SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

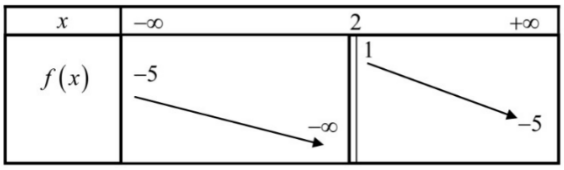
KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH LỚP 12
NĂM HỌC 2024 – 2025

ĐỀ CHÍNH THỨC
Mã đề: 0001

MÔN KHẢO SÁT: TOÁN
Thời gian làm bài 90 phút (không kể thời gian phát đề)
(Đề có 04 trang)

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=64$. **B.** $(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=8$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=64$.

Câu 3. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được cho ở Bảng.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[40;45)$	42,5	4
$[45;50)$	47,5	14
$[50;55)$	52,5	8
$[55;60)$	57,5	10
$[60;65)$	62,5	6
$[65;70)$	67,5	2
		$n=44$

Biết số trung bình của mẫu số liệu đã cho là $\overline{x} \approx 53{,}18$. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) là

A. $s^2 = 46{,}2$. **B.** $s^2 = 46{,}12$. **C.** $s^2 = 46{,}21$. **D.** $s^2 = 46{,}1$.

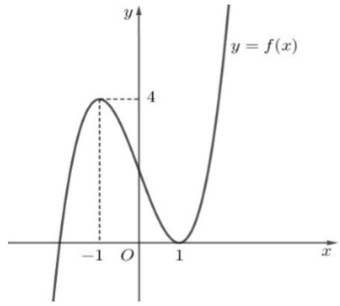
Câu 4. Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, hàm số $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f_1(x) = -\cos 2x$. **B.** $f_4(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x$. **C.** $f_3(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$. **D.** $f_2(x) = \cos 2x$.

Câu 5. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_4}(3;4;1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}(2;5;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}(2;-5;3)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

A. $(-1;4)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $x=-1$. **D.** $y=4$.

Câu 7. Biết $\int_0^1 f(x)dx=3$ và $\int_0^1 g(x)dx=-2$. Khi đó $\int_0^1 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. −6. **B.** −1. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 8. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết góc giữa hai vectơ này bằng 120^0. Hãy tính $T=\vec{a}.\vec{b}$.

A. $T=\frac{-\sqrt{3}}{2}$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=\frac{-1}{2}$. **D.** $T=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy ABC vuông tại B. Gọi M là trung điểm của SB. Đường thẳng đi qua hai điểm nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAB).

A. $A;C$. **B.** $M;C$. **C.** $S;C$. **D.** $B;C$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x-1)<3$ là

A. $\left(\frac{1}{3};3\right)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{10}{3}\right)$.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=9$ và công sai $d=2$. Giá trị của u_2 bằng

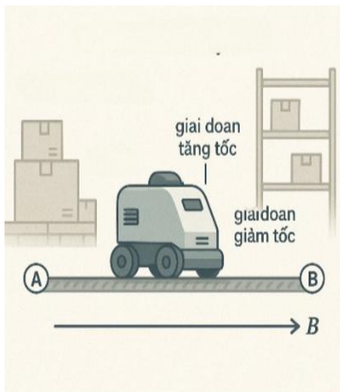
A. 7. **B.** 18. **C.** 11. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 12. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$. **B.** $y=(0,5)^x$. **C.** $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$. **D.** $y=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng (Đ) hoặc sai (S).

Câu 1. Một robot tự hành ở một cảng vận chuyển công nghệ cao bắt đầu di chuyển từ vị trí nghỉ tại điểm A. Robot di chuyển như sau: Trong giai đoạn đầu, robot tăng tốc đều từ vận tốc $0(m/s)$ đến $10(m/s)$ trong thời gian chưa biết t_1 giây theo hàm số vận tốc $v_1(t)=at$ (a gọi là gia tốc trong giai đoạn này, $a\left(m/s^2\right)$). Sau đó, robot tiếp tục di chuyển với vận tốc không đổi trong 40 giây. Cuối cùng, robot giảm tốc đều từ $10(m/s)$ và dừng lại đúng tại băng chuyền điểm B với thời gian t_2 giây theo hàm vận tốc $v_2(t)=10-bt$ (b gọi là gia tốc trong giai đoạn này, $b\left(m/s^2\right)$). Toàn bộ quá trình vận chuyển diễn ra trong tổng thời gian là 70 giây.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

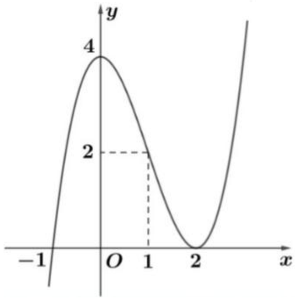
a) Nếu gia tốc $b=0,8\left(m/s^2\right)$, thời gian giảm tốc t_2 lớn hơn 13 giây.

b) Nếu gia tốc $a=0,5\left(m/s^2\right)$, thời gian tăng tốc t_1 bé hơn 21 giây.

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{5}{4}$.

d) Tổng quãng đường mà robot đã di chuyển từ A đến B là $550m$.

Câu 2. Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(-1)$.

c) Hàm số $g(x) = f(x) - 2025x + 2024$ có đúng 2 điểm cực trị.

d) Phương trình $f'(\cos x) = 3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 3. Một trường THPT Chuyên cử một đội tuyển gồm 90 học sinh tham dự kỳ thi Học sinh giỏi cấp Quốc gia. Đội tuyển có cả học sinh nam và học sinh nữ. Sau kỳ thi, kết quả thống kê cho thấy có 85 học sinh đạt huy chương. Thông tin chi tiết như sau:

- Trong tổng số 90 học sinh, có 50 học sinh nam và 40 học sinh nữ.
- Trong số 85 học sinh đạt huy chương, có 48 học sinh nam.

Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ đội tuyển sau khi cuộc thi kết thúc.

a) Xác suất chọn được một học sinh nữ là $\dfrac{4}{9}$.

b) Xác suất chọn được một học sinh nam đạt huy chương là $\dfrac{7}{15}$.

c) Biết rằng học sinh được chọn là nam, xác suất học sinh đó đạt huy chương là $\dfrac{24}{25}$.

d) Biết rằng học sinh được chọn đã đạt huy chương, xác suất học sinh đó là nữ là $\dfrac{37}{85}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0), B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $A'(0;0;3)$. Gọi P là trung điểm $B'C'$, K là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz).

a) Toạ độ điểm C là $(3;3;0)$.

b) Trọng tâm của tam giác PCD có tọa độ là $\left(2;\dfrac{5}{4};1\right)$.

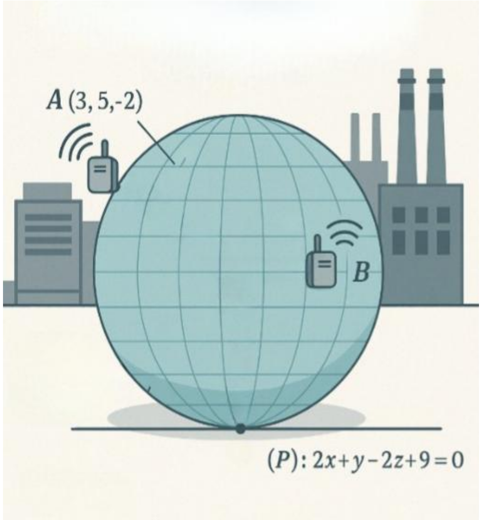
c) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}\right|$ là $\dfrac{5}{2}$.

d) Góc giữa hai đường thẳng AP và BC' bằng 60^0.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Trong một trung tâm logistics, người ta cần thiết kế một thùng hàng hình hộp chữ nhật để đóng gói và vận chuyển thiết bị điện tử. Tổng diện tích các mặt ngoài của thùng bằng 36 m^2 (bao gồm cả mặt đáy, mặt nắp và 4 mặt bên). Để đảm bảo khả năng đóng gói vừa vặn thiết bị, đường chéo không gian của thùng phải dài 6 mét. Thể tích lớn nhất có thể của thùng hàng này là bao nhiêu (tính theo đơn vị mét khối, làm tròn đến hàng phần chục)?

Câu 2. Một công ty xây dựng một hệ thống Giám sát môi trường tại khu công nghiệp. Hai cảm biến không dây được đặt tại hai vị trí A, B trong không gian 3 chiều để thu thập dữ liệu không khí. Để đảm bảo tín hiệu truyền giữa hai cảm biến ổn định, công ty thiết kế một bóng bảo vệ tín hiệu hình cầu di động nhưng luôn đi qua cả hai cảm biến A và B. Bóng này cần tiếp xúc với mặt đất để đảm bảo tính ổn định. Giả sử trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ các điểm là $A(3;5;-2)$, $B(-1;3;2)$ và mặt đất được mô tả bằng mặt phẳng: $(P): 2x+y-2z+9=0.$ Trong quá trình mô phỏng, điểm tiếp xúc giữa bóng bảo vệ và mặt đất (gọi là C) thay đổi. Kỹ sư cần xác định khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0,0,0)$ đến điểm tiếp xúc C để đánh giá mức độ ảnh hưởng từ vị trí đặt thiết bị. Gọi m_1 là giá trị lớn nhất, và m_2 là giá trị nhỏ nhất của độ dài $OC.$ Tính giá trị ${m_1}^2+{m_2}^2.$



Câu 3. Trong lớp chuyên Toán trường Chuyên Lam Sơn có 36 bàn học cá nhân (mỗi bàn chỉ được xếp nhiều nhất một bạn), được xếp thành 4 hàng và 9 cột (các hàng được đánh số từ trên xuống dưới theo thứ tự từ 1 đến 4, các cột được đánh số từ trái qua phải theo thứ tự từ 1 đến 9). Biết sĩ số học sinh của lớp là 35. Sau học kì I, thầy chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các bạn học sinh trong lớp. Giả sử trước thời điểm chuyển chỗ bạn ngồi ở hàng thứ m, cột thứ n và sau khi chuyển chỗ bạn đó sẽ ngồi ở hàng thứ a_m, cột thứ a_n thì ta gán cho bạn đó số nguyên là $(a_m+a_n)-(m+n)$. Nếu ban đầu bàn trống ở vị trí $(1;1)$, sau khi chuyển chỗ bàn trống ở vị trí $(2;5)$ thì tổng của 35 số nguyên được gán cho 35 bạn là bao nhiêu?

Câu 4. Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bán được 1000 điện thoại A với giá 14 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán x cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p(x)$ (triệu đồng) và hàm chi phí hàng tuần $C(x)=12000-3x$ (triệu đồng). Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bán mỗi cái điện thoại A với giá bao nhiêu (triệu đồng)?

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C). Tính bình phương của độ dài đoạn thẳng AB.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2\sqrt{5}$, tâm O và $ABC=60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm cạnh AB. Tính bình phương khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC).

-----------------*Hết*-----------------

Họ và tên thí sinh ……………………………... Số báo danh……………………………………

Chữ kí giám thị số 1: ....;Chữ kí giám thị số 2...

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO THANH HÓA

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH LỚP 12

NĂM HỌC 2024 – 2025

ĐỀ CHUẨN

MÔN KHẢO SÁT: TOÁN

Thời gian làm bàI 90 phút (không kể thời gian phát đề)

(Đề có 04 trang)

Phần 1. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 11. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 18. **D.** 7.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}(2;-5;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}(2;5;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}(3;4;1)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 8$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 64$. **D.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64$.

Câu 4. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -2$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** -6.

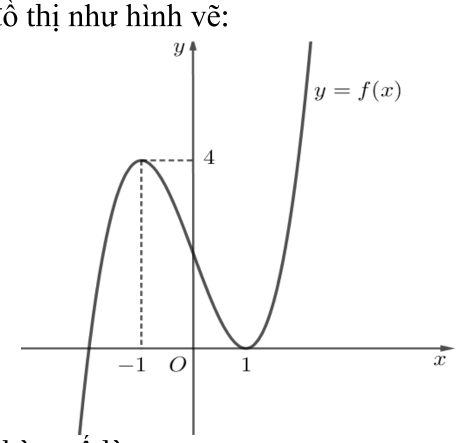
Câu 5. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$. **B.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. **C.** $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. **D.** $y = (0,5)^x$.

Câu 6. Trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, hàm số $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f_3(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $f_4(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x$. **C.** $f_2(x) = \cos 2x$. **D.** $f_1(x) = -\cos 2x$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

A. $x = -1$. **B.** $y = 4$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(-1;4)$.

Câu 8. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được cho ở Bảng.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[40;45)$	42,5	4
$[45;50)$	47,5	14
$[50;55)$	52,5	8
$[55;60)$	57,5	10
$[60;65)$	62,5	6
$[65;70)$	67,5	2
		$n=44$

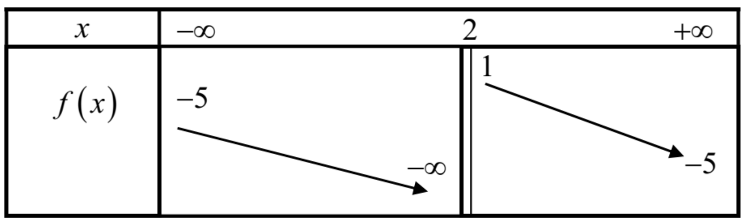
Biết số trung bình của mẫu số liệu đã cho là $\overline{x}\approx 53{,}18$. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) là

A. $s^2=46{,}12$. **B.** $s^2=46{,}1$. **C.** $s^2=46{,}21$. **D.** $s^2=46{,}2$.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x-1)<3$ là

A. $\left(\frac{1}{3};3\right)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{10}{3}\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết góc giữa hai vectơ này bằng 120^0. Hãy tính $T=\vec{a}.\vec{b}$.

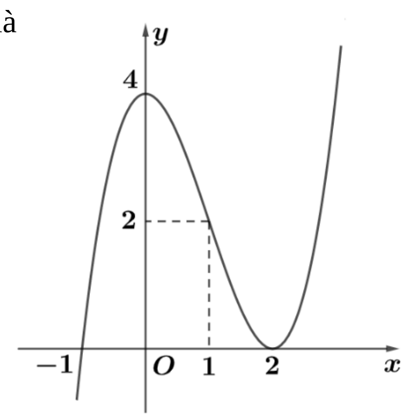
A. $T=\frac{-1}{2}$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy ABC vuông tại B. Gọi M là trung điểm của SB. Đường thẳng đi qua hai điểm nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAB).

A. $A;C$. **B.** $S;C$. **C.** $B;C$. **D.** $M;C$.

Phần 2. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



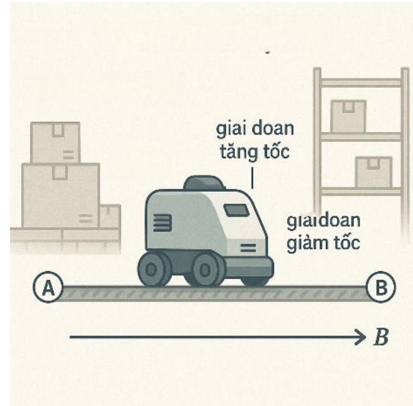
a) Hàm số $g(x)=f(x)-2025x+2024$ có đúng 2 điểm cực trị.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

d) Phương trình $f'(\cos x)=3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 2: Một robot tự hành ở một cảng vận chuyển công nghệ cao bắt đầu di chuyển từ vị trí nghỉ tại điểm A. Robot di chuyển như sau: Trong giai đoạn đầu, robot tăng tốc đều từ vận tốc $0\left(m/s\right)$ đến $10\left(m/s\right)$ trong thời gian chưa biết t_1 giây theo hàm số vận tốc $v_1\left(t\right)=at$ (a gọi là gia tốc trong giai đoạn này, $a\left(m/s^2\right)$). Sau đó, robot tiếp tục di chuyển với vận tốc không đổi trong 40 giây. Cuối cùng, robot giảm tốc đều từ $10\left(m/s\right)$ và dừng lại đúng tại băng chuyền điểm B với thời gian t_2 giây theo hàm vận tốc $v_2\left(t\right)=10-bt$ (b gọi là gia tốc trong giai đoạn này, $b\left(m/s^2\right)$). Toàn bộ quá trình vận chuyển diễn ra trong tổng thời gian là 70 giây.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Nếu gia tốc $a=0,5\left(m/s^2\right)$, thời gian tăng tốc t_1 bé hơn 21 giây.

b) Nếu gia tốc $b=0,8\left(m/s^2\right)$, thời gian giảm tốc t_2 lớn hơn 13 giây.

c) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le\dfrac{5}{4}$.

d) Tổng quãng đường mà robot đã di chuyển từ A đến B là $550\,m$.

Câu 3: Một trường THPT Chuyên cử một đội tuyển gồm 90 học sinh tham dự kỳ thi Học sinh giỏi cấp Quốc gia. Đội tuyển có cả học sinh nam và học sinh nữ. Sau kỳ thi, kết quả thống kê cho thấy có 85 học sinh đạt huy chương. Thông tin chi tiết như sau:

- Trong tổng số 90 học sinh, có 50 học sinh nam và 40 học sinh nữ.
- Trong số 85 học sinh đạt huy chương, có 48 học sinh nam.

Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ đội tuyển sau khi cuộc thi kết thúc.

a) Xác suất chọn được một học sinh nữ là $\dfrac{4}{9}$.

b) Xác suất chọn được một học sinh nam và đạt huy chương là $\dfrac{7}{15}$

c) Biết rằng học sinh được chọn là nam, xác suất học sinh đó đạt huy chương là $\dfrac{24}{25}$.

d) Biết rằng học sinh được chọn đã đạt huy chương, xác suất học sinh đó là nữ là $\dfrac{37}{85}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\left(0;0;0\right),B\left(3;0;0\right)$, $D\left(0;3;0\right)$, $A'\left(0;0;3\right)$. Gọi P là trung điểm $B'C'$, K là điểm thuộc mặt phẳng $\left(Oxz\right)$.

a) Toạ độ điểm C là $\left(3;3;0\right)$.

b) Trọng tâm của tam giác PCD có tọa độ là $\left(2;\dfrac{5}{4};1\right)$.

c) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right|$ là $\dfrac{5}{2}$.

d) Góc giữa hai đường thẳng AP và BC' bằng 60^0.

Phần 3. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2\sqrt{5}$, tâm O và $ABC = 60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm cạnh AB. Tính bình phương khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC).

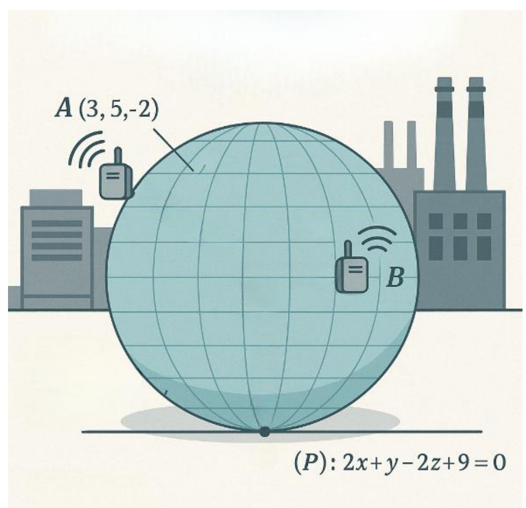
Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C). Tính bình phương của độ dài đoạn thẳng AB.

Câu 3. Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bán được 1000 điện thoại A với giá 14 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán x cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p(x)$ (triệu đồng) và hàm chi phí hàng tuần $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng). Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bán mỗi cái điện thoại A với giá bao nhiêu (triệu đồng)?

Câu 4. Trong lớp chuyên Toán trường Chuyên Lam Sơn có 36 bàn học cá nhân (mỗi bàn chỉ được xếp nhiều nhất một bạn), được xếp thành 4 hàng và 9 cột (các hàng được đánh số từ trên xuống dưới theo thứ tự từ 1 đến 4, các cột được đánh số từ trái qua phải theo thứ tự từ 1 đến 9). Biết sĩ số học sinh của lớp là 35. Sau học kì I, thầy chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các bạn học sinh trong lớp. Giả sử trước thời điểm chuyển chỗ bạn ngồi ở hàng thứ m, cột thứ n và sau khi chuyển chỗ bạn đó sẽ ngồi ở hàng thứ a_m, cột thứ a_n thì ta gán cho bạn đó số nguyên là $(a_m + a_n) - (m+n)$. Nếu ban đầu bàn trống ở vị trí $(1;1)$, sau khi chuyển chỗ bàn trống ở vị trí $(2;5)$ thì tổng của 35 số nguyên được gán cho 35 bạn là bao nhiêu?

Câu 5: Trong một trung tâm logistics, người ta cần thiết kế một thùng hàng hình hộp chữ nhật để đóng gói và vận chuyển thiết bị điện tử. Tổng diện tích các mặt ngoài của thùng bằng 36 m² (bao gồm cả mặt đáy, mặt nắp và 4 mặt bên). Để đảm bảo khả năng đóng gói vừa vặn thiết bị, đường chéo không gian của thùng phải dài 6 mét. Thể tích lớn nhất có thể của thùng hàng này là bao nhiêu (tính theo đơn vị mét khối, làm tròn đến hàng phần chục)?

Câu 6: Một công ty xây dựng một hệ thống Giám sát môi trường tại khu công nghiệp. Hai cảm biến không dây được đặt tại hai vị trí A, B trong không gian 3 chiều để thu thập dữ liệu không khí. Để đảm bảo tín hiệu truyền giữa hai cảm biến ổn định, công ty thiết kế một bóng bảo vệ tín hiệu hình cầu di động nhưng luôn đi qua cả hai cảm biến A và B. Bóng này cần tiếp xúc với mặt đất để đảm bảo tính ổn định. Giả sử trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ các điểm là $A(3;5;-2)$, $B(-1;3;2)$ và mặt đất được mô tả bằng mặt phẳng: $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$. Trong quá trình mô phỏng, điểm tiếp xúc giữa bóng bảo vệ và mặt đất (gọi là C) thay đổi. Kỹ sư cần xác định khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0,0,0)$ đến điểm tiếp xúc C để đánh giá mức độ ảnh hưởng từ vị trí đặt thiết bị. Gọi m_1 là giá trị lớn nhất, và m_2 là giá trị nhỏ nhất của độ dài OC. Tính giá trị $m_1^2 + m_2^2$.



--------------*Hết*--------------

Họ và tên thí sinh …………………………... Số báo danh……………………………………

Chữ kí giám thị số 1: ....; Chữ kí giám thị số 2.......................................

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO THANH HÓA

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH LỚP 12

NĂM HỌC 2024 – 2025

ĐÁP ÁN ĐỀ CHUẨN

MÔN KHẢO SÁT: TOÁN

Thời gian làm bàI 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 11. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 18. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A. Ta có: $u_2 = u_1 + d = 9 + 2 = 11$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}(2;-5;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}(2;5;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}(3;4;1)$.

Lời giải

Chọn B

Đúng lý thuyết chọn đáp án B.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 8$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$.

C. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64$. **D.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64$.

Lời giải

Chọn B

Vì mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$ nên mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$ và có bán kính $R = AB$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-2;0;2)$. Suy ra $R = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{2}$.

Vậy : $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$.

Câu 4. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -2$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** –1. **D.** –6.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^1 [f(x)+g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 3 + (-2) = 1.$$

Câu 5. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$. **B.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. **C.** $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. **D.** $y = (0,5)^x$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = a^x$ đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $0 < a < 1$.

Câu 6. Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, hàm số $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

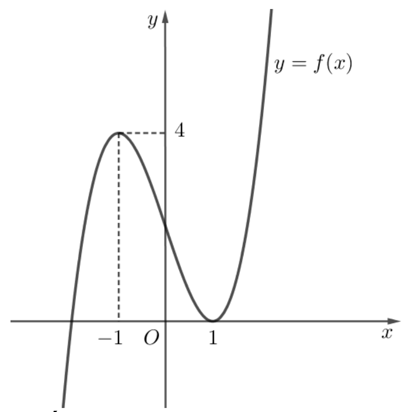
A. $f_3(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $f_4(x)=-\dfrac{1}{4}\cos 2x$. **<u>C.</u>** $f_2(x)=\cos 2x$. **D.** $f_1(x)=-\cos 2x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)'=\cos 2x$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

A. $x=-1$. **B.** $y=4$. **C.** $(1;0)$. **<u>D.</u>** $(-1;4)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 8. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được cho ở Bảng.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[40;45)$	42,5	4
$[45;50)$	47,5	14
$[50;55)$	52,5	8
$[55;60)$	57,5	10
$[60;65)$	62,5	6
$[65;70)$	67,5	2
		$n=44$

Biết số trung bình của mẫu số liệu đã cho là $\overline{x}\approx 53{,}18$. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) là

A. $s^2=46{,}12$. **<u>B.</u>** $s^2=46{,}1$. **C.** $s^2=46{,}21$. **D.** $s^2=46{,}2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4.(42{,}5-53{,}18)^2+14.(47{,}5-53{,}18)^2+8.(52{,}5-53{,}18)^2+$

$+10.(57{,}5-53{,}18)^2+6\cdot(62{,}5-53{,}18)^2+2.(67{,}5-53{,}18)^2=2029{,}5456.$

Vậy phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $s^2=\dfrac{2029{,}5456}{44}\approx 46{,}1$

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x-1)<3$ là

A. $\left(\frac{1}{3};3\right)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{10}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\log_2(3x-1)<3 \Leftrightarrow 0<3x-1<2^3$ hay $\frac{1}{3}<x<3$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || 1	$\searrow$	-5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết góc giữa hai vectơ này bằng 120^0. Hãy tính $T=\vec{a}.\vec{b}$.

A. $T=\frac{-1}{2}$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $T=\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=1.1.\cos120^0=\frac{-1}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy ABC vuông tại B. Gọi M là trung điểm của SB. Đường thẳng đi qua hai điểm nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAB).

A. $A;C$. **B.** $S;C$. **C.** $B;C$. **D.** $M;C$.

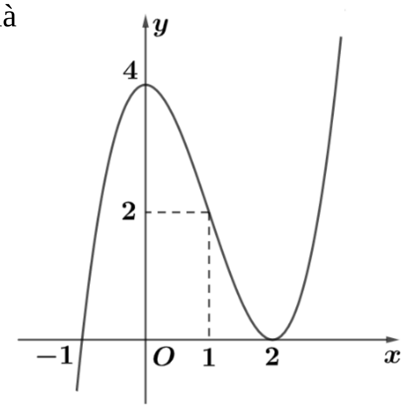
Lời giải

Chọn C

Do $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp BC$ mà $AB\perp BC$ nên $BC\perp(SAB)$. Chọn đáp án **C**.

Phần 2. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm đa thức $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Hàm số $g(x) = f(x) - 2025x + 2024$ có đúng 2 điểm cực trị.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(-1)$.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

d) Phương trình $f'(\cos x) = 3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Đáp án: SAI | ĐÚNG | SAI | ĐÚNG

a) Ta có $g'(x) = f'(x) - 2025$ nên $g'(x) = 0$ cho ta $f'(x) = 2025$. Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì ta có phương trình $f'(x) = 2025$ có một nghiệm đơn $x = x_0$ nên $g'(x)$ đổi dấu qua nghiệm này. Vậy hàm số $g(x) = f(x) - 2025x + 2024$ có đúng một điểm cực trị. Chọn **SAI.**

b) Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(-1)$. Chọn đáp án **ĐÚNG.**

c) Dựa vào bảng biến thiên ta cũng thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$ nên ta chọn đáp án **SAI.**

d) Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ thì ta có phương trình $f'(\cos x) = 3$ có các nghiệm thoả mãn $\cos x = a \in (-1;0)$; $\cos x = b \in (0;1)$ và $\cos x = c \in (1;2)$.

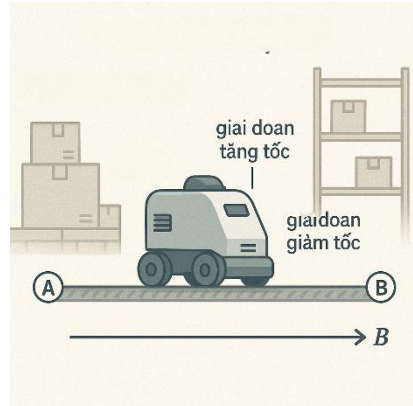
+ $\cos x = a \in (-1;0)$ cho 2 nghiệm x phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

+ $\cos x = b \in (0;1)$ cho 3 nghiệm x phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

+ $\cos x = c \in (2;+\infty)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $f'(\cos x) = 3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$. Chọn đáp án **ĐÚNG.**

Câu 2: Một robot tự hành ở một cảng vận chuyển công nghệ cao bắt đầu di chuyển từ vị trí nghỉ tại điểm A. Robot di chuyển như sau: Trong giai đoạn đầu, robot tăng tốc đều từ vận tốc $0(m/s)$ đến $10(m/s)$ trong thời gian chưa biết t_1 giây theo hàm số vận tốc $v_1(t)=at$ (a gọi là gia tốc trong giai đoạn này, $a(m/s^2)$). Sau đó, robot tiếp tục di chuyển với vận tốc không đổi trong 40 giây. Cuối cùng, robot giảm tốc đều từ $10(m/s)$ và dừng lại đúng tại băng chuyền điểm B với thời gian t_2 giây theo hàm vận tốc $v_2(t)=10-bt$ (b gọi là gia tốc trong giai đoạn này, $b(m/s^2)$). Toàn bộ quá trình vận chuyển diễn ra trong tổng thời gian là 70 giây.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Nếu gia tốc $a=0,5(m/s^2)$, thời gian tăng tốc t_1 bé hơn 21 giây.

b) Nếu gia tốc $b=0,8\,(m/s^2)$, thời gian giảm tốc t_2 lớn hơn 13 giây.

c) $a+b\le\frac{5}{4}(m/s^2)$

d) Tổng quãng đường mà robot đã di chuyển từ A đến B là $550m$

Lời giải

Đáp án: ĐÚNG | SAI | SAI | ĐÚNG

Lần tăng tốc đầu tiên xe chuyển động với vận tốc $v(t)=a.t$, $(a>0)$.

Đến khi xe đạt vận tốc $10\,\text{m/s}$ thì xe chuyển động hết $t_1=\frac{10}{a}(\text{s})$.

Lần giảm tốc, xe chuyển động với vận tốc $v_2=10-bt$, $(b>0)$.

Khi xe dừng lại thì xe chuyển động thêm được $10-bt_2=0\Rightarrow t_2=\frac{10}{b}(\text{s})$.

Tổng thời gian hành trình

Tổng thời gian: $t_1+40+t_2=70\Rightarrow\frac{10}{a}+\frac{10}{b}=30\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$

a) Nếu gia tốc $a=0,5(m/s^2)$, thời gian tăng tốc $t_1=\frac{10}{0,5}=20$ giây <21 giây. Đáp án: **ĐÚNG.**

b) Nếu gia tốc $b=0,8\,(m/s^2)$, thời gian giảm tốc $t_2=\frac{10}{0,8}=12,5$ giây <13 giây. Đáp án: **SAI.**

c) Với $a>0,b>0$**,** ta có bất đẳng thức: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge4$ mà $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$ nên $a+b\ge\frac{4}{3}$.

Do đó $a+b\le\frac{5}{4}(m/s^2)$ là một đáp án **SAI.**

d) Quãng đường tăng tốc: $S_1=\int_0^{t_1}v(t)dt=\int_0^{t_1}at\,dt=\frac{1}{2}a(t_1)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{a}=\frac{50}{a}\,(m)$.

Quãng đường giảm tốc: $S_2=\int_0^{t_2}(10-bt)dt=10t_2-\frac{1}{2}bt_2^2$

Ta có $t_2=\frac{10}{b}\Rightarrow S_2=10\cdot\frac{10}{b}-\frac{1}{2}b\left(\frac{10}{b}\right)^2=\frac{100}{b}-\frac{50}{b}=\frac{50}{b}(m)$

Quãng đường chuyển động đều: $10\cdot40=400\,(m)$

Tổng quãng đường: $S=S_1+400+S_2=\frac{50}{a}+400+\frac{50}{b}=50\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+400=150+400=550\,(m)$.

Đáp án: **ĐÚNG.**

Câu 3. Một trường THPT Chuyên cử một đội tuyển gồm 90 học sinh tham dự kỳ thi Học sinh giỏi cấp Quốc gia. Đội tuyển có cả học sinh nam và học sinh nữ. Sau kỳ thi, kết quả thống kê cho thấy có 85 học sinh đạt huy chương. Thông tin chi tiết như sau:

- Trong tổng số 90 học sinh, có 50 học sinh nam và 40 học sinh nữ.
- Trong số 85 học sinh đạt huy chương, có 48 học sinh nam.

Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ đội tuyển sau khi cuộc thi kết thúc.

a) Xác suất chọn được một học sinh nữ là $\frac{4}{9}$.

b) Xác suất chọn được một học sinh nam đạt huy chương là $\frac{7}{15}$.

c) Biết rằng học sinh được chọn là nam, xác suất học sinh đó đạt huy chương là $\frac{24}{25}$.

d) Biết rằng học sinh được chọn đã đạt huy chương, xác suất học sinh đó là nữ là $\frac{37}{85}$.

Lời giải:

Đáp án: ĐÚNG | SAI | ĐÚNG | ĐÚNG

N: Học sinh được chọn là nam

F: Học sinh được chọn là nữ

H: Học sinh được chọn đạt huy chương

K: Học sinh được chọn không đạt huy chương.

Tổng số học sinh (không gian mẫu): $n(\Omega)=90$

Thông tin từ đề bài:

$n(N)=50$; $n(F)=40$; $n(H)=85$

$n(N\cap H)=48$ (Số học sinh nam đạt huy chương)

Từ đó suy ra:

$n(F\cap H)=n(H)-n(N\cap H)=85-48=37$ (Số học sinh nữ đạt huy chương)

a) Xác suất chọn được học sinh nữ: $P(F)=\frac{n(F)}{n(\Omega)}=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$. Đáp án: **ĐÚNG.**

b) Xác suất chọn được học sinh nam đạt huy chương:

$P(N\cap H)=\frac{n(N\cap H)}{n(\Omega)}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$. Đáp án: **SAI.**

c) Xác suất học sinh đạt huy chương, biết rằng học sinh đó là nam:

$P(H\mid N)=\frac{P(N\cap H)}{P(N)}=\frac{8/15}{50/90}=\frac{24}{25}$. Đáp án: **ĐÚNG.**

d) Xác suất học sinh là nữ, biết rằng học sinh đó đã đạt huy chương:

$P(F\mid H)=\frac{P(F\cap H)}{P(H)}=\frac{37/90}{85/90}=\frac{37}{85}$. Đáp án: **ĐÚNG.**

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0), B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $A'(0;0;3)$. Gọi P là trung điểm $B'C'$, K là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz).

a) Toạ độ điểm C là $(3;3;0)$.

b) Trọng tâm của tam giác PCD có tọa độ là $\left(2;\frac{5}{4};1\right)$.

c) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right|$ là $\frac{5}{2}$.

d) Góc giữa hai đường thẳng AP và BC' bằng 60^0.

Lời giải:

Đáp án: ĐÚNG | SAI | SAI | SAI

Ta có: $A(0;0;0)$, $B(3;0;0), D(0;3;0), A'(0;0;3)$

Suy ra: $C(3;3;0), B'(3;0;3), D'(0;3;3), C'(3;3;3)$. $P\left(3;\frac{3}{2};3\right)$.

a) Toạ độ điểm C là $(3;3;0)$. Đáp án: **ĐÚNG.**

a) Trọng tâm G của tam giác PCD có tọa độ là $\left(2;\frac{5}{2};1\right)$. Đáp án: **SAI**

b) $\left|\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right|=3KG$

Biểu thức $\left|\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right|$ đạt GTNN khi KG nhỏ nhất. Suy ra K là hình chiếu của G lên (Oxz)

$\Rightarrow K(2;0;1)$. Suy ra $\left|\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right|_{Min}=3KG=\frac{15}{2}$. Đáp án: **SAI**

c) $\overrightarrow{AP}=\left(3;\frac{3}{2};3\right), \overrightarrow{BC'}=(0;3;3)$.

$$\cos(AP,BC')=\left|\cos\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BC'}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BC'}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|}=\frac{\left|\frac{9}{2}+9\right|}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2}.\sqrt{0^2+3^2+3^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

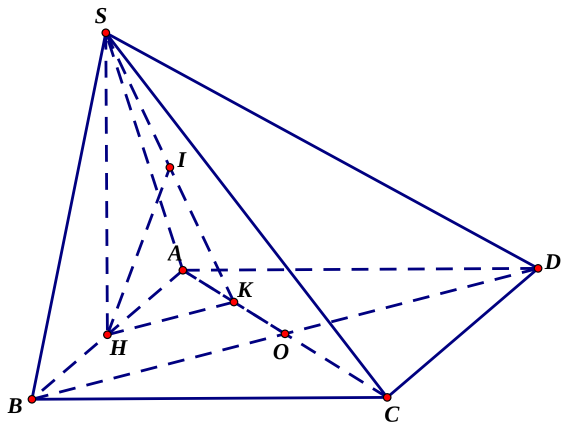
Suy ra góc giữa hai đường thẳng AP và BC' bằng 45^0. Đáp án: **SAI**

Phần 3. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2\sqrt{5}$, tâm O và $\widehat{ABC}=60°$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm cạnh AB. Tính bình phương khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

Đáp án: 3



Hạ $HK \perp AC$ (K là trung điểm của AO) và hạ $HI \perp SK$ thì HI là khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC).

Tính HI.

Ta có : $BD = 2\sqrt{5}.\sqrt{3} = 2\sqrt{15}$ nên $BO = \sqrt{15}$. Vậy $HK = \frac{1}{2}BO = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

SH là chiều cao trong tam giác đều SAB nên $SH = \frac{AB.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{15}$.

Nên $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$. Vậy $HI^2 = 3$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2-2x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C). Tính bình phương của độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải.

Đáp án: 20

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$y' = \frac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2+2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Hai điểm cực trị của đồ thị (C) là $A(-2;-6), B(0;-2)$

$\overrightarrow{AB} = (2;4) \Rightarrow AB^2 = 20$.

Câu 3. Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bán được 1000 điện thoại A với giá 14 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán x cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p\left(x\right)$ (triệu đồng) và hàm chi phí hàng tuần $C(x)=12000-3x$ (triệu đồng). Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bán mỗi cái điện thoại A với giá bao nhiêu (triệu đồng)?

Lời giải.

Đáp án: 8 (triệu đồng)

Theo giả thiết $p(x)=ax+b$.

Do đó, phương trình đường thẳng $p(x)=ax+b$ đi qua hai điểm $(1000;14)$ và $(1100;13,5)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}14=1000a+b\\13,5=1100a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-1}{200}\\b=19\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy $p(x)=-\dfrac{1}{200}x+19$.

Doanh thu bán hàng của x sản phẩm là $R(x)=x\cdot p(x)=x\cdot\left(\dfrac{-1}{200}x+19\right)=\dfrac{-x^2}{200}+19x$ (triệu đồng)

Do đó, hàm số thể hiện lợi nhuận thu được khi bán x sản phẩm là

$P(x)=R(x)-C(x)=\dfrac{-x^2}{200}+19x-12000+3x=\dfrac{-x^2}{200}+22x-12000$ (triệu đồng).

Để lợi nhuận là lớn nhất thì $P\left(x\right)$ là lớn nhất.

Ta có: $P'(x)=\dfrac{-x}{100}+22, P'(x)=0\Leftrightarrow x=2200$. Lập BBT, ta kết luận bán 2200 cái điện thoại A thì lợi nhuận là cao nhất. Vậy cửa hàng nên đặt giá bán là $p\left(2200\right)=8$ (triệu đồng).

Câu 4. Trong lớp chuyên Toán trường Chuyên Lam Sơn có 36 bàn học cá nhân (mỗi bàn chỉ được xếp nhiều nhất một bạn), được xếp thành 4 hàng và 9 cột (các hàng được đánh số từ trên xuống dưới theo thứ tự từ 1 đến 4, các cột được đánh số từ trái qua phải theo thứ tự từ 1 đến 9). Biết sĩ số học sinh của lớp là 35. Sau học kì I, thầy chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi cho các bạn học sinh trong lớp. Giả sử trước thời điểm chuyển chỗ bạn ngồi ở hàng thứ m, cột thứ n và sau khi chuyển chỗ bạn đó sẽ ngồi ở hàng thứ a_m, cột thứ a_n thì ta gán cho bạn đó số nguyên là $\left(a_m+a_n\right)-\left(m+n\right)$. Nếu ban đầu bàn trống ở vị trí $\left(1;1\right)$, sau khi chuyển chỗ bàn trống ở vị trí $\left(2;5\right)$ thì tổng của 35 số nguyên được gán cho 35 bạn là bao nhiêu?

Lời giải.

Đáp án: -5

Ta xem có một bạn ảo A ở kì I ngồi ở vị trí $\left(1;1\right)$ và sang kì II ngồi ở vị trí $\left(2;5\right)$.

Vậy số được gán cho bạn ảo A này là số: $\left(2+5\right)-\left(1+1\right)=5$.

Lúc này ta xem lớp học có đủ 36 bạn được xếp vào 36 vị trí. Chú ý tổng các số được đánh ở các bàn gồm hàng và cột có dạng $\left(1;j\right)$ với $i\in\left\{1;2;3;4\right\}$ và $j\in\left\{1;2;3;...;9\right\}$ nên $a_m\in\left\{1;2;3;4\right\}$ và $a_n\in\left\{1;2;3;...;9\right\}$.

Do đó tổng các số được gán cho 36 bạn là:

$$\left[\left(1+1\right)+\left(1+2\right)+...+\left(1+9\right)+\left(2+1\right)+\left(2+2\right)+...+\left(2+9\right)+...+\left(4+1\right)+\left(4+2\right)+...+\left(4+9\right)\right]$$

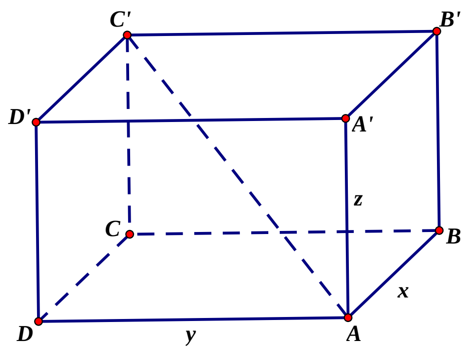
$$-\left[\left(1+1\right)+\left(1+2\right)+...+\left(1+9\right)+\left(2+1\right)+\left(2+2\right)+...+\left(2+9\right)+...+\left(4+1\right)+\left(4+2\right)+...+\left(4+9\right)\right]=0.$$

Nên tổng số gán cho 35 bạn thực tế của lớp là: $0-5=-5$.

Câu 5: Trong một trung tâm logistics, người ta cần thiết kế một thùng hàng hình hộp chữ nhật để đóng gói và vận chuyển thiết bị điện tử. Tổng diện tích các mặt ngoài của thùng bằng 36 m² (bao gồm cả mặt đáy, mặt nắp và 4 mặt bên). Để đảm bảo khả năng đóng gói vừa vặn thiết bị, đường chéo không gian của thùng phải dài 6 mét. Thể tích lớn nhất có thể của thùng hàng này là bao nhiêu (tính theo đơn vị mét khối, làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải

Đáp án: $11{,}3$



Cách 1.

Gọi x, y, z lần lượt là độ dài của các cạnh AB, AD, AA'.

Diện tích tất cả các mặt là $S_{tp} = 2(xy + yz + zx) = 36 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 18, \quad (1)$.

Độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Suy ra $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 72 \Leftrightarrow x + y + z = 6\sqrt{2}, \ (2)$.

Từ (2) ta có $y + z = 6\sqrt{2} - x$. Do đó, kết hợp với (1) ta được

$$yz = 18 - x(y + z) = 18 - x\left(6\sqrt{2} - x\right) = x^2 - 6\sqrt{2}x + 18.$$

Ta luôn có $(y + z)^2 \geq 4yz, \ \forall y, z$ nên

$$\left(6\sqrt{2} - x\right)^2 \geq 4\left(x^2 - 6\sqrt{2}x + 18\right) \Leftrightarrow 3x^2 - 12\sqrt{2}x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4\sqrt{2}.$$

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = xyz = x\left(x^2 - 6\sqrt{2}x + 18\right) = x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 18x$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 18x$ trên đoạn $\left[0; 4\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-12\sqrt{2}x+18$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\in\left[0;4\sqrt{2}\right]\\ x=3\sqrt{2}\in\left[0;4\sqrt{2}\right].\end{array}\right.$

Ta tính được $f(0)=0;\ f\left(4\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2};\ f\left(\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2};\ f\left(3\sqrt{2}\right)=0$.

Với $x=\sqrt{2}$ thì $\begin{cases}y+z=5\sqrt{2}\\ yz=8\end{cases}$. Như thế $(x;y;z)\in\left\{\left(\sqrt{2};4\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};\sqrt{2};4\sqrt{2}\right)\right\}$.

Với $x=4\sqrt{2}$ thì $\begin{cases}y+z=2\sqrt{2}\\ yz=2\end{cases}$. Như thế $(x;y;z)=\left(4\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Vậy thể tích của khối hộp chữ nhật lớn nhất là $8\sqrt{2}\approx 11,3m^3$ khi $(x;y;z)=\left(\sqrt{2};4\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ và các hoán vị của nó.

Cách 2.

Gọi x, y, z lần lượt là độ dài của các cạnh AB, AD, AA'.

Diện tích tất cả các mặt là $S_{tp}=2(xy+yz+zx)=36\Leftrightarrow xy+yz+zx=18,\quad (1)$.

Độ dài đường chéo $AC'=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=6\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=36$.

Suy ra $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=72\Leftrightarrow x+y+z=6\sqrt{2},\ (2)$.

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V=xyz,\ (3)$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra x, y, z là 3 nghiệm của phương trình

$$X^3-6\sqrt{2}X^2+18X-V=0\Leftrightarrow V=X^3-6\sqrt{2}X^2+18X,\quad (4).$$

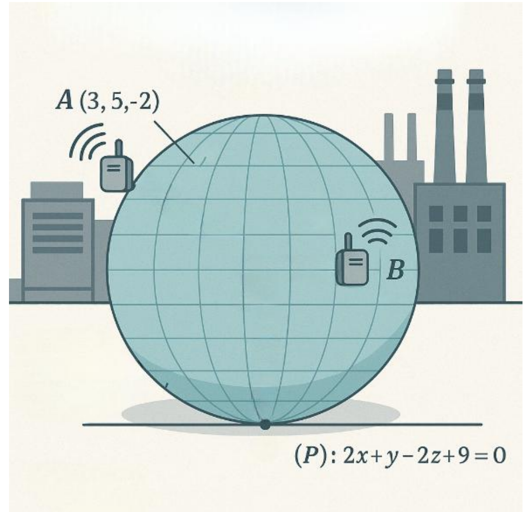
Bảng biến thiên của hàm số $f(X)=X^3-6\sqrt{2}X^2+18X$ trên $\left(0;6\sqrt{2}\right)$ như sau

X	0		$\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$		$6\sqrt{2}$
$f'(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(X)$	0	$\nearrow$	$8\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$108\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị lớn nhất của V để phương trình (4) có 3 nghiệm (không cần phân biệt) trên khoảng $\left(0;6\sqrt{2}\right)$ là $8\sqrt{2}$.

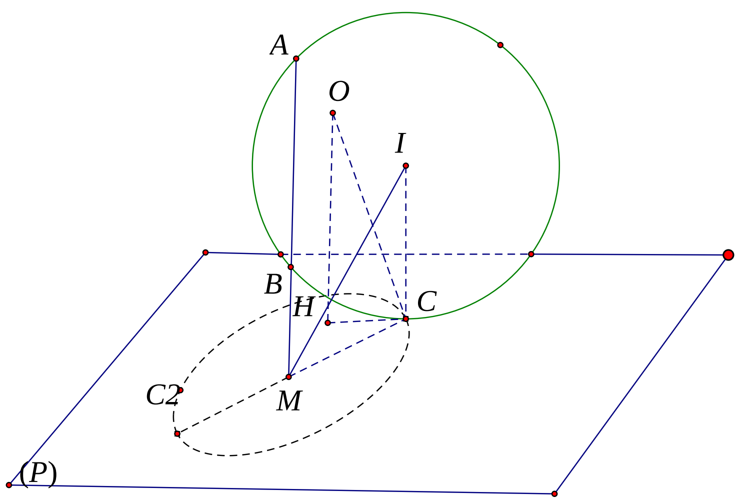
Vậy thể tích của khối hộp chữ nhật lớn nhất là $8\sqrt{2}\approx 11,3m^3$ khi $(x;y;z)=\left(\sqrt{2};4\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ và các hoán vị của nó.

Câu 6: Một công ty xây dựng một hệ thống Giám sát môi trường tại khu công nghiệp. Hai cảm biến không dây được đặt tại hai vị trí A, B trong không gian 3 chiều để thu thập dữ liệu không khí. Để đảm bảo tín hiệu truyền giữa hai cảm biến ổn định, công ty thiết kế một bóng bảo vệ tín hiệu hình cầu di động nhưng luôn đi qua cả hai cảm biến A và B. Bóng này cần tiếp xúc với mặt đất để đảm bảo tính ổn định. Giả sử trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ các điểm là $A(3;5;-2)$, $B(-1;3;2)$ và mặt đất được mô tả bằng mặt phẳng: $(P): 2x+y-2z+9=0$. Trong quá trình mô phỏng, điểm tiếp xúc giữa bóng bảo vệ và mặt đất (gọi là C) thay đổi. Kỹ sư cần xác định khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0,0,0)$ đến điểm tiếp xúc C để đánh giá mức độ ảnh hưởng từ vị trí đặt thiết bị. Gọi m_1 là giá trị lớn nhất, và m_2 là giá trị nhỏ nhất của độ dài OC. Tính giá trị $m_1^2+m_2^2$.



Lời giải

Đáp án: 76



$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-4;-2;4)=-2(2;1;-2) \\ \overrightarrow{n_P}=(2;1;-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P} \text{ cùng phương nên } \overrightarrow{AB}\perp(P),\ AB=6$$

$$d(A;(P))=\frac{|2.3+5-2.(-2)+9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=8 \text{ và } d(B;(P))=\frac{|2.(-1)+3-2.2+9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2$$

$AB\cap(P)=M \Rightarrow M$ cố định

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại C nên $MC\perp IC$ tại C

$\Rightarrow MA.MB = MC^2$, ta có: $\begin{cases} MA = d\left(A;\left(P\right)\right) = 8 \\ MB = d\left(B;\left(P\right)\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow MC^2 = 16 \Leftrightarrow MC = 4$

$\Rightarrow C$ thuộc đường tròn tâm M bán kính $r = MC = 4$

Ta có: $AB: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$, $M = AB \cap \left(P\right) \Rightarrow M\left(-\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$

Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng $\left(P\right)$ $\Rightarrow d\left(O\left(P\right)\right) = 3$, $OH: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$

$H = OH \cap \left(P\right) \Leftrightarrow H\left(-2; -1; 2\right)$, $HM = \sqrt{13} < 4$ nên H nằm trong đường tròn tâm M bán kính $r = MC = 4$. Suy ra $OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9 + HC^2}$

$\Rightarrow OC$ đạt min hoặc max $\Leftrightarrow HC$ đạt min hoặc max

$$\begin{cases} HC_{\min} = \left|HM - r\right| = 4 - \sqrt{13} \\ HC_{\max} = HM + r = 4 + \sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OC_{\min} = \sqrt{9 + \left(4 - \sqrt{13}^2\right)} = m_2 \\ OC_{\max} = \sqrt{9 + \left(4 + \sqrt{13}\right)^2} = m_1 \end{cases}$$

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = 76$