac{4}{3}\right)^t \\ y = 3^t \\ 2x - 3y = 2^t \end{cases} \Rightarrow 2.\left(\frac{4}{3}\right)^t - 3.3^t = 2^t \Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{3}\right)^t - 3.\left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0.\ (1)$

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^t = a, (a > 0)$

Khi đó phương trình **(1)** trở thành $2a - \frac{3}{a} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - a - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = -1 & (\text{l}) \\ a = \frac{3}{2} & (\text{n}) \end{array}\right.$

Do đó, $\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)^t = \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} = a^2 = \frac{9}{4}$.

Bài tập 2: Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

Lời giải

Ta có $\log_6 45 = \log_6 9 + \log_6 5$.

$\log_6 9 = 2\log_6 3 = \frac{2}{\log_3 6} = \frac{2}{1 + \log_3 2} = \frac{2}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{2a}{a+1}$.

$\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} = \frac{1}{\log_5 3 + \log_5 2} = \frac{a}{b(a+1)}$ vì $\log_5 2 = \frac{b}{a}$.

Vậy $\log_6 45 = \frac{2a}{a+1} + \frac{a}{b(a+1)} = \frac{a + 2ab}{ab + b}$.

Bài tập 3: Đặt $a = \log_2 5$, $b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b.

Lời giải

Ta có $a = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{a}$ và $b = \log_3 5 \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{b}$.

Suy ra: $\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} = \frac{1}{\log_5(2.3)} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}$.

Bài tập 4: Cho hai số thực a,b thỏa mãn: $2\log_3(a-3b)=\log_3 a+\log_3(4b)$ và $a>3b>0$. Tính $\frac{a}{b}$

Lời giải

Ta có: $2\log_3(a-3b)=\log_3 a+\log_3(4b)\Leftrightarrow \log_3(a-3b)^2=\log_3(4ab)$

$$\Leftrightarrow (a-3b)^2=4ab\Leftrightarrow a^2-10ab+9b^2=0\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2-10\frac{a}{b}+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=9\\ \frac{a}{b}=1\,(loai)\end{array}\right..$$

Bài tập 5: Đặt $a=\log_3 2$, khi đó $\log_{72}768$ được biểu diễn dưới dạng $\frac{ma+n}{pa+2}$, với m,n,p là các số nguyên. Tính $m+n^2+p^3$

Lời giải

Ta có: $\log_{72}768=\log_{72}\left(2^8.3\right)=\log_{72}2^8+\log_{72}3=\frac{8}{\log_2\left(2^3.3^2\right)}+\frac{1}{\log_3\left(2^3.3^2\right)}$

$$=\frac{8}{3+2\log_2 3}+\frac{1}{2+3\log_3 2}=\frac{8}{3+\frac{2}{a}}+\frac{1}{2+3a}=\frac{8a+1}{3a+2}\Rightarrow m=8,n=1,p=3.$$

Vậy $m+n^2+p^3=8+1^2+3^3=36$.

Bài tập 6: Cho các số nguyên dương $x,\ y,\ z$ đôi một nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn biểu thức dưới đây $x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$. Tính giá trị của biểu thức $29x-y-2021z$.

Lời giải

Ta có: $x\log_{200}5+y\log_{200}2=z\Leftrightarrow \log_{200}5^x+\log_{200}2^y=z$

$$\Leftrightarrow \log_{200}5^x.2^y=z\Leftrightarrow 5^x.2^y=200^z\Leftrightarrow 5^x.2^y=(25.4.2)^z\Leftrightarrow 5^x.2^y=5^{2z}.2^{3z}\Rightarrow \begin{cases}x=2z\\ y=3z\end{cases}$$

Do các số nguyên dương $x,\ y,\ z$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên $\begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=1\end{cases}$

Giá trị của biểu thức $29x-y-2021z=29.2-3-2021=-1966$.

Bài tập 7: Cho hai số thực a,b dương khác 1 thỏa mãn $\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2}b}+\frac{1}{\log_{a^n}b}=\frac{1}{\log_{a^8}b}$. Tìm n

Lời giải

Vì a,b dương khác 1 nên ta có: $\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2}b}+\frac{1}{\log_{a^n}b}=\frac{1}{\log_{a^8}b}$

$$\Leftrightarrow \log_b a+\log_b a^2+\log_b a^n=\log_b a^8\Leftrightarrow (1+2+n-8)\log_b a=0\ \ (1)$$

Vì hai số thực a,b dương khác 1 nên $\log_b a\ne 0$ nên từ (1) suy ra $1+2+n-8=0\Leftrightarrow n=5$.

Dạng 3: So sánh các logarit

Phương pháp: Sử dụng kiến thức cơ bản để so sánh

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho các số dương a,b. Tìm điều kiện của a, b để $\log_a \frac{1}{2} > \log_a \frac{1}{3}$ và $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải

Ta có : $\log_a \frac{1}{2} > \log_a \frac{1}{3}$ và do $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ nên $a > 1$.

Vì $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$ và $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ nên $0 < b < 1$.

Bài tập 2: Cho các số dương a,b. Tìm điều kiện của a, b để $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) > \log_b\left(2+\sqrt{3}\right)$ và $a^{\frac{13}{7}} < a^{\frac{15}{8}}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \frac{13}{7} < \frac{15}{8} \\ a^{\frac{13}{7}} < a^{\frac{15}{8}} \end{cases} \Rightarrow a > 1$.

Mặt khác: $\begin{cases} \sqrt{2}+\sqrt{5} < 2+\sqrt{3} \\ \log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) > \log_b\left(2+\sqrt{3}\right) \end{cases} \Rightarrow 0 < b < 1$.

Bài tập 3: Cho hai số thực a, b biết $0 < a < b < 1$. Hãy so sánh $\log_a b$ và $\log_b a$

Lời giải

Do $0 < a < b < 1$ nên ta có $1 = \log_a a > \log_a b$; $\log_b a > \log_b b = 1$. Vậy ta có $\log_a b < \log_b a$.

Bài tập 4: Xét a và b là hai số thực dương tùy ý. Đặt $x = \ln\left(a^2 - ab + b^2\right)^{1000}$; $y = 1000\ln a - \ln\frac{1}{b^{1000}}$. Hãy so sánh x và y

Lời giải

Ta có $a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0, \forall a > 0; b > 0$.

$x = \ln\left(a^2 - ab + b^2\right)^{1000} = 1000.\ln\left(a^2 - ab + b^2\right)$.

$y = 1000\ln a - \ln\frac{1}{b^{1000}} = 1000\ln a + 1000.\ln b = 1000.\ln(ab)$.

Với $\forall a > 0; b > 0$ thì $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \ge ab$.

Suy ra $\ln\left(a^2 - ab + b^2\right) \ge \ln(ab)$.

Ta thấy $\ln\left(a^2-ab+b^2\right)=\ln(ab)$, khi và chỉ khi $x=y$. Do vậy $x\ge y$.

Bài tập 5: Cho hai số thực dương m, n $(n\ne 1)$ thỏa mãn $\dfrac{\log_7 m.\log_2 7}{\log_2 10-1}=3+\dfrac{1}{\log_n 5}$. Tìm mối quan hệ giữa m và n.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{\log_7 m.\log_2 7}{\log_2 10-1}=3+\dfrac{1}{\log_n 5}\Leftrightarrow\dfrac{\log_2 m}{\log_2 5}=3+\log_5 n$

$\Leftrightarrow\log_5 m=3+\log_5 n\Leftrightarrow\log_5 m-\log_5 n=3\Leftrightarrow\log_5\dfrac{m}{n}=3\Leftrightarrow\dfrac{m}{n}=5^3=125\Leftrightarrow m=125n$.

Bài tập 6: Cho các số thực dương a,b khác 1 thoả mãn $\log_2 a=\log_b 16$ và $ab=64$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\log_2\dfrac{a}{b}\right)^2$

Lời giải

Ta có: $\log_2 a=\log_b 16\Leftrightarrow\log_2 a=\dfrac{1}{\log_{16} b}\Leftrightarrow\log_2 a.\log_2 b=4$.

Mặt khác: $ab=64\Rightarrow\log_2 ab=\log_2 64\Rightarrow\log_2 a+\log_2 b=6$.

Khi đó: $\left(\log_2\dfrac{a}{b}\right)^2=\left(\log_2 a-\log_2 b\right)^2=\left(\log_2 a+\log_2 b\right)^2-4\log_2 a.\log_2 b=6^2-4.4=20$.

Bài tập 7: Cho các số dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a(bc)=2,\log_b(ca)=4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\log_a(bc)=2\\ \log_b(ca)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\log_c(bc)}{\log_c a}=2\\ \dfrac{\log_c(ca)}{\log_c b}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_c b+1=2\log_c a\\ 1+\log_c a=4\log_c b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\log_c a-\log_c b=1\\ \log_c a-4\log_c b=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_c a=\dfrac{5}{7}\\ \log_c b=\dfrac{3}{7}\end{cases}$. Vậy $\log_c(ab)=\log_c a+\log_c b=\dfrac{8}{7}$.

Bài tập 8: Cho biết hai số thực dương a và b thỏa mãn $\log_a^2(ab)=4$; với $b>1>a>0$. Tính giá trị của biểu thức $\log_a^3\left(ab^2\right)$.

Lời giải

Với $b>1>a>0$ ta có :

$\log_a^2(ab)=4\Leftrightarrow\left(\log_a a+\log_a b\right)^2=4\Leftrightarrow\left(1+\log_a b\right)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+\log_a b=2\\ 1+\log_a b=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_a b=1\\ \log_a b=-3\end{array}\right.$

Vì $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$ nên $\log_a b = -3$. Khi đó :

$\log_a^3\left(ab^2\right) = \left(\log_a a + 2\log_a b\right)^3 = \left(1 + 2.(-3)\right)^3 = -125$.

Bài tập 9: Cho $a,b > 0; a,b \ne 1$ thỏa mãn $\log_a{}^2 b - 8\log_b\left(a\sqrt[3]{b}\right) = \frac{-8}{3}$. Tính giá trị $P = \log_a\left(a\sqrt[3]{ab}\right) + 2019$

Lời giải

$\log_a{}^2 b - 8\log_b\left(a\sqrt[3]{b}\right) = \frac{-8}{3} \Leftrightarrow \log_a{}^2 b - 8\log_b a = 0 \Leftrightarrow \log_a{}^3 b - 8 = 0 \Leftrightarrow \log_a b = 2 \Leftrightarrow a^2 = b$

$P = \log_a\left(a\sqrt[3]{ab}\right) + 2019 = 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \log_a a^2\right) + 2019 = 1 + \frac{1}{3}(1+2) + 2019 = 2021$.

Bài tập 10: Cho các số thực a,b,c,d thoả mãn $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^b} + \frac{1}{8^c} + \frac{1}{16^d} = \frac{1}{4}$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b + 3c + 4d$. Giá trị của biểu thức $\log_2 m$ bằng

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^b} + \frac{1}{8^c} + \frac{1}{16^d} \ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{2^a}.\frac{1}{4^b}.\frac{1}{8^c}.\frac{1}{16^d}} \Leftrightarrow \frac{1}{16} \ge \sqrt[4]{\frac{1}{2^{a+2b+3c+4d}}} \Leftrightarrow 2^{a+2b+3c+4d} \ge 2^{16}$

$\Leftrightarrow a + 2b + 3c + 4d \ge 16$

Dấu “=” xảy ra khi: $\frac{1}{2^a} = \frac{1}{4^b} = \frac{1}{8^c} = \frac{1}{16^d} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = \frac{4}{3} \\ d = 1 \end{cases}$. Khi đó $m = 16 \Rightarrow \log_2 m = 4$.

Dạng 4: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Phương pháp: Bài toán lại kép

Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ. Công thức: $T_n = T_0\left(1+r\right)^n$

Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
T_0 : Số tiền gửi ban đầu;
n : Số kỳ hạn tính lãi;
r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là: $a = 15500\left(5-\log p\right)$ trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal).Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển.

Lời giải

Để tính áp suất không khí ở độ cao $8.850\,\text{m}$, ta thay a $= 8.850$ vào công thức và giải phương trình để tìm giá trị của p.

Ta có: $a = 15.500\left(5-\log p\right).8.850 = 15.500\left(5-\log p\right)$

$\Leftrightarrow 5-\log p = \dfrac{8.850}{15.500} \Leftrightarrow \log p = 5-\dfrac{8.850}{15.500} \Leftrightarrow \log p = 3.407$

Suy ra: $p = 10^3 \cdot 407 \approx 245{,}37 Pa$

Vậy áp suất không khí ở độ cao $8.850\,\text{m}$ so với mực nước biển là khoảng 245,37 Pa.

Bài tập 2: Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau: $L\left(I\right) = 10\log\dfrac{I}{I_0}$ trong đó $I_0 = 10^{-12}\ \text{W}/\text{m}^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là *ngưỡng nghe*). Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $l = 10^{-7}\ \text{W}/\text{m}^2$.

b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $\text{I} = 10^{-3}\ \text{W}/\text{m}^2$.

Lời giải

a) Áp dụng công thức: $L(I) = 10\log\dfrac{I}{I_0}$

$L\left(10^{-7}\right) = 10\log\dfrac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10\log 10^5 = 10\times 5 = 50dB$

b) Thay các giá trị ta có: $L\left(10^{-3}\right) = 10\log\dfrac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10\log 10^9 = 10.9 = 90\ \text{dB}$

Bài tập 3: Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $\left[\mathrm{H}^{+}\right]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $\left[\mathrm{H}^{+}\right]=8\cdot10^{-8}$. Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

(*Nguồn: https://nongnghiep.farmvina.com*)

Lời giải

Ta có $pH=-\log\left[H^{+}\right]=-\log 8\cdot10^{-8}\approx 7{,}1$

$\Rightarrow$Độ pH của đầm đó không thích hợp để tôm sú phát triển.

Bài tập 4: a) Nước cất có nồng độ H^{+} là $10^{-7}\ \mathrm{mol/L}$. Tính độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^{+} gấp 20 lần nồng độ H^{+} của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Lời giải

a) Độ pH của nước cất là: $pH=-\log\left[H^{+}\right]=-\log\left[10^{-7}\right]=7$.

b) Nồng độ H^{+} của dung dịch đó là: $20.10^{-7}\ \mathrm{mol/L}$

Độ pH của dung dịch đó là: $pH=-\log\left[H^{+}\right]=-\log\left[20.10^{-7}\right]\approx 5{,}7$.

Bài tập 5: Một vi khuẩn có khối lượng khoảng 5.10^{-13} gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần. Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6\cdot10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

(Nguồn: Câu hỏi và Câu tập vi sinh học, NXB ĐHSP, 2008)

Lời giải

Số lượng tế bào đạt tới khối lượng của Trái Đất là: $N=\dfrac{6.10^{27}}{\left(5.10^{-13}\right)}=1{,}2.10^{40}$

Số lần phân chia: $N=N_o.2^n\Rightarrow n=\dfrac{\log N-\lg N_o}{\lg 2}=133$

Thời gian cần thiết là: $\dfrac{133}{3}=44{,}3$ (giờ)

Bài tập 6: Gia đình bác An gửi tiết kiệm 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $6{,}5\%$/năm. Biết rằng tiền lãi của kì trước được cộng vào gốc tính lãi kì sau (lãi kép).

a) Hỏi sau ba năm, gia đình bác nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu? Nếu tính theo thể thức lãi kép liên tục thì số tiền cả vốn lẫn lãi của gia đình bác An thu được là bao nhiêu (sau ba năm)?

b) Vẫn với 500 triệu đồng, gia đình bác An gửi tiết kiệm với lãi kép $6{,}5\%$/năm theo kì hạn 6 tháng. Hỏi để nhận được cả gốc và lãi là 1 tỉ đồng thì gia đình bác An cần gửi bao nhiêu năm?

Lời giải

a) Ta có: $A_o = 500$ triệu đồng là số tiền gốc ban đầu.

$r = 6,5\% = 0,065$ /năm là lãi suất một kỳ.

$n = 3$ (năm) là số kỳ hạn gửi.

A_n là số tiền cả vốn và lãi nhận được sau n kỳ gửi.

Sau ba năm, gia đình bác An nhận được số tiền cả gốc và lãi là:

$A_n = A_o(1+r)^n = 500.(1+0,065)^3 \approx 603,975$ triệu đồng.

Với thể thức lãi kép liên tục thì số tiền gia đình bác An thu được sau ba năm là:

$A_n = A_o e^{tr} = 500.e^{3.0,065} \approx 607,655$ triệu đồng.

b) Ta có: $A_o = 500$ triệu đồng là số tiền gốc ban đầu.

$r = 6,5\% = 0,065$ /năm là lãi suất một kỳ.

n là số năm cần gửi.

$A_n = 1$ tỉ đồng là số tiền cả vốn và lãi nhận được sau n năm gửi.

Do kì hạn là 6 tháng, tức là mỗi năm là 2 kì tính lãi nên:

Số kì gửi là $N = 2n$, lãi suất mỗi kì gửi là $\frac{r}{2}$.

Khi đó: $A_n = A_o\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n} \Leftrightarrow 1000 = 500.\left(1+\frac{0,65\%}{2}\right)^{2n} \Leftrightarrow 1,0325^{2n} = 2$.

$\Leftrightarrow n = \frac{\log_{1,0325} 2}{2} \approx 10,83$ (năm).

Vậy, gia đình bác An cần gửi ít nhất 11 năm để nhận được số tiền như dư định.

Bài tập 7: Người ta sử dụng công thức $S = A.e^{n.r}$ để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó A là số dân của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau n năm và r là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là $78.685.800$ người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $1,2\%$, hỏi dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

Lời giải

Theo công thức tăng trưởng mũ: $S = A.e^{n.r}$

$\Rightarrow 110000000 = 78685800.e^{1,2\%.n} \Leftrightarrow n = \frac{1}{1,2\%}\ln\frac{110000000}{78685800} \simeq 27,91$

$\Rightarrow$ Sau 28 năm thì dân số Việt Nam năm nào sau đây đạt 110 triệu người.

Vậy dân số đạt 110 triệu người vào năm 2029

Bài tập 8: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho 200000000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $243\,101\,250$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

Bài tập 9: Cường độ một trận động đất M được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ $8,3$ độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở gần đó đo được $7,1$ độ Richter. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu trận động đất này.

Lời giải

Xét trận động đất ở San Francisco, ta có

$$8,3=\log A-\log A_0 \Leftrightarrow 8,3=\log\frac{A}{A_0} \Leftrightarrow \frac{A}{A_0}=10^{8,3} \Leftrightarrow A=A_0.10^{8,3}$$

Xét trận động đất khác gần đó, ta có:

$$7,1=\log A-\log A_0 \Leftrightarrow 7,1=\log\frac{A}{A_0} \Leftrightarrow \frac{A}{A_0}=10^{7,1} \Leftrightarrow A=A_0.10^{7,1}$$

Từ đó ta tính tỉ lệ: $\frac{A_0.10^{8,3}}{A_0.10^{7,1}}=10^{1,2}\simeq 15,8$

Vậy trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp $\simeq 15,8$ trận động đất khác gần đó.

Bài tập 10: Trong nuôi trồng thuỷ sản , độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản . Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất trong khoảng từ 7,8 đến 8,5 . Phân tích nồng độ $\left[H^+\right]$ trong một đầm nuôi tôm sú thu được $\left[H^+\right] = 8.10^{-8}$. Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho nuôi tôm sú phát triển không ?

Lời giải

Độ pH của đầm là : $\text{pH}=-\log\left[H^+\right]=-\log\left(8.10^{-8}\right) \approx 7,1$

Ta thấy 7,1 < 7,2 nên độ pH của đầm chưa thích hợp để cho tôm sú phát triển.

Bài tập 11: Một vi khuẩn có khối lượng khoảng 5.10^{-13} gam và cứ sau 20 phút vi khẩn đó tự nhân đôi một lần . Giả sử được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại ít nhất là 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đât là 6.10^{-23} gam (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi $\alpha_0=5.10^{-3}$ (gam) là khối lượng ban đầu của vi khuẩn .

Sau 20 phút đầu tiên, khối lượng của vi khuẩn là : $\alpha_0.2$.

Sau 20 phút thứ 2, khối lượng của vi khuẩn là : $(\alpha_0.2).2=\alpha_0.2^2$

Sau 20 phút thứ 3, khối lượng của vi khuẩn là : $\left(\alpha_0.2^2\right).2=\alpha_0.2^3$.

Sau 20 phút thứ n, khối lượng vi khuẩn là : $\alpha_0.2^n$.

Gỉa sử : $\alpha_0.2^n= 6.10^{27} \Leftrightarrow 5.10^{-3}.2^n=6.10^{27} \Leftrightarrow 2^n=1,2.10^{30} \Leftrightarrow n=\log_2\left(1,2.10^{10}\right)\approx 100$

Vậy sau khoảng 100.20 = 2000 phút $\approx$ 33,3 (giờ) thì khối lượng của tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính giá trị biểu thức $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$

A. -2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)=\log_2\left(2.2^{\frac{1}{2}}\right)=\log_2\left(2^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2}$.

Câu 2: Tính giá trị biểu thức $3^{2\log_3 5}$

A. 10. **B.** 25. **C.** 7. **D.** 20.

Lời giải

Ta có $3^{2\log_3 5}=3^{\log_3 5^2}=5^2=25$.

Câu 3: Cho $\log_a 3=5$. Tính $P=\log_a\left(3a^5\right)$.

A. $P=10$ **B.** $P=25$ **C.** $P=12$ **D.** $P=125$

Lời giải

Ta có: $\log_a\left(3a^5\right)=\log_a 3+\log_a a^5=5+5=10$.

Câu 4: Với mọi số thực a dương, $\log_2\frac{a}{2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log_2 a$. **B.** $\log_2 a+1$. **C.** $\log_2 a-1$. **D.** $\log_2 a-2$.

Lời giải

Có $\log_2\frac{a}{2}=\log_2 a-\log_2 2=\log_2 a-1$.

Câu 5: Với mọi a,b thỏa mãn $\log_2 a-3\log_2 b=2$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a=4b^3$. **B.** $a=3b+4$. **C.** $a=3b+2$. **D.** $a=\frac{4}{b^3}$.

Lời giải

Điều kiện: $a,b>0$

$$\log_2 a-3\log_2 b=2\Leftrightarrow \log_2 a-\log_2 b^3=2\Leftrightarrow \log_2\frac{a}{b^3}=2\Leftrightarrow \frac{a}{b^3}=4\Leftrightarrow a=4b^3$$

Câu 6: Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

A. $1-\log a$. **B.** $2+\log a$. **C.** $2-\log a$. **D.** $1+\log a$.

Lời giải

$\log(100a)=\log(100)+\log a=2+\log a$

Câu 7: Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a\sqrt[4]{a}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Lời giải

Ta có: $\log_a \sqrt[4]{a} = \log_a a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$.

Câu 8: Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a\left(b^2c^3\right)$.

A. $P = 13$ **B.** $P = 31$ **C.** $P = 30$ **D.** $P = 108$

Lời giải

Ta có: $\log_a\left(b^2c^3\right) = 2\log_a b + 3\log_a c = 2.2 + 3.3 = 13$.

Câu 9: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Giá trị của $3\log_2 a + 2\log_2 b$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 32.

Lời giải

Ta có: $\log_2 a^3b^2 = \log_2 32 \Leftrightarrow 3\log_2 a + 2\log_2 b = 5$

Câu 10: Cho a,b là các số thực dương lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_{a^2} b + \log_{ab^2} b^5$

A. $P = 3$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 5$.

Lời giải

Ta có $P = \log_{a^2} b + \log_{ab^2} b^5 = \log_{a^2} b + \frac{1}{\log_{b^5} ab^2} = \frac{1}{2}\log_a b + \frac{1}{\log_{b^5} a + \log_{b^5} b^2}$

$= \frac{1}{2}\log_a b + \frac{1}{\frac{1}{5}\log_b a + \frac{2}{5}} = \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{\frac{1}{5}.\frac{1}{2} + \frac{2}{5}} = 1 + 2 = 3$.

Câu 11: Cho $\log_7 25 = m$ và $\log_2 5 = n$. Tính $A = \log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$ theo m và n

A. $\frac{9m + 12n}{mn}$ **B.** $\frac{-9m + 12n}{mn}$ **C.** $-9m + 12n + mn$ **D.** $\frac{-3m + 4n}{3mn}$

Lời giải

$\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8} = 3\left(\log_5 49 - \log_5 8\right) = 3\left(2\log_5 7 - 3\log_5 2\right)$

Ta có: $\log_7 25 = 2\log_7 5 = \frac{2}{\log_5 7} = m \Rightarrow \log_5 7 = \frac{2}{m}$

$\log_2 5 = n \Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 2} = n \Leftrightarrow \log_5 2 = \frac{1}{n} \Rightarrow A = 3\left(\frac{4}{m} - \frac{3}{n}\right) = \frac{12n - 9m}{mn}$

Câu 12: Cho $\log 2 = a$. Tính $A = \log\frac{125}{4}$ theo a?

A. $6 + 7a$ **B.** $2(a + 5)$ **C.** $4(1 + a)$ **D.** $3 - 5a$

Lời giải

$A = \log\frac{125}{4} = \log 125 - \log 4 = \log 5^3 - \log 2^2$

$= 3\log 5 - 2\log 2 = \frac{3}{\log_5 10} - 2\log 2 = \frac{3}{\log_5 (5.2)} - 2\log 2 = \frac{3}{\log_5 2 + 1} - 2\log_2$

Ta có: $\log 2=\dfrac{1}{\log_2 10}=\dfrac{1}{\log_2(2.5)}=\dfrac{1}{1+\log_2 5}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+\log_2 5}=a\Leftrightarrow 1+\log_2 5=\dfrac{1}{a}\Leftrightarrow \log_2 5=\dfrac{1-a}{a}\Rightarrow \log_5 2=\dfrac{a}{1-a}$

$\Rightarrow A=\dfrac{3}{\dfrac{a}{1-a}+1}-2a=3(1-a)-2a=3-5a$

Câu 13: Cho $a=\log_3 5$, $b=\log_2 7$, $c=\log_2 3$ và $I=\dfrac{-1}{\log 126}\left(\log\dfrac{1}{2}+\log\dfrac{2}{3}+\log\dfrac{3}{4}+...+\log\dfrac{149}{150}\right)$. Tính I theo a, b, c.

A. $\dfrac{1+c+2ac}{1+2c+b}$. **B.** $\dfrac{1+c-2ac}{1+2c+b}$. **C.** $\dfrac{1+c-2ac}{1+2c-b}$. **D.** $\dfrac{1+c+2ac}{1+2c-b}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\log_2 5=\log_2 3\log_3 5=ac$.

Ta có: $I=\dfrac{-1}{\log 126}.\log\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4}.....\dfrac{149}{150}\right)=\dfrac{\log 150}{\log 126}$

$=\log_{126}150=\dfrac{\log_2 150}{\log_2 126}=\dfrac{1+\log_2 3+2\log_2 5}{1+2\log_2 3+\log_2 7}=\dfrac{1+c+2ac}{1+2c+b}$.

Câu 14: Cho số thực dương a khác 1. Giá trị của biểu thức $\log_2(4a)$ bằng

A. $4+\log_2 a$. **B.** $2+\log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $4\log_2 a$.

Lời giải

Ta có $\log_2(4a)=\log_2 4+\log_2 a=2+\log_2 a$.

Câu 15: Cho a và b là các số thực dương tùy ý. Nếu $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ và $\log_b\left(\dfrac{1}{3}\right)<\log_b\left(\dfrac{1}{4}\right)$ thì

A. $a>1, 0<b<1$. **B.** $0<a<1, 0<b<1$. **C.** $a>1, b>1$. **D.** $0<a<1, b>1$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}$ mà $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ nên $a>1$

Mặt khác: $\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$ mà $\log_b\left(\dfrac{1}{3}\right)<\log_b\left(\dfrac{1}{4}\right)$ nên $0<b<1$.

Câu 16: Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^2}\left(\dfrac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right)=3$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $-\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $\log_{a^2}\left(\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right)=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\log_a a^3-\log_a b^{\frac{3}{5}}\right)=3 \Leftrightarrow 3-\frac{3}{5}\log_a b=6 \Leftrightarrow \log_a b=-5$.

Câu 17: Cho số $a>0, a\neq 1$ thỏa mãn $a^x=b$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a=\log_x b$. **B.** $a=\log_b x$. **C.** $x=\log_a b$. **D.** $x=\log_b a$.

Lời giải

Ta có $a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$.

Câu 18: Tính giá trị của biểu thức $P=2^{\log_2 a}+\log_a\left(a^b\right)$ $(a>0, a\neq 1)$.

A. $P=2^a+b$. **B.** $P=a-b$. **C.** $P=2a+b$. **D.** $P=a+b$.

Lời giải

Ta có $P=2^{\log_2 a}+\log_a\left(a^b\right)=a+b$.

Câu 19: Với a,b là các số thực dương, khác 1. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_3(ab)=\log_3 a+\log_3 b$. **B.** $\log_a b=\frac{\log_{2022} b}{\log_{2022} a}$.

C. $1-\log_a b=\log_a \frac{a}{b}$. **D.** $\log_a b^3=\frac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải

Ta có: $\log_a b^3=3\log_a b$.

Câu 20: Giá trị của biểu thức $P=\log_2 8+\log_{\sqrt{3}} 9$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $P=\log_2 8+\log_{\sqrt{3}} 9=\log_2 2^3+\log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^2=3\log_2 2+4\log_3 3=3+4=7$.

Câu 21: Cho a là số thực dương khác 1. Tính $P=\log_a\left(a^4.a^{\frac{1}{3}}\right)$.

A. $P=\frac{3}{4}$. **B.** $P=12$. **C.** $P=1$. **D.** $P=\frac{13}{3}$.

Lời giải

Ta có $P=\log_a\left(a^4.a^{\frac{1}{3}}\right)=\log_a\left(a^{\frac{13}{3}}\right)=\frac{13}{3}$.

Câu 22: Với mọi a,b dương thỏa mãn $\log_2\sqrt{a}-\log_2 b=3$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a=64b^2$. **B.** $ab^2=64$. **C.** $\sqrt{a}-b=8$. **D.** $\frac{\sqrt{a}}{b}=3$.

Lời giải

Ta có $\log_2\sqrt{a}-\log_2 b=3 \Leftrightarrow \log_2\frac{\sqrt{a}}{b}=3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{b}=2^3 \Leftrightarrow a=64b^2$.

Câu 23: Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[5]{a}$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a (a)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

Câu 24: Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[2021]{a^{2022}}$ bằng

A. 2021. **B.** $\frac{2022}{2021}$. **C.** $\frac{2021}{2022}$. **D.** 2022.

Lời giải

Với $a>0$ và $a\neq 1$ ta có: $\log_a \sqrt[2021]{a^{2022}} = \log_a a^{\frac{2022}{2021}} = \frac{2022}{2021}\log_a a = \frac{2022}{2021}$.

Câu 25: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Lời giải

$I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^2=2\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)=2$.

Câu 26: Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I=\log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a^3}{125}\right)$.

A. $I=-\frac{1}{3}$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=3$.

Lời giải

Ta có: $I=\log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a^3}{125}\right)=\log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a}{5}\right)^3=3$.

Câu 27: Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_5 a=5$ và $\log_3 b=\frac{2}{3}$. Tính giá trị biểu thức $I=2\log_6\left[\log_5(5a)\right]+\log_{\frac{1}{9}} b^3$.

A. $I=3$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=2\log_6 5+1$.

Lời giải

Ta có: $I=2\log_6\left[\log_5(5a)\right]+\log_{\frac{1}{9}} b^3=2\log_6(1+\log_5 a)-\frac{3}{2}\log_3 b=2\log_6 6-\frac{3}{2}.\frac{2}{3}=2-1=1$.

Câu 28: Cho a,b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^3}\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}=2$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$

bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Lời giải

Ta có: $2=\log_{a^3}\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}=\frac{1}{3}\log_a\frac{a^5}{b^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{3}\left(\log_a a^5-\log_a b^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{3}\left(5-\frac{1}{4}\log_a b\right)$

$\Rightarrow 5-\frac{1}{4}\log_a b=6\Rightarrow \log_a b=-4$.

Câu 29: Cho $a,\ b$ là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b=\sqrt{3}$. Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)$ là

A. $-\sqrt{3}$. **B.** $-2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Ta có: $\log_a b=\sqrt{3}\Leftrightarrow b=a^{\sqrt{3}}\Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)=\log_{\frac{a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{a}}\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 30: Cho số thực $a>0$; $a\neq 1, a\neq\frac{1}{27}$ và số thực x thỏa mãn $\log_a 3=x$. Tính $\log_{27a}9$ theo x.

A. $\frac{2x}{x+3}$. **B.** $\frac{2x}{3x+1}$. **C.** $2(3x+1)$. **D.** $\frac{2}{3x+1}$.

Lời giải

Ta có: $\log_{27a}9=\frac{\log_3 9}{\log_3 27a}=\frac{2}{\log_3 27+\log_3 a}=\frac{2}{3+\log_3 a}=\frac{2}{\frac{1}{\log_a 3}+3}=\frac{2}{\frac{1}{x}+3}=\frac{2x}{3x+1}$.

Câu 31: Cho $\log_a b=3,\ \log_a c=-4$. Khi đó $P=\log_a\left(\frac{a^3\sqrt{c}}{b^2}\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $P=7$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=11$. **D.** $P=-5$.

Lời giải

$P=\log_a\left(\frac{a^3\sqrt{c}}{b^2}\right)=\log_a a^3\sqrt{c}-\log_a b^2=\log_a a^3+\log_a c^{\frac{1}{2}}-\log_a b^2=3+\frac{1}{2}\log_a c-2\log_a b$

$=3+\frac{1}{2}(-4)-2.3=-5$.

Câu 32: Cho x,y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}}y=\frac{2y}{5},\log_{25}x=\frac{5}{2y}$. Tính giá trị của $P=y^2-2x^2$.

A. $P=1$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-25$. **D.** $P=25$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\log_{\sqrt{x}} y = \dfrac{2y}{5} \\ \log_{25} x = \dfrac{5}{2y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_x y^2 = \dfrac{2y}{5} \\ \log_x 25 = \dfrac{2y}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2 = 25 \\ \log_{25} x = \dfrac{5}{2y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 5 \\ \log_{25} x = \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 5 \\ x = 5\end{cases}$

Vậy $P = y^2 - 2x^2 = -25.$

Câu 33: Cho a,b,c là các số thực dương, trong đó $a,b > 1$ và thỏa mãn $\log_a c = 3,\ \log_b c = 4$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_{ab} c$?

A. $P = \dfrac{12}{7}$. **B.** $P = \dfrac{7}{12}$. **C.** $P = \dfrac{1}{12}$. **D.** $P = 12$.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $c \neq 1$ và $\log_c a = \dfrac{1}{\log_a c} = \dfrac{1}{3}; \log_c b = \dfrac{1}{\log_b c} = \dfrac{1}{4}$.

Khi đó, $P = \log_{ab} c = \dfrac{1}{\log_c (ab)} = \dfrac{1}{\log_c a + \log_c b} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{12}{7}$.

Câu 34: Với mọi a,b thoả mãn $\dfrac{\log_3 a.\log_2 3}{1 + \log_2 5} + \log b = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a = 1 - b\log_2 5$. **B.** $ab = 10$. **C.** $a\log_2 5 + b = 1$. **D.** $a + b = 1$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{\log_3 a.\log_2 3}{1 + \log_2 5} + \log b = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_2 a}{\log_2 10} + \log b = 1 \Leftrightarrow \log a + \log b = 1$

$\Leftrightarrow \log(ab) = 1 \Leftrightarrow ab = 10$.

Câu 35: Cho $\log_2 5 = m$, $\log_3 5 = n$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo m và n là

A. $m^2 + n^2$. **B.** $\dfrac{mn}{m+n}$. **C.** $m + n$. **D.** $\dfrac{1}{m+n}$.

Lời giải

Ta có $\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 (2.3)} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{m+n}$

Câu 36: Với mọi số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2 a + \log_4 b = 1$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^2 b = 1$. **B.** $ab^2 = 4$. **C.** $ab^2 = 1$. **D.** $a^2 b = 4$.

Lời giải

Ta có: $\log_2 a + \log_4 b = 1 \Leftrightarrow \log_2 a + \dfrac{1}{2}\log_2 b = 1 \Leftrightarrow 2\log_2 a + \log_2 b = 2 \Leftrightarrow \log_2 a^2 + \log_2 b = 2$

$\Leftrightarrow \log_2 a^2 b = 2 \Leftrightarrow a^2 b = 4$.

Câu 37: Đặt $a = \ln 2$ và $b = \ln 5$. Rút gọn biểu thức $P = \ln\dfrac{2}{5} + \ln\dfrac{5}{8} + \ln\dfrac{8}{11} + \ln\dfrac{11}{4} + ... + \ln\dfrac{7997}{8000}$.

A. $P=6a-3b$. **B.** $P=5a-3b$. **C.** $P=3a-6b$. **D.** $P=-5a-3b$.

Lời giải

Ta có: $P=\ln\frac{2}{5}+\ln\frac{5}{8}+\ln\frac{8}{11}+\ln\frac{11}{4}+...+\ln\frac{7997}{8000}=\ln\left(\frac{2}{5}.\frac{5}{8}.\frac{8}{11}.\frac{11}{4}...\frac{7997}{8000}\right)=\ln\frac{1}{4000}$

$=-\ln\left(2^5.5^3\right)=-5\ln 2-3\ln 5=-5a-3b$.

Câu 38: Cho $a=\log_7 5, b=\log_3 5$. Biểu thức $M=\log_{21}5$ bằng

A. $\frac{ab}{a+b}$. **B.** ab. **C.** $\frac{1}{ab}$. **D.** $\frac{a+b}{ab}$.

Lời giải

Ta có $M=\log_{21}5=\frac{1}{\log_5 21}=\frac{1}{\log_5 3+\log_5 7}=\frac{1}{\frac{1}{\log_3 5}+\frac{1}{\log_7 5}}$

$=\frac{1}{\frac{\log_7 5+\log_3 5}{\log_7 5.\log_3 5.}}=\frac{\log_7 5.\log_3 5}{\log_7 5+\log_3 5.}=\frac{ab}{a+b}$.

Câu 39: Cho a, $b>0$. Nếu $\ln x=5\ln a+2\ln\sqrt{b}$ thì x bằng

A. $10a\sqrt{b}$. **B.** $\frac{a^5}{b}$. **C.** a^5b. **D.** a^5+b.

Lời giải

$\ln x=5\ln a+2\ln\sqrt{b}\Leftrightarrow \ln x=\ln a^5+\ln\left(\sqrt{b}\right)^2\Leftrightarrow \ln x=\ln a^5+\ln b\Leftrightarrow \ln x=\ln\left(a^5b\right)\Leftrightarrow x=a^5b$

Câu 40: Cho x,y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}}y=\frac{2y}{5}, \log_{25}x=\frac{5}{2y}$. Tính giá trị của $P=y^2-2x^2$.

A. $P=1$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-25$. **D.** $P=25$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\log_{\sqrt{x}}y=\frac{2y}{5}\\ \log_{25}x=\frac{5}{2y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x y^2=\frac{2y}{5}\\ \log_x 25=\frac{2y}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=25\\ \log_{25}x=\frac{5}{2y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ \log_{25}x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ x=5\end{cases}$

Vậy $P=y^2-2x^2=-25$.

Câu 41: Cho số thực dương a,b thỏa mãn $\log_{16}a=\log_{20}b=\log_{25}\frac{2a-b}{3}$. Tỉ số $\frac{a}{b}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Đặt $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \dfrac{2a-b}{3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16^x \\ b = 20^x \\ 2a - b = 3.25^x \end{cases}$

Suy ra $2.16^x - 20^x = 3.25^x \Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{16}{20}\right)^x - 3.\left(\dfrac{25}{20}\right)^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{4}{5}\right)^x - 3.\left(\dfrac{5}{4}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2x} - \left(\dfrac{4}{5}\right)^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{4}{5}\right)^x = -1\,(PTVN) \\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Vậy $\dfrac{a}{b} = \dfrac{16^x}{20^x} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^x = \dfrac{3}{2} \in (1;2)$

Câu 42: Cho x, y là hai số thực dương, $x \neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt[3]{x}} y = \dfrac{3y}{8}, \log_{\sqrt{2}} x = \dfrac{32}{y}$. Tính giá trị của $P = x^2 - y^2$.

A. $P = 120$. **B.** $P = 132$. **C.** $P = 240$. **D.** $P = 340$.

Lời giải

Ta có: $\log_{\sqrt{2}} x = \dfrac{32}{y} \Leftrightarrow 2\log_2 x = \dfrac{32}{y} \Leftrightarrow y = \dfrac{16}{\log_2 x} = 16\log_x 2$ (*).

$\log_{\sqrt[3]{x}} y = \dfrac{3y}{8} \Leftrightarrow 3\log_x y = \dfrac{3y}{8} \Leftrightarrow \log_x y = \dfrac{y}{8} \Leftrightarrow \log_x(16\log_x 2) = 2\log_x 2$

$\Leftrightarrow \log_x(16\log_x 2) = \log_x 2^2 \Leftrightarrow 16\log_x 2 = 4 \Leftrightarrow \log_x 2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16.$

Từ (*) suy ra $y = 4$. Vậy $P = x^2 - y^2 = 16^2 - 4^2 = 240.$

Câu 43: Với hai số thực dương a, b tùy ý và $\dfrac{\log_3 5 \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a = b\log_6 2$. **B.** $a = 36b$. **C.** $2a + 3b = 0$. **D.** $a = b\log_6 3$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{\log_3 5 \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3 a}{\log_3 6} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \log_6 a - \log_6 b = 2$

$\Leftrightarrow \log_6 \dfrac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 36 \Leftrightarrow a = 36b$.

Câu 44: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$ và $\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{\log_{ab} b} - \dfrac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

A. $\sqrt{2014}$. **B.** $\sqrt{2016}$. **C.** $\sqrt{2018}$. **D.** $\sqrt{2020}$.

Lời giải

Do $a>b>1$ nên $\log_a b>0$, $\log_b a>0$ và $\log_b a>\log_a b$.

Ta có: $\dfrac{1}{\log_b a}+\dfrac{1}{\log_a b}=\sqrt{2020}\Leftrightarrow \log_b a+\log_a b=\sqrt{2020}$

$\Leftrightarrow \log_b^2 a+\log_a^2 b+2=2020\Leftrightarrow \log_b^2 a+\log_a^2 b=2018$ (*)

Khi đó, $P=\log_b ab-\log_a ab=\log_b a+\log_b b-\log_a a-\log_a b=\log_b a-\log_a b$

Suy ra: $P^2=\left(\log_b a-\log_a b\right)^2=\log_b^2 a+\log_a^2 b-2=2018-2=2016\Rightarrow P=\sqrt{2016}$.

Câu 45: Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w=24$, $\log_y w=40$ và $\log_{xyz} w=12$. Tính $\log_z w$.

A. 52. **B.** -60. **C.** 60. **D.** -52.

Lời giải

$\log_x w=24\Rightarrow \log_w x=\dfrac{1}{24}$; $\log_y w=40\Rightarrow \log_w y=\dfrac{1}{40}$.

Lại do: $\log_{xyz} w=12\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_w (xyz)}=12\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_w x+\log_w y+\log_w z}=12$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_w x+\log_w y+\log_w z}=12$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\frac{1}{24}+\frac{1}{40}+\log_w z}=12\Leftrightarrow \log_w z=\dfrac{1}{60}\Rightarrow \log_z w=60$.

Câu 46: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}+\dfrac{1}{\log_2 z}=\dfrac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz)=2020$. Tính $\log_2\left(xyz\left(x+y+z\right)-xy-yz-zx+1\right)$

A. 4040. **B.** 1010. **C.** 2020. **D.** 2020^2.

Lời giải

Đặt $a=\log_2 x;b=\log_2 y;c=\log_2 z$.

Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2020}$ và $a+b+c=2020$

$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(a+b+c)=1\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+ac+bc)=abc$

$\Leftrightarrow a^2b+ab^2+abc+abc+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2=0\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$

Vì vai trò a,b,c như nhau nên giả sử $a+b=0\Rightarrow c=2020\Rightarrow z=2^{2020}$ và $xy=1$.

$\log_2\left(xyz\left(x+y+z\right)-xy-yz-zx+1\right)=\log_2\left(z(x+y+z)-1-yz-zx+1\right)$
$=\log_2\left(z^2\right)=2\log_2 z=4040$

Câu 47: Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x}{1-x}\right)$ và hai số thực $m,\, n$ thuộc khoảng $\left(0;1\right)$ sao cho $m+n=1$. Tính $f\left(m\right)+f\left(n\right)$.

A. 2. **B.** 0. **<u>C</u>.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$f\left(m\right)+f\left(n\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)=\frac{1}{2}\left[\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right)+\log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}.\frac{2n}{1-n}\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{4mn}{1-m-n+mn}\right)$, vì $m+n=1$

$=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{4mn}{mn}\right)=\frac{1}{2}\log_2 4=\frac{1}{2}.2=1.$

Câu 48: Cho x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với a là số thực dương khác 1. Giá trị của $p=\frac{9x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{3z}{x}$ là

<u>A</u>. 13. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân nên ta có $xz=y^2$ (1).
$\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng nên:
$\log_a x+\log_{\sqrt[3]{a}} z=2\log_{\sqrt{a}} y\Leftrightarrow \log_a x+3\log_a z=4\log_a y\ \Leftrightarrow xz^3=y^4$ (2).
Từ (1) và (2) ta suy ra $x=y=z$.
Vậy $p=\frac{9x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{3z}{x}=9+1+3=13$.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên dương n để $\log_n 256$ là một số nguyên dương?

A. 2. **B.** 3. **<u>C</u>.** 4. **D.** 1.

Lời giải

$\log_n 256=8.\log_n 2=\frac{8}{\log_2 n}$ là số nguyên dương $\Leftrightarrow \log_2 n\in\left\{1;2;4;8\right\}\Leftrightarrow n\in\left\{2;4;16;256\right\}$.

Vậy có 4 số nguyên dương.

Câu 50: Giả sử $\log_{27}5=a$; $\log_8 7=b$; $\log_2 3=c$. Hãy biểu diễn $\log_{12}35$ theo $a,\ b,\ c$?

<u>A</u>. $\frac{3b+3ac}{c+2}$. **B.** $\frac{3b+3ac}{c+1}$. **C.** $\frac{3b+2ac}{c+3}$. **D.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$.

Lời giải

$\log_{27}5=a\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_3 5=a\Leftrightarrow \frac{\log_2 5}{\log_2 3}=3a\Leftrightarrow \log_2 5=3ac.$

$\log_8 7 = b \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2 7 = b \Leftrightarrow \log_2 7 = 3b.$

Xét $\log_{12} 35 = \frac{\log_2 35}{\log_2 12} = \frac{\log_2(5.7)}{\log_2(3.2^2)} = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{\log_2 3 + 2} = \frac{3ac + 3b}{c + 2}.$

Câu 51: Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3\left(\frac{90}{11}\right)$ theo a, b, c.

A. $P = 2a + b - c$. **B.** $P = a + 2b - c$. **C.** $P = 2a + b + c$. **D.** $P = 2a - b + c$.

Lời giải

Ta có:

$P = \log_3\left(\frac{90}{11}\right) = \log_3\left(\frac{180}{22}\right) = \log_3 180 - \log_3 22 = \log_3(36.5) - \log_3 22$

$= \log_3 36 + \log_3 5 - \log_3 22 = \log_3(6^2) + \log_3 5 - \log_3 22 = 2\log_3 6 + \log_3 5 - \log_3 22 = a + 2b - c$.

Vậy $P = a + 2b - c$.

Câu 52: Đặt $a = \log_2 3; b = \log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20} 12$ theo a, b.

A. $\log_{20} 12 = \frac{a+b}{b+2}$. **B.** $\log_{20} 12 = \frac{ab+1}{b-2}$. **C.** $\log_{20} 12 = \frac{a+1}{b-2}$. **D.** $\log_{20} 12 = \frac{a+2}{ab+2}$.

Lời giải

Ta có $\log_{20} 12 = \frac{\log_2 12}{\log_2 20} = \frac{\log_2(4.3)}{\log_2(4.5)} = \frac{2 + \log_2 3}{2 + \log_2 5} = \frac{2 + \log_2 3}{2 + \log_2 3.\log_3 5} = \frac{a+2}{ab+2}$.

Câu 53: Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

A. $\frac{3a+1}{3-a}$. **B.** $\frac{3a+1}{3+a}$. **C.** $\frac{3a-1}{3+a}$. **D.** $\frac{3a-1}{3-a}$.

Lời giải

Ta có $a = \log_{12} 3 = \frac{1}{\log_3 12} = \frac{1}{1 + 2\log_3 2} \Leftrightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{1-a}$.

Khi đó: $\log_{24} 18 = \frac{\log_2(3^2.2)}{\log_2(2^3.3)} = \frac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \frac{1 + 2.\frac{2a}{1-a}}{3 + \frac{2a}{1-a}} = \frac{1+3a}{3-a}$.

Câu 54: Nước chanh có độ pH bằng $2,4$; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)?

A. $3,9$. **B.** $3,98$. **C.** $4,3$. **D.** $4,5$.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là nồng độ H^+ trong nước chanh và giấm. Theo giả thiết ta có

$2,4 = -\log x$ và $3 = -\log y$.

Suy ra $x = 10^{-2,4}$ và $y = 10^{-3}$.

Suy ra $\frac{x}{y} \approx 3,98$.

Vậy nước chanh có độ acid gấp $3,98$ lần giấm.

Câu 55: Trên một chiếc đài Radio FM có vạch chia để người dùng có thể dò sóng cần tìm. Vạch ngoài cùng bên trái và vạch ngoài cùng bên phải tương ứng với $88Mhz$ và $108Mhz$. Hai vạch này cách nhau 10cm. Biết vị trí của vạch cách vạch ngoài cùng bên trái $d(\text{cm})$ thì có tần số bằng $k.a^d\,(Mhz)$ với k và a là hai hằng số. Tìm vị trí tốt nhất của vạch để bắt sóng VOV1 với tần số $102,7\,Mhz$.

A. Cách vạch ngoài cùng bên phải $7,35\text{cm}$. **B.** Cách vạch ngoài cùng bên phải $2,46\text{cm}$.
C. Cách vạch ngoài cùng bên trái $7,54\text{cm}$. **D.** Cách vạch ngoài cùng bên trái $8,23\text{cm}$

Lời giải

Ta có:

$d=0 \Rightarrow k.a^0=88 \Rightarrow k=88$.

$d=10 \Rightarrow k.a^{10}=108 \Rightarrow 88.a^{10}=108 \Rightarrow a^{10}=\dfrac{108}{88} \Rightarrow a=\sqrt[10]{\dfrac{108}{88}}$.

Gọi d_1 là vị trí để vạch có tần số $102,7\,Mhz$ khi đó ta có

$$88.\left(\sqrt[10]{\frac{108}{88}}\right)^{d_1}=102,7 \Leftrightarrow \left(\sqrt[10]{\frac{108}{88}}\right)^{d_1}=\frac{102,7}{88} \Leftrightarrow d_1=\log_{\sqrt[10]{\frac{108}{88}}}\frac{102,7}{88}=7,54.$$

Vậy vị trí tốt nhất của vạch để bắt sóng VOV1 với tần số $102,7\,Mhz$ là $7,54\text{cm}$.

Câu 56: Biết rằng vi khuẩn E. coli là vi khuẩn gây tiêu chảy đường ruột, gây đau bụng dữ dội, ngoài ra cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi, nghĩa là số lượng tính theo công thức $S=S_0.2^n$, S_0 là số lượng ban đầu, n là số lần nhân đôi. Ban đầu chỉ có 40 con vi khuẩn nói trên trong đường ruột, hỏi sau bao lâu số lượng vi khuẩn là 671088640 con?

A. 20 giờ. **B.** 8 giờ. **C.** 12 giờ. **D.** 6 giờ.

Lời giải

Ta có: $S=S_0.2^n$.

Suy ra $671088640=40.2^n \Leftrightarrow 2^n=\dfrac{671088640}{40}=16777216 \Leftrightarrow n=\log_2 16777216=24$.

Để số lượng vi khuẩn là 671088640 con thì vi khuẩn đã có 24 lần nhân đôi.

Do đó, thời gian mà vi khuẩn đã thực hiện 24 lần nhân đôi đó là $20.24=480$ phút (8 giờ).

Vậy, sau 8 giờ số lượng vi khuẩn là 671088640 con.

Câu 57: Vào cuối năm 2022, báo Rossiyskaya Gazeta dẫn lời Bộ trưởng Tài nguyên Nga cảnh báo nước này sẽ cạn kiệt dầu mỏ sau 28 năm nữa nếu sản lượng khai thác hằng năm vẫn giữ như năm 2022. Bắt đầu từ năm 2023, nếu nước Nga mỗi năm giảm sản lượng khai thác 2% so với năm trước thì sau bao nhiêu năm nữa nước này cạn kiệt dầu mỏ (chọn phương án có kết quả gần nhất với tính toán của bạn)?

A. 52. **B.** 32. **C.** 44. **D.** 40.

Lời giải

Gọi S (tỷ tấn) là sản lượng dầu mỏ còn lại của Nga trên thực tế tính từ cuối năm 2022.

x (tỷ tấn) là sản lượng khai khác hằng năm như năm 2022.

Theo đề bài, ta có: $S = 28x$ (tỷ tấn).

Gọi n là số năm khai thác còn lại với sản lượng khai thác thay đổi hằng năm tính từ 2023.

Lượng khai thác mỗi năm tính từ năm 2023 là: $x.\dfrac{(1-2\%)^n-1}{(1-2\%)-1} = \dfrac{0,98^n-1}{-0,02}x$ (tỷ tấn).

Đến khi khai thác hết, ta có: $\dfrac{0,98^n-1}{-0,02}x = 28x \Leftrightarrow n = \log_{0,98}(1-0,02.28) \approx 40.64$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_{a^5} b = 5\log_a b$

b) $\log_a b > 1$

c) $\log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = \dfrac{6}{\log_b a}$

d) Nếu $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_3(a+b) = 1 + \log_3 a + \log_3 b$

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\log_{a^5} b = \dfrac{1}{5}\log_a b$

b) Đúng: Ta có : $\log_a b > \log_a a = 1$.

c) Đúng: Ta có : $\log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3\log_a b + 3\log_a b = 6\log_a b = \dfrac{6}{\log_b a}$.

d) Sai: Ta có: Ta có: $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab\ (*)$.

Do $a, b > 0 \Rightarrow \begin{cases} ab > 0 \\ a+b > 0 \end{cases}$, lấy logarit cơ số 2 hai vế của $(*)$ ta được:

$\log_3(a+b)^2 = \log_3(9ab) \Leftrightarrow 2\log_3(a+b) = \log_3 9 + \log_3 a + \log_3 b$

$\Leftrightarrow \log_3(a+b) = 1 + \dfrac{1}{2}(\log_3 a + \log_3 b)$. Suy ra mệnh đề **sai.**

Câu 2: Biết $a = \log_{27} 5$, $b = \log_8 7$, $c = \log_2 3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $c > 2$

b) $a.c = \dfrac{1}{3}\log_2 5$

c) $\dfrac{a.c}{b}=\log_7 5$

d) $\log_{12}35=\dfrac{3(b+ac)}{c+2}$

Lời giải

a) Sai: Ta có: $c=\log_2 3<\log_2 4=2$

b) Đúng: Ta có: $a.c=c.a=\log_2(3).\log_{27}(5)=\log_2(3).\dfrac{1}{3}\log_3(5)=\dfrac{1}{3}\log_2 5$

c) Đúng: Ta có: $\dfrac{a.c}{b}=\dfrac{\frac{1}{3}\log_2 5}{\log_8 7}=\dfrac{1}{3}\log_2(5).\log_7(8)=\dfrac{1}{3}\log_2(5).3.\log_7(2)=\log_7 5$

d) Đúng: Ta có: $\begin{cases} a=\log_{27}(5)=\dfrac{1}{3}\log_3 5 \\ b=\log_8 7=\dfrac{1}{3}\log_2 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 5=3a \\ \log_2 7=3b \end{cases}$

Mà: $\log_{12}35=\dfrac{\log_2(7.5)}{\log_2(3.2^2)}=\dfrac{\log_2 7+\log_2 5}{\log_2 3+2}=\dfrac{\log_2 7+\log_2 3.\log_3 5}{\log_2 3+2}=\dfrac{3b+c.3a}{c+2}=\dfrac{3(b+ac)}{c+2}$

Câu 3: Cho số thực $x,y>0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_2 x=\log_4 x^2$

b) $\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(2x^2y)+\log_4(2y^2)=1$

c) $\log_3 x+\log_3 x^2+...+\log_3 x^{2023}=2023.2024\log_3 x$

d) Nếu $x=\log_2 6$, $y=\log_3 10$. Khi đó $\dfrac{xy+2x-y}{x+2}=\log_2 30$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\log_{2^2}(x)^2=\log_2 x$ do $x>0$

b) Sai: Ta có $\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(2x^2y)+\log_4(2y^2)=2\log_2 x-\log_2(2x^2y)+\dfrac{1}{2}\log_2(2y^2)$

$=\log_2\dfrac{x^2y}{x^2y}-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

c) Sai: Ta có $\log_3 x+\log_3 x^2+...+\log_3 x^{2023}$

$=\log_3(x.x^2...x^{2023})=\log_3 x^{1+2+..+2023}=\dfrac{(2023+1)2023}{2}\log_3 x$

4) Sai: Ta có: $x = \log_2 6$, $y = \log_3 10$,

$\frac{xy+2x-y}{x+2} = \frac{y(x-1)+2x}{x+2} = \frac{\log_3 10.(\log_2 6-1)+2\log_2 6}{\log_2 6+2} = \frac{\log_2 10+\log_2 36}{\log_2 24} = \log_{24} 360,$

và $\log_{24} 360 \neq \log_2 30$

Câu 4: Cho số thực dương $a \neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\ln a - \ln 2 = \ln(a-2)$

b) $\log_5(125a^2) = 3 + 2\log_5 a$

c) $2\log_9 a - \frac{\log_2 a}{\log_2 3} = 0$

d) $\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} + ... + \frac{1}{\log_{100} a} = \log_a 5050$

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\ln a - \ln 2 = \ln\frac{a}{2}$.

b) Đúng: Ta có: $\log_5(125a^2) = \log_5 5^3 + \log_5 a^2 = 3 + 2\log_5 a$.

c) Đúng: Ta có $2\log_9 a - \frac{\log_2 a}{\log_2 3} = \log_3 a - \log_3 a = 0$.

d) Sai: Ta có: $\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} + ... + \frac{1}{\log_{99} a} + \frac{1}{\log_{100} a}$

$= \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 4 + ...\log_a 99 + \log_a 100 = \log_a(2.3.4...99.100) = \log_a(100!)$.

Câu 5: Với mọi số thực dương a,b và $a,b \neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log(ab) = \log a + \log b$

b) $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$

c) $\log_3^2 a^2 = 2\log_3^2 a$

d) Biết $\ln\frac{a+b}{2} = \frac{2\ln a + \ln b}{3}$. Khi đó $a^3 + b^3 = 3(8a^2b - ab^2)$.

Lời giải

a) Đúng: a,b là các số thực dương nên $\log(ab) = \log a + \log b$.

b) Đúng: $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$.

c) Sai: Ta có $\log_3^2 a^2 = \left(\log_3 a^2\right)^2 = \left(2\log_3 a\right)^2 = 4\log_3^2 a$.

d) Sai: Ta có: $\ln\frac{a+b}{2} = \frac{2\ln a + \ln b}{3} \Leftrightarrow 3\ln\frac{a+b}{2} = \ln a^2 + \ln b$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \ln\left(a^2 b\right) \Leftrightarrow \frac{(a+b)^3}{8} = a^2 b$

$\Leftrightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 8a^2b \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 5a^2b - 3ab^2$.

Câu 6: Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $0 < a < 1$

b) $bc = \log_7 2$

c) $\log_6 45 = \frac{6ac + 2c}{1+c}$

d) Biết $\log_6 35 = \frac{(ma + nb)c}{1 + pc}$ với $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Khi đó $m^2 + n^2 + p^2 = 11$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $0 = \log_{27} 1 < \log_{27} 5 < \log_{27} 27 = 1 \Rightarrow 0 < a < 1$

b) Sai: Ta có $bc = \log_3 7.\log_2 3 = \frac{\log_3 7}{\log_3 2} = \log_2 7$.

3) Đúng: $\log_{27} 5 = a \Rightarrow a = \frac{1}{3}\log_3 5 \Rightarrow 3a = \log_3 5$.

Khi đó $\log_6 45 = \frac{\log_2\left(3^2.5\right)}{\log_2(2.3)} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = \frac{2c + \log_2 3.\log_3 5}{1+c} = \frac{2c + 2c.3a}{1+c} = \frac{6ac + 2c}{1+c}$.

d) Đúng: $\log_{27} 5 = a \Rightarrow a = \frac{1}{3}\log_3 5 \Rightarrow 3a = \log_3 5 \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{3a}$

$\log_3 7 = b \Rightarrow \log_7 3 = \frac{1}{b}$; $bc = \log_2 3.\log_3 7 = \log_2 7 \Rightarrow \log_7 2 = \frac{1}{bc}$;

$3ac = \log_3 5.\log_2 3 = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{3ac}$.

Khi đó $\log_6 35 = \log_6 5 + \log_6 7$

$$= \frac{1}{\log_5 6} + \frac{1}{\log_7 6} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} + \frac{1}{\log_7 3 + \log_7 2} = \frac{1}{\frac{1}{3ac} + \frac{1}{3a}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{bc}} = \frac{(3a+b)c}{c+1}.$$

Vậy ta có: $\begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 = 11$.

Câu 7: Cho $a=\log_2 5$, $b=\log_3 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $b>1$

b) $ab=\log_2 3$

c) $\log_{12} 5=\dfrac{2}{a+b}$

d) Biết $\log_{24} 250=\dfrac{mab+nb}{pa+qb}$ với $m,n,p,q\in\mathbb{Z}$. Khi đó $A=mnpq=9$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $b=\log_3 5>\log_3 3=1$

b) Sai: Ta có $\log_2 3=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}=\dfrac{1}{\log_3 5}.\log_2 5=\dfrac{a}{b}$.

c) Sai: $\log_{12} 5=\dfrac{1}{\log_5 12}=\dfrac{1}{\log_5\left(2^2.3\right)}=\dfrac{1}{\log_5 2^2+\log_5 3}=\dfrac{1}{\dfrac{2}{\log_2 5}+\dfrac{1}{\log_3 5}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\dfrac{a+2b}{ab}}=\dfrac{ab}{a+2b}$.

d) Đúng: $\log_{24} 250=\log_{2^3.3}\left(2.5^3\right)=\log_{2^3.3} 2+\log_{2^3.3} 5^3=\dfrac{1}{\log_2\left(2^3.3\right)}+\dfrac{3}{\log_5\left(2^3.3\right)}$

$=\dfrac{1}{3+\log_2 3}+\dfrac{3}{3\log_5 2+\log_5 3}=\dfrac{1}{3+\dfrac{\log_2 5}{\log_3 5}}+\dfrac{3}{\dfrac{3}{\log_2 5}+\dfrac{1}{\log_3 5}}$

$=\dfrac{1}{3+\dfrac{a}{b}}+\dfrac{3}{\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\dfrac{3b+a}{b}}+\dfrac{3}{\dfrac{3b+a}{ab}}=\dfrac{b}{3b+a}+\dfrac{3ab}{3b+a}=\dfrac{3ab+b}{a+3b}$.

Vậy ta có $\begin{cases} m=3 \\ n=1 \\ p=1 \\ q=3 \end{cases}\Rightarrow mnpq=9$.

Câu 8: Cho $a,b,c>1$ và $m,n\in\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_a\sqrt{a\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$

b) $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c.\log_{c^2} a^3=\dfrac{1}{6}$

c) Cho $\log 3=m,\log 7=n$. Khi đó $\log_3 70=\dfrac{n+1}{m}$.

d) Cho $\log_5 2 = m, \log_5 3 = n$. Khi đó $\log_{250} 30 = (m+n+1)(3+m)$.

Lời giải

a) Đúng: $\log_a \sqrt{a\sqrt{a}} = \log_a \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = \log_a a^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$.

b) Sai: $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c.\log_{c^2} a^3 = 2.\log_a b.2.\log_b c.\frac{3}{2}.\log_c a = 6$.

d) Sai: $\log_{250} 30 = \frac{\log_5(3.2.5)}{\log_5(5^3.2)} = \frac{m+n+1}{3+m}$.

Câu 9: Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_a b < 1 < \log_b a$.

b) $1 < \log_a b < \log_b a$.

c) $\log_b a < \log_a b < 1$.

d) $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải

Ta có $b > a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b > \log_a a \Leftrightarrow \log_a b > 1 \\ \log_b b > \log_b a \Leftrightarrow 1 > \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \log_b a < 1 < \log_a b.$

a) Sai
b) Sai
c) Sai
d) Đúng

Câu 10: Công thức $\log x = 11{,}8 + 1{,}5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng x tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương 10^{-7} jun) với độ lớn M theo thang Richter của một trận động đất. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Trận động đất có độ lớn 2 độ Richter tạo ra năng lượng khoảng $6{,}3.10^{34}$ erg.

b) Trận động đất có độ lớn 3 độ Richter tạo ra năng lượng khoảng 2.10^9 (J)

c) Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp 100 lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter.

d) Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng $10^{17,8} \le x \le 10^{20,8}$ erg.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\log x = 11{,}8 + 1{,}5M$

Với $M = 2$ ta được $\log x = 14{,}8 \Leftrightarrow x \approx 6{,}3.10^{14}$ erg.

b) Đúng: Với $M = 3$ ta được $\log x = 16{,}3 \Leftrightarrow x \approx 2.10^{16}$ erg $= 2.10^9$ jun.

c) Đúng: Gọi x_1, x_2 (erg) lần lượt là năng lượng tạo ra của hai trận động đất có độ lớn lần lượt là $M_1 = 5, M_2 = 3$ (độ Richter).

Ta có: $\log x_1 = 11{,}8 + 1{,}5M_1; \log x_2 = 11{,}8 + 1{,}5M_2$

$\Rightarrow \log x_1 - \log x_2 = 1{,}5(M_1 - M_2) \Rightarrow \log\frac{x_1}{x_2} = 3 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 10^3 = 1000.$

d) Sai: $11{,}8 + 1{,}5.4 \le \log x \le 11{,}8 + 1{,}5.6 \Rightarrow 17{,}8 \le \log x \le 20{,}8 \Rightarrow 10^{17,8} \le x \le 10^{20,8}$ erg.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho ba số thực dương a,b,c đều khác 1 thoả mãn $\log_a b = 2\log_b c = 4\log_c a$ và $a+2b+3c=48$. Khi đó $P=abc$ bằng bao nhiêu

Lời giải

Do a,b,c đều khác 1 nên $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ đều khác 0 ta có:

$\log_a b = 2\log_b c \Leftrightarrow \log_a c.\log_c b = 2\log_b c \Leftrightarrow \log_a c = 2\log_b^2 c$.

$\log_a b = 4\log_c a \Leftrightarrow \log_a c.\log_c b = 4\log_c a \Leftrightarrow \log_c b = 4\log_c^2 a$.

Nên $\log_a c.\log_c b = 8\log_b^2 c.\log_c^2 a \Leftrightarrow \log_a b = 8\log_b^2 a \Leftrightarrow \log_a^3 b = 8 \Leftrightarrow \log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Mà $\log_a b = 2\log_b c \Leftrightarrow \log_a b = 2\log_{a^2} c \Leftrightarrow b = c$.

Ta lại có $a+2b+3c=48 \Leftrightarrow a+2a^2+3a^2=48 \Leftrightarrow 5a^2+a-48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{16}{5} \\ a=3 \end{array}\right.$

Do a,b,c đều là số thực dương $\Rightarrow a=3 \Rightarrow b=9, c=9 \Rightarrow P=abc=243$.

Câu 2: Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $\log_a b = \dfrac{b}{8}$, $\log_2 a = \dfrac{16}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $G=a+b$.

Lời giải

Ta có: $\log_a b = \dfrac{b}{8}$ và $\log_2 a = \dfrac{16}{b} \Rightarrow \log_2 a.\log_a b = \dfrac{16}{b}.\dfrac{b}{8} \Leftrightarrow \log_2 b = 2 \Leftrightarrow b=4$

$\Rightarrow \log_2 a = 4 \Leftrightarrow a=16 \Rightarrow G=a+b=16+4=20$.

Câu 3: Cho $\log_2 3 = a$ và $\log_3 5 = b$. Biết $\log_{12} 150 = \dfrac{2ab+ma+n}{a+2}$ với $m,n\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $L=m+n$ là

Lời giải

Ta có: $\log_2 3 = a \Leftrightarrow \log_3 2 = \dfrac{1}{a}$ và $\log_3 5 = b$.

Khi đó: $\log_{12}150 = \dfrac{\log_3 150}{\log_3 12} = \dfrac{\log_3\left(2.3.5^2\right)}{\log_3\left(2^2.3\right)} = \dfrac{\log_3 2+1+2\log_3 5}{2\log_3 2+1} = \dfrac{\dfrac{1}{a}+1+2b}{\dfrac{2}{a}+1} = \dfrac{2ab+a+1}{a+2}$

Do $m,n\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=1$ và $n=1 \Rightarrow L=m+n=2$.

Câu 4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^{\log_3 7}=9$, $b^{\log_7 11}=7$, $c^{\log_{11} 25}=11$. Tính giá trị biểu thức $T=a^{\log_3^2 7}+b^{\log_7^2 11}+c^{\log_{11}^2 25}$.

Lời giải

$T=a^{\log_3^2 7}+b^{\log_7^2 11}+c^{\log_{11}^2 25}=\left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7}+\left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11}+\left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25}$.

$=(9)^{\log_3 7}+(7)^{\log_7 11}+(11)^{\log_{11} 25}=7^2+11+25=85$.

Câu 5: Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 12$, $\log_y w = 20$ và $\log_{xyz} w = 6$. Tính $\log_z w$.

Lời giải

$\log_x w = 12 \Rightarrow \log_w x = \dfrac{1}{12}$; $\log_y w = 20 \Rightarrow \log_w y = \dfrac{1}{20}$.

$$\log_{xyz} w = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w (xyz)} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \log_w z} = 6 \Leftrightarrow \log_w z = \frac{1}{30} \Rightarrow \log_z w = 30.$$

Câu 6: Cho $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log\left[\dfrac{f(96) - f(69) - 241}{2}\right]$.

Lời giải

Có $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$

Suy ra: $f(96) = f(95+1) = f(95) + f(1) + 95 = f(95) + 96 = f(94) + 95 + 96 = \ldots$

$= f(1) + 2 + \ldots + 95 + 96 \Rightarrow f(96) = 1 + 2 + \ldots + 95 + 96 = \dfrac{96.97}{2} = 4656$.

Tương tự $f(69) = 1 + 2 + \ldots + 68 + 69 = \dfrac{69.70}{2} = 2415$.

Vậy $T = \log\left[\dfrac{f(96) - f(69) - 241}{2}\right] = \log\left(\dfrac{4656 - 2415 - 241}{2}\right) = \log 1000 = 3$.

Câu 7: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} + \dfrac{1}{\log_2 z} = \dfrac{1}{10}$ và $\log_2(xyz) = 10$. Tính $\log_2\left(xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1\right)$

Lời giải

Đặt $a = \log_2 x; b = \log_2 y; c = \log_2 z$. Ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{10}$ và $a + b + c = 10$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) = 1 \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+ac+bc) = abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + abc + abc + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

Vì vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a + b = 0 \Rightarrow c = 10 \Rightarrow z = 2^{10}$ và $xy = 1$.

$\log_2\left(xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1\right) = \log_2\left(z(x+y+z) - 1 - yz - zx + 1\right)$

$= \log_2\left(z^2\right) = 2\log_2 z = 2.10 = 20$.

Câu 8: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $P_n = P_0.e^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001 dân số Việt Nam là 76.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 115 triệu người

Lời giải

Theo bài ra ta xét phương trình:

$$P_n = 115.10^6 \Leftrightarrow P_0.e^{nr} = 115.10^6 \Leftrightarrow \ln P_0 + nr = \ln\left(115.10^6\right)$$

Suy ra $n = \dfrac{\ln\left(115.10^6\right) - \ln P_0}{r} \approx 23,8$.

Như vậy đến năm 2025 dân số nước ta sẽ ở mức 115 triệu người.

Câu 9: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right)$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Theo bài ta có

$$Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right) = 0,9.Q_0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t\sqrt{2}} = 0,9 \Leftrightarrow e^{-t\sqrt{2}} = 0,1 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,1)}{\sqrt{2}} \approx 1,63.$$

Vậy sau khoảng thời gian $t \approx 1,63$ giờ thì dung lượng pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin sẽ nạp được 90% dung lượng pin tối đa.

Câu 10: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) là một đại lượng được tính theo công thức $P = P_0 e^{xi}$ trong đó x là độ cao (đo bằng mét, so với mực nước biển), $P_0 = 760$ mmHg là áp suất ở mực nước biển, i là hệ số suy giảm. Biết rằng, ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,72 mmHg. Hỏi áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số nào trong các số sau?

Lời giải

Do ở độ cao 1000 m, áp suất của không khí là 672,72 mmHg nên ta có:

$$672,72 = 760e^{1000i} \Leftrightarrow i = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,72}{760}$$

Khi ở độ cao 15 km tức là 15000 m thì áp suất của không khí:

$$P = 760\mathrm{e}^{15000 \times \frac{1}{1000}\ln\frac{672,72}{760}} \approx 121,93399$$

Vậy, áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số 122.

Câu 11: Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{r.t}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là

100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây?

Lời giải

Vì sau 5h có 300 con vi khuẩn, nên suy ra $300=100.e^{5r}\Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 3}{5}$.

Để vi khuẩn tăng gấp đôi thì ta có phương trình:

$$200=100.e^{\frac{1}{5}\ln 3.t}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{5}\ln 3.t}=2\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{5}.t}=2\Leftrightarrow t=5\log_3 2\Leftrightarrow t\approx 3{,}15$$

Vậy thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu là 3 giờ 9 phút.

Câu 12: Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t)=100.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}(\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3754 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ là 79%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

Lời giải

Theo bài ta có $65=100.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}}\Leftrightarrow 0{,}65=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}}\Leftrightarrow \dfrac{3754}{A}=\log_{\frac{1}{2}}0{,}65\Leftrightarrow A=\dfrac{3754}{\log_{\frac{1}{2}}0{,}65}$

Do mẫu gỗ còn 79% lượng Cacbon 14 nên ta có: $79=100.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}\Leftrightarrow 0{,}79=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{A}=\log_{\frac{1}{2}}0{,}79\Leftrightarrow t=A.\log_{\frac{1}{2}}0{,}79=\frac{3754}{\log_{\frac{1}{2}}0{,}65}.\log_{\frac{1}{2}}0{,}79\approx 2054.$$

Câu 13: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t)=S_0.e^{r.t}$. Trong đó S_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng $(r>0), t$ (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc ban đầu có 500 con để số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

Lời giải

Ta có: $S_0=500$ (con); 5 giờ $=300$ phút.

Sau 5 giờ số vi khuẩn là: $S(300)=500.\,e^{300r}\Leftrightarrow 1500=500.\,e^{300r}\Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 3}{300}$

Vậy khoảng thời gian t kể từ lúc bắt đầu có 500 con vi khuẩn đến khi số lượng vi khuẩn đạt 121500 con thỏa mãn $121500=500.e^{r.t}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 243}{r}=\dfrac{300\ln 243}{\ln 3}=1500\,(\text{phút})=25\,(\text{giờ})$.

Câu 14: Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$ độ Richter, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

Lời giải

Nhận thấy ở San Francisco trận động đất có cường độ là: $M_1=\log A_1-\log A_0=\log\dfrac{A_1}{A_0}=8$

Ở Nhật Bản trận động đất có cường độ là: $M_2=\log\dfrac{A_2}{A_0}=6$

Khi đó: $8-6=\log\dfrac{A_1}{A_0}-\log\dfrac{A_2}{A_0}=\log\dfrac{A_1}{A_2}\Leftrightarrow 2=\log\dfrac{A_1}{A_2}\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=10^2=100.$

Câu 15: Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t được tính theo công thức là $N(t)=N_o.\mathrm{e}^{kt}$, trong đó N_o là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t=0$ và k là hằng số tăng trưởng của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày và biết $N_0=100$ con. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

Lời giải

Ta có: $2N_0=N_0.\mathrm{e}^{9k}\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln 2}{9}$

Để được 800 con ruồi, ta có: $800=100.\mathrm{e}^{t.\frac{\ln 2}{9}}\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 8}{\ln 2}.9=27$ ngày.

Câu 16: Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutolium ^{239}Pu là 24360 năm (tức là một lượng chất ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S=A\mathrm{e}^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 20 gam ^{239}Pu sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam ?

Lời giải

Vì ^{239}Pu có chu kì bán rã là 24360 năm nên với 20 gam ^{239}Pu ta có:

$10=20.\mathrm{e}^{-r.24360}\Leftrightarrow -r.24360=\ln\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 2}{24360}$.

Theo bài ra ta có phương trình $4=20.\mathrm{e}^{-rt}\Leftrightarrow -rt=\ln\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow rt=\ln 5\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 5}{r}$.

Suy ra $t\approx 56562,2$.

Vậy sau ít nhất 56563 năm thì 20 gam ^{239}Pu sẽ phân hủy còn 4 gam.

Câu 17: Cho áp suất không khí P (đo bằng milimet thuỷ ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P = P_0 e^{xi}$ trong đó $P_0 = 760mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $(x = 0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000m$ thì áp suất của không khí là $672,71mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3580m$ gần với số nào sau đây nhất

Lời giải

Áp dụng công thức $P = P_0 e^{xi}$

Ở độ cao $1000m$, ta có : $P_0 = 760mmHg, x = 1000m, P = 672,71mmHg$, từ giả thiết này ta tìm được hệ số suy giảm i. Ta có $672,71 = 760e^{1000\times i} \Leftrightarrow 1000i = \ln\frac{672,71}{760} \Leftrightarrow i = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$

Khi đó ở độ cao $3580m$, áp suất của không khí là: $P = 760e^{\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}\times 3580} \approx 491,04$.

Câu 18: Áp suất không khí P theo công thức $P = P_0.e^{kx}$ (mmHg), trong đó x là độ cao, $P_0 = 760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển $(x = 0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71$ (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao $4000m$

Lời giải

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là $672,71$ (mmHg).

Nên ta có $672,71 = 760e^{1000k} \Leftrightarrow e^{1000k} = \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow k = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$.

Áp suất ở độ cao 4000 m là $P = 760e^{4000k} = 760e^{4000.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}} \approx 466,52$ (mmHg).

Câu 19: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ ?

Lời giải

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

Từ giả thiết ta có: $300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \frac{\ln 3}{5}$.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.\frac{\ln 3}{5}} = 900$ con.

Câu 20: Gọi $I(t)$ là số ca bị nhiễm bệnh Covid-19 ở quốc gia X sau t ngày khảo sát. Khi đó ta có công thức $I(t) = A.e^{r_0(t-1)}$ với A là số ca bị nhiễm trong ngày khảo sát đầu tiên, r_0 là hệ số lây nhiễm. Biết rằng ngày đầu tiên khảo sát có 500 ca bị nhiễm bệnh và ngày thứ 10 khảo sát có 1000 ca bị nhiễm bệnh. Hỏi ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh gần nhất với số nào dưới đây, biết rằng trong suốt quá trình khảo sát hệ số lây nhiễm là không đổi?

Lời giải

Theo giả thiết ta có $I(1) = A = 500$.

Ngày thứ 10 có 1000 ca nên $I(10)=A.e^{9r_0}\Leftrightarrow 1000=500.e^{9r_0}\Leftrightarrow r_0=\dfrac{\ln 2}{9}$.

Vậy ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh là $I(20)=500.e^{\frac{19\ln 2}{9}}\approx 2160$.

Câu 21: Người ta thả một lượng bèo vào một hồ nước. Kết quả cho thấy sau 9 giờ bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì lượng bèo phủ kín $\dfrac{1}{3}$ mặt hồ?

Lời giải

Gọi A là lượng bèo ban đầu. Sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần nên sau 9 giờ ta lượng bèo là $A.10^9$.

Gọi t là số giờ để lượng bèo trong hồ phủ kín $\dfrac{1}{3}$ mặt hồ. Khi đó ta có:

$$A.10^t=\frac{1}{3}\times A.10^9\Rightarrow t=\log\frac{10^9}{3}=9-\log 3.$$

Câu 22: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M=\log\dfrac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A=3$ (Ben) và $L_B=5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có: $L_A<L_B\Rightarrow OA>OB$.

Gọi I là trung điểm AB. Ta có: $L_A=\log\dfrac{k}{OA^2}\Rightarrow\dfrac{k}{OA^2}=10^{L_A}\Rightarrow OA=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}}$

$$L_B=\log\frac{k}{OB^2}\Rightarrow\frac{k}{OB^2}=10^{L_B}\Rightarrow OB=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}$$

$$L_I=\log\frac{k}{OI^2}\Rightarrow\frac{k}{OI^2}=10^{L_I}\Rightarrow OI=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}}$$

Ta có: $OI=\dfrac{1}{2}(OA-OB)\Rightarrow\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}}-\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_I}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_A}}-\dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)$

$$\Rightarrow L_I=-2\log\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}}-\frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)\right]\Rightarrow L_I\approx 3,69.$$

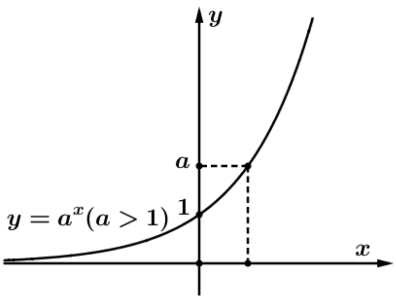
----------------HẾT----------------

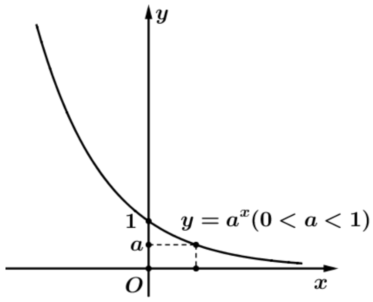
BÀI 03 HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số mũ

Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y=a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.





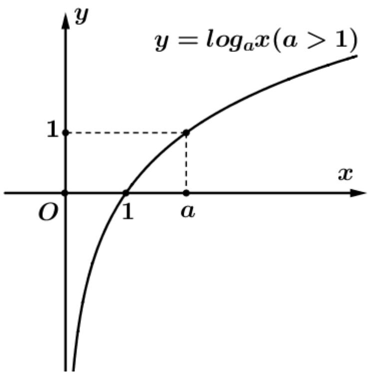
Hàm số mũ $y=a^x$.

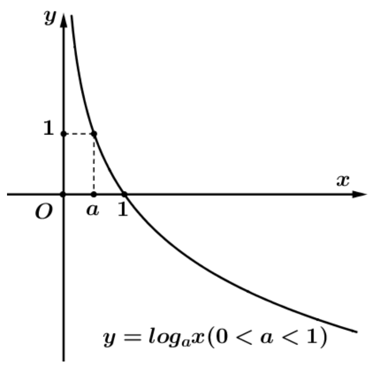
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0;+\infty)$
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0<a<1$
- Liên tục trên $\mathbb{R}$
- Có đồ thị đi qua các điểm $(0;1),(1;a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.

Lưu ý: Hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ còn được viết dưới dạng $y=2^{-x}$.

2 Hàm số logarit

Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y=\log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.





Hàm số lôgarit $y=\log_a x$:

- Có tập xác định là $(0;+\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $a>1$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi $0<a<1$
- Liên tục trên $(0;+\infty)$
- Có đồ thị đi qua các điêm $(1;0),(a;1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số mũ và hàm số logarit

Phương pháp: Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tuỳý.

Xét $1 \neq a > 0$:

- Hàm số $y = a^{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow$ $f(x)$ xác định.
- Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$.

Đặc biệt: Với hàm số $y = \log_{g(x)}\left[f(x)\right]^n$ ta lưu ý "*mũ n*" của $f(x)$:

- Nếu $n \vdots 2 \longrightarrow$ Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_{g(x)}\left[f(x)\right]^n$: $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$.
- Nếu $n \not\vdots\, 2 \longrightarrow$ Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_{g(x)}\left[f(x)\right]^n$: $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

Tóm lại nếu $f(x)$ hoặc $g(x)$ có "*mũ n*" ta chú ý xem "*n*" chẵn hay lẻ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tập xác định D của các hàm số sau:

a) $y = \log_3(x+2)$

b) $y = \log(x+1)^2$

c) $y = \log_2(2-x) + (x+1)^{-2}$

d) $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$

e) $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$

f) $y = \log_2 \dfrac{x+3}{2-x}$

Lời giải

a) Điều kiện : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Suy ra tập xác định của hàm số đã cho là : $D = (-2; +\infty)$.

b) Hàm số xác định khi $(x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. TXĐ của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$. Vậy $D = (-\infty; 2) \setminus \{-1\}$.

d) Hàm số xác định khi: $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$. Vậy $D = (2; 3)$.

e) Điều kiện: $x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Vậy hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

f) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{x+3}{2-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2 \dfrac{x+3}{2-x}$ là: $D = (-3; 2)$.

Bài tập 2: Tìm tập xác định D của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{\log_{0,2}\left(x^2-2x+1\right)}$

b) $y=\left(x^2-4\right)^{-2}+\log_{\sqrt{3}}\left(2x+1\right)$

c) $y=\log_2\left(\log_3 x\right)$

d) $y=\left(x-3\right)^{-2}+\log_4\left(x-2\right)$

e) $y=\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}+\log_2\left(x+1\right)$.

f) $y=\dfrac{2}{\log_4 x-3}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases}x^2-2x+1>0\\ \log_{0,2}\left(x^2-2x+1\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-1\right)^2>0\\ x^2-2x+1\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\in\left[0;2\right]\end{cases}\Leftrightarrow D=\left[0;2\right]\setminus\left\{1\right\}$

b) Điều kiện $\begin{cases}x^2-4\neq 0\\ 2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 2\\ x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Tập xác định: $D=\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)\setminus\left\{2\right\}$.

c) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\log_3 x>0\Leftrightarrow x>1$. Vậy TXĐ của hàm số là: $D=\left(1;+\infty\right)$.

d) Tập xác định của hàm số : $\begin{cases}x-3\neq 0\\ x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 3\\ x>2\end{cases}$. Vậy TXĐ của hàm số là $D=\left(2;+\infty\right)\setminus\left\{3\right\}$

e) Điều kiện $\begin{cases}1-x>0\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ x>-1\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<1$. Vậy TXĐ của hàm số là $D=\left(-1;1\right)$

f) Hàm số $y=\dfrac{2}{\log_4 x-3}$ xác định khi $\begin{cases}x>0\\ \log_4 x\neq 3\end{cases}$ hay $\begin{cases}x>0\\ x\neq 64\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(0;64\right)\cup\left(64;+\infty\right)$.

Bài tập 3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\log_3\left(x-4\right)$

b) $y=\left(\pi+1\right)^x$

c) $y=\ln\left(3x-6\right)$

d) $y=\left[\ln\left(x-2\right)\right]^{\pi}$

e) $y=\dfrac{1}{\log_3\left(2x^2-x\right)}$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định của hàm số là $x-4>0\Leftrightarrow x>4$.

Vậy TXĐ của hàm số là $D=\left(4;+\infty\right)$.

b) Vì $\pi+1$ là một hằng số nên tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

c) Hàm số $y=\ln\left(3x-6\right)$ xác định $\Leftrightarrow 3x-6>0\Leftrightarrow x>2$. Vậy tập xác định $D=\left(2\,;+\infty\right)$.

d) Điều kiện: $\ln\left(x-2\right)>0\Leftrightarrow x-2>1\Leftrightarrow x>3$. Vậy TXĐ của hàm số là: $D=\left(3;+\infty\right)$.

e) Hàm số xác định khi $\begin{cases}2x^2-x>0\\ \log_3\left(2x^2-x\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<0\vee x>\frac{1}{2}\\ 2x^2-x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<0\vee x>\frac{1}{2}\\ x\neq -\frac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}$.

Vậy $D=(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\backslash\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$.

Bài tập 4: Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(-x^2+2023x-2022\right)$ có bao nhiêu số nguyên?

Lời giải

Hàm số các định khi và chỉ khi $-x^2+2023x-2022>0 \Leftrightarrow x\in(1;2022)$.

Vậy có tất cả 2020 số nguyên trong tập xác định của hàm số đã cho.

Bài tập 5: Tìm m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-2mx+4>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\begin{cases}a=1>0\\ \Delta'=(-m)^2-4<0\end{cases} \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$ hay $m\in(-2;2)$.

Bai tập 6: Tìm m để hàm số $y=\log\ x^2-2mx+9$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

Lời giải

Để hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$ thì: $x^2-2mx+9>0\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m^2-9<0 \Leftrightarrow -3<m<3$

Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Bài tập 7: Tìm m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x\sqrt{m+2}+26\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$?

Lời giải

Ta có: $y=\log\left(x^2-2x\sqrt{m+2}+26\right)$.

Để hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ điều kiện là $x^2-2x\sqrt{m+2}+26>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}m+2\geq 0, m\in\mathbb{Z}\\ \Delta'<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m+2\geq 0, m\in\mathbb{Z}\\ m+2-26<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ -2\leq m<24\end{cases}$.

$\Rightarrow m\in\{-2,-1,...,22,23\}$. Vậy có 26 giá trị m nguyên.

Bài tập 7: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(-2023;2023)$ để hàm số $y=\dfrac{2023}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$

hay phương trình $mt^2-4t+m+3=0,(1)$ vô nghiệm $t\in\mathbb{R}$

Nếu $m=0$ thì $(1)\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{4}$ không thỏa mãn.

Nếu $m\neq 0$ thì (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'=4-m(m+3)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-4\\m>1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m\in(-2023;2023)\Rightarrow m\in(-2023;-4)\cup(1;2023)$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ suy ra có 4039 giá trị m thỏa mãn.

Dạng 2: Đồ thị hàm số mũ và hàm số logarit

Phương pháp: Sử dụng kiến thức đã được nêu ở phần lý thuyết

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Vẽ đồ thị các hàm số sau đây:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

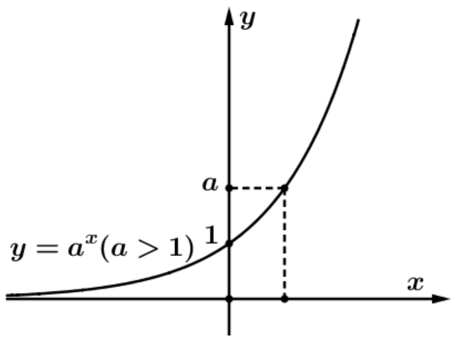
c) $y = \log x$ d) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Lời giải

a) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

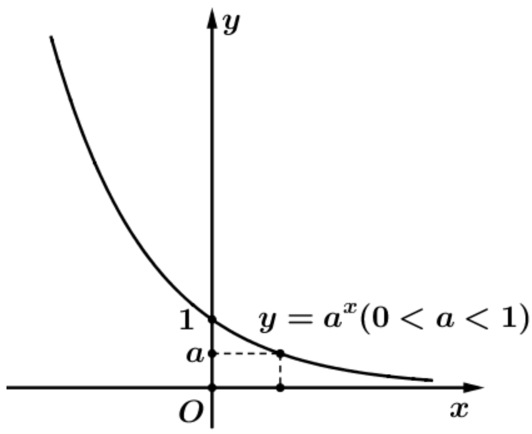
Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ sau:



b) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

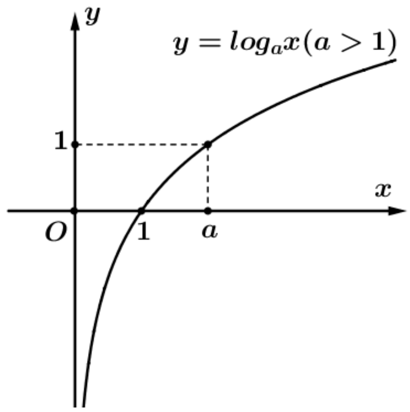
Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ sau:



c) Lập bảng giá trị

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log x$	$-0,3$	0	0,3	0,6	0,9

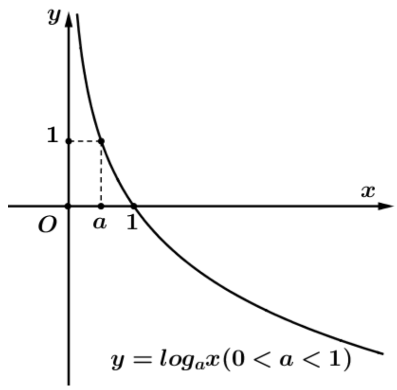
Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ sau:



d) Lập bảng giá trị

x	1	3	9	27
$y=\log_{\frac{1}{3}} x$	-3	-1	1	3

Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ sau:



Bài tập 2: Biết đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_b x$ cắt nhau tại điểm $A\left(\frac{1}{2};2\right)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+2b^2$.

Lời giải

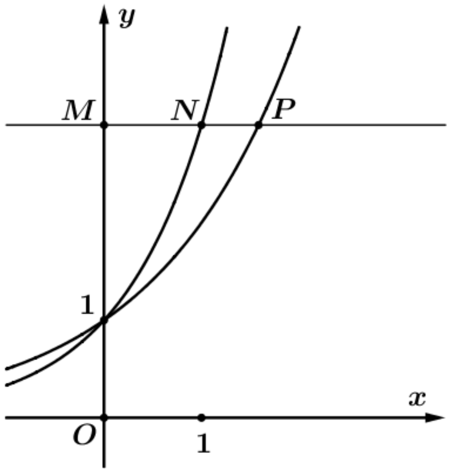
Điều kiện xác định: $a,b>0;a,b\neq 1$

Vì đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_b x$ cắt nhau tại điểm $A\left(\frac{1}{2};2\right)$nên điểm $A\left(\frac{1}{2};2\right)$thuộc đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_b x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2=a^{\frac{1}{2}} \\ 2=\log_b \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow T=a^2+2b^2=4^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=17.$$

Vậy giá trị của biểu thức bằng 17 .

Bài tập 3: Cho hai hàm số $y=a^x, y=b^x$ (a,b là các số dương khác 1) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$ như hình vẽ. Vẽ đường thẳng $y=c>1$ cắt trục tung và $(C_1),(C_2)$ lần lượt tại M, N, P. Biết rằng $S_{OMN}=3S_{ONP}$. Tìm mối liên hệ giữa a và b.



Lời giải

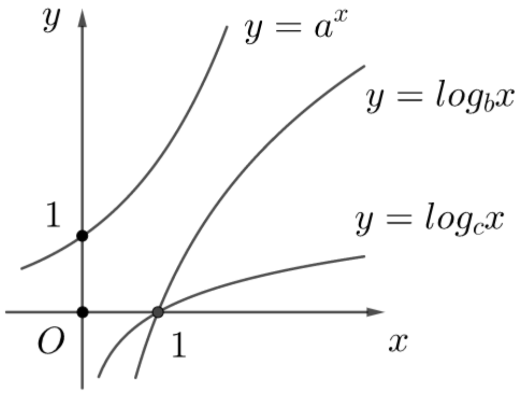
Ta có: $a^x=c \Rightarrow x=\log_a c \Rightarrow x_N=\log_a c$ và $b^x=c \Rightarrow x=\log_b c \Rightarrow x_P=\log_b c$ /

Theo đề bài: $S_{OMN}=3S_{ONP} \Rightarrow MN=3NP \Rightarrow 3MP=4MN$

Suy ra $3x_P=4x_N \Rightarrow 3\log_b c=4\log_a c \Rightarrow \sqrt[3]{b}=\sqrt[4]{a} \Rightarrow a^3=b^4$.

Vậy $a^3=b^4$.

Bài tập 4: Cho a,b,c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình bên. Hãy so sánh các số thực a,b,c

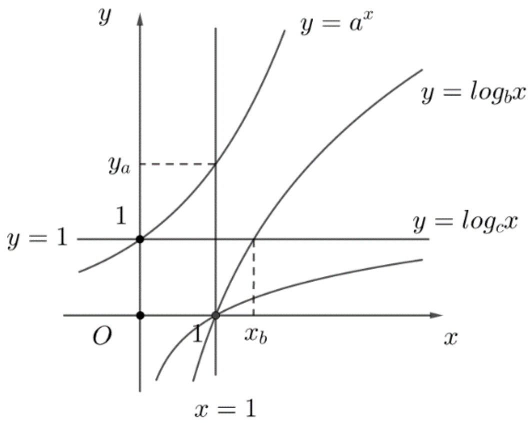


Lời giải

Xét $y=1$ thì ta có $\begin{cases}1=\log_b x\\1=\log_c x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=x_b\\c=x_c\end{cases} \Leftrightarrow x_c>x_b$.

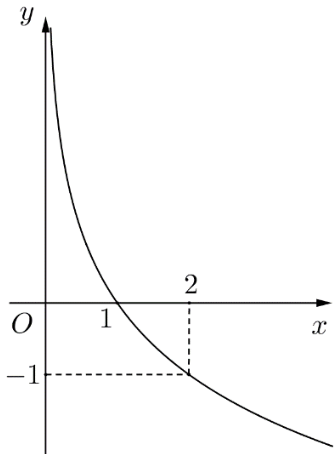
Xét $x=1$ ta lại có $y=a^1=a \Leftrightarrow a=y_a$.

Theo hình vẽ: $x_c>y_a$ và $y_a>x_b$.



Vậy $b < a < c$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có đồ thị như hình vẽ.



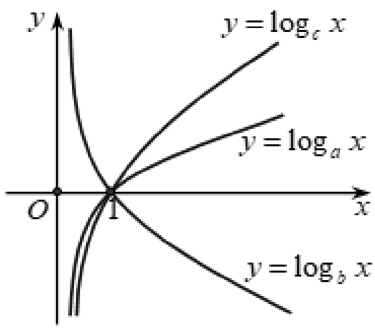
Tìm giá trị của a.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đi qua điểm $(2;-1)$ nên $\log_a 2 = -1$.

Khi đó $a^{-1} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 6: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. So sánh các số a, b, c.



Lời giải

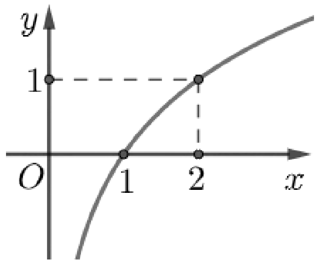
Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow 0 < b < 1$.

Và đồ thị ta thấy hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_c x$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow a,c>1$

Xét $x>1:\log_c x>\log_a x\Rightarrow \log_c x>\dfrac{1}{\log_x a}\Rightarrow \log_c x.\log_x a>1\Leftrightarrow \log_c a>1\Leftrightarrow a>c$.

Suy ra $b<c<a$.

Bài tập 7: Cho các hàm số $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ và $y=2^x$. Đồ thị hàm số dưới đây là của hàm số nào đã cho?



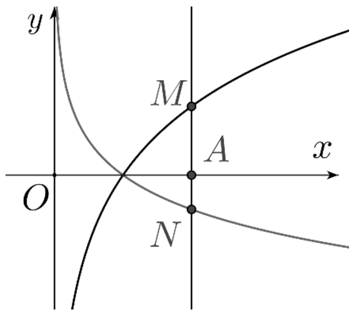
Lời giải

Đây là dạng đồ thị của hàm số $y=\log_a x$ nên loại $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ và $y=2^x$.

Hàm số đồng biến loại $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Đồ thị đi qua điểm $(2;1)$ nên đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y=\log_2 x$.

Bài tập 8: Cho số thực dương a khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào vuông góc với trục hoành mà cắt các đồ thị của hàm số $y=\log_2 x$, $y=\log_a x$ và trục hoành lần lượt tại M,N và A thì $AM=2AN$ (hình vẽ bên). Tính giá trị của a.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy $0<a<1$.

Đường thẳng $x=m\,(m>0)$ cắt đồ thị của hàm số $y=\log_2 x$, $y=\log_a x$ và trục hoành lần lượt tại $M(m;\log_2 m), N(m;\log_a m)$ và $A(m;0)$.

Theo đề $AM=2AN\Leftrightarrow |\log_2 m|=2|\log_a m|,\forall m>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 m=\log_a m,\forall m>0\\ \log_2 m=-\log_a m,\forall m>0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 m=\log_a m,\forall m>0\\ \log_{\frac{1}{2}} m=\log_a m,\forall m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2\\ a=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vì $0<a<1$ nên $a=\dfrac{1}{2}$.

Dạng 3: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Phương pháp: Sử dụng kiến thức cơ bản để áp dụng vào các bài toán thực tế

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t)=13e^{-0,015t}$.

a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t=0$.

b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

Lời giải

a) Khi $t=0, m(0)=13e^{-0,015\times 0}=13e^{0}=13$. Vậy khối lượng của chất phóng xạ ban đầu là $13\,\text{kg}$.

b) Để tìm khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 45 ngày, ta sử dụng công thức $m(t)=13e^{-0,015t}$ và thay $t=45$ vào: $m(45)=13e^{-0,015.45}\approx 6,19\,\text{kg}$.

Bài tập 2: Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t)=75-20\ln(t+1), 0\le t\le 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Lời giải

Áp dụng công thức: $M(t)=75-20\ln(t+1)$ ta được:

$M(6)=75-20\ln(6+1)=75-20\ln 7\approx 60,39$

Vậy khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng là khoảng 60,39%.

Bài tập 3: Cường độ một trận động đất M (Richter) được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$ với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu?

Lời giải

Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter khi đó áp dụng công thức

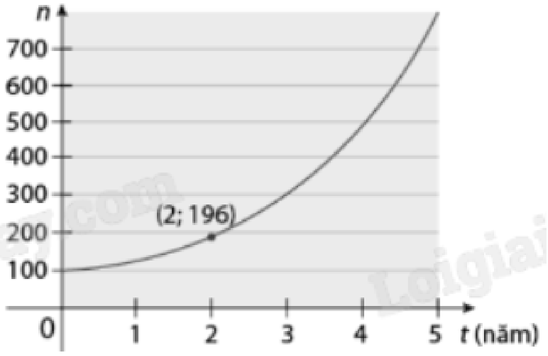
$$M_1=\log A-\log A_0 \Leftrightarrow 8=\log A-\log A_0$$

Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là $4A$, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

$$M_2=\log(4A)-\log A_0 \Leftrightarrow M_2=\log 4+\log A-\log A_0=\log 4+8\approx 8,6.$$

Vậy cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là $8,6$ độ Richter.

Bài tập 4: Lúc đầu trong ao có một số con ếch. Người ta ghi nhận số lượng ếch trong 5 năm đầu như hình vẽ. Giả sử số lượng ếch tăng theo hàm số $n(t)=C.a^t$



a) Tính số lượng ếch lúc ban đầu.

b) Tìm hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao.

c) Dự đoán số lượng ếch sau 20 năm.

Lời giải

a) Số lượng ếch ban đầu là 100 con tại $t=0$.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(0;100\right)$ và $\left(2;196\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} C.a^0=100 \\ C.a^2=196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=100 \\ a^2=1,96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=100 \\ a=1,4 \end{cases} \Rightarrow n\left(t\right)=100.1,4^t$$

Vậy hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao là:

$H\left(t\right)=100+100.1,4^t$

c) Lượng ếch sau 20 năm: $H\left(20\right)=100+100.1,4^{20}\approx 83768$ con.

Bài tập 5: Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I=I_0.a^d$ trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số $\left(a>0\right)$ và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

a) Có thể khẳng định rằng $0<a<1$ không? Vì sao?

b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0,95I_0$. Tìm a

c) Tại độ sâu 20 m thì cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 .

Lời giải

a) Do cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu nên hàm số $I=I_0.a^d$ nghịch biến nên $0<a<1$.

b) Ta có: $0,95I_0=I_0.a^1\Rightarrow a=0,95$.

c) Ta có: $I=I_0.a^d=I_o.0,95^{20}\approx 0,36I_0$ nên tại độ sâu $20m$ thì cường độ ánh sáng bằng 36% so với I_0.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=x^{\frac{3}{2}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y=x^{\frac{3}{2}}$ là $(0;+\infty)$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\log x$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y=\log x$ xác định $\Leftrightarrow x>0$. Vậy tập xác định của hàm số là: $D=(0;+\infty)$.

Câu 3: Tập xác định D của hàm số $y=\ln(1-x)$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=(-\infty;1)$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=\log_2(x-1)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Điều kiện $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Tập xác định của hàm số đã cho là $D=(1;+\infty)$.

Câu 5: Hàm số $y=(x-1)^{2022}$ có tập xác định là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=[1;+\infty)$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

Ta có $y=x-1$ xác định trên $\mathbb{R}$ và 2022 là số nguyên dương nên hàm số đã cho có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2-\ln x}$ là

A. $(0;e^2]$. **B.** $(-\infty;e^2)$. **C.** $(-\infty;e^2]$. **D.** $[e^2;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}2-\ln x\ge 0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln x\le 2\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le e^2\\ x>0\end{cases}$. Vậy tập xác định $D=(0;e^2]$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=5^{x+1}+12$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y=a^x$ là $D=\mathbb{R}$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+7x\right)+3}$ là:

A. $(-8;-7)\cup(0;1)$. **B.** $[-8;-7)\cup(0;1]$. **C.** $[-8;-7)\cup(0;1)$. **D.** $[-8;-7]\cup(0;1]$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x^2+7x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+7x\right)+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+7x>0\\ x^2+7x\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+7x>0\\ x^2+7x-8\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0\\ x<-7\end{array}\right.\\ -8\le x\le 1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-8\le x<-7\\ 0<x\le 1\end{array}\right.$. Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-8;-7)\cup(0;1]$.

Câu 9: Tập xác định D của hàm số $y=(x-3)^{-5}+\log_3(4-x)$ là

A. $D=(3;4)$. **B.** $D=(-\infty;4)\setminus\{3\}$. **C.** $D=(4;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;4)$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi: $\begin{cases}x-3\ne 0\\ 4-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 3\\ x<4\end{cases}$

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=(-\infty;4)\setminus\{3\}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log_3\left(x^2-4x-m+1\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m<-3$. **B.** $m>3$. **C.** $m>-3$. **D.** $m<3$.

Lời giải

Hàm số $y=\log_3\left(x^2-4x-m+1\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-4x-m+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ 4+m-1<0\end{cases}\Leftrightarrow m<-3$$

Câu 11: Tìm tập xác định của hàm số $y=\ln(3-x)+x^{\pi}$

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Hàm số có nghĩa khi $\begin{cases}3-x>\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<3$

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}+\log_3(1-x)$.

A. $D=(0;1]$. **B.** $D=(0;+\infty)$. **C.** $D=(0;1)$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$. Vậy tập xác định $D=(0;1)$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\log_2 x-1}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x>0 \\ \log_2 x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2 x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định $D=(0;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 14: Tập xác định của hàm số $y=(x-2021)^{\frac{2019}{2021}}$ là

A. $(-2021;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2021\}$. **C.** $(2021;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2021)$.

Lời giải

Điều kiện: $x-2021>0 \Leftrightarrow x>2021 \Leftrightarrow x\in(2021;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(2021;+\infty)$.

Câu 15: Tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_3\dfrac{2x}{x+1}-1}}$ là:

A. $D=(-\infty;-3)$. **B.** $D=(-1;+\infty)$. **C.** $D=(-3;-1)$. **D.** $D=(0;3)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\dfrac{2x}{x+1}>1 \\ \dfrac{2x}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1}>3^1 \\ \dfrac{2x}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1}>3$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1}-3>0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-3}{x+1}>0 \Leftrightarrow -3<x<-1$. Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-3;-1)$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+1}}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m>2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2+mx+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Câu 17: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

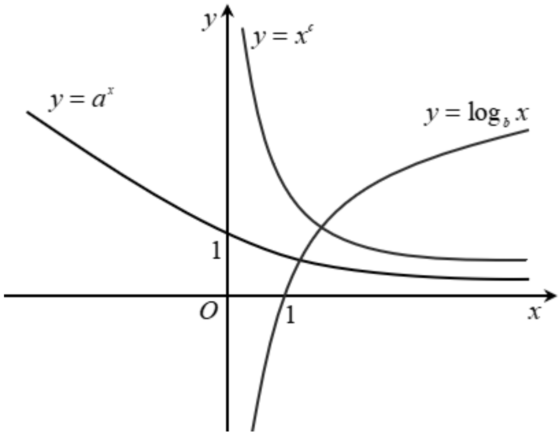
A. $m \ge 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m \le 2$. **D.** $m > 2$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-2x-m+1>0$. Để hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-2x-m+1>0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (-1)^2-(-m+1)<0 \Leftrightarrow m<0$

Câu 18: Cho các đồ thị hàm số $y=a^x, y=\log_b x, y=x^c$ ở hình vẽ sau đây.



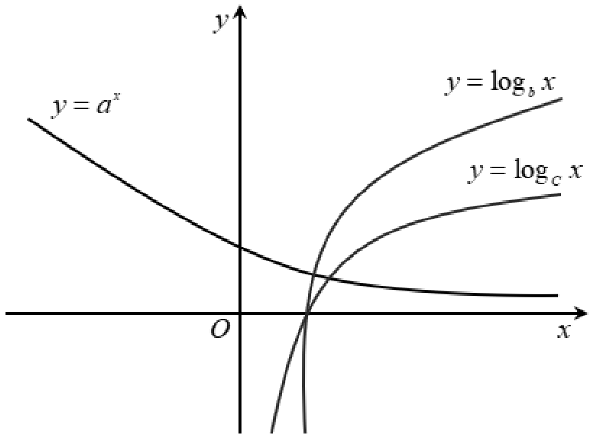
Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<c<1<a<b.$ **B.** $c<0<a<1<b.$ **C.** $c<0<a<b<1.$ **D.** $0<c<a<b<1.$

Lời giải

Ta thấy đồ thị $y=x^c$ đi xuống nên $c<0$, đồ thị $y=a^x$ đi xuống nên $0<a<1$, đồ thị $y=\log_b x$ đi lên nên $b>1.$

Câu 19: Cho các hàm số $y=a^x,\ y=\log_b x,\ y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn khẳng định **đúng**?



A. $b>c>a$. **B.** $b>a>c$. **C.** $a>b>c$ **D.** $c>b>a$.

Lời giải

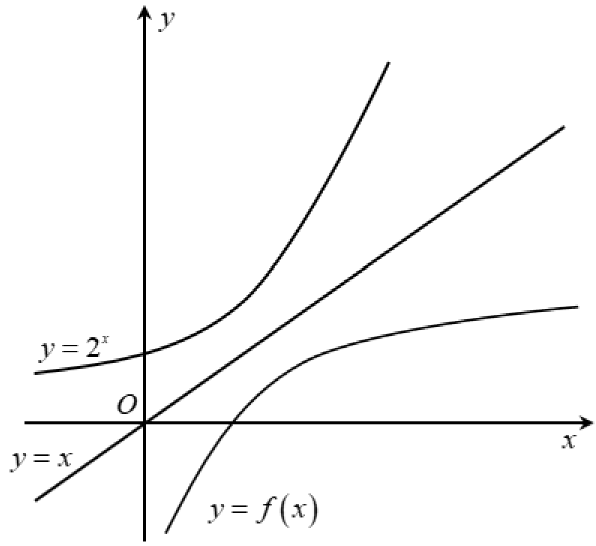
Hàm $y=a^x$ nghịch biến nên $0<a<1$.

Hàm $y=\log_b x,\ y=\log_c x$ đồng biến nên $b,c>1$

Đường thẳng $y=1$ cắt ĐTHS $y=\log_c x$, $y=\log_b x$ tại các điểm có hoành độ lần lượt là c và

b. Ta thấy $b < c$.

Câu 20: Cho ba hàm số $y = 2^x$, $y = x$, $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

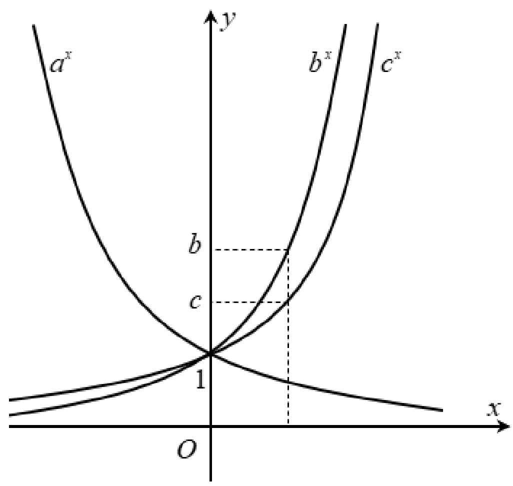


A. $y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. **B.** $y = f(x) = \ln x$. **C.** $y = f(x) = \log_2 x$. **D.** $y = f(x) = \log x$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = 2^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Câu 21: Cho a, b, c là ba số thực dương khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho ở hình vẽ dưới đây. Mệnh nào nào sau đây đúng?



A. $a < b < c$. **B.** $b < c < a$. **C.** $c < a < b$. **D.** $a < c < b$.

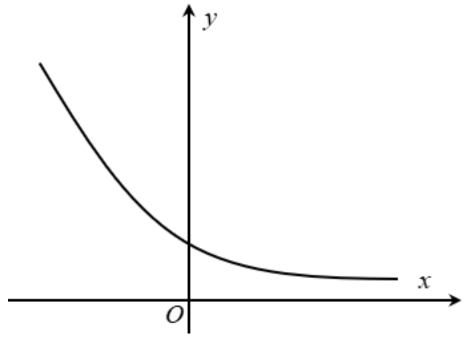
Lời giải

Dựa vào đồ thị, dễ thấy $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b, c > 1 \end{cases}$.

Đường thẳng $x = 1$ cắt hai đồ thị $y = b^x$, $y = c^x$ lần lượt tại b, c và ta thấy $b > c$.

Vậy $a < c < b$.

Câu 22: Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào sau đây?

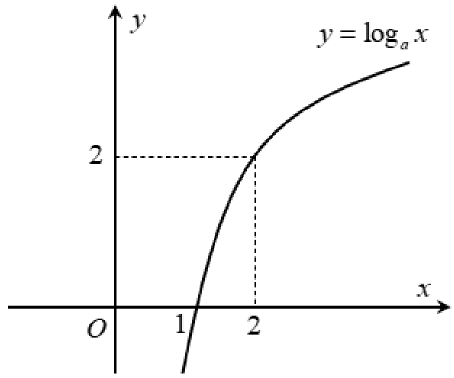


A. $y=\log_2 x$. **<u>B</u>.** $y=(0,8)^x$. **C.** $y=\log_{0,4} x$. **D.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số nghịch biến suy ra $y=(0,8)^x$.

Câu 23: Tìm a để đồ thị hàm số $y=\log_a x\left(0<a\neq 1\right)$ có đồ thị là hình bên.

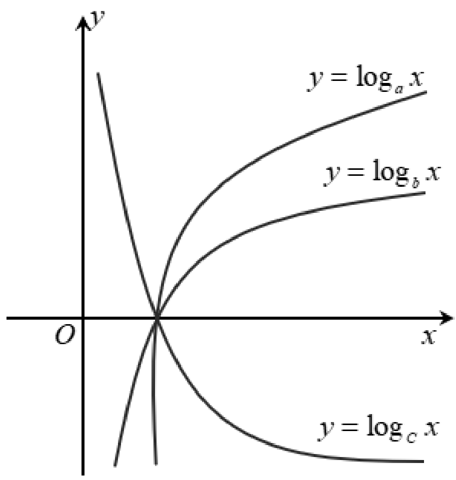


<u>A</u>. $a=\sqrt{2}$. **B.** $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=2$

Lời giải

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;2)$ nên $2=\log_a 2\Leftrightarrow a=\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho a,b,c là ba số dương khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?



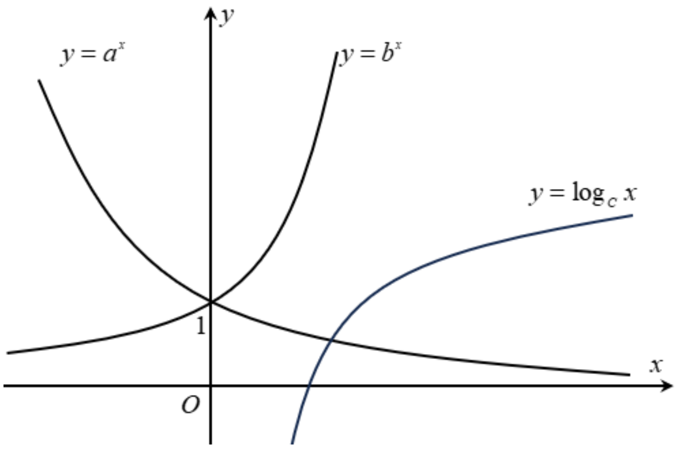
A. $a<b<c$. **B.** $b<c<a$. **<u>C</u>.** $c<a<b$. **D.** $c<b<a$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có $0 < c < 1; a > 1; b > 1$ và $\forall x > 1; \log_a x > \log_b x$ nên $1 < a < b$.

Vậy $c < a < b$.

Câu 25: Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < b < c$. **B.** $a < b = c$. **C.** $b < c < a$. **D.** $a < c < b$.

Lời giải

Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $0 < a < 1$.

Các hàm số $y = b^x, y = \log_c x$ đồng biến biến trên tập xác định của nó nên $b, c > 1$.

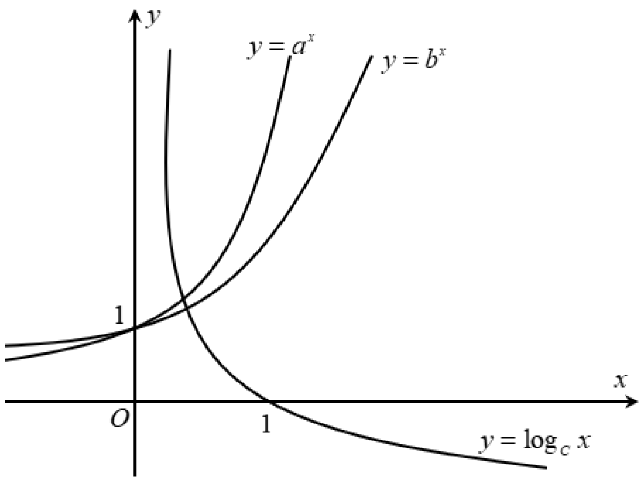
Suy ra $0 < a < b, c < 1$

Xét đồ thị hàm số $y = \log_c x$, ta có $\log_c 2 > 1 \Leftrightarrow c < 2$.

Xét đồ thị hàm số $y = b^x$, ta có $b^1 > 2 \Leftrightarrow b > 2$.

Do đó: $0 < a < c < b$.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y = a^x$; $y = b^x$; $y = \log_c x$ như hình vẽ. Tìm mối liên hệ của a, b, c.



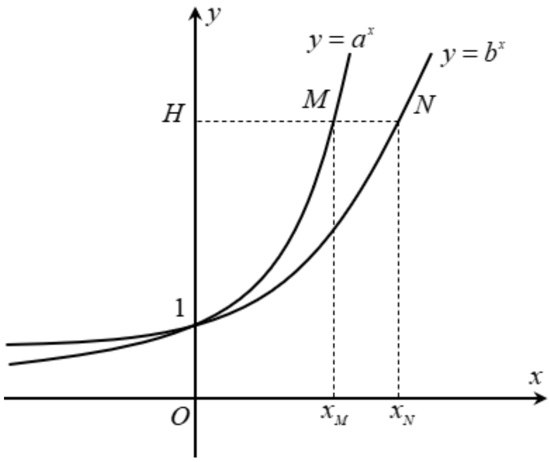
A. $c < b < a$. **B.** $b < a < c$. **C.** $a < b < c$. **D.** $c < a < b$.

Lời giải

Nhìn đồ thị ta thấy hàm số $y = a^x$ là hàm số đồng biến nên $a > 1$; $y = b^x$ là hàm số đồng biến nên $b>1$; $y=\log_c x$ là hàm số nghịch biến nên $0<c<1$ do vậy ta có $\begin{cases}0<c<a\\0<c<b\end{cases}$

Khi thay $x=1$ vào hai hàm số $y=a^x; y=b^x$ ta thu được $a>b$ vậy $c<b<a$.

Câu 27: Cho a,b là các số thực dương khác 1, đường thẳng d song song trục hoành cắt trục tung, đồ thị hàm số $y=a^x$, đồ thị hàm số $y=b^x$ lần lượt tại H, M, N (như hình bên). Biết $HM=3MN$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $4a=3b$. **B.** $b^4=a^3$. **C.** $b^3=a^4$. **D.** $3a=4b$.

Lời giải

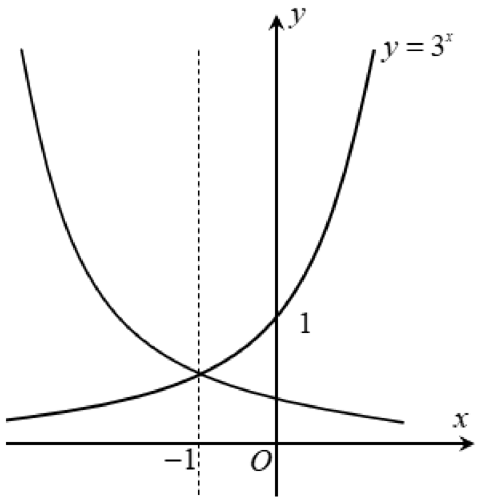
Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y=a^x$ tại điểm $M(x_M;y_M) \Rightarrow y_M=a^{x_M}$.

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y=b^x$ tại điểm $N(x_N;y_N) \Rightarrow y_N=b^{x_N}$.

Mà $y_M=y_N \Rightarrow a^{x_M}=b^{x_N}$.

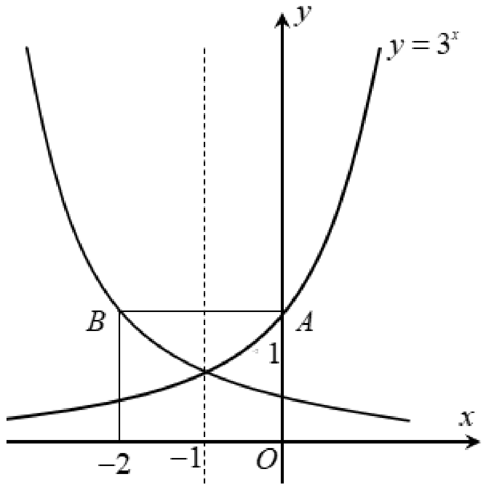
Ta có: $HM=3MN \Rightarrow HM=\dfrac{3}{4}HN \Rightarrow x_M=\dfrac{3}{4}x_N \Rightarrow a^{\frac{3}{4}x_N}=b^{x_N} \Leftrightarrow a^{\frac{3}{4}}=b \Leftrightarrow a^3=b^4$.

Câu 28: Biết hàm số $f(x)=\dfrac{a}{b^2\cdot 3^x}$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y=3^x$ qua đường thẳng $x=-1$. Biết a, b là các số nguyên. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



A. $b^2=9a$. **B.** $b^2=4a$. **C.** $b^2=6a$. **D.** $b^2=a$.

Lời giải



Trên đồ thị hàm số $y=3^x$ lấy $M\left(x_0;y_0\right)$ và gọi $N\left(x,f\left(x\right)\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và đối xứng với M qua đường thẳng $x=-1$.

Khi đó $\begin{cases}\dfrac{x+x_0}{2}=-1\\ f\left(x\right)=y_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-x-2\\ y_0=f\left(x\right)\end{cases}$.

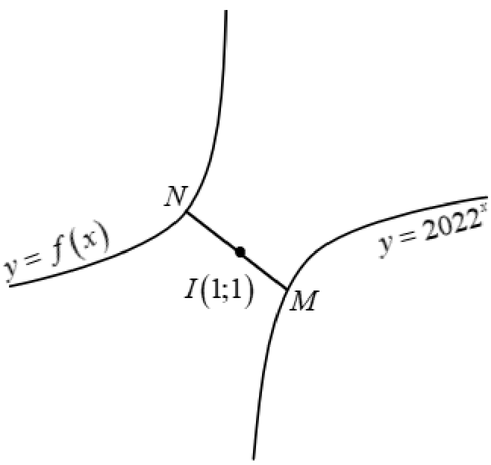
Thay vào hàm số $y=3^x$ ta được: $f\left(x\right)=3^{-x-2}=\dfrac{1}{3^2.3^x}$.

Vậy $a=1;b=3\Rightarrow b^2=9a$.

Câu 29: Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=2022^x$ qua điểm $I\left(1;1\right)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_{2022}\dfrac{1}{2023}\right)$ bằng

A. -2021. **B.** -2023. **C.** -2020. **D.** 2020.

Lời giải



Gọi $N\in\left(C\right):y=f\left(x\right)\Rightarrow N\left(x;f\left(x\right)\right)$, M là điểm đối xứng với N qua I

$\Rightarrow M\in\left(S\right):y=2022^x$ và $I\left(1;1\right)$ là trung điểm $MN\Rightarrow M\left(2-x;2-f\left(x\right)\right)$

Mà $M \in (S) \Rightarrow 2 - f(x) = 2022^{2-x} \Rightarrow f(x) = 2 - 2022^{2-x}$

Khi đó ta có:

$$f\left(2+\log_{2022}\frac{1}{2023}\right) = 2 - 2022^{2-\left(2+\log_{2022}\frac{1}{2023}\right)} = 2 - 2022^{\log_{2022}2023} = 2 - 2023 = -2021$$

Câu 30: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x\,(a > 0, a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a\frac{1}{2023}\right)$ bằng

A. 2022. **B.** 2024. **C.** -2023. **D.** -2021.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = a^x$; (C_1) là đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$M\left(2+\log_a\frac{1}{2023}; y_M\right) \in (C_1) \Leftrightarrow y_M = f\left(2+\log_a\frac{1}{2023}\right)$.

Gọi N đối xứng với M qua $I(1;1) \Rightarrow N\left(-\log_a\frac{1}{2023}; 2-y_M\right)$.

Do đồ thị (C_1) đối xứng (C) qua $I(1;1)$ nên $N\left(-\log_a\frac{1}{2023}; 2-y_M\right) \in (C)$.

$N \in (C) \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{-\log_a\frac{1}{2023}} \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{\log_a 2023} \Leftrightarrow 2 - y_M = 2023 \Leftrightarrow y_M = -2021$.

Vậy $f\left(2+\log_a\frac{1}{2023}\right) = -2021$.

Câu 31: Ông An gửi 500 triệu vào ngân hàng theo hình thức lãi kép trong một thời gian khá lâu với lãi suất ổn định trong suốt thời gian tiết kiệm là 10% 1 năm. Tết năm nay do dịch bệnh nên ông rút hết tiền trong ngân hàng ra để gia đình chi tiêu. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra 20 triệu để sắm sửa đồ Tết thì ông còn 860 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu năm?

A. 9 năm. **B.** 20 năm. **C.** 12 năm. **D.** 6 năm.

Lời giải

Giả sử ông An đã gửi tiết kiệm trong n năm.

Số tiền ông đã nhận được là 880 triệu.

Theo công thức lãi suất kép, ta có

$$880.10^6 = 500.10^6(1+0{,}1)^n \Leftrightarrow n = \log_{1,1}\frac{880}{500} \Leftrightarrow n \approx 5{,}93.$$

Vậy, ông A đã gửi tiết kiệm trong 6 năm.

Câu 32: Một người gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $6{,}3\%$ / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y=\log_{1,063}\left(\frac{x}{20}\right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 7 năm. **B.** $6,6$ năm. **C.** 6 năm. **D.** 5 năm.

Lời giải

Người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng sau $y=\log_{1,063}\left(\frac{30}{20}\right)=6.6\approx 7$ năm.

Câu 33: Một sinh viên ra trường đi làm ngày $1/1/2023$ với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 60% lương, phần còn lại tiết kiệm hết để mua nhà. Giá trị hiện tại của căn nhà là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị tăng thêm 5%. Với mức lương khởi điểm a là bao nhiêu thì sau 12 năm anh ta mua được nhà (kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 19028000 đồng. **B.** 16092000 đồng. **C.** 20092000 đồng. **D.** 18092000 đồng.

Lời giải

Đầu tiên ta tính giá trị của ngôi nhà sau 12 năm:

Giá trị ngôi nhà sau 2 năm: $10^9+10^9.0,05=10^9.(1+0,05)$

Giá trị ngôi nhà sau 4 năm: $10^9+10^9.0,05+\left(10^9+10^9.0,05\right).0,05=10^9.(1+0,05)^2$

Lần lượt ta có giá trị ngôi nhà sau 12 năm: $10^9+10^9.0,05+\left(10^9+10^9.0,05\right).0,05=10^9.(1+0,05)^6$

Sau khi chi tiêu hàng tháng thì số tiền tiết kiệm là 40% lương.

Có nghĩa là trong hai năm $2023-2024$, số tiền tiết kiệm là: $24.0,4a$

Trong hai năm tiếp theo $2025-2026$, số tiền tiết kiệm là: $24.0,4a(1+0,01)$

Tương tự vậy số tiền tiết kiệm được trong 12 năm là:

$$24.0,4a\left[1+(1+0,1)+(1+0,1)^2+(1+0,1)^3+(1+0,1)^4+(1+0,1)^5\right]=74,069856a$$

Để mua được nhà thì số tiền trên phải bằng số tiền sau 12 năm:

$74,069856a=10^9.1,05^6\Rightarrow a=18092321$

Vậy số a gần bằng 18092000.

Câu 34: Ông A có số tiền 120 triệu đồng gửi tiết kiệm theo thể thức lãi suất kép, có hai loại để lựa chọn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất $12,5\%$ trên một năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1% trên một tháng. Ông A muốn gửi 12 năm. Theo anh chị ông A gửi loại nào sau 12 năm sẽ nhận được tổng số tiền nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. Gửi theo kì hạn năm lãi hơn kì hạn tháng 9879000 đồng.

B. Gửi theo kì hạn tháng lãi hơn kì hạn năm 9687000 đồng.

C. Gửi theo hai loại bằng nhau.

D. Gửi theo kì hạn năm lãi hơn kì hạn tháng 9678000 đồng.

Lời giải

Loại kì hạn 12 tháng:

Số tiền có được sau 1 năm: $120.10^6+120.10^6.0,125=120.10^6.(1+0,125)$

Số tiền có được sau 2 năm: $120.10^6.(1+0,125)+120.10^6.(1+0,125).0,125=120.10^6.(1+0,125)^2$

Tương tự vậy số tiền có được sau 12 năm: $120.10^6.(1+0,125)^{12}\approx 493186000$ đồng

Loại kì hạn 1 tháng (12 năm là 144 tháng): Số tiền có được sau 12 năm: $120.10^6.(1+0,01)^{144}\approx 502873000$

Vậy số tiền gửi theo kì hạn 1 tháng nhiều hơn kì hạn năm: $502873000-493186000=9687000$ đồng

Câu 35: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S=A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết năm 2023 dân số thành phố Cần Thơ năm 2023 ước tính là 1282000 người và tỉ lệ gia tăng dân số là $1,03\%$. Hỏi đến năm bao nhiêu thì dân số thành phố Cần Thơ đạt hơn $1,5$ triệu người?

A. 2038. **<u>B</u>.** 2039. **C.** 2040. **D.** 2041.

Lời giải

Lấy năm 2023 làm mốc, khi đó $A=1282000$. Giả sử sau n năm thì dân số thành phố Cần Thơ đạt hơn, tức là $1500000=1282000.e^{0,0103n}\Rightarrow e^{0,0103n}=\dfrac{750}{641}\Rightarrow 0,0103n=\ln\dfrac{750}{641}\Rightarrow n\approx 15,25$

Có nghĩa là theo tốc độ tăng dân số này thì sau 16 năm dân số thành phố sẽ đạt 1500000 người vào năm 2039.

Câu 36: Ông B vay ngân hàng 600 triệu đồng và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất 0,8% trên tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sao bao lâu ông B sẽ trả hết số nợ ngân hàng

<u>A</u>. 50. **B.** 55. **C.** 60. **D.** 65.

Lời giải

Số tiền còn lại sau 1 tháng: $600.10^6+600.10^6.0,8\%-10.10^6$

Khi đó ta có thể gọi số tiền vay là A, lãi suất là r, số tiền trả mỗi cuối tháng là m và n là số tháng để trả hết tiền.

Vậy số tiền còn nợ cuối tháng 1: $A+Ar-m=A(1+r)-m$

Số tiền còn nợ cuối tháng 2: $A(1+r)-m+\left[A(1+r)-m\right]r-m=A(1+r)^2-\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$

Số tiền còn nợ cuối tháng n: $A(1+r)^n-\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$

Có nghĩa là khi trả hết tiền thì:

$$A(1+r)^n-\frac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]=0\Leftrightarrow 600.10^6(1+0.8\%)-\frac{10.10^6}{0,8}\left[(1+0,8\%)^n-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1+0,8\%)^n=1,48384\Rightarrow n=\log_{1+0,8\%}1,48384\approx 49,5$$

Vậy sau 50 tháng thì ông B trả hết nợ.

Câu 37: Áp suất không khi P (đo bằng milimet thủy ngân, ki hiệu là mmHg) suy giàm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P=P_0e^{ni}$ trong đó $\mathrm{P0}=760\mathrm{mmHg}$ là áp suất ở mực nước biến $(\mathrm{x}=0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000\,\mathrm{m}$ thì áp suất của không khí là $672,7\mathrm{mmHg}$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3000\,\mathrm{m}$ gân với số nào sau đây nhất?

A. $530,23\mathrm{mmHg}$. **B.** $540,23\mathrm{mmHg}$. **C.** $520,23\mathrm{mmHg}$. **D.** $510,23\mathrm{mmHg}$.

Lời giải

Áp dụng công thức $P=P_0e^{nt}$

Ở độ cao $1000\,\mathrm{m}$ ta có: $\mathrm{P.0}=760\mathrm{mmHg}, \mathrm{n}=1000\,\mathrm{m}, \mathrm{P}=672,71\mathrm{mmHg}$, từ giả thiết này ta tìm được hệ số suy giảm.

Ta có $672,71=760e^{1000\times x}\Leftrightarrow 1000i=\ln\dfrac{672,71}{760}\Leftrightarrow i\approx -0,00012$

Khi đó ở độ cao $3000\,\mathrm{m}$, áp suát của không khi là: $P=760e^{-0,00012*5000}\approx 530,2340078$

Câu 38: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức: $m(t)=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t=0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau 3,5 ngày đêm? (Kết quả làm tròn đến 3 chữ số thập phân sau dấu phầy)

A. 22,097 (gam). **B.** 23,097 (gam). **C.** 20,097 (gam). **D.** 24,097 (gam)

Lời giải

Áp dụng công thức $m(t)=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

Với $m_0=250, T=24$ giờ $=1$ ngày đêm, $t=3,5$ ngày đêm.

Ta có: $m(3,5)=250.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3,5}{1}}\approx 22,097\,gam$

Câu 39: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để' đo mức cường độ của âm là đềxinben (viết tắt là đB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(db)=10\log\dfrac{I}{I_0}$ trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe $\left(I_0=10^{-12}\,w/m^2\right)$. Tiếng ồn phát ra từ tiềng gõ phím liên tục ở một bàn phím của máy vi tính, có cường độ âm đo được là $10^{-5}\,w/m^2$. Giả sử trong phòng làm việc của một công ty có hai nhân viên văn phòng cùng thực hiện thao tác gõ phím trên hai bàn phím máy vi tính giống nhau thì mức cường độ âm tổng cộng đo cả hai bàn phím phát ra cùng lúc là bao nhiêu?.

A. $73dB$. **B.** $140dB$. **C.** $100dB$. **D.** $72dB$.

Lời giải

Nếu chỉ có một bàn phím có $L(db)=10\log\frac{I}{I_0}=10\log\frac{10^{-5}}{10^{-12}}=70\,\text{dB}$

Cả hai bàn phím cùng gõ: $L_2=10\log\frac{2I_1}{I_0}=10\log 2+10\log\frac{I}{I_0}=10\cdot\log 2+70\approx 73\,\text{dB}$

Vậy có thêm một bàn phím gõ thì mức cường độ âm tăng thêm 3dB.

Câu 40: Cho biết chu kì bán hủy của chất phỏng xạ plutônium Pu^{239} là 24.360 năm (tức là lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chi còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính bởi công thức $S=Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $(r<0)$, t là thời gian phân huỷ, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam?

A. 48720. **B.** 10000. **C.** 82333. **D.** 82235.

Lời giải

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ phân hủy hàng năm của Pu^{239}.

Pu^{239} có chu kì bán hủy của chất phóng xạ plutônium Pu^{239} là 24.360 năm, do đó:

$$5=10e^{r24360}\Leftrightarrow r=\frac{\ln\frac{5}{10}}{24360}\Leftrightarrow r=\frac{\ln 5-\ln 10}{24360}\approx -2,84543.10^{-5}\approx -0,000028$$

Vậy sự phân hủy của Pu^{239} được tính bởi công thức $S=Ae^{-0.000028t}$ trong đó S,A tính bằng gam, t tính bằng năm.

Theo đề bài cho ta có: $1=10e^{-0,000028t}\Leftrightarrow t=-\frac{\ln 10}{-0,000028}\approx 82235$ năm.

Vậy sau khoảng 82235 năm thì 10 gam Pu^{239} sẽ phân hủy còn lại 1 gam.

Câu 41: Cường độ một trận động đất M (Richte) được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu?

A. 8.4. **B.** 32. **C.** 12. **D.** 8.6.

Lời giải

Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte khi đó áp dụng công thức

$$M_1=\log A-\log A_0\Rightarrow 8=\log A-\log A_0$$

Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là: 4A, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

$$M_2=\log(4A)-\log A_0=\log 4+\log A-\log A_0=\log 4+8\approx 8.6 \text{ độ Richte.}$$

Câu 42: Cường độ một trận động đất M (Richte) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richte. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản.

A. $\frac{1}{100}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** 100.

Lời giải

Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte khi đó áp dụng công thức

$$M_1 = \log A_1 - \log A_0 \Rightarrow 8 = \log A_1 - \log A_0 \ (1).$$

Trận động đất ở Nhật có cường độ 6 độ Richte khi đó áp dụng công thức là: $M_2 = \log A_1 - \log A_0 \Rightarrow 6 = \log A_2 - \log A_0 \ (2)$.

Lấy $(1)-(2)$ vế với vế ta được: $2 = \log A_1 - \log A_2 \Leftrightarrow 2 = \log\frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = 100 \Leftrightarrow A_1 = 100A_2$.

Vậy trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp 100 lần biên độ trận động đất ở Nhật bản.

Câu 43: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đềxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(dB) = 10\log\frac{I}{I_0}$, trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12}\ w/m^2$). Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là $68\ dB$. Hãy tính cường độ âm tương ứng ra đơn vị w/m^2

A. $6{,}3.10^{-6}\ w/m^2$. **B.** $6{,}3.10^{-72}\ w/m^2$. **C.** $6{,}3.10^{6}\ w/m^2$. **D.** $6{,}3\ w/m^2$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $L(dB) = 68\ dB, I_0 = 10^{-12}\ w/m^2$. Tính I.

Áp dụng công thức ta có $L(dB) = 10\log\frac{I}{I_0} \Leftrightarrow 68 = 10\log\frac{I}{I_0} \Leftrightarrow \log\frac{I}{I_0} = 6{,}8 \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{6,8}$

$$\frac{I}{I_0} = 10^{0,8}.10^6 \Leftrightarrow I = 10^{0,8}.10^6.I_0 \approx 6{,}3.10^6.10^{-12} \approx 6{,}3.10^{-6}\ w/m^2.$$

Câu 44: Năm 2020, dân số thế giới là $7{,}795$ tỉ người và tốc độ tăng dân số $1{,}05\%$/năm. Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì đến năm bao nhiêu năm dân số đạt 10 tỉ người.

A. 2040. **B.** 2044. **C.** 2048. **D.** 2052.

Lời giải

Dân số thế giới sau 1 năm tính từ năm 2020 là $7{,}795.(1+1{,}05\%)^1 = 7{,}795.1{,}0105^1$ tỉ người.

Dân số thế giới sau 2 năm tính từ năm 2020 là $7,795.1,0105.(1+1,05\%)^1 = 7,795.1,0105^2$ tỉ người.

….

Dân số thế giới sau t năm tính từ năm 2020 là $P(t) = 7,795.1,0105^t$ tỉ người.

Giả sử sau ít nhất t năm tính từ năm 2020 thì dân số thế giới đạt 10 tỉ người.

Khi đó $7,795.1,0105^t = 10 \Leftrightarrow t \approx 23,85$.

Do đó sau ít nhất 24 năm thì dân số thế giới đạt 10 tỉ người.

Vậy đến năm $2020 + 24 = 2044$ dân số đạt 10 tỉ người.

Câu 45: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đềxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(dB) = 10\log\frac{I}{I_0}$, trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12}\ w/m^2$). Hai cây đàn ghita giống nhau, cùng hoà tấu một bản nhạc. Mỗi chiếc đàn phát ra âm có mức cường độ âm trung bình là 60 d**B.** Hỏi mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra là bao nhiêu?

A. 120. **B.** 80. **C.** 180. **D.** 63.

Lời giải

Mức cường độ âm do một chiếc đàn ghita phát ra $L_1 = 10\log\frac{I_1}{I_0} = 60dB$.

Mức cường độ âm do hai chiếc đàn ghita cùng phát ra là:

$$L_2 = 10\log\frac{I_2}{I_0} = 10\log\frac{2I_1}{I_0} = 10\log 2 + 10\log\frac{I_1}{I_0} = 10\log 2 + 60 \approx 63\ dB.$$

Vậy mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra là $63\ dB$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho các hàm số $y = \log_{\frac{2024}{2023}} x$ và $y = \left(\frac{2023}{2024}\right)^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \log_{\frac{2024}{2023}} x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = \left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{2024}{2023}} x$ nằm bên phải trục tung.

d) Đồ thị hàm số $y = \left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ cắt trục tung.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y=\log_{\frac{2024}{2023}} x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

b) Sai: Vì cơ số $\frac{2023}{2024}\in(0;1)$ nên hàm số $y=\left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đúng: Hàm số $y=\log_{\frac{2024}{2023}} x$ có tập xác định là $(0;+\infty)$ nên có đồ thị nằm bên phải trục tung.

d) Sai: Vì $\left(\frac{2023}{2024}\right)^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y=\left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ không cắt trục tung.

Câu 2: Cho hàm số $y=\log_a x\ \ (0<a\neq 1)$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$ và tập giá trị của hàm số là $T=\mathbb{R}$

b) Đồ thị (C) đi qua điểm $(1;0)$, nằm bên phải trục tung

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1$.

d) Đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y=2-\log_a(4-x)$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;1)$.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số là $D=(0;\infty)$ và tập giá trị của hàm số là $T=\mathbb{R}$

Hàm số $y=\log_a x\ \ (0<a\neq 1)$ xác định khi: $x>0\Rightarrow D=(0;\infty)$.

Hàm số $y=\log_a x\ \ (0<a\neq 1)$ nhận mọi giá trị nên tập giá trị của hàm số là $T=\mathbb{R}$

b) Đúng: Đồ thị (C) đi qua điểm $(1;0)$, nằm bên phải trục tung và nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Thay tọa độ điểm $(1;0)$ vào $y=\log_a x$ ta thấy thỏa mãn suy ra đồ thị (C) đi qua điểm $(1;0)$.

Vì $x>0$ nên đồ thị (C) nằm bên phải trục tung.

c) Sai: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1$.

Ta có: $y'=\frac{1}{x\ln a}>0,\forall x>0,a>1\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi $a>1$.

d) Đúng: Đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y=2-\log_a(4-x)$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;1)$.

Lấy $M(x;y)\in(C)$. Gọi $I(2;1)$ là trung điểm $MN\Rightarrow N(4-x;2-y)$

Dễ thấy $N(4-x;2-y)$ thuộc đồ thị hàm số $y=2-\log_a(4-x)$

Vậy đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y=2-\log_a(4-x)$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\log_5 x$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳn định sau:

a) Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) Đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành.

d) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

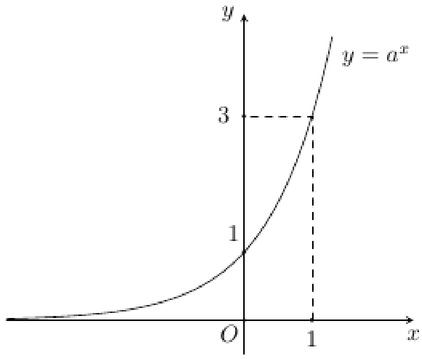
a) Sai: Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là $D=(0;+\infty)$.

b) Đúng: Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên cũng đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

c) Sai: Đồ thị (C) nằm bên phải trục tung.

d) Đúng: Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số cho bởi công thức $y=3^x$.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=\frac{1}{3}$ tại điểm có hoành độ không âm.

d) Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-x+1$ tại điểm có hoành độ dương.

Lời giải

a) Sai: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Đồ thị hàm số $y=a^x$ đi qua điểm $(1;3)$ suy ra $a=3$.

c) Đúng: Phương trình hoành độ giao điểm của $y=3^x$ và đường thẳng $y=\frac{1}{3}$ là:

$$3^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=-1.$$

d) Sai: Phương trình hoành độ giao điểm của $y=3^x$ và đường thẳng $y=-x+1$ là:

$$3^x=-x+1 \quad (1)$$

Ta có hàm số $y=3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $3^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Đường thẳng $y=-x+1$ có hệ số $a=-1<0$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có $3^0=-0+1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=0$.

Câu 5: Cho các hàm số $y=\log_a x$, $y=a^x$ với a là số thực dương khác 1. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

b) Hàm số $y=\log_a x$ và hàm số $y=a^x$ có cùng tập giá trị.

c) Hàm số $y=a^x$ với $0<a<1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số $y=a^x$ với $a>0$ và $a\neq 1$ luôn đi qua điểm $A(a;1)$.

Lời giải

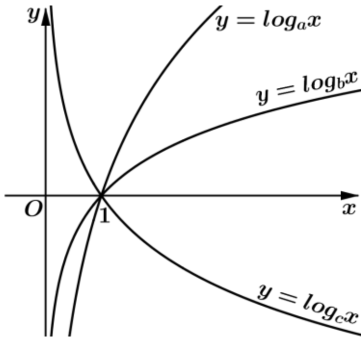
a) Đúng: Đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

b) Sai: Hàm số $y=\log_a x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ và hàm số $y=a^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

c) Đúng: Hàm số $y=a^x$ với $0<a<1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

d) Sai: Đồ thị hàm số $y=a^x$ với $a>0$ và $a\neq 1$ luôn đi qua điểm $A(a;a^a)$ hoặc $A(0;1)$.

Câu 6: Cho các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ với a,b,c là ba số thực dương khác 1. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Đồ thị các hàm số trên đều đi qua điểm $A(1;0)$.

b) Hàm số $y=\log_c x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) Từ đồ thị ta có: $0<c<1<a<b$.

d) Đường thẳng $y=3$ cắt hai đồ thị $y=\log_a x$, $y=\log_b x$ tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x_1;x_2$ sao cho $x_2=2x_1$. Khi đó $\dfrac{a}{b}=\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Xét $\log_a x=1\Leftrightarrow x=a$; $\log_b x=1\Leftrightarrow x=b$; $\log_c =1\Leftrightarrow x=c\Rightarrow c<1<a<b$.

a) Đúng.

b) Sai: Hàm số $y=\log_c x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) Đúng: Từ đồ thị suy ra $0<c<1<a<b$

d) Sai: Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x=3\Leftrightarrow x_1=a^3$, và $\log_b x=3\Leftrightarrow x_2=b^3$.

Do $x_2=2x_1$ nên $b^3=2a^3$ suy ra $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=a^x$ với $0<a\neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=a^x$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$

b) Đồ thị hàm số $y=a^x$ đi qua điểm $(0;1)$.

c) Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0<a<1$.

d) Hàm số $y=a^x$ có tập giá trị là $(a;+\infty)$ nếu $x>1$ và $a>1$.

Lời giải

a) Sai: Hàm số $y=a^x$ có tập xác định $D=R$.

b) Đúng: Do $x=0\Rightarrow y=1$, đồ thị hàm số $y=a^x$ là hàm số đi qua điểm $(0;1)$.

c) Sai: Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0<a<1$.

d) Đúng: Nếu $x>1$ và $a>1$ thì $a^x>a^1=a$ do đó hàm số $y=a^x$ có tập giá trị là $(a;+\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=2^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;4)$

d) Đồ thị hàm số $y=2^x$ đối xứng với đồ thị $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ qua trục tung.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y=2^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ do đó hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

b) Sai: Hàm số $y=2^x$ có cơ số $2>1$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

c) Đúng: Thay $A(2;4)$ vào $y=2^x$: $2^2=4=y_A$ do đó Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;4)$

d) Đúng: Đồ thị hàm số $y=a^x$ đối xứng với đồ thị $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ qua trục tung với $a>0$

Câu 9: Cho hàm số $y=\log_4 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

b) Hàm số có tập giá trị $T=\mathbb{R}$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=1$ tại điểm có hoành độ bằng 3

Lời giải

a) Sai: Hàm số $y=\log_4 x$ xác định trên $(0;+\infty)$ do đó hàm số có tập xác định $D=(0;+\infty)$

b) Đúng: Hàm số $y=\log_4 x$ có tập giá trị $T=\mathbb{R}$

c) Sai: Hàm số $y=\log_4 x$ xác định trên $(0;+\infty)$ và có cơ số $4>1$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

d) Sai: Phương trình hoành độ giao điểm: $\log_4 x=1\Leftrightarrow x=4^1=4$

Câu 10: Cho các hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ và $y=2^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có hai hàm số mũ.

b) Đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ đi qua điểm $M(2;-1)$.

c) Đồ thị hàm số $y = 2^x$ đi qua điểm $N(1;-1)$.

d) Hai đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ cắt nhau tại 1 điểm.

Lời giải

a) Sai: Có một hàm số mũ là $y = 2^x$.

b) Đúng: Khi $x = 2$ thì $y = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ nên đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ đi qua điểm $M(2;-1)$.

c) Sai: Khi $x = 1$ thì $y = 2^1 = 2$ nên đồ thị hàm số $y = 2^x$ không đi qua điểm $N(1;-1)$.

d) Đúng: Căn cứ đồ thị, ta thấy hai đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ cắt nhau tại 1 điểm.

Câu 11: Cho các hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = 2^x$; $y = \log_{\sqrt{3}} x$; $y = \log_{0,5} x$ và $y = (0,5)^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = 2^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

b) Hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

c) Có hai hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

d) Có hai hàm số có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y = 2^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

b) Đúng: Hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

c) Sai: Có ba hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$ là $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = \log_{\sqrt{3}} x$; $y = \log_{0,5} x$.

d) Đúng: Có hai hàm số có tập giá trị là $(0;+\infty)$ là $y = 2^x$; $y = (0,5)^x$.

Câu 12: Cho các hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $y = \pi^x$; $y = \ln x$; $y = \log_{0,2} x$ và $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = \log_{\pi} x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

c) Có ba hàm số nghịch biến trên tập xác định.

d) Có hai hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ có $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

b) Sai: Hàm số $y = \log_{\pi} x$ có $\pi > 1$ nên đồng biến trên tập xác định $(0;+\infty)$.

c) Đúng: Có ba hàm số nghịch biến trên tập xác định là $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $y = \log_{0,2} x$ và $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

d) Sai: Có một hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là $y = \ln x$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \log_3(5x-3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2;7)$.

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[\frac{4}{5};\frac{12}{5}\right]$ là 2

Lời giải

a) Sai: Hàm số xác định $\Leftrightarrow 5x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{5}$, do đó hàm số có TXĐ: $D=\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

b) Đúng: Với $\forall x_1,x_2 \in \left(\frac{3}{5};+\infty\right); x_1<x_2 \Rightarrow 5x_1-3<5x_2-3 \Rightarrow \log_3(5x_1-3)<\log_3(5x_2-3)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

c) Sai: Với $x=2$ thì $y=\log_3 7$.

Vậy đồ thị hàm số qua điểm $(2;\log_3 7)$ và không đi qua điểm M.

d) Đúng: Do hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$

Suy ra $\underset{\left[\frac{4}{5};\frac{12}{5}\right]}{Max} f(x)=f\left(\frac{12}{5}\right)=\log_3\left(5.\frac{12}{5}-3\right)=2$ và $\underset{\left[\frac{4}{5};\frac{12}{5}\right]}{Min} f(x)=f\left(\frac{4}{5}\right)=\log_3\left(5.\frac{4}{5}-3\right)=0.$

Vậy $\underset{\left[\frac{4}{5};\frac{12}{5}\right]}{Max} f(x)+\underset{\left[\frac{4}{5};\frac{12}{5}\right]}{Min} f(x)=2.$

Câu 14: Cho ba điểm $A(b;\log_a b)$, $B(c;2\log_a c)$ và $C(b;3\log_a b)$ với a,b,c dương và đều khác 1.

a) B là trung điểm của AC khi và chỉ khi $b=c>0$.

b) Ba điểm A,B,C tạo thành tam giác vuông tại A khi và chỉ khi $b=2c$.

c) Khi ba điểm A,B,C tạo thành tam giác thì có diện tích là $S=\left|(c-b).\log_a b^2\right|$.

d) Khi B là trọng tâm của tam giác OAC (với O là gốc tọa độ) thì giá trị của biểu thức $S=2b+c$ là bằng 9.

Lời giải

a) Đúng: B là trung điểm của $AC \Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_C=2x_B \\ y_A+y_C=2y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+b=2c \\ \log_a b+3\log_a b=2(2\log_a c) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=2c \\ 4\log_a b=4\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ \log_a b=\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow b=c>0$.

b) Sai: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(c-b;2\log_a c-\log_a b)\neq\vec{0} \\ \overrightarrow{AC}=(0;2\log_a b)\neq\vec{0}\,\forall b>0 \text{ va } b\neq 1 \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông ở $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow 2\log_a b(2\log_a c-\log_a b)=0$

$\Leftrightarrow 2\log_a c - \log_a b = 0$ (do $b > 0 \,\&\, b \neq 1$) $\Leftrightarrow \log_a c^2 = \log_a b \Leftrightarrow b = c^2$.

c) Sai: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(c-b; 2\log_a c - \log_a b\right) \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} = \left(0; 2\log_a b\right) \neq \vec{0} \,\forall b > 0 \ va \ \ b \neq 1 \end{cases}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2}\left|(c-b).2\log_a b - 0.\left(2\log_a c - \log_a b\right)\right| = \left|(c-b).\log_a b\right|$

d) Đúng: Vì B là trọng tâm của tam giác OAC nên $\begin{cases} \dfrac{0+b+b}{3} = c \\ \dfrac{0+\log_a b + 3\log_a b}{3} = 2\log_a c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b+b = 3c \\ 4\log_a b = 6\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 3c \\ 2\log_a b = 3\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 3c \\ \log_a b^2 = \log_a c^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 3c \\ b^2 = c^3 \end{cases} \xrightarrow{c>0} b = \dfrac{27}{8},\ c = \dfrac{9}{4} \longrightarrow S = 2b + c = 9.$

Câu 15: Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x-1} & khi\ x \neq 1 \\ ax - 4 & khi\ x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$

a) Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

b) $a^x = \dfrac{1}{16}$ khi $x = -4$.

c) Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đi qua điểm $(2;1)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a^{x-1} + a^{1-2x}$ bằng $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Vì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên ta có

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x-1} = a.1 - 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}(-x-1) = a - 4 \Leftrightarrow -2 = a - 4 \Leftrightarrow a = 2$

a) Sai: Hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

b) Đúng: $2^x = \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-4} \Leftrightarrow x = -4$.

c) Đúng: $\log_2 2 = 1$ suy ra đồ thị đi qua điểm $(2;1)$

d) Đúng: $2^{x-1} + 2^{1-2x} = \dfrac{2^x}{2} + \dfrac{2}{2^{2x}} = \dfrac{2^x}{4} + \dfrac{2^x}{4} + \dfrac{2}{2^{2x}} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2^x}{4}.\dfrac{2^x}{4}.\dfrac{2}{2^{2x}}} = \dfrac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{2^x}{4} = \dfrac{2}{2^{2x}} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^3 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $y_{Min} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Câu 16: Một người gửi số tiền 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Lãi suất của ngân hàng là $0,65$ trong một năm

b) Sau khi gửi 1 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng là $532\,500\,000$ đồng

c) Sau khi gửi 3 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng nhiều hơn $600\,000\,000$ đồng.

d) Do thiếu tiền nên ở cuối năm thứ 3, người đó đã rút 100 triệu đồng từ ngân hang và tiếp tục gửi thêm 2 năm nữa thì rút toàn bộ số tiền. Lúc này người này có số tiền ít hơn $670\,000\,000$ đồng.

Lời giải

a) Sai: Lãi suất ngân hàng là $0,065$ trong một năm.

b) Đúng: Sau một năm số tiền gửi là $500\left(1+6,5\%\right)^1=532,5$ (triệu đồng).

c) Đúng: Đến hết năm thứ ba, số tiền người đó có được là $500\left(1+6,5\%\right)^3>600$ triệu đồng.

d) Sai: Sau khi rút về 100 triệu đồng và tiếp tục gửi trong vòng 2 năm tiếp theo, người đó có số tiền là $\left[500\left(1+6,5\%\right)^3-100\right].\left(1+6,5\%\right)^2\approx 571,621$ triệu đồng. Tổng số tiền người đó có được sau 5 năm (sau khi làm tròn) là $571,621+100=671,621$ triệu đồng, gần nhất với 671,620 triệu đồng.

Câu 17: Cô Nga gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Nga không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (triệu đồng), cô Nga sử dụng công thức $y=\log_{1,06}\left(\dfrac{x}{100}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tổng số tiền x thu được tăng lên khi số năm gửi y tăng lên do đó hàm số $y=\log_{1,06}\left(\dfrac{x}{100}\right)$ đồng biến trên tập xác định.

b) Sau ít nhất 12 năm thì cô Nga có thể rút ra được số tiền gấp đôi số tiền đã gửi từ tài khoản tiết kiệm đó.

c) Có một dự án đầu tư đòi hỏi chi phí hiện tại là 100 triệu đồng và sau 5 năm sẽ đem lại 150 triệu đồng. Xét khẳng định: "Cô Nga nếu đầu tư vào dự án này sẽ thu về khoản lợi nhuận nhiều hơn là gửi tiền vào ngân hàng đã nêu".

d) Do tham gia bảo hiểm nhân thọ nên hàng năm cô Nga phải đóng phí là 20 triệu đồng. Cô dự kiến sau khi gửi tiền được một năm thì hàng năm sẽ rút 20 triệu đồng từ tiền gốc và lãi thu được để đóng bảo hiểm, số tiền còn lại thì cô tiếp tục gửi ngân hàng (giả sử quy định về lãi suất tiền gửi không thay đổi). Xét khẳng định: "Cô Nga sử dụng số tiền theo cách đó sẽ đóng bảo hiểm được tối đa 6 năm từ số tiền 100 triệu vốn ban đầu".

Lời giải

a) Đúng.

b) Đúng: Với $x = 200$ ta có $\log_{1.06}\left(\frac{200}{100}\right) = \log_{1.06} 2 \simeq 11,9 \Rightarrow y \geq 12$ (năm).

c) Đúng: Với $x = 150$ ta có $\log_{1.06}\left(\frac{150}{100}\right) = \log_{1.06} 1,5 \simeq 6,96 \Rightarrow y \geq 7$ (năm). Nên nếu gửi ngân hàng thì cần ít nhất 7 năm thì mới thu về được số tiền 150 triệu, mà để đầu tư dự án thì chỉ mất 5 năm.

d) Đúng: Sau một năm gửi ngân hàng, số tiền thu được là $x = 100.1,06$ (triệu đồng).

Rút 20 triệu để đóng bảo hiểm nên số tiền còn lại để gửi ngân hàng là $x_1 = 100.1,06 - 20$.

Sau năm thứ hai, tiền thu được trừ đi 20 triệu đóng bảo hiểm thì còn lại tiền gửi ngân hàng là $x_2 = x_1.1,06 - 20 = (100.1,06 - 20).1,06 - 20 = 100.1,06^2 - 20.1,06 - 20$.

Tiếp tục như vậy ta có : $x_n = 100.1,06^n - 20.\left(1,06^{n-1} + 1,06^{n-2} + ... + 1,06 + 1\right)$

$= 100.1,06^n - 20.\frac{1 - 1,06^n}{1 - 1,06}$.

Khi $x_n = 0$ ta có $100.1,06^n = 20.\frac{1 - 1,06^n}{1 - 1,06} \Leftrightarrow 1,06^n = \frac{20}{20 - 100.0,06}$

$\Leftrightarrow n = \log_{1,06}\left(\frac{20}{20 - 100.0,06}\right)(\simeq 6,12)$.

Với $n = 6$, có $x_6 = 100.1,06^6 - 20.\frac{1 - 1,06^6}{1 - 1,06} \simeq 2,3$. Tức là sau 6 năm thực hiện kế hoạch thì số tiền còn lại là 2,3 triệu đồng.

Vậy số tiền vốn đã có đủ để thực hiện kế hoạch trong 6 năm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: E.coli là vi khuẩn đường ruột gây bệnh tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E.coli tăng gấp đôi. Ban đầu có 20 vi khuẩn E.coli trong đường ruột. Hỏi sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn E.coli lớn hơn 81920 con?

Lời giải

Vì cứ sau 20 phút (bằng $\frac{1}{3}$ giờ) số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi nên số lượng vi khuẩn tăng theo quy luật $N_n = N_0.2^n = 20.2^n > 81920 \Rightarrow n > 12$

Vậy sau $12.\frac{1}{3} = 4$ giờ thì số vi khuẩn đạt mức lớn hơn 81920 con.

Câu 2: Anh Trung gửi vào ngân hàng 180 triệu đồng với lãi suất 0,6%/tháng. Sau mỗi tháng, anh Trung đến ngân hàng rút mỗi tháng 5 triệu đồng để chi tiêu đến khi hết tiền thì thôi. Biết trong suốt thời gian đó, ngoài số tiền rút mỗi tháng anh Trung không rút thêm một đồng nào kể cả gốc lẫn lãi và lãi suất không đổi. Vậy tháng cuối cùng anh Trung sẽ rút được số tiền là bao nhiêu triệu đồng (Kết quả làm tròn đến đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi $A = 180$ triệu đồng, $r = 0,6\%$ và $X = 5$ triệu đồng, S_n là số tiền còn lại sau n tháng, n là thời gian anh Trung rút tiền

Sau 1 tháng số tiền còn lại là: $180(1+0,006)-5$.

Sau 2 tháng số tiền còn lại là: $180(1+0,006)^2-5(1+0,006)-5$.

Sau 3 tháng số tiền còn lại là: $180(1+0,006)^3-5(1+0,006)^2-5(1+0,006)-5$.

…

Sau n tháng số tiền còn lại là: $180(1+0,006)^n-5\left[(1+0,006)^{n-1}+...+(1+0,006)+1\right]$

$$=180(1+0,006)^n-5\left[\frac{(1+0,006)^n-1}{0,006}\right]$$

Để rút hết số tiền thì ta tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho

$$S_n \le 0 \Leftrightarrow 180.1,006^n-5.\frac{1,006^n-1}{0,006} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2500}{3}-\frac{1960}{3}.1,006^n \le 0 \Leftrightarrow n \ge \log_{1,006}\frac{2500}{1960} \Rightarrow n = 41$$

Khi đó số tiền tháng cuối cùng mà anh Trung lấy về là:

$$S_{40} = \left[180.1,006^{40}-5.\frac{1,006^{40}-1}{0,006}\right] \approx 3,38 \text{ triệu đồng}$$

Câu 3: Chị Lan chuẩn bị mua nhà trị giá 1 tỷ đồng. Chị Lan thực hiện việc tiết kiệm bằng cách mỗi tháng gửi đều đặn vào ngân hàng 20 triệu đồng/tháng. Biết rằng trong thời gian chị Lan gửi tiền thì ngân hàng áp dụng mức lãi suất $0,6\%$ tháng và chị Lan không rút lãi lần nào. Hỏi chị Lan phải gửi tối thiểu bao nhiêu tháng để có được số tiền 1 tỷ đồng bao gồm cả tiền gốc và tiền lãi?

Lời giải

Chị Lan hàng tháng gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là A đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất $r\%$ một tháng.

Cuối tháng thứ 1, chị Lan có số tiền là: $P_1 = A + A.r = A(1+r)$

Đầu tháng thứ 2, chị Lan có số tiền là:

$$P_1 + A = A(1+r) + A = A + A(1+r) = A\left[1+(1+r)\right]$$

Cuối tháng thứ 2, chị Lan có số tiền là:

$$P_2 = P_1 + P_1.r = A + A(1+r) + \left[A + A(1+r)\right].r = A\left[(1+r)^2+(1+r)\right]$$

Đầu tháng thứ 3, chị Lan có số tiền là:

$$P_2 + A = A\left[(1+r)+(1+r)^2\right] + A = A\left[1+(1+r)+(1+r)^2\right]$$

Cuối tháng thứ 3, chị Lan có số tiền là:

$$P_3 = P_2 + P_2.r = A\left[1+(1+r)+(1+r)^2\right] + A\left[1+(1+r)+(1+r)^2\right].r = A\left[(1+r)^3+(1+r)^2+(1+r)\right]$$

…………………

Cuối tháng thứ n, chị Lan có số tiền là:

$$P_n = A\left[\underbrace{(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r)^2 + (1+r)}_{S_n}\right]$$

$$\Leftrightarrow P_n = A(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

trong đó $A = 20$ (triệu đồng), $r = 0,6\%$ và n là số tháng gửi.

Theo giả thiết $P_n = 10^9 \Leftrightarrow A(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 10^9 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{10^9\text{r}}{A(1+r)} + 1$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1+r}\left(\frac{10^9\text{r}}{A(1+r)} + 1\right) = \log_{1+0.006}\left(\frac{10^9.0,006}{20.10^6.(1+0,006)} + 1\right) \approx 43,63.$$

Vì n nguyên dương nên $n = 44$.

Vậy phải gửi tối thiểu 44 tháng thì chị Lan mới có được số tiền 1 tỷ đồng.

Câu 4: Vợ chồng anh Bình dự định lương của vợ dùng chi trả sinh hoạt phí, lương của anh Bình được gửi tiết kiệm hàng tháng. Biết đầu tháng này anh mới được tăng lương nhận mức lương 8 triệu đồng/tháng và cứ sau 2 năm lương của anh được tăng lên 10% so với 2 năm trước đó. Giả sử rằng dự định của vợ chồng anh được thực hiện từ đầu tháng này và lãi suất ngân hàng ổn định ở $0,6\%$ một tháng. Tính số tiền vợ chồng anh A tiết kiệm được sau 50 tháng (Kết quả làm tròn đến triệu đồng)

Lời giải

Số tiền vợ chồng anh A Bình tiết kiệm được sau 2 năm (24 tháng) là:

$$T_1 = \frac{8.10^6.(1+0,6\%).[(1+0,6\%)^{24} - 1]}{0,6\%} = 207084821,3(\text{ đồng})$$

Số tiền trên được hưởng lãi suất 26 tháng tiếp theo nên thành $T_1.(1+0,6\%)^{26} = 241933365,1$

Số tiền có được nhờ tiết kiệm tiền lương của anh Bình trong 24 tháng tiếp theo là

$$T_2 = \frac{8.10^6.(1+10\%).(1+0,6\%).\left[(1+0,6\%)^{24} - 1\right]}{0,6\%} = 227793303,1$$

(hoặc dùng $T_2 = T_1.(1+10\%) = 227793303,1$)

Số tiền trên được hưởng lãi suất 2 tháng tiếp theo nên thành $T_2.(1+0,6\%)^2 = 230535023,6$

Số tiền có được nhờ tiết kiệm tiền lương của anh Bình trong 2 tháng (thứ 49+50) là

$$T_3 = \frac{8.10^6.(1+10\%)^2.(1+0,6\%).\left[(1+0,6\%)^2 - 1\right]}{0,6\%} = 19534588,5$$

Vậy tổng số tiền vợ chồng anh Bình tiết kiệm được sau 50 tháng là

$$T_1.(1+0,6\%)^{26} + T_2(1+0,6\%)^2 + T_3 = 492 \text{ (triệu đồng)}$$

Câu 5: Chị Lan muốn mua một chiếc điện thoại Iphone 14 Pro Max trị giá 27 triệu đồng, nhưng vì chưa đủ tiền nên chị chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12% một năm và trả trước 10 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng chị phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 1 năm kể từ ngày mua điện thoại, chị sẽ trả hết nợ, biết kì trả nợ đầu tiên sau ngày mua điện thoại đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó

Lời giải

Số tiền chị Lan còn nợ lại sau khi trả 10 triệu là 17 triệu đồng lãi suất 1% một tháng. Gọi A triệu là số tiền hàng tháng chị Lan trả cửa hàng điện thoại. Như vậy

Sau 1 tháng số tiền còn nợ lại lại là: $17(1+0,01)-A$.

Sau 2 tháng số tiền còn nợ lại là: $17(1+0,01)^2-A(1+0,01)-A$.

Sau 3 tháng số tiền còn nợ lại là: $17(1+0,01)^3-A(1+0,01)^2-A(1+0,01)-A$.

…

Sau 12 tháng số tiền còn nợ lại là: $17(1+0,01)^{12}-A\left[(1+0,01)^{11}+...+(1+0,01)+1\right]=0$

$$\Leftrightarrow 17(1+0,01)^{12}-A\left[\frac{(1+0,01)^{12}-1}{0,01}\right]=0 \Leftrightarrow A=\frac{17.0,01.(1+0,01)^{12}}{(1+0,01)^{12}-1} \Leftrightarrow A\approx 1,510429408.$$

Câu 6: Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1500 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày. Công thức $P(t)=P_0.a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Sau 6 ngày thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu con.

Lời giải

Ban đầu có 1500 vi khuẩn nên $P_0=1500$.

Sau 2 ngày, số lượng vi khuẩn là: $P=125\%.P_0=125\%.1500=1875$

Ta có: $P(2)=P_0.a^2 \Leftrightarrow 1875=1500.a^2 \Leftrightarrow a^2=\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Số lượng vi khuẩn sau 6 ngày là: $P(6)=P_0.a^6=1500.\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^6 \approx 2929$ (vi khuẩn).

Câu 7: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $7,5\%$ một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Lời giải

Giả sử số tiền gửi ban đầu là V (vnđ) và sau ít nhất n năm thu được gấp đôi số tiền ban đầu $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Số tiền người đó thu được sau n năm gửi là $V(1+0,075)^n$.

Sau n năm số tiền người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu nên ta có

$V(1+0,075)^n = 2V \Leftrightarrow 1,075^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1.075} 2 \Leftrightarrow n \approx 9,58$.

Vậy sau ít nhất 10 năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu.

Câu 8: Anh Minh muốn sau 3 năm nữa có một khoản tiền 500 triệu đồng để mua ôtô. Để thực hiện việc đó, anh Minh xây dựng kế hoạch ngay từ bây giờ, hàng tháng phải gửi một khoản tiền không đổi vào ngân hàng theo thể thức lãi kép và không rút tiền ra trong 3 năm đó. Giả sử rằng lãi suất không đổi là $0,65\%$ /tháng. Hỏi số tiền anh Minh phải gửi hàng tháng là bao nhiêu để sau 3 năm anh có được 500 triệu? (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

Lời giải

Gọi x đồng là số tiền anh Minh gửi mỗi tháng.

Sau tháng thứ nhất, số tiền trong ngân hàng của anh Minh là: $x\left(1+0,65\%\right)$.

Sau tháng thứ hai, số tiền trong ngân hàng của anh Minh là: $x\left(1+0,65\%\right)^2 + x\left(1+0,65\%\right)$.

…

…

…

Sau tháng thứ ba mươi sáu, số tiền trong ngân hàng của anh Minh là

$$x\left(1+0,65\%\right)^{36} + x\left(1+0,65\%\right)^{35} + ... + x\left(1+0,65\%\right) = x\left(1+0,65\%\right)\frac{\left(1+0,65\%\right)^{36} - 1}{0,65\%}.$$

Để số tiền có được là 500 triệu đồng thì $500.000.000 = x\dfrac{\left(1+0,65\%\right)^{36} - 1}{0,65\%}\left(1+0,65\%\right)$

$\Leftrightarrow x \approx 12.292.000$ đồng.

Câu 9: Anh Bình mua xe ô tô trị giá 600 triệu đồng theo phương thức trả góp với lãi suất là $9\%/1$ năm và lãi chỉ tính trên số tiền chưa trả. Cứ cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất, anh Bình trả 10 triệu đồng. Anh Bình trả hết số tiền trên sau số tháng là

Lời giải

Do lãi suất một năm là $9\%/1$ năm nên lãi suất một tháng là $r = 0,75\%/1$ tháng

Đặt $q = 1 + r = 1,0075$

Số tiền anh Bình còn nợ sau khi trả lần thứ 1 là:

$A_1 = 600(1+r) - 10 = 600q - 10$

Số tiền anh Bình còn nợ sau khi trả lần thứ 2 là:

$A_2 = A_1 q - 10 = (600q - 10)q - 10 = 600q^2 - 10q - 10$

…….

Số tiền anh Bình còn nợ sau khi trả lần thứ n là:

$$A_n = 600q^n - 10q^{n-1} - 10q^{n-2} - ..... - 10 = 600q^n - 10(q^{n-1} + q^{n-2} + ... + 1) = 600q^n - 10(\frac{q^n - 1}{q-1})$$

Khi anh Bình trả hết số tiền thì $A_n = 0$

$$\Leftrightarrow 600q^n - 10(\frac{q^n - 1}{q-1}) = 0 \Leftrightarrow 600.1,0075^n - 10(\frac{1.0075^n - 1}{1.0075 - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2200}{3}.1,0075^n = \frac{4000}{3} \Leftrightarrow 1.0075^n = \frac{20}{11} \Leftrightarrow n \approx 80,0101$$

Vậy anh Bình trả hết số tiền trên sau số tháng là 81 tháng.

Câu 10: Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên 1 tháng (chuyển vào tài khoản ngân hàng của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2019 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi 1% trên 1 tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2019 mẹ đi rút toàn số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền gửi từ tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

Lời giải

Gọi sô tiền mẹ gửi vào ngân hàng vào đầu tháng hàng tháng là A đồng.

Số tiền mẹ lĩnh vào đầu tháng 12 là T đồng.

Lãi suất hàng tháng mẹ gửi tại ngân hàng là r %.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm 2019 nên thời gian được tính lãi suất là 11 tháng.

Ta có:

Đầu tháng 1 mẹ gửi vào A đồng $\Rightarrow$ cuối tháng 1 số tiền của mẹ là: $A + Ar = A(1+r)$ đồng.

Đầu tháng 2 số tiền của mẹ gửi vào là: $A + A(1+r)$ đồng.

$\Rightarrow$ cuối tháng 2 số tiền của mẹ là: $\left[A + A(1+r)\right](1+r) = A(1+r) + A(1+r)^2$ đồng.

Đầu tháng 3 số tiền mẹ gửi vào là: $A + A(1+r) + A(1+r)^2$.

$\Rightarrow$ cuối tháng 3 số tiền của mẹ là:

$$\left[A + A(1+r) + A(1+r)^2\right](1+r) = A(1+r) + A(1+r)^2 + A(1+r)^3.$$

Cứ như vậy đến cuối tháng thứ 11 số tiền của mẹ là:

$$A(1+r) + A(1+r)^2 + ... + A(1+r)^{11} = A\left[(1+r) + (1+r)^2 + ... + (1+r)^{11}\right] = T_1.$$

Ta thấy $\left[(1+r) + (1+r)^2 + ... + (1+r)^{11}\right]$ là tổng của 1 cấp số nhân với $u_1 = 1+r, \mathrm{n} = 11, \mathrm{q} = 1+r$.

$$\Rightarrow T_1 = A\frac{u_1\left(1-q^{11}\right)}{1-q}.$$

Ta có: $A = 4000000,\ r = 1\% = 0.01 \Rightarrow T_1 \approx 46730000$ đồng.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm $2019 \Rightarrow T = T_1 + 4000000 = 50730000$ đồng.

Câu 11: Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất $0,85\%$ / tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng?

Lời giải

Đặt $N = 500$ triệu là số tiền đã vay, $A = 10$ triệu là số tiền trả trong mỗi tháng và $r = 0,85\%$ là lãi suất ngân hàng, n là số tháng anh An phải trả hết nợ.

Theo đề bài

Cuối tháng thứ nhất anh An còn nợ số tiền là $N(1+r) - A$.

Cuối tháng thứ hai anh An còn nợ số tiền là $\left[N(1+r)-A\right](1+r) - A = N(1+r)^2 - A\left[(1+r)+1\right]$

Cuối tháng thứ ba anh An còn nợ số tiền là

$$\left[N(1+r)^2 - A\left[(1+r)+1\right]\right](1+r) - A = N(1+r)^3 - A\left[(1+r)^2 + (1+r) + 1\right].$$

….

Cuối tháng thứ n anh An còn nợ số tiền là $N(1+r)^n - A\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + (1+r) + 1\right]$.

Để sau n tháng anh An trả hết nợ thì $N(1+r)^n - A\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + (1+r) + 1\right] = 0$

$$\Leftrightarrow N(1+r)^n = A\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + (1+r) + 1\right] \Leftrightarrow N(1+r)^n = A\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{A}{A - Nr} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)}\left(\frac{A}{A-Nr}\right).$$

Áp dụng ta có $n = \log_{(1+0,0085)}\left(\dfrac{10}{10 - 500.0,0085}\right) \Leftrightarrow n \approx 65,38$.

Vậy anh An phải trả trong vòng 66 tháng.

Câu 12: Cường độ ánh sáng đi qua môi trường khác không khí (chẳng hạn sương mù, nước,…) sẽ giảm dần tùy thuộc độ dày của môi trường và hằng số μ gọi là khả năng hấp thu của môi trường, tùy thuộc môi trường thì khả năng hấp thu tính theo công thức $I = I_0 e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó và được tính bằng đơn vị mét. Biết rằng nước biển có $\mu = 1,4$. Biết cường độ ánh sáng giảm đi e^m khi từ độ sâu 2m xuống đến 20m. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Cường độ ánh sáng thay đổi khi từ độ sâu x_1 đến độ sâu x_2 là: $\frac{I_1}{I_2}=\frac{I_0e^{-\mu x_1}}{I_0e^{-\mu x_2}}=e^{\mu(x_2-x_1)}=e^{25,2}$.

Khi đó $m=25,2$.

-----------------HẾT-----------------

BÀI 04 PHƯƠNG TRÌNH, BPT MŨ VÀ LOGARIT

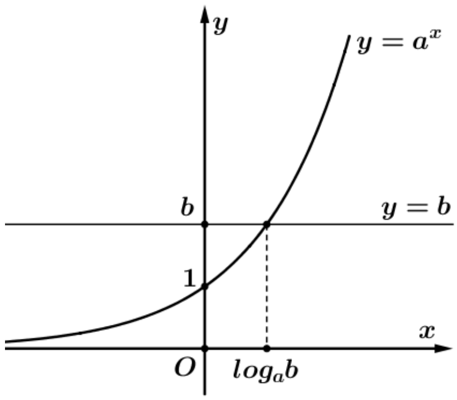
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phương trình mũ

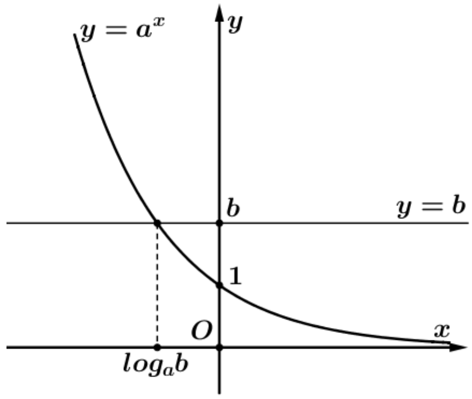
Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ với $0 < a \neq 1$.

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Minh họa bằng đồ thị như sau:



$(a > 1)$



$(0 < a < 1)$

Chú ý: Phương pháp giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số:

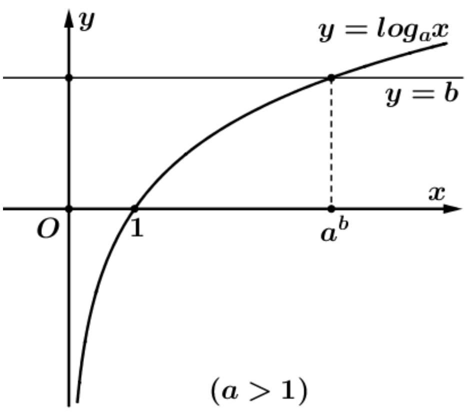
Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$.

2 Phương trình logarit

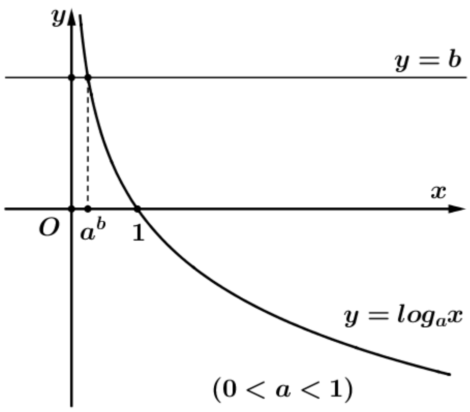
Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ với $0 < a \neq 1$.

Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Minh hoạ bằng đồ thị:



$(a > 1)$



$(0 < a < 1)$

Chú ý. Phương pháp giải phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số:

Nếu $u, v > 0$ và $0 < a \neq 1$ thì $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$.

3 Bất phương trình mũ

- Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.
- Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:

  Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

  Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

  Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

  Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Chú ý: Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

- Nếu $a > 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$.

4 Bất phương trình logarit

- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.
- Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:

  Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > a^x$.

  Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Chú ý: Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow x > a^b$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < a^b$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Giải các phương trình mũ và logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x = b,\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b\left(a > 0,\ a \neq 1\right)$.

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình mũ sau:

a) $3^{x+1} = 2$

b) $3^{2x^2+5x+4} = 9$

c) $2^x = \dfrac{1}{8}$

d) $3^{2x^2-x} = 3$

e) $2^{x^2+3x-6} = \dfrac{1}{4}$

f) $2^{x-1}.3^x = 18$

Lời giải

a) Ta có: $3^{x+1} = 2 \Leftrightarrow x+1 = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2 - 1$

b) Phương trình $3^{2x^2+5x+4} = 9 \Leftrightarrow 3^{2x^2+5x+4} = 3^2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2 = 0$ có $\Delta = 9 > 0$ nên theo định lý viet, tích các nghiệm của phương trình là 1.

c) Ta có $2^x = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$.

d) Ta có $3^{2x^2-x} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

e) Ta có : $2^{x^2+3x-6} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-6} = 2^{-2} \Leftrightarrow x^2+3x-6 = -2 \Leftrightarrow x^2+3x-4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

f) Ta có $2^{x-1}.3^x = 18 \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{2}.3^x = 18 \Leftrightarrow 6^x = 36 \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình logarit sau:

a) $\log_3(x-2)=2$

b) $\log_3 x=\frac{1}{3}$

c) $\log_3(x^2-3x+3)=1$

d) $\log_2(x^2-x+2)=1$

e) $\log_3(x-1)^2=2$

f) $\log_{x-4}(x^2-7x+12)=\log_{x-4}(x-3)$

g) $\log x+\log(x-9)=1$

h) $\log_3(\log_2 a)=0$

i) $(x^2-2x-3)\log_2 x=0$

k) $(x^2+2x-3)(\log_2 x-3)=0$.

Lời giải

a) Điều kiện : $x-2>0\Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\log_3(x-2)=2\Leftrightarrow x-2=3^2\Leftrightarrow x=11$ (Thỏa mãn điều kiện $x>2$).

Vậy phương trình $\log_3(x-2)=2$ có nghiệm là $x=11$.

b) Điều kiện của phương trình $x>0$. Ta có $\log_3 x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=3^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3}$.

c) Ta có: $\log_3(x^2-3x+3)=1\Leftrightarrow x^2-3x+3=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=0\end{array}\right.$.

d) Điều kiện $x^2-x+2>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\log_2(x^2-x+2)=1\Leftrightarrow x^2-x+2=2\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{0;1\}$.

e) Ta có $\log_3(x-1)^2=2\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\(x-1)^2=3^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\\left[\begin{array}{l}x-1=3\\x-1=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-2\end{array}\right.$.

f) Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-4>0\\x-4\neq1\\x^2-7x+12>0\\x>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\x\neq5\end{cases}(*)$

Với điều kiện $(*)$ thì phương trình $\log_{x-4}(x^2-7x+12)=\log_{x-4}(x-3)$

$\Leftrightarrow x^2-7x+12=x-3\Leftrightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=5\end{array}\right.$ (Loại).

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\varnothing$.

g) Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\x-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x>9\end{cases}\Leftrightarrow x>9$.

$\log x+\log(x-9)=1\Leftrightarrow \log\left[x(x-9)\right]=1\Leftrightarrow x^2-9x=10\Leftrightarrow x^2-9x-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\,(loai)\\x=10\end{array}\right.$

h) Điều kiện $\begin{cases}a>0\\ \log_2 a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\a>1\end{cases}\Leftrightarrow a>1$

Ta có $\log_3(\log_2 a)=0\Leftrightarrow \log_2 a=1\Leftrightarrow a=2$

i) Điều kiện: $x>0$.

$(x^2-2x-3)\log_2 x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3=0\\ \log_2 x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-1\ (loai)\\x=3\ (tm)\end{array}\right.\\x=1\ \ (tm)\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

k) Điều kiện xác định của phương trình là: $x>0$.

Ta có: $(x^2+2x-3)(\log_2 x-3)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-3=0\\ \log_2 x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;x=-3\\x=8\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x>0$ phương trình có 2 nghiệm $x=1;x=8$.

Dạng 2: Phương pháp đưa về cùng cơ số giải phương trình mũ và logarit

Sử dụng tính chất $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ (0 < a \neq 1)$.

Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0\ (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình mũ sau đây:

a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$

b) $4^{5x-2} = 64$

c) $2^{x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1}$

d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x}$

e) $\left(\frac{2020}{2021}\right)^{4x} = \left(\frac{2021}{2020}\right)^{2x-6}$

f) $2^{\sqrt{x+3}} = 2^{3-x}$

g) $3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow \left(7^{-1}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow -x^2+2x+3 = x+1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

b) Ta có $4^{5x-2} = 64 \Leftrightarrow 4^{5x-2} = 4^3 \Leftrightarrow 5x-2=3 \Leftrightarrow x=1$.

c) Ta có: $2^{x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1} \Leftrightarrow 2^{x-6} = 2^{-2(3x+1)} \Leftrightarrow x-6 = -6x-2 \Leftrightarrow 7x=4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$

d) Phương trình đã cho $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x} \Leftrightarrow 5^{-2(x+1)} = 5^{6x} \Leftrightarrow -2(x+1) = 6x \Leftrightarrow 8x=-2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

e) Ta có $\left(\frac{2020}{2021}\right)^{4x} = \left(\frac{2021}{2020}\right)^{2x-6} \Leftrightarrow \left(\frac{2020}{2021}\right)^{4x} = \left(\frac{2020}{2021}\right)^{-2x+6} \Leftrightarrow 4x=-2x+6 \Leftrightarrow x=1$.

f) Điều kiện $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

Ta có: $2^{\sqrt{x+3}} = 2^{3-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+3 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right. \end{cases}$

Kết hợp điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x=1$.

g) $3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow 3^{x^2-4} = 3^{-2(3x-1)} \Leftrightarrow x^2-4 = -2(3x-1) \Leftrightarrow x^2+6x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -3-\sqrt{15} \\ x_2 = -3+\sqrt{15} \end{array}\right.$

Ví dụ 4: Giải các phương trình logarit sau:

a) $\log_5(2x-1)=\log_5(2-x)$

b) $\log_3(x^2+4x-3)=\log_3(x+1)$

c) $2\log_2(2x+3)=\log_2 x^2$

d) $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$

e) $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$

f) $\log_5 x=\log_5(x+6)-\log_5(x+2)$

g) $\log_2(x+1)-2\log_{\frac{1}{4}}(x-1)=3$

h) $\log_3(6+x)+\log_3(9x)-5=0$

i) $\log_2 x+\log_3 x=1+\log_2 x\log_3 x$

k) $\log_3(9^x-5.3^x+7)=x+1$

l) $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases}2x-1>0\\2-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<x<2$.

Phương trình khi đó tương đương với $2x-1=2-x\Leftrightarrow 3x=3\Leftrightarrow x=1$. Vậy phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm.

b) Ta có $\log_3(x^2+4x-3)=\log_3(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-3=x+1\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x-4=0\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

c) Ta có: $2\log_2(2x+3)=\log_2 x^2\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\x^2>0\\\log_2(2x+3)^2=\log_2 x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\(2x+3)^2=x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\\left[\begin{array}{l}2x+3=x\\2x+3=-x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3;-1\}$.

d) Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\x-3>0\end{cases}\Rightarrow x>3$.

Ta có: $\log_2 x+\log_2(x-3)=2\Leftrightarrow\log_2(x(x-3))=2\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-1 & (loai)\\x=4 & (tm)\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

e) Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_2[x(x+2)]=3\Leftrightarrow x^2+2x=2^3\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4(l)\\x=2(n)\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x=2$.

f) Điều kiện $\begin{cases}x>0\\x+6>0\\x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x>-6\\x>-2\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

Ta có: $\log_5 x = \log_5(x+6) - \log_5(x+2) \Leftrightarrow \log_5 x + \log_5(x+2) = \log_5(x+6)$

$\Leftrightarrow \log_5[x(x+2)] = \log_5(x+6) \Leftrightarrow x(x+2) = x+6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

So với điều kiện, suy ra $x=2$. Vậy $S=\{2\}$.

g) Điều kiện: $x>1$

Ta có: $\log_2(x+1) - 2\log_{\frac{1}{4}}(x-1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2-1) = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$.Vì $x>1$ nên pt có 1 nghiệm $x=3$.

h) Ta có: $\log_3(6+x) + \log_3(9x) - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_3[9x(6+x)] = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 9x(6+x) = 3^5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 9x^2 + 54x - 243 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3$. Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

i) Phương trình đã cho xác định khi: $x>0$

Khi đó: $\log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x \Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 x \log_3 x + \log_3 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x(1 - \log_3 x) - (1 - \log_3 x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \log_3 x)(\log_2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \log_3 x = 0 \\ \log_2 x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_3 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

k) Ta có: $\log_3(9^x - 5.3^x + 7) = x+1 \Leftrightarrow 9^x - 5.3^x + 7 = 3^{x+1} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8.3^x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x = \log_3 7 \end{array}\right.$

l) Điều kiện: $x>0$. Ta có $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x = \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \log_3 x.\left(\dfrac{1}{2}\log_3 x\right).\left(\dfrac{1}{3}\log_3 x\right).\left(\dfrac{1}{4}\log_3 x\right) = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=\dfrac{1}{9} \end{array}\right.$.

Dạng 3: Phương pháp đặt ẩn phụ giải phương trình mũ và logarit

Đặt ẩn phụ giải phương trình mũ: $\alpha.a^x + \beta.a^x + \gamma = 0$. Đặt $t = a^x \quad (t > 0)$

Đặt ẩn phụ giải phương trình logarit: $\alpha.\log_a^2 x + \beta.\log_a x + \gamma = 0$. Đặt $t = \log_a x \quad (x > 0)$

Ví dụ 5: Giải các phương trình mũ sau:

a) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

b) $9^x - 12.3^x + 27 = 0$

c) $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$

d) $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$

e) $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3$

f) $-25^x + 5^{x+1} + 6 = 0$

g) $9^x - 12.3^x + 27 = 0$

h) $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$

i) $9^{x+1} - 12.3^{x+2} + 243 = 0$

k) $7^x + 2.7^{1-x} - 9 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(5^x\right)^2 + 5.5^x - 250 = 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 + 25.5^x - 1250 = 0$.

Đặt $t = 5^x$ với điều kiện $t > 0$ ta có phương trình $t^2 + 25t - 1250 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -50 \ (l) \\ t = 25 \end{array}\right.$.

Với $t = 25 \Rightarrow x = \log_5 25 = 2$.

b) Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Ta có $9^x - 12.3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 12.t + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

c) Ta có $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0 \Leftrightarrow 9\left(3^x\right)^2 - 3.3^x - 30 = 0 \Leftrightarrow 3\left(3^x\right)^2 - 3^x - 10 = 0$.

Khi đặt $3^x = t$ thì phương trình $3\left(3^x\right)^2 - 3^x - 10 = 0$ trở thành phương trình $3t^2 - t - 10 = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\frac{5}{3}(l) \end{array}\right. \Rightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$.

d) Phương trình tương đương $4^x - 4.2^x + 3 = 0$.

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

e) Ta có: $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3 \Leftrightarrow 4^{x^2-x} + 2.2^{x^2-x} = 3$

Đặt $t = 2^{x^2-x}(t > 0)$. Phương trình trở thành $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3(l) \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

f) Phương trình đã cho trở thành $-\left(5^2\right)^x+5.5^x+6=0\Leftrightarrow-\left(5^x\right)^2+5.5^x+6=0$.

Đặt $5^x=t\ (t>0)\Rightarrow -t^2+5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ (l)\\t=6\end{array}\right.$.

Với $t=6\Rightarrow 5^x=6\Leftrightarrow x=\log_5 6$. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

g) Ta có: $9^x-12.3^x+27=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-12.3^x+27=0\ (*)$.

Đặt $t=3^x\ (t>0)$, phương trình $(*)$ có dạng: $t^2-12.t+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=9\end{array}\right.$.

Với $t=3\Rightarrow 3^x=3\Leftrightarrow x=1$ và với $t=9\Rightarrow 3^x=9\Leftrightarrow x=2$.

h) Phương trình tương đương $4^x-4.2^x+3=0$.

Đặt $t=2^x, t>0$. Phương trình trở thành $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\log_2 3\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

i) $9^{x+1}-12.3^{x+2}+243=0\Leftrightarrow 9.9^x-12.3^2.3^x+243=0\Leftrightarrow 9.9^x-108.3^x+243=0$

Đặt $t=3^x, t>0$, phương trình tương đương: $9t^2-108t+243=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=9\\t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=9\\3^x=3\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$

k) Đặt $t=7^x>0$, phương trình trở thành: $t+\dfrac{14}{t}-9=0\Leftrightarrow t^2-9t+14=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=7\\t=2\end{array}\right.$.

Với $t=7$, ta có: $7^x=7\Leftrightarrow x=1$.

Với $t=2$, ta có: $7^x=2\Leftrightarrow x=\log_7 2$.

Ví dụ 6: Giải các phương trình logarit sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+4=0$

b) $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$

c) $\log_{\frac{1}{2}}{}^2 x-6\log_8(4x)+1=0$

d) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+6=0$

e) $\log^2 x-\log(2020x)-1=0$

f) $\log_2\left(5^x-1\right).\log_4\left(2.5^x-2\right)=1$

✍ Lời giải

a) Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+4=0\Leftrightarrow\log_3^2 x-5\log_3 x+4=0\quad(*)$.

Đặt $t=\log_3 x$ thì phương trình $(*)$ trở thành $t^2-5t+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=4\end{array}\right.$

Với $t=1\Leftrightarrow \log_3 x=1\Leftrightarrow x=3^1\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn)

Với $t=4\Leftrightarrow \log_3 x=4\Leftrightarrow x=3^4\Leftrightarrow x=81$ (thỏa mãn)

b) Điều kiện: $x>0$

Đặt $t=\log_3 x$, phương trình đã cho về dạng: $t^2-t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\\ t=-1\end{array}\right.$

Với $t=2\Leftrightarrow \log_3 x=2\Leftrightarrow x=3^2\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn)

Với $t=-1\Leftrightarrow \log_3 x=-1\Leftrightarrow x=3^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ (thỏa mãn)

c) Điều kiện: $x>0$.

Khi đó: $\log_2{}^2 x-2\left(\log_2 4+\log_2 x\right)+1=0\Leftrightarrow \log_2{}^2 x-2\log_2 x-3=0\quad (*)$

Đặt $t=\log_2 x$ thì phương trình $(*)$ trở thành $t^2-2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\\ t=3\end{array}\right.$

Với $t=-1\Leftrightarrow \log_2 x=-1\Leftrightarrow x=2^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Với $t=3\Leftrightarrow \log_2 x=3\Leftrightarrow x=2^3\Leftrightarrow x=8$ (thỏa mãn)

d) Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+6=0\Leftrightarrow \log_3^2 x-5\log_3 x+6=0\quad (*)$.

Đặt $t=\log_3 x$ thì phương trình $(*)$ trở thành $t^2-5t+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\\ t=3\end{array}\right.$

Với $t=2\Leftrightarrow \log_3 x=2\Leftrightarrow x=3^2\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn)

Với $t=3\Leftrightarrow \log_3 x=3\Leftrightarrow x=3^3\Leftrightarrow x=27$ (thỏa mãn)

e) Điều kiện xác định : $x>0$.

Ta có $\log^2 x-\log\left(2020x\right)-1=0\Leftrightarrow \log^2 x-\log x-\log 2020-1=0$

Do $ac<0$ nên phương trình trên có hai nghiệm phân biệt $\log x_1,\log x_2$.

Ta có $\log x_1+\log x_2=-\frac{b}{a}=1\Rightarrow \log\left(x_1x_2\right)=1\Leftrightarrow x_1x_2=10$.

f) Điều kiện: $\begin{cases} 5^x-1>0\\ 2.5^x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow 5^x-1>0\Leftrightarrow x>0$

Ta có: $\log_2\left(5^x-1\right).\log_4\left(2.5^x-2\right)=1\Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right).\log_{2^2}\left[2.\left(5^x-1\right)\right]=1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\left(5^x-1\right).\log_2\left[2.\left(5^x-1\right)\right]=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\left(5^x-1\right).\left[1+\log_2\left(5^x-1\right)\right]=1\ (*)$

Đặt $t=\log_2\left(5^x-1\right)$ thì phương trình $(*)$ trở thành $\frac{1}{2}t(1+t)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=1 \end{array}\right.$

Với $t=-2 \Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right)=-2 \Leftrightarrow 5^x-1=2^{-2} \Leftrightarrow 5^x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 5^x=\frac{5}{4} \Rightarrow x=\log_5\frac{5}{4}$ (thỏa mãn)

Với $t=1 \Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right)=1 \Leftrightarrow 5^x-1=2^1 \Leftrightarrow 5^x=3 \Rightarrow x=\log_5 3$ (thỏa mãn)

Ví dụ 7: Tìm tham số m để phương trình phương trình $\log_2^2\left(x^2+1\right)-m\log_2\left(x^2+1\right)+8-m=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt ?

Lời giải

Đặt $t=\log_2\left(x^2+1\right), t\ge 0$. Phương trình trở thành $t^2-mt+8-m=0\ (*)$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương. Khi đó $\begin{cases} m^2-4(8-m)>0 \\ 8-m=0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=8$.

Ví dụ 8: Tìm tham số m để phương trình $\log_2^2 x-m\log_2 x+15-m=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $2\le x_1<4<x_2$.

Lời giải

Đặt $t=\log_2 x$ phương trình đã cho trở thành: $t^2-mt+15-m=0\ (1)$

Ta có $2\le x_1<4<x_2 \Leftrightarrow 1\le \log_2 x_1<2<\log_2 x_2 \Leftrightarrow 1\le t_1<2<t_2$ với t_1, t_2 là nghiệm của (1).

Đặt $f(t)=t^2-mt+15-m$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa $1\le t_1<2<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(1)\ge 0 \\ af(2)<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-2m\ge 0 \\ 19-3m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3}<m\le 8$.

Ví dụ 9: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1x_2=27$.

Lời giải

Xét phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0\ (1)$

Đặt $t=\log_3 x$, phương trình (1) trở thành $t^2-(m+2)t+3m-1=0\ (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2=27$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1+t_2=\log_3 x_1+\log_3 x_2=\log_3\left(x_1x_2\right)=\log_3 27=3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+2)^2 - 4(3m-1) \geq 0 \\ S = t_1 + t_2 = m+2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$. Khi đó (2) trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Với $t_1 = 1 \Rightarrow \log_3 x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 3$ và với $t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 9$.

Ví dụ 10: Tìm tham số m để phương trình $\log^2 x - 2(m+1)\log x + 4 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt thoả mãn $0 < x_1 < 10 < x_2$.

Lời giải

Xét phương trình $\log^2 x - 2(m+1)\log x + 4 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \log x$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 4 = 0 \quad (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $0 < x_1 < 10 < x_2$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thoả mãn $t_1 < 1 < t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+3) > 0 \\ -2m + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{2}$.

Dạng 4: Phương pháp mũ hóa và logarit hóa

1. Phương pháp logarit hóa:

- **Dạng 1:** $a^{g(x)}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)=\log_a f(x)\end{cases}$ với $0<a\neq 1$.
- **Dạng 2:** $a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x).\log_a b$.

2. Phương pháp mũ hóa: $\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}$

Ví dụ 11: Giải các phương trình sau:

a) $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}$ b) $3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}=15$ c) $2^{x-2}=3^{x^2+2x-8}$

✍ Lời giải

a) Ta có : $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$; $2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow 2x+1=\log_{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\left(2-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow 2x+1=\log_{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow 2x+1=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$. Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{3}{4}$.

b) Điều kiện: $x\neq 0$

Ta có: $3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}=15\Leftrightarrow \log_3 3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}=\log_3 15\Leftrightarrow x+\dfrac{2x-1}{x}\log_3 5=1+\log_3 5$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{x-1}{x}\log_3 5-1=0\Leftrightarrow x^2+(x-1)\log_3 5-x=0\Leftrightarrow x^2+x\left(\log_3 5-1\right)-\log_3 5=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\log_3 5\end{array}\right.$

c) Ta có: $2^{x-2}=3^{x^2+2x-8}\Leftrightarrow \log_2 2^{x-2}=\log_2 3^{x^2+2x-8}\Leftrightarrow x-2=\left(x^2+2x-8\right)\log_2 3$

$\Leftrightarrow x-2=(x-2)(x+4)\log_2 3\Leftrightarrow (x-2)\left[(x+4)\log_2 3-1\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\(x+4)\log_2 3-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x+4=\dfrac{1}{\log_2 3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\log_3 2-4\end{array}\right.$.

Ví dụ 12: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\frac{4}{3}}x=\log_3 y=\log_2(2x-3y)$. Tính tỷ số $\dfrac{x}{y}$.

✍ Lời giải

Đặt $t=\log_{\frac{4}{3}}x=\log_3 y=\log_2(2x-3y)\Rightarrow\begin{cases}y=3^t\\x=\left(\dfrac{4}{3}\right)^t\\2x-3y=2^t\end{cases}\Rightarrow 2.\left(\dfrac{4}{3}\right)^t-3.3^t=2^t$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{4}{9}\right)^t - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^t \Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - \left(\frac{2}{3}\right)^t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^t = -1\,(l) \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{9}{4}.$$

Ví dụ 13: Cho phương trình $x^{\log_{2020}\left(x^3\right)-a} = 2021$ với a là số thực dương. Biết tích các nghiệm của phương trình là 32. Tìm giá trị của a.

✍ Lời giải

Ta có: $x^{\log_{2020}\left(x^3\right)-a} = 2021 \Leftrightarrow \log_{2020}\left[x^{\log_{2020}\left(x^3\right)-a}\right] = \log_{2020} 2021$

$\Leftrightarrow \left(3\log_{2020} x - a\right)\log_{2020} x - \log_{2020} 2021 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\log_{2020} x\right)^2 - a\log_{2020} x - \log_{2020} 2021 = 0 \quad (*)$

$x_1.x_2 = 32 \Rightarrow \log_{2020}\left(x_1.x_2\right) = \log_{2020} x_1 + \log_{2020} x_2 = \log_{2020} 32$

Mặt khác: $\log_{2020} x_1 + \log_{2020} x_2 = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3.\log_{2020} 32$.

Dạng 5: Giải các bất phương trình mũ và logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x = b,\ (a>0,\ a\neq 1)$.

- Nếu $b>0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b\leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b\ (a>0,\ a\neq 1)$.

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Ví dụ 14: Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} > \frac{1}{49}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 128$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} > 8$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}$

f) $2^{2x^2-11x+5} \leq 1$

g) $7^{4-2x-x^2} \leq \frac{1}{49^x}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16}$

i) $3^{x^2-4x+5} \leq 9$

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$

✍ Lời giải

a) Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow x < -3$

b) Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} > \left(\frac{1}{7}\right)^2$.

Vì $0 < \frac{1}{7} < 1$, suy ra $3x+4 < 2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

c) Ta có : $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 128 \Leftrightarrow 2^{1-x} \geq 2^7 \Leftrightarrow 1-x \geq 7 \Leftrightarrow x \leq -6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty; -6]$.

d) Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} > 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2-4x < -3 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1;3)$.

e) Ta có $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4}>\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}\Leftrightarrow 2x-4<-x^2-3x+2\Leftrightarrow x^2+5x-6<0\Leftrightarrow -6<x<1$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S=(-6;1)$.

f) Ta có: $2^{2x^2-11x+5}\le 1\Leftrightarrow 2^{2x^2-11x+5}\le 2^0\Leftrightarrow 2x^2-11x+5\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 5$

g) Ta có. $7^{4-2x-x^2}\le \frac{1}{49^x}\Leftrightarrow 7^{4-2x-x^2}\le 7^{-2x}\Leftrightarrow 4-2x-x^2\le -2x\Leftrightarrow 4-x^2\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -2\\ x\ge 2\end{array}\right.$.

h) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5}>\frac{1}{16}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5}>\left(\frac{1}{2}\right)^4\Leftrightarrow x^2-5<4\Leftrightarrow -3<x<3.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-3;3)$.

i) Ta có: $3^{x^2-4x+5}\le 9\Leftrightarrow 3^{x^2-4x+5}\le 3^2\Leftrightarrow x^2-4x+3\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Vậy: Tập nghiệm của bất phương trình là $[1;3]$

k) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^4\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}>4\Leftrightarrow \frac{5-4x}{x-1}>0\Leftrightarrow 1<x<\frac{5}{4}$. Vậy $S=\left(1;\frac{5}{4}\right)$.

Ví dụ 15: Giải các bất phương trình logarit sau:

a) $\log_2(2x+4)<3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>-1$

c) $\log_2 x<3$

d) $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+4x\right)\ge -1$

e) $\log_2\left(3.2^x-2\right)<2x$

f) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-9)>\log_{\frac{1}{3}}(x+10)$

g) $\log_3\left(x^2-2x\right)\le 1$

h) $\log_5(4x-9)\le \log_5(3x+7)$

i) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x\right)\ge -1$

k) $\log_3\left(5x-2x^2+7\right)<2$

Lời giải

a) Điều kiện: $2x+4>0\Leftrightarrow x>-2$.

Ta có: $\log_2(2x+4)<3\Leftrightarrow 0<2x+4<2^3\Leftrightarrow 0<2x+4<8\Leftrightarrow -2<x<2$

b) Điều kiện: $x<3$. Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>-1\Leftrightarrow 3-x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow 3-x<2\Leftrightarrow x>1.$

Kết hợp điều kiện ta được: $1<x<3$.

c) Ta có: $\log_2 x<3\Leftrightarrow 0<x<2^3\Leftrightarrow 0<x<8$.Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0;8)$.

d) Ta có: $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+4x\right)\ge -1\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x>0\\ x^2+4x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x>0\\ x^2+4x-5\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-4\\ x>0\end{array}\right.\\ -5\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-5\le x<-4\\ 0<x\le 1\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=[-5;-4)\cup(0;1]$

e) Điều kiện: $3.2^x-2>0 \Leftrightarrow 2^x>\frac{2}{3} \Leftrightarrow x>\log_2\frac{2}{3}$ (*)

Ta có $\log_2(3.2^x-2)<2x \Leftrightarrow \log_2(3.2^x-2)<\log_2 2^{2x} \Leftrightarrow 3.2^x-2<2^{2x} \Leftrightarrow 4^x>3.2^x-2$

$\Leftrightarrow 4^x-3.2^x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x<1\\2^x>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\x>1\end{array}\right.$.

Kết hợp với (*) ta được $x\in\left(\log_2\frac{2}{3};0\right)\cup(1;+\infty)$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(\log_2\frac{2}{3};0\right)\cup(1;+\infty)$.

f) Điều kiện: $x>\frac{9}{4}$. Ta có: $\log_{\frac{1}{3}}(4x-9)>\log_{\frac{1}{3}}(x+10) \Leftrightarrow 4x-9<x+10 \Leftrightarrow x<\frac{19}{3}$.

g) Ta có: $\log_3(x^2-2x)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x>0\\x^2-2x\le 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.\\-1\le x\le 3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\2<x\le 3\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=[-1;0)\cup(2;3]$.

h) Điều kiện: $x>\frac{9}{4}$.

Bất phương trình $\log_5(4x-9)\le\log_5(3x+7) \Leftrightarrow 4x-9\le 3x+7 \Leftrightarrow x\le 16$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=\left(\frac{9}{4};16\right]$ nên có 14 nghiệm nguyên dương.

i) Điều kiện xác định: $x^2-x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\x<0\end{array}\right.$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)\ge -1 \Leftrightarrow x^2-x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow -1\le x\le 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $S=[-1;0)\cup(1;2]$.

k) Ta có: $\log_3(5x-2x^2+7)<2 \Leftrightarrow \begin{cases}-2x^2+5x+7>0\\5x-2x^2+7<9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x^2+5x+7>0\\-2x^2+5x-2<0\end{cases}$ \

$\Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<\frac{7}{2}\\\left[\begin{array}{l}x<\frac{1}{2}\\x>2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)\cup\left(2;\frac{7}{2}\right)$.

Dạng 6: Đưa về cùng cơ số giải bất phương trình mũ và logarit

Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
- **Trường hợp 2:** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Ví dụ 16: Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $3^{x+2} \geq \dfrac{1}{9}$

b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1}$

c) $2^{x^2-4x+5} = 8$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \dfrac{1}{16}$

e) $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-10}$

f) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$

g) $4^{x-1} \geq 2^{x^2-3x+2}$

h) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$

i) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-7} \geq 8$

k) $2^{x^2-3x+2} \geq 4$

Lời giải

a) Ta có : $3^{x+2} \geq \dfrac{1}{9} = 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-4;+\infty)$.

b) Ta có: $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 2x-4 < x+1 \Leftrightarrow x < 5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty;5)$.

c) Ta có $2^{x^2-4x+5} = 8 \Leftrightarrow x^2-4x+5 = 3 \Leftrightarrow x^2-4x+2 = 0$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 4.

d) Ta có: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4} \Leftrightarrow x^2-5 < 4 \Leftrightarrow x^2-9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

e) Ta có: $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-10} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4} \leq 2^{-2x+10} \Leftrightarrow x^2-3x+4 \leq -2x+10$

$\Leftrightarrow x^2-x-6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$.

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên dương là $x=1, x=2, x=3$.

f) Ta có $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3x^2 < 2x+1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{3} < x < 1$. Vậy $S = \left(\dfrac{-1}{3};1\right)$.

g) Ta có: $4^{x-1} \ge 2^{x^2-3x+2} \Leftrightarrow 2^{2x-2} \ge 2^{x^2-3x+2} \Leftrightarrow x^2-5x+4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4$.

h) Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3x^2 < 2x+1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$

i) Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7} \ge 8 \Leftrightarrow x^2-7 \le -3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$.

k) Ta có $2^{x^2-3x+2} \ge 4 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \ge 2 \Leftrightarrow x^2-3x \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 3 \end{array}\right.$.

Ví dụ 17: Giải các bất phương trình logarit sau :

a) $\log_2(x-1) > \log_2 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

c) $\log_4(x^2-3x) > \log_2(9-x)$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 2x-1$

e) $\log_{2-\sqrt{3}}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \ge 0$

✍ Lời giải

a) Ta có: $\log_2(x-1) > \log_2 3 \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 4$.

b) Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow (x+1) > (2x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$

c) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 3 < x < 9 \end{array}\right.$

Ta có: $\log_4(x^2-3x) > \log_2(9-x) \Leftrightarrow \log_2(x^2-3x) > \log_2(9-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2-3x > (9-x)^2 \Leftrightarrow 15x > 81 \Leftrightarrow x > \frac{27}{5}$. Kết hợp điều kiện suy ra $\frac{27}{5} < x < 9$.

d) Ta có: $\log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{x} \le \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 2x-1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 2x + 1 \ge 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le \sqrt{x} \le 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \le 1$.

e) Điều kiện xác định $-1 < x < \frac{11}{2}$.

Ta có: $\log_{2-\sqrt{3}}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \ge 0$

$\Leftrightarrow \log_{(2+\sqrt{3})^{-1}}(x+1)+\log_{2+\sqrt{3}}(11-2x)\ge 0$ vì $2-\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow -\log_{(2+\sqrt{3})}(x+1)+\log_{2+\sqrt{3}}(11-2x)\ge 0 \Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{3}}\dfrac{11-2x}{x+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{11-2x}{x+1}\ge\left(2+\sqrt{3}\right)^0=1 \Leftrightarrow \dfrac{11-2x}{x+1}-1\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{10-3x}{x+1}\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left(-1;\dfrac{10}{3}\right]$

Ví dụ 18: Tìm tham số m để bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $mx^2+4x+m>0$.

Ta có: $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow\log_5 5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(x^2+1\right)\ge mx^2+4x+m\Leftrightarrow(5-m)x^2-4x+5-m\ge 0$

Ta thấy $m=0$ hoặc $m=5$ không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} mx^2+4x+m>0\ \forall x\in\mathbb{R}\\ (5-m)x^2-4x+5-m\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m>0\\ 5-m>0\\ 4-m^2<0\\ -m^2+10m-21\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>0\\ m<5\\ m<-2;m>2\\ m\le 3;m\ge 7\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 3$

Ví dụ 19: Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\ln\left(9x^2+9\right)\ge\ln\left(mx^2+6x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$?

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases} mx^2+6x+m>0\\ 9x^2+9\ge mx^2+6x+m\end{cases},\forall x\in\mathbb{R}$

Mặt khác: $mx^2+6x+m>0\ ,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases} m>0\\ \Delta'_m=9-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>0\\ \left[\begin{array}{l} m<-3\\ m>3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m>3\ (1)$

Lại có: $9x^2+9\ge mx^2+6x+m\ ,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(9-m)x^2-6x+9-m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 9-m>0\\ 9-(9-m)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<9\\ (12-m)(m-6)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<9\\ \left[\begin{array}{l} m\le 6\\ m\ge 12\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\le 6\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $3<m\le 6$

Dạng 7: Đặt ẩn phụ giải bất phương trình mũ và logarit

Ta thường gặp các dạng: $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p>0 \quad (1)$.

- Đặt $t=a^{f(x)},\ t>0$ đưa pt (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2+nt+p>0$.
- Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t>0$ sau đó tìm nghiệm x.
- $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p>0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)},\ t>0$, suy ra $b^{f(x)}=\dfrac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}>0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}=t>0$.

Ví dụ 20: Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $4^x-3.2^x-4\ge 0$

b) $4^x-17.2^x+16\le 0$

c) $25^x-5^x-2<0$

d) $4^x-17.2^x+16\le 0$

e) $4^x-3.2^x-4\ge 0$

f) $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x<3.2^x$

Lời giải

a) Đặt $2^x=t\,(t>0)$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow 4^x-3.2^x-4\ge 0\Rightarrow t^2-3t-4\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\le -1\\ t\ge 4\end{array}\right.$.

Kết hợp với $t>0$ ta được $t\ge 4\Rightarrow 2^x\ge 4\Leftrightarrow x\ge 2$.
Vậy tập nghiệm bất phương trình là $[2;+\infty]$.

b) Đặt $t=2^x\,(t>0)$

Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-17.t+16\le 0\Leftrightarrow 1\le t\le 16\Leftrightarrow 0\le x\le 4$

c) Ta có $25^x-5^x-2<0\Leftrightarrow 5^{2x}-5^x-2<0$.

Đặt $t=5^x, t>0$. Ta được bất phương trình ẩn t là: $t^2-t-2<0\Leftrightarrow -1<t<2$.

Đối chiếu điều kiện ta được $0<t<2\Rightarrow 0<5^x<2\Leftrightarrow x<\log_5 2$.

d) $4^x-17.2^x+16\le 0\Leftrightarrow 2^{2x}-17.2^x+16\le 0$

Đặt $t=2^x\ (t>0)$ ta có bất phương trình $t^2-17t+16\le 0\Leftrightarrow 1\le t\le 16$

Với $1\le t\le 16$ ta có $1\le 2^x\le 16\Leftrightarrow 0\le x\le 4$

e) Đặt $t=2^x\,(t>0)$

Phương trình trở thành: $t^2-3t-4\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\ge 4\\ t\le -1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện: $t>0\Rightarrow t\ge 4\Rightarrow x\ge 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[2;+\infty)$.

f) Ta có $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x<3.2^x$. $\Leftrightarrow\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^x<3$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x$ với $t>0\Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}<3\Leftrightarrow t^2-3t+1<0\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)<x<\log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\Leftrightarrow-1<x<1$.

Ví dụ 21: Giải các bất phương trình logarit sau:

a) $\log^2_{\sqrt{2}}(x-4)-43\log_2(4x-16)+75\le0$ b) $\log^2_2 x-5\log_2 x-6\le0$

c) $\log^2_3 x-2\log_{\sqrt{3}}x+3>0$ d) $\left(2^x+2^{4-x}-17\right)\sqrt{10-\log_2 x}\ge0$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x>4$.

Ta có: $\log^2_{\sqrt{2}}(x-4)-43\log_2(4x-16)+75\le0\Leftrightarrow\left[\log_{2^{\frac{1}{2}}}(x-4)\right]^2-43\log_2\left[4(x-4)\right]+75\le0$

$\Leftrightarrow4\left[\log_2(x-4)\right]^2-43\log_2(x-4)-11\le0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{4}\le\log_2(x-4)\le11\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}+4\le x\le2^{11}+4$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}+4\le x\le2^{11}+4\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}+4\le x\le2052$

b) Điều kiện: $x>0$. Khi đó: $\log^2_2 x-5\log_2 x-6\le0\Leftrightarrow-1\le\log_2 x\le6\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\le x\le64$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left[\dfrac{1}{2};64\right]$.

c) Điều kiện $x>0$. Ta có $\log^2_3 x-2\log_{\sqrt{3}}x+3>0\Leftrightarrow\log^2_3 x-4\log_3 x+3>0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x>3\\\log_3 x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>27\\x<3\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;3)\cup(27;+\infty)$.

d) Điều kiện: $10-\log_2 x\ge0\Leftrightarrow0<x\le2^{10}$.

Bất phương trình đã cho tương đương $\left[\begin{array}{l}\sqrt{10-\log_2 x}=0\\\begin{cases}\sqrt{10-\log_2 x}>0\\2^x+2^{4-x}-17\ge0\end{cases}\end{array}\right.$

Ta có: $\sqrt{10-\log_2 x}=0\Leftrightarrow x=2^{10}$.

Khi đó: $\begin{cases}\sqrt{10-\log_2 x}>0\\ 2^x+2^{4-x}-17\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<2^{10}\\ 2^{2x}-17\cdot 2^x+16\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<2^{10}\\ \left[\begin{array}{l}2^x\le 1\\ 2^x\ge 16\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<2^{10}\\ \left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow 4\le x<2^{10}$.

Ví dụ 22: Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0$ (1).

Đặt $t=\log_2 x$. Vì $x>\sqrt{2}$ nên $\log_2 x>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$. Do đó $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Khi đó: (1) trở thành $(1+t)^2-2(m+1)t-2<0 \Leftrightarrow t^2-2mt-1<0$ (2).

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta'=m^2+1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Do $f(t)=t^2-2mt-1=0$ có $ac=-1<0$ nên phương trình $f(t)=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1<0<t_2$. Tập nghiệm của bất phương trình (2) là $S=(t_1;\ t_2)$.

Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bất phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Khi đó ta cần có $\frac{1}{2}<t_2 \Leftrightarrow m+\sqrt{m^2+1}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2+1}>1-2m$ (3)

Nếu $1-2m<0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$, do $m^2+1>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên (3) luôn đúng với $\forall m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Nếu $1-2m\ge 0 \Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}$, $(3) \Leftrightarrow 4(m^2+1)>(1-2m)^2 \Leftrightarrow 4m+3>0 \Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

Kết hợp điều kiện $m\le\frac{1}{2}$ ta có $m\in\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right]$.

Tóm lại kết hợp cả 2 trường hợp ta có $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Ví dụ 23: Tìm tham số m để bất phương trình $\frac{\log_3^2 x-3\log_3 x+2}{\sqrt{m-2^x}}<0$ có không quá 3 nghiệm nguyên dương?

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}m-2^x>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\log_2 m\\ x>0\end{cases}$

Ta có: $\dfrac{\log_3^2 x-3\log_3 x+2}{\sqrt{m-2^x}}<0 \Leftrightarrow \log_3^2 x-3\log_3 x+2<0 \Leftrightarrow 1<\log_3 x<2 \Leftrightarrow 3<x<9$.

Xét: $\log_2 m\le 3 \Leftrightarrow 0<m\le 8$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Suy ra có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Xét: $\log_2 m>3 \Leftrightarrow m>8 \quad (1)$ thì bất phương trình có nghiệm thỏa: $3<x<\min\{\log_2 m;9\}$.

Theo yêu cầu đề bài ta có: $\log_2 m\le 7 \Leftrightarrow m\le 128$.

Kết hợp với điều kiện (1) ta được: $8<m\le 128$.

Ví dụ 24: Tìm tham số m để bất phương trình $\left|\dfrac{3\ln^2 x+2\ln x+12}{\ln^2 x-(m+1)\ln x+4}\right|\ge 2$ nghiệm đúng với mọi $x>0$.

Lời giải

Đặt $t=\ln x$. Vì $x>0$ nên $t\in\mathbb{R}$

Bất phương trình trở thành: $\left|\dfrac{3t^2+2t+12}{t^2-(m+1)t+4}\right|\ge 2,\forall t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left|3t^2+2t+12\right|\ge 2\left|t^2-(m+1)t+4\right|,\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2\left|t^2-(m+1)t+4\right|\le 3t^2+2t+12,\forall t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2t^2-2(m+1)t+4\le 3t^2+2t+12\\ 2t^2-2(m+1)t+4\ge -3t^2-2t-12\end{cases},\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}-t^2-2(m+2)t-8\le 0\\ 5t^2-2mt+16\ge 0\end{cases},\forall t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(m+2)^2-8\le 0\\ m^2-5.16\le 0\end{cases},\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+4m-4\le 0\\ \mathrm{m}^2-80\le 0\end{cases},\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}-2-2\sqrt{2}\le m\le -2+2\sqrt{2}\\ -4\sqrt{5}\le m\le 4\sqrt{5}\end{cases}$

$\Leftrightarrow -2-2\sqrt{2}\le m\le -2+2\sqrt{2}$

Dạng 8: Mũ hóa, logarit hóa giải bất phương trình mũ và logarit

Ví dụ 25: Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$

b) $5.6^{x+1} \leq 2.3^{x+1}$

c) $5^{x^2-4} \leq 625$

d) $(0,1)^{\ln(x-4)} \geq 1$

e) $\log_2\left(3^x-2\right)<0$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5} \Leftrightarrow -x^2-2x-1 \leq x-5 \Leftrightarrow x^2+3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-4] \cup [1;+\infty)$

b) Ta có $5.6^{x+1} \leq 2.3^{x+1} \Leftrightarrow \frac{6^{x+1}}{2.3^{x+1}} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2^x \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow x \leq \log_2\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow x \leq -\log_2 5$.

c) Ta có: $5^{x^2-4} \leq 625 \Leftrightarrow x^2-4 \leq \log_5 625 \Leftrightarrow x^2 \leq 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

d) Điều kiện: $x>4$.

Ta có $(0,1)^{\ln(x-4)} \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow x-4 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Đối chiếu với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(4;5]$.

e) Ta có $\log_2\left(3^x-2\right)<0 \Leftrightarrow 0<3^x-2<1 \Leftrightarrow 2<3^x<3 \Leftrightarrow \log_3 2<x<1$.

Ví dụ 26: Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2}.m^{x+1}-3^{-x}<0$ chứa đúng một số nguyên

Lời giải

Điều kiện: $m>0$. Ta có: $3^{x^2}.m^{x+1}-3^{-x}<0 \Leftrightarrow 3^{x^2}.m^{x+1}<3^{-x} \Leftrightarrow 3^{x^2+x}.m^{x+1}<1$

$\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)+(x+1)\log_3 m<0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x+\log_3 m\right)<0$

Nếu $m>3 \Leftrightarrow \log_3 m>1 \Rightarrow$ tập nghiệm của bất phương trình là: $-\log_3 m<x<-1$

Khi đó, bất phương trình có đúng một nghiệm nguyên khi:

$$-3 \leq -\log_3 m<-2 \Leftrightarrow 2<\log_3 m \leq 3 \Leftrightarrow 9<m \leq 27$$

Nếu $0<m<3 \Leftrightarrow \log_3 m<1 \Rightarrow$ tập nghiệm của bất phương trình là $-1<x<-\log_3 m$

Khi đó, bất phương trình có đúng một nghiệm nguyên khi:

$$0<-\log_3 m \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \log_3 m<0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m<1$$

Vậy với $9<m \leq 27$ và $\frac{1}{3} \leq m<1$ thì tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2}.m^{x+1}-3^{-x}<0$ chứa đúng một số nguyên.

Dạng 9: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Ví dụ 27: Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi $7,5\%$ một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là: $A=500.(1+0,075)^n$ (triệu đồng). Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

✍ Lời giải

Ta có: $500\left(1+0,075\right)^n \geq 800$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 500: $\left(1+0,075\right)^n \geq \dfrac{800}{500}=1,6$

Lấy logarit tự nhiên ở cả hai vế của bất phương trình: $n\ln\left(1+0,075\right)^n \geq \ln\left(1,6\right)$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho $\ln\left(1+0,075\right)$: $n \geq \dfrac{\ln\left(1,6\right)}{\ln\left(1+0,075\right)} \approx 9,25$

Vậy thời gian tối thiểu cần gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng là 10 năm.

Ví dụ 28: Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N\left(t\right)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N\left(t\right)=500e^{0,4t}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80 000 con?

✍ Lời giải

Giải phương trình: $80000=500e^{0,4t}$

Chia cả hai vế của phương trình cho 500: $160=e^{0,4t}$

Logarit tự nhiên của cả hai vế: $\ln 160=0,4t \Rightarrow t=\dfrac{\ln 160}{04} \approx 5,43$

Vậy sau khoảng 5.43 giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ vượt mức 80000 con.

Ví dụ 29: Giả sử nhiệt độ $T\left({}^\circ\text{C}\right)$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T=25+70e^{-0.5t}$ trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30°C?

✍ Lời giải

a) Nhiệt độ ban đầu của vật: $T=25+70e^{0,5t}=25+70e^{0,5\times 0}=25+70=95$

b) Để tìm thời gian t mà nhiệt độ của vật còn lại 30°C.

$30=25+70e^{0,5t} \Rightarrow \ln\dfrac{30-25}{70}=0,5t$

Giải phương trình trên ta tìm được giá trị của t: $t=2\ln\dfrac{1}{7} \approx 6,04$

Vậy sau khoảng 6,04 phút nhiệt độ của vật sẽ giảm còn 30°C.

Ví dụ 30: Tính nồng độ Ion Hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

Lời giải

Độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $pH = -\log_{10}\left[H^+\right]$.

$\Rightarrow \left[H^+\right] = 10^{-pH}$. Do đó, nồng độ ion hydrogen của dung dịch có độ pH là 8 là:

$\left[H^+\right] = 10^{-pH} = 10^{-8} (\text{mol / lít})$.

Vậy, nồng độ ion hydrogen của dung dịch là 10^{-8} mol / lít.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tính tổng các nghiệm của phương trình $\ln\left(x^2-3x+1\right)=-9$

Lời giải

Ta có $\ln\left(x^2-3x+1\right)=-9 \Leftrightarrow x^2-3x+1=e^{-9} \Leftrightarrow x^2-3x+1-e^{-9}=0$.

Phương trình $x^2-3x+1-e^{-9}=0$ có $\Delta=5+4e^{-9}>0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt và có tổng bằng 3.

Câu 2: Giải phương trình $(4,5)^{4x-5}=\left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1}$ là

Lời giải

Ta có: $(4,5)^{4x-5}=\left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^{4x-5}=\left(\frac{9}{2}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 4x-5=x+1 \Leftrightarrow x=2$

Câu 3: Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2}\le\left(\frac{11}{7}\right)^{x^2}$.

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2}\le\left(\frac{11}{7}\right)^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{11}{7}\right)^{-3x-2}\le\left(\frac{11}{7}\right)^{x^2} \Leftrightarrow -3x-2\le x^2 \Leftrightarrow x^2+3x+2\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge -1 \\ x\le -2 \end{array}\right.$.

Câu 4: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4.9^x-13.6^x+9.4^x=0$.

Lời giải

Ta có: $4.9^x-13.6^x+9.4^x=0 \Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x=1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{9}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Suy ra: $T=0+2=2$.

Câu 5: Tìm tham số m để phương trình: $4^x-m.2^{x+1}+2m^2-27=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $t=2^x>0 \Rightarrow$ phương trình đã cho trở thành $t^2-2mt+2m^2-27=0$ $(*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow t^2-2mt+2m^2-27=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+27>0 \\ 2m^2-27>0 \\ 2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{6}}{2}<m<3\sqrt{3} \Rightarrow S=\{4;5\}..$$

Câu 6: Cho phương trình $4^x-2m.2^x+3m-2=0(*)$ (m là tham số thực). Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

Lời giải

Đặt $t = 2^x$, với $t > 0$, ta được phương trình : $t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0$ (1).

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m > 0 \\ m > \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{3} < m < 1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

Khi đó : $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 1 < 2^{x_2} \Rightarrow t_1 < 1 < t_2 \Rightarrow (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow t_1t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0$

$\Leftrightarrow 3m - 2 - 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$. Từ đó suy ra $m \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$

Câu 7: Tìm tham số m để phương trình $4^x - (m+3)2^{x+1} + m + 9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

✍ Lời giải

Ta có: $4^x - (m+3)2^{x+1} + m + 9 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2(m+3)2^x + m + 9 = 0$ (1)

Đặt $t = 2^x\ (t > 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2(m+3)t + m + 9 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $1 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - m - 9 > 0 \\ m + 9 - 2(m+3) + 1 > 0 \\ 2(m+3) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 5m > 0 \\ -m + 4 > 0 \\ m + 3 > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \vee m > 0 \\ m < 4 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1; 2; 3$. Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Cho phương trình $m4^x - m2^{x+1} + 2m - 12 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt?

✍ Lời giải

Xét phương trình $m4^x - m2^{x+1} + 2m + 12 = 0$ (1)

Đặt $t = 2^x\ (t > 0)$ ta được phương trình $mt^2 - 2mt + 2m - 12 = 0$ (2).

Để (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m^2 + 12m > 0 \\ 2 > 0 \\ \dfrac{2m-12}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 0 < m < 12 \\ 2 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 6 < m < 12.$$

Câu 9: Tìm tham số m để phương trình $4^x - (2m+1).2^x + (m-11).0,5^x + m + 11 = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

$$4^x - (2m+1).2^x + (m-11).0,5^x + m + 11 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - (2m+1).2^x + (m-11).\frac{1}{2^x} + m + 11 = 0 \ (1)$$

Đặt $t = 2^x \ (t > 0)$. Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 - (2m+1)t + (m-11).\frac{1}{t} + m + 11 = 0 \Leftrightarrow t^3 - (2m+1)t^2 + (m+11)t + m - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 - 2mt + 11 - m) = 0 \ (2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 - 2mt + 11 - m = 0 \ (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có ba nghiệm dương phân biệt hay phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1.

Phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ -3m + 12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2} \\ m < \dfrac{-1-3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m > 0 \\ m < 11 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2} < m < 11 \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Câu 10: Tìm tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 1 \\ mx > 8 \end{cases} \ (1)$

Ta có: $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow 2\log_2(x-1) = \log_2(mx-8)$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow (x-1)^2 = mx - 8 \Leftrightarrow x^2 - (2+m)x + 9 = 0 \ (2)$$

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2+m)^2 - 36 = (m-4)(m+8) > 0 \\ x_1 + x_2 = m + 2 > 2 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 8 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 8.$$

Câu 11: Cho phương trình $\log_3^2(3x) - (m+2)\log_3 x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[9;27]$.

Lời giải

Đặt $t = \log_3 x$, do $x \in [9;27] \Rightarrow t \in [2;3]$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $(t+1)^2 - (m+2)t + 2m - 5 = 0, t \in [2;3]$.

$\Leftrightarrow t^2 - 4 = m(t-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = m - 2 \end{array}\right.$.

Để thỏa yêu cầu bài toán thì $2 < t_2 \le 3 \Leftrightarrow 4 < m \le 5$.

Vậy với $m \in (4;5]$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[9;27]$.

Câu 12: Tìm tham số m để bất phương trình $9\left(\log_3 \sqrt[3]{x}\right)^2 + \log_3 x + 2m \ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (3;81)$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$

Ta có $9\left(\log_3 \sqrt[3]{x}\right)^2 + \log_3 x + 2m \ge 0 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + \log_3 x + 2m \ge 0$ (1).

Đặt $t = \log_3 x$, khi $x \in (3;81) \Rightarrow t \in (1;4)$

Bất phương trình (1) có dạng: $t^2 + t + 2m \ge 0 \Leftrightarrow 2m \ge -t^2 - t$

Vì hàm số $f(t) = -t^2 - t$ luôn nghịch biến trên $(1;4)$ nên $2m \ge f(t)$, đúng với mọi $t \in (1;4)$

$\Leftrightarrow 2m \ge f(1) = -2 \Leftrightarrow m \ge -1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-20;10] \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2;...;10\}$.

Vậy có 12 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Biết phương trình $\log_2^2(x^2+1) - m\log_2(x^2+1) + 8 - m = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Tìm m

Lời giải

Đặt $t = \log_2(x^2+1), t \ge 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - mt + 8 - m = 0 (*)$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương

Khi đó $\begin{cases} m^2 - 4(8-m) > 0 \\ 8 - m = 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 8$.

Câu 14: Cho phương trình $\log_3^2 x-(2m+1)\log_3 x+m^2+m=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1<x_2$) thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+3)=48$.

Lời giải

Đặt $t=\log_3 x$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2-(2m+1)t+m^2+m=0\ (*)$.

Nhận xét: Ứng với mỗi nghiệm t của phương trình $(*)$ có một nghiệm $x>0$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow \Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0$.

Vậy phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Khi đó $t_1=\dfrac{2m+1+1}{2}=m+1\Rightarrow x_1=3^{m+1}$; $t_2=\dfrac{2m+1-1}{2}=m\Rightarrow x_2=3^m$ với $x_1<x_2$.

Theo đề bài

$$(x_1+1)(x_2+3)=48\Leftrightarrow(3^m+1)(3^{m+1}+3)=48\Leftrightarrow 3.3^{2m}+6.3^m-45=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^m=3\\3^m=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow m=1.$$

Kết luận: Số phần tử của tập S là 1.

Câu 15: Tìm tham số m để bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-m\right)<0$ có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên

Lời giải

Trường hợp 1: $\begin{cases}\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)>0\\ \left(3^x-m\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x+2}>3^{\frac{1}{2}}\\ 3^x<m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\ x<\log_3 m\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}<x<\log_3 m$.

Do yêu cầu bài toán bất phương trình có 6 nghiệm nguyên nên $\begin{cases}\log_3 m\le 5\\ m>0\end{cases}\Rightarrow m\le 243$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)<0\\ \left(3^x-m\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x+2}<3^{\frac{1}{2}}\\ 3^x>m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-\dfrac{3}{2}\\ x>\log_3 m\end{cases}\Leftrightarrow\log_3 m<x<-\dfrac{3}{2}$.

Câu 16: Tìm tham số m để bất phương trình $1-\log_{\frac{1}{7}}\left(x^2+1\right)\ge\log_7\left(mx^2+4x+m\right)$ có nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện: $mx^2+4x+m>0,\forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Nếu $m=0$ thì $(1)\Leftrightarrow 4x>0,\forall x\in\mathbb{R}$ không thỏa mãn.

Nếu $m \neq 0$ thì $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m>2$ **(*)**

Khi đó $1-\log_{\frac{1}{7}}\left(x^2+1\right) \geq \log_7\left(mx^2+4x+m\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \log_7\left(7x^2+7\right) \geq \log_7\left(mx^2+4x+m\right) \Leftrightarrow 7x^2+7 \geq mx^2+4x+m, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (7-m)x^2-4x+7-m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$

Nếu $m=7$ thì $(2) \Leftrightarrow -4x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn.

Nếu $m \neq 7$ thì $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 7-m>0 \\ 4-(7-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ -m^2+14m-45 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 5 \\ m \geq 9 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m \leq 5$.

Kết hợp với $(*)$ ta có $2<m \leq 5$.

Câu 17: Tìm số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình $3^{x+1}-2^{2x+1}-12^{\frac{x}{2}}<0$

✍ Lời giải

Ta biến đổi bất phương trình:

$$3^{x+1}-2^{2x+1}-12^{\frac{x}{2}}<0 \Leftrightarrow 3.3^x-2.4^x-12^{\frac{x}{2}}<0 \Leftrightarrow 3.\frac{3^x}{4^x}-2-\frac{12^{\frac{x}{2}}}{4^x}<0 \Leftrightarrow 3.\left(\frac{3}{4}\right)^x-2-\left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)^x<0$$

$$\Leftrightarrow 3.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x-2<0 \ (1)$$

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, điều kiện $t>0$.

Bất phương trình (1) trở thành: $3t^2-t-2<0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}<t<1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $0<t<1$. Suy ra $0<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x<1 \Leftrightarrow x>0.$

Do đó nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình là tập $\{1;2;3;...;8;9\}$.

Vậy số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình là 9.

Câu 18: Tìm tham số m để bất phương trình: $1+\log_5\left(x^2+1\right) \geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

✍ Lời giải

Điều kiện: $mx^2+4x+m>0$ $(*)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m=0$ thì $(*)$ trở thành $4x>0 \Leftrightarrow x>0$ (không đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$) nên $m=0$ không thỏa mãn.

Với $m \neq 0$ thì $(*)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=m>0 \\ \Delta'=4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m^2>4 \end{cases} \Leftrightarrow m>2$.

Ta có: $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \log_5\left[5\left(x^2+1\right)\right]\ge \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 5\left(x^2+1\right)\ge mx^2+4x+m \Leftrightarrow (5-m)x^2-4x+5-m\ge 0\ (**)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Với $m=5$ thì $(**)$ trở thành $-4x\ge 0\Leftrightarrow x\le 0$ (không đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$) nên $m=5$ không thỏa mãn.

Với $m\ne 5$ thì $(**)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=5-m>0 \\ \Delta'=4-(5-m)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<5 \\ (5-m)^2\ge 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<5 \\ \left[\begin{array}{l} 5-m\ge 2 \\ 5-m\le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 3 \\ m\ge 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\le 3.$

Kết hợp với điều kiện ta được: $2<m\le 3$.

Câu 19: Năm 2020, một doanh nghiệp X có tổng doanh thu là 150 tỉ đồng. Dự kiến trong 10 năm tiếp theo, tổng doanh thu mỗi năm sẽ tăng thêm 12% so với năm liền trước. Theo dự kiến đó thì kể từ năm nào, tổng doanh thu của doanh nghiệp X vượt quá 360 tỉ đồng?
Gọi n là số năm doanh nghiệp X có mức doanh thu vượt quá 360 tỉ đồng kể từ năm 2020.

✍ Lời giải

Ta có $n>\log_{1+12\%}\left(\dfrac{360}{150}\right)\Leftrightarrow n>7,72\Rightarrow n=8$.

Câu 20: Bạn An gửi tiết kiệm một số tiền ban đầu là 1000000 đồng với lãi suất 0,58% tháng (không kỳ hạn). Hỏi bạn An phải gửi ít nhất bao nhiêu tháng thì được cả vốn lẫn lãi bằng hoặc vượt quá 1300000 đồng?

✍ Lời giải

Ta có : $1000000(1+0,58\%)^n\ge 1300000\Leftrightarrow n\ge \log_{(1+0,58\%)}\dfrac{13}{10}\approx 45,37$.

Vậy bạn An phải gửi ít nhất 46 tháng.

Câu 21: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tích lãi cho năm tiếp theo. Hỏi người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm để nhận được tổng số tiền cả vốn ban đầu và lãi nhiều hơn 140 triệu đồng nếu trong khoảng thời gian gửi người đó không tút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

✍ Lời giải

Theo công thức lãi kép, ta có: $A=A_0(1+r\%)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $140<100(1+7\%)^n\Leftrightarrow n>\log_{1,07}0,14\Leftrightarrow n>4,97$

Vậy người đó phải gửi ít nhất là 5 năm.

Câu 22: Năm 2020, độ che phủ rừng của nước ta đạt $41,89\%$. Giả sử độ che phủ rừng mỗi năm tiếp theo đều tăng $1,6\%$ so với độ che phủ rừng của năm liền trước. Kể từ sau năm 2020, năm nào là năm đầu tiên nước ta có độ che phủ rừng trong năm đó đạt trên 58%?

✍ Lời giải

Diện tích trồng rừng mới của năm $2020+1$ là $41,89\%\left(1+1,6\%\right)^1$.

Diện tích trồng rừng mới của năm $2020+2$ là $41,89\%\left(1+1,6\%\right)^2$.

….

Diện tích trồng rừng mới của năm $2020+n$ là $41,89\%\left(1+1,6\%\right)^n$.

Khi đó $41,89\%\left(1+1,6\%\right)^n > 58\% \Leftrightarrow 1,016^n > \dfrac{5800}{4189} \Leftrightarrow n > \log_{1,016}\left(\dfrac{5800}{4189}\right) \Leftrightarrow n > 20,49950974$

Vậy vào năm $2020+21=2041$ là năm đầu tiên nước ta có độ che phủ rừng trong năm đó đạt trên 58%.

Câu 23: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6% / năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả sử trong suốt thời gian gửi lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

✍ Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép $C=A\left(1+r\right)^n$ với $A=50$, $C>100$, $r=6\%=0,06$ ta được:

$50\left(1+0,06\right)^n > 100 \Leftrightarrow 1,06^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{1,06} 2 \approx 11,90$.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Phương trình mũ

Câu 1: Nghiệm của phương trình $3^{3x+5}=3^{1-x}$ là :

A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{3x+5}=3^{1-x}\Leftrightarrow 3x+5=1-x\Leftrightarrow 4x=-4\Leftrightarrow x=-1$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $10^{x}=5$ là

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\log 5$. **D.** $x=\log_5 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $10^{x}=5\Leftrightarrow x=\log 5$.

Câu 3: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x}=8$ là

A. 3 **B.** 2 . **C.** -3 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x^2-2x}=8\Leftrightarrow 2^{x^2-2x}=2^3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=3\end{array}\right.\Rightarrow x_1.x_2=-3$

Câu 4: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x}=5$.

A. $S=\{0;2\}$. **B.** $S=\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$. **C.** $S=\left\{1;-\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{2x^2-x}=5\Leftrightarrow 2x^2-x=1\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S=\left\{1;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Câu 5: Tập nghiệm của phương trình $2^{x+1}=5$ có bao nhiêu phần tử?

A. 3. **B.** 2 . **C.** 0 . **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x+1}=5\Leftrightarrow x=-1+\log_2 5$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-1+\log_2 5$.

Câu 6: Số nghiệm thực của phương trình $3^{x^2-2}=81$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x^2-2}=81 \Leftrightarrow 3^{x^2-2}=3^4 \Leftrightarrow x^2-2=4 \Leftrightarrow x^2=6 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3}=5^{x+1}$ là

A. $x=-1;x=2$. **B.** Vô nghiệm. **C.** $x=1;x=2$. **D.** $x=1;x=-2$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương $5^{-x^2+2x+3}=5^{x+1} \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-1;x=2$.

Câu 8: Nghiệm của phương trình $5^{x-4}=125$ là

A. $x=4$. **B.** $x=5$. **C.** $x=7$. **D.** $x=6$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{x-4}=125 \Leftrightarrow 5^{x-4}=5^3 \Leftrightarrow x-4=3 \Leftrightarrow x=7$.

Câu 9: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-4}=3^{x-2}$ là

A. $\log_2 3$. **B.** $2\log_2 3-4$. **C.** $\log_3 2$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2-4}=3^{x-2} \Leftrightarrow x^2-4=(x-2)\log_2 3 \Leftrightarrow x^2-x\log_2 3+2\log_2 3-4=0$

Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và tích các nghiệm bằng $2\log_2 3-4$.

Câu 10: Cho phương trình $2^{x^2}.3^{x+1}=2$. Tổng các nghiệm của phương trình bằng

A. $\log_3 2$. **B.** $\log_2 \frac{3}{2}$. **C.** $-\log_2 3$. **D.** $\log_2 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x^2}.3^{x+1}=2 \Leftrightarrow \log_2\left(2^{x^2}.3^{x+1}\right)=1$

$\Leftrightarrow x^2+(x+1)\log_2 3-1=0 \Leftrightarrow x^2+x.\log_2 3+\log_2 3-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\log_2 3+1 \end{array}\right.$.

Tổng các nghiệm của phương trình bằng $-1-\log_2 3+1=-\log_2 3$.

Câu 11: Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+2}=4$ là

A. $S=\{-1;0\}$. **B.** $S=\{-1\}$. **C.** $S=\{0\}$. **D.** $S=\{0;1\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x^2-x+2}=4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x+2}=2^2 \Leftrightarrow x^2-x+2=2 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+2}=4$ là $S=\{0;1\}$.

Câu 12: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x-\frac{1}{3}}=9^{x+\frac{4}{3}}$

A. 31. **B.** 19. **C.** 35. **D.** 22.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x^2-3x-\frac{1}{3}}=9^{x+\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x^2-3x-\frac{1}{3}=2x+\frac{8}{3} \Leftrightarrow x^2-5x-3=0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1+x_2=5; x_1.x_2=-3$

Suy ra: ${x_1}^2+{x_2}^2=31$

Câu 13: Tổng các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-3x+4}=4^{2x-3}$ bằng

A. 6. **B.** 7. **C.** -7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2-3x+4}=4^{2x-3} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4}=2^{2(2x-3)} \Leftrightarrow x^2-3x+4=4x-6$

$\Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right.$. Tổng các nghiệm của phương trình là 7.

Câu 14: Số nghiệm phương trình $2^{2x^2-7x+5}=1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $2^{2x^2-7x+5}=1 \Leftrightarrow 2x^2-7x+5=\log_2 1 \Leftrightarrow 2x^2-7x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 15: Phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x^3}=4^{x^2-2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x^3}=4^{x^2-2}\Leftrightarrow 2^{x^3-x^2}=2^{2x^2-4}\Leftrightarrow x^3-x^2=2x^2-4\Leftrightarrow x^3-3x^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Câu 16: Số nghiệm thực của phương trình $9^{x^2+4x+3}=1$.

A. 1. **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $9^{x^2+4x+3}=1\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$.

Câu 17: Số nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}=\frac{9}{4}$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2 . **D.** 0 .

Lời giải

Chọn C

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\Leftrightarrow x^2-3x=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Câu 18: Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** -2

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}=3^{-2}\Leftrightarrow x^2-3x=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm là 3.

Câu 19: Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$ ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2+2t-3=0$. **B.** $2t^2-3t=0$. **C.** $t^2+t-3=0$. **D.** $4t-3=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^x+2^{x+1}-3=0\Leftrightarrow 4^x+2.2^x-3=0$. Đặt $t=2^x$ ta được phương trình $t^2+2t-3=0$.

Câu 20: Số nghiệm thực của phương trình: $1+\ln(x+3)-\ln(x-1)^2=0$ là

A. 2. **B.** 1 **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x+3>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Ta có: $1+\ln(x+3)-\ln(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)^2=\ln(x+3)+1$

$\Leftrightarrow \ln(x-1)^2=\ln e(x+3) \Leftrightarrow (x-1)^2=ex+3e \Leftrightarrow x^2-(2+e)x+1-3e=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{e+2-\sqrt{e^2+16e}}{2}(t/m) \\ x=\dfrac{e+2+\sqrt{e^2+16e}}{2}(t/m) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 21: Số nghiệm của phương trình $3^{2x^2-6x+2}-4.3^{x^2-3x+2}+27=0$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $3^{2x^2-6x+2}-4.3^{x^2-3x+2}+27=0 \Leftrightarrow 9.3^{2(x^2-3x)}-36.3^{x^2-3x}+27=0$

Đặt $3^{x^2-3x}=t, t>0$, phương trình (1) trở thành: $9t^2-36t+27=0 \Leftrightarrow t=1; t=3$

Với $t=1 \Rightarrow 3^{x^2-3x}=1 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x=0; x=3$

Với $t=3 \Rightarrow 3^{x^2-3x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 22: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x+1}-5.2^x+2=0$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x+1}-5.2^x+2=0 \Leftrightarrow 2.2^{2x}-5.2^x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=2 \\ 2^x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng 0.

Câu 23: Cho phương trình $4.4^x-9.2^{x+1}+8=0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó tích x_1, x_2 bằng:

A. 2. **B.** −2. **C.** 1. **D.** −1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow 4.\left(2^x\right) - 18.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Khi đó $x_1.x_2 = -2$.

Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y+1} = 3^{x^2+y^2}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^{x+y+1} = 3^{x^2+y^2} \Leftrightarrow (x+y+1)\log_3 4 = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow y^2 - 2(\log_3 2)y + x^2 - 2(x+1)\log_3 2 = 0$.

Để tồn tại số thực y khi và chỉ khi $\Delta' = (\log_3 2)^2 + 2(x+1)\log_3 2 - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x\log_3 2 + (\log_3 2)^2 + 2\log_3 2 \geq 0 \Leftrightarrow -0,8036 \leq x \leq 2,0655$.

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0;1;2\}$.

Câu 25: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $4^{3-2x^2} = 5^{x+1}$ gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $-1,07$. **B.** $-0,92$. **C.** $0,92$. **D.** $1,07$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^{3-2x^2} = 5^{x+1} \Leftrightarrow 3 - 2x^2 = (x+1)\log_4 5 \Leftrightarrow 2x^2 + \log_4 5.x + \log_4 5 - 3 = 0$.

Nên tích các nghiệm bằng $\dfrac{\log_4 5 - 3}{2} \approx -0,92$.

Câu 26: Biết phương trình $9^x - 3.3^x - 4 = 0$ có nghiệm $x = \log_a b$ (a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 10), giá trị của $a - b$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $9^x - 3.3^x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = -1 (\text{loai}) \\ 3^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \log_3 4$. Suy ra $a = 3; b = 4$. Vậy $a - b = -1$

Câu 27: Biết phương trình $\log_5^2 x - m\log_5 x - 7 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tích $x_1.x_2$

A. $x_1.x_2 = 5^{-m}$. **B.** $x_1.x_2 = -7$. **C.** $x_1.x_2 = 5^{-7}$. **D.** $x_1.x_2 = 5^m$.

Lời giải

Chọn D

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Ta có $\log_5(x_1.x_2) = \log_5 x_1 + \log_5 x_2 = m \Rightarrow x_1.x_2 = 5^m$.

Câu 28: Phương trình $9^x - 3.3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$. Giá trị $2x_1 + 3x_2$ bằng

A. $4\log_2 3$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $3\log_3 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $9^x - 3.3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3.3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_3 2 \end{array}\right.$.

Vì $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0, x_2 = \log_3 2$.

Khi đó: $2x_1 + 3x_2 = 2.0 + 3.\log_3 2 = 3\log_3 2$.

Câu 29: Tổng tất các các nghiệm của phương trình $9^x - 5.6^x + 6.4^x = 0$ bằng

A. $\log_{\frac{3}{2}} 2$. **B.** $\log_{\frac{3}{2}} 6$. **C.** $\log_{\frac{3}{2}} 3$. **D.** $\log_{\frac{2}{3}} 6$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $9^x - 5.6^x + 6.4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, t > 0$; khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 3$.

Ta có: $\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \log_{\frac{3}{2}} 2 \\ t = \log_{\frac{3}{2}} 3 \end{array}\right.$

Do đó tổng các nghiệm: $\log_{\frac{3}{2}} 2 + \log_{\frac{3}{2}} 3 = \log_{\frac{3}{2}}(2.3) = \log_{\frac{3}{2}} 6$.

Câu 30: Tổng các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0 \Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 2\end{array}\right.$.

Tổng các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$ bằng $0 + 2 = 2$.

Câu 31: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

A. 3. **B.** 18. **C.** 27. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 18.3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{x_1} = 9 + 3\sqrt{6}\\ 3^{x_2} = 9 - 3\sqrt{6}\end{array}\right.$.

Ta có $3^{x_1}.3^{x_2} = \left(9 + 3\sqrt{6}\right)\left(9 - 3\sqrt{6}\right) \Leftrightarrow 3^{x_1 + x_2} = 27 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3$.

Câu 32: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $100^x - 7.10^x + 10 = 0$.

A. 7. **B.** $\log 7$. **C.** 1. **D.** $\ln 7$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $100^x - 7.10^x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(10^x - 2\right)\left(10^x - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}10^x - 2 = 0\\ 10^x - 5 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \log 2\\ x = \log 5\end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là: $\log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$.

Câu 33: Biết phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Giá trị của $x_1.x_2$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** -3. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 = -1\\ \log_2 x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}\\ x = 8\end{array}\right.$.

$\Rightarrow x_1.x_2 = 4$.

Câu 34: Giả sử phương trình $25^x + 15^x = 6.9^x$ có một nghiệm duy nhất được viết dưới dạng $\frac{a}{\log_b c - \log_b d}$ với a là số nguyên dương và b, c, d là các số nguyên tố. Tính $S = a^2 + b + c + d$

.

A. $S=14$. **B.** $S=11$. **C.** $S=19$. **D.** $S=12$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $25^x+15^x=6.9^x \Leftrightarrow 5^{2x}+(3.5)^x-6.3^{2x}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{5}{3}\right)^x-6=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{3}\right)^x=2\\ \left(\frac{5}{3}\right)^x=-3\quad (ptvn)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\log_{\frac{5}{3}}2=\frac{\log_2 2}{\log_2\frac{5}{3}}=\frac{1}{\log_2 5-\log_2 3}.$$

Từ đây suy ra $a=1, b=2, c=5, d=3$. Vậy $S=1^2+2+5+3=11$.

Câu 35: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(9^x-244.3^x+243\right).\sqrt{8-\log_2(x+2)}\ge 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 252. **B.** 250. **C.** 249. **D.** 254.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases}x+2>0\\ 8-\log_2(x+2)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-2\\ \log_2(x+2)\le 8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-2\\ x+2\le 256\end{cases} \Leftrightarrow -2<x\le 254$.

Trường hợp 1: $\log_2(x+2)=8 \Leftrightarrow x+2=256 \Leftrightarrow x=254$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $8-\log_2(x+2)>0 \Leftrightarrow -2<x<254$.

Ta có $\left(9^x-244.3^x+243\right).\sqrt{8-\log_2(x+2)}\ge 0 \Leftrightarrow 9^x-244.3^x+243\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x\ge 243\\ 3^x\le 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 5\\ x\le 0\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $-2<x<254$ suy ra nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l}5\le x<254\\ -2<x\le 0\end{array}\right.$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-2;0]\cup[5;254]$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình có 252 số nguyên.

Câu 36: Phương trình $4^x-3.2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(-5;0)$. **D.** $(-7;-5)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^x-3.2^{x+1}+m=0 \Leftrightarrow 2^{2x}-6.2^x+m=0$.

Đặt $t=2^x\left(t>0\right)\Rightarrow t^2-6t+m=0\ (*)$

$(*)$ có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-m\ge 0\\ 6>0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\le 9$

Ta có: $t_1.t_2=2^{x_1+x_2}=2^2=4=m$

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x-\left(m+1\right).2^x+2m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2+x_1+x_2\le 2$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2^x, t>0$.

Phương trình có dạng $t^2-\left(m+1\right)t+2m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=m-1\end{array}\right.$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases}m-1>0\\ m-1\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ m\ne 3\end{cases}$.

Khi đó $x_1=1; x_2=\log_2\left(m-1\right)$

$\Leftrightarrow x_1x_2+x_1+x_2\le 2\Leftrightarrow 1.\log_2\left(m-2\right)+1+\log_2\left(m-2\right)\le 2\Leftrightarrow\log_2\left(m-2\right)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow m\le 2+\sqrt{2}$.

Kết hợp ta được $1<m\le 2+\sqrt{2}; m\ne 3; m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=2$.

Câu 38: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x-2m.3^x+m^2-8m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa $x_1+x_2=2$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $9^x-2m.3^x+m^2-8m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa $x_1+x_2=2$ khi

$$\begin{cases}m^2-1.\left(m^2-8m\right)>0\\ 2m>0\\ m^2-8m>0\\ m^2-8m=9\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=9\end{array}\right.\Rightarrow S=\left\{-1;9\right\}$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 8.

Câu 39: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x-2m.3^x+m^2-8m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=2$. Tổng các giá trị của S bằng.

A. 9. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $9^x-2m.3^x+m^2-8m=0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-2m.3^x+m^2-8m=0(*)$

Đặt $3^x=t$ $(*)\Leftrightarrow t^2-2mt+m^2-8m=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0$.

$\Leftrightarrow m^2-m^2+8m>0\Leftrightarrow 8m>0\Leftrightarrow m>0$.

Theo vi-ét ta có: $\begin{cases}t_1+t_2=2m\\ t_1.t_2=m^2-8m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x_1}+3^{x_2}=2m\\ 3^{x_1}.3^{x_2}=m^2-8m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x_1}+3^{x_2}=2m\\ 3^{x_1+x_2}=m^2-8m\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x_1}+3^{x_2}=2m\\ x_1+x_2=\log_3\left(m^2-8m\right)\end{cases}$.

Mà $x_1+x_2=2\Rightarrow \log_3\left(m^2-8m\right)=2$.

$\Leftrightarrow m^2-8m=9\Leftrightarrow m^2-8m-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\\ m=-1\end{array}\right.\Rightarrow S=9$. Vì $m>0$

Câu 40: Cho phương trình $4^x-(m+3)2^x+8=0$ (m là tham số). Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=8$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(29;30)$. **B.** $(27;28)$. **C.** $(30;31)$. **D.** $(28;29)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $t=2^x$.

Phương trình có dạng: $t^2-(m+3)\text{t}+8=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ t_1+t_2>0\\ t_1t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2+6m-23>0\\ m+3>0\\ 8>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ \left[\begin{array}{l}m>4\sqrt{2}-3\\ m<-4\sqrt{2}-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m>4\sqrt{2}-3.$

Ta có: $2^{x_1}=t_1\Rightarrow x_1=\log_2 t_1$; $2^{x_2}=t_2\Rightarrow x_2=\log_2 t_2$.

Suy ra $x_1+x_2=\log_2 t_1+\log_2 t_2=\log_2\left(t_1t_2\right)=\log_2 8=3.$

Ta có: $(x_1+3)(x_2+3)=8 \Leftrightarrow x_1.x_2+3(x_1+x_2)+9=8 \Leftrightarrow x_1.x_2=-10.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{1}{4} \\ t_2=32 \end{array}\right.$.

$t_1+t_2=m+3 \Rightarrow m+3=32,25 \Leftrightarrow m=29,25$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-21;21]$ để hai phương trình $4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16$ và $|m-9|.3^{x-2}+m.9^{x-1}=1$ là hai phương trình tương đương?

A. 32. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 31.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3^x>0$, phương trình hai trở thành: $mt^2+|m-9|t-9=0\ (3)$.

Ta có: $4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16 \Leftrightarrow 2^{2(x+1)}+6.2^{x+1}-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x+1}=2 \Rightarrow x=0 \\ 2^{x+1}=-8\,(ptvn) \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Để hai phương trình tương đương thì thỏa đồng thời 2 điều kiện sau:

Với $x=0$ cũng là nghiệm phương trình thứ hai $\Rightarrow |m-9|.3^{0-2}+m.9^{0-1}=1 \Leftrightarrow |m-9|=9-m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-m\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} m-9=9-m \\ m-9=m-9 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m\le 9$.

Phương trình thứ hai có duy nhất 1 nghiệm $x=0$ thì $pt(3)$ có thêm 1 nghiệm $t\le 0$

$\Leftrightarrow -9.m\le 0 \Leftrightarrow m\ge 0$.

Trường hợp 2: Để hai phương trình tương đương thì phương trình (3) có nghiệm kép $t=1$

$\Rightarrow -\dfrac{|m-9|}{2m}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \left[\begin{array}{l} m=-9 \\ m=6 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m=-9$.

Kết hợp với điều kiện $m\in[-21;21]$ và $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=\{-9;0;1;2;......;9\}$.

Câu 42: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x-m.5^{x+1}+7m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $5^x=t\,(t>0)$ thì phương trình trở thành: $t^2-5mt+7m^2-7=0\ (*)$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm thì $t_1 > t_2 > 0$

Khi đó: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 4\left(7m^2 - 7\right) > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 28 > 0 \\ m > 0 \\ m > 1 \vee m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2\sqrt{21}}{3} < m < \dfrac{2\sqrt{21}}{3} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

Vậy tập hợp S có hai phần tử là: 2 và 3. .

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3}$ có nghiệm?

A. 9. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\sqrt{x^2 - 3x + m} = a \ (a \geq 0)$.

Khi đó: $3^{2a} + 2.3^{a-2+x} < 3^{2x-3} \Leftrightarrow 3^{2a-2x} + \dfrac{2}{9}.3^{a-x} - \dfrac{1}{27} < 0 \Leftrightarrow \left(3^{a-x} + \dfrac{1}{9}\right)^2 < \left(\dfrac{2}{9}\right)^2$

$\Leftrightarrow 3^{a-x} + \dfrac{1}{9} < \dfrac{2}{9} \Leftrightarrow 3^{a-x} < 3^{-2}$

Nên: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a < x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 3x + m} < x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x < 4 - m \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 4 - m > 2 \Leftrightarrow m < 2$

Do m nguyên dương nên $m = 1$.

Câu 44: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử là số chẵn?

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $16^x - m.4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - 4m.4^x + 5m^2 - 45 = 0$

Đặt $4^x = t \ (t > 0)$ khi đó phương trình$(*)$ trở thành: $t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0$

Khi đó phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - (5m^2 - 45) > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1.t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45 - m^2 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{4;5;6\}$ nên có 2 giá trị m chẵn thỏa mãn.

2. Phương trình logarit

Câu 45: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{2023}\left(x^2 + 2022x\right) = 1$ bằng

A. -2022. **B.** -2023. **C.** 2023. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 + 2022x = 2023 \Leftrightarrow x^2 + 2022x - 2023 = 0$ (1).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nên theo Vi-et suy ra tổng các nghiệm là $x_1 + x_2 = -2022$.

Câu 46: Nghiệm của phương trình $\log_2(2x - 6) = 3$ là

A. $x = 6$ **B.** $x = 9$ **C.** $x = 8$ **D.** $x = 7$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2(2x - 6) = 3 \Leftrightarrow 2x - 6 = 2^3 \Leftrightarrow x = 7$

Câu 47: Nghiệm của phương trình $\log_2(x - 1) = 1$ là

A. $x = 3$. **B.** $x = -1$ **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2(x - 1) = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 48: Nghiệm của phương trình $\log_2(x - 1) = 3$ là

A. $x = 10$. **B.** $x = 9$. **C.** $x = 7$. **D.** $x = 8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(x - 1) = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 2^3 \Leftrightarrow x = 9$.

Câu 49: Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2 + 1\right) = 2$ là

A. $S = \left\{\sqrt{3}\right\}$. **B.** $S = \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$. **C.** $S = \{-1;1\}$. **D.** $S = \{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2\left(x^2+1\right)=2 \Leftrightarrow x^2+1=2^2 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$.

Câu 50: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0$ bằng

A. 8 **B.** 6 **C.** 16 **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=4\end{array}\right.$

Suy ra $x_1.x_2=8$

Câu 51: Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(1-x\right)=2$ là

A. $x=-4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2\left(1-x\right)=2 \Leftrightarrow 1-x=2^2 \Leftrightarrow x=-3$.

Câu 52: Tập nghiệm của phương trình $\ln(x+4)-\ln(2x-3)=0$ là

A. $\left\{7;\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $\left\{7\right\}$. **C.** $\left\{-4;\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>\dfrac{3}{2}$.

Ta có: $\ln(x+4)-\ln(2x-3)=0 \Leftrightarrow x+4=2x-3 \Leftrightarrow x=7(tm)$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{7\right\}$.

Câu 53: Tập nghiệm S của phương trình $\log_2\left(x^2+3x\right)=2$ là

A. $S=\left\{1;-4\right\}$. **B.** $S=\left\{-1;4\right\}$. **C.** $S=\left\{1\right\}$. **D.** $S=\left\{4\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x>0\\ x<-3\end{array}\right.$.

Ta có: $x^2+3x=2^2 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(TM) \\ x=-4(TM) \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;-4\}$.

Câu 54: Phương trình $\log(4x+1)=\log(2x+5)$ có nghiệm là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log(4x+1)=\log(2x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5>0 \\ 4x+1=2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{5}{2} \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Câu 55: Tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-3)=\log_2(2x-1)$ là

A. $S=\{0\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{-2\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x>3$

Ta có: $\log_2(x-3)=\log_2(2x-1) \Leftrightarrow x-3=2x-1 \Leftrightarrow x=-2(\text{KTMĐK})$. Vậy $S=\varnothing$.

Câu 56: Nghiệm của phương trình $\log_2(2x)=3$ là?

A. $x=3$. **B.** $x=4$. **C.** $x=\dfrac{9}{2}$. **D.** $x=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $2x>0 \Leftrightarrow x>0$. Ta có: $\log_2(2x)=3 \Leftrightarrow 2x=2^3 \Leftrightarrow x=4(tm)$.

Câu 57: Nghiệm của phương trình $\log_4(x-1)=3$ là

A. $x=66$. **B.** $x=68$. **C.** $x=65$. **D.** $x=63$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_4(x-1)=3 \Leftrightarrow x-1=4^3 \Leftrightarrow x=65$.

Câu 58: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2 x=2$ là

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\dfrac{3}{2}$. **C.** $x=\dfrac{2}{3}$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

Ta có $\log_2(x+2)-\log_2 x=2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2 4+\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2 4x \Leftrightarrow x+2=4x \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ (thỏa mãn).

Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2 x=2$ là $x=\frac{2}{3}$.

Câu 59: Biết phương trình $2\log_3 x+2\log_x 3=5$ có ai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=6{x_1}^2-x_2+1$.

A. $T=16$. **B.** $T=10$. **C.** $T=8$. **D.** $T=12$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0<x\neq 1$.

Phương trình $2\log_3 x+2\log_x 3=5 \Leftrightarrow 2\log_3 x+2\frac{1}{\log_3 x}=5$

$\Leftrightarrow 2{\log_3}^2 x-5\log_3 x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=\frac{1}{2} \\ \log_3 x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{3} \\ x_2=9 \end{array}\right. . \Rightarrow T=6{x_1}^2-x_2+1=10$.

Câu 60: Tổng các nghiệm của phương trình $\log^2 x-\log x-2=0$ bằng

A. $\frac{1001}{100}$. **B.** 101. **C.** $\frac{1001}{10}$. **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log^2 x-\log x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x=2 \\ \log x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=100 \\ x_2=\frac{1}{10} \end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=\frac{1001}{10}$.

Câu 61: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 9. **D.** -7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=1+2\sqrt{2} \\ \log_3 x=1-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3^{1+2\sqrt{2}} \\ x=3^{1-2\sqrt{2}} \end{array}\right.$.

Vậy tích các nghiệm 9.

Câu 62: Tích các nghiệm của phương trình $6{\log^2}_4 x-\log_4 x^3+\frac{1}{5}=0$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\sqrt[3]{2}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $\log_4 x = t$ thì phương trình trở thành: $6t^2 - 3t + \frac{1}{5} = 0$, do $\Delta = 9 - \frac{24}{5} > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, nên phương trình ban đầu luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có: $x_1.x_2 = 4^{t_1}.4^{t_2} = 4^{t_1+t_2} = 4^{0,5} = 2$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình ban đầu bằng 2.

Câu 63: Biết phương trình $\log_9^2 x + \log_3 \frac{x}{27} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Hiệu $x_2 - x_1$ bằng

A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{6560}{729}$. **C.** $\frac{80}{27}$. **D.** $\frac{6560}{27}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log_9^2 x + \log_3 \frac{x}{27} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\log_3^2 x + \log_3 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = \frac{1}{729} \end{array}\right.$.

Ta có $x_2 - x_1 = 9 - \frac{1}{729} = \frac{6560}{729}$.

Câu 64: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\left(9^x - 5.3^x + 7\right) = x + 1$ bằng

A. $\log_7 3$. **B.** $1 + \log_3 7$. **C.** $\log_3 7$. **D.** $1 + \log_3 7$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $\log_3\left(9^x - 5.3^x + 7\right) = x + 1 \Leftrightarrow 9^x - 5.3^x + 7 = 3^{x+1}$

$\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 5.3^x + 7 - 3.3^x = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 8.3^x + 7 = 0$

Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$ phương trình trở thành $t_1.t_2 = 3^{x_1+x_2} \Leftrightarrow 7 = 3^{x_1+x_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_3 7$

Câu 65: Phương trình $\left(x^2 - 4x + 3\right)\log_{2023}\left(x^2 - 4\right) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

Phương trình tương đương $\left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ \log_{2023}\left(x^2-4\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện, ta nhận $x=3, x=\pm\sqrt{5}$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm.

Vậy $S=\varnothing$.

Câu 66: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(3x+6)=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+4x>0 \\ 3x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>0 \end{array}\right. \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow x>0$.

Ta có $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(3x+6)=0 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3(3x+6) \Leftrightarrow x^2+4x=3x+6$

$\Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm $x=2$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất.

Câu 67: Biết rằng phương trình $\log_3\left(x^2-2021x\right)=2022$ có 2 nghiệm x_1, x_2. Tính tổng x_1+x_2.

A. $x_1+x_2=-3^{2022}$. **B.** $x_1+x_2=-2022^3$.

C. $x_1+x_2=2021$. **D.** $x_1+x_2=-2021$.

Lời giải

Phương trình: $\log_3\left(x^2-2021x\right)=2022 \Leftrightarrow x^2-2021x=3^{2022} \Leftrightarrow x^2-2021x-3^{2022}=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên theo định lí Viét ta có: $x_1+x_2=2021$.

Câu 68: Số nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$?

A. 0. **B.** 3 **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$

Ta có: $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2 \Leftrightarrow \log_2\left[x(x-3)\right] = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1(l) \\ x = 4(tm) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 69: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3 5$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3 5\ (*)$

Điều kiện $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

$(*) \Rightarrow \log_3\left[(x+2)(x-2)\right] = \log_3 5 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-4\right) = \log_3 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện suy ra $x = 3$.

Câu 70: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5(*)$.

Với điều kiện (*) phương trình $3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3 \Leftrightarrow \log_3(x-1) + \log_3(x-5) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)(x-5) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$.

Vậy số nghiệm thực của phương trình đã cho là 2.

Câu 71: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2) - \log_2 x = 2$ là

A. $x = \frac{1}{2}$. **B.** $x = \frac{3}{2}$. **C.** $x = \frac{2}{3}$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Ta có $\log_2(x+2)-\log_2 x=2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2 4+\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2 4x \Leftrightarrow x+2=4x \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$ (thỏa mãn).

Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2 x=2$ là $x=\dfrac{2}{3}$.

Câu 72: Cho phương trình $\log_2(2x-1)^2=2\log_2(x-2)$. Số nghiệm thực của phương trình là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}(2x-1)^2>0\\ x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{1}{2}\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow x>2$.

$\log_2(2x-1)^2=2\log_2(x-2) \Leftrightarrow 2\log_2(2x-1)=2\log_2(x-2) \Leftrightarrow \log_2(2x-1)=\log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x-1=x-2 \Leftrightarrow x=-1$(không thỏa mãn).

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 73: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x-1\right)=\log_{\frac{1}{3}}8x-\log_{\frac{1}{3}}4x$ bằng

A. 5 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$, $x^2-4x-1>0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-4x-1}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{8x}{4x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x-1}=2 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1(ktm)\\ x=5(tm)\end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 5.

Câu 74: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>-\dfrac{1}{2}, x\neq 1$

Ta có: $\log_2(x-1)^2+\log_{\sqrt{2}}(2x+1)=2 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2+\log_2(2x+1)^2=\log_2 4$

$$\Leftrightarrow \log_2\left[(x-1)(2x+1)\right]^2 = \log_2 4 \Leftrightarrow \left(2x^2-x-1\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-1=-2 \\ 2x^2-x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-x+1=0(VN) \\ 2x^2-x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Thử lại ta có một nghiệm $x=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn.

Câu 75: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_8(x+2)^3+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4x+2\right)=0$. Tổng các phần tử của S là

A. 2. **B.** -5. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x+2>0 \\ x^2-4x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ \left[\begin{array}{l} x>2+\sqrt{2} \\ x<2-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2+\sqrt{2} \\ -2<x<2-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ta có: $\log_8(x+2)^3+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4x+2\right)=0 \Leftrightarrow \log_2(x+2)-\log_2\left(x^2-4x+2\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_2\left(x^2-4x+2\right) \Leftrightarrow x+2=x^2-4x+2 \Leftrightarrow x^2-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right. .$$

Đối chiếu với điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;5\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 5.

Câu 76: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\dfrac{1}{2}\log\left(x^2-4x-1\right)=\log 8x-\log 4x$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>2+\sqrt{5}$.

Ta có $\dfrac{1}{2}\log\left(x^2-4x-1\right)=\log 8x-\log 4x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log\left(x^2-4x-1\right)=\log 2$

$$\Leftrightarrow \log\left(x^2-4x-1\right)=\log 4 \Leftrightarrow x^2-4x-1=4 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right. .$$

Do $x>2+\sqrt{5}$ nên $x=5$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình bằng 5.

Câu 77: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(2x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>5$.

Ta có: $3\log_3(2x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3 \Leftrightarrow 3\log_3(2x-1)+3\log_3(x-5)=3$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1).(x-5)=1 \Leftrightarrow (2x-1)(x-5)=3 \Leftrightarrow 2x^2-11x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11+\sqrt{105}}{4}>5 \\ x=\dfrac{11-\sqrt{105}}{4}<5 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có một nghiệm.

Câu 78: Phương trình $\log_x 5.\log_5 x=1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 21.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0; x\neq 1$.

Với điều kiện trên ta có: $\log_x 5=\dfrac{1}{\log_5 x} \Rightarrow \log_x 5.\log_5 x=1$.

Vậy phương trình $\log_x 5.\log_5 x=1$ có 9 nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$.

Câu 79: Phương trình $\log_3(x+2)+\dfrac{1}{2}\log_3(x-5)^2+\log_{\frac{1}{3}}8=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x>-2 \\ x\neq 5 \end{cases}$.

$$\log_3(x+2)+\frac{1}{2}\log_3(x-5)^2+\log_{\frac{1}{3}}8=0 \Leftrightarrow \log_3(x+2)+\log_3|x-5|=\log_3 8$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left[(x+2)|x-5|\right]=\log_3 8 \Leftrightarrow (x+2)|x-5|=8.$$

Trường hợp 1: $x>5$, ta có: $(x+2)(x-5)=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6\ \ (tm) \\ x=-3\ \ (l) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $-2 < x < 5$, ta có: $(x+2)(x-5) = -8 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}\ (tm)$.

Câu 80: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. $4+\sqrt{2}.$ **B.** $8+\sqrt{2}.$ **C.** $6.$ **D.** $6+\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 2x-2>0 \\ (x-3)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ (*)

Với điều kiện (*) phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-2)^2 + \log_2(x-3)^2 = 2 \Leftrightarrow \log_2\left[(2x-2)^2(x-3)^2\right] = 2$

$\Leftrightarrow \left[(2x-2)(x-3)\right]^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2x-2)(x-3) = 2 \\ (2x-2)(x-3) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-8x+4=0\ (1) \\ 2x^2-8x+8=0\ (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có các nghiệm $x = 2+\sqrt{2}\ (N);\ x = 2-\sqrt{2}\ (L)$

Phương trình (2) có nghiệm $x = 2\ (N)$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{2+\sqrt{2};\, 2\right\}$. Tổng các nghiệm bằng $4+\sqrt{2}$.

Câu 81: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(12-2^x) = 5-x$ bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 32. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(12-2^x) = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 12-2^x>0 \\ 12-2^x = 2^{5-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\log_2 12 \\ (2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<\log_2 12 \\ \left[\begin{array}{l} 2^x = 8 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\log_2 12 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Do đó tích các nghiệm của phương trình là $P = 3.2 = 6$.

Câu 82: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+x+1) = 2 + \log_2 x$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$

Ta có $\log_2\left(x^2+x+1\right)=2+\log_2 x \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+x+1\right)=\log_2(4x) \Leftrightarrow x^2+x+1=4x$

$\Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (thoả mãn). Vậy tổng các nghiệm bằng $\dfrac{3}{2}$.

Câu 83: Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $|m|<2023$ và phương trình $\log_{16}(mx)=\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2023. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ mx>0 \end{cases}$

Ta có: $\log_{16}(mx)=\log_2\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \log_2(mx)=4\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2(mx)=\log_2(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x^2+(2-m)x+1=0 \quad (*) \end{cases}$

Để phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép lớn hơn -1 hoặc có 2 nghiệm phân biệt: $x_1>-1\ge x_2$

Trường hợp 1: $\Delta=0 \Leftrightarrow (2-m)^2-4=0 \Leftrightarrow m(m-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$

Nếu $m=0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1\ (KTM)$

Nếu $m=4 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1\ (TM)$

Trường hợp 2: $x_1>-1>x_2 \Leftrightarrow f(-1)<0 \Leftrightarrow m<0$.

Do $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ |m|<2023 \end{cases}$ nên có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Trường hợp 3: Phương trình có một nghiệm $x=-1$ và có một nghiệm lớn hơn -1.

$x=-1 \Rightarrow 1-(2-m)+1=0 \Leftrightarrow m=0$

Với $m=0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ khi đó phương trình có 2 nghiệm: $x_1=x_2=-1\ (KTM)$

Vậy có 2023 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 84: Có bao nhiêu số nguyên dương a để tồn tại đúng hai số thực b phân biệt, thỏa mãn điều kiện $\left(4\log_2^2 b+\log_2 b-5\right)\sqrt{7^b-a}=0$.

A. 48. **B.** 47. **C.** 49. **D.** 46.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(4\log_2^2 b+\log_2 b-5\right)\sqrt{7^b-a}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b>0, b\geq \log_7 a \\ \left[\begin{array}{l}\log_2 b=1 \\ \log_2 b=\dfrac{-5}{4} \\ 7^b=a\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0, b\geq \log_7 a \\ \left[\begin{array}{l}b=2 \\ b=2^{\frac{-5}{4}} \\ b=\log_7 a\end{array}\right.\end{cases}$.

Để tồn tại đúng hai số thực b phân biệt $\Leftrightarrow 2^{\frac{-5}{4}}\leq \log_7 a<2 \Leftrightarrow 7^{2^{\frac{-5}{4}}}\leq a<49 \Rightarrow a\in\{3;4;...;48\}$

Câu 85: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\log_2(x-3)+(2m+5)\log_{\sqrt{x-3}}2=2m$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<5$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2\log_2(x-3)+(2m+5)\log_{\sqrt{x-3}}2=2m\ (1)$

Điều kiện: $3<x\neq 4$ khi đó $(1)\Leftrightarrow \log_2^2(x-3)-m\log_2(x-3)+(2m+5)=0\ (2)$

Đặt $t=\log_2(x-3)$; $x\in(3;5)\setminus\{4\}\Rightarrow t\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$.

Thay t vào (2) ta được: $t^2-mt+(2m+5)=0\ (3)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<5$

$\Leftrightarrow (3)$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1, t_2\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2-8m-20>0 \\ 1.f(1)=m+6>0 \\ f(0)=2m+5\neq 0 \\ \dfrac{S}{2}=\dfrac{m}{2}<1\end{cases}$, với $f(t)=t^2-mt+(2m+5)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty;-2)\cup(10;+\infty) \\ m\in(-6;2) \\ m\neq -\dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-6;-2) \\ m\neq -\dfrac{5}{2}\end{cases}$.

Câu 86: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi x tồn tại đúng hai số thực y thỏa mãn $\left(\log_2^2 y-3\log_2 y+2\right)\sqrt{3^y-x}=0$?

A. 78. **B.** 72. **C.** 79. **D.** 73.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\log_2^2 y-3\log_2 y+2\right)\sqrt{3^y-x}=0$

Điều kiện: $\begin{cases} y>0 \\ y\ge \log_3 x \end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2^2 y-3\log_2 y+2=0 \\ 3^y-x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=4 \\ y=\log_3 x \end{array}\right.$.

Để tồn tại đúng hai số thực $y \Leftrightarrow 2\le \log_3 x<4 \Leftrightarrow 9\le x<81 \Rightarrow x\in\{9;10;...;80\}$.

Câu 87: Biết tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(4^x+48\right)=x+4$ bằng $a+b\log_2 3$ với $(a;b\in\mathbb{Z})$. Tính $2a+b$.

A. $2a+b=8$. **B.** $2a+b=5$. **C.** $2a+b=9$. **D.** $2a+b=6$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2\left(4^x+48\right)=x+4 \Leftrightarrow 4^x+48=2^{x+4} \Leftrightarrow 2^{2x}-16.2^x+48=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=4 \\ 2^x=12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\log_2 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2+\log_2 3 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm là: $4+\log_2 3 \Rightarrow a=4; b=1 \Rightarrow 2a+b=9$.

Câu 88: Cho hai số thực x, y thỏa $1<x<y$ và $\log_x\left(y^4\right)+\log_y\left(x^5\right)=9$. Tính $\log_{xy}\dfrac{x^5+y^4}{2}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{20}{9}$. **D.** $\dfrac{45}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=\log_x y\,(t>1) \Leftrightarrow y=x^t$, khi đó $\log_x\left(x^{4t}\right)+\log_{x^t}\left(x^5\right)=9 \Leftrightarrow 4t+\dfrac{5}{t}=9 \Rightarrow t=\dfrac{5}{4}$.

$\Rightarrow y=x^{\frac{5}{4}} \Rightarrow \begin{cases} y^4=x^5 \\ xy=x^{\frac{9}{4}} \end{cases} \Rightarrow \log_{xy}\dfrac{x^5+y^4}{2}=\log_{x^{\frac{9}{4}}}\dfrac{2x^5}{2}=\dfrac{20}{9}$.

3. Bất phương trình mũ

Câu 89: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}>3$ là

A. $[-2;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 3 \Leftrightarrow x+1 < -1 \Leftrightarrow x < -2$.

Câu 90: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x-2} \geq 2$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow x-2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Câu 91: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x - 5 \leq 0$ là

A. $S=(-\infty;\log_2 5]$. **B.** $S=(0;\log_2 5]$. **C.** $S=[0;\log_2 5]$. **D.** $S=(0;\log_5 2]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow 2^x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \log_2 5$.

Tập nghiệm của bất phương trình $2^x - 5 \leq 0$ là $S=(-\infty;\log_2 5]$.

Câu 92: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x > 27$

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(9;+\infty)$ **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x > 27 \Leftrightarrow 3^x > 3^3 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in (3;+\infty)$.

Câu 93: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{27}$ là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có cơ số $0 < a = \frac{1}{3} < 1$.

Nên bất phương trình đã cho tương đương $2x-1 \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \Leftrightarrow 2x-1 \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;2]$.

Câu 94: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \ge \frac{1}{9}$ là

A. $(-\infty;0)$. **B.** $[-4;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;4]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3^{x+2} \ge \frac{1}{9} \Leftrightarrow x+2 \ge \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow x+2 \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -4$.

Câu 95: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} < 4$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x+1} < 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} < 2^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$. Vậy tập của bất phương trình là $(-\infty;1)$.

Câu 96: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{2x+3} > \frac{1}{25}$ là

A. $\left(-\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $5^{2x+3} > \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{2x+3} > 5^{-2} \Leftrightarrow 2x+3 > -2 \Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$.

Câu 97: Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} < 16$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1]$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{x+1} < 16 \Leftrightarrow 4^{x+1} < 4^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$

Vậy tập nghiệm của bài toán là $(-\infty;1)$.

Câu 98: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x-2 \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$.

Câu 99: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \le \left(\frac{11}{17}\right)^{x^2}$ là

A. $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$. **B.** $[0;3]$. **C.** $[-3;0]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \le \left(\frac{11}{17}\right)^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \le \left(\frac{17}{11}\right)^{-x^2}$

$\Leftrightarrow -x^2 \ge 3x \Leftrightarrow x^2+3x \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 0 \Leftrightarrow x \in [-3;0]$.

Câu 100: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \ge 8$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^x \ge 8 \Leftrightarrow 2^x \ge 2^3 \Leftrightarrow x \ge 3$.

Vạy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[3;+\infty)$.

Câu 101: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1} > 9-4\sqrt{5}$

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1} > 9-4\sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1} > \left(\sqrt{5}-2\right)^2 \Leftrightarrow x+1<2 \Leftrightarrow x<1$.

Câu 102: Số nghiệm nguyên trong khoảng $(-50;50)$ của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \ge 0$ là

A. 100. **B.** 98. **C.** 99. **D.** 51.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=4^x, (t>0)$ ta được $t^2-5t+4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<t\le 1 \\ t \ge 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<4^x\le 1 \\ 4^x \ge 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x \ge 1\end{array}\right.$

Kết hợp $\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ x\in(-50;50)\end{cases}$ nên có 99 giá trị x thỏa mãn.

Câu 103: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{x}} - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} > 15$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $2a+5b$ bằng

A. -5. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $t = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$, $t > 0$.

Bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 15 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 5 \\ t < -3\ (\text{KTM}) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} > 5 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

Vậy tập nghiệm là $S = (-1;0)$. Do đó $2a + 5b = -2$.

Câu 104: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}} - 5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} > 14$ có tập nghiệm $S = (a;b)$. Giá trị của biểu thức $3a + 4b$ bằng

A. -3. **B.** -2. **C.** -5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}} - 5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} > 14 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}} - 5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} - 14 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} > 7 \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} < -2\ (vn) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm $S = (-1;0)$, do đó $3a + 4b = -3$.

Câu 105: Số nghiệm nguyên của phương trình $\left(9^x - 5.6^x - 6.4^x\right)\sqrt{128 - 2^{\sqrt{x}}} > 0$.

A. 45 **B.** 48 **C.** 49. **D.** 44.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\left(9^x - 5.6^x - 6.4^x\right)\sqrt{128 - 2^{\sqrt{x}}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 5.6^x - 6.4^x > 0 \\ 128 - 2^{\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x > 6 \\ \sqrt{x} < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \log_{1,5} 6 < x < 49$$

$\Rightarrow x \in \{5;6;7;...;48\}$. Vậy bất phương trình đã cho có 44 nghiệm nguyên.

Câu 106: Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}}>0$ là

A. 45. **B.** 48. **C.** 49. **D.** 44.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases}128-2^{\sqrt{x}}\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 49$.

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow\begin{cases}128-2^{\sqrt{x}}>0\\ 9^x-5.6^x-6.4^x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x<49\\ \left(\frac{9}{4}\right)^x-5.\left(\frac{6}{4}\right)^x-6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x<49\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5.\left(\frac{3}{2}\right)^x-6>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x<49\\ \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x>6\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x<-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x<49\\ x>\log_{\frac{3}{2}}6\end{cases}\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}}6<x<49.$$

Kết hợp với điều kiện xác định, và x là số nguyên, nên $x\in\{5,6,7,...,47,48\}$.

Vậy có 44 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu đề.

Câu 107: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x}\ge 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x}$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $[-1:3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x}\ge 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x}\Leftrightarrow 2^5.2^{x^2+2x}-5.2^{x^2+2x}\ge 3^2.3^{x^2+2x}-3^{x^2+2x}$

$$\Leftrightarrow 27.2^{x^2+2x}\ge 8.3^{x^2+2x}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+2x}\le\frac{27}{8}\Leftrightarrow x^2+2x\le\log_{\frac{3}{2}}\frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\le 3\Leftrightarrow x^2+2x-3\le 0\Leftrightarrow -3\le x\le 1.$$

Câu 108: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x<4-3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x<4-3^{1-x}\Leftrightarrow 3^x<4-\frac{3}{3^x}\Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3<0\Leftrightarrow 1<3^x<3\Leftrightarrow 0<x<1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0;1)$ do đó $a=0,b=1$.

Câu 109: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x-2 \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$.

Câu 110: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2x > x-2 \Leftrightarrow x > -2$. Vậy $S=(-2;+\infty)$.

Câu 111: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x} \ge 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x}$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $[-1:3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x} \ge 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x} \Leftrightarrow 2^5.2^{x^2+2x}-5.2^{x^2+2x} \ge 3^2.3^{x^2+2x}-3^{x^2+2x}$

$\Leftrightarrow 27.2^{x^2+2x} \ge 8.3^{x^2+2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+2x} \le \frac{27}{8} \Leftrightarrow x^2+2x \le \log_{\frac{3}{2}}\frac{27}{8}$

$\Leftrightarrow x^2+2x \le 3 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$.

Câu 112: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2}$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 5^{3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 3x^2 < 5x+2 \Leftrightarrow 3x^2-5x-2<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 2$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0;1\}$.

Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

Câu 113: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2}$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 5^{3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 3x^2 < 5x+2 \Leftrightarrow 3x^2-5x-2<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<2$.

Kết hợp điều kiện $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0;1\}$

Câu 114: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} < 32$ là

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2^{x^2-1} < 2^5 \Leftrightarrow x^2-1<5 \Leftrightarrow x^2<6 \Leftrightarrow -\sqrt{6}<x<\sqrt{6}.$

Câu 115: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S=(1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;1)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2<2x \Leftrightarrow x>2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Câu 116: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^x+2\right)\left(4^{x+1}-8^{2x+1}\right)\le 0$

A. $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;4]$ **D.** $[4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Do $3^x+2>0\ \forall x$ nên $\left(3^x+2\right)\left(4^{x+1}-8^{2x+1}\right)\le 0 \Leftrightarrow 4^{x+1}-8^{2x+1}\le 0 \Leftrightarrow 4^{x+1}\le 8^{2x+1}$

$\Leftrightarrow 2^{2x+2} \le 2^{6x+3} \Leftrightarrow 2x+2 \le 6x+3 \Leftrightarrow 4x \ge -1 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{4}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Câu 117: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x} \Leftrightarrow 2^{-x^2+2} > 2^{4-3x} \Leftrightarrow -x^2+2 > 4-3x \Leftrightarrow -x^2+3x-2>0$

$\Leftrightarrow x \in (1;2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x}$ là $(1;2)$.

Câu 118: Bất phương trình $3^{|x|} < 81$ có tập nghiệm là

A. $[0;4]$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(-4;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{|x|} < 81 \Leftrightarrow 3^{|x|} < 3^4 \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

Câu 119: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+2} \le 25$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $5^{x+2} \le 25 \Leftrightarrow 5^{x+2} \le 5^2 \Leftrightarrow x+2 \le 2 \Leftrightarrow x \le 0$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty;0]$.

Câu 120: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} > \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} < 2-\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x < 1$.

Do vậy, tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [0;1)$.

Câu 121: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -3$ là

A. $(-1;5)$. **B.** $(7;+\infty)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $[-1;7)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7$.

Câu 122: Số các số nguyên dương x thỏa mãn $4^x + 2023(x+1) < (x+2024).2^x$ là:

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^x + 2023(x+1) < (x+2024).2^x \Leftrightarrow 4^x - 2024.2^x + 2023 - (2^x - 2023).x < 0$

$\Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - 2023) - (2^x - 2023).x < 0 \Leftrightarrow (2^x - 2023)(2^x - x - 1) < 0$

Do x nguyên dương nên $2^x > x+1 \Rightarrow 2^x - x - 1 > 0$

Do đó bpt $\Leftrightarrow 2^x < 2023 \Rightarrow x \in \{1;2;....;10\}$.

Vậy có 10 số nguyên dương x thỏa mãn.

Câu 123: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1} - \sqrt{2}\right)\left(2^x - y\right) < 0$?

A. 2047. **B.** 1022. **C.** 1023. **D.** 1024.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\left(2^{x+1} - \sqrt{2}\right)\left(2^x - y\right) < 0 \Leftrightarrow \left(2^x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(2^x - y\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ 2^x - y < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 0 \\ 2^x - y > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x > \dfrac{-1}{2} \\ x < \log_2 y, y > 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < \dfrac{-1}{2} \\ x > \log_2 y, y > 0 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Nhận thấy (2) không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $y > 0$ nên bất phương trình có không quá 10 nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 2^x < y \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \log_2 y.$$

Nếu $\log_2 y > 10 \Rightarrow x \in \{0;1;2;...;10\}$ đều là nghiệm, do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow \log_2 y \le 10 \Leftrightarrow y \le 1024.$

Mà y là số nguyên dương nên $y \in \{1;2;3;...;1023;1024\}$.

Vậy có 1024 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 124: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x + 12 \le 2^{x+1} + 2.3^{x+1}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $6^x + 12 \le 2^{x+1} + 2.3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x.3^x + 12 \le 2.2^x + 6.3^x \Leftrightarrow 2^x\left(3^x - 2\right) - 6\left(3^x - 2\right) \le 0$

$$\Leftrightarrow \left(3^x - 2\right)\left(2^x - 6\right) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x - 2 \le 0 \\ 2^x - 6 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x - 2 \ge 0 \\ 2^x - 6 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \log_3 2 \\ x \ge \log_2 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le \log_2 6 \\ x \ge \log_3 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \log_3 2 \le x \le \log_2 6.$$

Các nghiệm nguyên của bất phương trình là: 1, 2.

Vậy bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Câu 125: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{2x-3m} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{-2x+3m} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 1 \ge -2x + 3m$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(m+1)x + 1 - 3m \ge 0$, $(*)$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \le 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (1-3m) \le 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 5m \le 0 \Leftrightarrow -5 \le m \le 0.$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Câu 126: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;100]$ để bất phương trình $4^{2x-m} - 4.2^{3x-2m} + 4.2^{x-m} < 1$ nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4]$?

A. 99. **B.** 92. **C.** 98. **D.** 93.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^{2x-m} - 4.2^{3x-2m} + 4.2^{x-m} < 1 \Leftrightarrow 2^{4x} - 4.2^{3x} + 4.2^{x}.2^{m} < 2^{2m}$

$$\Leftrightarrow \left(2^m - 2^{2x}\right)\left(2^m + 2^{2x} - 4.2^x\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^m > 2^{2x} \\ 2^m > 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (1) \\ \begin{cases} 2^m < 2^{2x} \\ 2^m < 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

$$\forall x \in (-\infty; 4] \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2^{2x} \le 2^8 \\ -192 \le 4.2^x - 2^{2x} \le 2^2 \end{cases}.$$

Giải $\begin{cases} 2^m > 2^{2x} \\ 2^m > 4.2^x - 2^{2x} \end{cases}$ (1)

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m > 2^8 \\ 2^m > 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 8$. Do m nguyên thuộc đoạn $[0;100]$ nên có $100 - 8 = 92$ giá trị của m.

Giải $\begin{cases} 2^m < 2^{2x} \\ 2^m < 4.2^x - 2^{2x} \end{cases}$ (2)

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m \le 0 \\ 2^m < -192 \end{cases}$ không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Vậy có 92 giá trị của m.

4. Bất phương trình logarit

Câu 127: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \le 1$ là

A. $\left[\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$. **B.** $\left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$. **C.** $(-\infty; \log_2 5)$. **D.** $\left(-\infty; \dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \le 1 \Leftrightarrow x-2 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \ge \frac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm $T = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Câu 128: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x+4) \le 3$ là:

A. $(-4;23]$. **B.** $(-\infty;23]$. **C.** $(-\infty;27]$. **D.** $(-4;5]$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > -4$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow x+4 \le 27 \Leftrightarrow x \le 23$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x \in (-4;23]$.

Câu 129: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) < -2.$ là

A. $(12;+\infty)\cdot$ **B.** $(-\infty;12)\cdot$ **C.** $\left(-\infty;\frac{7}{3}\right)\cdot$ **D.** $(3;12)\cdot$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 3$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-3) < -2 \Leftrightarrow x-3 > 9 \Leftrightarrow x > 12.$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (12;+\infty)\cdot$

Câu 130: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x) < \log(x+6)$ là:

A. $[0;6)$ **B.** $(0;6)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-\infty;6)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} 2x > 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Vì cơ số $a = 10 > 1$ nên bất phương trình $\log(2x) < \log(x+6)$

$\Leftrightarrow 2x < x+6 \Leftrightarrow x < 6$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $0 < x < 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0;6)$.

Câu 131: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+10) < \log_{\frac{1}{3}}(4x-9)$

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{\frac{1}{3}}(x+10)<\log_{\frac{1}{3}}(4x-9)\Leftrightarrow\begin{cases}x+10>4x-9\\4x-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{19}{3}\\x>\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{9}{4}<x<\dfrac{19}{3}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Câu 132: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 2x<\log_2(x+2)$ là

A. $(0;2)$. **B.** $[0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2 2x<\log_2(x+2)\Leftrightarrow\begin{cases}2x<x+2\\2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;2)$

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 2x<\log_2(x+2)$ là $(0;2)$.

Câu 133: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\log_3^2 x-2\log_3(3x)-1\le 0$. Số phần tử của tập S là

A. 27. **B.** 230. **C.** 103. **D.** 54.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log_3^2 x-2\log_3(3x)-1\le 0\Leftrightarrow\log_3^2 x-2\log_3 x-3\le 0\Leftrightarrow-1\le\log_3 x\le 3\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\le x\le 27$.

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;\ 2;\ 3;...\ 27\}$.

Vậy có 27 số nguyên x.

Câu 134: Bất phương trình $\log_2^2 x-4\log_2 x+3\ge 0$ có tập nghiệm S là

A. $S=(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;0]\cup[\log_2 5;+\infty)$.

C. $S=(0;2]\cup[8;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;2]\cup[8;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\log_2^2 x-4\log_2 x+3\ge 0$.

Điều kiện $x>0$.

Đặt $t=\log_2 x$, bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-4t+3\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 3 \\ t\le 1 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x\ge 3 \\ \log_2 x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 8 \\ x\le 2 \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;2]\cup[8;+\infty)$.

Câu 135: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(5^x-125\right)\left(\log_3{}^2 x-8\log_3 x+15\right)<0$

A. 242. **B.** 217. **C.** 220. **D.** 215.

Lời giải

Chọn B

Giải phương trình: $\left(5^x-125\right)\left(\log_3{}^2 x-8\log_3 x+15\right)<0$ với điều kiện $x>0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 5^x-125<0 \\ \log_3{}^2 x-8\log_3 x+15>0 \end{array}\right.$ *hay* $\left\{\begin{array}{c} 5^x-125>0 \\ \log_3{}^2 x-8\log_3 x+15<0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5^x<5^3 \\ \left[\begin{array}{l} \log_3 x<3 \\ \log_3 x>5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 5^x>5^3 \\ 3<\log_3 x<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<3 \\ \left[\begin{array}{l} x<27 \\ x>243 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x>3 \\ 27<x<243 \end{array}\right. \Leftrightarrow 27<x<243$$

x nguyên $\Rightarrow x=1,2,28,29,...,242$ có 217 số.

Câu 136: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn điều kiện $\left(7^x-49\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+6\right)<0$?

A. 728. **B.** 726. **C.** 725. **D.** 729.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\left(7^x-49\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+6\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} 7^x-49>0 \\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6<0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{c} 7^x-49<0 \\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6>0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} 7^x>49 \\ 1<\log_3 x<6 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 7^x<49 \\ \left[\begin{array}{l} \log_3 x<1 \\ \log_3 x>6 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} x>2 \\ 3<x<3^6 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<2 \\ \left[\begin{array}{l} 0<x<3 \\ x>3^6 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ 3<x<3^6 \end{array}\right. \text{ mà } x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{1;4;5;...;728\}.$$

Vậy có 726 số thỏa mãn.

Câu 137: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $(1;3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1 < x < 5$

Ta có: $2\log_2(x-1) \le \log_2(5-x)+1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \le \log_2(10-2x)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \le 10-2x \Leftrightarrow x^2 \le 9 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$.

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm là: $S = (1;3]$

Câu 138: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2) < 1$ là

A. $(-\infty;8)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;8)$. **D.** $(8;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\log(x+2) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ x+2<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<8 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2) < 1$ là $T = (-2;8)$

Câu 139: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_4(x+6) < 2 - 2\log_4 x$ bằng

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$.

Ta có: $\log_4(x+6) < 2 - 2\log_4 x \Leftrightarrow \log_4(x+6) < \log_4 \frac{16}{x^2}$

$\Leftrightarrow x+6 < \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2-2\sqrt{3} \\ -2 < x < -2+2\sqrt{3}. \end{array}\right.$

So với điều kiện ta có $0 < x < -2+2\sqrt{3}$.

Suy ra nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $x = 1$.

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm nguyên.

Câu 140: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(6-5x) > 0$ là

A. $S = (1;+\infty)$. **B.** $S = \left(\frac{2}{3};1\right)$. **C.** $S = \left(1;\frac{6}{5}\right)$. **D.** $S = \left(1;\frac{6}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 6-5x \\ 6-5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \dfrac{6}{5}$.

Vậy $S = \left(1;\dfrac{6}{5}\right)$.

Câu 141: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S = (-\infty;2)$. **B.** $S = \left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $S = (2;+\infty)$. **D.** $S = (-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2x-1 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm S của bất phương trình đã cho là $S = \left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Câu 142: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x)$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a.b$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 < 1-x \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < -2 \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < x < -\dfrac{2}{3}$.

Khi đó $a.b = -\dfrac{3}{2}.\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 1$.

Câu 143: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) < \log_2(3-x)$ là

A. $S = (-1;1)$. **B.** $S = (1;+\infty)$. **C.** $S = (1;3]$. **D.** $S = (-\infty;1)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Ta có: $\log_2(x+1) < \log_2(3-x) \Rightarrow x+1 < 3-x \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;1)$.

Câu 144: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)+\log_2(3x-3)<0$ là

A. $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(1;2)$.

C. $S=(-1;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)+\log_2(3x-3)<0 \Leftrightarrow \log_2(3x-3)<\log_2\left(x^2-1\right)$

$\Leftrightarrow 3x-3<x^2-1 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Câu 145: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-1)>4$.

A. $S=(-\infty;17)$. **B.** $S=(1;17)$. **C.** $S=(17;+\infty)$. **D.** $S=(0;17)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(x-1)>4 \Leftrightarrow x-1>2^4 \Leftrightarrow x>17 \Leftrightarrow x\in(17;+\infty)$.

Câu 146: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)\le 3$ là

A. $(-\infty;9]$. **B.** $[1;9]$. **C.** $(1;9]$. **D.** $(1;10]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(x-1)\le 3 \Leftrightarrow 0<x-1\le 8 \Leftrightarrow 1<x\le 9$.

Câu 147: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)>2$ là

A. $(-5;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1$

Ta có: $\log_2(x-1)>2 \Leftrightarrow x-1>4 \Leftrightarrow x>5$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $x>5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $(5;+\infty)$.

Câu 148: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(x+1)<2$ là

A. $S=(0;8)$. **B.** $S=(-\infty;8)$. **C.** $S=(8;+\infty)$. **D.** $S=(-1;8)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(x+1)<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+1<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<8 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<8$

Câu 149: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 26. **B.** 25. **C.** vô số. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

Xét $f(x)=\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]$:

Điều kiện xác định: $x>-25$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2}-9^x=0 \\ \log_3(x+25)-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	-25		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-25;0]\cup\{2\}$.

Suy ra, có 26 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 150: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(7x+2)\le 2$ là

A. $(-\infty;14)$. **B.** $\left[-\frac{2}{7};14\right]$. **C.** $(-\infty;14]$. **D.** $\left(-\frac{2}{7};14\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log(7x+2)\le 2 \Leftrightarrow 0<7x+2<10^2 \Leftrightarrow -\frac{2}{7}<x\le 14.$

Vậy tập nghiệm $s=\left(-\frac{2}{7};14\right]$.

Câu 151: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<2$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(5;+\infty)$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_2(x-1)<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1<2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(1;5)$.

Câu 152: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(4-x)>2$ là

A. $(-5;4)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(-\infty;-5]$. **D.** $(-\infty;-5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(4-x)>2\Leftrightarrow\begin{cases}4-x>0\\4-x>3^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\x<-5\end{cases}\Leftrightarrow x<-5$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-\infty;-5)$.

Câu 153: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ là:

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;2)$. **C.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $S=(-1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases}x+1>0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\Leftrightarrow x+1>2x-1\Leftrightarrow x<2\xrightarrow{x>\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<x<2$.

Câu 154: Số các giá trị nguyên của x thỏa $\left(2^{x^2}-16\right)(\log_3 x-4)\le 0$ là

A. Vô số. **B.** 80. **C.** 17. **D.** 78.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\left(2^{x^2}-16\right)(\log_3 x-4)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}-16\ge 0\\\log_3 x-4\le 0\end{cases}\\\begin{cases}2^{x^2}-16\le 0\\\log_3 x-4\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\ge 4\\0\le x\le 3^4\end{cases}\\\begin{cases}x^2\le 4\\x\ge 3^4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le -2\end{array}\right.\\0\le x\le 81\end{cases}\\\begin{cases}-2\le x\le 2\\x\ge 81\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 2\le x\le 81.$$

Do x nguyên nên có 80 giá trị thỏa mãn.

Câu 155: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thoả mãn bất phương trình $\log_3\left(\frac{2x^2-7}{625}\right)\le\log_5\left(\frac{2x^2-7}{81}\right)$

.Số tập hợp con của S là

A. 2^{316}. **B.** 2^{318}. **C.** 319. **D.** 2^{319}.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của bất phương trình $2x^2-7>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.$ (*)(do x nguyên).

Bất phương trình tương đương với $\log_3\left(2x^2-7\right)-4\log_3 5\le \log_5\left(2x^2-7\right)-4\log_5 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2x^2-7\right)-\log_5 3.\log_3\left(2x^2-7\right)\le 4\left(\log_3 5-\log_5 3\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2x^2-7\right)\left(1-\log_5 3\right)\le 4\left(\dfrac{1-\log_5{}^2 3}{\log_5 3}\right) \Leftrightarrow \log_3\left(2x^2-7\right)\le \dfrac{4\left(1+\log_5 3\right)}{\log_5 3}$

$\Leftrightarrow 2x^2-7\le 50625 \Leftrightarrow -\sqrt{25316}\le x\le \sqrt{25316} \Leftrightarrow -159\le x\le 159$ (do x nguyên)

Kết hợp với điều kiện (*) ta có tập S có 316 số nguyên. Do đó số tập con của S là 2^{316}.

Câu 156: Số nghiệm nguyên của bất phương trình thỏa mãn $\left[1-\log_2(x+8)\right]\sqrt{2.4^{x+1}-17.2^x+2}\ge 0$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x+8>0\\ 2.4^{x+1}-17.2^x+2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-8\\ \left[\begin{array}{l} 2^x\ge 2\\ 2^x\le \dfrac{1}{8}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-8\\ \left[\begin{array}{l} x\ge 1\\ x\le -3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1\\ -8<x\le -3\end{array}\right.$.

Khi đó: $\left[1-\log_2(x+8)\right]\sqrt{2.4^{x+1}-17.2^x+2}\ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2.4^{x+1}-17.2^x+2=0\\ x>-8\end{cases}\\ \begin{cases} 2.4^{x+1}-17.2^x+2>0\\ 1-\log_2(x+8)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-3\end{array}\right.\\ x>-8\end{cases}\\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 1\\ -8<x<-3\end{array}\right.\\ \log_2(x+8)\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-3\end{array}\right.\\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 1\\ -8<x<-3\end{array}\right.\\ x\le -6\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-3\end{array}\right.\\ -8<x\le -6\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $x\in\mathbb{Z}$ ta có trường hợp này các giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x\in\{-7;-6;-1;3\}$.

Câu 157: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1$ là:

A. $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$. **B.** $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$.

C. $S=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. **D.** $S=\left[-\sqrt{5};1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ \log_2\left(x^2-1\right)>0 \\ \log_2\left(x^2-1\right)\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1>1 \\ x^2-1\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{2} \\ x>\sqrt{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\le -\sqrt{5} \\ x\ge \sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -\sqrt{5} \\ x\ge \sqrt{5} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 158: Tổng các giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\log_x\left(\log_3\dfrac{9^x-328}{78}\right)<1$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x>0, x\ne 1 \\ 9^x>328 \end{cases} \Leftrightarrow x>\log_9 328$.

Khi đó: $\log_x\left(\log_3\dfrac{9^x-328}{78}\right)<1 \Leftrightarrow \log_3\dfrac{9^x-328}{78}<x$

$\Leftrightarrow 9^x-328<78.3^x \Leftrightarrow 3^{2x}-78.3^x-328<0 \Leftrightarrow 3^x<82 \Leftrightarrow x<\log_3 82$.

So với điều kiện, suy ra $\log_9 328<x<\log_3 82$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{3;4\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\log_x\left(\log_3\dfrac{9^x-328}{78}\right)<1$ là 7.

Câu 159: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 28. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\ge 0 \\ 32-2^{x-1}\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\le 0 \\ 32-2^{x-1}\le 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right) \geq \log_3\left(x+31\right) \\ 2^{x-1} \leq 32\end{cases} \\ \begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right) \leq \log_3\left(x+31\right) \\ 2^{x-1} \geq 32\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+1 \geq x+31 \\ x+31>0 \\ 2^{x-1} \leq 2^5\end{cases} \\ \begin{cases}x^2+1 \leq x+31 \\ 2^{x-1} \geq 2^5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x-30 \geq 0 \\ x>-31 \\ x \leq 6\end{cases} \\ \begin{cases}x^2-x-30 \leq 0 \\ x \geq 6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-31<x \leq -5 \\ x=6\end{array}\right.$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-30;-29;-28;....;-6;-5;6\}$

Vậy có 27 số nguyên x thỏa đề.

Câu 160: Bất phương trình $\log_2\left(x^2-x-2\right) \geq \log_{0,5}\left(x-1\right)+1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc [0;2023] ?

A. 2019. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2\left(x^2-x-2\right) \geq \log_{0,5}\left(x-1\right)+1$

Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0 \\ x^2-x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1 \\ \left[\begin{array}{l}x<-1 \\ x>2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\log_2\left(x^2-x-2\right) \geq \log_{0,5}\left(x-1\right)+1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-x-2\right) \geq -\log_2\left(x-1\right)+1$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-x-2\right)\left(x-1\right) \geq 1 \Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(x-1\right) \geq 2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in \left[1-\sqrt{2};0\right] \cup \left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$

So với điều kiện $\Rightarrow x \in \left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$

Vậy có 2021 nghiệm nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 161: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\left(8x^2\right)+\log_3\left(3x^3\right) \geq \log_2 x.\log_3 x$?

A. 27. **B.** 8. **C.** 134. **D.** 133.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Với điều kiện trên, bpt tương đương với:

Ta có: $3+2\log_2 x+1+3\log_3 x-\log_2 x.\log_3 x \geq 0$

$\Leftrightarrow 2\log_2 x+3\log_3 2.\log_2 x-\log_2 x.\log_3 2.\log_2 x+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow -\log_3 2.\left(\log_2 x\right)^2+\left(2+3\log_3 2\right).\log_2 x+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{-0,897...}_{A} \leq \log_2 x \leq \underbrace{7,067...}_{B} \Leftrightarrow 0,536... \leq x \leq 134,087...$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{1;2;...;134\}$.

Câu 162: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(2x).\log\left(\frac{100}{x}\right) > 2$?

A. 198. **B.** 48. **C.** 96. **D.** 149.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình: $\log_2(2x).\log\left(\frac{100}{x}\right) > 2 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)(2-\log x) > 2$

$\Leftrightarrow 2\log_2 x - \log x - \log_2 x.\log x > 0 \Leftrightarrow 2\log_2 x - \log 2.\log_2 x - \log_2 x.\log x > 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x(2-\log 2-\log x) > 0 \Leftrightarrow \log_2 x(\log 50 - \log x) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x > 0 \\ \log 50 - \log x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x < 0 \\ \log 50 - \log x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 50 \\ x < 1 \vee 50 < x \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x < 50.$$

Câu 163: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(\log_3(x^2+10) - \log_3(x+40)\right)\left(32 - 2^{x-1}\right) \geq 0$?

A. Vô số. **B.** 38. **C.** 36. **D.** 37.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\log_3(x^2+10) - \log_3(x+40)\right)\left(32 - 2^{x-1}\right) \geq 0$

Điều kiện: $x + 40 > 0 \Leftrightarrow x > -40$ (*).

Xét $\left[\begin{array}{l} \log_3(x^2+10) - \log_3(x+40) = 0 \\ 32 - 2^{x-1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x^2+10) = \log_3(x+40) \\ 32 = 2^{x-1} \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 10 = x + 40 \\ 5 = x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 30 = 0 \\ x = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 6 \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình.

Xét $\begin{cases} \log_3(x^2+10) - \log_3(x+40) \neq 0 \\ 32 - 2^{x-1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq 6 \end{cases}$.

Khi đó $\left(\log_3(x^2+10) - \log_3(x+40)\right)\left(32 - 2^{x-1}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2+10) - \log_3(x+40) > 0 \\ 32 - 2^{x-1} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \log_3(x^2+10) - \log_3(x+40) < 0 \\ 32 - 2^{x-1} < 0 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2+10) > \log_3(x+40) \\ 32 > 2^{x-1} \end{cases} \cup \begin{cases} \log_3(x^2+10) < \log_3(x+40) \\ 32 < 2^{x-1} \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+10 > x+40 \\ 5 > x-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+10 < x+40 \\ 5 < x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-30 > 0 \\ x-6 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-x-30 < 0 \\ x-6 > 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \cup x > 6 \\ x < 6 \end{cases} \cup \begin{cases} -5 < x < 6 \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x < -5$.

Từ các trường hợp trên, ta có nghiệm của bất phương trình là $-40 < x \le -5 \cup x = 6$.

Mà x nguyên nên ta có: $x \in \{-39;-38;...-5;6\}$.

Câu 164: Cho bất phương trình $\log_3(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \ge \log_4(x+1)^2 - \log_3\left(\dfrac{x-2}{4}\right) - 2$. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$.

Trên điều kiện, bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3\left[\dfrac{(x+1)(x-2)}{4}\right] \ge \log_2\left[\dfrac{(x+1)(x-2)}{4}\right]$

$\Leftrightarrow \log_3 2.\log_2\left[\dfrac{(x+1)(x-2)}{4}\right] \ge \log_2\left[\dfrac{(x+1)(x-2)}{4}\right]$

$\Leftrightarrow \log_2\left[\dfrac{(x+1)(x-2)}{4}\right] \le 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \le 4 \Leftrightarrow -2 \le x \le 3$.

Kết hợp điều kiện $x > 2$, ta được: $2 < x \le 3$ và $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3$.

Câu 165: Số nghiệm nguyên thuộc $[-100; 100]$ của bất phương trình $\log_5(3^x-1).\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{3^x-1}{25}\right) \le -143$ là

A. 81. **B.** 79. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của bất phương trình là $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (*).

Ta có, $\log_5(3^x-1).\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{3^x-1}{25}\right) \le -143 \Leftrightarrow \log_5(3^x-1)\left[\log_5\left(\dfrac{25}{3^x-1}\right)\right] \le -143$

$\Leftrightarrow \log_5\left(3^x-1\right)\left[2-\log_5\left(3^x-1\right)\right]+143\le 0$ (1)

Đặt $t=\log_5\left(3^x-1\right)$, bất phương trình (1) trở thành: $t\left(2-t\right)+143\le 0$

$\Leftrightarrow -t^2+2t+143\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -11 \\ t\ge 13 \end{array}\right.$.

Với $t\le -11\Rightarrow \log_5\left(3^x-1\right)\le -11\Rightarrow 3^x-1\le 5^{-11}\Rightarrow x<1$.

Do x nguyên thoả điều kiện $x>0$ nên trường hợp này không tồn tại giá trị x.

Với $t\ge 13\Rightarrow \log_5\left(3^x-1\right)\ge 13\Rightarrow 3^x-1\ge 5^{13}\Rightarrow 3^x\ge 1+5^{13}$.

Do x nguyên thoả điều kiện $x>0$ và $x\in\left[-100;100\right]$ nên chọn $x\in\left\{20,21,...,100\right\}$.

Vậy có 81 số nguyên x thoả mãn điều kiện.

5. Vận dụng kiến thức vào toán thực tế

Câu 166: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $8,4\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo(lãi kép). Hỏi sau ít nhất n năm $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ thì người đó có được số tiền nhiều hơn 200 triệu đồng.

A. $n=8$. **B.** $n=9$. **C.** $n=10$. **D.** $n=7$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $100\left(1+8,4\%\right)^n>200\Rightarrow\left(1+8,4\%\right)^n>2\Rightarrow n>\log_{(1+8,4\%)}2\approx 8,59$.

Câu 167: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,1\%$ / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 13 năm. **D.** 10 năm.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tiền ban đầu người đó gửi là A (đông), $A>0$.

Số tiền lãi và gốc sau n năm là $T=a\left(1+6,1\%\right)^n$.

Ta có $a\left(1+6,1\%\right)^n=2a\Leftrightarrow\left(1+6,1\%\right)^n=2\Leftrightarrow n=\log_{1+6,1\%}2\approx 11,7$.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu

Câu 168: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất $8\%/$ năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức lãi kép, ta có: $A = A_0\left(1+r\%\right)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Sau 7 năm người đó có số tiền là $A = 18.\left(1+8\%\right)^7 \approx 30,85$.

Câu 169: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 13 năm. **B.** 12 năm. **C.** 14 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải

Chọn B

Ta có số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được sau n năm là: $S_n = 50.\left(1+6\%\right)^n = 50.1,06^n$

$S_n > 100 \Leftrightarrow 50.1,06^n > 100 \Leftrightarrow n > 11,9$.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó sẽ nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là hơn 100 triệu đồng.

Câu 170: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,4\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

A. 102423000 (đồng). **B.** 102160000 (đồng).

C. 102017000 (đồng). **D.** 102424000 (đồng).

Lời giải

Chọn D

Sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền là $100000000.\left(1+0,4\%\right)^6 \approx 102424000$ (đồng).

Câu 171: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất $8\%/$ năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức lãi kép, ta có: $A = A_0\left(1+r\%\right)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Sau 7 năm người đó có số tiền là $A = 18.\left(1+8\%\right)^7 \approx 30,85$.

Câu 172: Ông A bị nhiễm một loại virus nên phải nhập viện và được điều trị ngay lập tức. Kể từ ngày nhập viện, sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì ông A sẽ được xuất viện, biết rằng ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện?

A. 11 ngày **B.** 12 ngày **C.** 13 ngày **D.** 14 ngày

Lời giải

Chọn B

Gọi K là lượng virus trong cơ thể ông A khi bắt đầu nhập viện.

Sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó, nên lượng virus trong cơ thể ông A ở ngày thứ n là : $T \le K.(1-10\%)^n$

Ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện, nên ta có : $K.(1-10\%)^n \le K.30\% \Leftrightarrow (1-10\%)^n \le 30\% \Leftrightarrow n \le \log_{(1-10\%)} 30\% \Leftrightarrow n \ge 11.4$

Vậy, sau ít nhất 12 ngày thì ông A sẽ được xuất viện.

Câu 173: Năm 2022, một hãng công nghệ có 30 triệu người dùng phần mềm của họ. Hãng đặt kế hoạch, tron 3 năm tiếp theo, mỗi năm số lượng người dùng phần mềm tăng 8% so với năm trước và từ năm thứ 4 trở đi, số lượng người dùng phần mềm sẽ tăng 5% so với năm trước đó. Theo kế hoạch đó, hỏi bắt đầu từ năm nào số lượng người dùng phần mềm của hãng sẽ vượt quá 50 triệu người?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2031. **D.** Năm 2030.

Lời giải

Chọn C

Số lượng người dùng phần mềm của công ty sau 3 năm: $T_1 = 30.\left(1+\dfrac{8}{100}\right)^3 = 37,79136$.

Số lượng người dùng phần mềm của công ty sau n năm tiếp theo: $T_2 = 37,79.\left(1+\dfrac{5}{100}\right)^n$

Để người dùng vượt quá 50 triệu người thì $37,79136.\left(1+\dfrac{5}{100}\right)^n > 50 \Leftrightarrow n > 5$, $n \in \mathbb{N}$ nên $n = 6$

Suy ra cần ít nhất $3+6=9$ năm.

Năm cần tìm sẽ là: $2022+9=2031$.

-------------------HẾT-------------------

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho phương trình $9^{2x}.27^{x^2}=\frac{1}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x=0$ là một nghiệm của phương trình.

b) $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình.

c) $S=\{1;-1\}$ là tập nghiệm của phương trình.

d) $(x_1)^2+(x_2)^2=\frac{10}{9}$, với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

a) Sai: Thay $x=0$ vào phương trình ta được $9^0.27^0=\frac{1}{3}$ (sai).

b) Sai: Thay $x=-1$ vào phương trình ta được $9^{-2}.27^1=\frac{1}{3}$ (đúng)

c) Sai: Thay $x=1$ vào phương trình ta được $9^2.27^1=\frac{1}{3}$ (sai)

d) Đúng

$$9^{2x}.27^{x^2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^{4x}.3^{3x^2}=3^{-1}\Leftrightarrow 3^{4x+3x^2}=3^{-1}\Leftrightarrow 4x+3x^2=-1\Leftrightarrow 3x^2+4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\frac{-1}{3}\end{array}\right..$$

Suy ra $(x_1)^2+(x_2)^2=\frac{10}{9}$.

Câu 2: Cho phương trình $9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $m=-\frac{1}{2}$ phương trình (1) không phải phương trình mũ cơ bản

b) Phương trình có nghiệm $x=2$ khi $m=\frac{5}{2}$

c) Với $m=\frac{1}{4}$ phương trình (1) có một nghiệm

d) Phương trình (1) có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Giá trị của m thuộc khoảng $(1;3)$

Lời giải

a) Sai: Với $m=-\frac{1}{2}$ phương trình (1) trở thành $9^x-9=0\Leftrightarrow 9^x=9$ là phương trình mũ cơ bản

b) Sai: Phương trình có nghiệm $x=2$ nên

$$9^2-2(2m+1)3^2+3(4m-1)=0\Leftrightarrow 81-36m-18+12m-3=0\Leftrightarrow 24m=60\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$$

c) Đúng: Với $m=\frac{1}{4}$ phương trình (1) trở thành $9^x-3.3^x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=0\\3^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$ vậy phương trình có một nghiệm

d) Đúng: Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2(2m+1)t+3(4m-1)=0$ (1)

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-8m+4>0\\2(2m+1)>0\\3(4m-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\m>-\dfrac{1}{2}\\m>\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\m>\dfrac{1}{4}\end{cases}.$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm là $t=4m-1$ và $t=3$.

Với $t=4m-1$ thì $3^{x_1}=4m-1\Leftrightarrow x_1=\log_3(4m-1)$.

Với $t=3$ thì $3^{x_2}=3\Leftrightarrow x_2=1$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2)=12\Leftrightarrow x_1=2\Leftrightarrow \log_3(4m-1)=2\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy $m=\dfrac{5}{2}$ là giá trị cần tìm nên m thuộc khoảng $(1;3)$.

Câu 3: Cho phương trình $2^{x^2-x}+2^{x^2-x-2}=4^{x^2-x-1}+1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình có nghiệm $x=1$.

b) Phương trình có ngiệm $x=-1$.

c) Đặt $2^{x^2-x-1}=t$ phương trình đã cho trở thành $2t^2-5t+2=0$

d) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 2 .

Lời giải

Ta có: $2^{x^2-x}+2^{x^2-x-2}=4^{x^2-x-1}+1$

$$\Leftrightarrow 2.2^{x^2-x-1}+\frac{1}{2}.2^{x^2-x-1}=\left(2^{x^2-x-1}\right)^2+1\Leftrightarrow 2.\left(2^{x^2-x-1}\right)^2-5.2^{x^2-x-1}+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^2-x-1}=2\\2^{x^2-x-1}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-1=1\\x^2-x-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\\x=1\\x=0\end{array}\right.$$

a) Đúng

b) Đúng

c) Đúng

d) Đúng

Câu 4: Cho phương trình $3^{x-5}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+1}}$ (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x=1$ là nghiệm của phương trình (1).

b) $x=3$ không là nghiệm của phương trình (1).

c) Điều kiện của x để vế phải của (1) có nghĩa là $x\geq -1$.

d) Phương trình (1) có tổng bình phương các nghiệm lớn hơn 30.

Lời giải

a) Sai: $x=1$ là nghiệm của phương trình (1)

Thay $x=1$ vào(1) ta được: $3^{-4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$: vô lý.

Do đó $x=1$ không là nghiệm của phương trình (1)

b) Sai: $x=3$ không là nghiệm của phương trình (1).

Thay $x=3$ vào (1) ta được: $3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\Leftrightarrow\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$: đúng.

Do đó $x=3$ là nghiệm của phương trình (1)

c) Đúng: Điều kiện của x để vế phải của (1) có nghĩa là $x\ge -1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+1}}$ có nghĩa khi $x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$.

d) Đúng: $3^{x-5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow 3^{x-5}=3^{-\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=5-x\Leftrightarrow\begin{cases}5-x\ge 0\\ x+1=(5-x)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 5\\ x^2-11x+24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 5\\ \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=5\end{array}\right.$

Suy ra tổng bình phương các nghiệm là $3^2+5^2=9+25=34$.

Vậy phương trình (1) có tổng bình phương các nghiệm lớn hơn 30:

Câu 5: Cho phương trình $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}$ (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình (1) tương đương với phương trình $27^{2x-3}=3^{-x^2+2}$.

b) $x=1$ là một nghiệm của phương trình (1).

c) Phương trình (1) tương đương với phương trình $3^{3(2x-3)}=3^{-x^2-2}$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình (1) bằng 6.

Lời giải

a) Sai: Phương trình (1) tương đương với với phương trình $27^{2x-3}=3^{-x^2-2}$.

b) Đúng: Thay $x=1$ vào phương trình ta được $27^{2.1-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1^2+2}\Leftrightarrow 27^{-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ luôn đúng.

c) Đúng: Phương trình (1) tương đương với phương trình $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}\Leftrightarrow 3^{3(2x-3)}=3^{-x^2-2}$

d) Sai: Ta có $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}\Leftrightarrow 3^{3(2x-3)}=3^{-x^2-2}\Leftrightarrow 6x-9=-x^2-2\Leftrightarrow x^2+6x-7=0$

$\Rightarrow x_1+x_2=-6$.

Do đó: $(*)\Leftrightarrow 2^6=2m-1\Leftrightarrow m=\frac{65}{2}=32.5$. Vậy $m_0=32,5$.

Câu 6: Cho phương trình $4^{x^2}+(m-2).2^{x^2}-2m=0\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m=-1$ thì phương trình (1) có đúng hai nghiệm và hai nghiệm đó trái dấu nhau.

b) Phương trình (1) luôn có ít nhất hai nghiệm.

c) Khi $m<-1$ thì phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

d) Khi phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $x_1>x_2>0>x_3>x_4$; số giá trị nguyên m để $x_1+x_2<3$ là 14.

Lời giải

Ta có: $4^{x^2}+(m-2).2^{x^2}-2m=0 \Leftrightarrow 4^{x^2}-2.2^{x^2}+m.2^{x^2}-2m=0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2}+m\right).\left(2^{x^2}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2}=-m \\ 2^{x^2}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2}=-m \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

a) Sai: Khi $m=-1$ thì phương trình đã cho thành $\left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

b) Đúng.

c) Sai: Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2^{x^2}=-m$ có hai nghiệm phân biệt và $m\neq -2$ khi và chỉ khi $m<-1;\ m\neq -2$.

d) Sai. Khi $m<-1;\ m\neq -2$ thì phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt:

$-1;1;-\sqrt{\log_2(-m)};\sqrt{\log_2(-m)}$

Theo đề $1+\sqrt{\log_2(-m)}<3 \Leftrightarrow \sqrt{\log_2(-m)}<2 \Leftrightarrow \log_2(-m)<4 \Leftrightarrow m>-16$.

Do đó $-16<m<-1;\ m\neq -2$. Suy ra có 13 giá trị nguyên của m.

Câu 7: Cho phương trình $25^x-6.5^x+5\geq 0\ \ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x=\dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình (1).

b) $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $t=5^x, (t>0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình $t^2-6t+5\geq 0$.

d) Tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $S=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$

Lời giải

a) Sai: Với $x=\dfrac{1}{2}$ thay vào bất phương trình (1) không thỏa mãn.

b) Đúng: Với $x=-1$ thay vào bất phương trình (1) thỏa mãn.

c) Đúng: Với $t=5^x,(t>0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình $t^2-6t+5\ge 0$.

d) Đúng: Ta có: Đặt $t=5^x,(t>0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình

$t^2-6t+5\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 5\\ t\le 1\end{array}\right.$

Với $t\ge 5$ thì $5^x\ge 5\Leftrightarrow x\ge 1$.

Với $t\le 1$ thì $5^x\le 1\Leftrightarrow x\le 0$.

Tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $S=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Câu 8: Cho hai biểu thức $f(x)=0,1^{x^2-3x+m}$ và $g(x)=10^{1-x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Bất phương trình $g(x)>100$ có tập nghiệm là $(-\infty;3)$.

b) Khi $m=-4$ thì bất phương trình $f(x)<1$ có tập nghiệm là $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

c) Khi $m=2$ thì bất phương trình $f(x)\ge g(x)$ có 3 nghiệm nguyên.

d) $f(x)\le g(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m\le 3$.

Lời giải

a) Sai: $g(x)>100\Leftrightarrow 10^{1-x}>100\Leftrightarrow 10^{1-x}>10^2\Leftrightarrow 1-x>2\Leftrightarrow x<-1$.

Suy ra bất phương trình $g(x)>100$ có tập nghiệm là $(-\infty;-1)$.

b) Đúng: Khi $m=-4$ thì $f(x)<1\Leftrightarrow 0,1^{x^2-3x-4}<0,1^0\Leftrightarrow x^2-3x-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>4\end{array}\right.$.

Suy ra bất phương trình $f(x)<1$ có tập nghiệm là $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

c) Đúng: Khi $m=2$ thì $f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow 0,1^{x^2-3x+2}\ge 10^{1-x}\Leftrightarrow 10^{-x^2+3x-2}\ge 10^{1-x}$

$\Leftrightarrow -x^2+3x-2\ge 1-x\Leftrightarrow -x^2+4x-3\ge 0\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Suy ra bất phương trình $f(x)\ge g(x)$ có 3 nghiệm nguyên.

d) Sai: $f(x)\le g(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 0,1^{x^2-3x+m}\le 10^{1-x},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 10^{-x^2+3x-m}\le 10^{1-x},\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x^2+3x-m\le 1-x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -x^2+4x-m-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 4^2-4.(-1).(-m-1)\le 0\Leftrightarrow m\ge 3$.

Suy ra $f(x) \le g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \ge 3$.

Câu 9: Cho bất phương trình: $9^x - 2(m+1)3^x - 3 - 2m > 0\ (1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu đặt $t = 3^x\,(t > 0)$ thì bất phương trình (1) trở thành bất phương trình $t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0$.

b) Bất phương trình (1) luôn có nghiệm $x = 0$ với mọi giá trị của tham số m.

c) Với $m = 1$ bất phương trình (1) có tập nghiệm là $S = (1;+\infty)$.

d) Có 2 giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^x - 2(m+1)3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi số thực x.

Lời giải

a) Đúng: $9^x - 2(m+1)3^x - 3 - 2m > 0\ (1) \Leftrightarrow 3^{2x} - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$.

Khi đặt $t = 3^x\,(t > 0)$ thì (1) trở thành phương trình $t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0$.

b) Sai: Bất phương trình (1) có nghiệm $x = 0$ với mọi tham số m ta có

$9^0 - 2(m+1)3^0 - 3 - 2m > 0(\forall m) \Leftrightarrow -4 - 4m > 0(\forall m)$.

c) Sai: Với $m = 1$ bất phương trình (1) trở thành $9^x - 4.3^x - 5 > 0$.

ta có $9^x - 4.3^x - 5 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

bất phương trình có tập nghiệm là $S = (0;+\infty)$.

d) Sai: Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Khi đó, bất phương trình trở thành:

$t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow (t+1)(t - 3 - 2m) > 0$

$\Leftrightarrow t - 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow t > 3 + 2m\ (1)$ (Do $t > 0$).

Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì (1) phải nghiệm đúng với mọi $t \in (0;+\infty)$.

Điều này tương đương với $3 + 2m \le 0 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{2}$.

Không có giá trị nguyên dương nào của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 10: Cho phương trình $\log_2^2(x) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện của phương trình là $x > 0$.

b) $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

c) Phương trình tương đương với $\log_2 x = 1$.

d) Phương trình đã cho chỉ có một nghiệm.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện của phương trình là $x > 0$.

b) Đúng: Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $\log_2^2(2) = 1^2 = 1$ (có thể sử dụng MTCT)

c) Sai: Ta có $\log_2^2(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -1\end{array}\right.$.

d) Sai: $\log_2^2(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 11: Cho phương trình $\log_2\left(x^2 - x + 2\right) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Tổng bình phương các nghiệm là 1.

d) Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

a) Sai: Điều kiện xác định của phương trình là $x^2 - x + 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Đúng: $\log_2\left(x^2 - x + 2\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0 \\ x = 1\end{array}\right.$.

c) Đúng: Tổng bình phương các nghiệm là $0^2 + 1^2 = 1$.

d) Sai: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 12: Cho hai hàm số $y = \log_2 x, y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

b) Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1$.

d) Phương trình $\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$ có 2 nghiệm.

Lời giải

a) Đúng: Cơ số $a = 2 > 1$.

b) Sai: Hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

c) Đúng: $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

d) Sai: $\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2x-1}\right) \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 13: Cho phương trình $\log_3(3^x-1).\log_{27}(3^{x+2}-9) = m$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge 0$.

b) Khi $m=1$ phương trình có một nghiệm là $x = \log_3 2$.

c) Đặt $\log_3(3^x-1) = t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2t - 3m = 0$.

d) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > -\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Sai: Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3^x - 1 > 0 \\ 3^{x+2} - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

b) Sai: Khi $m=1$ phương trình có dạng:

$$\log_3(3^x-1).\log_{27}(3^{x+2}-9) = 1 \Leftrightarrow \log_3(3^x-1).\log_{3^3}\left[3^2(3^x-1)\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x-1).\left[\log_3(3^x-1)+2\right] = 3 \Leftrightarrow \left[\log_3(3^x-1)\right]^2 + 2\log_3(3^x-1) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(3^x-1) = 1 \\ \log_3(3^x-1) = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 1 = 3 \\ 3^x - 1 = \frac{1}{27} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 4 \\ 3^x = \frac{28}{27} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 4 \\ x = \log_3 \frac{28}{27} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\log_3 2 \\ x = \log_3 \frac{28}{27} \end{array}\right..$$

c) Đúng: $\log_3(3^x-1).\log_{27}(3^{x+2}-9) = m \Leftrightarrow \log_3(3^x-1).\log_{3^3}\left[3^2(3^x-1)\right] = m$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x-1).\left[\log_3(3^x-1)+2\right] = 3m \Leftrightarrow \left[\log_3(3^x-1)\right]^2 + 2\log_3(3^x-1) - 3m = 0.$$

Khi đó đặt $\log_3(3^x-1) = t$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2t - 3m = 0 \quad (1)$.

d) Đúng: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.

Câu 14: Cho phương trình $\log_2(x^2-3x) = \log_4(x-3)^2 + 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x < 0$ hoặc $x > 3$.

b) Phương trình tương đương với $\log_2(x^2-3x) = \log_2(x-3) + 2$.

c) Phương trình có một nghiệm duy nhất.

d) Tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 32.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện: $\begin{cases} x^2-3x>0 \\ (x-3)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \vee x>3 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>3 \end{array}\right.$

b) Sai: Phương trình tương đương với $\log_2\left(x^2-3x\right)=\log_2|x-3|+2$

c) Sai.

d) Đúng: Có $\log_2\left(x^2-3x\right)=\log_2|x-3|+\log_2 4 \Leftrightarrow x^2-3x=4|x-3|$

TH1: Với $x<0$ ta có phương trình: $x^2-3x=-4(x-3) \Leftrightarrow x^2+x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4(nhan) \\ x=3(loai) \end{array}\right.$

TH2: Với $x>3$ ta có phương trình: $x^2-3x=4(x-3) \Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4(nhan) \\ x=3(loai) \end{array}\right.$

Câu 15: Cho phương trình $\log_2(x-1)-\log_2\left(x^2-5x+m\right)=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $m=0$ điều kiện xác định của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x>5 \\ x<0 \end{array}\right.$.

b) Với $m=0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

c) Với $m=7$ thì tổng các nghiệm của phương trình bằng 6.

d) Với $m<3$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Sai: Với $m=0$, điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \left[\begin{array}{l} x>5 \\ x<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>5$.

b) Sai: Với $m=0$ thì phương trình trở thành:

$\log_2(x-1)=\log_2\left(x^2-5x\right) \Leftrightarrow x^2-5x=x-1 \Leftrightarrow x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=3\pm 2\sqrt{2}$

Đối chiếu với điều kiện ta được $x=3+2\sqrt{2}$.

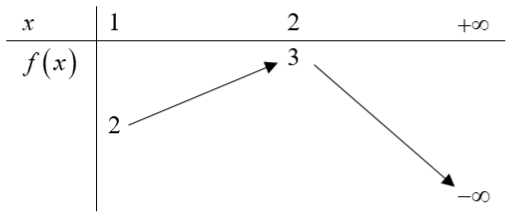
c) Đúng: Với $m=7$ thì phương trình trở thành:

$\log_2(x-1)=\log_2(x^2-5x+7) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x^2-5x+7=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-6x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

d) Sai: Phương trình đã cho tương đương với

$\log_2(x-1)=\log_2\left(x^2-3x+m\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-3x+m=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ m=-x^2+4x-1\ (1) \end{cases}$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - 1, x \in (1; +\infty)$, ta có bảng biến thiên:



Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc khi và chỉ phi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(1; +\infty)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $m \in (2; 3)$

Câu 16: Cho phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ (1) với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình (1) là $x \in [0; +\infty)$.

b) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m \in \mathbb{R}$.

c) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 81$ khi $m = 4$.

d) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt phân biệt trái dấu khi $m < \dfrac{7}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Điều kiện $x > 0$

b) Đúng: Đặt $t = \log_3 x$ thì phương trình (1) trở thành $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$.

$\Delta = m^2 - 8m + 28 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Như vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2.

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

c) Đúng: Theo giả thiết $x_1.x_2 = 81 \Leftrightarrow \log_3(x_1x_2) = \log_3 81 = 4 \Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 4$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$.

Vậy $m = 4$

d) Sai: Vì điều kiện $x > 0$ nên phương trình (1) không thể có hai nghiệm trái dấu.

Câu 17: Cho phương trình $3\log_{27}\left[2x^2 - (m+3)x + 1 - m\right] + \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - x + 1 - 3m\right) = 0$ (1) với m là tham số thực. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình (1) tương đương $\log_3\left[2x^2 - (m+3)x + 1 - m\right] = \log_3\left(x^2 - x + 1 - 3m\right)$

b) Khi $m = 0$ thì tích tất cả các nghiệm của phương trình (1) bằng 2.

c) Có 14 giá trị nguyên của m để phương trình (1) có tập xác định là $\mathbb{R}$.

d) Có 21 giá trị nguyên của m trên đoạn $[-20;20]$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Đúng: $(1) \Leftrightarrow 3.\frac{1}{3}\log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]-\log_3\left(x^2-x+1-3m\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_3\left(x^2-x+1-3m\right)$.

b) Sai: Khi $m=0$ thì phương trình (1) trở thành:

$$\log\left(2x^2-3x+1\right)=\log_3\left(x^2-x+1\right) \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x+1=x^2-x+1\\ x^2-x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right..$$

Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình (1) bằng 0.

c) Sai: Phương trình (1) có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}2x^2-(m+3)x+1-m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ x^2-x+1-3m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_1=m^2+14m+1<0\\ \Delta_2=12m-3<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-7-4\sqrt{3}<m<-7+4\sqrt{3}\\ m<\frac{1}{4}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -7-4\sqrt{3}<m<-7+4\sqrt{3}$. Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

d) Đúng: $(1) \Leftrightarrow \log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_3\left(x^2-x+1-3m\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x+1-3m>0\\ 2x^2-(m+3)x+1-m=x^2-x+1-3m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x+1-3m>0\\ x^2-(m+2)x+2m=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x+1-3m>0\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=m\end{array}\right.\end{cases}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}m\neq 2\\ 2^2-2+1-3m>0\\ m^2-m+1-3m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 2\\ 3-3m>0\\ m^2-4m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<1\\ \left[\begin{array}{l}m>2+\sqrt{3}\\ m<2-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m<2-\sqrt{3}.$$

Vậy có 21 giá trị nguyên của m trên đoạn $[-20;20]$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Câu 18: Cho bất phương trình $\log_m\left(x^2+x+3\right)\le\log_m\left(2x^2-x\right)$ (1). Với m là tham số thực dương khác $1, x$ là số thực dương và $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Với $m>1$ thì bất phương trình $(1) \Leftrightarrow x^2+x+3\ge 2x^2-x$.

b) Điều kiện của bất phương trình (1) là $x \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

c) Với $x=1$ là nghiệm của bất phương trình (1) suy ra $m>1$.

d) Gọi $S=(a;b],(a,b\in\mathbb{Q})$ là tập nghiệm của bất phương trình thì $2a+3b=10$.

Lời giải

Xét bất phương trình: $\log_m\left(x^2+x+3\right)\le\log_m\left(2x^2-x\right)$ (1)

a) Đúng: Với $m>1$, $\log_m\left(x^2+x+3\right)\le\log_m\left(2x^2-x\right)\Leftrightarrow x^2+x+3\ge 2x^2-x$.

b) Đúng: Điều kiện của bất phương trình (1) là $x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

c) Sai: Với $x=1$, bất phương trình (1) có dạng: $\log_m 5\le\log_m 1\Leftrightarrow 0<m<1$.

d) Đúng: Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow x^2+x+3\ge 2x^2-x\Leftrightarrow -x^2+2x+3\ge 0\Leftrightarrow x\in[-1;3]$.

Kết hợp với điều kiện $x\in\left(\frac{1}{2};3\right]$. Do đó: $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=3\end{cases}\Rightarrow 2a+3b=10.$

Câu 19: Cho bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-m\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(4x-x^2\right)$ (1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vế phải của bất phương trình (1) xác định khi $0<x<4$.

b) Với $0<x<4$ thì bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình $2x^2-4x-m>0$.

c) Với $m=6$ thì bất phương trình (1) có tập nghiệm là $S=(3;+\infty)$.

d) Bất phương trình (1) có nghiệm $x\in(0;2)$ khi $-2<m<0$.

Lời giải

a) Đúng: $\log_{\frac{1}{2}}\left(4x-x^2\right)$ xác định khi $4x-x^2>0\Leftrightarrow 0<x<4$.

b) Đúng: Với $0<x<4$ thì bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2-m>4x-x^2\Leftrightarrow 2x^2-4x-m>0$.

c) Sai: Với $m=6$ thì bất phương trình (1) trở thành $2x^2-4x-6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>3\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $0<x<4$ ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;4)$.

d) Sai: Có $2x^2-4x-m>0\Leftrightarrow m<2x^2-4x$.

Xét hàm số $f(x)=2x^2-4x$, với $x\in(0;2)$. Ta có bảng biến thiên

x	0		1		2
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Bất phương trình (1) có nghiệm $x \in (0;2)$ khi $m < f(x)$, với $x \in (0;2)$ $\Leftrightarrow m < 0$.

Câu 20: Cho bất phương trình $3\log_2^2 2x - 12\log_2 x - 1 - m \geq 0\ (*)$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện đề bất phương trình $(*)$ có nghĩa là $x \geq 0$,

b) Khi $m = 0$ thì $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình $(*)$.

c) Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(\sqrt{2};+\infty\right)$ khi $m \leq -1$.

d) Bất phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in \left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ khi $m \leq -\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

a) Sai: Dễ thấy điều kiện của bất phương trình là $x > 0$.

b) Đúng: Khi $m = 0$ thì bất phương trình trở $(*)$ thành $3\log_2^2 2x - 12\log_2 x - 1 \geq 0$.

Với $x = 1$ thì $VT = 2 > 0$. Do đó lúc này $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình $(*)$.

c) Đúng: $(*) \Leftrightarrow 3\log_2^2 x - 6\log_2 x + 2 \geq m$. Đặt $t = \log_2 x$, với $x \in \left(\sqrt{2};+\infty\right)$ thì $t \in \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Khi đó bất phương trình $(*)$ trở thành $3t^2 - 6t + 2 \geq m$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 - 6t + 2$ với $t \in \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(t)$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(\sqrt{2};+\infty\right)$ khi bất phương trình $3t^2 - 6t + 2 \geq m$ nghiệm đúng với mọi $t \in \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq -1$.

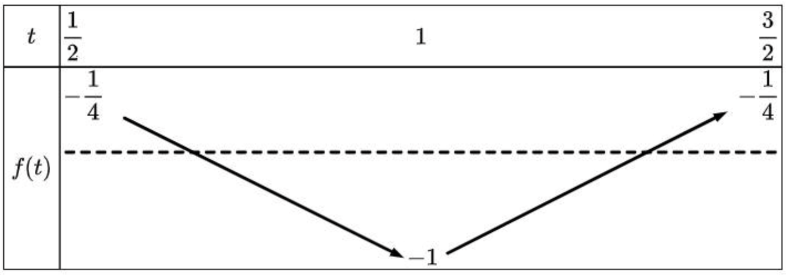
d) Sai: $(*) \Leftrightarrow 3\log_2^2 x - 6\log_2 x + 2 \geq m$

Đặt $t = \log_2 x$, với $x \in \left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ thì $t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó bất phương trình $(*)$ trở thành $3t^2 - 6t + 2 \geq m$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 - 6t + 2$ với $t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Bảng biến thiên



Với $t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ thì $f(t) \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right)$. Bất phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in \left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ khi bất phương trình $3t^2 - 6t + 2 \geq m$ có nghiệm $t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Từ bảng biến thiên suy ra $m < -\frac{1}{4}$.

Câu 21: Dân số nước ta năm 2023 ước tính là $A = 100,3$ triệu người. *(Nguồn:Tổng Cục Thống Kê <u>https://gso.gov.vn</u>)*. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta là $r = 0,84\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2023) được tính theo công thức: $S = A.e^{rt}$ triệu người. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 1 năm nữa dân số Việt Nam đạt 101,1 triệu người.

b) Đến năm 2030, dân số Việt Nam ước đạt 120 triệu người.

c) Người ta ước tính rằng, đến năm 2035. Mức sinh của Việt Nam có xu hướng giảm, tỉ lệ tăng dân số hằng năm chỉ còn khoảng $r = 0,4\%$. Dân số Việt Nam vào năm 2040 là hơn 120 triệu người.

d) Dân số nước ta vượt 110 triệu người trong vòng 10 năm nữa.

Lời giải

a) Đúng: Sau 1 năm nữa (tính từ 2023) dân số Việt Nam ước tính là: $100,3.e^{0,0084.1} = 101,1$ triệu người.

b) Sai: Đến năm 2030, tức là sau 7 năm dân số Việt Nam ước tính là: $100,3.e^{0,0084.7} = 106,4$ triệu người.

c) Sai: Với tỉ lệ tăng dân số hằng năm là $r = 0,84\%$, ước tính dân số Việt Nam vào năm 2035 là $100,3.e^{0,0084.12} = 110,9$ triệu người.

Từ 2035, tỉ lệ tăng dân số hằng năm chỉ còn khoảng $r = 0,4\%$, nên tính đến 2040, dân số Việt Nam khoảng: $110,9.e^{0,004.5} = 113,1$ triệu người.

d) Sai: Ta có: $100,3.e^{0,0084.t} > 110 \Leftrightarrow e^{0,0084.t} > \dfrac{110}{100,3} \Leftrightarrow 0,0084t > \ln\dfrac{110}{100,3} \Leftrightarrow t > 10,9$.

Vậy sau 11 năm nữa tính từ mốc 2023, tức là từ năm 2034 trở đi, dân số Việt Nam ước tính vượt quá 110 triệu người.

Câu 22: Cô Minh lần đầu gởi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) Sau 6 tháng cô Minh có tổng số tiền là $104,04$ triệu.

b) Để số tiền nhận được là 150 triệu thì cô Minh phải gởi ngân hàng 18 quý.

c) Sau đúng 6 tháng cô Minh gởi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền cô Minh nhận được 1 năm sau khi gởi thêm tiền gần nhất là 216 triệu

d) Để nhận được số tiền 200 triệu trong 30 tháng với lãi suất như trên thì ban đầu cô Minh phải gởi ít nhất 164 triệu.

Lời giải

a) Đúng: 3 tháng = 1 quý, nên 6 tháng = 2 quý
Sau 6 tháng cô Minh có tổng số tiền là $100\left(1+2\%\right)^2 = 104,04$ triệu.

b) Sai: Ta có: $100\left(1+2\%\right)^n = 150 \Leftrightarrow n = \log_{(1+2\%)}1,5 \approx 20,475$.

c) Sai: Cô Minh gởi thêm 100 triệu đồng nên tổng số tiền gởi là $204,04$ triệu

Số tiền sau 1 năm nữa là $204,04(1+2\%)^4 \approx 220$ triệu.

d) Sai: Để nhận được số tiền 200 triệu trong 30 tháng với lãi suất như trên thì ban đầu cô Minh phải gởi ít nhất số tiền $x\left(1+2\%\right)^{10} = 200 \Leftrightarrow x \approx 164,06966$ triệu.

Câu 23: Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: $m\left(t\right) = m_0.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ bạn đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m\left(t\right)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã là 138 ngày (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) Sau 138 ngày thì khối lượng Poloni còn lại là $50\left(gam\right)$

b) Khối lượng Poloni còn lại sau 30 ngày nhiều hơn $85\left(gam\right)$

c) Kể từ ngày thứ 55 trở đi thì khối lượng Poloni còn lại ít hơn $75\left(gam\right)$

d) Kể từ ngày thứ 117 trở đi thì khối lượng Poloni mất đi nhiều hơn 80% so với khối lượng Poloni còn lại.

Lời giải

a) Đúng: Sau 138 ngày thì khối lượng Poloni còn lại là $m(138)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{138}{138}}=50(gam)$

b) Đúng: Khối lượng Poloni còn lại sau 30 ngày là $m(30)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{138}}\approx 86,01(gam)$

c) Sai: $100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}<75\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}<0,75\Leftrightarrow\frac{t}{138}>\log_{\frac{1}{2}}0,75\Leftrightarrow t>138\log_{\frac{1}{2}}0,75\approx 57,28$

Kể từ ngày thứ 58 trở đi thì khối lượng Poloni còn lại ít hơn $75\ (gam)$

d) Sai: Khối lượng Poloni mất đi nhiều hơn 80% so với khối lượng Poloni còn lại.

Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni, khối lượng Poloni còn lại là $x(gam)$.

Khối lượng Poloni mất đi bằng $100-x\ (gam)$,

Suy ra $100-x>80\%x\Rightarrow x+80\%x<100\Rightarrow 1,8x<100\Rightarrow x<\frac{100}{1,8}=\frac{500}{9}$

$m(t)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}<\frac{500}{9}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}<\frac{5}{9}\Rightarrow\frac{t}{138}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{9}\Rightarrow t>138.\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{9}\approx 117,02$

Vậy phải kể từ ngày thứ 118 trở đi.

Câu 24: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,6\%$ /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo (thể thức lãi kép) và trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 1 tháng, số tiền cả vốn lẫn lãi là 106 triệu đồng.

b) Sau 2 tháng, số tiền lãi thu được là 1.203.600 đồng.

c) Sau n tháng, số tiền cả vốn lẫn lãi là: $100.(1+0,6\%)^{n+1}$ (triệu đồng).

d) Để thu được nhiều hơn 10 triệu tiền lãi, cần phải gửi ít nhất 16 tháng.

Lời giải

Sau n tháng, người đó lĩnh được số tiền là: $100.(1+0,6\%)^{n}$ (triệu đồng).

Ta có $100.(1+0,6\%)^{n}-100\geq 10\Leftrightarrow n\geq\log_{1+0,6\%}\frac{11}{10}\approx 15,9.$

a) Sai:

b) Đúng:

c) Sai:

d) Đúng:

Câu 25: Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau 3 tháng số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được nhiều hơn 101 triệu đồng

b) Sau ít nhất 40 tháng, người đó nhận được tổng số tiền nhiều hơn 125 triệu.

c) Số tiền lãi thu được sau 3 tháng khi gửi lãi suất 0,5% một tháng *nhiều hơn* số tiền lãi thu được sau 4 tháng nếu gửi lãi suất 0,4% một tháng.

d) Tổng số tiền gốc và lãi gấp đôi số tiền ban đầu sau 10 năm.

Lời giải

a) Đúng: Sau 3 tháng số tiền cả gốc và lãi là: $P_3 = 100(1+0,005)^3 \approx 101.507.513$

b) Sai: Sau n tháng, người đó nhận được: $P_n = 100(1+0,005)^n$ triệu đồng

Theo đề bài: $P_n = 100(1+0,005)^n > 125 \Leftrightarrow (1,005)^n > 1,25 \Leftrightarrow n > \log_{1.005} 1,25 = 44,7$ tháng

Vậy sau 45 tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

c) Sai: Sau 3 tháng số tiền cả gốc và lãi là: $P_3 = 100(1+0,005)^3 \approx 101.507.513$

Số tiền lãi là: 1. 507.513 đồng

Số tiền gốc và lãi thu được sau 4 tháng nếu gửi lãi suất 0,4% một tháng.

$$A_4 = 100(1+0,004)^4 \approx 101.609.625$$

Số tiền lãi là: 1.609.625

d) Sai: $200 = 100(1+0,005)^n \Leftrightarrow (1,005)^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1.005} 2 = 138,975$

Sau số năm là: 138,975:12 = 11,58 (năm) > 10 năm.

Câu 26: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đề xi ben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L = 10\log\frac{I}{I_o}$. Trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét I_o cường độ âm ở ngưỡng nghe $\left(I_o = 10^{-12} w/m^2\right)$.

a) Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là 68 dB. Cường độ âm tương ứng ra lớn hơn $6,5.10^{-6}\left(w/m^2\right)$?

b) Hai cây đàn ghi ta giống nhau, cùng hòa tấu một bản nhạc. Mỗi chiếc phtá ra âm có mức âm trung bình là 60 dB. Mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra xấp xỉ $63\,\text{dB}$?

c) Tiếng ồn phát ra ở xưởng cưa ở mức cường độ âm đo được là 93 dB, do 7 chiếc cưa máy giống nhau cùng hoạt động gây ra. Giả sử có 3 chiếc cưa máy đột ngột ngừng hoạt động thì mức cường độ âm trong xưởng lúc này nhỏ hơn 90 dB?

d) Tiếng ồn phát ra từ tiếng phím liên tục ở một bàn phím của máy tính có cường độ âm đo được là $10^{-5}\left(w/m^2\right)$. Giả sử phòng làm việc của một công ty có hai nhân viên văn phòng cùng thực hiện thao tác gõ phím trên hai bàn phím máy tính giống nhau thì mức cường độ âm tổng cộng đo cả hai bàn phím phát ra cùng lúc là 70dB?

Lời giải

a) Sai: Theo giả thiết ta có $L = 68\text{d}b$, $I_o = 10^{-12}\,\text{w}/m^2$.

Áp dụng công thức ta có:

$$L = 10\log\frac{I}{I_o} \Leftrightarrow 68 = 10\log\frac{I}{I_o} \Leftrightarrow \frac{I}{I_o} = 10^{6,8} \Leftrightarrow I = 10^{6,8}.10^{-12} \approx 6,3.10^{-6}\,w/m^2.$$

b) Đúng: Mức cường độ âm do một chiếc đàn ghita phát ra là: $L = 10\log\frac{I}{I_o} = 60$

Mức cường độ âm do hai chiếc đàn ghita phát ra là:

$$L_2 = 10\log\frac{2I}{I_o} = 10.\left(\log 2 + \log\frac{I}{I_o}\right) = 10\log 2 + 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log 2 + 60 \approx 63dB$$

c) Sai: Gọi cường độ của âm do 1 cái cưa phát ra là: I_1

Lúc đầu mức cường độ âm là: $7I_1$ (do 7 cưa cùng hoạt động)

$$L = 10\log\frac{7I_1}{I_o} = 93 \Leftrightarrow 10\log 7 + 10\log\frac{I_1}{I_o} = 93 \Leftrightarrow 10\log\frac{I_1}{I_o} = 93 - 10\log 7 \approx 84,5$$

Lúc sau mức cường độ âm là: $4I_1$ (3 cưa máy hỏng nên còn 4 cưa hoạt động)

$$L = 10\log\frac{4I_1}{I_o} = 10\log 4 + 10\log\frac{I_1}{I_o} = 93 \Leftrightarrow 10\log\frac{I_1}{I_o} = 10\log 4 + 84,5 \approx 90,5\text{d}B.$$

d) Sai vì nếu chỉ một bàn phím thì $L = 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log\frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 70\text{d}B$

Cả hai bàn phím cùng gõ thì $L_2 = 10\log\frac{2I}{I_o} = 10\log 2 + 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log 2 + 70 \approx 73\text{d}B.$

Câu 27: Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian (tính bằng cent) giữa hai nốt nhạc có tần số a và b ($a > b$)là $n = 1200.\log_2\frac{a}{b}$

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008) (Lưu ý: Làm tròn số đến hàng phần mười)

a) Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 443 Hz và 415 Hz là 131 cent.

b) Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 345 Hz và 398 Hz nằm trong khoảng $(246;250)$.

c) Giả sử khoảng thời gian là 230 cent và tần số đầu là 328 Hz thì tần số cuối cùng là $287,2$ Hz.

d) Với tần số đầu không vượt quá 355 Hz và tần số cuối cùng là 384 Hz thì khoảng thời gian chênh lệnh giữa hai nốt nhạc không vượt quá 178 cent.

Lời giải

a) Sai: Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 443 Hz và 415 Hz là

$$n = 1200.\log_2 \frac{443}{415} \approx 113\,\text{cent}.$$

b) Đúng: Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 345 Hz và 398 Hz là

$$n = 1200.\log_2 \frac{398}{345} \approx 247,4$$

c) Đúng: Ta có phương trình $230 = 1200.\log_2 \frac{328}{b} \Leftrightarrow \log_2 \frac{328}{b} = \frac{23}{120} \Leftrightarrow \frac{328}{b} = 2^{\frac{23}{120}} \Leftrightarrow b \approx 287,2$ Hz

d) Sai: Ta có phương trình $178 \ge 1200.\log_2 \frac{a}{320} \Leftrightarrow \log_2 \frac{a}{320} \le \frac{89}{600} \Leftrightarrow \frac{a}{320} \le 2^{\frac{89}{600}} \Leftrightarrow a \le 354,6$ Hz

Câu 28: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng 1 tỷ đồng (với lãi suất $0,5\%$/tháng, lãi tính theo từng tháng và cộng dồn vào gốc). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) 8 tháng sau người đó lấy về tất cả số tiền cả gốc và lãi là $1.020.175.878$ đồng.

b) 2 năm sau thì người đó thu được số tiền số tiền cả gốc và lãi là $1.127.159.776$ đồng.

c) Kể từ lúc gửi sau mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi người đó rút 10 triệu đồng để chi tiêu (nếu tháng cuối cùng không đủ 10 triệu thì rút hết) thì đến 139 tháng người đó rút hết tiền trong tài khoàn.

d) Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành $1,15\%$ / tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn $0,9\%$ / tháng. Người đó tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được $1.143.816.503$ đồng. Vậy người đó gửi tiền vào ngân hàng với tổng thời gian là 16 tháng.

Lời giải

a) Sai: Đặt $T_0 = 1.000.000.000.$ Theo công thức lãi kép, số tiền người đó nhận được sau 8 tháng là $T_8 = T_0(1+r)^8$ thay $T_0 = 1.000.000.000$ và $r = 0,5\%$ ta được $T_8 = 1.040.707.044$.

b) Đúng: Theo công thức lãi kép $T_{24} = T_0(1+r)^{24}$ thay $T_0 = 1.000.000.000$ và $r = 0,5\%$ ta được $T_{24} = 1.127.159.776$.

c) Đúng: Số tiền người đó gửi ban đầu là $T_0 = 1000$ triệu đồng, lãi suất hàng tháng $m = 0,005$;

số tiền người đó rút ra hàng tháng là $r = 10$ triệu đồng.

Sau tháng thứ nhất (người đó chưa rút 10 triệu) người đó thu được số tiền là $T_1 = T_0(1+m)$.

Đầu tháng thứ hai người đó có số tiền là $T_0(1+m) - r$

Cuối tháng thứ hai (người đó chưa rút 10 triệu) người đó có số tiền là

$$T_2 = \left(T_0(1+m) - r\right)(1+m) = T_0(1+m)^2 - r(1+m).$$

Đầu tháng thứ ba người đó có số tiền là $T_0(1+m)^2 - r(1+m) - r$.

Cuối tháng thứ ba (người đó chưa rút 10 triệu) người đó có số tiền là

$$T_3 = T_0(1+m)^3 - r(1+m)^2 - r(1+m).$$

Cứ như thế số tiền người đó có cuối tháng thứ n là (người đó chưa rút 10 triệu)

$$T_n = T_0(1+m)^n - \left[r(1+m)^{n-1} + r(1+m)^{n-2} + ... + r(1+m)\right] = T_0(1+m)^n - r.\frac{(1+m)^n - (1+m)}{m}.$$

Người đó rút hết tiền trong tài khoản khi

$$T_n - r \le 0 \Leftrightarrow T_n \le 10 \Leftrightarrow T_0(1+m)^n - r.\frac{(1+m)^n - (1+m)}{m} \le 10$$

Thay số ta được $1000.1,005^n - 10.\frac{1,005^n - 1,005}{0,005} \le 10 \Leftrightarrow 1,005^n \ge 2 \Leftrightarrow n \ge 138,975$.

d) Đúng: Gọi m là số tháng người đó gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất $0,5\%$ / tháng

$(m \in \mathbb{N}, 1 \le m \le 11)$.

Khi đó, số tháng người đó gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất $1,15\%$ / tháng là $12 - m$.

Gọi n là số tháng người đó gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất $0,9\%$ / tháng $(n \in \mathbb{N}, 1 \le n)$.

Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được cho đến khi rút là

$$T = T_0.(1,005)^m.(1,0115)^{12-m}.(1,009)^n, \text{ với } T_0 = 1.000.000.000$$

Theo đề bài thì $T = 1.143.816.503$.

Bước 1: Với $1 \le m \le 11$, ta có đánh giá

$$T_0.(1,005)^{11}.(1,0115).(1,009)^n \le T \le T_0.(1,005).(1,0115)^{11}.(1,009)^n$$

$$\Leftrightarrow \log_{1,009}\left(\frac{T}{T_0.(1,005).(1,0115)^{11}}\right) \le n \le \log_{1,009}\left(\frac{T}{T_0.(1,005)^{11}.(1,0115)}\right) \Rightarrow 1 \le n \le 7.$$

Bước 2. Với $1 \le n \le 7$, ta đánh giá được

$$T_0.(1,005)^m.(1,0115)^{12-m}.(1,009)^1 \le T \le T_0.(1,005)^m.(1,0115)^{12-m}.(1,009)^7$$

$$\Leftrightarrow \frac{T}{T_0.(1,0115)^{12}.(1,009)^7} \le \left(\frac{1,005}{1,0115}\right)^m \le \frac{T}{T_0.(1,0115)^{12}.(1,009)^1} \Rightarrow 2 \le m \le 10.$$

Lặp lại các bước 1, 2 với các giá trị m, n mới tìm được. Sau một số lần ta tìm được $m = 6$, $n = 4$
Thử lại $m = 6$, $n = 4$ thỏa mãn bài toán.

Vậy người đó gửi tiền vào ngân hàng với tổng thời gian là 16 tháng.

Câu 29: Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng. Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là $A = P\left(1 - r\%\right)^n$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại là 86.490.000 đồng.

b) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại 96.490.000 đồng.

c) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau ba năm chỉ còn lại 80 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của ba năm đó là $9{,}17\%$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

d) Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là 6% một năm thì sau ít nhất 15 năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại không quá một nửa.

Lời giải

a) Đúng: Sau 2 năm, sức mua còn lại của 100 triệu đồng là $A = 10^8.\left(1 - 7\%\right)^2 = 86.490.000$ đồng.

b) Sai:

c) Sai: Ta có $10^8.\left(1 - r\%\right)^3 = 8.10^7 \Rightarrow r \approx 7{,}17$.

d) Sai: Gọi số tiền ban đầu là P, ta có $P.\left(1 - 6\%\right)^n = \dfrac{P}{2} \Rightarrow n \approx 11{,}2$. Vậy sau ít nhất 12 năm thì sức mua của số tiên ban đầu chỉ còn lại không quá một nửa.

Câu 30: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con.

a) Phương trình thể hiện tỷ lệ tăng trưởng là $300 = 100.e^{5r}$

b) Tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $r = \ln\dfrac{3}{5}$ mỗi giờ.

c) Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.\frac{\ln 3}{5}} = 900$ con.

d) Phải cần ít nhất 20 giờ để số con vi khuẩn lớn hơn 10000 con.

Lời giải

a) Đúng: Từ giả thiết ta có: $300 = 100.e^{5r}$

b) Sai: Ta có $300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow r = \dfrac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \dfrac{\ln 3}{5}$. Tức tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $r = \dfrac{\ln 3}{5}$ mỗi giờ.

c) Đúng: Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.\frac{\ln 3}{5}}=900$ con.

d) Sai: Để số con số vi khuẩn lớn hơn 10000 con thì

$$100.e^{t.\frac{\ln 3}{5}}>10000 \Leftrightarrow e^{t.\frac{\ln 3}{5}}>100 \Leftrightarrow t.\frac{\ln 3}{5}>\ln 100 \Leftrightarrow t>\frac{5\ln 100}{\ln 3}\approx 20,96$$

Câu 31: Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililít nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là $P=P_0\cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 4000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là 1000. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) α nằm trong khoảng $(1,2)$.

b) Sau 3 giờ 30 phút thì lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước ít hơn 500.

c) Lượng vi khuẩn mất đi trong mỗi mililít trong khoảng thời gian từ 1 giờ đến 2,5 giờ tính từ lúc dùng thuốc thì lớn hơn 1200.

d) Lượng vi khuẩn sau khoảng 1,32 giờ sẽ bằng 40% lượng vi khuẩn ban đầu.

Lời giải

a) Sai: Ta có $P=P_0\cdot 10^{-\alpha t}\Rightarrow 1000=4000\cdot 10^{-2\alpha}\Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\log 4\approx 0,31\notin(1,2)$

b) Đúng: $P=P_0.10^{-\alpha t}\le 500\Leftrightarrow 4000.10^{-\alpha t}\le 500\Leftrightarrow 10^{-\alpha t}\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow -\alpha t\le\log\frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow t\ge -\frac{1}{\alpha}\log\frac{1}{8}\Leftrightarrow t\ge\frac{-1}{\frac{1}{2}\log 4}\cdot\log\frac{1}{8}\Leftrightarrow t\ge 3$$

c) Đúng: Lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước sau 1 giờ là: $4000\cdot 10^{-\frac{1}{2}\log 4.1}=2000$.

Lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước sau 2,5 giờ là: $4000\cdot 10^{-\frac{1}{2}\log 4.2,5}\approx 707$.

Lượng vi khuẩn mất đi khoảng: $2000-707=1293>1200$

d) Đúng: $P=P_0\cdot 10^{-\alpha t}=\frac{40}{100}.P_0\Leftrightarrow 10^{-\alpha t}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow t=\frac{\log\frac{2}{5}}{-\alpha}=\frac{\log\frac{2}{5}}{-\frac{1}{2}\log 4}\approx 1,32$

Câu 32: Ông A đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi. Lãi suất được cho là không đổi trong suốt thời gian vay tiền. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền cả gốc và lãi ông A rút về sau một năm lớn hơn 850 triệu đồng?

b) Ông A định dùng tiền lãi sau 2 năm để mua chiếc xe SH trị giá 100 triệu đồng. Sau đúng 2 năm tiền lãi thu được đủ để ông A mua chiếc xe đó.

c) Sau ít nhất 45 tháng thì số tiền thu về cả gốc lẫn lãi lớn hơn 1 tỷ đồng?

d) Sau khi gửi, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Một năm sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại ít hơn 776 triệu đồng?

Lời giải

a) Sai: Số tiền cả gốc và lãi ông A rút về sau một năm:

$$A_{12} = A(1+r)^{12} = 800000000.(1+0,5\%)^{12} \approx 849342250 < 850000000$$

b) Đúng: Số tiền lãi ông A rút về sau hai năm:

$$A_{12} = A(1+r)^{12} = 800000000.(1+0,5\%)^{24} - 800000000 \approx 101728000 > 100000000$$

c) Đúng: Số tiền thu về cả gốc lẫn lãi lớn hơn 1 tỷ đồng: $800000000.(1+0,5\%)^n > 1000000000$

$$\Leftrightarrow (1+0,5\%)^n > \frac{5}{4} \Leftrightarrow n > \log_{(1+0,5\%)}\left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow n > 44,74 \text{ tháng.}$$

d) Đúng: Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Sô tiền còn lại sau n tháng đưorc tính theo công thức:

$$S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 800(1,005)^{12} - 6.\frac{(1,005)^{12} - 1}{0,005} = 775.3288753$$
$$= 1200 - 400.(1,005)^{12}$$

Câu 33: Ông Xuân gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng theo phương thức lãi kép với lãi suất cố định là $0,5\%$ một tháng. Cùng thời điểm đó, ông Thắng gửi 10 triệu đồng mỗi tháng vào ngân hàng đó theo phương thức lãi kép với lãi suất cố định là $0,5\%$ một tháng. (Các kết quả trong khẳng định **a)** và **c)** làm tròn đến hàng nghìn). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền cả gốc và lãi ông Xuân nhận được sau 10 tháng là 210228000.

b) Sau ít nhất 81 tháng thì số tiền (cả gốc và lãi) của ông Xuân nhiều hơn 300 triệu đồng.

c) Sau 1 năm số tiền cả gốc và lãi trong ngân hàng của ông Thắng là 123972000.

d) Sau ít nhất 22 tháng thì số tiền của ông Thắng lớn hơn số tiền của ông Xuân.

Lời giải

a) Đúng: Số tiền cả gốc và lãi ông Xuân nhận được sau 10 tháng là

$$200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{10} \approx 210228026$$

b) Sai: Theo công thức lãi kép, số tiền cả gốc và lãi ông Xuân nhận được sau n tháng là

$$200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^{n}.$$

Do đó $200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^n > 300000000 \Leftrightarrow n > \log_{\frac{201}{200}}\frac{3}{2} \approx 81,29558565...$

c) Đúng: Theo công thức lãi kép, số tiền cả gốc và lãi ông Thắng nhận được sau 1 tháng là

$10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^1$.

Số tiền cả gốc và lãi ông Thắng nhận được sau 2 tháng là:

$$10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^2+10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^1=10000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^1+\left(1+\frac{1}{200}\right)^2\right]$$

Số tiền cả gốc và lãi ông Thắng nhận được sau 3 tháng là:

$$10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^3+10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^2+10000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^1$$

$$=10000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^1+\left(1+\frac{1}{200}\right)^2+\left(1+\frac{1}{200}\right)^3\right]$$

Số tiền sau 1 năm là:

$$10000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^1+\left(1+\frac{1}{200}\right)^2+...+\left(1+\frac{1}{200}\right)^{12}\right]$$

$$=10000000\frac{\left(1+\frac{1}{200}\right)\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^{12}-1\right]}{\frac{1}{200}}\approx 123972401$$

d) Đúng: Theo công thức lãi kép, số tiền cả gốc và lãi ông Xuân và ông Thắng nhận được sau n tháng lần lượt là:

$$200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^n, 10000000\frac{\left(1+\frac{1}{200}\right)\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^n-1\right]}{\frac{1}{200}}=2010000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^n-1\right].$$

Do đó $2010000000\left[\left(1+\frac{1}{200}\right)^n-1\right] > 200000000\left(1+\frac{1}{200}\right)^n \Leftrightarrow n > \log_{\frac{201}{200}}\frac{201}{181} \approx 21,01393574$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Chú Thanh gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 4%/năm. Biết rằng lãi kép là hình thức gửi tiền, nếu đến kỳ hạn người gửi không rút tiền lãi thì số tiền lãi sẽ được cộng dồn vào tiền vốn cho kỳ tiếp theo. Hãy tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 8 năm.

Lời giải

Số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm là:

$10.(1+4\%)^8 \approx 13,686$ triệu đồng.

Câu 2: Chất phóng xạ polonium ^{210}Po có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong mẫu chỉ còn lại một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium ^{210}Po còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}\,(g)$. Điều kiện về thời gian để mẫu chất ngày còn lại không nhiều hơn 25 g là

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

$$M \le 25 \Leftrightarrow 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} \le 25 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} \le \frac{25}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{t}{138} \ge 2 \Leftrightarrow t \ge 276 \text{ ngày.}$$

Câu 3: Chú Việt gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 5%/năm. Biết rằng lãi kép là hình thức gửi tiền, nếu đến kỳ hạn người gửi không rút tiền lãi thì số tiền lãi sẽ được cộng dồn vào tiền vốn cho kỳ tiếp theo. Hãy tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm.

Lời giải

Số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm là:

$10.(1+5\%)^{10} \approx 16,289$ triệu đồng.

Câu 4: Mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L=10\log\left(\frac{I}{I_o}\right)(dB)$, trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_o=10^{-12}\,W/m^2$. Biết rằng mức cường độ âm lớn nhất mà tai người có thể nghe được là 130 dB. Điều kiện của cường độ âm để tai người không bị tổn thương là

Lời giải

Do mức cường độ âm lớn nhất mà tai người có thể nghe được là 130 dB nên ta suy ra:

$$L<130 \Leftrightarrow 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right)<130 \Leftrightarrow \log\left(\frac{I}{I_o}\right)<\frac{130}{10} \Leftrightarrow \frac{I}{I_o}<10^{13} \Leftrightarrow I<10^{13}.10^{-12} \Leftrightarrow I<10\,W/m^2$$

Câu 5: Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ radi ^{226}Ra là 1602 năm (tức là một lượng ^{226}Ra sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S=A.e^{-r.t}$ trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $(r<1)$, t là thời gian phân hủy, s là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam ^{226}Ra sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?

Lời giải

Vì chu kì bán rã của chất phóng xạ radi ^{226}Ra là 1602 năm nên ta có:

$\frac{A}{2}=A.e^{-1602.r}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=e^{-1602.r}\Leftrightarrow\ln 2=1602.r\Leftrightarrow r=\frac{\ln 2}{1602}$.

Vậy 5 gam ^{226}Ra sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại số gam là:

$S=A.e^{-r.t}=5.\mathrm{e}^{-4000.\frac{\ln 2}{1602}}\approx 0,886$ (gam).

Câu 6: Số lượng của loại vi khuẩn C trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t)=S(0).5^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn C lúc ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn C có sau t phút. Biết sau 4 phút thì số lượng vi khuẩn C là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn C là 390625000 con?

Lờigiải

Sau 4 phút ta có: $S(4)=S(0).5^4\Rightarrow S(0)=\frac{S(4)}{5^4}=1000.$

Tại thời điểm t số lượng vi khuẩn C là 390625000 con nên ta có:

$$S(t)=S(0).5^t\Leftrightarrow 5^t=\frac{S(t)}{S(0)}\Leftrightarrow 5^t=\frac{390625000}{1000}\Leftrightarrow 5^t=390625\Leftrightarrow t=\log_5 390625=8.$$

Câu 7: Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutolium ^{239}Pu là 24360 năm (tức là một lượng chất ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S=A\mathrm{e}^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 20 gam ^{239}Pu sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam?

Lời giải

Vì Pu^{239} có chu kì bán rã là 24360 năm nên với 20 gam Pu^{239} ta có:

$10=20.\mathrm{e}^{-r.24360}\Leftrightarrow -r.24360=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow r=\frac{\ln 2}{24360}$.

Theo bài ra ta có phương trình $4=20.\mathrm{e}^{-rt}\Leftrightarrow -rt=\ln\frac{1}{5}\Leftrightarrow rt=\ln 5\Leftrightarrow t=\frac{\ln 5}{r}$.

Suy ra $t\approx 56562,2$.

Vậy sau ít nhất 56563 năm thì 20 gam Pu^{239} sẽ phân hủy còn 4 gam.

Câu 8: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) theo công thức $P=P_0.e^{kx}$ (mmHg),trong đó x là độ cao (đo bằng mét), $P_0=760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển $(x=0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71$ (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao 3000 m.

Lời giải

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là $672,71$ (mmHg).

Nên ta có: $672,71=760e^{1000k}\Leftrightarrow e^{1000k}=\dfrac{672,71}{760}\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{1000}\ln\dfrac{672,71}{760}$.

Áp suất ở độ cao 3000 m là $P=760e^{3000k}=760e^{3000.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}}\approx 527,06\ (\text{mmHg})$.

Câu 9: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức: $m(t)=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t=0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Giả sử khối lượng còn lại của 250 gam chất đó sau t ngày là 23 gam, xác định t.

Lời giải

Theo đề bài $m_0=250$, $T=24$ (giờ) $=1$ (ngày), $m(t)=23$.

Ta có $m(t)=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}\Leftrightarrow 23=250\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1}}\Leftrightarrow t\approx 3,4$ (ngày).

Vậy sau 3,5 ngày thì khối lượng còn lại của 250 gam chất đó là 23 gam.

Câu 10: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S=Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r>0$, t là thời gian tăng trưởng). Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Để số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng t bằng bao nhiêu?

Lời giải

Theo đề bài ta có $300=100e^{5r}\Leftrightarrow r\approx 0,2197$.

Để số lượng vi khuẩn ban đầu tăng gấp đôi thì $200=100e^{0,2197t}\Leftrightarrow t\approx 3,15$ (giờ).

Vậy để số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng là 3 giờ 9 phút.

Câu 11: Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Một vật có khối lượng Cacbon ^{14}C ban đầu là m_0 thì sau khoảng thời gian t năm, khối lượng Cacbon ^{14}C còn lại của vật đó là $m(t)=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Các nhà khảo cổ đã tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác đinh được nó đã mất khoảng 25% lượng Cacbon ^{14}C ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

Lời giải

Khối lượng của mẫu đồ cổ khi được tìm thấy là $m(t)=m_0-\dfrac{25}{100}m_0=\dfrac{3}{4}m_0$.

Ta có $m(t)=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}\Leftrightarrow \dfrac{3}{4}m_0=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}\Leftrightarrow t\approx 2387$ (năm).

Vậy mẫu đồ cổ đó có tuổi là 2387 năm.

Câu 12: Biết rằng năm 2023, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nt}$ (trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm), cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

Lời giải

Theo đề bài ta có $r = \frac{17}{100} = 0,017$ và $A = 78685800$.

Áp dụng công thức ta được $S = Ae^{Nt} \Leftrightarrow 120000000 = 78685800e^{0,017N} \Leftrightarrow N \approx 24,8$.

Vậy đến năm 2048 thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Biết rằng nếu gọi các loại cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây xanh đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng dừng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp và chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5750}}(\%)$. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%. Hãy xác định niên đại của công trình đó.

Lời giải

Theo đề bài ta có $P(t) = 65 \Leftrightarrow 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5750}} = 65 \Leftrightarrow t \approx 3574$.

Vậy tuổi của công trình kiến trúc đó là 3574 năm.

Câu 14: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log\frac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A = 3$ (Ben) và $L_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có $\begin{cases} L_A = \log\frac{k}{OA^2} = 3 \\ L_B = \log\frac{k}{OB^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = \frac{\sqrt{10k}}{100} \\ OB = \frac{\sqrt{10k}}{1000} \end{cases} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{10k}}{100} + \frac{\sqrt{10k}}{1000} = \frac{11\sqrt{10k}}{1000}$

Gọi N là trung điểm AB $\Rightarrow ON = \frac{AB}{2} - OB = \frac{11\sqrt{10k}}{2000} - \frac{\sqrt{10k}}{1000} = \frac{9\sqrt{10k}}{2000}$

Suy ra mức cường độ âm tại N bằng $L_N = \log\frac{k}{ON^2} = \log\frac{2000^2k}{81.10k} \approx 3,69$ (Ben).

Câu 15: Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M=\log\frac{A}{A_0}$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỉ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Tính cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ.

Lời giải

Gọi trận động đất ở San Francisco có cường độ $M_1=8,3\Leftrightarrow\log\frac{A_1}{A_0}=8,3$

Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ $A_2=4.A_1$

$\Rightarrow M_2=\log\frac{A_2}{A_0}=\log\frac{4.A_1}{A_0}=\log 4+\log\frac{A_1}{A_0}=\log 4+M_1\approx 8,9$ độ richter.

Câu 16: Thang đo Richte được Charles Francis đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị Richte. Công thức tính độ chấn động như sau: $M_L=\log A-\log A_o$, M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa được đo bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn. Hỏi theo thang độ Richte, cùng với một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một chận động đất 7 độ Richte sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richte?

Lời giải

Trận động đất 7 độ Richte có $M_7=\log\frac{A_7}{A_0}=7\Leftrightarrow\frac{A_7}{A_0}=10^7\Leftrightarrow A_7=10^7.A_0$.

Trận động đất 5 độ Richte có $M_5=\log\frac{A_5}{A_0}=5\Leftrightarrow\frac{A_5}{A_0}=10^5\Leftrightarrow A_5=10^5.A_0$.

$\Rightarrow A_7=100.A_5$.

Vậy trận động đất 7 độ Richte có biên độ tối đa gấp 100 lần trận động đất 5 độ Richte.

Câu 17: Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ Trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $2°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $5°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái đất tăng thêm $t°C$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t)=k.a^t$ trong đó k,a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu độ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%?

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}k.a^2=3\%\\k.a^5=10\%\end{cases}\Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{10}{3}};k=\frac{3\%}{a^2}$

Tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20% $\Rightarrow\frac{3\%}{a^2}.a^t=20\%\Rightarrow a^{t-2}=\frac{20}{3}$

$\Rightarrow t = 2 + \log_a \dfrac{20}{3} = 2 + \log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}} \dfrac{20}{3} \approx 6,7$

Câu 18: Vào năm 1938, nhà vật lí Frank Benford đã đưa ra công thức ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của một bộ số trong tự nhiên (ví dụ: độ dài một con sông, chiều cao một tòa nhà, lợi nhuận một công ty, các hằng số vật lý cơ bản…).

Trích nguồn https://vi.wikipedia.org/wiki/Lu%E1%BA%ADt_Benford

$$P(d) = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

Chữ số có xác suất bằng $12,5\%$ được chọn là

Lời giải

Với $P = 12,5\% = 0,125$, ta có $\log\left(1+\dfrac{1}{d}\right) = 0,125 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{d} = 10^{0,125} \Leftrightarrow d = \dfrac{1}{10^{0,125} - 1} \approx 3$.

Câu 19: Năm 2023, hãng xe ô tô Vinfast niêm yết giá bán loại xe điện VF8 là $850.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2028 Vinfast niêm yết giá bán loại xe điện VF8 là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Lời giải

Sau năm thứ nhất giá bán loại xe điện VF8 là: $850.000.000(1-2\%)$ đồng

Sau năm thứ hai giá bán loại xe điện VF8 là: $850.000.000(1-2\%)^2$ đồng

Sau năm thứ 5 giá bán loại xe điện VF8 là: $850.000.000(1-2\%)^5 \approx 768.333.000$ đồng.

Như vậy, năm 2028 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe điện VF8 là $768.333.000$ đồng.

Câu 20: Thang Richter, một hàm logarit được sử dụng để đo cường độ của các trận động đất. Cường độ của một trận động đất có liên quan đến lượng năng lượng được giải phóng bởi trận động đất. Dụng cụ gọi là địa chấn phát hiện chuyển động trong trái đất; chuyển động nhỏ nhất có thể được phát hiện sẽ hiển thị trên máy đo địa chấn dưới dạng sóng có biên độ A0.
A – thước đo biên độ của sóng động đất

A0 – biên độ của sóng nhỏ nhất có thể phát hiện được (hoặc sóng chuẩn)

Từ đó, bạn có thể tìm thấy R, thước đo độ Richter về cường độ của trận động đất bằng côngthức:

$$R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

Cường độ của một trận động đất thường sẽ đo được từ 2 đến 10 độ Richter. Bất kỳ trận động đất nào đăng ký dưới 5 là khá nhỏ; chúng có thể làm rung chuyển mặt đất một chút, nhưng hiếm khi đủ mạnh để gây ra nhiều thiệt hại. Các trận động đất có cường độ từ 5 đến 7,9 độ Richter thường nghiêm trọng hơn nhiều và bất kỳ trận động đất nào trên 8 độ Richter đều có khả năng gây ra thiệt hại lớn. (Đánh giá cao nhất từng được ghi nhận cho một trận động đất là 9,5 trong trận động đất Valdivia năm 1960 ở Chile.)

(Nguồn: Mathematical Modeling with Exponential and Logarithmic Functions (nroc.org))

Nếu biên độ của sóng động đất đo được gấp 256 lần biên độ của sóng nhỏ nhất thì máy sẽ đo được độ lớn là

Lời giải

Nếu biên độ của sóng động đất đo được gấp 256 lần biên độ của sóng nhỏ nhất thì $\dfrac{A}{A_o}=256$ nên

độ lớn động đất ở đây là $R=\log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)=\log(256)=2.4$

Câu 21: Sau khi tốt nghiệp đại học, anh Nam thực hiện một dự án khởi nghiệp. Anh vay vốn từ ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất $0,6\%$ một tháng. Phương án trả nợ của Nam là sau đúng một tháng kể từ thời điểm vay anh tao bắt đầu trả nợ, hai lần liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền trả của mỗi lần là như nhau và hoàn thành sau đúng 5 năm kể từ khi vay. Tuy nhiên sau khi dự án có hiệu quả và trả nợ được 12 tháng theo phương án cũ, anh Nam muốn rút ngắn thời gian trả nợ nên từ tháng tiếp theo, mỗi tháng anh trả nợ cho ngân hàng 9 triệu đồng. Biết rằng ngân hàng chỉ tính tiền lãi trên số dưng̣ thực tế của tháng đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng từ thời điểm vay anh Nam trả hết nợ?

Lời giải

Theo dự định số tiền phải trả hàng tháng bằng

$$m=A_i.\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}=200.0,006.\frac{(1,006)^{60}}{(1,006)^{60}-1}=\frac{6}{5}.\frac{(1,006)^{60}}{(1,006)^{60}-1}$$

Số tiền còn nợ sau 12 tháng là

$$A_{12}=A.(1+i)^{12}-\left[m+m(1+i)+...+m(1+i)^{11}\right]=A(1+i)^{12}-m.\frac{(1+i)^{12}-1}{i}=165,53 \text{ triệu đồng}$$

Gọi n là số tháng tính từ thời điểm hết 12 tháng đến lúc trả hết nợ có

$$A_{12}.(1+i)^n-\left[9+9.(1+i)+...+9(1+i)^{n-1}\right]=0\Leftrightarrow A_{12}.(1+i)^n-9.\frac{(1+i)^n-1}{i}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (1,006)^n(1500-A_{12})\le 1500\Leftrightarrow n\ge \log_{1,006}\frac{1500}{1500-A_{12}}\approx 19,55$$

Vậy anh Nam cần ít nhất $12+20=32$ tháng để trả hết nợ.

Câu 22: Mùa hè năm 2023, để chuẩn bị cho “học kì quân đội” dành cho các bạn nhỏ, một đơn vị bộ đội chuẩn bị thực phẩm cho các bạn nhỏ, dự kiến đủ dùng trong 45 ngày (năng suất ăn của mỗi ngày là như nhau). Nhưng bắt đầu từ ngày thứ 11, do số lượng thành viên tham gia tăng lên, nên lượng tiêu thụ thực phẩm tăng lên 10% mỗi ngày (ngày sau tăng 10% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn đó đủ dùng cho bao nhiêu ngày?

Lời giải

Gọi x là số thực phẩm dự kiến dùng cho 1 ngày $\Rightarrow$ Tổng số thực phẩm $45x$.

Số thực phẩm đã dùng trong 10 ngày đầu là $10x$.

Nhưng bắt đầu từ ngày thứ 11, do số lượng thành viên tham gia tăng lên, nên lượng tiêu thụ thực phẩm tăng lên 10% mỗi ngày.

$\Rightarrow$Số thực phẩm dùng trong ngày thứ n là $x(1+0,1)^n$.

Tổng số thực phẩm đã dùng sau ngày thứ n là

$$10x + x + x(1+0,1)^1 + ... + x(1+0,1)^n = 10x + x\frac{(1+0,1)^{n+1}-1}{0,1}$$

Sau n ngày dùng hết sản phẩm nếu

$$10x + x\frac{(1+0,1)^{n+1}-1}{0,1} = 45x \Leftrightarrow \frac{(1+0,1)^{n+1}-1}{0,1} = 35$$

$$\Leftrightarrow (1,1)^{n+1} = 4,5 \Leftrightarrow n+1 = \log_{1,1} 4,5 \Leftrightarrow n \approx 15,78.$$

Suy ra, thực tế lượng thức ăn đó đủ dùng cho $10+15=25$ ngày.

-----------------HẾT-----------------