CHƯƠNG IV NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

I LÝ THUYẾT.

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

Chú ý. Trường hợp $K=[a;b]$ thì các đẳng thức $F'(a)=f(a)$ và $F'(b)=f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x=a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x=b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=f(a) \text{ và } \lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=f(b).$$

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K;

b) Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$. Ta gọi $F(x)+C$ là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên K ký hiệu bởi $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Chú ý:

a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, C là hằng số.

b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Vậy $\mathrm{d}F(x)=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM.

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K. Khi đó:

a) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với mọi số thực k khác 0.

Suy ra $\int [k.f(x)+l.g(x)]\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x + l\int g(x)\mathrm{d}x$

b) $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số $y = x^{\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể:

+) Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.

+) Với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$.

+) Với α không nguyên, tập xác định là $(0;+\infty)$.

+) Hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha . x^{\alpha-1}$.

Từ đó ta có: $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$; $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$

b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$ Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$

c) Nguyên hàm của hàm số mũ:

$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$

$\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Xác định nguyên hàm của các hàm số sau:

1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$

2) $f(x) = \sin x - 6x^2$

3) $f(x) = x^2 - 3x - \dfrac{1}{x}$

4) $f(x) = 4x + \sin x$

5) $f\left(x\right)=e^{x}+2x-1+\dfrac{2}{x}$

6) $f\left(x\right)=\cos x-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$

7) $f\left(x\right)=4x^{3}+2x+1$

8) $f\left(x\right)=2^{x}+\cos x$

9) $f\left(x\right)=\cos x+1$

10) $f\left(x\right)=2^{x}+x$

11) $f\left(x\right)=5^{x}+\dfrac{1}{x}$

12) $f\left(x\right)=x^{2}-\cos x$

13) $f\left(x\right)=3^{x}.5^{x+1}$

14) $f\left(x\right)=x^{\frac{5}{7}}$

15) $f\left(x\right)=e^{x}\left(1-\dfrac{2e^{-x}}{x^{5}}\right)$

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^{2}+\sin x+1$ biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ và $F\left(0\right)=1$. Khi đó, tìm $F\left(x\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=4-3\sin x$ và $f\left(0\right)=5$. Tìm hàm số $f\left(x\right)$

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)=2x+e^{-x}$. Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2023$

Câu 5: Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{x}+2x$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2$. Tìm $F\left(x\right)$.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^{2}+\sin x+1$. Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ và $F\left(0\right)=1$. Tìm $F\left(x\right)$.

Câu 7: Ký hiệu $h\left(x\right)$ là chiều cao của một cây (tính theo m) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây cao $2,5m$. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ (m/năm).

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1\le x\le 11$).

b) Sau bao nhiêu năm cây cao $4m$.

Câu 8: Một chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_{0}=12\,m/s$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a=3\,m/s^{2}$. Tính quãng đường xe đó đi được trong 8 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Câu 9: Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 5 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t)=1,6t+4$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm). Cây con khi được trồng cao 12 cm.
a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Câu 10: Tại một lễ hội bia, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $f'(t)=20t^3-300t^2+1000t$. Trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 15)$, $f'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.
a) Viết công thức của hàm số $f(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0\le t\le 15$.

b) Sau 4 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

Câu 11: Các dự án xây dựng dân dụng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t)=m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t)=200-2t$,

Trong đó t tính theo ngày $(0\le t\le 180)$, $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là 380 000đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

Câu 12: Một vật được thả từ độ cao $50\,m$ rơi với gia tốc $5\,m/s^2$. Sau khi rơi được 4 giây vật di chuyển với vận tốc bao nhiêu m/s ?

Câu 13: Doanh thu bán hàng của một doanh nghiệp khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x)=R'(x)$. Đại diện của doanh nghiệp cho biết tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại sản phẩm được cho bởi $M_R(x)=500-0,1x$, ở đó x là số lượng sản phẩm đã bán. Tìm doanh thu của doanh nghiệp khi đã bán 2000 sản phẩm.

Câu 14: Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $72m/s$ bắt đầu từ độ cao $2m$. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian $5s$ kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9.8m/s^2$

Câu 15: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

CHƯƠNG IV

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

I LÝ THUYẾT.

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

Chú ý. Trường hợp $K=[a;b]$ thì các đẳng thức $F'(a)=f(a)$ và $F'(b)=f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x=a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x=b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=f(a) \text{ và } \lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=f(b).$$

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K;

b) Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$. Ta gọi $F(x)+C$ là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên K ký hiệu bởi $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Chú ý:

a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, C là hằng số.

b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Vậy $\mathrm{d}F(x)=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM.

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K. Khi đó:

a) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với mọi số thực k khác 0.

Suy ra $\int [k.f(x) + l.g(x)]\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x + l\int g(x)\mathrm{d}x$

b) $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể:

+) Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.

+) Với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$.

+) Với α không nguyên, tập xác định là $(0;+\infty)$.

+) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $\left(x^\alpha\right)' = \alpha.x^{\alpha-1}$.

Từ đó ta có: $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$; $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$

b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$ Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$

c) Nguyên hàm của hàm số mũ:

$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$

$\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Xác định nguyên hàm của các hàm số sau:

1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$

2) $f(x) = \sin x - 6x^2$

3) $f(x) = x^2 - 3x - \dfrac{1}{x}$

4) $f(x) = 4x + \sin x$

5) $f(x)=e^x+2x-1+\dfrac{2}{x}$

6) $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

7) $f(x)=4x^3+2x+1$

8) $f(x)=2^x+\cos x$

9) $f(x)=\cos x+1$

10) $f(x)=2^x+x$

11) $f(x)=5^x+\dfrac{1}{x}$

12) $f(x)=x^2-\cos x$

13) $f(x)=3^x.5^{x+1}$

14) $f(x)=x^{\frac{5}{7}}$

15) $f(x)=e^x\left(1-\dfrac{2e^{-x}}{x^5}\right)$

Lời giải

1) Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}x=\int \dfrac{1}{e}\left(\mathrm{e}^2\right)^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{e}\dfrac{\left(\mathrm{e}^2\right)^x}{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)}+C=\dfrac{1}{e}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+C=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$.

2) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\sin x-6x^2\right)\mathrm{d}x=-\cos x-2x^3+C$

3) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^2-3x-\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}-\ln|x|+C$

4) $\int f(x)dx=\int(4x+\sin x)dx=2x^2-\cos x+C$

5) $\int f(x)dx=\int\left(e^x+2x-1+\dfrac{2}{x}\right)dx=e^x+x^2-x+2\ln|x|+C$

6) $\int f(x)\mathrm{dx}=\int(\cos x-\dfrac{1}{\sin^2 x})\mathrm{dx}=\sin x+\cot x+C$.

7) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(4x^3+2x+1\right)\mathrm{d}x=4\dfrac{x^4}{4}+2\dfrac{x^2}{2}+x+C=x^4+x^2+x+C$.

8) $\int f(x)dx = \int (2^x + \cos x)dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \sin x + C.$

9) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (\cos x + 1)\mathrm{d}x = \sin x + x + C$

10) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (2^x + x)\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \dfrac{1}{2}x^2 + C$

11) $\int f(x)dx = \int \left(5^x + \dfrac{1}{x}\right)dx = \dfrac{5^x}{\ln 5} + \ln|x| + C$

12) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (x^2 - \cos x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \sin x + C$

13) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int 3^x.5^{x+1}\mathrm{d}x = \int 3^x.5^x.5\mathrm{d}x = 5\int (3.5)^x\mathrm{d}x = 5\int 15^x\mathrm{d}x = \dfrac{5.15^x}{\ln 15} + C$

14) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{7}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\frac{5}{7}+1}x^{\frac{5}{7}+1} + C = \dfrac{7}{12}x^{\frac{12}{7}} + C$

15) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int e^x\left(1 - \dfrac{2e^{-x}}{x^5}\right)\mathrm{d}x = \int\left(e^x - \dfrac{2}{x^5}\right)\mathrm{d}x = e^x + \dfrac{1}{2x^4} + C$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin x + 1$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $F(0) = 1$. Khi đó, tìm $F(x)$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int (x^2 + \sin x + 1)dx = \dfrac{x^3}{3} - \cos x + x + C$.

Mà $F(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{0^3}{3} - \cos 0 + 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$. Vậy $F(x) = x^3 - \cos x + x + 2$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 4 - 3\sin x$ và $f(0) = 5$. Tìm hàm số $f(x)$

Lời giải

Ta có $f(x) = \int (4 - 3\sin x)\mathrm{d}x = 4x + 3\cos x + c$.

Mặt khác $f(0) = 5 \Leftrightarrow 3 + c = 5 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = 4x + 3\cos x + 2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 2x + e^{-x}$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2023$

Lời giải

$F(x) = \int (2x + e^{-x})dx = \dfrac{2.x^2}{2} - e^{-x} + C = x^2 - e^{-x} + C$

$F(0) = 2023 \Leftrightarrow 0^2 - e^{-0} + C = 2023 \Leftrightarrow C = 2024$

$F(x) = x^2 - e^{-x} + 2024$.

Câu 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tìm $F(x)$.

Lời giải

+ Ta có, $F(x) = \int f(x)dx = \int (e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C$, mà $F(0) = 2 \Rightarrow C = 1$. Do đó $F(x) = e^x + x^2 + 1$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin x + 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.

Lời giải

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, ta có:

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int (x^2 + \sin x + 1)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + C.$$

Mà $F(0) = 1 \Rightarrow C - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \cos x + x + 2$.

Câu 7: Ký hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo m) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây cao $2,5m$. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \dfrac{1}{x}$ (m/năm).

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1 \le x \le 11$).

b) Sau bao nhiêu năm cây cao $4m$.

Lời giải

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1 \le x \le 11$).

Ta có $h(x) = \int h'(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$.

Vì $h(1) = 2,5$ nên $\ln 1 + C = 2,5 \Rightarrow C = 2,5$.

Chiều cao của cây sau x năm ($1 \le x \le 11$) là $h(x) = \ln x + 2,5$.

b) Sau bao nhiêu năm cây cao $4m$.

Ta có $h(x) = 4 \Leftrightarrow \ln x + 2,5 = 4 \Leftrightarrow \ln x = 1,5 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{1,5} \approx 4,48$ (năm).

Vậy sau $4,48$ (năm) thì cây cao $4m$.

Câu 8: Một chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_0 = 12\,m/s$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 3\,m/s^2$. Tính quãng đường xe đó đi được trong 8 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Ta có $v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int 3\mathrm{d}t=3t+C$.

Vì $v(0)=12$ nên $C=12\Rightarrow v(t)=3t+12$.

Khi đó $s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int(3t+12)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t^2+12t+C'$.

Vì $s(0)=0$ nên $C'=0\Rightarrow s(t)=\frac{3}{2}t^2+12t\,(m)$.

Quãng đường xe đó đi được trong 8 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là $s(8)=\frac{3}{2}.8^2+12.8=192$.

Câu 9: Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 5 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t)=1,6t+4$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm). Cây con khi được trồng cao 12 cm.

a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Lời giải

Ta có:

a) $h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t)=1,6t+4$.

$\int(1,6t+4)\,\mathrm{d}t=\int 1,6t\,\mathrm{d}t+\int 4\mathrm{d}t=1,6\int t\,\mathrm{d}t+\int 4\,\mathrm{d}t=\frac{4}{5}t^2+4t+C$.

Nên $h(t)=\frac{4}{5}t^2+4t+C$.

Vì cây con khi được trồng cao 12 cm nên $h(0)=12\Leftrightarrow\frac{4}{5}.0^2+4.0+C=12\Leftrightarrow C=12$,

Vậy $h(t)=\frac{4}{5}t^2+4t+12$.

b) Sau 5 năm trồng và uốn tạo dáng. Cây có chiều cao là: $h(5)=\frac{4}{5}.5^2+4.5+12=52\ (cm)$.

Vậy khi được bán, cây cao $52\ (cm)$.

Câu 10: Tại một lễ hội bia, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $f'(t)=20t^3-300t^2+1000t$. Trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 15)$, $f'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

a) Viết công thức của hàm số $f(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0\le t\le 15$.

b) Sau 4 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

Lời giải

a) Ta có $B(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(t)=20t^3-300t^2+1000t$.

Do đó $f(t)=\int(20t^3-300t^2+1000t)dt=5t^4-100t^3+500t^2+C$.

Nên $f(t)=5t^4-100t^3+500t^2+C$.

Vì sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội nên $f(1)=405+C=500\Rightarrow C=95$.

Vậy $f(t)=5t^4-100t^3+500t^2+95,\ \ 0\le t\le 15$.

b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 4 giờ là: $f(4)=5.4^4-100.4^3+500.4^2+95=2975$ (khách).

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;15]$. Ta có:

$$f'(t)=20t^3-300t^2+1000t=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=5\\t=10\end{array}\right..$$

Ta có: $f(0)=95; f(5)=3220; f(10)=95, f(15)=28220$.

Vậy Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 15 giờ,

d) Ta tìm t để hàm số $f'(t)=20t^3-300t^2+1000t$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;15]$. Ta có:

$$f''(t)=60t^2-600t+1000=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{15-5\sqrt{3}}{3}\\t=\dfrac{15+5\sqrt{3}}{3}\end{array}\right..$$

Ta có: $f'(0)=0; f'\left(\dfrac{15-5\sqrt{3}}{3}\right)\approx 962,25; f'\left(\dfrac{15+5\sqrt{3}}{3}\right)\approx -962,25; f'(15)=15000$.

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $f'(t)=20t^3-300t^2+1000t$ trên đoạn $[0;15]$ bằng 15000 tại $t=15$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Câu 11: Các dự án xây dựng dân dụng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t)=m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t)=200-2t$, Trong đó t tính theo ngày $(0 \le t \le 180)$, $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là 380 000đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

Lời giải

Ta có $M'(t) = m(t)$ nên $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t) = 200 - 2t$.

Do đó: $M(t) = \int (200 - 2t)\mathrm{d}t = 200t - t^2 + C$.

Suy ra: $M(t) = 200t - t^2 + C,\ 0 \le t \le 180$. Vì $M(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $M(t) = 200t - t^2$.

Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 180 là: $M(180) = 200.180 - 180^2 = 3600$.

Chi phí nhân công lao động của công trình đó là: $380000.3600 = 1368000000$ (đồng).

Câu 12: Một vật được thả từ độ cao $50m$ rơi với gia tốc $5m/s^2$. Sau khi rơi được 4 giây vật di chuyển với vận tốc bao nhiêu m/s ?

Lời giải

Chọn trục theo chiều rơi của vật.

Kí hiệu $v(t)$ là vận tốc của vật, tại thời điểm t giây kể từ khi vật bắt đầu rơi.

Vì $a(t) = v'(t), \forall t \ge 0$ nên $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int 5\mathrm{d}t = 5t + C_1$.

Ta có: $v(0) = 0$ nên $5.0 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$. Vậy $v(t) = 5t\ (m/s)$.

Sau khi vật rơi 4 giây vật di chuyển với vận tốc: $v(4) = 5.4 = 20\ (m/s)$.

Câu 13: Doanh thu bán hàng của một doanh nghiệp khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x) = R'(x)$. Đại diện của doanh nghiệp cho biết tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại sản phẩm được cho bởi $M_R(x) = 500 - 0{,}1x$, ở đó x là số lượng sản phẩm đã bán. Tìm doanh thu của doanh nghiệp khi đã bán 2000 sản phẩm.

Lời giải

Doanh thu của doanh nghiệp là $R(x) = \int M_R(x)\mathrm{d}x = \int (500 - 0{,}1x)\mathrm{d}x = 500x - \frac{1}{20}x^2 + C$.

Vì $R(0) = 0$ nên $C = 0$. Vậy $R(x) = 500x - \frac{1}{20}x^2$.

Doanh thu của doanh nghiệp khi bán 2000 sản phẩm là:

$R(2000)=500.2000-\frac{1}{20}.2000^2=800\,000$ triệu đồng.

Câu 14: Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $72m/s$ bắt đầu từ độ cao $2m$. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian $5s$ kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9.8m/s^2$

Lời giải

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm *t* là:

$$v(t)=\int -9,8dt=-9,8t+C_1$$

Do $v(0)=72$ nên $v(0)=-9,8.0+C_1=72 \Leftrightarrow C_1=72 \Rightarrow v(t)=-9,8t+72$.

Độ cao của viên đạn tại thời điểm *t* là:

$$s(t)=\int v(t)dt=\int(-9,8t+72)dt=-4,9t^2+72t+C_2$$

Vì $s(0)=2$ nên $s(0)=-4,9.0^2+72.0+C_2=2 \Leftrightarrow C_2=2 \Rightarrow s(t)=-4,9t^2+72t+2$.

Vậy sau khoảng thời gian 5s kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5)=-4,9.5^2+72.5+2=239,5m.$$

Câu 15: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

Lời giải

Ta có: $h'(t)=3at^2+bt$

$\Rightarrow h(t)=\int(3at^2+bt)dt=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C \Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C$

Chọn $t=0 \Rightarrow h(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2$

Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$: $h(5)=150 \Leftrightarrow 125a+\frac{25}{2}b=150$

Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$: $h(10)=1100 \Leftrightarrow 1000a+50b=1100$

Ta có hệ: $\begin{cases}125a+\frac{25}{2}b=150\\1000a+50b=1100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

$\Rightarrow h(t)=t^3+t^2$

Nên thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20)=20^3+20^2=8400m^3$

CHƯƠNG IV

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x)=-f(x),\forall x\in K.$ **B.** $f'(x)=F(x),\forall x\in K.$

C. $F'(x)=f(x),\forall x\in K.$ **D.** $f'(x)=-F(x),\forall x\in K.$

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{2x-1}$ là

A. $2\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **B.** $\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **C.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **D.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}+C$.

Câu 3: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$. **B.** $\frac{x^3}{3}-3^x+\frac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

C. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$. **D.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Câu 4: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $x^3+\cos x+C$. **B.** $6x+\cos x+C$. **C.** $x^3-\cos x+C$. **D.** $6x-\cos x+C$.

Câu 5: Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=4x^3+x^2+C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x)=x^4+\frac{x^3}{3}+Cx$. **B.** $f(x)=12x^2+2x+C$.

C. $f(x)=12x^2+2x$. **D.** $f(x)=x^4+\frac{x^3}{3}$.

Câu 6: Nguyên hàm của hàm số $y=2^x$ là

A. $\int 2^x\mathrm{d}x=\ln 2.2^x+C$. **B.** $\int 2^x\mathrm{d}x=2^x+C$. **C.** $\int 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+C$. **D.** $\int 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{x+1}+C$.

Câu 7: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+\sin x$ là

A. $\ln x-\cos x+C$. **B.** $-\frac{1}{x^2}-\cos x+C$. **C.** $\ln|x|+\cos x+C$. **D.** $\ln|x|-\cos x+C$.

Câu 8: Hàm số $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $f(x)=3x^2$. **B.** $f(x)=x^3$. **C.** $f(x)=x^2$. **D.** $f(x)=\frac{1}{4}x^4$.

Câu 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^4+2}{x^2}$.

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+C$.
B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{x}+C$.
C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{x}+C$.
D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{x}+C$.

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)=2^x+x+1$. Tìm $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2^x+x^2+x+C$.
B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln 2}2^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$.
C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$.
D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x+1}2^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$.

Câu 11: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{-x}$ là

A. $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$ **B.** $-3^{-x}+C$ **C.** $3^{-x}\ln 3+C$ **D.** $\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$

Câu 12: Họ nguyên hàm của hàm số $y=e^x\left(2+\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ là

A. $2e^x+\tan x+C$ **B.** $2e^x-\tan x+C$ **C.** $2e^x-\dfrac{1}{\cos x}+C$ **D.** $2e^x+\dfrac{1}{\cos x}+C$

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=2-5\sin x$ và $f\left(0\right)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f\left(x\right)=2x+5\cos x+3$.
B. $f\left(x\right)=2x-5\cos x+15$.
C. $f\left(x\right)=2x+5\cos x+5$.
D. $f\left(x\right)=2x-5\cos x+10$.

Câu 14: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^{\frac{1}{3}}dx=x^{\frac{4}{3}}+C$. **B.** $\int x^{\frac{1}{3}}\,dx=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$. **C.** $\int x^{\frac{1}{3}}\,dx=x^{\frac{2}{3}}+C$. **D.** $\int x^{\frac{1}{3}}dx=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$.

Câu 15: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^5\mathrm{d}x=5x^4+C$. **B.** $\int x^5\mathrm{d}x=x^6+C$. **C.** $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^6+C$. **D.** $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{x^5}{\ln 5}+C$.

Câu 16: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^6+C$. **B.** $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{x^5}{\ln 5}+C$. **C.** $\int x^5\mathrm{d}x=5x^4+C$. **D.** $\int x^5\mathrm{d}x=x^6+C$.

Câu 17: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=x^{\frac{4}{3}}+C$. **B.** $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=x^{\frac{2}{3}}+C$. **C.** $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$. **D.** $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\cos x-x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+x^2+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x-\dfrac{x^2}{2}+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-x^2+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-\dfrac{x^2}{2}+C$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\cos x-x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+x^2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-\frac{x^2}{2}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-x^2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x-\frac{x^2}{2}+C$.

Câu 20: Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cos x+C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=-\sin x$. **B.** $f(x)=-\cos x$. **C.** $f(x)=\sin x$. **D.** $f(x)=\cos x$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+2x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x^2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-x^2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+2x^2+C$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=e^x+2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=e^x+2x^2+C$. **B.** $\int f(x)dx=e^x-x^2+C$.

C. $\int f(x)dx=e^x+C$. **D.** $\int f(x)dx=e^x+x^2+C$.

Câu 23: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x+C$. **B.** $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+1}+C$. **C.** $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{x+1}+C$. **D.** $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Câu 24: Hàm số $F(x)=\cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. $f_2(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $f_1(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $f_1(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $f_2(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=1+\mathrm{e}^{2x}$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x+2\mathrm{e}^{2x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\mathrm{e}^{2x}+C$.

Câu 26: Hàm số $F(x)=\cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dươi đây trền khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. $f_2(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ **B.** $f_1(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}$ **C.** $f_3(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$ **D.** $f_4(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

Câu 27: Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int e^x dx=e^x+C$. **B.** $\int e^x dx=xe^x+C$. **C.** $\int e^x dx=-e^{x+1}+C$. **D.** $\int e^x dx=e^{x+1}+C$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=1+e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=x+\frac{1}{2}e^x+C$. **B.** $\int f(x)dx=x+2e^{2x}+C$.

C. $\int f(x)dx=x+e^{2x}+C$. **D.** $\int f(x)dx=x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=3x^2-1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)dx=3x^3-x+C$. **B.** $\int f(x)dx=x^3-x+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$. **D.** $\int f(x)dx=x^3-C$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=x^2+4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=2x+C$.
B. $\int f(x)dx=x^2+4x+C$.
C. $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}+4x+C$.
D. $\int f(x)dx=x^3+4x+C$

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=e^x+2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx=e^{x-2}+C$.
B. $\int f(x)dx=e^x+2x+C$.
C. $\int f(x)dx=e^x+C$.
D. $\int f(x)dx=e^x-2x+C$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=x^2+3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+3x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+3x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+3x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)=e^x+1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x-1}+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=x^2+1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+3x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x-3}+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-3x+C$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=4x^3-3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^4-3x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^4+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=4x^3-3x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=12x^2+C$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=4+\cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=4x+\sin x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=4x-\sin x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=4x+\cos x+C$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=2+\cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+\sin x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+\cos x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x-\sin x+C$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)=4x^3-2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=x^4-2x+C$.
B. $\int f(x)dx=4x^3-2x+C$.
C. $\int f(x)dx=12x^2+C$.
D. $\int f(x)dx=x^4+C$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=1+\cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\sin x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\cos x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\sin x+C$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=4x^3-1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^4-x+C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=12x^2+C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=4x^3-x+C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^4+C.$

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=4x^3-4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=12x^2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=4x^3-4x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^4-4x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^4+C$.

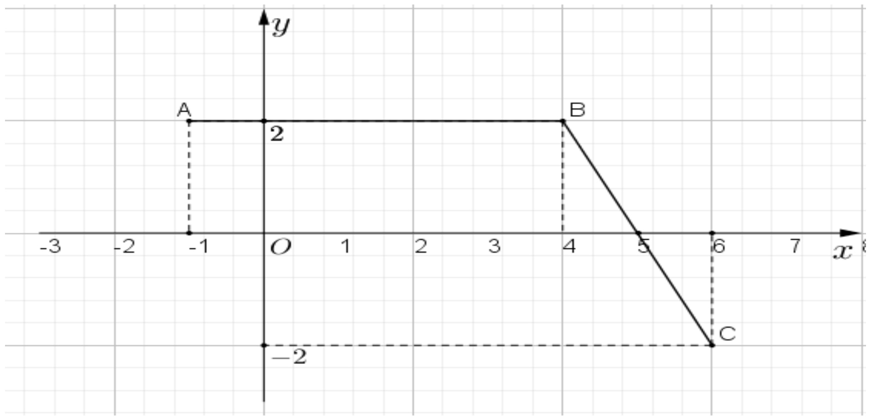
Câu 43: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng:

A. 23. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 21.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$, liên tục trên $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên.Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(-1)=-1$. Giá trị của $F(5)+F(6)$ bằng



A. 23. **B.** 21 **C.** 25 **D.** 19

Câu 46: $\int x^2dx$ bằng

A. $2x+C$. **B.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **C.** x^3+C. **D.** $3x^3+C$

Câu 47: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$ là

A. $4x^4+C$. **B.** $3x^2+C$. **C.** x^4+C. **D.** $\frac{1}{4}x^4+C$.

Câu 48: $\int x^4\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$ **B.** $4x^3+C$ **C.** x^5+C **D.** $5x^5+C$

Câu 49: $\int x^5 dx$ bằng

A. $5x^4+C$. **B.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **C.** x^6+C. **D.** $6x^6+C$.

Câu 50: $\int 5x^4 dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** x^5+C. **C.** $5x^5+C$. **D.** $20x^3+C$.

Câu 51: $\int 6x^5 dx$ bằng

A. $6x^6+C$. **B.** x^6+C. **C.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **D.** $30x^4+C$.

Câu 52: $\int 3x^2 \mathrm{d}x$ bằng

A. $3x^3+C$. **B.** $6x+C$. **C.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **D.** x^3+C.

Câu 53: $\int 4x^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. $4x^4+C$. **B.** $\frac{1}{4}x^4+C$. **C.** $12x^2+C$. **D.** x^4+C.

Câu 54: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$ **B.** x^4+x^2+C **C.** x^5+x^3+C. **D.** $4x^3+2x+C$

Câu 55: Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. x^2+C. **B.** $2x^2+C$. **C.** $2x^2+4x+C$. **D.** x^2+4x+C.

Câu 56: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+6$ là

A. x^2+C. **B.** x^2+6x+C. **C.** $2x^2+C$. **D.** $2x^2+6x+C$.

Câu 57: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+6x$ là

A. $\sin x+3x^2+C$. **B.** $-\sin x+3x^2+C$. **C.** $\sin x+6x^2+C$. **D.** $-\sin x+C$.

Câu 58: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x$.

A. $\int 2\sin x dx=-2\cos x+C$ **B.** $\int 2\sin x dx=2\cos x+C$

C. $\int 2\sin x dx=\sin^2 x+C$ **D.** $\int 2\sin x dx=\sin 2x+C$

Câu 59: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ **B.** $3x^2+1+C$ **C.** x^3+x+C **D.** x^4+x^2+C

Câu 60: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+3$ là

A. x^2+3x+C. **B.** $2x^2+3x+C$. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Câu 61: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Câu 62: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^x$.

A. $\int 7^x \mathrm{d}x=\dfrac{7^x}{\ln 7}+C$ **B.** $\int 7^x \mathrm{d}x=7^{x+1}+C$ **C.** $\int 7^x \mathrm{d}x=\dfrac{7^{x+1}}{x+1}+C$ **D.** $\int 7^x \mathrm{d}x=7^x\ln 7+C$

Câu 63: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C **B.** $\dfrac{x^3}{3}+x+C$ **C.** $6x+C$ **D.** x^3+x+C

Câu 64: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=e^x+x^2+\dfrac{1}{2}$ **B.** $F(x)=e^x+x^2+\dfrac{5}{2}$ **C.** $F(x)=e^x+x^2+\dfrac{3}{2}$ **D.** $F(x)=2e^x+x^2-\dfrac{1}{2}$

Câu 65: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

A. $F(x)=-\cos x+\sin x+3$ **B.** $F(x)=-\cos x+\sin x-1$

C. $F(x)=-\cos x+\sin x+1$ **D.** $F(x)=\cos x-\sin x+3$

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=3x-5\cos x+15$ **B.** $f(x)=3x-5\cos x+2$

C. $f(x)=3x+5\cos x+5$ **D.** $f(x)=3x+5\cos x+2$

Câu 67: Hàm số $F(x)=2\sin x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số.

A. $f(x)=-2\cos x-3\sin x$. **B.** $f(x)=-2\cos x+3\sin x$.

C. $f(x)=2\cos x-3\sin x$. **D.** $f(x)=2\cos x+3\sin x$.

Câu 68: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-6x^2+1$ là

A. $20x^3-12x+C$. **B.** x^5-2x^3+x+C. **C.** $20x^5-12x^3+x+C$. **D.** $\dfrac{x^4}{4}+2x^2-2x+C$.

Câu 69: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=4x+5$, biết $F(1)=0$.

A. $F(x)=2x^2+5x-7$. **B.** $F(x)=2x^2+5x$. **C.** $F(x)=2x^2+5x+7$. **D.** $F(x)=2x^2+5x-3$
.

Câu 70: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x(3x+2)$, biết $F(0)=1$.

A. $F(x)=x^3+x^2+1$. **B.** $F(x)=x^3-x^2+1$. **C.** $F(x)=x^3+x^2$. **D.** $F(x)=x^3+x^2-1$.

Câu 71: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-4}{x}$ là

A. $\int f(x)dx=3x^2+2x-4\ln|x|+C$. **B.** $\int f(x)dx=\dfrac{3}{2}x^2+2x-4\ln|x|+C$.

C. $\int f(x)dx=6x^2+2x-4\ln|x|+C$. **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{3}{2}x^2+2x+4\ln|x|+C$.

Câu 72: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}-1$ trên $(0;+\infty)$.

A. $F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-x$. **C.** $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}-x+1$. **D.** $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2$.

Câu 73: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=1-2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ là

A. $1-x^2+\dfrac{\sqrt{x}}{2}+C.$ **B.** $x-x^2-\sqrt{x}+C$. **C.** $x-x^2+\sqrt{x}+C$. **D.** $1-x^2+\sqrt{x}+C$.

Câu 74: Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=-\sqrt[3]{x}$ là:

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$.

Câu 75: Trên khoảng $(0;+\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^3}$ là:

A. $\int f(x)dx=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-2x^{-2}+C$. **B.** $\int f(x)dx=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{x^{-2}}{2}+C$.

C. $\int f(x)dx=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+2x^{-2}+C$. **D.** $\int f(x)dx=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}-2x^{-2}+C$.

Câu 76: Trên khoảng $(0;+\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ là:

A. $\int f(x)dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+C$. **B.** $\int f(x)dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$.

C. $\int f(x)dx=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$. **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$.

Câu 77: Hàm số $F\left(x\right)=\ln x$ xác định trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}$. **B.** $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$. **C.** $f\left(x\right)=\ln x$. **D.** $f\left(x\right)=\dfrac{-1}{x}$.

Câu 78: Cho hàm số $f\left(x\right)=1-\dfrac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=x+\tan 2x+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=x+\dfrac{1}{2}\cot 2x+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=x-\dfrac{1}{2}\tan 2x+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=x+\dfrac{1}{2}\tan 2x+C$.

Câu 79: Cho hàm số $f\left(x\right)=\cos 2x.$ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C.$ **B.** $\int f\left(x\right)dx=-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C.$

C. $\int f\left(x\right)dx=2\sin 2x+C.$ **D.** $\int f\left(x\right)dx=-2\sin 2x+C.$

Câu 80: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{2x-1}.$

A. $\int f\left(x\right)dx=\dfrac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$ **B.** $\int f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$

C. $\int f\left(x\right)dx=-\dfrac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C.$ **D.** $\int f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C.$

Câu 81: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5x-2}$.

A. $\int \dfrac{dx}{5x-2}=\dfrac{1}{5}\ln|5x-2|+C$ **B.** $\int \dfrac{dx}{5x-2}=\ln|5x-2|+C$

C. $\int \dfrac{dx}{5x-2}=-\dfrac{1}{2}\ln|5x-2|+C$ **D.** $\int \dfrac{dx}{5x-2}=5\ln|5x-2|+C$

Câu 82: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$

A. $\int \cos 3xdx=3\sin 3x+C$ **B.** $\int \cos 3xdx=\dfrac{\sin 3x}{3}+C$

C. $\int \cos 3xdx=\sin 3x+C$ **D.** $\int \cos 3xdx=-\dfrac{\sin 3x}{3}+C$

Câu 83: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Ta có

A. $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}$. **B.** $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}+5$. **C.** $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}+15$ **D.** $h(t)=\dfrac{-t^4}{10}+\dfrac{t^3}{3}+5$.

Câu 84: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\dfrac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Ký hiệu L là số lượng vi trùng sau 10 ngày. Tìm L.

A. $L=303044$. **B.** $L=306089$. **C.** $L=300761$. **D.** $L=301522$.

Câu 85: Một quần thể virut Corona P đang thay đổi với tốc độ $P'(t)=\dfrac{5000}{1+0,2t}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Quần thể virut Corona P ban đầu có số lượng là 1000 con. Số lượng virut Corona sau 3 giờ gần với số nào sau đây nhất?

A. 16000. **B.** 21750. **C.** 12750. **D.** 11750.

Câu 86: Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t)=\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)$. Biết tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0, công thức tính quãng đường đi được của vật đó theo thời gian là

A. $s(t)=\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}t-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **B.** $s(t)=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{1}{4}t+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

C. $s(t)=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $s(t)=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}t+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 87: Một vật đang chuyển động đều với gia tốc $v_0=15m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3 giây từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $27m$. **B.** $72m$. **C.** $69,75m$. **D.** $24,75m$.

Câu 88: Theo nghiên cứu thị trường, sau t năm từ năm đầu tiên vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ được tính xấp xỉ bởi công thức $P'(t)=125+t^2$. Lợi nhuận của doanh nghiệp được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $P(t)=125t+\dfrac{t^3}{3}$. **B.** $P(t)=125t+t^3$. **C.** $P(t)=125+t^3$. **D.** $P(t)=125t+2t^3$.

Câu 89: Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện A đã xả lũ trong khoảng 35 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $f(t) = 20t + 450\left(m^3/s\right)$. Sau thời gian xả lũ trên thì hồ nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là:

A. $4504500\left(m^3\right)$. **B.** $45045000\left(m^3\right)$. **C.** $280000\left(m^3\right)$. **D.** $28000\left(m^3\right)$.

CHƯƠNG IV NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x)=-f(x),\forall x\in K.$ **B.** $f'(x)=F(x),\forall x\in K.$

C. $F'(x)=f(x),\forall x\in K.$ **D.** $f'(x)=-F(x),\forall x\in K.$

Lời giải

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x)=f(x),\forall x\in K.$

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{2x-1}$ là

A. $2\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **B.** $\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **C.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **D.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int \mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}(2x-1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$.

Câu 3: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$. **B.** $\frac{x^3}{3}-3^x+\frac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

C. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$. **D.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $\int\left(x^2-3^x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C, C\in\mathbb{R}$.

Câu 4: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $x^3+\cos x+C$. **B.** $6x+\cos x+C$. **C.** $x^3-\cos x+C$. **D.** $6x-\cos x+C$.

Lời giải

Ta có $\int(3x^2+\sin x)\mathrm{d}x=x^3-\cos x+C$.

Câu 5: Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=4x^3+x^2+C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x)=x^4+\frac{x^3}{3}+Cx$. **B.** $f(x)=12x^2+2x+C$.

C. $f(x)=12x^2+2x$. **D.** $f(x)=x^4+\frac{x^3}{3}$.

Lời giải

Có $f(x)=\left(4x^3+x^2+C\right)'=12x^2+2x$.

Câu 6: Nguyên hàm của hàm số $y=2^x$ là

A. $\int 2^x\mathrm{d}x=\ln 2.2^x+C$. **B.** $\int 2^x\mathrm{d}x=2^x+C$. **C.** $\int 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$. **D.** $\int 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{x+1}+C$.

Lời giải

Do theo bảng nguyên hàm: $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$.

Câu 7: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sin x$ là

A. $\ln x-\cos x+C$. **B.** $-\dfrac{1}{x^2}-\cos x+C$. **C.** $\ln|x|+\cos x+C$. **D.** $\ln|x|-\cos x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x}+\sin x\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=\ln|x|-\cos x+C$.

Câu 8: Hàm số $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $f(x)=3x^2$. **B.** $f(x)=x^3$. **C.** $f(x)=x^2$. **D.** $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4$.

Lời giải

Gọi $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Suy ra $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=x^2$.

Câu 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^4+2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{x}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^4+2}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x^2+\dfrac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{x}+C$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=2^x+x+1$. Tìm $\int f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2^x+x^2+x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln 2}2^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x+1}2^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$.

Lời giải

Ta có: $\int\left(2^x+x+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln 2}2^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$.

Câu 11: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{-x}$ là

A. $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$ **B.** $-3^{-x}+C$ **C.** $3^{-x}\ln 3+C$ **D.** $\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 3^{-x}\mathrm{d}x=-\int 3^{-x}\mathrm{d}(-x)=-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$.

Câu 12: Họ nguyên hàm của hàm số $y=e^x\left(2+\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ là

A. $2e^x+\tan x+C$ **B.** $2e^x-\tan x+C$ **C.** $2e^x-\dfrac{1}{\cos x}+C$ **D.** $2e^x+\dfrac{1}{\cos x}+C$

Lời giải

Ta có: $y=e^x\left(2+\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)=2e^x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\int y dx=\int\left(2e^x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx=2e^x+\tan x+C$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=2x+5\cos x+3$. **B.** $f(x)=2x-5\cos x+15$.

C. $f(x)=2x+5\cos x+5$. **D.** $f(x)=2x-5\cos x+10$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2-5\sin x)\mathrm{d}x=2x+5\cos x+C$.

Mà $f(0)=10$ nên $5+C=10\Rightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=2x+5\cos x+5$.

Câu 14: **Câu 2 (101-2023)** Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^{\frac{1}{3}}dx=x^{\frac{4}{3}}+C$. **B.** $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$. **C.** $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=x^{\frac{2}{3}}+C$. **D.** $\int x^{\frac{1}{3}}dx=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$.

Lời giải

Ta có $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

Câu 15: **Câu 2 (102-2023)** Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^5\mathrm{d}x=5x^4+C$. **B.** $\int x^5\mathrm{d}x=x^6+C$. **C.** $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^6+C$. **D.** $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{x^5}{\ln 5}+C$.

Lời giải

Ta có $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^6+C$, với C là hằng số.

Câu 16: **Câu 4 (103-2023)** Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^6+C$. **B.** $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{x^5}{\ln 5}+C$. **C.** $\int x^5\mathrm{d}x=5x^4+C$. **D.** $\int x^5\mathrm{d}x=x^6+C$.

Lời giải

Câu 17: **Câu 13 (104-2023)** Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^{\frac{1}{3}}dx = x^{\frac{4}{3}} + C$. **B.** $\int x^{\frac{1}{3}}dx = x^{\frac{2}{3}} + C$. **C.** $\int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$. **D.** $\int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

Câu 18: **Câu 4 (101-2023)** Cho hàm số $f(x) = \cos x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = -\sin x + x^2 + C$.
B. $\int f(x)dx = -\sin x - \frac{x^2}{2} + C$.
C. $\int f(x)dx = \sin x - x^2 + C$.
D. $\int f(x)dx = \sin x - \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int(\cos x - x)dx = \sin x - \frac{1}{2}x^2 + C$ với $C \in \mathbb{R}$.

Câu 19: **Câu 6 (104-2023)** Cho hàm số $f(x) = \cos x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = -\sin x + x^2 + C$.
B. $\int f(x)dx = \sin x - \frac{x^2}{2} + C$.
C. $\int f(x)dx = \sin x - x^2 + C$.
D. $\int f(x)dx = -\sin x - \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải

$\int f(x)dx = \sin x - \frac{x^2}{2} + C$.

Câu 20: **(MĐ 101-2022)** Cho $\int f(x)dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = -\sin x$. **B.** $f(x) = -\cos x$. **C.** $f(x) = \sin x$. **D.** $f(x) = \cos x$.

Lời giải

Ta có $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Vậy $f(x) = \sin x$.

Câu 21: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int f(x)dx = e^x + x^2 + C$.
B. $\int f(x)dx = e^x + C$.
C. $\int f(x)dx = e^x - x^2 + C$.
D. $\int f(x)dx = e^x + 2x^2 + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int(e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C$.

Câu 22: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = e^x + 2x^2 + C$.
B. $\int f(x)dx = e^x - x^2 + C$.
C. $\int f(x)dx = e^x + C$.
D. $\int f(x)dx = e^x + x^2 + C$.

Lời giải

Có: $\int f(x)dx = \int(e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C$.

Câu 23: **(MĐ 103-2022)** Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int e^x dx = xe^x + C$. **B.** $\int e^x dx = e^{x+1} + C$. **C.** $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. **D.** $\int e^x dx = e^x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 24: **(MĐ 103-2022)** Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $f_1(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $f_2(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải

Ta có $F'(x) = (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 25: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^x + C$. **B.** $\int f(x)dx = x + 2e^{2x} + C$.

C. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$. **D.** $\int f(x)dx = x + e^{2x} + C$.

Lời giải

Áp dụng bảng nguyên hàm ta có $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Câu 26: **(MĐ 104-2022)** Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dươi đây trền khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ **B.** $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$ **C.** $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ **D.** $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

Lời giải

$f(x) = [F(x)]' = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 27: **(MĐ 104-2022)** Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int e^x dx = e^x + C$. **B.** $\int e^x dx = xe^x + C$.

C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. **D.** $\int e^x dx = e^{x+1} + C$.

Lời giải

Câu 28: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^x + C$. **B.** $\int f(x)dx = x + 2e^{2x} + C$.

C. $\int f(x)dx = x + e^{2x} + C$. **D.** $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Lời giải

- Ta có $\int (1 + e^{2x})dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Câu 29: **(TK 2020-2021)** Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)dx = 3x^3 - x + C$. **B.** $\int f(x)dx = x^3 - x + C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C.$ **D.** $\int f(x)dx=x^3-C.$

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản: $\int(3x^2-1)\mathrm{d}x=x^3-x+C$.

Câu 30: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=x^2+4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+4x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+4x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+4x+C$

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x^2+4)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+4x+C$.

Câu 31: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=e^x+2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x-2}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-2x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(e^x+2)\mathrm{d}x=e^x+2x+C$.

Câu 32: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=x^2+3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+3x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+3x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+3x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x^2+3x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+3x+C$.

Câu 33: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=e^x+1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x-1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(e^x+1)\mathrm{d}x=e^x+x+C$

Câu 34: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=x^2+1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$.

Lời giải

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+x+C.$

Câu 35: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+3x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x-3} + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} - 3x + C$.

Lời giải

Có $\int (\mathrm{e}^x + 3)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 3x + C$.

Câu 36: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^4 - 3x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^4 + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 4x^3 - 3x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 12x^2 + C$.

Lời giải

Ta có; $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (4x^3 - 3)\mathrm{d}x = x^4 - 3x + C$.

Câu 37: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 4 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\sin x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 4x + \sin x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 4x - \sin x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 4x + \cos x + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (4 + \cos x)\mathrm{d}x = 4x + \sin x + C$.

Câu 38: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 2 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x + \sin x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x + \cos x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\sin x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x - \sin x + C$.

Lời giải

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int (2 + \cos x)\mathrm{d}x = 2x + \sin x + C$.

Ta chọn đáp án **A.**

Câu 39: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x^4 - 2x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 4x^3 - 2x + C$.

C. $\int f(x)dx = 12x^2 + C$. **D.** $\int f(x)dx = x^4 + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int (4x^3 - 2)dx = x^4 - 2x + C$.

Câu 40: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 1 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\sin x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x - \sin x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \cos x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \sin x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int (1 + \cos x)dx = \int dx + \int \cos x dx = x + \sin x + C$.

Câu 41: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^4 - x + C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 12x^2 + C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 4x^3 - x + C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^4 + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = x^4 - x + C$.

Câu 42: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 12x^2 + C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x = 4x^3 - 4x + C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^4 - 4x + C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^4 + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (4x^3 - 4)\mathrm{d}x = x^4 - 4x + C$

Câu 43: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \ge 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27.
B. 29.
C. 12.
D. 33.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^{-1} f(x)\mathrm{d}x + 2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(-1) - F(0) + 2F(2) - 2F(0)$.

Do đó $I = F(-1) + 2F(2) - 3F(0) = F(-1) + 2F(2) - 6 \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = I + 6$.

Mà $\int_0^{-1} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 (3x^2+4)\mathrm{d}x = -5$ và $2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2\left(\int_0^1 (3x^2+4)\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x+5)\mathrm{d}x\right) = 26$.

Suy ra $I = 26 - 5 = 21$.

Vậy $F(-1) + 2F(2) = 21 + 6 = 27$.

Câu 44: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \ge 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng:

A. 23.
B. 11.
C. 10.
D. 21.

Lời giải

Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F(x) = \begin{cases} x^2+3x+C_1 & \text{khi } x \ge 1 \\ x^3+2x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Ta có: $F(0) = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 5$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

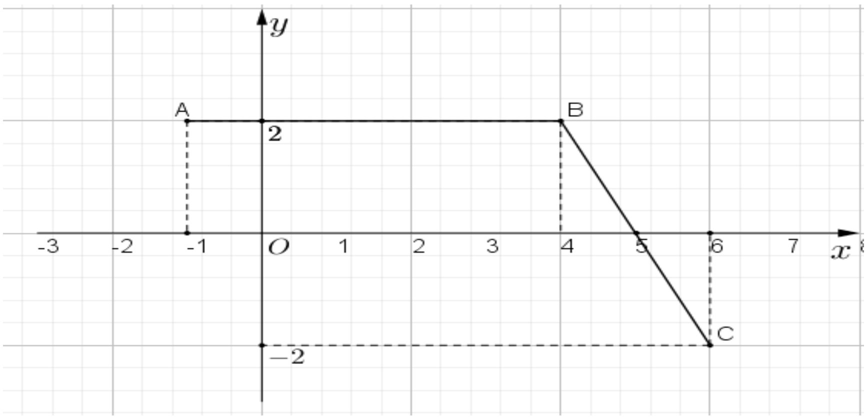
Do đó hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $F(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = F(1) \Leftrightarrow 5 = 4 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 1$.

Vậy $F(x) = \begin{cases} x^2+3x+1 & \text{khi } x \ge 1 \\ x^3+2x+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Ta có: $F(-1) + 2F(2) = -1 - 2 + 2 + 2(4+6+1) = 21$.

Câu 45: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y = f(x)$, liên tục trên $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên.Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng



A. 23. **B.** 21 **C.** 25 **D.** 19

Lời giải

Xét hàm số $f(x)$ với $x \in [-1;6]$; từ đồ thị hàm số ta có:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -1 \le x \le 4 \\ -2x+10 & 4 \le x \le 6 \end{cases}$$

Khi đó: $F(x) = \begin{cases} 2x + C_1 & -1 \le x \le 4 \\ -x^2 + 10x + C_2 & 4 \le x \le 6 \end{cases}$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 4$ nên hàm số $F(x)$ liên tục tại $x = 4$, ta có:

$\lim\limits_{x \to 4^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} F(x) = F(4)$ suy ra: $8 + C_1 = 24 + C_2$

Mặt khác: $F(-1) = -1 \Rightarrow C_1 - 2 = -1 \Rightarrow C_1 = 1$

Từ $8 + C_1 = 24 + C_2$ ta có: $C_2 = -15$

Vậy: $F(x) = \begin{cases} 2x + 1 & -1 \le x \le 4 \\ -x^2 + 10x - 15 & 4 \le x \le 6 \end{cases}$

Suy ra $F(5) + F(6) = 19$.

Câu 46: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x + C$. **B.** $\frac{1}{3}x^3 + C$. **C.** $x^3 + C$. **D.** $3x^3 + C$

Lời giải

Câu 47: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

A. $4x^4 + C$. **B.** $3x^2 + C$. **C.** $x^4 + C$. **D.** $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Lời giải

Ta có $\int x^3 \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C$.

Câu 48: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** $\int x^4 \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5 + C$ **B.** $4x^3 + C$ **C.** $x^5 + C$ **D.** $5x^5 + C$

Lời giải

$\int x^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + C$.

Câu 49: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** $\int x^5 dx$ bằng

A. $5x^4+C$. **B.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **C.** x^6+C. **D.** $6x^6+C$.

Lời giải

Câu 50: **(Mã 101- 2020 Lần 2)** $\int 5x^4 dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** x^5+C. **C.** $5x^5+C$. **D.** $20x^3+C$.

Lời giải

Ta có $\int 5x^4 dx = x^5+C$.

Câu 51: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** $\int 6x^5 dx$ bằng

A. $6x^6+C$. **B.** x^6+C. **C.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **D.** $30x^4+C$.

Lời giải

Ta có: $\int 6x^5 dx = x^6+C$.

Câu 52: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** $\int 3x^2 \mathrm{d}x$ bằng

A. $3x^3+C$. **B.** $6x+C$. **C.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **D.** x^3+C.

Lời giải

Ta có: $\int 3x^2 \mathrm{d}x = 3.\frac{x^3}{3}+C = x^3+C$

Câu 53: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** $\int 4x^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. $4x^4+C$. **B.** $\frac{1}{4}x^4+C$. **C.** $12x^2+C$. **D.** x^4+C.

Lời giải

Ta có $\int 4x^3 \mathrm{d}x = x^4+C$.

Câu 54: **(Mã 103 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$ **B.** x^4+x^2+C **C.** x^5+x^3+C. **D.** $4x^3+2x+C$

Lời giải

$\int f(x)dx = \int (x^4+x^2)dx = \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$.

Câu 55: **(Mã 104 - 2019)** Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. x^2+C. **B.** $2x^2+C$. **C.** $2x^2+4x+C$. **D.** x^2+4x+C.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (2x+4)dx = x^2+4x+C$.

Câu 56: **(Mã 102 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+6$ là

A. x^2+C. **B.** x^2+6x+C. **C.** $2x^2+C$. **D.** $2x^2+6x+C$.

Lời giải

$\int (2x+6)dx = x^2+6x+C$

Câu 57: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+6x$ là

A. $\sin x+3x^2+C$. **B.** $-\sin x+3x^2+C$. **C.** $\sin x+6x^2+C$. **D.** $-\sin x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\cos x+6x)\mathrm{d}x=\sin x+3x^2+C$.

Câu 58: **(Mã 105 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x$.

A. $\int 2\sin xdx=-2\cos x+C$ **B.** $\int 2\sin xdx=2\cos x+C$

C. $\int 2\sin xdx=\sin^2 x+C$ **D.** $\int 2\sin xdx=\sin 2x+C$

Lời giải

Câu 59: **(Mã 101 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ **B.** $3x^2+1+C$ **C.** x^3+x+C **D.** x^4+x^2+C

Lời giải

$\int(x^3+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$.

Câu 60: **(Mã 103 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+3$ là

A. x^2+3x+C. **B.** $2x^2+3x+C$. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Lời giải

Ta có $\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+3x+C$.

Câu 61: **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Lời giải

Ta có $\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Câu 62: **(Mã 104 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^x$.

A. $\int 7^x\mathrm{d}x=\frac{7^x}{\ln 7}+C$ **B.** $\int 7^x\mathrm{d}x=7^{x+1}+C$

C. $\int 7^x\mathrm{d}x=\frac{7^{x+1}}{x+1}+C$ **D.** $\int 7^x\mathrm{d}x=7^x\ln 7+C$

Lời giải

Áp dụng công thức $\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$,$(0<a\neq 1)$ ta được đáp án B

Câu 63: **(Đề Tham Khảo 2018)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C **B.** $\frac{x^3}{3}+x+C$ **C.** $6x+C$ **D.** x^3+x+C

Lời giải

$\int(3x^2+1)dx = x^3 + x + C.$

Câu 64: **(Mã 105 2017)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$ **B.** $F(x)=e^x+x^2+\frac{5}{2}$

C. $F(x)=e^x+x^2+\frac{3}{2}$ **D.** $F(x)=2e^x+x^2-\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có $F(x)=\int(e^x+2x)\mathrm{d}x=e^x+x^2+C$

Theo bài ra ta có: $F(0)=1+C=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\frac{1}{2}$.

Câu 65: **(Mã 104 2017)** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

A. $F(x)=-\cos x+\sin x+3$ **B.** $F(x)=-\cos x+\sin x-1$

C. $F(x)=-\cos x+\sin x+1$ **D.** $F(x)=\cos x-\sin x+3$

Lời giải

Có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+C=2\Leftrightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=-\cos x+\sin x+1$.

Câu 66: **(Mã 123 2017)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=3x-5\cos x+15$ **B.** $f(x)=3x-5\cos x+2$

C. $f(x)=3x+5\cos x+5$ **D.** $f(x)=3x+5\cos x+2$

Lời giải

Ta có $f(x)=\int(3-5\sin x)dx=3x+5\cos x+C$

Theo giả thiết $f(0)=10$ nên $5+C=10\Rightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=3x+5\cos x+5$.

Câu 67: Hàm số $F(x)=2\sin x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số.

A. $f(x)=-2\cos x-3\sin x$. **B.** $f(x)=-2\cos x+3\sin x$.

C. $f(x)=2\cos x-3\sin x$. **D.** $f(x)=2\cos x+3\sin x$.

Lời giải

Ta có $(F(x))'=(2\sin x-3\cos x)'=2\cos x+3\sin x$.

Vậy hàm số $F(x)=2\sin x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos x+3\sin x$.

Câu 68: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-6x^2+1$ là

A. $20x^3-12x+C$. **B.** x^5-2x^3+x+C.

C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$. **D.** $\dfrac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

Lời giải

Ta có

Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

$$\int f(x)dx = \int (5x^4 - 6x^2 + 1)dx$$

$$= \int (5x^4)dx - \int (6x^2)dx + \int (1)dx$$

$$= 5\int (x^4)dx - 6\int (x^2)dx + \int (1)dx$$

$= 5.\dfrac{x^{4+1}}{4+1} - 6.\dfrac{x^{2+1}}{2+1} + x + C = x^5 - 2x^3 + x + C$ (với hằng số C).

Câu 69: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x + 5$, biết $F(1) = 0$.

A. $F(x) = 2x^2 + 5x - 7$. **B.** $F(x) = 2x^2 + 5x$.

C. $F(x) = 2x^2 + 5x + 7$. **D.** $F(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

Lời giải

$F(x) = \int f(x)dx = \int (4x + 5)dx = 2x^2 + 5x + C$ (Với C là một hằng số).

Có $F(1) = 7 + C = 0 \Leftrightarrow C = -7$.

Vậy $F(x) = 2x^2 + 5x - 7$.

Câu 70: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x(3x + 2)$, biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = x^3 + x^2 + 1$. **B.** $F(x) = x^3 - x^2 + 1$.

C. $F(x) = x^3 + x^2$. **D.** $F(x) = x^3 + x^2 - 1$.

Lời giải

$F(x) = \int f(x)dx = \int x(3x+2)dx = \int (3x^2 + 2x)dx = x^3 + x^2 + C$ (Với C là một hằng số).

Có $F(0) = C = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = x^3 + x^2 + 1$.

Câu 71: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 4}{x}$ là

A. $\int f(x)dx = 3x^2 + 2x - 4\ln|x| + C$. **B.** $\int f(x)dx = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 4\ln|x| + C$.

C. $\int f(x)dx = 6x^2 + 2x - 4\ln|x| + C$. **D.** $\int f(x)dx = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 4\ln|x| + C$.

Lời giải

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 4}{x} = 3x + 2 - \frac{4}{x}$$

Do đó $\int f(x)dx = \int \left(3x + 2 - \dfrac{4}{x}\right)dx = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 4\ln|x| + C$

Câu 72: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} - 1$ trên $(0; +\infty)$.

A. $F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-x$.

C. $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}-x+1$. **D.** $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2$.

Lời giải

Ta có : $\int\left(\sqrt{x}-1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+C$.

Câu 73: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=1-2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ là

A. $1-x^2+\dfrac{\sqrt{x}}{2}+C.$ **B.** $x-x^2-\sqrt{x}+C$. **C.** $x-x^2+\sqrt{x}+C$. **D.** $1-x^2+\sqrt{x}+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1-2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=x-x^2+\sqrt{x}+C.$

Câu 74: Trên khoảng $(0;+\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ là:

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$.

Lời giải

Ta có $\int -\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x=\int -x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

Câu 75: Trên khoảng $(0;+\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^3}$ là:

A. $\int f(x)dx=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-2x^{-2}+C$. **B.** $\int f(x)dx=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{x^{-2}}{2}+C$.

C. $\int f(x)dx=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+2x^{-2}+C$. **D.** $\int f(x)dx=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}-2x^{-2}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx=\int\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^3}dx=\int\left(x^{-\frac{5}{2}}+x^{-3}\right)dx=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{x^{-2}}{2}+C$.

Câu 76: Trên khoảng $(0;+\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ là:

A. $\int f(x)dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+C$. **B.** $\int f(x)dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$.

C. $\int f(x)dx=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$. **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx=\int\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$.

Câu 77: Hàm số $F(x)=\ln x$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x)=\frac{1}{x^2}$. **B.** $f(x)=\frac{1}{x}$. **C.** $f(x)=\ln x$. **D.** $f(x)=\frac{-1}{x}$.

Lời giải

Ta có $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}=f(x)$.

Câu 78: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $f(x)=1-\frac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\tan 2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\cot 2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}\tan 2x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\tan 2x+C$.

Lời giải

Ta có

$d(2x)=(2x)'dx=2dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}d(2x)$

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 2x}\right)\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\cos^2 2x}\frac{1}{2}d(2x)=x-\frac{1}{2}\tan 2x+C$.

Câu 79: **(TK 2020-2021)** Cho hàm số $f(x)=\cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$ **B.** $\int f(x)dx=-\frac{1}{2}\sin 2x+C.$

C. $\int f(x)dx=2\sin 2x+C.$ **D.** $\int f(x)dx=-2\sin 2x+C.$

Lời giải

Ta có:

$d(2x)=(2x)'dx=2dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}d(2x)$

$\int\cos(2x)\mathrm{d}x=\int\cos(2x)\frac{1}{2}d(2x)=\frac{1}{2}\sin(2x)+C$.

Câu 80: **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$ **B.** $\int f(x)dx=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C.$ **D.** $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C.$

Lời giải

$$\int f(x)dx=\int\sqrt{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}d(2x-1)$$
$$=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$$

Câu 81: **(Mã 110 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{5x-2}$.

A. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$ **B.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\ln|5x-2|+C$

C. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=-\frac{1}{2}\ln|5x-2|+C$ **D.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=5\ln|5x-2|+C$

Lời giải

Ta có:

$d(5x-2)=(5x-2)'\,dx=5dx \Rightarrow dx=\frac{1}{5}d(5x-2)$

$\int \frac{dx}{5x-2}=\int \frac{1}{5x-2}.\frac{1}{5}d(5x-2)=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$

Câu 82: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3\sin 3x + C$ **B.** $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3}+C$

C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ **D.** $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3}+C$

Lời giải

Ta có: $\int \cos 3x dx = \int \frac{1}{3}\cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x) = \frac{\sin 3x}{3}+C$.

Câu 83: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Ta có

A. $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}$. **B.** $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+5$.

C. $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+15$ **D.** $h(t)=\frac{-t^4}{10}+\frac{t^3}{3}+5$.

Lời giải

Ta có: $\int(-0,1t^3+t^2)dt=\int(-0,1t^3)\,dt+\int t^2\,dt=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+C$.

Do $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$ nên $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+C$

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0)=5$, suy ra $C=5$.

Vậy $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+5$.

Câu 84: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Ký hiệu L là số lượng vi trùng sau 10 ngày. Tìm L.

A. $L=303044$. **B.** $L=306089$. **C.** $L=300761$. **D.** $L=301522$.

Lời giải

Ta có $N(t)=\int N'(t)dt=\int \frac{2000}{1+2t}dt=1000\ln|1+2t|+C$.

$N(0)=300000$

$\Leftrightarrow 1000\ln|1|+C=300000$

$\Leftrightarrow C=300000$

$\Rightarrow N(t)=1000\ln|1+2t|+300000$

$\Rightarrow N(10)=1000\ln|1+2.10|+300000\approx 303044$.

Câu 85: Một quần thể virut Corona P đang thay đổi với tốc độ $P'(t)=\dfrac{5000}{1+0,2t}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Quần thể virut Corona P ban đầu có số lượng là 1000 con. Số lượng virut Corona sau 3 giờ gần với số nào sau đây nhất?

A. 16000. **B.** 21750. **C.** 12750. **D.** 11750.

Lời giải

Ta có $P(t)=\int P'(t)\mathrm{d}t=\int\dfrac{5000}{1+0,2t}\mathrm{d}t=5000.\dfrac{1}{0,2}\ln(1+0,2t)+C=25000.\ln(1+0,2t)+C$.

$P(0)=1000\Leftrightarrow C=1000$.

Vậy biểu thức tính số lượng virut Corona với thời gian t bất kỳ là $P(t)=25000.\ln(1+0,2t)+1000$.

Với $t=3$ giờ ta có $P(3)=25000.\ln(1+0,2.3)+1000\approx 12750,09$.

Vậy số lượng virut khi $t=3$ giờ khoảng 12750 con.

Câu 86: Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t)=\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)$. Biết tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0, công thức tính quãng đường đi được của vật đó theo thời gian là

A. $s(t)=\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}t-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

B. $s(t)=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{1}{4}t+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

C. $s(t)=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

D. $s(t)=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}t+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là:

$v(t)=\int a(t)dt=\int\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)dt=-\dfrac{1}{2}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+C$.

$v(0)=0\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{4}$.

$\Rightarrow v(t)=-\dfrac{1}{2}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}$.

$\Rightarrow s(t)=\int\left(-\dfrac{1}{2}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}\right)dt=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}t+D$.

$s(0)=0\Leftrightarrow D=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $s(t)=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}t+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 87: Một vật đang chuyển động đều với gia tốc $v_0=15m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\,(m/s^2)$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3 giây từ lúc bắt dầu tăng tốc.

A. $27m$. **B.** $72m$. **C.** $69,75m$. **D.** $24,75m$.

Lời giải

Ta có $v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int(t^2+4t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+2t^2+C$.

Mà $v(0)=15\Rightarrow C=15$.

Khi đó $v(t)=\frac{1}{3}t^3+2t^2+15$.

$S(t)=\int\left(\frac{1}{3}t^3+2t^2+15\right)\mathrm{d}t=\frac{t^4}{12}+\frac{2t^3}{3}+15t+C_1$, coi $S(0)=\frac{0^4}{12}+\frac{2.0^3}{3}+15.0+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$

Vậy $S(3)=69,75m$.

Câu 88: Theo nghiên cứu thị trường, sau t năm từ năm đầu tiên vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ được tính xấp xỉ bởi công thức $P'(t)=125+t^2$ (triệu đồng/ năm). Lợi nhuận của doanh nghiệp được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $P(t)=125t+\frac{t^3}{3}$. **B.** $P(t)=125t+t^3$. **C.** $P(t)=125+t^3$. **D.** $P(t)=125t+2t^3$.

Lời giải

Lợi nhuận phát sinh của vốn sau t năm từ năm đầu tiên là $P(t)=\int P'(t)\,dt=125t+\frac{t^3}{3}+C$.

Tại thời điểm ban đầu $t=0$ thì $P(t)=0\Rightarrow C=0$.

Vậy $P(t)=125t+\frac{t^3}{3}$.

Câu 89: Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện A đã xả lũ trong khoảng 35 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $f(t)=20t+450\left(m^3/s\right)$. Sau thời gian xả lũ trên thì hồ nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là:

A. $4504500\left(m^3\right)$. **B.** $45045000\left(m^3\right)$. **C.** $280000\left(m^3\right)$. **D.** $28000\left(m^3\right)$.

Lời giải

Lượng nước của hồ chứa đã thoát đi sau thời gian t giây là: $F(t)=\int f(t)\,dt=10t^2+450t+C$.

Tại thời điểm ban đầu $t=0$ thì $F(t)=0\Rightarrow C=0$.

Suy ra $F(t)=10t^2+450t\left(m^3\right)$.

Lại có 35 phút tương đương 2100 giây, do đó sau thời gian xả lũ trên thì hồ nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là:

$F(2100)=10.2100^2+450.2100=45045000\left(m^3\right)$

CHƯƠNG IV

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=3$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=3x+C$.

b) $\int\left[f(x)+x\right]^2\mathrm{d}x=x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=1$ Thì $F(x)=3x-1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=1$ Thì $F(1)+F(2)+...+F(100)=14590$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^2$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C$.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3)=1$ Thì $F(4)=\frac{4}{3}$.

c) $\int f(2x+1)\mathrm{d}x=\int(2x+1)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$

d) $\int\left[x.f(x-2)\right]\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+2x^2+C$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có $f''(x)=20x^3-12x^2+6x$ thỏa $f'(-1)=0$ và $f(1)=-5$.

a) Ta có $\int f''(x)\mathrm{d}x=5x^4-4x^3+3x^2+C$.

b) Hàm số $f'(x)=5x^4-4x^3+3x^2+12$.

c) Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=x^5-x^4+x^3+12x+C$.

d) Hàm số $f(x)=x^5-x^4+x^3+12x-8$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=2^x$.

a) Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2^x.\ln 2$.

b) Mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đều có dạng $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$.

c) $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}+1$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Khi đó giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2024)+F(2025)=\dfrac{2^{2026}-1}{\ln 2}$.

Câu 5: Cho $f(x)=x^2+2$ và $\int g(x)dx=\sin x+C$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+2x+C$.

b) $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\dfrac{x^3}{3}+2x+\sin x+C$.

c) Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=x^2+2$, với $F(0)=1$. Khi đó $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x$.

d) $g(x)=-\cos x$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2f(x)+e^{3x}; f(0)=1$.

a) $\left[\dfrac{f(x)}{e^{2x}}\right]'=e^{3x}$.

b) $f(x)=e^{3x}+3$.

c) $f'(x)\sin 3x=3e^x.\sin 3x$.

d) $\int f'(x)\sin 3x\,dx=\dfrac{1}{2}e^{3x}(\sin 3x-\cos 3x)+C$.

Câu 7: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx=F(3)-G(0)+a,\ (a>0)$

a) $G(3)=F(3)+a,$

b) $\int f(x)dx=G(x)+a$.

c) $G'(x)=F'(x)$.

d) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0, x=3$. Khi $S=15$ thì $a=15$

Câu 8: Cho hàm **số** $F(x)=x^3+x^2-x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

a) Nếu hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(1)=1$ thì $G(x)=F(x),\ x\in\mathbb{R}.$

b) Nếu hàm số $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1)=-3$ thì $H(x)=F(x)-3,\ x\in\mathbb{R}.$

c) Nếu hàm số $K(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $K(0)=3$ thì $K(x)=F(x)+3,\ x\in\mathbb{R}.$

d) Nếu hàm số $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(-1)=4$ thì $M(x)=F(x)-1,\ x\in\mathbb{R}.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^3-4x+5$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=3$.

a) $\int\left(x^3-4x+5\right)dx=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+5x+C$.

b) Giá trị $F(0)=2$

c) $\int\left[f(x)+f'(x)\right]dx=\dfrac{x^4}{4}+x^3-2x^2+9x+C$

d) $\int f(x+1)dx=\dfrac{x^4}{4}+x^3-\dfrac{1}{2}x^2+2x+C$

Câu 10: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{(x+1)(3x-2)}{x}$.

a) $f(x)=3x+5-\dfrac{2}{x}$.

b) $\int f(x)dx=3+x-2\ln|x|+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=15$. Khi đó tìm được $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+15$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2)=1$ và $G(5)+G(-5)=10$. Khi đó tìm được $G(-10)=a\ln 2+b\ln 5+c$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Vậy $a+b+c=75$.

Câu 11: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{3x^5-2x^3+x^2+5x+4}{x^3}$.

a) $f(x)=3x^2-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x)dx=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=0$. Khi đó tìm được $F(x)=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=0$ và $G(-3)-G(3)=2$. Khi đó tìm được $G(-2)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{\log_c e}$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b+c=1093$.

Câu 12: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

a) $f(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x-2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=5$. Khi đó tìm được $F(x)=x-2\ln|x|-\dfrac{1}{x}+5$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=5$ và $G(2)+G(-4)=2025$. Khi đó tìm được $F(-8)=\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b=16123$.

Câu 13: Cho $f(x)=\sqrt{2x+1}$, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=\dfrac{4}{3}$.

a) $F'(x)=f(x)$

b) $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\dfrac{1}{3}$

c) $F(4)=10$

d) Phương trình $F(x)=x+1$ có 2 nghiệm phân biệt

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}+2}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0)=1$.

a) $\int f^2(x)dx=e^x-e^{-x}+2x$

b) $F(1)=2\sqrt{e}+1$

c) $F(x)=\sqrt{e^x-e^{-x}+2x}+1$

d) Phương trình $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}-3$ có nghiệm duy nhất $x=-2\ln 2$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\sin x$.

a) Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(\pi)=1$. Khi đó, $F(0)=-1$.

c) Ta có $\int F(x)\,\mathrm{d}x=\sin x+C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x)=f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0\,;\,4\pi]$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$.

a) Ta có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Biết rằng, $F(0)=-1$. Khi đó, $F(x)=\sin x-\cos x$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

d) Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là -2.

Câu 17: Giả sử $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2e^x$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đúng	Sai
a) $F'(x)=\left(ax^2+2ax+2bx+c\right)e^x$		
b) Tìm được $a=1,b=-1,c=2$.		
c) Giá trị $F(0)=2$.		
d) $\int F(x).e^{x^3-3x^2+5x}dx=2e^{x^3-3x^2+6x}+C$		

Câu 18: Một quả bóng được ném lên từ độ cao $24,5$ m với vận tốc được tính theo công thức $v(t)=-9,8t+19,6$ (m/s).

a) Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t thì $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$.

b) Công thức tính độ cao quả quả bóng theo thời gian t là $h(t)=-4,9t^2+19,6t+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

c) Khi quả bóng chạm chất thì $v(t)=0$.

d) Sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

Câu 19: Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $A'(t)=20t^3-300t^2+1000t \quad (0\le t\le 15)$ trong đó t tính bằng giờ và $A'(t)$ tính bằng khách/ giờ. Sau một giờ, 500 người có mặt tại lễ hội.

a) Công thức biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội là
$A(t)=5t^4-100t^3+500t^2+95\ (0\le t\le 15)$.

b) Sau 3 giờ số lượng khách tham dự là 2205 người.

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 người.

d) Tại thời điểm $t=2$ giờ thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất.

Câu 20: Một xe ô tô đang chạy với tốc độ $65km/h$ thì người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$. Người lái xe phản ứng một giây, sau đó đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-10t+20(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh, $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong khoảng thời gian $t(s)$ kể từ lúc đạp phanh.

a) Quãng đường ô tô đi được trong thời gian $t(s)$ là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$.

b) $s(t)=-5t^2+20t$.

c) Thời gian từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là 20 giây.

d) Xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật trên đường.

Câu 21: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=4\cos t$ (m/s^2). Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0.

a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=4\cos t$ (m/s).

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}$ là 2 m/s.

c) Tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vật là $\sqrt{2}$ m/s

d) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}\ (m/s^2)$

Câu 22: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15\,m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Câu 23: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t) = t^2 - 8t$ (con/giờ).

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3} - 8t^2 + C\ \ (C \in \mathbb{R})$.

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

CHƯƠNG IV NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=3$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=3x+C$.

b) $\int\left[f(x)+x\right]^2\mathrm{d}x=x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=1$ Thì $F(x)=3x-1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=1$ Thì $F(1)+F(2)+...+F(100)=14590$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) Ta có: $\int 3\mathrm{d}x=3x+C$

b) $\int\left[f(x)+x\right]^2\mathrm{d}x=\int(3+x)^2\mathrm{d}x=\int\left(x^2+6x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+3x^2+9x+C$

c) Ta có:
$F(1)=1\Leftrightarrow 3+C=1\Leftrightarrow C=-2$ vậy $F(x)=3x-2$.

d) Ta có: $F(x)=3x-2$ nên $F(1)=1;F(2)=4;F(3)=7;....;F(100)=298$. là cấp só cộng với $u_1=1;d=3$.

Thì $F(1)+F(2)+...+F(100)=\frac{(1+298).100}{2}=14950.$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^2$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C$.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3)=1$ Thì $F(4)=\frac{4}{3}$.

c) $\int f(2x+1)\mathrm{d}x=\int(2x+1)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$

d) $\int\left[x.f(x-2)\right]\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+2x^2+C$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$

b) Ta có:

$F(3) = 1 \Leftrightarrow \frac{3^3}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = -8$ vậy $F(x) = \frac{x^3}{3} - 8$ nên $F(4) = \frac{40}{3}$.

c) $\int f(2x+1)\mathrm{d}x = \int (2x+1)^2\mathrm{d}x = \int (4x^2+4x+1)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$.

d)

$\int [x.f(x-2)]\mathrm{d}x = \int x.(x-2)^2\mathrm{d}x = \int x.(x^2-4x+4)\mathrm{d}x = \int (x^3-4x^2+4x)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$ thỏa $f'(-1) = 0$ và $f(1) = -5$.

a) Ta có $\int f''(x)\mathrm{d}x = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + C$.

b) Hàm số $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 12$.

c) Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x = x^5 - x^4 + x^3 + 12x + C$.

d) Hàm số $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 12x - 8$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) Đúng. Ta có $\int f''(x)\mathrm{d}x = \int (20x^3 - 12x^2 + 6x)\mathrm{d}x = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + C$.

b) Sai. Ta có $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + C$. Do $f'(-1) = 0$ nên $12 + C = 0 \Leftrightarrow C = -12$.

Vậy $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 12$.

c) Sai. Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 12)\mathrm{d}x = x^5 - x^4 + x^3 - 12x + C$.

d) Sai. Ta có $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 12x + C$. Do $f(1) = -5$ nên $-11 + C = -5 \Leftrightarrow C = 6$.

Vậy $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 12x + 6$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 2^x$.

a) Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2^x.\ln 2$.

b) Mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đều có dạng $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.

c) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 1$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = 1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Khi đó giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + ... + F(2024) + F(2025) = \frac{2^{2026} - 1}{\ln 2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a)Đúng: $f'(x) = g(x)$.

b)Sai**:** $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$, C là hằng số.

c) Sai: $F(x)=\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C;\ F(1)=1\Rightarrow \frac{2}{\ln 2}+C=1\Rightarrow C=1-\frac{2}{\ln 2}\neq 1$.

d)Đúng:

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, ta có $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+C$ mà $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$.

$T=F(0)+F(1)+...+F(2024)+F(2025)$

$=\frac{1}{\ln 2}\left(1+2+2^2+...+2^{2024}+2^{2025}\right)=\frac{1}{\ln 2}.\frac{2^{2026}-1}{2-1}=\frac{2^{2026}-1}{\ln 2}$.

Câu 5: Cho $f(x)=x^2+2$ và $\int g(x)dx=\sin x+C$.

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+2x+C$.

b) $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\frac{x^3}{3}+2x+\sin x+C$.

c) Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=x^2+2$, với $F(0)=1$. Khi đó $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x$.

d) $g(x)=-\cos x$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a)Đúng: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+2x+C$.

b)Đúng: $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx=\frac{x^3}{3}+2x+\sin x+C$.

c)Sai: $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(x^2+2\right)dx=\frac{x^3}{3}+2x+C$. Mà $F(0)=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x+1$.

d)Sai: $g(x)=\left(\int g(x)dx\right)'=\left(\sin x+C\right)'=\cos x$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2f(x)+e^{3x};f(0)=1$.

a) $\left[\frac{f(x)}{e^{2x}}\right]'=e^{3x}$.

b) $f(x)=e^{3x}+3$.

c) $f'(x)\sin 3x=3e^x.\sin 3x$.

d) $\int f'(x)\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}e^{3x}\left(\sin 3x-\cos 3x\right)+C$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Sai: $f'(x)=2f(x)+e^{3x} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)e^{2x}-2f(x)e^{2x}}{e^{4x}}=e^{x} \Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{e^{2x}}\right]'=e^{x}$.

b) Sai: Dễ thấy $\left[\dfrac{f(x)}{e^{2x}}\right]'=e^{x} \Rightarrow \int\left[\dfrac{f(x)}{e^{2x}}\right]'dx=\int e^{x}dx \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^{2x}}=e^{x}+C \Leftrightarrow f(x)=e^{2x}\left(e^{x}+C\right)$.

Do $f(0)=1 \Rightarrow C=0$. Suy ra $f(x)=e^{3x}$.

c) Sai: $f'(x)\sin 3x=\left(e^{3x}\right)'.\sin 3x=3e^{3x}\sin 3x$.

d) Đúng: $\int f'(x)\sin 3x\,dx=\int 3e^{3x}\sin 3x\,dx=\int e^{3x}\ \sin 3x\,d(3x)=e^{3x}\sin 3x-\int e^{3x}\cos 3x\,d(3x)$

$=e^{3x}\sin 3x-e^{3x}\cos 3x-\int e^{3x}\ \sin 3x\,d(3x)=e^{3x}\sin 3x-e^{3x}\cos 3x-\int f'(x)\sin 3x\,dx$.

$\Rightarrow \int f'(x)\sin 3x\,dx=\dfrac{1}{2}e^{3x}(\sin 3x-\cos 3x)+C$.

Câu 7: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^3 f(x)dx=F(3)-G(0)+a,\ (a>0)$

a) $G(3)=F(3)+a$,

b) $\int f(x)dx=G(x)+a$.

c) $G'(x)=F'(x)$.

d) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0, x=3$. Khi $S=15$ thì $a=15$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x)=F(x)+C, \forall x\in\mathbb{R}$, với C là hằng số.

Mặt khác $\int\limits_0^3 f(x)dx=F(3)-F(0)$

Lại có $\int\limits_0^3 f(x)dx=F(3)-G(0)+a$, suy ra $G(0)=F(0)+a$.

Do đó $a=C \Rightarrow G(x)=F(x)+a, \forall x\in\mathbb{R}$

a. Đúng.

b. Sai: $\int f(x)dx=G(x)-a$

c: Đúng.

d. Sai. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0, x=3$.

$S=\int\limits_0^3\left|G(x)-F(x)\right|dx \Leftrightarrow 15=\int\limits_0^3|a|dx \overset{a>0}{\Leftrightarrow} 15=3a \Leftrightarrow a=5$.

Câu 8: Cho hàm **số** $F(x)=x^3+x^2-x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

a) Nếu hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(1)=1$ thì $G(x)=F(x),\ x\in\mathbb{R}.$

b) Nếu hàm số $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1)=-3$ thì $H(x)=F(x)-3,\ x\in\mathbb{R}.$

c) Nếu hàm số $K(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $K(0)=3$ thì $K(x)=F(x)+3,\ x\in\mathbb{R}.$

d) Nếu hàm số $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(-1)=4$ thì $M(x)=F(x)-1,\ x\in\mathbb{R}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a)Đúng: Vì $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x)=F(x)+C,$ với C là một hằng số. Mà $G(1)=1$ nên ta có $G(1)=F(1)+C\Leftrightarrow 1=1+C\Leftrightarrow C=0.$

Vậy $G(x)=F(x),\ x\in\mathbb{R}.$

b) Sai: Vì $H(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $H(x)=F(x)+C,$ với C là một hằng số. Mà $H(1)=-3$ nên ta có $H(1)=F(1)+C\Leftrightarrow -3=1+C\Leftrightarrow C=-4.$

Vậy $H(x)=F(x)-4,\ x\in\mathbb{R}.$

c) Đúng: Vì $K(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $K(x)=F(x)+C,$ với C là một hằng số. Mà $K(0)=3$ nên ta có $K(0)=F(0)+C\Leftrightarrow 3=0+C\Leftrightarrow C=3.$

Vậy $K(x)=F(x)+3,\ x\in\mathbb{R}.$

d) Sai: Vì $M(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $M(x)=M(x)+C,$ với C là một hằng số. Mà $M(-1)=4$ nên ta có $M(-1)=F(-1)+C\Leftrightarrow 4=1+C\Leftrightarrow C=3.$ Vậy $M(x)=F(x)+3,\ x\in\mathbb{R}.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^3-4x+5$. Gọi $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$. Biết $F\left(1\right)=3$.

a) $\int\left(x^3-4x+5\right)dx=\frac{x^4}{4}-2x^2+5x+C$.

b) Giá trị $F\left(0\right)=2$

c) $\int\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]dx=\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+9x+C$

d) $\int f\left(x+1\right)dx=\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Ta có: $\int\left(x^3-4x+5\right)dx=\frac{x^4}{4}-2x^2+5x+C$.

b) Ta có:

$F\left(1\right)=3\Leftrightarrow\frac{13}{4}+C=3\Leftrightarrow C=-\frac{1}{4}$ vậy $F\left(0\right)=-\frac{1}{4}$.

c) Ta có: $\int\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]dx=\frac{x^4}{4}-2x^2+5x+x^3-4x+C=\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+x+C$.

d) $\int f(x+1)\mathrm{d}x = \dfrac{(x+1)^4}{4} - 2(x+1)^2 + 5(x+1) + C = \dfrac{x^4}{4} + x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

.

Câu 10: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \dfrac{(x+1)(3x-2)}{x}$.

a) $f(x) = 3x + 5 - \dfrac{2}{x}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x = 3 + x - 2\ln|x| + C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 15$. Khi đó tìm được $F(x) = \dfrac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 15$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2) = 1$ và $G(5) + G(-5) = 10$. Khi đó tìm được $G(-10) = a\ln 2 + b\ln 5 + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Vậy $a + b + c = 75$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Sai vì $f(x) = \dfrac{(x+1)(3x-2)}{x} = \dfrac{3x^2 + x - 2}{x} = 3x + 1 - \dfrac{2}{x}$.

b) Sai vì $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(3x + 1 - \dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$.

c) Sai vì:

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(3x + 1 - \dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$.

Do $F(3) = 15 \Leftrightarrow \dfrac{27}{2} + 3 - 2\ln 3 + C = 15 \Leftrightarrow C = 2\ln 3 - \dfrac{3}{2}$.

Vậy $F(x) = \dfrac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 2\ln 3 - \dfrac{3}{2}$.

d) Đúng vì:

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} + x - 2\ln x + C_1 & khi\ x > 0 \\ \dfrac{3x^2}{2} + x - 2\ln(-x) + C_2 & khi\ x < 0 \end{cases}$

Do $\begin{cases} G(2) = 1 \\ G(5) + G(-5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 2 + C_1 = 1 \\ \dfrac{75}{2} + 5 - 2\ln 5 + C_1 + \dfrac{75}{2} - 5 - 2\ln 5 + C_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -7 \\ C_2 = 4\ln 5 - 65 \end{cases}$.

Nên $G(-10) = 150 - 10 - 2\ln 10 + 4\ln 5 - 65 = 75 - 2\ln 2 + 2\ln 5 = a\ln 2 + b\ln 5 + c$.

Vậy $a + b + c = -2 + 2 + 75 = 75$.

Câu 11: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \dfrac{3x^5 - 2x^3 + x^2 + 5x + 4}{x^3}$.

a) $f(x) = 3x^2 - 2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=0$. Khi đó tìm được $F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=0$ và $G(-3)-G(3)=2$. Khi đó tìm được $G(-2) = \frac{a}{b} + \frac{1}{\log_c e}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b+c=1093$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng vì $f(x) = \frac{3x^5 - 2x^3 + x^2 + 5x + 4}{x^3} = 3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}$.

b) Đúng vì:

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$.

c) Đúng vì:

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

Do $F(-1)=0 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}$.

Vậy $F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}$.

d) Sai vì:

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C = \begin{cases} x^3 - 2x + \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C_1 & khi\ x>0 \\ x^3 - 2x + \ln(-x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C_2 & khi\ x<0 \end{cases}$.

Do

$$\begin{cases} G(1)=0 \\ G(-3)-G(3)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ -27+6+\ln 3+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+C_2-27+6-\ln 3+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}-\frac{5}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ C_2 = \frac{275}{6} \end{cases}$$

.

Nên $G(-2) = -8+4+\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{275}{6} = \frac{1013}{24} + \frac{1}{\log_2 e} = \frac{a}{b} + \frac{1}{\log_c e}$.

Vậy $a+b+c = 1013+24+2 = 1039$.

Câu 12: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

a) $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x = x - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 5$. Khi đó tìm được $F(x) = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 5$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 5$ và $G(2) + G(-4) = 2025$. Khi đó tìm được $F(-8) = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a + b = 16123$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng vì $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.

b) Sai vì:

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

c) Sai vì:

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

Do $F(3) = 5 \Leftrightarrow 3 - 2\ln 3 - \frac{1}{3} + C = 5 \Leftrightarrow C = 2\ln 3 + \frac{7}{3}$.

Vậy $F(x) = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln 3 + \frac{7}{3}$.

d) Đúng vì:

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C = \begin{cases} x - 2\ln x - \frac{1}{x} + C_1 & khi\ \ x > 0. \\ x - 2\ln(-x) - \frac{1}{x} + C_2 & khi\ \ x < 0. \end{cases}$

Do

$$\begin{cases} G(1) = 5 \\ G(2) + G(-4) = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ 2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2} + 5 - 4 - 4\ln 2 + \frac{1}{4} + C_2 = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 6\ln 2 + \frac{8089}{4} \end{cases}.$$

Nên $G(-8) = -8 - 6\ln 2 + \frac{1}{8} + 6\ln 2 + \frac{8089}{4} = \frac{16115}{8}$.

Suy ra: $a = 16115; b = 8$.

Vậy $a + b = 16115 + 8 = 16123$.

Câu 13: Cho $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = \frac{4}{3}$.

a) $F'(x) = f(x)$

b) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{3}$

c) $F(4) = 10$

d) Phương trình $F(x)=x+1$ có 2 nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng theo định nghĩa nguyên hàm

b) Sai vì $F(x)=\int\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1)=\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$

Mà $F(0)=\frac{4}{3}\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+1$

c) Đúng vì $F(x)=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+1\Rightarrow F(4)=10$

d) Sai vì $F(x)=x+1\Leftrightarrow\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+1=x+1\Leftrightarrow\sqrt{(2x+1)^3}=3x$ (ĐK: $x\ge 0$)

$\Leftrightarrow(2x+1)^3=9x^2\Leftrightarrow 8x^3+12x^2+6x+1=9x^2\Leftrightarrow 8x^3+3x^2+6x+1=0\Rightarrow$ có 1 nghiệm $x>0$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}+2}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0)=1$.

a) $\int f^2(x)dx=e^x-e^{-x}+2x$

b) $F(1)=2\sqrt{e}+1$

c) $F(x)=\sqrt{e^x-e^{-x}+2x}+1$

d) Phương trình $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}-3$ có nghiệm duy nhất $x=-2\ln 2$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Sai vì $\int f^2(x)dx=\int(e^x+e^{-x}+2)dx=e^x-e^{-x}+2x+C$

b) Sai vì $F(x)=\int\sqrt{e^x+e^{-x}+2}dx=\int\sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}dx=\int\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx=2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}+C$

Mà $F(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}+1\Rightarrow F(1)=2\sqrt{e}-\frac{2}{\sqrt{e}}+1$

c) Sai vì $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}+1$

d) Đúng vì $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}-3\Leftrightarrow 2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}+1=2e^{\frac{x}{2}}-3\Leftrightarrow 2e^{-\frac{x}{2}}=4\Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}}=2$

$\Leftrightarrow-\frac{x}{2}=\ln 2\Leftrightarrow x=-2\ln 2$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\sin x$.

a) Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(\pi)=1$. Khi đó, $F(0)=-1$.

c) Ta có $\int F(x)\mathrm{d}x=\sin x+C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x)=f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0\ ;\ 4\pi]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

b) Từ giả thiết, ta được $-\cos\pi+C=1\Leftrightarrow 1+C=1\Leftrightarrow C=0$ nên $F(x)=-\cos x\Rightarrow F(0)=-1$.

c) Ta có $\int F(x)\,\mathrm{d}x=-\int \cos x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C_1$.

d) Ta có $F(x)=f(x)\Leftrightarrow -\cos x=\sin x\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ta xét $0\le\dfrac{-\pi}{4}+k\pi\le 4\pi\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\le k\le\dfrac{17}{4}$. Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{1;2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.

Tức là, phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thuộc đoạn $[0\ ;\ 4\pi]$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$.

a) Ta có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Biết rằng, $F(0)=-1$. Khi đó, $F(x)=\sin x-\cos x$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

d) Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là -2.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Ta có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$.

b) Từ giả thiết, ta được $\sin 0-\cos 0+C=-1\Leftrightarrow C=0$ nên $F(x)=\sin x-\cos x$.

c) Ta có $F'(x)=\sin x+\cos x>0,\ \forall x\in\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

d) Ta thấy $\begin{cases}\sin x\ge -1\\ -\cos x\ge -1\end{cases}\Rightarrow F(x)=\sin x-\cos x\ge -2$.

Trong đó, có $F(x)=-2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=-1\\ \cos x=1\end{cases}\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=2\ne 1$.

Từ đó, suy ra hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất là -2.

Câu 17: Giả sử $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2e^x$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đúng	Sai
a) $F'(x)=(ax^2+2ax+2bx+c)e^x$		
b) Tìm được $a=1,b=-1,c=2$.		
c) Giá trị $F(0)=2$.		
d) $\int F(x).e^{x^3-3x^2+5x}dx=2e^{x^3-3x^2+6x}+C$		

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Ta có

$F'(x)=\left[\left(ax^2+bx+c\right)e^x\right]'=\left(ax^2+2ax+bx+b+c\right)e^x$.

b) Theo bài ra ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2e^x$ nên $F'(x)=f(x)$ đồng nhất hệ số ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a=1\\2a+b=0\\b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$$

c) Ta có $F(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x$.

Do đó $F(0)=\left(0^2-2.0+2\right)e^0=2$.

d) Ta có $F(x).e^{x^3-3x^2+5x}=\left(x^2-2x+2\right)e^x.e^{x^3-3x^2+5x}=\left(x^2-2x+2\right).e^{x^3-3x^2+6x}$.

Do đó $\int F(x).e^{x^3-3x^2+5x}dx=\int\left(x^2-2x+2\right).e^{x^3-3x^2+6x}dx$

$=\frac{1}{3}\int e^{x^3-3x^2+6x}d\left(x^3-3x^2+6x\right)$

$=\frac{1}{3}e^{x^3-3x^2+6x}+C$.

Câu 18: Một quả bóng được ném lên từ độ cao $24,5$ m với vận tốc được tính theo công thức $v(t)=-9,8t+19,6$ (m/s).

a) Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t thì $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$.

b) Công thức tính độ cao quả quả bóng theo thời gian t là $h(t)=-4,9t^2+19,6t+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

c) Khi quả bóng chạm chất thì $v(t)=0$.

d) Sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng. Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t thì $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$.

b) Sai. Ta có $\int v(t)\mathrm{d}t=\int(-9,8t+19,6)\mathrm{d}t=-4,9t^2+19,6t+C.$

Do đó $h(t)=-4,9t^2+19,6t+C$.

Mà quả bóng được ném lên từ độ cao $24,5$ m tức là tại thời điểm $t=0$ thì $h(t)=24,5$ nên $h(0)=24,5\Leftrightarrow C=25,5$.

Vậy công thức tính độ cao $h(t)$ của quả bóng theo thời gian t là:

$h(t)=-4,9t^2+19,6t+24,5$ (m).

c) Sai. Khi quả bóng chạm đất thì $h(t)=0$.

d) Đúng. Ta có

$$-4,9t^2+19,6t+24,5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=5.\end{array}\right.$$

Mà $t>0$ nên $t=5$.

Vậy sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

Câu 19: Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $A'(t)=20t^3-300t^2+1000t \quad (0\le t\le 15)$ trong đó t tính bằng giờ và $A'(t)$ tính bằng khách/ giờ. Sau một giờ, 500 người có mặt tại lễ hội.

a) Công thức biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội là $A(t)=5t^4-100t^3+500t^2+95\ (0\le t\le 15)$.

b) Sau 3 giờ số lượng khách tham dự là 2205 người.

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 người.

d) Tại thời điểm $t=2$ giờ thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a)Đúng: Ta có $A(t)=\int A'(t)dt=\int\left(20t^3-300t^2+1000t\right)dt=5t^4-100t^3+500t^2+C$

Mà $F(1)=500\Rightarrow C=95$.

b)Sai: Sau 3 giờ số lượng khách tham dự là $A(3)=2300$ người.

c)Đúng: Ta có $A'(t)=0\Leftrightarrow t=5;\ t=10\in[1;15]$

$A(1)=500;\ A(5)=3220;\ A(10)=95;\ A(15)=28220$

Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 người.

d)Sai: Ta có $A''(t)=60t^2-600t+1000=0\Leftrightarrow t=\dfrac{15\pm 5\sqrt{3}}{3}\in[1;15]$

$A'(1)=720;\ A'(15)=15000;\ A'\left(\dfrac{15+5\sqrt{3}}{3}\right)=-962,25;\ A'\left(\dfrac{15-5\sqrt{3}}{3}\right)=962,25$

Tại thời điểm $t=15$ giờ thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất.

Câu 20: Một xe ô tô đang chạy với tốc độ $65km/h$ thì người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$. Người lái xe phản ứng một giây, sau đó đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-10t+20(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh, $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong khoảng thời gian $t(s)$ kể từ lúc đạp phanh.

a) Quãng đường ô tô đi được trong thời gian $t(s)$ là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$.

b) $s(t)=-5t^2+20t$.

c) Thời gian từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là 20 giây.

d) Xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật trên đường.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a)Đúng.

b)Đúng: $s(t)=\int v(t)dt=-5t^2+20t+C$

Lại có $s(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow\ s(t)=-5t^2+20t$.

c)Sai: Khi ô tô dừng hẳn thì $v(t)=0\Rightarrow -10t+20=0\Rightarrow t=2(s)$.

d)Đúng: Quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là

$s(t)=\int_0^2(-10t+20)dt=20(m)$

Quãng đường xe ô tô đi được từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật đến khi dừng hẳn là $65.10^3.\frac{1}{3600}+20=38,0(5)m<50m$. Vậy xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật trên đường.

Câu 21: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=4\cos t$ (m/s^2). Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0.

a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=4\cos t$ (m/s).

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}$ là 2 m/s.

c) Tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vật là $\sqrt{2}$ m/s

d) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}\ (m/s^2)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Sai: Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 4\cos\mathrm{d}t=4\sin t+C$. Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0)=0$ hay $C=0$. Vậy $v(t)=4\sin t$.

b) Đúng: Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}$ là $v\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\frac{\pi}{6}=2$ (m/s).

c) Sai: Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ là $v\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$ (m/s).

d) Đúng: Gia tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ (s) là: $a(\frac{\pi}{4})=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$(m/s^2).

Câu 22: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0=15\,m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a=-3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t)=a'(t)$.

b) $a(t)=s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Sai.

$v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t$

b) Đúng.

$a(t)=v'(t)=s''(t)$.

c) Sai.

$v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int -3\mathrm{d}t=-3t+C$.

$v(0)=-3.0+C=15 \Rightarrow C=15$. Suy ra $v(t)=-3t+15$.

Xe dừng hẳn khi $v(t)=0 \Rightarrow -3t+15=0 \Rightarrow t=5$ giây.

d) Đúng.

$s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int -3t+15\mathrm{d}t=\frac{-3}{2}t^2+15t+C$.

$s(0)=\frac{-3}{2}0^2+15.0+C=0 \Rightarrow C=0$.

$s(5)=37,5$ mét.

Câu 23: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t)=t^2-8t$ (con/giờ).

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3}-8t^2+C$ $(C\in\mathbb{R})$.

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai.

Ta có: $\int (t^2-8t)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-4t^2+C$.

b) Sai.

Ta có: $f'(t)>0$ khi $8<t<10$ và $f'(t)<0$ khi $3<t<8$.

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Đúng.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3		8		10
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$f(8)$	$\nearrow$	

d) Đúng.

$f(t)=\frac{t^3}{3}-4t^2+C$. Do $f(3)=50 \Rightarrow \frac{3^3}{3}-4.3^2+C=50 \Rightarrow C=77$.

Suy ra $f\left(t\right)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+77\Rightarrow f\left(6\right)=5$.

CHƯƠNG IV NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

V HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: $F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+1$ và $F(0)=1$. Tính giá trị của $F(1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=3x^2-2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Biết $F(x)$.là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị $F(2)$ bằng

Câu 3: Cho hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+6x$. Biết $F(3)=27$. Tính $F(-3)$.

Câu 4: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}$ trên $(0;+\infty)$ sao cho $F(1)=2$. Tính $F(e^{2025})$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+2$ và $f(2)=\dfrac{9}{2}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(2)=4+\ln 2$, khi đó $F(1)$ bằng

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 4x+2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(-2)=5$. Biết rằng $F(1)+3F(-1)=ae^2+b$. Khi đó $a+b$ bằng

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}$, $f'(1)=0$, $f(1)=1$ và $f(-1)=2$. Tính giá trị $f(2)$.

Câu 8: Bạn An ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t)=3t^2+5\,(m/s)$. Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc $36km/h$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a(t)=1+\dfrac{t}{3}\,(m/s^2)$. Tính vận tốc của ô tô sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

Câu 10: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x(3x+2)^2$, biết $F(0)=1$. Tính $F(1)=1$

Câu 11: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(x+1)(3x-1)^2$, biết $F(1)=0$. Tính $F(0)$

Câu 12: Có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3-2x)(x-2)^2$, biết $F(1)=0$. Tính $F(3)$ làm tròn đến phần trăm

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Câu 15: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{3x-1}$ và thỏa mãn $F(0)+F(3)=5$. Giá trị của biểu thức $T=F(-1)+F(11)$ bằng bao nhiêu?.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ và thỏa mãn điều kiện $f(0)=-\frac{1}{2}$; $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$. Tính tổng $S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2024)+f(2025)$.

Câu 17: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Câu 18: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x^3}$ trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=-\frac{3}{5}$. Tính $F(4)$.

Câu 19: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục và thỏa mãn: $f(1)=1$ và $f'(x)\sqrt[3]{x^{-1}}=1$,với mọi $x>0$. Tính $4f(8)$?

Câu 20: Gọi $h(t)$ (m) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$ (m/s) và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây.

Câu 21: Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5m, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$. Sau bao nhiêu năm cây cao được 3m.

Câu 22: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày ($0\le t\le 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.

Câu 23: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)$ thoả mãn $F(0)=2$. Khi đó giá trị làm tròn đến chứ số thập phân thứ 2 của $F(1)$ bằng

Câu 24: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và: $f'(x)=1+e^{2x}$, $\forall x, f(0)=2$. Tìm hàm $f(x)$. Tính $f(1)$

Câu 25: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2024)=2^n-m\,(m,n\in N)$. Khi đó $m+n$ bằng

Câu 26: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t)=\dfrac{2}{t+1}(m/s^2)$. Tính vận tốc của vật tại giây thứ 20.

Câu 27: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$. Tính $F(0)$.

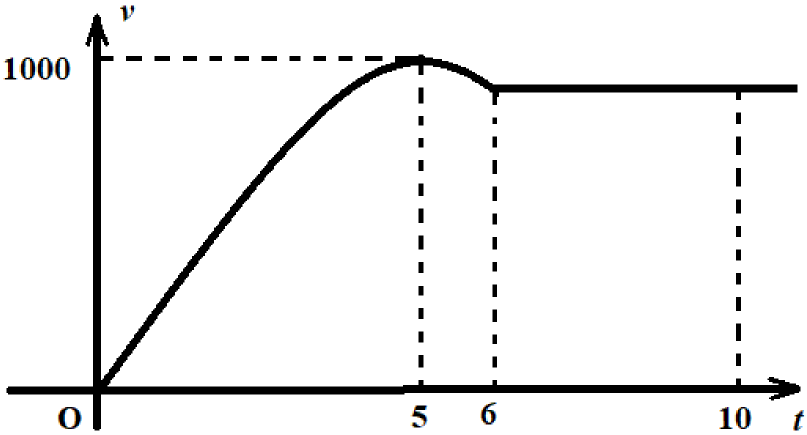
Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2-5\sin x$ và $f(0)=10$. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 29: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\cos 3x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ và $f'(x).\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=1$. Tính $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Câu 31: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15(\text{m/s})$, trong đó t. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Câu 32: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu?

Câu 33: Cây cà chua khi trồng có chiều cao $5m$. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi công thức $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Chiều cao tối đa của cây cà chua là bao nhiêu cm.

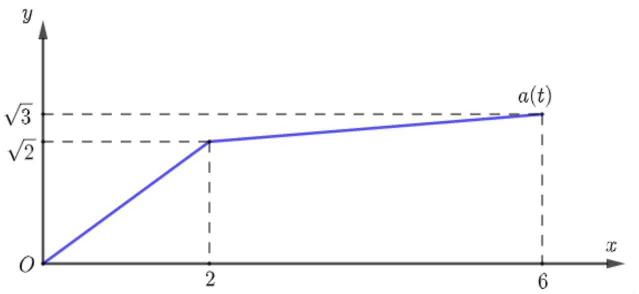
Câu 34: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $V(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Biết rằng $V'(t)=at^2+bt$ và ban đầu bể không có nước, sau 5 giây thể tích nước trong bể là $15m^3$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $110m^3$. Tính thể tích nước bơm được sau 20 giây.

Câu 35: Cường độ dòng điện trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là: $I(t)=Q'(t)=3t^2-6t+5$, với $Q(t)$ là điện lượng truyền trong dây dẫn tại thời điểm t. Biết khi $t=1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1)=4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t=3$.

Câu 36: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao bao nhiêu centimét?.

Câu 37: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15(\text{m/s})$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính vận tốc chất điểm đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

Câu 38: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?.

CHƯƠNG IV NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

V HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: $F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+1$ và $F(0)=1$. Tính giá trị của $F(1)$.

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có: $F(x)=\int f(x)dx=\int(4x^3+1)dx=x^4+x+C.$

Theo giả thiết $F(0)=1$ nên $C=1\Rightarrow F(1)=3.$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=3x^2-2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Biết $F(x)$.là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị $F(2)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(3x^2-2)\mathrm{d}x=x^3-2x+C$.

Suy ra $f(x)=x^3-2x+C$.

Theo bài ra ta có: $f(1)=0\Rightarrow -1+C=0\Leftrightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x^3-2x+1$

Khi đó: $F(2)-F(0)=\int \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x=\int(x^3-2x+1)\mathrm{d}x=2$

$\Rightarrow F(2)-2=2\Rightarrow F(2)=4$.

Câu 3: Cho hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+6x$. Biết $F(3)=27$. Tính $F(-3)$.

Lời giải

Trả lời: 9

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=\frac{x^3}{3}+3x^2+C$. Vì $F(3)=27$ nên $C=-9$. Khi đó

$F(x)=\frac{x^3}{3}+3x^2-9\Rightarrow F(-3)=9.$

Câu 4: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ trên $(0;+\infty)$ sao cho $F(1)=2.$ Tính $F(e^{2025})$.

Lời giải

Trả lời: 2027

Ta có: $F(x)=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C, x\in(0;+\infty)$.

$F(1)=2\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(x)=\ln x+2$.

Vậy $F\left(e^{2025}\right)=\ln e^{2025}+2=2027$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+2$ và $f(2)=\dfrac{9}{2}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(2)=4+\ln 2$, khi đó $F(1)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 1

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+2\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}+2x+C.$

Theo bài ra $f(2)=\dfrac{9}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}+4+C=\dfrac{9}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}+2x\Rightarrow F(x)=\ln|x|+x^2+M.$

Theo bài ra $F(2)=4+\ln 2\Rightarrow \ln 2+4+M=4+\ln 2\Rightarrow M=0\Rightarrow F(x)=\ln|x|+x^2\Rightarrow F(1)=1.$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}e^{2x}+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 4x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(-2)=5$. Biết rằng $F(1)+3F(-1)=ae^2+b$. Khi đó $a+b$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int\left(e^{2x}+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{e^{2x}}{2}+x+C_1 & \text{khi } x\ge 0\\ \displaystyle\int(4x+2)\mathrm{d}x=2x^2+2x+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}.$

Do $F(-2)=5\Leftrightarrow C_2=1$.

Do $F(x)$ liên tục tại $x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=F(0)$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}+0+C_1=C_2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}+C_1=1\Leftrightarrow C_1=\dfrac{1}{2}.$

Do đó $F(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}}{2}+x+\dfrac{1}{2} & khi\ \ x\ge 0\\ 2x^2+2x+1 & khi\ \ x<0\end{cases}.$

Suy ra $F(1)+3F(-1)=\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{9}{2}$. Khi đó $a=\dfrac{1}{2}$; $b=\dfrac{9}{2}$.

Vậy $a+b=5$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}$, $f'(1)=0$, $f(1)=1$ và $f(-1)=2$. Tính giá trị $f(2)$.

Lời giải

Trả lời: 0,5

Ta có $f'(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}\Rightarrow f(x)=\dfrac{ax^2}{2}-\dfrac{b}{x}+c$. Khi đó

$f'(1)=0\Rightarrow a+b=0;$

$f(1)=1\Rightarrow\dfrac{a}{2}-b+c=1;$

$f(-1)=2\Rightarrow\dfrac{a}{2}+b+c=2.$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{a}{2}+b+c=2 \\ a+b=0 \\ \dfrac{a}{2}-b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{7}{4}. \end{cases}$

Do đó $f(x)=-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{7}{4}$. Vậy $f(2)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 8: Bạn An ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t)=3t^2+5\,(m/s)$. Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

Lời giải

Trả lời: 966

Quãng đường máy bay đi được sau khoảng thời gian t giây là

$S(t)=\int(3t^2+5)\,\mathrm{d}x=t^3+5t+C \Rightarrow S=S(10)-S(4)=966.$

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc $36km/h$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a(t)=1+\dfrac{t}{3}(m/s^2)$. Tính vận tốc của ô tô sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Trả lời: 22

Đổi $36\,km/h=10\,m/s$.

Khi ô tô chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t)=1+\dfrac{t}{3}(m/s^2)$

$\Rightarrow$ Vận tốc của ô tô khi đó là $v=\int a(t)\,\mathrm{d}x=\int\left(1+\dfrac{t}{3}\right)\mathrm{d}x=t+\dfrac{t^2}{6}+C\,(m/s)$

Khi ô tô bắt đầu tăng tốc thì $v(0)=10 \Leftrightarrow 0+\dfrac{0^2}{6}+C=10 \Leftrightarrow C=10$.

$\Rightarrow v=t+\dfrac{t^2}{6}+10\,(m/s) \Rightarrow v(6)=6+\dfrac{6^2}{6}+10=22\,(m/s)$

Câu 10: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x(3x+2)^2$, biết $F(0)=1$. Tính $F(1)=1$

Lời giải

Trả lời: 9,25

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int x(3x+2)^2\,dx=\int(9x^3+12x^2+4x)\,dx=\dfrac{9}{4}x^4+4x^3+2x^2+C$.

Có $F(0)=C=1 \Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\dfrac{9}{4}x^4+4x^3+2x^2+1$. **Nên** $F(1)=9,25$

Câu 11: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(x+1)(3x-1)^2$, biết $F(1)=0$. Tính $F(0)$

Lời giải

Trả lời: -1,75

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(x+1)(3x-1)^2\,dx=\int(9x^3+3x^2-5x+1)\,dx=\dfrac{9}{4}x^4+x^3-\dfrac{5}{2}x^2+x+C$.

Có $F(1)=\frac{7}{4}+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{7}{4}$.

Vậy $F(x)=\frac{9}{4}x^4+x^3-\frac{5}{2}x^2+x-\frac{7}{4}$ nên $F(0)=-1,75$.

Câu 12: Có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3-2x)(x-2)^2$, biết $F(1)=0$. Tính $F(3)$ làm tròn đến phần trăm

Lời giải

Trả lời: -3,33

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(3-4x)(x-2)^2\,dx=\int\left(-4x^3+19x^2-28x+12\right)dx$$

$$=-x^4+\frac{19}{3}x^3-14x^2+12x+C$$

Có $F(1)=\frac{10}{3}+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{10}{3}$.

Vậy $F(3)=-3^4+\frac{19}{3}.3^3-14.3^2+12.3-\frac{10}{3}=-\frac{10}{3}=-3,33$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Lời giải

Trả lời: -1

Ta có $f'(x)=x^3f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3 \Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int x^3dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=\frac{x^4}{4}+C$.

Mà $f(2)=-\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4}=\frac{16}{4}+C \Rightarrow C=\frac{3}{4}$. Suy ra $f(x)=-\frac{4}{x^4+3}$.

Vậy $f(1)=-1$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Lời giải

Trả lời: -0,1

Ta có $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}=-x^4+C$

Do $f(2)=-\frac{1}{25}$, nên ta có $C=-9$. Do đó $f(x)=-\frac{1}{x^4+9} \Rightarrow f(1)=-\frac{1}{10}=-0,1$.

Câu 15: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{3x-1}$ và thỏa mãn $F(0)+F(3)=5$. Giá trị của biểu thức $T=F(-1)+F(11)$ bằng bao nhiêu?.

Lời giải

Trả lời: 5,92

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{1}{3x-1}dx=\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln(3x-1)+C_1 & khi\, x>\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\ln(1-3x)+C_2 & khi\, x<\frac{1}{3}\end{cases}.$$

Giả thiết $F(0)+F(3)=5$ nên $C_2+\frac{1}{3}\ln 8+C_1=5 \Rightarrow C_1+C_2=5-\ln 2$.

$$T=F(-1)+F(11)=\frac{1}{3}\ln 4+C_2+\frac{1}{3}\ln 32+C_1=\frac{7}{3}\ln 2+C_1+C_2$$

$$=\frac{7}{3}\ln 2+5-\ln 2=5+\frac{4}{3}\ln 2$$

$\approx 5{,}92$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ và thỏa mãn điều kiện $f(0)=-\frac{1}{2}$; $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$. Tính tổng $S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2024)+f(2025)$.

Lời giải

Trả lời: -0,5

$$f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+3)dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C \quad (*).$$

Cho $x=0$, từ $(*)$ ta có $C=2$.

Kho đó $-\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+2 \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+2}=-\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$

$$S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2024)+f(2025)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2025}-\frac{1}{2026}+\frac{1}{2026}-\frac{1}{2027}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2027}\right)=-\frac{2025}{2.2027}\approx -0{,}5.$$

Câu 17: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Lời giải

Trả lời: 19,3

$$f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}=\frac{34}{(t+2)^2}$$

$$\Rightarrow f(t)=-\frac{34}{t+2}+C$$

Chọn mốc thời gian là năm 1990. Dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người nên ta có $f(0)=3$

$-\frac{34}{2}+C=3\Leftrightarrow C=20$

Do đó $f(t)=-\frac{34}{t+2}+20$

Từ năm 1990 đến năm 2035 là 45 năm nên dân số của thị trấn năm 2035 là

$f(45)=-\frac{34}{47}+20=\frac{906}{47}\approx 19{,}3$.

Câu 18: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x^3}$ trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=-\frac{3}{5}$. Tính $F(4)$.

Lời giải

Trả lời: 11,8

Trên $(0;+\infty)$, ta có: $F(x)=\int\sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$.

Theo đề bài: $F(1)=-\frac{3}{5}\Leftrightarrow\frac{2}{5}.1^{\frac{5}{2}}+C=-\frac{3}{5}\Leftrightarrow C=-1$.

Vậy $F(4)=\frac{2}{5}.4^{\frac{5}{2}}-1=\frac{59}{5}=11{,}8$.

Câu 19: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục và thỏa mãn: $f(1)=1$ và $f'(x)\sqrt[3]{x^{-1}}=1$,với mọi $x>0$. Tính $4f(8)$?

Lời giải

Trả lời: 49

Ta có $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^{-1}}}=\frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}}=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$

$f(1)=1\Rightarrow\frac{3}{4}+C=1\Rightarrow C=\frac{1}{4}\Rightarrow f(x)=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 4f(8)=49$

Câu 20: Gọi $h(t)$ (m) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$ (m/s) và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây.

Lời giải

Trả lời: 1,64

Ta có:

$h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$

$\Rightarrow h(t)=\int\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}dx=\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{5}\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}+C$

$\Rightarrow h(t)=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}+C$

Chọn $t=0\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow h(t)=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}$

Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây: $h(6)=\frac{3}{20}.6\sqrt[3]{6}\approx 1,64m$

Câu 21: Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5m, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$. Sau bao nhiêu năm cây cao được 3m.

Lời giải

Trả lời: 2,73

Ta có

$h'(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$

$\Rightarrow h(t)=\int\frac{1}{\sqrt[4]{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{4}}dt=\frac{t^{-\frac{1}{4}+1}}{\frac{3}{4}}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+C$

$\Rightarrow h(t)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+C$

Năm đầu tiên cây cao \$1,5m\$ nên $h(1)=1,5\Leftrightarrow 1,5=\frac{4}{3}\sqrt[4]{1}+C\Rightarrow C=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow h(t)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+\frac{1}{6}$

Cây cao được 3m nên $h(t)=3\Leftrightarrow\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+\frac{1}{6}=3\Leftrightarrow\sqrt[4]{t^3}=\frac{17}{8}\Rightarrow t\approx 2,73$

Câu 22: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày ($0\le t\le 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.

Lời giải

Trả lời: 3200

Ta có: $P(t)=\int P'(t)dt=\int k\sqrt{t}dt=\int kt^{\frac{1}{2}}dt=k.\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$.

Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases}P(0)=500\\P(1)=600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k.\frac{2}{3}.0\sqrt{0}+C=500\\k.\frac{2}{3}.1\sqrt{1}+C=600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=500\\\frac{2}{3}k=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=500\\k=150\end{cases}$

$\Rightarrow P(t)=100t\sqrt{t}+500$.

Do đó, số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày là: $P(9)=100.9\sqrt{9}+500=3200$.

Câu 23: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)$ thoả mãn $F(0)=2$. Khi đó giá trị làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2 của $F(1)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 3,09

Ta có: $\int e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)\mathrm{d}x=\int\left(e^{x}-e^{-x}\right)\mathrm{d}x=e^{x}+e^{-x}+C$.

Mà $F(0)=2$ nên $C=0$.

Suy ra $F(1)=e+e^{-1}\approx 3,09$.

Câu 24: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và: $f'(x)=1+e^{2x}$, $\forall x, f(0)=2$. Tìm hàm $f(x)$. Tính $f(1)$

Lời giải

Trả lời: 3,35

Ta có: $f'(x)=1+e^{2x}$.

$\Rightarrow f(x)=\int\left(1+e^{2x}\right)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

Mà $f(0)=\frac{1}{2}+C\Leftrightarrow 2=\frac{1}{2}+C\Rightarrow C=\frac{3}{2}$.

$\Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{3}{2}\Rightarrow f(1)=1+\frac{1}{2}.e^{2}+\frac{3}{2}\approx 3,35$.

Câu 25: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^{x}$, thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2024)=2^{n}-m(m,n\in N)$. Khi đó $m+n$ bằng

Lời giải

Trả lời: 2025

Ta có: $\int 2^{x}\mathrm{d}x=\frac{2^{x}}{\ln 2}+C$.

Mà $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$ nên $C=0$.

Suy ra $T=\frac{2^{0}+2^{1}+...+2^{2024}}{\ln 2}=\frac{1.\frac{1-2^{2024}}{1-2}}{\ln 2}=2^{2024}-1$ hay $m+n=2024+1=2025$.

Câu 26: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t)=\frac{2}{t+1}\left(m/s^{2}\right)$. Tính vận tốc của vật tại giây thứ 20.

Lời giải

Trả lời: 11

Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int\frac{2}{t+1}\mathrm{d}t=2\ln|t+1|+C$.

Vì vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ nên $v(0)=5\Leftrightarrow 2\ln|0+1|+C=5\Leftrightarrow C=5$.

Nên $v(t)=2\ln|t+1|+5$. Vậy vận tốc của vật tại giây thứ 20 là

$v(20)=2\ln|20+1|+5\approx 11(m/s)$.

Câu 27: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$. Tính $F(0)$

.

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+C=3\Leftrightarrow 1+C=3\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(x)=-\cos x+\sin x+2$.

Suy ra $\Rightarrow F(0)=-\cos 0+\sin 0+2=-1+0+2=1$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2-5\sin x$ và $f(0)=10$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Trả lời: 8,14

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2-5\sin x)\mathrm{d}x=2x+5\cos x+C$.

Mà $f(0)=10$ nên $5+C=10\Rightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=2x+5\cos x+5$.

Do đó: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.\frac{\pi}{2}+5\cos\frac{\pi}{2}+5=\pi+5\approx 8{,}14159$.

Câu 29: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

Lời giải

Trả lời: 1,29

Ta có: $F(x)=\int\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{\sin 3x}{3}+C$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=\frac{\sin 3x}{3}+1\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{3}+1=\frac{\sqrt{3}+6}{6}\approx 1{,}2886751.$$

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ và $f'(x).\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1$. Tính $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Trả lời: -8

Ta có: $f'(x).\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 x}\Rightarrow f(x)=4\int\frac{1}{\sin^2 x}dx\Rightarrow f(x)=4\cot x+C$$

Do $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow C=-4\Rightarrow f(x)=4\cot x-4$

Ta có: $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=4\cot\frac{3\pi}{4}-4=-8$.

Câu 31: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(\text{m/s})$, trong đó t. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 37,5

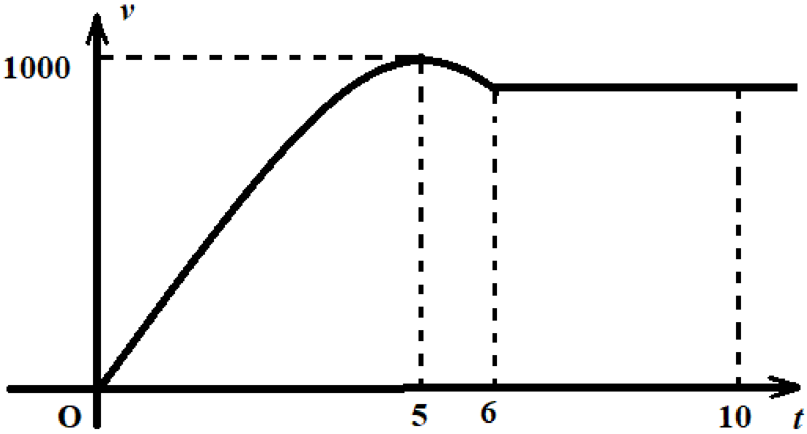
Ta có quãng đường xe đi được là $s(t) = \int v(t)dt = \int(-3t + 15)\text{dt} = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C$.

Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$.

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Rightarrow t = 5$.

Suy ra quãng đường đi được là $s(5) = 37,5(m)$.

Câu 32: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3840

Dựa vào đồ thị ta có phương trình vận tốc của ô tô là $v(t) = -40t^2 + 400t$ với $t \in [0;6]$ và $v = 960$ với $t > 6$. Trong khoảng 6 phút đầu phương trình quãng đường là

$S(t) = \int(-40t^2 + 400t)dt = -\frac{40}{3}t^3 + 200t^2 + C$.

Tại thời điểm xe ô tô xuất phát ta có $t_0 = 0$ và $S(t_0) = 0$ suy ra $C = 0$ nên phương trình quãng đường là $S(t) = -\frac{40}{3}t^3 + 200t^2$.

Trong khoảng 6 phút đầu ô tô đi được quãng đường là $S(6) = 4320m$ và 4 phút tiếp theo ô tô đi được quãng đường là $960\text{x}4 = 3840m$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là $4320 + 3840 = 8160$ m.

Câu 33: Cây cà chua khi trồng có chiều cao $5m$. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi công thức $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Chiều cao tối đa của cây cà chua là bao nhiêu cm.

Lời giải

Trả lời: 88,3

Ta có $h(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int\left(-0,1t^3+t^2\right)\mathrm{d}t=-\dfrac{t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}+C$.

Theo đề bài $h(0)=5$ nên $C=5$, $h(t)=-\dfrac{t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}+5$.

Do $v(t)\ge 0 \Leftrightarrow -0,1t^3+t^2\ge 0 \Leftrightarrow 0\le t\le 10$ nên thời gian sinh trưởng của cây là 10 tuần

Tacó $h'(t)=-\dfrac{1}{10}t^3+t^2\ge 0, \forall t\in[0;10]$ nên $h(t)$ là hàm đồng biến trên $[0;10]$, do đó chiều cao tối đa của cây cà chua là $h(10)=\dfrac{265}{3}\approx 88,3cm$.

Câu 34: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $V(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Biết rằng $V'(t)=at^2+bt$ và ban đầu bể không có nước, sau 5 giây thể tích nước trong bể là $15m^3$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $110m^3$. Tính thể tích nước bơm được sau 20 giây.

Lời giải

Trả lời: 840

Ta có $V'(t)=at^2+bt \Rightarrow V(t)=\int at^2+bt\,\mathrm{d}t=a\dfrac{t^3}{3}+b\dfrac{t^2}{2}+c.$

Theo bài ta có hệ $\begin{cases}V(0)=0\\ V(5)=15\\ V(10)=110\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\dfrac{0^3}{3}+b\dfrac{0^2}{2}+c=0\\ a\dfrac{5^3}{3}+b\dfrac{5^2}{2}+c=15\\ a\dfrac{10^3}{3}+b\dfrac{10^2}{2}+c=110\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{3}{10}\\ b=\dfrac{1}{5}\\ c=0\end{cases}$.

Suy ra, $V(20)=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{20^3}{3}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{20^2}{2}=840m^3$.

Câu 35: Cường độ dòng điện trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là: $I(t)=Q'(t)=3t^2-6t+5$, với $Q(t)$ là điện lượng truyền trong dây dẫn tại thời điểm t. Biết khi $t=1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1)=4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t=3$.

Lời giải

Trả lời: 16

Ta có: $Q(t)=\int Q'(t)\mathrm{d}t=\int\left(3t^2-6t+5\right)\mathrm{d}t=t^3-3t^2+5t+C$.

Do $Q(1)=4$ nên $1^3-3.1^2+5.1+C=4 \Rightarrow C=1$

Như vậy $Q(t)=t^3-3t^2+5t+1$.

Vậy $Q(3)=3^3-3.3^2+5.3+1=16$.

Câu 36: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao bao nhiêu centimét?.

Lời giải

Trả lời: 88,3

Ta có: $h(t)\int\left(-0,1t^3+t^2\right)\mathrm{d}t=\int -0,1t^3\ \ \mathrm{d}t+\int t^2\ \ \mathrm{d}t=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+C$.

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0)=5$, suy ra $C=5$.

Do đó $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+5$.

Ta chi cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+5$ với $t\in[0;10]$.

Ta có: $h'(t)=\frac{-t^3}{10}+t^2=\frac{t^2}{10}(-t+10)$, suy ra $h'(t)=0$ khi t bằng 0 hoặc 10.

Ta thấy $h(0)=5, h(10)=\frac{265}{3}$. Khi đó, $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ trên đoạn $[0;10]$.

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3}\approx 88,3(\text{ cm})$.

Câu 37: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15(\text{m/s})$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính vận tốc chất điểm đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

Lời giải

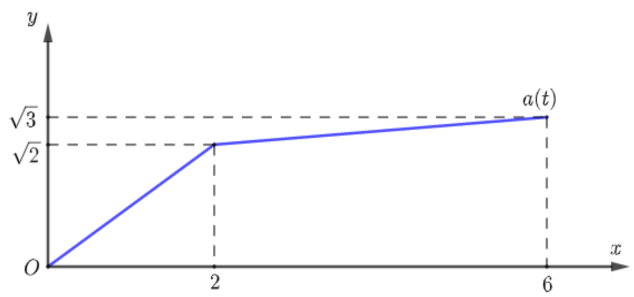
Trả lời: 41

Ta có $a(t)=t^2+4t\Rightarrow v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C(C\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết $v(0)=15\Rightarrow C=15\Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$.

Vậy $v(3)=\frac{3^3}{3}+2.3^2+15=41(\text{m/s})$.

Câu 38: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?.

Lời giải

Trả lời: 8,71

Từ đồ thị ta có $a(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}t & ,0\le t\le 2\\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

Mà $v(0)=1\,(m/s)$ nên $v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2+1 & ,0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t+C & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$\lim\limits_{t\to 2^-}v(t)=\lim\limits_{x\to 2^+}v(t)\Leftrightarrow \sqrt{2}+1=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}+C\Leftrightarrow C=\dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}$.

Do đó $v(6)=1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\approx 8,71\ (m/s)$.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN

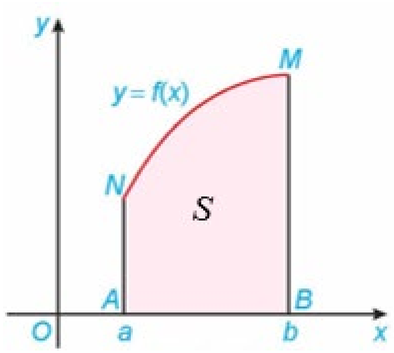
I LÝ THUYẾT.

1) KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

a) Diện tích hình thang cong:

Định lý 1:

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ là $S=F(b)-F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.



b) Định nghĩa tích phân: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ được gọi là tích phân của hàm số $f\left(x\right)$ từ a đến b và kí hiệu là $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ta gọi: a là cận dưới, b là cận trên, f là hàm số dưới dấu tích phân, $f\left(x\right)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân, x biến số lấy tích phân.

Chú ý:

a) Hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ còn được kí hiệu là $F\left(x\right)\Big|_a^b$. Khi đó:

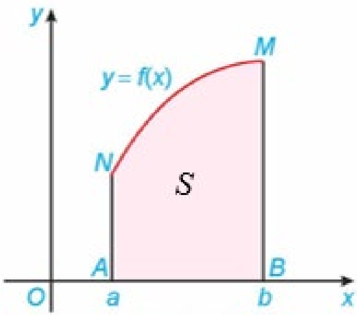
$$\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(x\right)\Big|_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right).$$

b) Nếu $a<b$ thì ta gọi $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$ là tích phân của f trên đoạn $\left[a;b\right]$.

c) Trong trường hợp $a=b$ hoặc $a>b$ ta quy ước: $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0;\quad \int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$

d) Tích phân ***không phụ thuộc và cách kí hiệu biến*** (điều này sẽ mang lại lợi ích cho ta để tính một số tích phân đặc biệt), tức là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \ldots = F(b) - F(a)$.

Ý nghĩa hình học của tích phân:



Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a;b]$. Khi đó ta có:

$1) \int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

$2) \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$3) \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

$4) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$ (*chèn cận* c)

Giá trị trung bình của hàm số liên tục *f(x)* trên đoạn [*a*; *b*] được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

Câu 1: Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^3 3x^2\mathrm{d}x$ **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x$ **c)** $\int_1^{e^2} \frac{1}{u}\mathrm{d}u$

Câu 2: Tính các tích phân sau:

$a) I = \int_0^1 3x^2\mathrm{d}x$ $b) I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ $c) I = \int_0^{\ln 2} 2^x\mathrm{d}x$ $d) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\mathrm{d}x$

Câu 3: Tính các tích phân sau:

$a)\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ $\quad b)\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ $\quad c)\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ $\quad d)\int_1^2 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ $\quad e)\int_1^2 \frac{1}{3x^2}dx$

Câu 4: Tính các tích phân sau:

$a)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad b)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$ $\quad c)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$ $\quad d)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x+1)\,dx$ $\quad e)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin x-3)\,dx$

Câu 5: Cho tích phân $I=\int_1^3 \frac{1}{2.3^{-x+3}}\mathrm{d}x=\frac{4}{a\ln 3}$. Tính giá trị của $a+20$.

Câu 6: Tính tích phân $\int_4^9 \frac{5}{3\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Câu 7: Cho tích phân $\int_4^9 f(x)\mathrm{d}x=7, \int_4^9 g(x)\mathrm{d}x=10$. Tính $\int_4^9 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

Câu 8: Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2e^x+\sin x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 9: Cho tích phân $\int_{-3}^5 f(x)dx=-2, \int_{-3}^5 g(x)dx=8$. Tính $\int_{-3}^5 [f(x)-g(x)]dx$.

Câu 10: Cho $\int_1^2 f(x)dx=3$ và $\int_2^3 f(x)dx=-\frac{1}{2}$. Tính $\int_1^3 f(x)dx$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x} & khi\ x\geq 1\\ x+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Tích phân $I=\int_0^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 12: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$. Tính $F(2ln2)-F(ln2)$.

Câu 13: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ thỏa điều kiện $F(1)=2$. Tính $F(e)$.

Câu 14: Chứng minh $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Từ đó tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

DẠNG 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

Câu 15: Tính các tích phân sau:

$I=\int_0^1 \left(4x^3-e^x\right)\mathrm{d}x$ $\quad b) I=\int_1^2 \left(3^x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ $\quad c) I=\int_0^{\pi} (\sin x+2\cos x)\mathrm{d}x$

Câu 16: Tính $I=\int_1^2 e^x \ln x\mathrm{d}x+\int_1^2 e^t(1-\ln t)\mathrm{d}t$.

DẠNG 3: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHÈN CẬN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

a) **Yêu cầu**: Tính tích phân $I=\int_a^b |f(x)|\,dx$

b) **Phương pháp**:

+ Bước 1: Xét dấu của $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

- Giải phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow x=x_i \in (a;b)$

- Lập bảng xét dấu của $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

+ Bước 2: Chèn cận x_i và đồng thời bỏ dấu $|\ |$ (căn cứ vào BXD) ta được các tích phân cơ bản

$$I=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{x_i} |f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_i}^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

Chú ý: Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì $I=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

Câu 17: Tính các tích phân:

$a)\, I=\int_0^2 |x-1|\mathrm{d}x$ $\quad b)\, I=\int_0^3 |x^2-x|\mathrm{d}x$ $\quad c)\int_{-4}^2 |x^2+2x-3|\mathrm{d}x$ $\quad d)\int_{-2}^2 \big|2x-|x+1|\big|\mathrm{d}x$

Câu 18: Tính các tích phân

1) $I=\int_{-3}^3 |x^2-1|\,dx$. $\quad$ **2)** $\int_0^4 |x^2-9|\,dx$ $\quad$ **3)** $\int_1^4 |x^2-2x-3|\,dx$ $\quad$ **4)** $\int_{-2}^0 |x^2-4x-5|\,dx$

Câu 19: Tính tích phân sau $\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx$

Câu 20: Tính tích phân sau $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |2\sin x-1|\,dx$

Câu 21: Tính tích phân sau $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |2\cos x-1|\,dx$

Câu 22: Tính $I=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 23: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{2}}\mathrm{d}x$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{khi } x\ge 0 \\ -x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $I=\int_{-1}^1 f(x)$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} (2x-1)^3 & \text{khi } x\ge 1 \\ 2^x-1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Tính $I=\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}-2\left(x+1\right) & \text{khi } x\le 0\\ k\left(1-x^2\right) & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$. Xác định k để $\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

Câu 27: Cho $\int\limits_{1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3,\int\limits_{2}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_{1}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

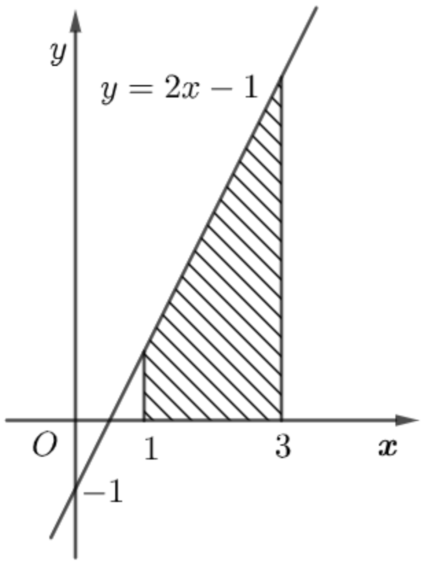
Câu 28: Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$. Biết $\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=12,\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ và $F\left(2\right)=7$.

Tính $F\left(0\right)$.

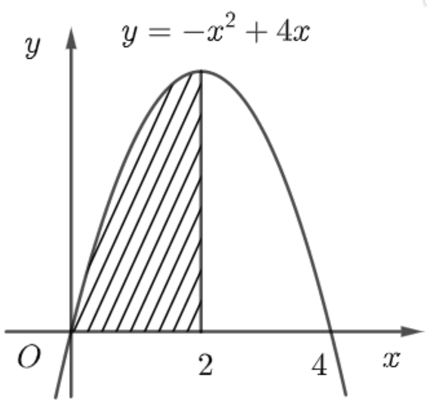
Câu 29: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;10\right]$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{10} f\left(x\right)\mathrm{d}x=7$; $\int\limits_{2}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Tính giá trị của biểu thức $P=\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{6}^{10} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

DẠNG 4: DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

Câu 30: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=2x-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=3$ (Hình vẽ bên).



Câu 31: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=-x^2+4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$ (Hình vẽ bên).



Câu 32: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 3; x = 5$.

Câu 33: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2; x = 5$

Câu 34: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = (x+2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Câu 35: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

Câu 36: Một chiếc xe đang chuyển động thẳng đều với vận tốc 30 m/s thì người lái đạp phanh khiến vận tốc của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t) = 30 - 5t \quad (0 \le t \le 6)$. Tính quãng đường di chuyển của xe trong khoảng thời gian tính từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

Câu 37: Biết rằng nhiệt độ tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở thành phố A vào một ngày mùa hạ được xác định bởi hàm số $N(t) = 20 + 1,7(t-5), 5 \le t \le 12$. Tính nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN

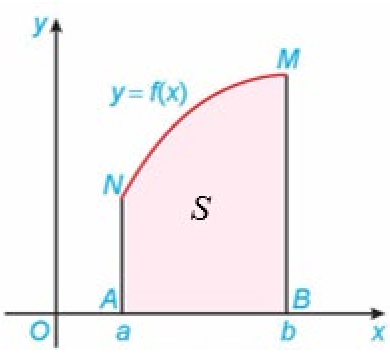
I LÝ THUYẾT.

1) KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

a) Diện tích hình thang cong:

Định lý 1:

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ là $S=F(b)-F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.



b) Định nghĩa tích phân: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ được gọi là tích phân của hàm số $f\left(x\right)$ từ a đến b và kí hiệu là $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ta gọi: a là cận dưới, b là cận trên, f là hàm số dưới dấu tích phân, $f\left(x\right)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân, x biến số lấy tích phân.

Chú ý:

a) Hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ còn được kí hiệu là $F\left(x\right)\Big|_a^b$. Khi đó:

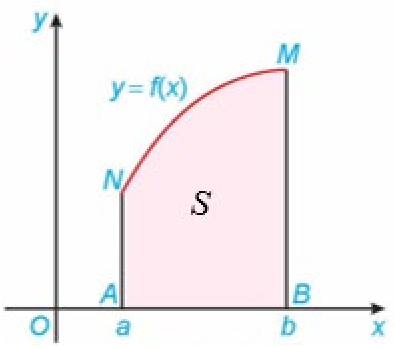
$$\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(x\right)\Big|_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right).$$

b) Nếu $a<b$ thì ta gọi $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$ là tích phân của f trên đoạn $\left[a;b\right]$.

c) Trong trường hợp $a=b$ hoặc $a>b$ ta quy ước: $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0;\quad \int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$

d) Tích phân ***không phụ thuộc và cách kí hiệu biến*** (điều này sẽ mang lại lợi ích cho ta để tính một số tích phân đặc biệt), tức là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = ... = F(b) - F(a)$.

Ý nghĩa hình học của tích phân:



Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a;b]$. Khi đó ta có:

1) $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b))$ (*chèn cận* c)

Giá trị trung bình của hàm số liên tục *f(x)* trên đoạn [*a*; *b*] được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

Câu 1: Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^3 3x^2\mathrm{d}x$ **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x$ **c)** $\int_1^{e^2} \frac{1}{u}\mathrm{d}u$

Lời giải

a) $\int_0^3 3x^2\mathrm{d}x = x^3\Big|_0^3 = 3^3 - 0^3 = 27$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}$

c) $\int_1^{e^2} \frac{1}{u} du = \ln|u|\Big|_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2$

Câu 2: Tính các tích phân sau:

$a) I = \int_0^1 3x^2 dx$ $\quad b) I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ $\quad c) I = \int_0^{\ln 2} 2^x dx$ $\quad d) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$

Lời giải

$a) I = \int_0^1 3x^2 dx = x^3\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1.$

$b) I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2(2-1) = 2.$

$c) I = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}\left(2^1 - 2^0\right) = \frac{1}{\ln 2}.$

$d) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 3: Tính các tích phân sau:

$a)\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ $\quad b)\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ $\quad c)\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ $\quad d)\int_1^2 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ $\quad e)\int_1^2 \frac{1}{3x^2} dx$

Lời giải

$a)\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}\Big|_1^2 = \sqrt{2} - 1$

$b)\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2$

$c)\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2 = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$

$d)\int_1^2 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int_1^2 x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_1^2 = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}(2^{\frac{2}{3}} - 1)$

$e)\int_1^2 \frac{1}{3x^2} dx = \frac{1}{3}\int_1^2 x^{-2} dx = \frac{1}{3}.\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2 = -\frac{1}{3x}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}$

Câu 4: Tính các tích phân sau:

$a)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$ $\quad b)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx$ $\quad c)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx$ $\quad d)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x + 1) dx$ $\quad e)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin x - 3) dx$

Lời giải

$a)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(\frac{\sqrt{3}}{3}-1) = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$b)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

$c)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$d)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x+1)dx = 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 1dx = 2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{\pi}{12}$

$e)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin x-3)dx = 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3dx = -2\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - 3x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}-1-\frac{\pi}{4}$

Câu 5: Cho tích phân $I=\int\limits_1^3 \frac{1}{2.3^{-x+3}}\mathrm{d}x = \frac{4}{a\ln 3}$. Tính giá trị của $a+20$.

Lời giải

Ta có $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 \frac{1}{3^{-x}.3^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{54}\int\limits_1^3 3^x\mathrm{d}x = \frac{1}{54}.\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_1^3 = \frac{1}{54}.\frac{3^3-3^1}{\ln 3} = \frac{4}{9\ln 3}$

Do đó $a=9$. Suy ra $a+20=29$.

Câu 6: Tính tích phân $\int\limits_4^9 \frac{5}{3\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_4^9 \frac{5}{3\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\int\limits_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\sqrt{x}\Big|_4^9 = \frac{10}{3}(3-2) = \frac{10}{3}$.

Câu 7: Cho tích phân $\int\limits_4^9 f(x)\mathrm{d}x = 7, \int\limits_4^9 g(x)\mathrm{d}x = 10$. Tính $\int\limits_4^9 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_4^9 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_4^9 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_4^9 g(x)\mathrm{d}x = 7+10 = 17$.

Câu 8: Tính tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2e^x+\sin x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2e^x+\sin x\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2e^x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=2e^x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2e^{\frac{\pi}{2}}-2e^{\frac{\pi}{4}}-\left(0-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$=2e^{\frac{\pi}{2}}-2e^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 9: Cho tích phân $\int_{-3}^{5}f(x)dx=-2,\int_{-3}^{5}g(x)dx=8$. Tính $\int_{-3}^{5}\left[f(x)-g(x)\right]dx$.

Lời giải

Ta có: $\int_{-3}^{5}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-3}^{5}g(x)\mathrm{d}x=-2-8=-10$.

Câu 10: Cho $\int_{1}^{2}f(x)dx=3$ và $\int_{2}^{3}f(x)dx=-\frac{1}{2}$. Tính $\int_{1}^{3}f(x)dx$.

Lời giải

Ta có $\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx=3+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & khi\ x\ge 1\\ x+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Tích phân $I=\int_{0}^{2}x^2f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $I=\int_{0}^{2}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x^2(x+1)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}x^2.\frac{2}{x}\mathrm{d}x=\frac{43}{12}$.

Câu 12: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$. Tính $F(2ln2)-F(ln2)$.

Lời giải

Vì hàm số $f(x)=e^x$ liên tục trên đoạn $[\ln 2;2\ln 2]$ nên ta có:

$$F(\ln 4)-F(\ln 2)=\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{\ln 4}e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_{\ln 2}^{\ln 4}=2.$$

Câu 13: Gọi $F(x)$là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ thỏa điều kiện $F(1)=2$. Tính $F(e)$.

Lời giải

Vì hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ liên tục trên đoạn $[1;e]$ nên ta có:

$$F(e)-F(1)=\int_{1}^{e}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_{1}^{e}=1.$$

Suy ra: $F(e)=1+F(1)=1+2=3$.

Câu 14: Chứng minh $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Từ đó tính tích phân $I=\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có:

$$F'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=f(x).$$

Do đó:

$$I=\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

DẠNG 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

Câu 15: Tính các tích phân sau:

$I=\int\limits_0^1\left(4x^3-e^x\right)\mathrm{d}x$ $\qquad$ $b)\, I=\int\limits_1^2\left(3^x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ $\qquad$ $c)\, I=\int\limits_0^\pi(\sin x+2\cos x)\mathrm{d}x$

Lời giải

$$a)\, I=\int\limits_0^1\left(4x^3-e^x\right)dx=x^4\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=1-(e-1)=2-e.$$

$$b)\, I=\int\limits_1^2\left(3^x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}\Bigg|_1^2-\ln|x|\Big|_1^2=\frac{1}{\ln 3}(9-3)-\ln 2=\frac{6}{\ln 3}-\ln 2.$$

$$c)\, I=\int\limits_0^\pi(\sin x+2\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^\pi+2\sin x\Big|_0^\pi=2.$$

Câu 16: Tính $I=\int\limits_1^2 e^x\ln x\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 e^t(1-\ln t)\mathrm{d}t$.

Lời giải

$$I=\int\limits_1^2 \mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 e^x(1-\ln x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 e^x\mathrm{d}x=e^2-e.$$

DẠNG 3: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHÈN CẬN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

a) **Yêu cầu**: Tính tích phân $I=\int\limits_a^b|f(x)|dx$

b) **Phương pháp**:

+ Bước 1: Xét dấu của $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

- Giải phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow x=x_i\in(a;b)$

- Lập bảng xét dấu của $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

+ Bước 2: Chèn cận x_i và đồng thời bỏ dấu $|\;|$ (căn cứ vào BXD) ta được các tích phân cơ bản

$$I=\int\limits_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_a^{x_i}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_i}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

Chú ý: Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì $I=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

Câu 17: Tính các tích phân:

$a) I=\int\limits_0^2 |x-1|\mathrm{d}x$ $\quad b) I=\int\limits_0^3 |x^2-x|\mathrm{d}x$ $\quad c) \int\limits_{-4}^2 |x^2+2x-3|\mathrm{d}x$ $\quad d) \int\limits_{-2}^2 |2x-|x+1||\mathrm{d}x$

Lời giải

$a) I=\int\limits_0^2 |x-1|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 |x-1|\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 |x-1|\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 (x-1)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 (x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$

b) Xét trên khoảng $(0;3)$ ta có: $x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (l) \\ x=1 \end{array}\right.$.

BXD:

x	0		1		3
x^2-x		$-$	0	$+$	

Suy ra:

$I=-\int\limits_0^1 (x^2-x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 (x^2-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}+\frac{14}{3}=\frac{29}{6}.$

c) Xét trên khoảng $(-2;2)$ ta có: $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

BXD:

x	-4		-3		1		2
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra:

$I=\int\limits_{-4}^{-3} (x^2+2x-3)\mathrm{d}x-\int\limits_{-3}^1 (x^2+2x-3)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 (x^2+2x-3)\mathrm{d}x=\frac{7}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{46}{3}.$

d) Xét trên khoảng $(-2;2)$ ta có: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

BXD:

x	-2		-1		2
$x+1$		$-$	0	$+$	

Suy ra:

$I=\int\limits_{-2}^1 |2x+x+1|\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 |2x-x-1|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^1 |3x+1|\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 |x-1|\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Ta có:

$I_1=\int\limits_{-2}^1 |3x+1|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-2}^{-\frac{1}{3}} (3x+1)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{1}{3}}^1 (3x+1)\mathrm{d}x=\frac{41}{6}.$

$I_2=\int\limits_1^2 |x-1|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 (x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$

Vậy: $I=\frac{41}{6}+\frac{1}{2}=\frac{22}{3}.$

Câu 18: Tính các tích phân

1) $I=\int_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|dx$. **2)** $\int_{0}^{4}\left|x^2-9\right|dx$ **3)** $\int_{1}^{4}\left|x^2-2x-3\right|dx$ **4)** $\int_{-2}^{0}\left|x^2-4x-5\right|dx$

Lời giải

1) $I=\int_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|dx$.

Ta có: $f(x)=x^2-1=0\to x=-1;x=1\Rightarrow f(x)\ge 0\forall x\in[-3;-1]\cup[1;3];f(x)\le 0,\forall x\in[-1;1]$.

$$\Rightarrow I=\int_{-3}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Bigg|_{-3}^{-1}+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Bigg|_{1}^{3}$$

$$=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{40}{3}.$$

2) $\int_{0}^{4}\left|x^2-9\right|dx$

Ta có: $\int_{0}^{4}\left|x^2-9\right|dx=\int_{0}^{3}\left|x^2-9\right|dx+\int_{3}^{4}\left|x^2-9\right|dx$

$$=\int_{0}^{3}\left(-x^2+9\right)dx+\int_{3}^{4}\left(x^2-9\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+9x\right)\Bigg|_{0}^{3}+\left(\frac{x^3}{3}-9x\right)\Bigg|_{3}^{4}=\frac{64}{3}$$

3) $\int_{1}^{4}\left|x^2-2x-3\right|dx$

Ta có: $\int_{1}^{4}\left|x^2-2x-3\right|dx=\int_{1}^{3}\left|x^2-2x-3\right|dx+\int_{3}^{4}\left|x^2-2x-3\right|dx$

$$=\int_{1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)dx+\int_{3}^{4}\left(x^2-2x-3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\Bigg|_{1}^{3}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_{3}^{4}=\frac{23}{3}$$

4) $\int_{-2}^{0}\left|x^2-4x-5\right|dx$

Ta có: $\int_{-2}^{0}\left|x^2-4x-5\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left|x^2-4x-5\right|dx+\int_{-1}^{0}\left|x^2-4x-5\right|dx$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-4x-5\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(-x^2+4x+5\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+5x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=2$$

Câu 19: Tính tích phân sau $\int_{0}^{\pi}\left|\cos x\right|dx$

Lời giải

Ta có: $\int_{0}^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\cos x\right|dx$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\cos x\right)dx=\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\left(-\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$$

Câu 20: Tính tích phân sau $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |2\sin x - 1|\, dx$

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |2\sin x - 1|\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} |2\sin x - 1|\, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |2\sin x - 1|\, dx$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (-2\sin x + 1)\, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 1)\, dx = (2\cos x + x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + (-2\cos x - x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$

Câu 21: Tính tích phân sau $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |2\cos x - 1|\, dx$

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |2\cos x - 1|\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} |2\cos x - 1|\, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |2\cos x - 1|\, dx$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)\, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (-2\cos x + 1)\, dx = (2\sin x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + (-2\sin x + x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$

Câu 22: Tính $I = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

$I = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} |\cos x|\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\mathrm{d}x = 1 + 1 = 2.$

Câu 23: Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{2}}\mathrm{d}x.$

Lời giải

Ta có:

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|\mathrm{d}x.$

Xét trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

BXD:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$		$-$	0	$+$	

Suy ra:

$$I=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2-\sqrt{2}.$$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\ge 0\\ -x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Tính $I=\int_{-1}^{1}f(x)$.

Lời giải

Ta có:

$$I=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^{0}-xdx+\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}(2x-1)^3 & \text{khi } x\ge 1\\ 2^x-1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Tính $I=\int_{-2}^{3}f(x)dx$.

Lời giải

Ta có:

$$I=\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\int_{-2}^{1}\left(2^x-1\right)dx+\int_1^3(2x-1)^3dx=\frac{7}{2\ln 2}+78.$$

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}-2(x+1) & \text{khi } x\le 0\\ k\left(1-x^2\right) & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$. Xác định k để $\int_{-1}^{1}f(x)dx=1$.

Lời giải

Ta có:

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^{0}-2(x+1)dx+\int_0^1 k\left(1-x^2\right)dx$$

$$\Leftrightarrow 1=-1+k\frac{2}{3}\Leftrightarrow k=3.$$

Câu 27: Cho $\int_1^2 f(x)dx=3,\int_2^5 f(x)dx=4$. Tính $I=\int_1^5 f(x)dx$.

Lời giải

$$I=\int_1^5 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx=3+4=7.$$

Câu 28: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Biết $\int_0^3 f(x)dx=12,\int_1^3 f(x)dx=2$ và $F(2)=7$. Tính $F(0)$.

Lời giải

Ta có:

$$F(2)-F(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^2 f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=12-2=10.$$

Suy ra:

$$F(0)=F(2)-10=7-10=-3.$$

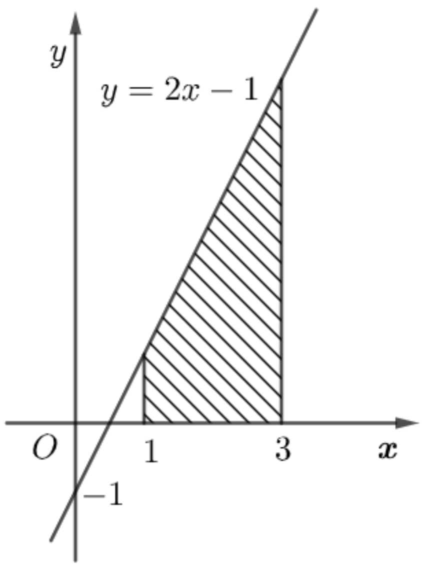
Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=7$; $\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính giá trị của biểu thức $P=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

$$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=7 \Leftrightarrow 7=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 7=P+3 \Leftrightarrow P=4.$$

DẠNG 4: DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

Câu 30: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=2x-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=3$ (Hình vẽ bên).

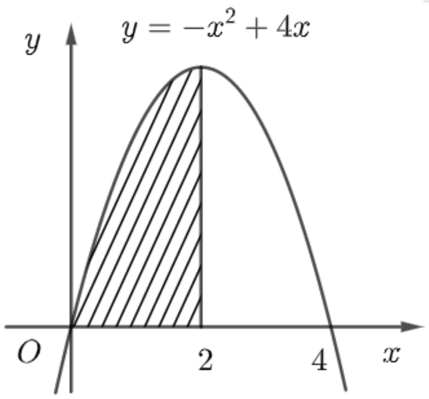


Lời giải

Hàm số $y=f(x)=2x-1$ liên tục, dương trên đoạn $[1;3]$ và có một nguyên hàm $F(x)=x^2-x$.

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S=F(3)-F(1)=\left(3^2-3\right)-\left(1^2-1\right)=6$.

Câu 31: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=-x^2+4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$ (Hình vẽ bên).



Lời giải

Hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x$ liên tục, không âm trên đoạn $[0;2]$ và có một nguyên hàm

$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$.

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(2) - F(0) = \left(-\frac{2^3}{3} + 2.2^2\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 2.0^2\right) = \frac{16}{3}$

.

Câu 32: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 3; x = 5$.

Lời giải

Hàm số $y = x^2 - 2x$ liên tục và dương trên đoạn $[3;5]$ và có một nguyên hàm là

$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S = F(5) - F(3) = \left(\frac{5^3}{3} - 5^2\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3^2\right) = \frac{50}{3}$

Câu 33: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2; x = 5$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ liên tục và dương trên đoạn $[2;5]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = -\frac{1}{x}$

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S = F(5) - F(2) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Câu 34: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = (x+2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 3$ liên tục và không âm trên đoạn $[1;2]$ và có một nguyên hàm $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$

Ta có diện tích hình thang cong cần tìm là

$S = F(2) - F(1) = (\frac{2^3}{3} + 2.2^2 + 3.2) - (\frac{1^3}{3} + 2.1^2 + 3.1) = \frac{34}{3}$

Câu 35: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = 3^x$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;2]$ và có một nguyên hàm $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$

Ta có diện tích hình thang cong cần tìm là

$S = F(2) - F(0) = (\frac{3^2}{\ln 3} - \frac{3^0}{\ln 3}) = \frac{8}{\ln 3}$

Câu 36: Một chiếc xe đang chuyển động thẳng đều với vận tốc 30 m/s thì người lái đạp phanh khiến vận tốc của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t) = 30 - 5t \quad (0 \le t \le 6)$. Tính quãng đường di chuyển của xe trong khoảng thời gian tính từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

Lời giải

Quãng đường di chuyển của xe là: $s = \int_0^6 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 (30 - 5t)\,\mathrm{d}t = \left(30t - \frac{5t^2}{2}\right)\Big|_0^6 = 90\,(\mathrm{m})$

Câu 37: Biết rằng nhiệt độ tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở thành phố A vào một ngày mùa hạ được xác định bởi hàm số $N(t) = 20 + 1,7(t - 5), 5 \le t \le 12$. Tính nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Nhiệt độ trung bình cần tìm là giá trị trung bình của hàm số $N(t)$ trên đoạn [5;12].

Vậy ta có nhiệt độ trung bình cần tìm là:

$$\frac{1}{12-5}\int_5^{12}\left[20 + 1,7(t-5)\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\int_5^{12}(11,5 + 1,7t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\left(11,5t + \frac{1,7t^2}{2}\right)\Big|_5^{12} \approx 26°$$

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $F(2)=6, F(4)=12$. Tích phân $\int\limits_2^4 f(x)dx$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 18. **D.** -6.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $F(1)=3, F(3)=6$. Tích phân $\int\limits_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 9. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 3: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1)=-2$ và $F(2)=4$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 2. **C.** -6. **D.** -2.

Câu 4: Cho f là một hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của hàm f trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1)=-1$ và $F(2)=3$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -4.

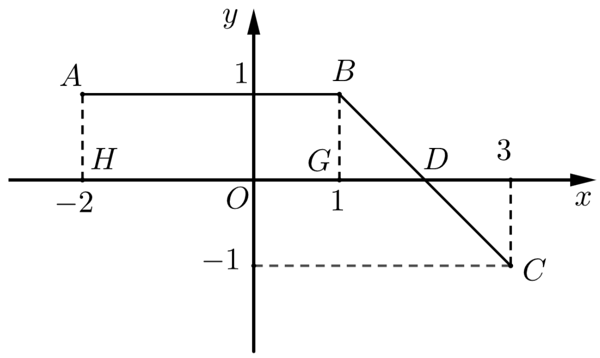
Câu 5: Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=5$ thì $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -3

Câu 6: Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=6$ thì $\int\limits_1^4 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 8.

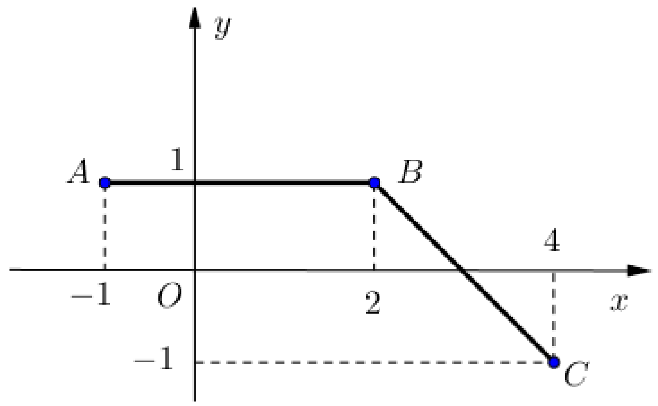
Câu 7: Đường gấp khúc ABC trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;3\right]$.



Tích phân $\int\limits_{-2}^{3} f\left(x\right)dx$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

Câu 8: Cho đường gấp khúc ABC trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;4\right]$. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{4} f\left(x\right)dx$ bằng



A. 4. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 9: Nếu $\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$ thì $\int\limits_{0}^{2}\left[\frac{1}{2}f\left(x\right)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 10: Nếu $\int\limits_{-1}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-3$ thì $\int\limits_{5}^{-1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 11: Nếu $\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$ thì $\int\limits_{0}^{3}\left[\frac{1}{3}f\left(x\right)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 12: Nếu $\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{2}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-5$ thì $\int\limits_{-1}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -7. **B.** -3. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 13: Tích phân $\int_1^2 x^3dx$ bằng

A. $\frac{15}{3}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 14: Nếu $\int_1^3 \left[2f(x)+1\right]dx=5$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 15: Nếu $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x=-2$ thì $\int_1^4 \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 16: Nếu $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=6$ và $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x=-5$ thì $\int_1^4 \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** -11. **C.** 1. **D.** 11.

Câu 17: Nếu $\int_0^2 f(x)dx=3$ thì $\int_0^2 \left[2f(x)-1\right]dx$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 18: Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=5$ thì $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -3.

Câu 19: Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6$ thì $\int_0^2 \left[2f(x)-1\right]dx$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 14.

Câu 20: Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ thì $\int_0^2 \left[4x-f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 21: Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ thì $\int_0^2 \left[2x-f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 0.

Câu 22: Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 \left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 23: Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2+f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** 7. **C.** 9. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 24: Biết $\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx=2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng :

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 25: Biết $\int_2^3 f(x)dx = 3$ và $\int_2^3 g(x)dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 26: Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]dx = 3$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 27: Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]\mathrm{d}x = 4$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 28: Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 3$. Khi đó $\int_1^2 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 6.

Câu 29: Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]\mathrm{d}x = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 30: Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi $\int_0^1 [f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -8 **B.** 1 **C.** -3 **D.** 12

Câu 31: $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln 35$ **B.** $\ln\frac{7}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$ **D.** $2\ln\frac{7}{5}$

Câu 32: $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$ **B.** $\frac{1}{3}\ln 2$ **C.** $\frac{2}{3}\ln 2$ **D.** $\ln 2$

Câu 33: Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{2}{15}$ **B.** $\frac{16}{225}$ **C.** $\log\frac{5}{3}$ **D.** $\ln\frac{5}{3}$

Câu 34: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính: $I = F(e) - F(1)$?

A. $I = \frac{1}{2}$ **B.** $I = \frac{1}{e}$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = e$

Câu 35: $\int_0^1 e^{3x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4+e)$ **B.** e^3-e **C.** $\frac{1}{3}(e^4-e)$ **D.** e^4-e

Câu 36: $\int_1^2 e^{3x-1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}\left(e^5+e^2\right)$ **B.** $\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$ **C.** $\frac{1}{3}e^5-e^2$ **D.** e^5-e^2

Câu 37: Cho $\int_0^6 f(x)dx=12$. Tính $I=\int_0^2 f(3x)dx.$

A. $I=5$ **B.** $I=36$ **C.** $I=4$ **D.** $I=6$

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx=7$, $\int_2^6 f(x)dx=3$. Tính $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P=10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=7$. **D.** $P=-6$.

Câu 39: Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả:

$\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]dx=10$, $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]dx=6$. Tính $\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]dx$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 40: Cho f,g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]dx=10$ đồng thời $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]dx=6$. Tính $\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]dx$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 41: Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]dx=10$ và $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]dx=6$. Tính $I=\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]dx$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 42: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=5$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+2\sin x\right]dx=5$.

A. $I=7$ **B.** $I=5+\frac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$

Câu 43: Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx=2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx=-1$. Tính $I=\int_{-1}^2 \left[x+2f(x)-3g(x)\right]dx$.

A. $I=\frac{17}{2}$ **B.** $I=\frac{5}{2}$ **C.** $I=\frac{7}{2}$ **D.** $I=\frac{11}{2}$

Câu 44: Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x)dx=8$ và $\int_5^{-2} g(x)dx=3$. Tính $I=\int_{-2}^5 \left[f(x)-4g(x)-1\right]dx$

A. 13. **B.** 27. **C.** -11. **D.** 3.

Câu 45: Cho $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -1$, khi đó $\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)+3g(x)\right]dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 46: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{2}\left(f\left(x\right)+3x^2\right)\mathrm{d}x = 10$. Tính $\int_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 18. **D.** -18.

Câu 47: Biết rằng hàm số $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}$, $\int_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = -2$ và $\int_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{13}{2}$. Tính $P = a+b+c$.

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 48: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành là

A. $S = 6$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = \frac{13}{6}$. **D.** $S = 13$.

Câu 49: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 6x + 5$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = -1$ là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 50: Gọi S là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = 3^x$ $y = 0$ và các đường $x = 0$; $x = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S = \frac{26}{\ln 3}$. **B.** $S = 3^3.\ln 3 - \ln 3$ **C.** $S = \pi\left(\frac{26}{\ln 3}\right)$. **D.** $S = \pi\frac{3^6 - 3^0}{\ln 6}$

Câu 51: Diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 3$ bằng

A. $S = 6.$ **B.** $S = \frac{26}{3}$. **C.** $S = 5.$ **D.** $S = \frac{28}{3}$.

Câu 52: Diện tích hình thang cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** e. **D.** e^{-1}.

Câu 53: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ là

A. $S = 10$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 6$.

Câu 54: Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) = -x^2 - 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2; x = 0$?

A. $S = \frac{10}{3}$. **B.** $S = 3$ **C.** $S = \frac{7}{3}$. **D.** $S = -3$

Câu 55: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=3x^2-6x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2;\ x=0$ bằng:

A. 4π. **B.** 20. **C.** 20π. **D.** 4.

Câu 56: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng:

A. 1. **B.** 2π. **C.** 2. **D.** π.

Câu 57: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1; x=k\,(k>1)$ là $\ln 3$. Tìm k?

A. $k=2$ **B.** $k=3$ **C.** $k=\dfrac{3}{2}$. **D.** $k=e$

Câu 58: Tích phân $\int\limits_0^2 (x^2+1)\,dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{14}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 59: Tính $I=\int\limits_0^1 e^{3x}dx$.

A. $I=e-1$. **B.** $I=\dfrac{e^3-1}{3}$. **C.** $I=e^3+\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=e^3-1$.

Câu 60: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$ thỏa mãn $F(0)=3$. Tính $F(1)$?

A. $e+1$. **B.** e^2+1. **C.** e^2+2. **D.** $e+2$.

Câu 61: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ thỏa mãn $F(1)=1$. Tính $F(0)$?

A. 1. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 62: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$ thỏa mãn $F(0)=3$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 63: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$ thỏa mãn $F(0)=0$. Tính $F(2)$?

A. 2^x. **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{\ln 2}$. **D.** $\dfrac{3}{\ln 2}$.

Câu 64: Cho Giá trị tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$ bằng

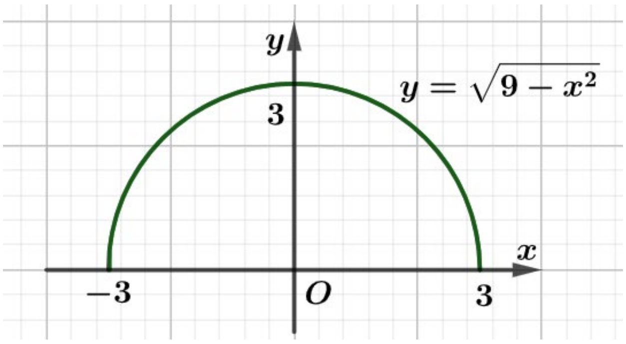
A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 65: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)=5$. Giá trị $F(0)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 66: Trong mặt phẳng Oxy, hàm số $y=\sqrt{9-x^2}$ có đồ thị như hình vẽ.

Khi đó giá trị $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$ là



A. $\frac{9\pi}{2}$. **B.** $\frac{9\pi}{4}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 67: Cho $\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=10$ và $\int\limits_2^4 g(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_2^4 \left[3f(x)-5g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. 5. **B.** 15. **C.** -5. **D.** 10.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 69: Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int\limits_{-1}^2 \left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 70: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}1-2x & \text{khi } x>0\\ \cos x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 71: Nếu $\int\limits_1^3 f(x)dx=4$ thì $\int\limits_1^3 \left[2f(x)-3\right]dx$ bằng

A. 5. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 72: Nếu $\int\limits_1^6 f(x)dx=5;\int\limits_5^6 f(x)dx=2$ thì $\int\limits_1^5 f(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 73: Cho các hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $\int\limits_1^3 \left[2f(x)+3x^2-1\right]\mathrm{d}x$.

A. 34. **B.** 44. **C.** 64. **D.** 24.

Câu 74: Tính $\int\limits_1^3 \frac{2x^3+3x^2-4}{x^2}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{35}{3}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** $\frac{37}{3}$.

Câu 75: Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-2$, $\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int_{-1}^{1}[f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** -2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 76: Cho số a thỏa mãn $0<a<2$. Tính $\int_{0}^{2}|x-a|\mathrm{d}x$.

A. a^2-2a+2. **B.** $2-2a$. **C.** a^2+2. **D.** a^2+1.

Câu 77: Nếu $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=4$ thì $\int_{0}^{2} 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 7. **D.** 12.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $F(2)=6, F(4)=12$. Tích phân $\int\limits_2^4 f(x)dx$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 18. **D.** -6.

Lời giải

$\int\limits_2^4 f(x)dx = F(4)-F(2)=12-6=6$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $F(1)=3, F(3)=6$. Tích phân $\int\limits_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 9. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

$\int\limits_1^3 f(x)dx = F(3)-F(1)=6-3=3$.

Câu 3: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1)=-2$ và $F(2)=4$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 2. **C.** -6. **D.** -2.

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^2 = F(2)-F(1)=6$.

Câu 4: Cho f là một hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của hàm f trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1)=-1$ và $F(2)=3$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -4.

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^2 = F(2)-F(1)=3-(-1)=4$.

Câu 5: Nếu $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 5$ thì $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -3

Lời giải

Ta có: $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 2+5=7$.

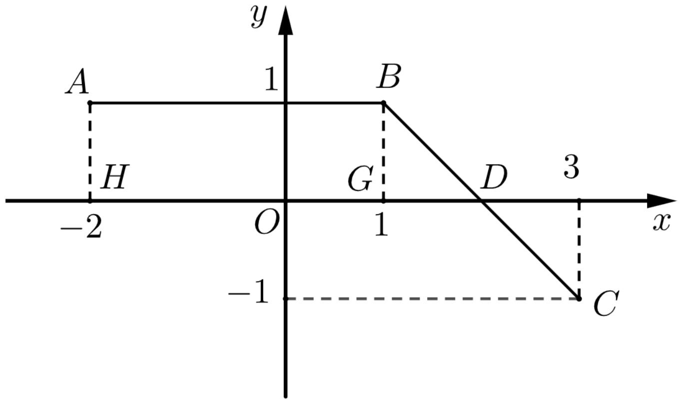
Câu 6: Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 6$ thì $\int_1^4 2f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $\int_1^4 2f(x)dx = 2\cdot\int_1^4 f(x)dx = 2\cdot 6 = 12$.

Câu 7: Đường gấp khúc ABC trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$.



Tích phân $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

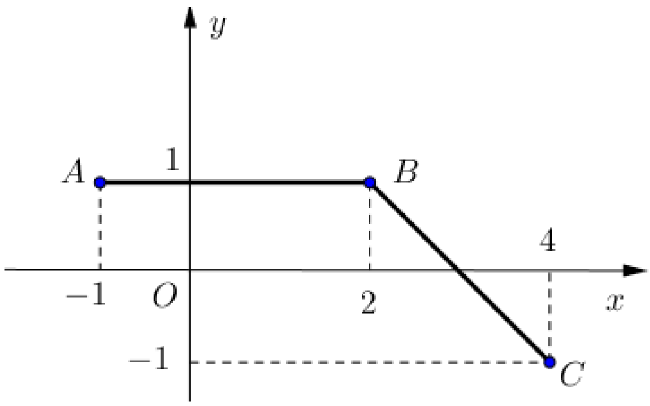
Lời giải

Ta có

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = S_{ABGH} + S_{BGD} - S_{CDE}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = 3.1 + \frac{1}{2}.1.1 - \frac{1}{2}.1.1 = 3.$$

Câu 8: Cho đường gấp khúc ABC trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$. Tích phân $I=\int_{-1}^{4} f(x)dx$ bằng



A. 4. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\begin{cases}1 & , x\in[-1;2]\\ -x+3 & , x\in[2;4]\end{cases}$.

Khi đó $I=\int_{-1}^{4}f(x)dx=\int_{-1}^{2}1\,dx+\int_{2}^{4}(-x+3)dx=3$.

Câu 9: Nếu $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ thì $\int_0^2\left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^2\left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.4+4=6.$

Câu 10: Nếu $\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=-3$ thì $\int_{5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_{5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=3$

Câu 11: Nếu $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$ thì $\int_0^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.6+2x\Big|_0^3=2+6=8$.

Câu 12: Nếu $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int_{2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=-5$ thì $\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -7. **B.** -3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 2 + (-5) = -3$.

Câu 13: Tích phân $\int\limits_{1}^{2} x^3 dx$ bằng

A. $\frac{15}{3}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 x^3 \mathrm{d}x = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4 - 1^4}{4} = \frac{15}{4}$.

Câu 14: Nếu $\int\limits_{1}^{3} \left[2f(x) + 1\right] dx = 5$ thì $\int\limits_{1}^{3} f(x) dx$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $5 = \int_1^3 [2f(x) + 1]\mathrm{d}x = 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + 2 \Rightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

Câu 15: Nếu $\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_{1}^{4} g(x)\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_{1}^{4} \left(f(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{1}^{4} \left(f(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{4} g(x)\mathrm{d}x = 3 - (-2) = 5$.

Câu 16: Nếu $\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 6$ và $\int\limits_{1}^{4} g(x)\mathrm{d}x = -5$ thì $\int\limits_{1}^{4} \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** -11. **C.** 1. **D.** 11.

Lời giải

$\int\limits_{1}^{4} \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{4} g(x)\mathrm{d}x = 6 - (-5) = 11$.

Câu 17: Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^2 \left[2f(x) - 1\right] dx$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

$\int_0^2 \left[2f(x) - 1\right] dx = 2\int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 dx = 2.3 - x\big|_0^2 = 6 - 2 = 4$

Câu 18: Nếu $\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2 + 5 = 7$.

Câu 19: Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 6$ thì $\int\limits_0^2 \left[2f(x)-1\right]dx$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 14.

Lời giải

$$\int\limits_0^2 \left[2f(x)-1\right]dx = 2\int\limits_0^2 f(x)dx - \int\limits_0^2 1dx = 12-2=10.$$

Câu 20: Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ thì $\int\limits_0^2 \left[4x - f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^2 \left[4x-f(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 4x\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 f(x)dx = 2x^2\Big|_0^2 - 2 = 6$.

Câu 21: Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ thì $\int\limits_0^2 \left[2x - f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^2 \left[2x-f(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 2x\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4-2=2$.

Câu 22: Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2 \left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\limits_1^2 \left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x = \left(2x+x^2\right)\Big|_1^2 = 8-3=5$

Câu 23: Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2 (2+f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** 7. **C.** 9. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_1^2 (2+f(x))\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 2\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2x\Big|_1^2 + F(x)\Big|_1^2 = 2x\Big|_1^2 + x^3\Big|_1^2 = 9$

Câu 24: Biết $\int\limits_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx = 2$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng :

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx=2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 2xdx=2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=2-x^2\Big|_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=2-1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=1$$

Câu 25: Biết $\int_2^3 f(x)dx=3$ và $\int_2^3 g(x)dx=1$. Khi đó $\int_2^3 \left[f(x)+g(x)\right]dx$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_2^3 \left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_2^3 g(x)dx=4$.

Câu 26: Biết $\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx=3$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx=3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+2\int_0^1 xdx=3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+2.\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=3$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3-x^2\Big|_0^1=3-(1-0)=2$.

Câu 27: Biết $\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x=4$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x=4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 2x\mathrm{d}x=4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4-1=3$$

Câu 28: Biết $\int_1^2 f(x)dx=2$ và $\int_1^2 g(x)dx=3$. Khi đó $\int_1^2 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^2 [f(x)+g(x)]dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx=2+3=5$.

Câu 29: Biết $\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx=5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx=5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 2xdx=5$$

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + x^2\Big|_0^1 = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + 1 = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Câu 30: Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -8 **B.** 1 **C.** -3 **D.** 12

Lời giải

Chọn A

Có $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 2 - 2.5 = -8$.

Câu 31: $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln 35$ **B.** $\ln\frac{7}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$ **D.** $2\ln\frac{7}{5}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Câu 32: $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$ **B.** $\frac{1}{3}\ln 2$ **C.** $\frac{2}{3}\ln 2$ **D.** $\ln 2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = \frac{2}{3}\ln 2$.

Câu 33: Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{2}{15}$ **B.** $\frac{16}{225}$ **C.** $\log\frac{5}{3}$ **D.** $\ln\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn D

$\int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^2 = \ln\frac{5}{3}$

Câu 34: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính: $I = F(e) - F(1)$?

A. $I = \frac{1}{2}$ **B.** $I = \frac{1}{e}$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = e$

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa tích phân: $I = F(e) - F(1) = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \ln x.d(\ln x) = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e = \frac{1}{2}$

.

Câu 35: $\int_0^1 e^{3x+1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4+e)$ **B.** e^3-e **C.** $\frac{1}{3}(e^4-e)$ **D.** e^4-e

Lời giải

Chọn C

$\int_0^1 e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x+1}d(3x+1) = \left.\frac{1}{3}e^{3x+1}\right|_0^1 = \frac{1}{3}(e^4-e)$.

Câu 36: $\int_1^2 e^{3x-1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^5+e^2)$ **B.** $\frac{1}{3}(e^5-e^2)$ **C.** $\frac{1}{3}e^5-e^2$ **D.** e^5-e^2

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2 e^{3x-1}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 e^{3x-1}d(3x-1) = \left.\frac{1}{3}e^{3x-1}\right|_1^2 = \frac{1}{3}(e^5-e^2)$.

Câu 37: Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx.$

A. $I=5$ **B.** $I=36$ **C.** $I=4$ **D.** $I=6$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3}\int_0^2 f(3x)d3x = \frac{1}{3}\int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{3}.12 = 4.$

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7$, $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P=10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=7$. **D.** $P=-6$.

Lời giải

Ta có $\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$

Suy ra $\int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_2^6 f(x)dx = 7-3 = 4$.

Câu 39: Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả:

$\int_1^3 [f(x)+3g(x)]dx = 10$, $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

$\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx + 3\int_1^3 g(x)dx = 10$ (1).

$\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]dx = 6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 6$ (2).

Đặt $X = \int_1^3 f(x)dx$, $Y = \int_1^3 g(x)dx$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} X+3Y=10 \\ 2X-Y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4 \\ Y=2 \end{cases}$.

Do đó ta được: $\int_1^3 f(x)dx = 4$ và $\int_1^3 g(x)dx = 2$.

Vậy $\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]dx = 4+2=6$.

Câu 40: Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\text{dx}=10$ đồng thời $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\text{dx}=6$. Tính $\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]\text{dx}$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\text{dx}=10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\text{dx}+3\int_1^3 g(x)\text{dx}=10$.

$\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\text{dx}=6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\text{dx}-\int_1^3 g(x)\text{dx}=6$.

Đặt $u = \int_1^3 f(x)\text{dx}$; $\text{v} = \int_1^3 g(x)\text{dx}$.

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)\text{dx}=4 \\ \int_1^3 g(x)\text{dx}=2 \end{cases}$

Vậy $\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]\text{dx}=6$.

Câu 41: Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]dx = 10$ và $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]dx = 6$. Tính $I = \int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]dx$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Đặt $a = \int_1^3 f(x)dx$ và $b = \int_1^3 g(x)dx$.

Khi đó, $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = a+3b$, $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 2a-b$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a+3b=10 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $I = a+b = 6$.

Câu 42: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+2\sin x]\mathrm{d}x = 5$.

A. $I=7$ **B.** $I = 5+\frac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$

Lời giải

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+2\sin x]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x - 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5-2(0-1) = 7.$$

Câu 43: Cho $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x+2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{17}{2}$ **B.** $I = \frac{5}{2}$ **C.** $I = \frac{7}{2}$ **D.** $I = \frac{11}{2}$

Lời giải

Ta có: $I = \int_{-1}^2 [x+2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^2 + 2\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}+2.2-3(-1) = \frac{17}{2}$.

Câu 44: Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_5^{-2} g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int_{-2}^5 [f(x)-4g(x)-1]\mathrm{d}x$

A. 13. **B.** 27. **C.** -11. **D.** 3.

Lời giải

$$I = \int_{-2}^5 [f(x)-4g(x)-1]\mathrm{d}x = \int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^5 4g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^5 \mathrm{d}x = \int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x - 4\int_{-2}^5 g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^5 \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x + 4\int_5^{-2} g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^5 \mathrm{d}x = 8+4.3 - x\Big|_{-2}^5 = 8+4.3-7 = 13.$$

Câu 45: Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$, khi đó $\int_{-1}^2 [x+2f(x)+3g(x)]dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^2 [x+2f(x)+3\mathrm{g}(x)]dx = \int_{-1}^2 xdx + 2\int_{-1}^2 f(x)dx + 3\int_{-1}^2 g(x)dx = \frac{3}{2}+4-3 = \frac{5}{2}$

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 (f(x)+3x^2)\mathrm{d}x = 10$. Tính $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 18. **D.** -18.

Lời giải

Ta có:

$$\int_0^2 \left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 3x^2\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=10-\int_0^2 3x^2\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=10-x^3\Big|_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=10-8=2.$$

Câu 47: Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{2}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$.

Lại có: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^1=-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}$ (1).

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^2=-2\Leftrightarrow\frac{8}{3}a+2b+2c=-2$ (2).

$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^3=\frac{13}{2}\Leftrightarrow 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-2\\ 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=-\frac{16}{3}\end{cases}$.

$\Rightarrow P=a+b+c=1+3+\left(-\frac{16}{3}\right)=-\frac{4}{3}$.

Câu 48: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành là

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=x^2+1$ liên tục và không âm trên đoạn $[-1;2]$ và có một nguyên hàm $F(x)=\frac{x^3}{3}+x$

Ta có diện tích hình thang cong cần tìm là $S=F(2)-F(-1)=\left(\frac{2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{-1}{3}-1\right)=6$

Câu 49: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi các đường $y=x^2-6x+5$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=-1$ là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$ liên tục và không âm trên đoạn $[-1;0]$ và có mộ nguyên hàm là

$F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x$

Diện tích hình thang cong cần tìm: $S = F(0) - F(-1) = \frac{25}{3}$.

Câu 50: Gọi S là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = 3^x$ $y = 0$ và các đường $x = 0$; $x = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S = \frac{26}{\ln 3}$. **B.** $S = 3^3.\ln 3 - \ln 3$ **C.** $S = \pi\left(\frac{26}{\ln 3}\right)$. **D.** $S = \pi\frac{3^6 - 3^0}{\ln 6}$

Lời giải

Ta có $f(x) = 3^x$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[0;3]$.

$F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$ trên $[0;3]$.

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S = F(3) - F(0) = \frac{3^3 - 3^0}{\ln 3} = \frac{26}{\ln 3}$.

Câu 51: Diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 3$ bằng

A. $S = 6$. **B.** $S = \frac{26}{3}$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = \frac{28}{3}$.

Lời giải

Ta có $f(x) = x^2$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[1;3]$.

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên $[1;3]$.

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S = F(3) - F(1) = \frac{3^3 - 1^3}{3} = \frac{26}{3}$.

Câu 52: Diện tích hình thang cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** e. **D.** e^{-1}.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục,dương trên đoạn $[1;e]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = \ln x$

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(e) - F(1) = \ln e - \ln 1 = 1$.

Câu 53: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ là

A. $S = 10$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 6$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = x$ liên tục, dương trên đoạn $[2;4]$ và có một nguyên hàm $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(4) - F(2) = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 6$.

Câu 54: Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2; x = 0$?

A. $S = \frac{10}{3}$. **B.** $S = 3$ **C.** $S = \frac{7}{3}$. **D.** $S = -3$

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$ liên tục và không âm trên $[-2;0]$ và có một nguyên hàm là

$F(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 + x$

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(0) - F(-2) = 0 - \left(\frac{-10}{3}\right) = \frac{10}{3}$.

Câu 55: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 3x^2 - 6x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 0$ bằng:

A. 4π. **B.** 20. **C.** 20π. **D.** 4.

Lời giải

Xét phương trình: $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (-2;0) \\ x = 2 \notin (-2;0) \end{array}\right.$

Ta có $y = f(x) = 3x^2 - 6x$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[-2;0]$.

$F(x) = x^3 - 3x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = 3x^2 - 6x$ trên $[-2;0]$.

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là:

$S = F(0) - F(-2) = (0^3 - 3.0^2) - \left[(-2)^3 - 3.(-2)^2\right] = 20$.

Câu 56: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x, Ox, x = 0, x = \pi$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng:

A. 1. **B.** 2π. **C.** 2. **D.** π.

Lời giải

Ta có $y = f(x) = \sin x$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[0;\pi]$.

$F(x) = -\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \sin x$ trên $[0;\pi]$.

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S = F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2$.

Câu 57: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = k\,(k > 1)$ là $\ln 3$. Tìm k?

A. $k = 2$ **B.** $k = 3$ **C.** $k = \frac{3}{2}$. **D.** $k = e$

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục và không âm trên $[1;k](k > 1)$ và có một nguyên hàm là

$F(x) = \ln|x|$

Do đó: $S = F(k) - F(1) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln|k| = \ln 3 \Leftrightarrow k = 3$

Câu 58: Tích phân $\int\limits_0^2 (x^2+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **<u>B.</u>** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $I = \int\limits_0^2 (x^2+1)\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_0^2 = \frac{14}{3}$.

Câu 59: Tính $I = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

A. $I = e-1$. **<u>B.</u>** $I = \frac{e^3-1}{3}$. **C.** $I = \mathrm{e}^3 + \frac{1}{2}$. **D.** $I = \mathrm{e}^3 - 1$.

Lời giải

Ta có $I = \int\limits_0^1 e^{3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{e^3-1}{3}$.

Câu 60: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$ thỏa mãn $F(0) = 3$. Tính $F(1)$?

A. $e+1$. **B.** e^2+1. **C.** e^2+2. **<u>D.</u>** $e+2$.

Lời giải

Ta có: $F(1) - F(0) = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e-1$

Suy ra $F(1) = e-1+3 = e+2$.

Câu 61: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ thỏa mãn $F(1) = 1$. Tính $F(0)$?

A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **<u>D.</u>** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có: $F(1) - F(0) = \int\limits_0^1 (x^2)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$

Suy ra $F(0) = F(1) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Câu 62: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ thỏa mãn $F(0) = 3$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **<u>D.</u>** 4.

Lời giải

Ta có:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = 1$$

$$\Leftrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3 = 1 \Leftrightarrow F(1) = 4$$

Câu 63: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$ thỏa mãn $F(0)=0$. Tính $F(2)$?

A. 2^x. **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{\ln 2}$. **D.** $\dfrac{3}{\ln 2}$.

Lời giải

$$F(2)-F(0)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 2^x dx=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2=\frac{3}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow F(2)-0=\frac{3}{\ln 2}\Leftrightarrow F(2)=\frac{3}{\ln 2}$$

Câu 64: Cho Giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 65: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)=5$. Giá trị $F(0)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 11.

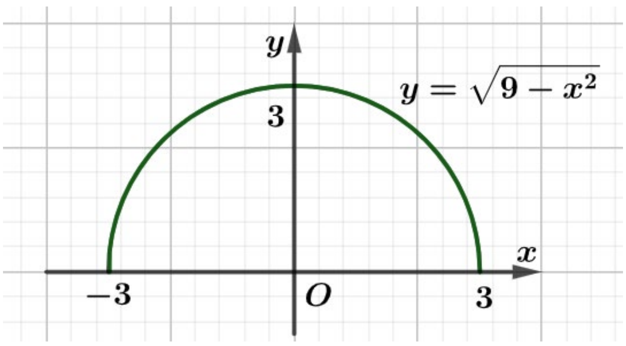
Lời giải

Ta có: $F(2)-F(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x^3\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^2=4-0=4$

Suy ra $F(0)=F(2)-4=5-4=1$.

Câu 66: Trong mặt phẳng Oxy, hàm số $y=\sqrt{9-x^2}$ có đồ thị như hình vẽ.

Khi đó giá trị $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ là



A. $\dfrac{9\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{9\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Tích phân cần tính là diện tích của một phần tư đường tròn tâm O bán kính bằng 3.

Suy ra $I=\int_0^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\pi.R^2=\dfrac{1}{4}.\pi.3^2=\dfrac{9\pi}{4}$.

Câu 67: Cho $\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_2^4 g(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int\limits_2^4 \left[3f(x) - 5g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. 5. **B.** 15. **C.** -5. **D.** 10.

Lời giải

Ta có: $I = \int\limits_2^4 \left[3f(x) - 5g(x)\right]\mathrm{d}x = 3\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x - 5\int\limits_2^4 g(x)\mathrm{d}x = 3.10 - 5.5 = 5$.

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 4 - x & \text{khi } 1 \le x \le 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(3x^2\right)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (4 - x)\mathrm{d}x = x^3\Big|_1^2 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{7}{2}.$$

Câu 69: Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^2 \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int\limits_{-1}^2 \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^2 xdx + 2\int\limits_{-1}^2 f(x)dx - 3\int\limits_{-1}^2 g(x)dx$

$= \dfrac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} + 2.2 - 3.(-1) = \dfrac{17}{2}$

Chọn C

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x > 0 \\ \cos x & \text{khi } x \le 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (1 - 2x)\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left(x - x^2\right)\Big|_0^1 = 1.$$

Chọn D

Câu 71: Nếu $\int\limits_1^3 f(x)dx = 4$ thì $\int\limits_1^3 \left[2f(x) - 3\right]dx$ bằng

A. 5. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^3 \left[2f(x) - 3\right]dx = 2\int\limits_1^3 f(x)dx - 3\int\limits_1^3 dx = 2.4 - 3x\Big|_1^3 = 2$.

Câu 72: Nếu $\int_1^6 f(x)dx = 5; \int_5^6 f(x)dx = 2$ thì $\int_1^5 f(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\int_1^6 f(x)dx = 5 \Leftrightarrow \int_1^5 f(x)dx + \int_5^6 f(x)dx = 5 \Leftrightarrow \int_1^5 f(x)dx = 5-2 = 3$.

Câu 73: Cho các hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $\int_1^3 \left[2f(x)+3x^2-1\right]\mathrm{d}x$.

A. 34. **B.** 44. **C.** 64. **D.** 24.

Lời giải

Ta có: $\int_1^3 \left[2f(x)+3x^2-1\right]\mathrm{d}x = 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + 3\int_1^3 x^2\mathrm{d}x - \int_1^3 dx = 2.5 + x^3\Big|_1^3 - x\Big|_1^3 = 10+26-2 = 34.$

Câu 74: Tính $\int_1^3 \frac{2x^3+3x^2-4}{x^2}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{35}{3}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** $\frac{37}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^3 \frac{2x^3+3x^2-4}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(2x+3-\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= 2\int_1^3 x\mathrm{d}x + 3\int_1^3 1.dx - 4\int_1^3 x^{-2}\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^3 + 3x\Big|_1^3 + \frac{4}{x}\Big|_1^3 = 8+6-\frac{8}{3} = \frac{34}{3}$.

Câu 75: Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = -2$, $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int_{-1}^1 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** -2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^1 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x + 3\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = -2+9 = 7$.

Câu 76: Cho số a thỏa mãn $0 < a < 2$. Tính $\int_0^2 |x-a|\mathrm{d}x$.

A. a^2-2a+2. **B.** $2-2a$. **C.** a^2+2. **D.** a^2+1.

Lời giải

$= \int_0^a (a-x)\mathrm{d}x + \int_a^2 (x-a)\mathrm{d}x = (ax-\frac{x^2}{2})\Big|_0^a + (\frac{x^2}{2}-ax)\Big|_a^2 = (a^2-\frac{a^2}{2}) + (\frac{2^2}{2}-2a) - (\frac{a^2}{2}-a^2)$

$= a^2-2a+2.$

Câu 77: Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^2 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 7. **D.** 12.

Lời giải

Vì $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 4$ nên $\int\limits_0^2 3f\left(x\right)\mathrm{d}x = 3.4 = 12$.

CHƯƠNG III NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN

IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\sqrt{3}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=(\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$.

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=2\sqrt{3}-2$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $\int_0^1 f(x)dx=3$, $\int_0^1 g(x)dx=5$.

a) $\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx=8$.

b) $\int_0^1\left[f(x)+2x+1\right]dx=5$.

c) $\int_0^1\left[2f(x)+3g(x)\right]dx=20$.

d) $\int_0^1\left[f(x)-g(x)-2\right]dx=4$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên R thoả mãn $\int_1^2 f\left(x\right)dx=2,\ \int_1^4\left[f\left(x\right)+4x\right]dx=40$.

a) $\int_1^4 3f\left(x\right)dx=30$.

b) $\int_1^2\left[3f\left(x\right)-3x^2\right]dx=1$.

c) $\int_2^4 f\left(x\right)dx=8$.

d) $\int_2^4\left[\frac{1}{2}f\left(x\right)+2x+3\right]dx=26$.

Câu 4: Cho $F\left(x\right)$ một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=3\mathrm{x}-2$ trên $\mathbb{R}$.

a) $F'\left(x\right)=3\mathrm{x}-2$.

b) $\int_{-2}^2 f\left(x\right)\mathrm{dx}=F\left(2\right)+F\left(-2\right)$.

c) $\int_1^2 f'\left(x\right)\mathrm{dx}=3$.

d) $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{dx}=\frac{1}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^2$.

a) Hàm số $F(x)=\frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

b) $\int_0^2 f(x)dx=\frac{8}{3}$.

c) $\int_3^3 f(x)dx=3$.

d) Diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$ là 3.

Câu 6: Cho các hàm số $f\left(x\right)$ và $F\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $F'\left(x\right)=f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

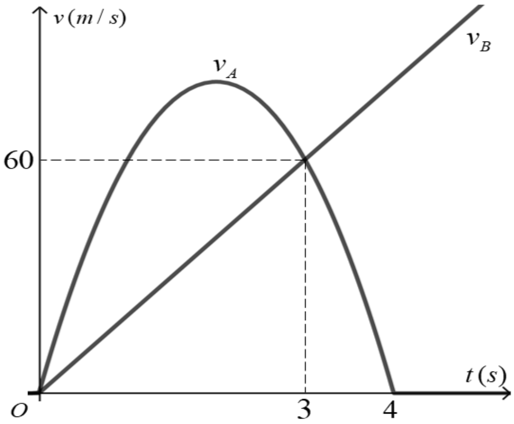
a) $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{dx}=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

b) $\int_{2024}^{2024} f\left(x\right)\mathrm{dx}=2024$.

c) Nếu $F\left(0\right)=2,F\left(1\right)=6$. Khi đó: $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{dx}=4$.

d) Cho $f(x)=\sin x$. Khi đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{dx}=1$.

Câu 7: Cho đồ thị biểu thị vận tốc của hai chất điểm A và B xuất phát cùng lúc, bên cạnh nhau và cùng trên một con đường thẳng. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc v_A của chất điểm A là một parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc v_B của chất điểm B là một đường thẳng như hình vẽ sau



a) Phương trình đường thẳng $v_B = 20t - 3$.

b) Phương trình parabol $v_A = -20t^2 + 80t$.

c) Quãng đường chất điểm A đi được trong 3 giây đầu tiên là $180m$.

d) Sau khi đi được 3 giây, khoảng cách của hai chất điểm là $90m$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin x + 1$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

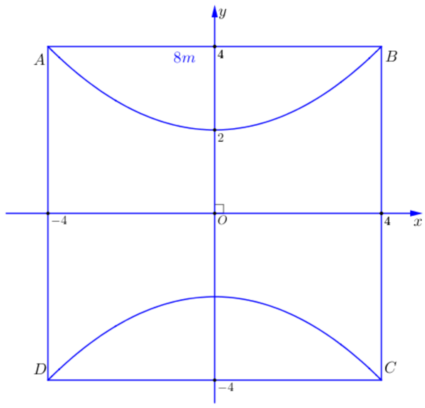
a) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \cos x + x + C$.

b) Khi $F(0) = 1$ thì $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \cos x + x + 1$.

c) Một nguyên hàm của $F(x)$ là $G(x) = \dfrac{x^4}{12} + \sin x + \dfrac{x^2}{2} + x$.

d) $\int_0^a f(x)dx = \dfrac{a^3}{3} - \cos a + a$.

Câu 9: Một người nông dân có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $8m$. Ông ta định chia mảnh đất thành ba phần, bởi các parabol đi qua các đỉnh của hình vuông như hình vẽ, biết rằng đỉnh của parabol cách cạnh hình vuông $2m$. Ông dự định trồng hoa trên phần diện tích giới hạn bởi các parabol và cạnh hình vuông, trồng cỏ trên phần diện tích còn lại. Chọn hệ trục Oxy sao cho $A(-4;4)$, $B(4;4)$, $C(4;-4)$, $D(-4;-4)$.



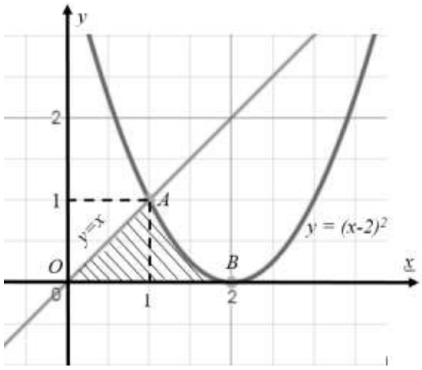
a) Phương trình của hai parabol là $y = \dfrac{x^2}{8} + 2$ và $y = -\dfrac{x^2}{8} - 2$.

b) Diện tích trồng hoa bằng $\dfrac{44}{3}m^2$.

c) Tỉ số diện tích đất trồng hoa và trồng cỏ bằng $\dfrac{11}{37}$.

d) Nếu chi phí mua cây giống hoa là 100.000 đồng/m^2, cỏ là 70.000 đồng/m^2 thì chi phí mua cây giống cho cả khu vườn là 4900000 đồng.

Câu 10: Cho hình phẳng như hình vẽ dưới đây.Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x; y=0; x=0; x=1$, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=(x-2)^2; y=0; x=1; x=2$, S là diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB).



a) $S_1=\frac{1}{3}$.

b) $S_1>S_2$.

c) $S=\frac{1}{2}+F(2)-F(1)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-2)^2$ trên $[1;2]$.

d) $S=\frac{5}{6}$.

Câu 11: Gọi $S(t)$ là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=3x^2+1$,trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=t\,(t>0)$.

a) $S(1)=2$

b) $S(1)+S(4)=\int\limits_1^4 (3x^2+1)dx$

c) $S(t)=10 \Leftrightarrow t=2$

d) GTNN $\int\limits_0^t f'(x)dx$ là 3

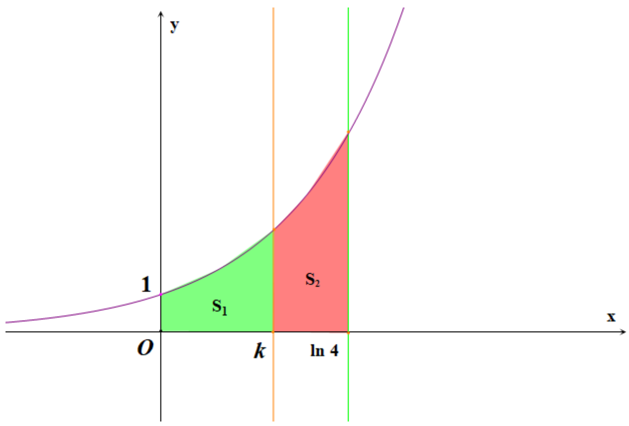
Câu 12: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 sao cho $S_1=2S_2$(như hình vẽ bên). S là hình vuông có cạnh bằng $\ln 4$.

a) Diện tích hình thang cong (H) là 3 (đvdt).

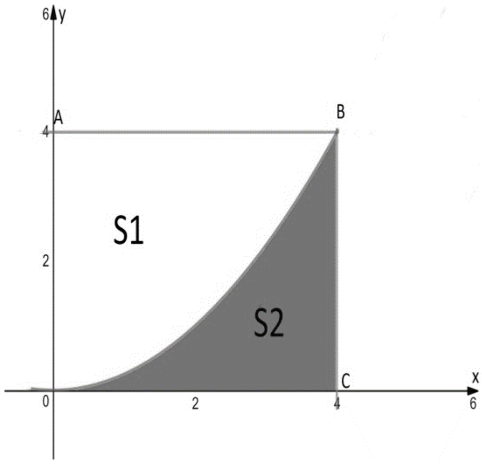
b) Diện tích S_1 là 2 (đvdt).

c) $S>S_1$.

d) $k=\ln 3$.



Câu 13: Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y=\frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô đậm và tô đậm như hình vẽ bên dưới.



a) Diện tích hình vuông $OABC$ là 16.

b) Diện tích $S_2=\frac{10}{3}$.

c) Diện tích $S_1=\frac{32}{3}$.

d) Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$.

Câu 14: Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ gia tăng tổng chi phí theo lượng gia tăng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $C'(x)=5-0,06x+0,00072x^2$ với $0\le x\le 150$. Biết rằng $C(0)=30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định.

a) $C(100)-C(0)=\int_0^{100}C'(x)\mathrm{d}x$.

b) $\int_0^{100}C'(x)\mathrm{d}x=5\int_0^{100}\mathrm{d}x-0,06\int_0^{100}x\,\mathrm{d}x+0,00072\int_0^{100}x^2\,\mathrm{d}x$.

c) $5\int_0^{100}\mathrm{d}x-0,06\int_0^{100}x\,\mathrm{d}x+0,00072\int_0^{100}x^2\,\mathrm{d}x=5\big|_0^{100}-0,03x\big|_0^{100}+0,00024x\big|_0^{100}$.

d) $C(100)=440$.

CHƯƠNG III NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN

IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)dx$.

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}dx$.

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}dx=\sqrt{3}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x}dx$.

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=(\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$.

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)dx=2\sqrt{3}-2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}dx$ (nên câu a) **Đúng**).

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}dx=\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x}dx$ (nên câu b) **sai**).

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=(\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ (nên câu c) **sai**).

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x}dx$

$=(\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\sqrt{3}(-\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\left(\cot\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}-2$ (nên câu d) **đúng**).

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $\int_0^1 f(x)dx=3$, $\int_0^1 g(x)dx=5$.

a) $\int_0^1[f(x)+g(x)]dx=8$.

b) $\int_0^1 \left[f(x)+2x+1\right]dx=5$.

c) $\int_0^1 \left[2f(x)+3g(x)\right]dx=20$.

d) $\int_0^1 \left[f(x)-g(x)-2\right]dx=4$.

Lời giải:

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) $\int_0^1 \left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=3+5=8$

b) $\int_0^1 \left[f(x)+2x+1\right]dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 (2x+1)dx=3+2=5$

c) $\int_0^1 \left[2f(x)+3g(x)\right]dx=2\int_0^1 f(x)dx+3\int_0^1 g(x)dx=2.3+3.5=21$

d) $\int_0^1 \left[f(x)-g(x)-2\right]dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)dx-\int_0^1 2dx=-4$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thoả mãn $\int_1^2 f(x)dx=2,\ \int_1^4 \left[f(x)+4x\right]dx=40$.

a) $\int_1^4 3f(x)dx=30$.

b) $\int_1^2 \left[3f(x)-3x^2\right]dx=1$.

c) $\int_2^4 f(x)dx=8$.

d) $\int_2^4 \left[\frac{1}{2}f(x)+2x+3\right]dx=26$.

Lời giải:

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) $\int_1^4 \left[f(x)+4x\right]dx=40 \Leftrightarrow \int_1^4 f(x)dx+\int_1^4 4xdx=40 \Leftrightarrow \int_1^4 f(x)dx+30=40 \Leftrightarrow \int_1^4 f(x)dx=10$

b) $\int_1^2 \left[3f(x)-3x^2\right]dx=\int_1^2 3f(x)dx-\int_1^2 3x^2dx=3.2-7=-1$

c) $\int_2^4 f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx=10-2=8$

d) $\int_2^4 \left[\frac{1}{2}f(x)+2x+3\right]dx=\int_2^4 \frac{1}{2}f(x)dx+\int_2^4 (2x+3)dx=4+18=22$

Câu 4: Cho $F(x)$ một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\text{x}-2$ trên $\mathbb{R}$.

a) $F'(x)=3\text{x}-2$.

b) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = F(2)+F(-2)$.

c) $\int_{1}^{2} f'(x)\,dx = 3$.

d) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) $F(x)$ một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x-2$ trên $\mathbb{R}$ nên $F'(x)=f(x)=3x-2$

b) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = F(2)-F(-2)$

c) $\int_{1}^{2} f'(x)\,dx = \int_{1}^{2} 3\,dx = 3x\Big|_{1}^{2} = 3$

d) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (3x-2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{2}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^2$.

a) Hàm số $F(x)=\frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

b) $\int_{0}^{2} f(x)dx = \frac{8}{3}$.

c) $\int_{3}^{3} f(x)dx = 3$.

d) Diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$ là 3.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Hàm số $F(x)=\frac{x^3}{3}$ có $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$ nên hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Chọn ĐÚNG.

b) $\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3}$. Chọn ĐÚNG.

c) $\int_{3}^{3} f(x)dx = 0$. Chọn SAI.

d) Hàm số $y=f(x)=x^2$ liên tục và không âm trên $[0;2]$. Nên diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, trục tung $x=0$ và đường thẳng $x=2$ là:

$S=\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3}$. Chọn SAI.

Câu 6: Cho các hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

a) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

b) $\int\limits_{2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x = 2024$.

c) Nếu $F(0) = 2, F(1) = 6$. Khi đó: $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

d) Cho $f(x) = \sin x$. Khi đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

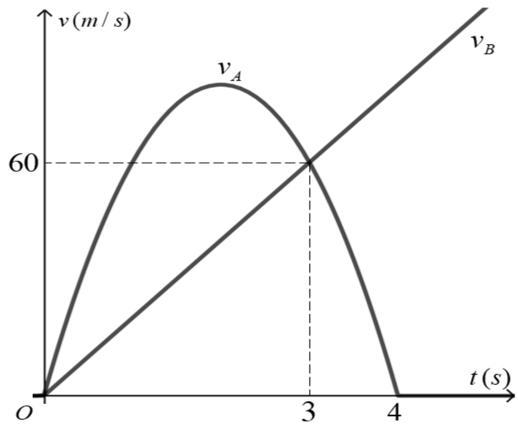
a) Theo định nghĩa tích phân. Chọn ĐÚNG.

b) Ta có: $\int\limits_{2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x = 0$. Chọn SAI.

c) Ta có: $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 4$. Chọn ĐÚNG.

d) Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Chọn ĐÚNG.

Câu 7: Cho đồ thị biểu thị vận tốc của hai chất điểm A và B xuất phát cùng lúc, bên cạnh nhau và cùng trên một con đường thẳng. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc v_A của chất điểm A là một parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc v_B của chất điểm B là một đường thẳng như hình vẽ sau



a) Phương trình đường thẳng $v_B = 20t - 3$.

b) Phương trình parabol $v_A = -20t^2 + 80t$.

c) Quãng đường chất điểm A đi được trong 3 giây đầu tiên là $180m$.

d) Sau khi đi được 3 giây, khoảng cách của hai chất điểm là $90m$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

Gọi v_A là vận tốc của chất điểm A. Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số vận tốc của chất điểm A theo thời gian có đồ thị là một parabol có dạng $v_A(t) = at^2 + bt + c \ (t \ge 0)(a,b,c \in \mathbb{R})$

Dựa vào đồ thị ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} v_A(0)=0 \\ v_A(3)=60 \\ v_A(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.0+b.0+c=0 \\ a.3^2+b.3=60 \\ a.4^2+b.4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 9a+3b=60 \\ 16a+4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-20 \\ b=80 \\ c=0 \end{cases}$$

Suy ra $v_A(t)=-20t^2+80t\ \ (t\ge 0)$.

Vậy quãng đường chất điểm A đi được trong 3 giây đầu tiên là:

$$S_A=\int_0^3 v_A(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^3\left(-20t^2+80t\right)\mathrm{d}t=180(m).$$

Gọi v_B là vận tốc của chất điểm B. Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số vận tốc của chất điểm B theo thời gian có đồ thị là một đường thẳng có dạng $v_B(t)=at+b\ \ (t\ge 0)(a,b\in\mathbb{R})$

Dựa vào đồ thị ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} v_B(0)=0 \\ v_B(3)=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.0+b=0 \\ a.3=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=20 \\ b=0 \end{cases}$$

Suy ra $v_B(t)=20t\ (t\ge 0)$.

Vậy quãng đường chất điểm B đi được trong 3 giây đầu tiên là:

$$S_B=\int_0^3 v_B(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^3 20t\,\mathrm{d}t=90(m).$$

Khi đó, khoảng cách của hai chất điểm bằng: $|180-90|=90(m)$.

a) Sai: Phương trình đường thẳng $v_B=20t$.

b) Đúng: Phương trình parabol $v_A=-20t^2+80t$.

c) Đúng: Quãng đường chất điểm A đi được trong 3 giây đầu tiên là $180m$.

d) Đúng: Sau khi đi được 3 giây, khoảng cách của hai chất điểm là $90m$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=x^2+\sin x+1$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

a) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\cos x+x+C$.

b) Khi $F(0)=1$ thì $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\cos x+x+1$.

c) Một nguyên hàm của $F(x)$ là $G(x)=\dfrac{x^4}{12}+\sin x+\dfrac{x^2}{2}+x$.

d) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\frac{a^3}{3}-\cos a+a$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Ta có: $\displaystyle\int f(x)dx=\int\left(x^2+\sin x+1\right)dx=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+C\Rightarrow F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+C$

$F(0)=1\Rightarrow C=2$. Vậy $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\cos x+x+2$.

$$\int F(x)dx=\int\left(\frac{x^3}{3}-\cos x+x+C\right)dx=\frac{x^4}{12}+\sin x+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

$$\int_0^a f(x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \cos x + x + C\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{3} - \cos a + a + 1$$

a) Đúng: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + C$

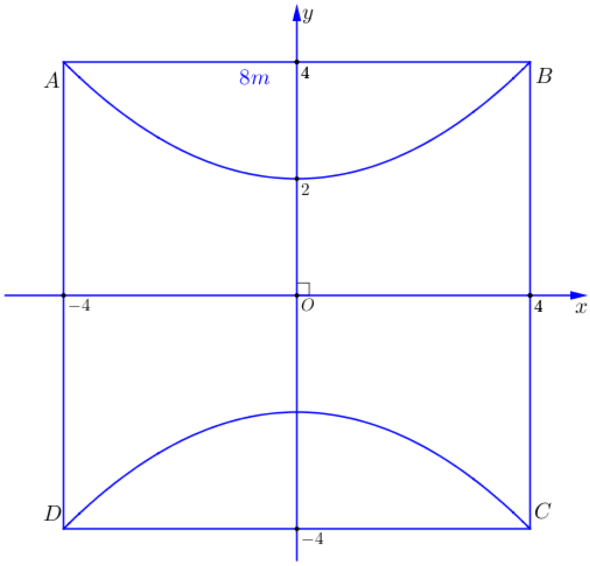
b) Sai: Khi $F(0) = 1$ thì $F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + 2$.

c) Đúng: Một nguyên hàm của $F(x)$ là $G(x) = \frac{x^4}{12} + \sin x + \frac{x^2}{2} + x$.

d) Sai: $\int_0^a f(x)dx = \frac{a^3}{3} - \cos a + a + 1$.

Câu 9: Một người nông dân có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $8m$. Ông ta định chia mảnh đất thành ba phần, bởi các parabol đi qua các đỉnh của hình vuông như hình vẽ, biết rằng đỉnh của parabol cách cạnh hình vuông $2m$. Ông dự định trồng hoa trên phần diện tích giới hạn bởi các parabol và cạnh hình vuông, trồng cỏ trên phần diện tích còn lại.

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A(-4;4)$, $B(4;4)$, $C(4;-4)$, $D(-4;-4)$.



a) Phương trình của hai parabol là $y = \frac{x^2}{8} + 2$ và $y = -\frac{x^2}{8} - 2$.

b) Diện tích trồng hoa bằng $\frac{44}{3}m^2$.

c) Tỉ số diện tích đất trồng hoa và trồng cỏ bằng $\frac{11}{37}$.

d) Nếu chi phí mua cây giống hoa là 100.000 đồng/m^2, cỏ là 70.000 đồng/m^2 thì chi phí mua cây giống cho cả khu vườn là 4900000 đồng.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng

Phương trình parabol có dạng: $y = f(x) = ax^2 + bx + c \ (P)$

Ta có: $A(-4;4)$, $B(4;4)$, $E(0;2) \in (P) \Rightarrow y = \frac{x^2}{8} + 2$.

Tương tự, phương trình parabol thứ hai là $y=-\dfrac{x^2}{8}-2$.

b) Đúng

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{x^2}{8}+2$, đường thẳng $y=4$ và hai đường thẳng $x=0,\ x=4$.

Diện tích đất trồng hoa là $S=4S_1=4\int_0^2\left[4-\left(\dfrac{x^2}{8}+2\right)\right]dx=4\left(-\dfrac{x^3}{24}+2x\right)\Bigg|_0^2=\dfrac{44}{3}m^2$.

c) Đúng

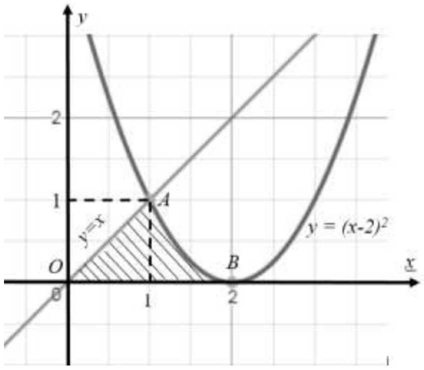
Diện tích đất trồng cỏ: $S'=64-S=64-\dfrac{44}{3}=\dfrac{148}{3}m^2$.

Tỉ số diện tích đất trồng hoa và trồng cỏ: $\dfrac{S}{S'}=\dfrac{11}{37}$.

d) Sai

Chi phí mua cây giống là: $\dfrac{44}{3}.100000+\dfrac{148}{3}.70000=4920000$ đồng

Câu 10: Cho hình phẳng như hình vẽ dưới đây.Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x;y=0;x=0;x=1$, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=(x-2)^2;y=0;x=1;x=2$, S là diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB).



a) $S_1=\dfrac{1}{3}$.

b) $S_1>S_2$.

c) $S=\dfrac{1}{2}$ +F$(2)-F(1)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-2)^2$ trên $[1;2]$.

d) $S=\dfrac{5}{6}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

Ta có $f(x)=x$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[0;1]$.

$F(x)=\dfrac{x^2}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x$ trên $[0;1]$.

Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S_1=F(1)-F(0)=\dfrac{1}{2}$.

Ta có $f(x)=(x-2)^2$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[1;2]$.

$F(x)=\dfrac{(x-2)^3}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-2)^2$ trên $[1;2]$.

Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S_2=F(2)-F(1)=\dfrac{(2-2)^3}{3}-\dfrac{(1-2)^3}{3}=\dfrac{1}{3}$.

$S=S_1+S_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$.

Câu 11: Gọi $S(t)$ là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=3x^2+1$,trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=t\,(t>0)$.

a) $S(1)=2$

b) $S(1)+S(4)=\int\limits_1^4(3x^2+1)dx$

c) $S(t)=10\Leftrightarrow t=2$

d) GTNN $\int\limits_0^t f'(x)dx$ là 3

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Hàm số $y=f(x)=3x^2+1$ liên tục và không âm trên $[0;1]$

$S(1)=\int\limits_0^1(3x^2+1)dx=2$ .Vậy a) đúng

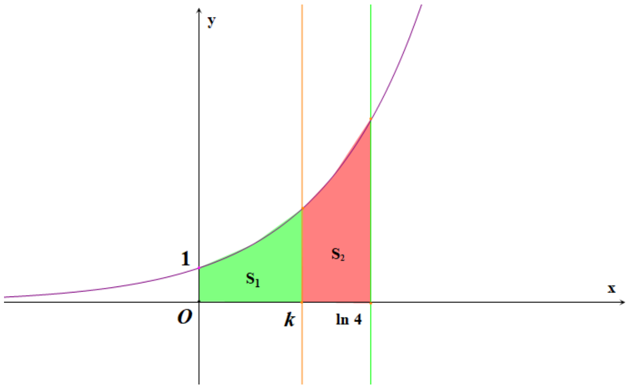
b) $S(4)=\int\limits_0^4(3x^2+1)dx=68\Rightarrow S(1)+S(4)=2+68=70$.

Mà $\int\limits_1^4(3x^2+1)dx=66\Rightarrow S(1)+S(4)\neq\int\limits_1^4(3x^2+1)dx$. Vậy b) sai

c) $S(t)=10\Leftrightarrow\int\limits_0^t(3x^2+1)dx=(x^3+x)\Big|_0^t=t^3+t=10\Leftrightarrow t=2$,Vậy c) đúng

d) $\int\limits_0^t f'(x)dx=f(x)\Big|_0^t=f(t)-f(0)=3t^2>0\forall t>0$ .Vậy d) sai

Câu 12: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 sao cho $S_1=2S_2$ (như hình vẽ bên). S là hình vuông có cạnh bằng $\ln 4$.



a) Diện tích hình thang cong (H) là 3 (đvdt).

b) Diện tích S_1 là 2 (đvdt).

c) $S > S_1$.

d) $k = \ln 3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a). Ta có $y = f(x) = e^x$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[0;\ln 4]$.

$F(x) = e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = e^x$ trên $[0;\ln 4]$.

Do đó diện tích hình thang cong (H) là: $S_3 = F(\ln 4) - F(0) = (e^{\ln 4}) - (e^0) = 3$ (đvdt).

b). Ta có $S_3 = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2.3}{3} = 2$ (đvdt).

c) $S = (\ln 4)^2 = 1,92 < S_1$.

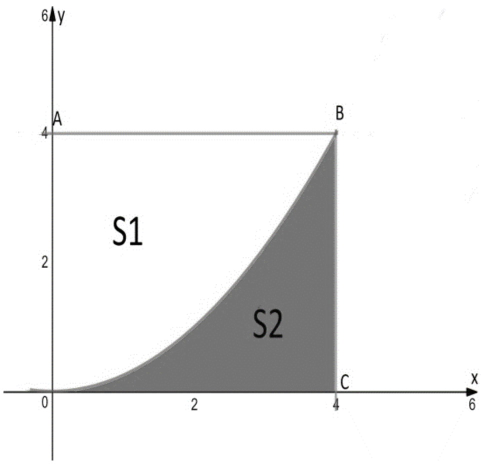
d). Ta có $y = f(x) = e^x$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[0;k]$.

$F(x) = e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = e^x$ trên $[0;k]$.

S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ nên

$S_1 = F(k) - F(0) = \mathrm{e}^k - \mathrm{e}^0 = 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^k - 1 = 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.

Câu 13: Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô đậm và tô đậm như hình vẽ bên dưới.



a) Diện tích hình vuông $OABC$ là 16.

b) Diện tích $S_2 = \dfrac{10}{3}$.

c) Diện tích $S_1 = \dfrac{32}{3}$.

d) Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là $4^2 = 16$. Chọn ĐÚNG.

b) S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) có phương trình: $y = \dfrac{1}{4}x^2$, trục hoành, các đường thẳng $x = 0$ và $x = 4$ nên $S_2 = \int\limits_0^4 \dfrac{1}{4}x^2 \mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^3}{12}\right|_0^4 = \dfrac{4^3}{12} - 0 = \dfrac{16}{3}$. Chọn SAI

c) $S_1 = S_{OABC} - S_2 = 16 - \dfrac{16}{3} = \dfrac{32}{3}$. Chọn ĐÚNG.

d) $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\frac{32}{3}}{\frac{16}{3}} = 2$. Chọn SAI.

Câu 14: Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ gia tăng tổng chi phí theo lượng gia tăng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $C'(x) = 5 - 0,06x + 0,00072x^2$ với $0 \le x \le 150$. Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định.

a) $C(100) - C(0) = \int_0^{100} C'(x)\mathrm{d}x$.

b) $\int_0^{100} C'(x)\mathrm{d}x = 5\int_0^{100} \mathrm{d}x - 0,06\int_0^{100} x\,\mathrm{d}x + 0,00072\int_0^{100} x^2\,\mathrm{d}x$.

c) $5\int_0^{100} \mathrm{d}x - 0,06\int_0^{100} x\,\mathrm{d}x + 0,00072\int_0^{100} x^2\,\mathrm{d}x = 5\Big|_0^{100} - 0,03x\Big|_0^{100} + 0,00024x\Big|_0^{100}$.

d) $C\left(100\right) = 440$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

$C(100) - C(0) = \int_0^{100} C'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{100} \left(5 - 0,06x + 0,00072x^2\right)\mathrm{d}x$

$= 5\int_0^{100} \mathrm{d}x - 0,06\int_0^{100} x\,\mathrm{d}x + 0,00072\int_0^{100} x^2\,\mathrm{d}x$

$= 5x\Big|_0^{100} - 0,03x^2\Big|_0^{100} + 0,00024x^3\Big|_0^{100} = 440.$

Suy ra $C(100) = C(0) + 440 = 30 + 440 = 470$ (triệu đồng).

Vậy khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng thì tổng chi phí là 470 triệu đồng

CHƯƠNG III NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

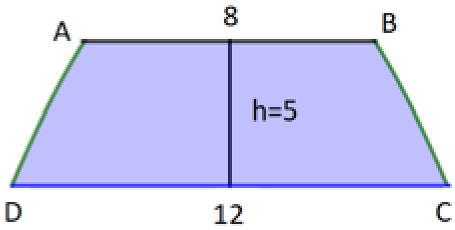
BÀI. TÍCH PHÂN

V HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

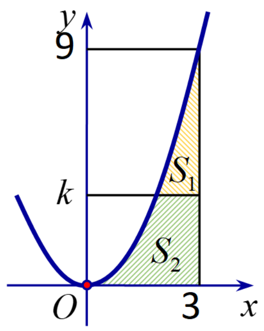
Câu 1: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=4-3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1, x=1$.

Câu 2: Biết diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=4x^3-12x+9$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=a$ $(a>1)$ bằng 6. Tìm a?

Câu 3: Một mảnh đất có hình dạng là hình thang cong có các thông số như hình vẽ, biết phần đường cong là phần đồ thị của hàm số $y=a\sqrt{x}$. Diện tích của mảnh đất đó là bao nhiêu?



Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=3$. Đường thẳng $y=k$ $(0<k<9)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1=S_2$.

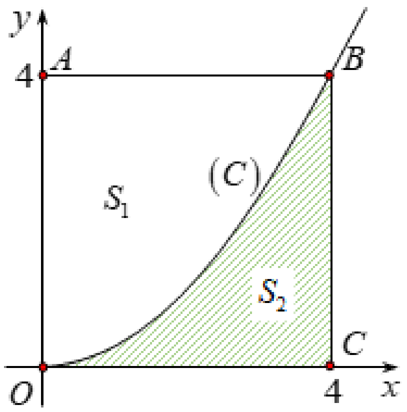
Câu 5: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các phương tiện giao thông (trừ xe hai bánh) khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1m$. Một ô tô đang chạy với vận tốc $20m/s$ bỗng gặp một xe bán tải đang dừng đèn đỏ nên ô tô hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu diễn bởi công thức $v(t)=20-5t$ (m/s). Hỏi rằng để hai xe đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại, ô tô cần phải hãm phanh khi cách xe bán tải một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

Câu 6: Một ô tô đang chạy với vận tốc $20\ \text{m/s}$ thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe $45\ \text{m}$ (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\ (\text{m/s})$, trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

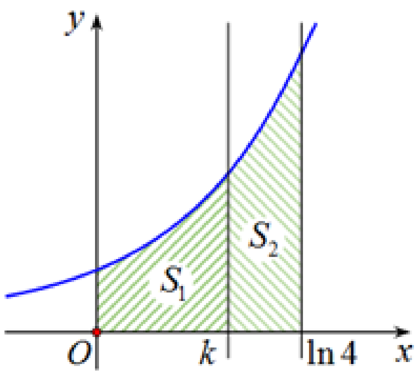
Câu 7: Giả sử nhiệt độ (tính bằng $°\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $T(t)=20+1,5(t-6)$, $6\le t\le 12$. Tìm nhiệt độ trung bình (đơn vị độ C) vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Câu 8: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tíc1458h nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây (đơn vị m^3).

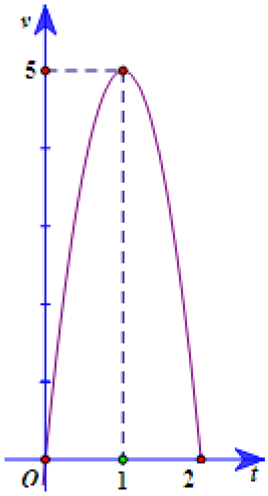
Câu 9: Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y=\dfrac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của phần không bị gạch và phần bị gạch (như hình vẽ). Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



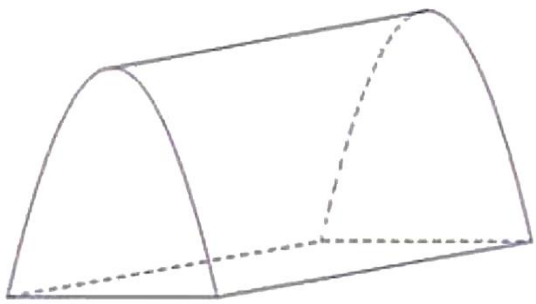
Câu 10: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1, S_2 và như hình vẽ bên dưới. Tìm k để $S_1=2S_2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



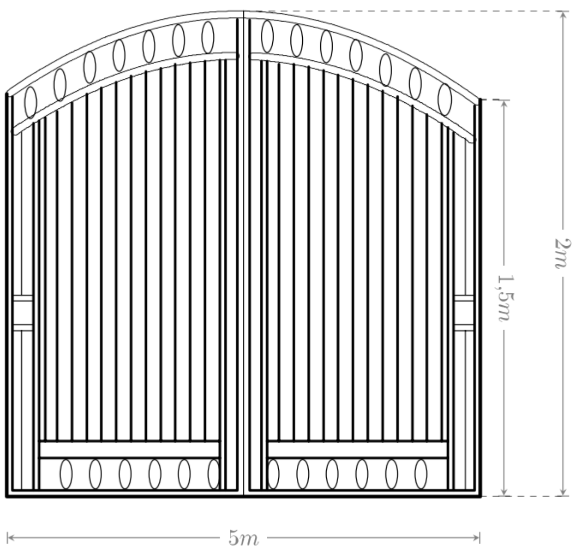
Câu 11: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



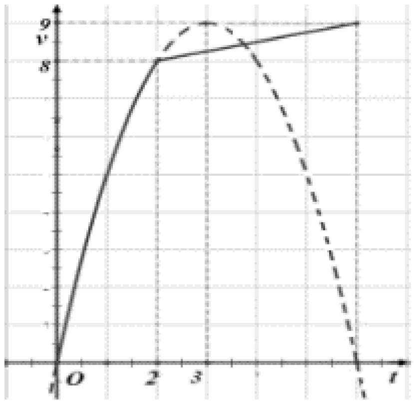
Câu 12: Để chuẩn bị cho buổi dã ngoại, nhóm du lịch dự định dựng một cái lều trại có dạng như hình vẽ. Biết rằng mặt trước và mặt sau của trại là hai parabol bằng nhau, nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và cùng vuông góc với mặt nền. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước chiều rộng là $4m$ (lối vào lều), chiều dài là $6m$, đỉnh parabol cách nền $3m$. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



Câu 13: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1m^2 cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



Câu 14: Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v\left(km/h\right)$ phụ thuộc vào thời gian $t\left(h\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I\left(3;9\right)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ là $\frac{a}{b}$,$\left(a,b\right)=1$.Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?



Câu 15: Một ca nô cao tốc có tốc độ v (km/phút) thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v\left(t\right)=\begin{cases} a.t, & 0\le t<2, \\ 2 & 2\le t<15, \text{ với } a\in\mathbb{R}. \\ 4-a.t, & 15\le t\le 20. \end{cases}$$

Biết quãng đường ca nô di chuyển được trong thời gian 20 phút bằng 28,9 km. Giá trị của a bằng

Câu 16: Một vật được ném lên từ độ cao $300m$ với vận tốc được cho bởi công thức $v\left(t\right)=-9,81t+29,43\left(m/s\right)$. Gọi $h\left(t\right)$ $\left(m\right)$ là độ cao của vật tại thời điểm $t\left(s\right)$. Hỏi khoảng thời gian kể từ khi bắt đầu vật được ném đến lúc chạm đất xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 17: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P\left(t\right)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày $\left(0\le t\le 10\right)$. Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'\left(t\right)=k\sqrt{t},$ trong đó k là hằng số. Sau một ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calcucus 10e, Cengage 2014*). Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 18: Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1^{\circ}C$. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút $\left(0\le t\le 5\right)$ được cho bởi hàm số $f\left(t\right)=3t^2$ ($^{\circ}C$/phút). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$, tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Câu 19: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t)=8t+30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng (nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012). Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Câu 20: Nhằm tri ân người dân Bình Thuận đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp, Tập đoàn Nova đã tổ chức ngày hội "Cảm ơn Bình Thuận" vào ngày 10/07/2024. Trong chuỗi sự kiện đặc biệt này, tất cả người dân địa phương đều được miễn phí vé vào cổng, thỏa thích tận hưởng các trò chơi, tham quan các công trình kỳ thú, ấn tượng tại 05 công viên chủ đề được đầu tư, xây dựng hoành tráng với hàng trăm tiện ích.

Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t)=4t^3-3t^2+200$, trong đó t tính bằng giờ ($0\le t\le 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

Câu 21: Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn cho thuê mỗi gian hàng với giá là x triệu đồng $(x>0)$. Khi đó doanh thu của cửa hàng được biểu diễn theo hàm số $T(x)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x)=-10x+200$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu giá thuê cho mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

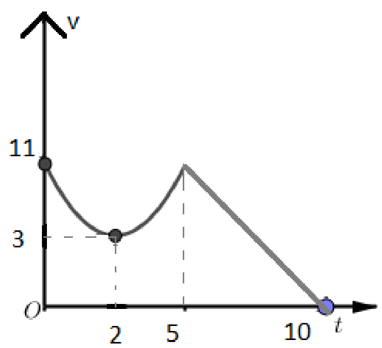
Câu 22: Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases}0,5t, & 0\le t<2\\ 1, & 2\le t<15\\ 4-0,2t, & 15\le t\le 20\end{cases}$$

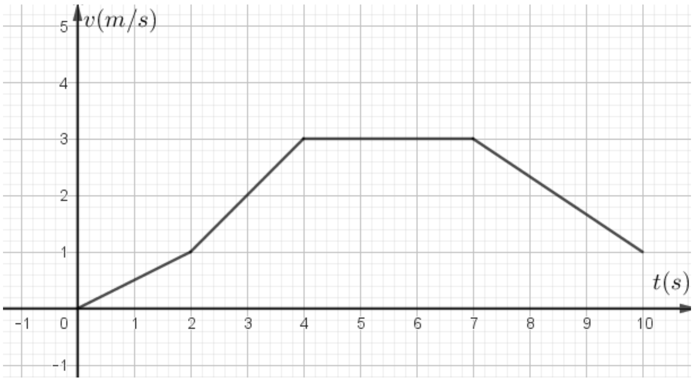
Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.

Câu 23: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\,(m/s)$. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

Câu 24: Một chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Câu 25: Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t=0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động). Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của vật 10 giây đầu tiên.



Câu 26: Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc $v(\text{m/phut})$ của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số

$$v(t)=\begin{cases}100t, & 0\le t\le 10\\ 20t+800, & 10<t\le 20\\ -10\text{t}+1400, & 20<t\le 30\end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút đã khảo sát.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN

V. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 4 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

Lời giải

Trả lời: 6

Hàm số $y = f(x) = 4 - 3x^2$ liên tục, nhận giá trị dương trên $[-1;1]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = 4x - x^3$. Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(1) - F(-1) = 6$.

Câu 2: Biết diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 12x + 9$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = a\ (a > 1)$ bằng 6. Tìm a?

Lời giải

Trả lời: 2

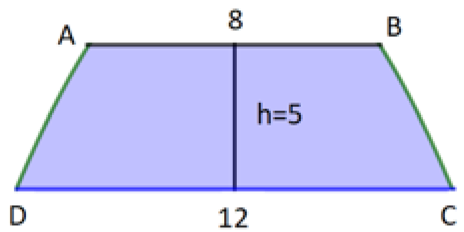
Hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 12x + 9$ liên tục, nhận giá trị dương trên $[1;a]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = x^4 - 6x^2 + 9x$. Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là

$S = F(a) - F(1) = a^4 - 6a^2 + 9a - 4 = 6$.

Phương trình có nghiệm $a = 2$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $a = 2$

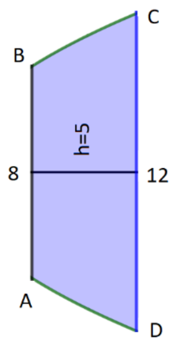
Câu 3: Một mảnh đất có hình dạng là hình thang cong có các thông số như hình vẽ, biết phần đường cong là phần đồ thị của hàm số $y = a\sqrt{x}$. Diện tích của mảnh đất đó là bao nhiêu?



Lời giải

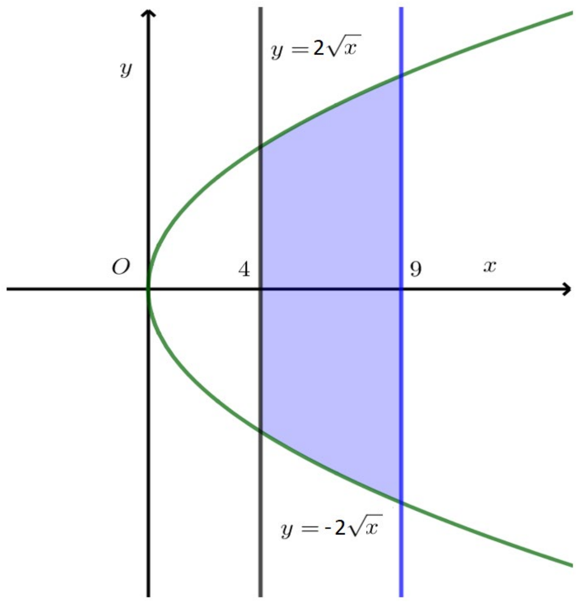
Trả lời: 50,7

Đưa hình vẽ về dạng của hàm số $y = a\sqrt{x}$:



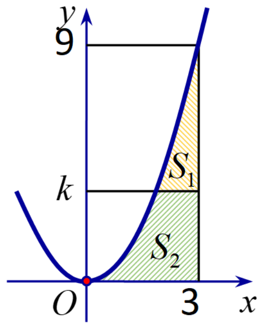
Chọn hệ trục Oxy với Ox đi qua chính giữa trục của mảnh đất (theo chiều của chiều cao), gốc tọa độ O cách điểm chính giữa của đoạn AB là 4, khi đó ta có: $y_B = 4, y_C = 6$ nên $B(4;4)$, $C(9;6)$.

Do đó, dễ được: $a = 2$



Nên: $S = 2\int\limits_4^9 2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \dfrac{152}{3}$.

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$. Đường thẳng $y = k$ $(0 < k < 9)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1 = S_2$.

Lời giải

Trả lời: 2,25

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = k$ là $x = \sqrt{k}$.

Do đó diện tích $S_1 = \int_{\sqrt{k}}^{3} \left(x^2 - k\right) \mathrm{d}x$, diện tích $S_2 = \int_0^3 x^2 \mathrm{d}x - S_1$.

Ta có: $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_{\sqrt{k}}^{3} \left(x^2 - k\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^3 x^2 \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left.\left(\frac{x^3}{3} - kx\right)\right|_{\sqrt{k}}^{3} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 9 - 3k - \frac{\sqrt{k^3}}{3} + \sqrt{k^3} = \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow 18k - 4\sqrt{k^3} - 27 = 0 \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{k}\right)^3 - 18\left(\sqrt{k}\right)^2 + 27 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{k} = \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{k} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{k} = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow k = \frac{9}{4}.$$

Câu 5: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các phương tiện giao thông (trừ xe hai bánh) khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1m$. Một ô tô đang chạy với vận tốc $20m/s$ bỗng gặp một xe bán tải đang dừng đèn đỏ nên ô tô hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu diễn bởi công thức $v(t) = 20 - 5t \ (m/s)$. Hỏi rằng để hai xe đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại, ô tô cần phải hãm phanh khi cách xe bán tải một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 41

Ta có: $v(0) = 20\,\mathrm{m/s}$.

Khi xe ô tô dừng hẳn: $v(t)=0 \Leftrightarrow t=4\text{s}$.

Quãng đường từ lúc xe ô tô hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s=\int_0^4 (20-5t)\,\mathrm{d}t=\left(20t-\frac{5t^2}{2}\right)\Big|_0^4=40\,(m)$

Do các xe phải cách nhau tối thiểu $1\,\text{m}$ để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô phải hãm phanh khi cách xe bán tải một khoảng ít nhất là $41m$.

Câu 6: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20$ (m/s), trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 5

Xe dừng lại khi $v(t)=0 \Leftrightarrow -5t+20=0 \Leftrightarrow t=4$ (s).

Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là

$$\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^4(-5t+20)\,dt=\left(20t-\frac{5t^2}{2}\right)\Big|_0^4=40 \text{ m}$$

Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là: $45-40=5$ m.

Câu 7: Giả sử nhiệt độ (tính bằng °C) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $T(t)=20+1{,}5(t-6)$, $6\le t\le 12$. Tìm nhiệt độ trung bình (đơn vị độ C) vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Lời giải

Trả lời: 24,5

Ta có: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Do đó, nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa là

$$\frac{1}{12-6}\int_6^{12}\left(20+1{,}5(t-6)\right)\mathrm{d}t=24{,}5\text{ °C}.$$

Câu 8: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tíc1458h nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây (đơn vị m^3).

Lời giải

Trả lời: 1458

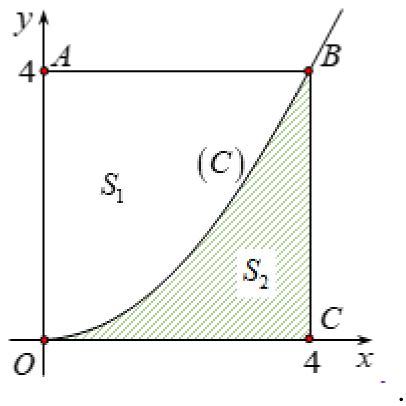
$$\int_0^3 \left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t=90 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^3=90 \Leftrightarrow 54a+9b=90 \ (1)$$

$$\int_0^6 \left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t=504 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^6=504 \Leftrightarrow 432a+36b=504 \ (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=6 \end{cases}$. Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V=\int_0^9 \left(4t^2+12t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{4}{3}t^3+6t^2\right)\Bigg|_0^9=1458\left(m^3\right).$$

Câu 9: Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y=\frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của phần không bị gạch và phần bị gạch (như hình vẽ). Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



Lời giải

Trả lời: 2

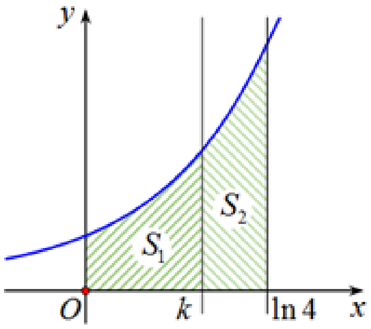
Hàm số $y=\frac{1}{4}x^2$ liên tục và dương trên đoạn $[0;4]$ và có một nguyên hàm là $F(x)=\frac{x^3}{12}$

Do đó diện tích hình thang cong S_2 là: $S_2=F(4)-F(0)=\frac{4^3}{12}-0=\frac{16}{3}$

và diện tích hình vuông $S_{OABC}=4^2=16$ nên $S_1=S_{OABC}-S_2=\frac{32}{3}$.

Do đó $\frac{S_1}{S_2}=2$.

Câu 10: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1, S_2 và như hình vẽ bên dưới. Tìm k để $S_1=2S_2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 1,1

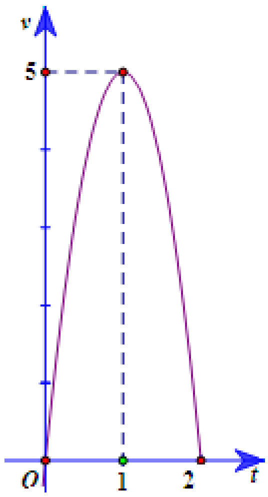
Hàm số $y = e^x$ liên tục và dương trên các đoạn $[0;k];[k;\ln 4]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = e^x$

Do đó diện tích hình thang cong S_1, S_2 là: $S_1 = F(k) - F(0) = e^k - e^0 = e^k - 1$

$S_2 = F(\ln 4) - F(k) = e^{\ln 4} - e^k = 4 - e^k$

Theo đề ra: $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2\left(4 - e^k\right) \Leftrightarrow e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3 \approx 1{,}1$.

Câu 11: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (*km/h*) phụ thuộc vào thời gian t (*h*) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I\left(1;5\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung *Ov* như hình vẽ. Tính quãng đường *S* người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



Lời giải

Trả lời: 5,63

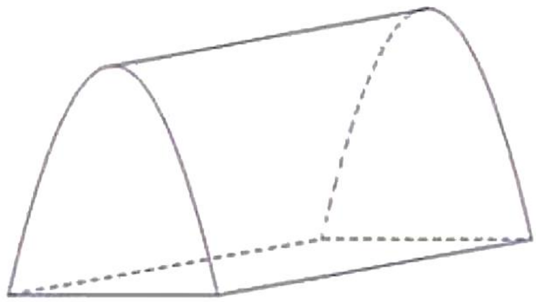
Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow S = \int\limits_0^{1,5} v(t)\mathrm{d}t$.

Đồ thị $v = v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t) = at^2 + bt$.

Đồ thị $v = v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -5t^2 + 10t$

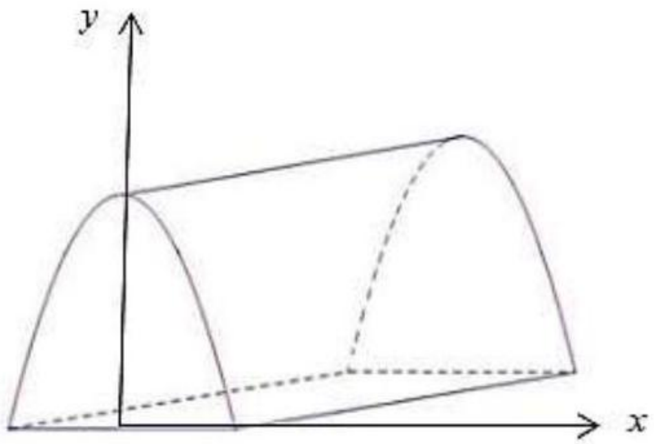
$S=\int\limits_{0}^{1,5}\left(-5t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\frac{45}{8}\approx 5,63$.

Câu 12: Để chuẩn bị cho buổi dã ngoại, nhóm du lịch dự định dựng một cái lều trại có dạng như hình vẽ. Biết rằng mặt trước và mặt sau của trại là hai parabol bằng nhau, nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và cùng vuông góc với mặt nền. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước chiều rộng là $4m$ (lối vào lều), chiều dài là $6m$, đỉnh parabol cách nền $3m$. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



Lời giải

Trả lời: 48



Parabol $(P): y=ax^2+bx+c, a\neq 0$ có đỉnh $C(0;3)$, đi qua hai điểm $A(-2;0)$ và $B(2;0)$ nên

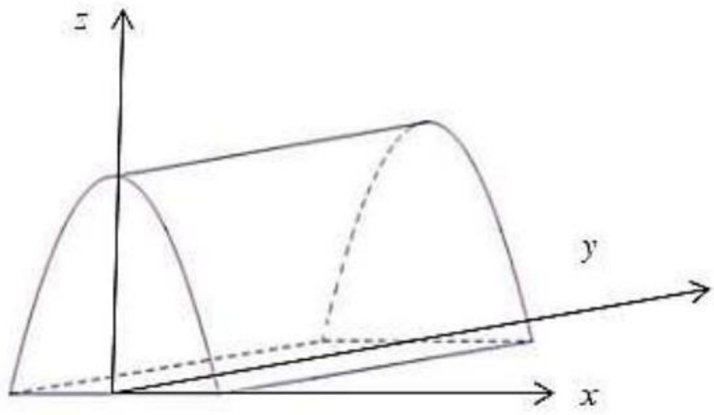
có hệ phương trình $\begin{cases}0.a+0.b+c=3\\4a-2b+c=0\\4a+2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{4}\\b=0\\c=3\end{cases}$.

Suy ra $(P): y=-\frac{3}{4}x^2+3$.

Diện tích mặt trước của lều trại là

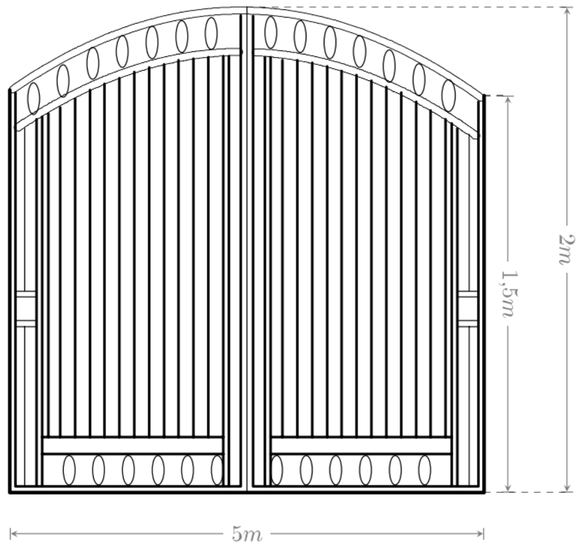
$S=\int\limits_{-2}^{2}\left(3-\frac{3}{4}x^2\right)\mathrm{d}x=8\left(m^2\right)$

+) Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



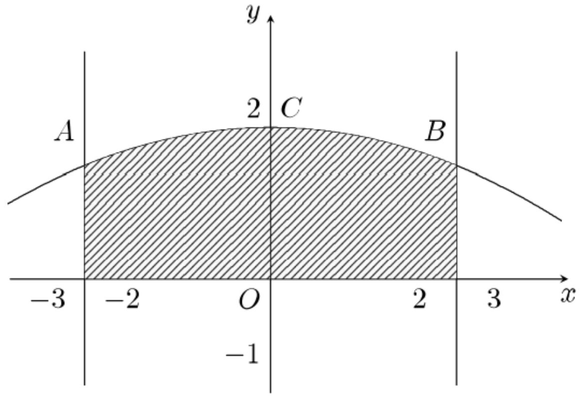
Khi đó thể tích phần không gian bên trong lều trại là $V = \int_0^6 8\mathrm{d}x = 48\left(m^3\right)$.

Câu 13: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1\mathrm{m}^2$ cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



Lời giải

Trả lời: 6417



Trong đó $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a;b;c \in \mathbb{R}$

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

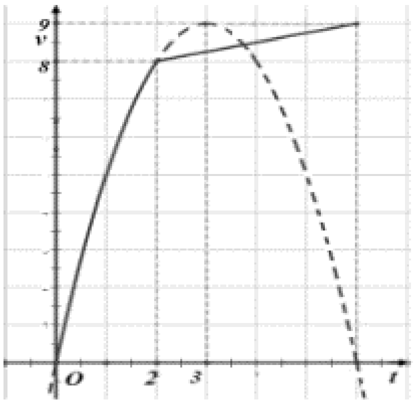
Khi đó phương trình Parabol là $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5; x = 2,5$. Ta có

$$S = \int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2 + 2\right)dx = \left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}$$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là $S \times 700000 = \dfrac{55}{6} \times 700000 \approx 6.417.000$ (đồng).

Câu 14: Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\dfrac{1}{4}$. Quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ là $\dfrac{a}{b}$,$(a,b) = 1$.Khi đó $a - b$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 127

Gọi $(P): y = at^2 + bt + c(a \neq 0)$.

+ Vì Parabol đi qua O(0; 0) và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 0 \\ \dfrac{-b}{2a} = 3 \\ 3^2.a + b.3 + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 6a + b = 0 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -1 \\ b = 6 \end{cases}$$

Ta có phương trình Parabol là $(P): y = v(t) = -t^2 + 6t; \forall t \in [0;2]$

+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y = \dfrac{1}{4}t + m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m = \dfrac{15}{2}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $y = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{15}{2}; \forall t \in [2;6]$

+ Quảng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S = \int_0^6 v(t)\mathrm{dt} = \int_0^2 \left(-t^2 + 6t\right)dt + \int_2^6 \left(\frac{1}{4}t + \frac{15}{2}\right)dt = \frac{130}{3}(km)$$

Câu 15: Một ca nô cao tốc có tốc độ v (km/phút) thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t) = \begin{cases} a.t, & 0 \le t < 2, \\ 2 & 2 \le t < 15, \text{ với } a \in \mathbb{R}. \\ 4 - a.t, & 15 \le t \le 20. \end{cases}$$

Biết quãng đường ca nô di chuyển được trong thời gian 20 phút bằng 28,9 km. Giá trị của a bằng

Lời giải

Trả lời: 0,2

Quãng đường ca nô di chuyển trong thời gian 20 phút bằng:

$$S = \int_0^2 atdt + \int_2^{15} 2dt + \int_{15}^{20} (4 - at)dt = \left.\left(\frac{at^2}{2}\right)\right|_0^2 + \left.2t\right|_2^{15} + \left.\left(4t - \frac{at^2}{2}\right)\right|_{15}^{20}$$
$$= 2a + 26 + (20 - 87,5a) = 46 - 85,5a$$

Vậy $S = 28,9 \Leftrightarrow a = 0,2$

Câu 16: Một vật được ném lên từ độ cao $300m$ với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -9,81t + 29,43(m/s)$. Gọi $h(t)$ (m) là độ cao của vật tại thời điểm $t(s)$. Hỏi khoảng thời gian kể từ khi bắt đầu vật được ném đến lúc chạm đất xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 11,4

Ta có $h(t)=\int v(t)\,dt=\int(-9{,}81t+29{,}43)\,dt=\frac{-9{,}81t^2}{2}+29{,}43t+C$

Theo giả thiết $h(0)=300\Rightarrow c=300$

Vật chạm đất khi $h(t)=0\Leftrightarrow\frac{-9{,}81t^2}{2}+29{,}43t+300=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\approx-5{,}4\\t\approx11{,}4\end{array}\right.$

Do $t>0$ nên $t\approx11{,}4(s)$

Câu 17: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày $(0\le t\le10)$. Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau một ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calcucus 10e, Cengage 2014*). Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 2352

Ta có: $P(t)=\int P'(t)\,dt=\int k\sqrt{t}dt=k.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

Số lượng vi khuẩn của ban đầu của quần thể đó là 500 vi khuẩn hay $P(0)=500\Leftrightarrow C=500.$

Từ đó suy ra: $P(t)=k.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+500.$

Sau một ngày số lượng vi khuẩn của quần thể đó tăng lên thành 600 vi khuẩn hay

$P(1)=600\Leftrightarrow\frac{2}{3}.k+500=600\Leftrightarrow k=150.$

Vậy số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t là $P(t)=100.t^{\frac{3}{2}}+500$

Số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày là: $P(7)=100.7^{\frac{3}{2}}+500\approx2352.$

Câu 18: Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1^\circ C$. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút $(0\le t\le5)$ được cho bởi hàm số $f(t)=3t^2$ ($^\circ C$/phút). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$, tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Lời giải

Trả lời: 28

Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút.

Ta có $T(t)=\int f(t)\,\mathrm{d}t=\int3t^2\mathrm{d}t=t^3+C$.

Vì người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1^\circ C$ nên

$$T(0)=1^\circ \Rightarrow C=1 \Rightarrow T(t)=t^3+1.$$

Vậy nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt là $T(3)=3^3+1=28(^\circ C)$.

Câu 19: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t)=8t+30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng (nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012). Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Lời giải

Trả lời: 226

Ta có $P(t)=\int P'(t)\,\mathrm{d}t=\int(8t+30)\,\mathrm{d}t=4t^2+30t+C.$

Lại có ban đầu người ta thả 100 cá thể gấu mèo:

$$P(0)=100 \Rightarrow C=100 \Rightarrow P(t)=4t^2+30t+100.$$

Vậy số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng là

$$P(3)=4.3^2+30.3+100=226 \text{ cá thể.}$$

Câu 20: Nhằm tri ân người dân Bình Thuận đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp, Tập đoàn Nova đã tổ chức ngày hội “Cảm ơn Bình Thuận” vào ngày 10/07/2024. Trong chuỗi sự kiện đặc biệt này, tất cả người dân địa phương đều được miễn phí vé vào cổng, thỏa thích tận hưởng các trò chơi, tham quan các công trình kỳ thú, ấn tượng tại 05 công viên chủ đề được đầu tư, xây dựng hoành tráng với hàng trăm tiện ích.

Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t)=4t^3-3t^2+200$, trong đó t tính bằng giờ ($0\le t\le 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

Lời giải

Trả lời: 3072

Ta có $B(t)=\int B'(t)dt=t^4-t^3+200t+C, C\in\mathbb{R} \Rightarrow B(2)=1200 \Rightarrow C=792$.

Suy ra $B(t)=t^4-t^3+200t+792$

Sau 6 giờ lượng khách tham quan là $B(6)=3072$ (người).

Câu 21: Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn cho thuê mỗi gian hàng với giá là x triệu đồng $(x>0)$. Khi đó doanh thu của cửa hàng được biểu diễn theo hàm số $T(x)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x)=-10x+200$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu giá thuê cho mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

Lời giải

Trả lời: 20

Ta có: $T(x)=\int T'(x)\mathrm{d}x=\int(-10x+200)\mathrm{d}x=-5x^2+200x+C, C\in\mathbb{R}$.

Khi giá cho thuê mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng nên ta có $T(10)=1800\Rightarrow C=300$.

Vậy $T(x)=-5x^2+200x+300=-5(x-20)^2+2300\le 2300$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=20$.

Suy ra doanh thu cao nhất mà chủ trung tâm thương mại có thể thu về là 2300 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng có giá cho thuê là 20 triệu đồng.

Vậy $x=20$ (triệu đồng).

Câu 22: Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases} 0,5t, & 0\le t<2 \\ 1, & 2\le t<15 \\ 4-0,2t, & 15\le t\le 20 \end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.

Lời giải

Trả lời: 16,5

Quãng đường chuyển động của ca nô là:

$$S=\int_0^{20} v(t)\,dt=\int_0^2 (0,5t)\,dt+\int_2^{15} 1dt+\int_{15}^{20}(4-0,2t)\,dt$$

$$=\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^2+\left.(t)\right|_2^{15}+\left.\left(4t-\frac{1}{10}t^2\right)\right|_{15}^{20}=1+15-2+40-37,5=16,5(km)$$

Câu 23: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\,(m/s)$. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

Lời giải

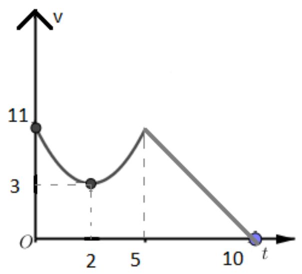
Trả lời: 1280

Vật dừng lại khi $v(t)=0\Leftrightarrow 160-10t=0\Leftrightarrow t=16$.

Như vậy Quãng đường mà vật di chuyển được trong khoảng thời gian tương ứng là:

$$S=\int_0^{16} v(t)\,dt=\int_0^{16}(160-10t)\,dt=\left.\left(160t-5t^2\right)\right|_0^{16}=1280(m)$$

Câu 24: Một chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0 \le t \le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \le t \le 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \le t \le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Lời giải

Trả lời: 65,8

Gọi Parabol $(P): y = at^2 + bt + c$ là phương trình thể hiện vận tốc của chất điểm khi $0 \le t \le 5(s)$

Do (P) có đỉnh $I(2;3)$ và đi qua $A(0;11)$ nên

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ y(0) = 11 \\ y(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow y = 2t^2 - 8t + 11$$

Gọi $d: y = at + b$ là phương trình đường thẳng thể hiện vận tốc của chất điểm khi $5 \le t \le 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5;21)$ và $C(10;0)$ nên:

$$\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{11}{5} \\ b = 22 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-11}{5}t + 22$$

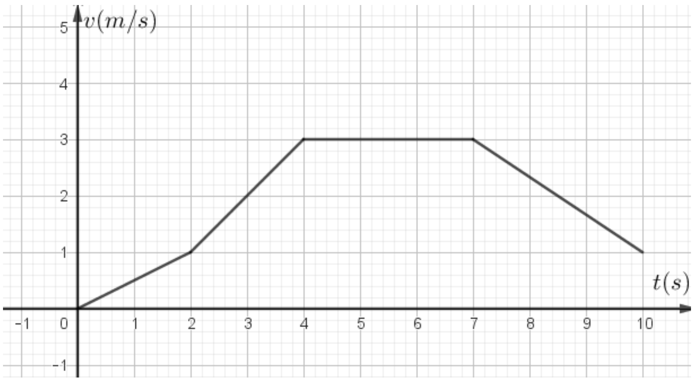
Như vậy phương trình biểu thị vận tốc của chất điểm là $v(t) = \begin{cases} 2t^2 - 8t + 11, & 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{-11}{5}t + 22, & 5 < t \le 10 \end{cases}$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \le t \le 10(s)$ là

$$S = \int_0^{10} v(t)\,dt = \int_0^5 \left(2t^2 - 8t + 11\right)dt + \int_5^{10}\left(\frac{-11}{5}t + 22\right)dt$$

$$= \left.\left(\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 11t\right)\right|_0^5 + \left.\left(\frac{-11t^2}{10} + 22t\right)\right|_5^{10} = \frac{115}{3} + \frac{55}{2} = \frac{395}{6}(m) \approx 65,8(m)$$

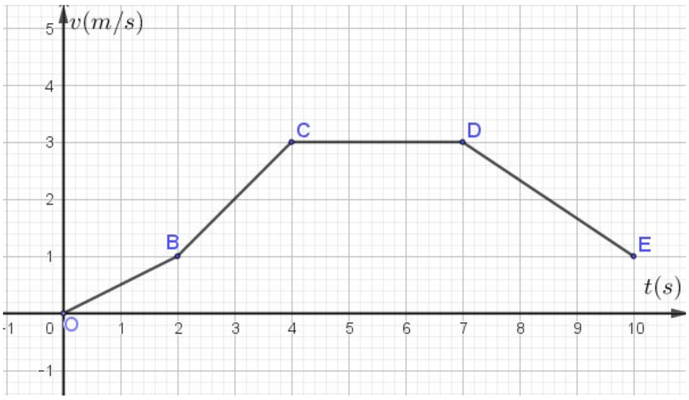
Câu 25: Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động). Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của vật 10 giây đầu tiên.



Lời giải

Trả lời: 2

Theo đồ thị ta có:



PT đường thẳng $OB: v=\frac{1}{2}t$

PT đường thẳng $BC: v=t-1$

PT đường thẳng $CD: v=3$

PT đường thẳng $DE: v=-\frac{2}{3}t+\frac{23}{3}$

Suy ra: $v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t, & 0\le t\le 2\\ t-1, & 2<t\le 4\\ 3, & 4<t\le 7\\ -\frac{2}{3}t+\frac{23}{3}, & 7<t\le 10\end{cases}$.

Quãng đường chuyển động của vật trong 10 giây là:

$$S=\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t+\int_2^4 v(t)\,\mathrm{d}t+\int_4^7 v(t)\,\mathrm{d}t+\int_7^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$S=\int_0^2 \frac{1}{2}t\mathrm{d}t+\int_2^4 (t-1)\,\mathrm{d}t+\int_4^7 3\mathrm{d}t+\int_7^{10}\left(-\frac{2}{3}t+\frac{23}{3}\right)\mathrm{d}t=20\ (m)$$

Vận tốc trung bình của chuyển động là: $v_{tb}=\frac{S}{10}=2(m/s)$

Câu 26: Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc $v(\text{m/phut})$ của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số

$$v(t)=\begin{cases}100t, & 0\le t\le 10\\ 20t+800, & 10<t\le 20\\ -10\,\mathrm{t}+1400, & 20<t\le 30\end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút đã khảo sát.

Lời giải

Trả lời: 917

Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là:

$$S=\int_0^{30} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t+\int_{10}^{20} v(t)\,\mathrm{d}t+\int_{20}^{30} v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$S=\int_0^{10} 100t\,\mathrm{d}t+\int_{10}^{20}(20t+800)\,\mathrm{d}t+\int_{20}^{30}(-10t+1400)\,\mathrm{d}t=27500(m)$$

Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là: $v_{tb}=\dfrac{S}{30}=\dfrac{2750}{3}\approx 917$ (m/phút).

CHƯƠNG III NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

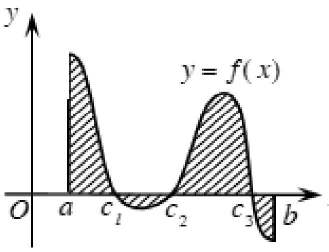
BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I LÝ THUYẾT.

1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

a) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$

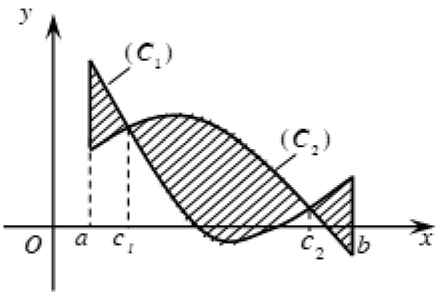
Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b \quad (a < b)$ được tính bởi công thức $S = \int_a^b |f(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

b) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a$**,** $x = b$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx}$$

Chú ý: Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \left|\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx\right|$$

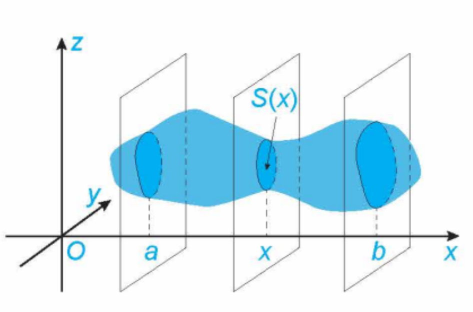
2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

a) Tính thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi $\mathcal{B}$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$, $x = b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó thể tích V của phần vật thể $\mathcal{B}$ được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$



Hình 4.21

b) Thể tích khối tròn xoay

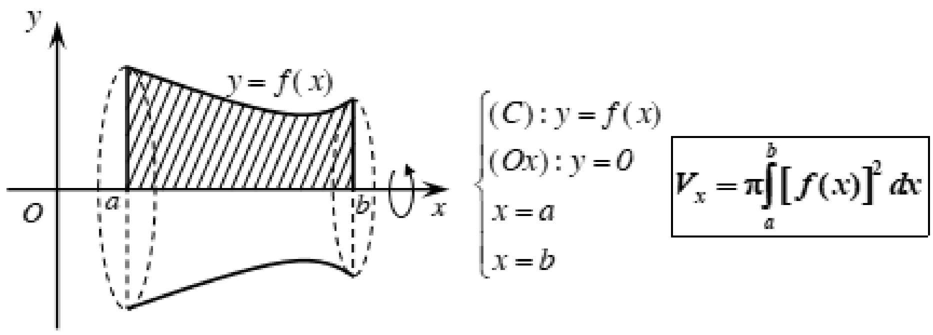
Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Quay D quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là *khối tròn xoay.*

Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;b]$ ta được mặt cắt là một hình tròn có bán kính $f(x)$ và diện tích $S(x) = \pi f^2(x)$

Vậy khối tròn có thể tích là:

$$V_N = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$



II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Dạng 1: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), Ox, x = a, x = b.$

Phương pháp Giải theo phương pháp tự luận: Sử dụng tính chất cơ bản của tích phân để tính tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối.

+) Tính chất: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó, ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Phương pháp trắc nghiệm:

- Xác định các yếu tố cần thiết như công thức $y = f(x), Ox, x = a, x = b.$
- Sử dụng chức năng tính tích phân có sẵn trong máy tính Casio để tính.

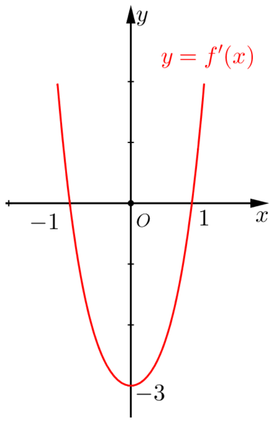
Chú ý: Nếu đề bài chưa cho $x=a, x=b$ thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=0$ để tìm cận tích phân.

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=3$

Câu 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=1-\frac{1}{x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=\frac{1}{2}, x=2$ có diện tích là

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x^2-x^4$ và trục hoành

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, (a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



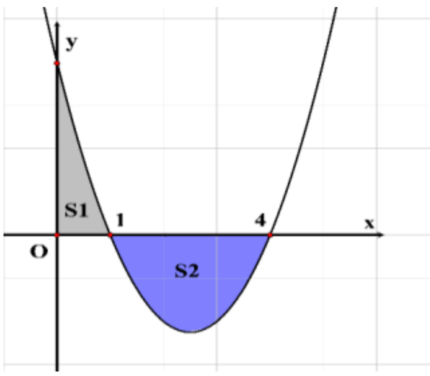
Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos^2 x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=\pi$ là.

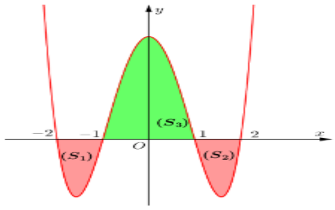
Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-4x$, trục hoành, đường thẳng $x=-2$ và $x=4$ là

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=\frac{x-1}{x}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$ là.

Câu 8: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ như hình vẽ và có diện tích $S_1=\frac{11}{6}$, $S_2=\frac{9}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^4 f(x)dx$



Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;\ 2\right]$ như hình vẽ ở bên và có diện tích $S_1=S_2=\dfrac{22}{15},\ S_3=\dfrac{76}{15}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2}f\left(x\right)dx$



Câu 10: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1,\ x=3$ là.

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x+1,$ trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\dfrac{7\pi}{6}$ là.

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=2$ là.

Câu 13: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ và trục Ox

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2$ và trục hoành là.

Câu 15: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=-x^2+2x$ và trục hoành là:

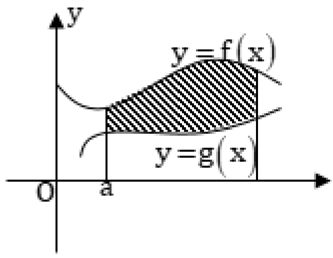
Câu 16: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2+x-5=0,\ x+y-3=0$

Câu 17: Gọi $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng $\left(d\right)$ đi qua điểm $A\left(0;\ 4\right)$ có hệ số góc k chia thành hai phần có diện tích bằng nhau.

2. Dạng 2: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$$y=f(x),y=g(x),x=a,x=b.$$

Phương pháp giải:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $\left(C_1\right):y=f\left(x\right)\left(C_2\right):y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=a,x=b$ được xác định bởi công thức: $S=\int_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$.

Chú ý: Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

* Giải phương trình: $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ tìm nghiệm $x_1,x_2,...,x_n\in\left(a;b\right)$, $\left(x_1<x_2<...<x_n\right)$.

Tính: $S=\int_a^{x_1}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx+\int_{x_1}^{x_2}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx+...+\int_{x_n}^{b}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$

$=\left|\int_a^{x_1}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx\right|$.

Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Câu 18: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x^2$ và $y=x$ và các đường thẳng $x=-2, x=1$

Câu 19: . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3+x$; $y=2x$ và các đường thẳng $x=-1, x=1$ được xác định bởi công thức.

Câu 20: Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=2x+3$ và hai đường $x=0,\ \ x=2$. Công thức nào sau đây tính diện tích hình phẳng (H)?

Câu 21: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^3, y=2-x^2, x=0$.

Câu 22: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P): y=x^2-2x+2,$ trục tung, tiếp tuyến của (P) tại $M(3;5)$ là:

Câu 23: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol: $y=x^2+1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2;5)$ và trục Oy.

3. Dạng 3: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x), y=g(x)$.

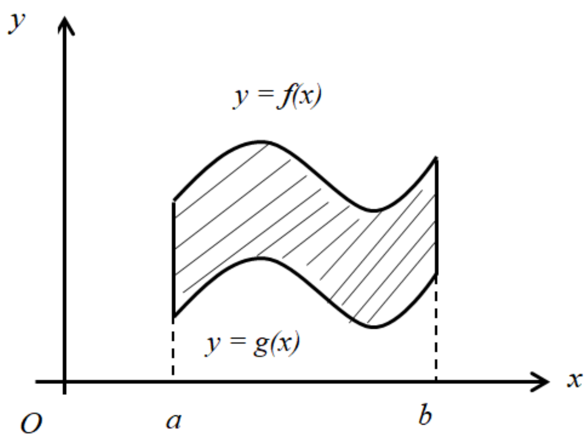
Phương pháp giải:

Dạng: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là $S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$. Trong đó α,β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x)=g(x)$ $(a\le\alpha<\beta\le b)$

Cách giải:

Bước 1: Giải phương trình $f(x)=g(x)$ tìm các giá trị α,β.

Bước 2: Tính $S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$.



Chú ý: Nếu $f(x)\ge g(x)\forall x\in[a;b]$ thì $S=\int\limits_{a}^{b}[f(x)-g(x)]dx$

Câu 24: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2; y=x+2$ bằng?

Câu 25: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(\mathrm{P}): \mathrm{y}=\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $\mathrm{A}(1;2),\ \mathrm{B}(4;5)$ là:

Câu 26: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x+3, y=x^2-4x+3$ là:

Câu 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3, y = 4x$ là:

Câu 28: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 12x$ và $y = x^2$ là:

Câu 29: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1, y = x^4 + x - 1$ là:

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x, y = 2x - 2$ là:

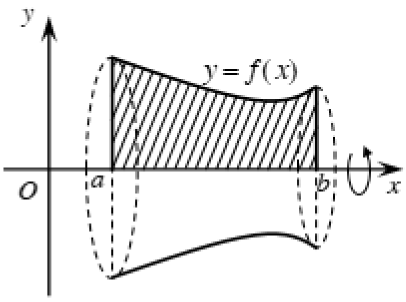
Câu 31: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2 - 2y + x = 0$, $x + y = 0$ là:

Câu 32: Gọi S là diện tích mặt phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $y = kx + 1$ với k là tham số thực. Tìm k để S nhỏ nhất.

THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

Dạng 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

Phương pháp giải:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Câu 33: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox.

Câu 34: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = 0; x = 2$. Tính thể tích V ủa khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox.

Câu 35: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2, y = 0$. Tính thể tích V của khối tròn xoay hình thành khi cho (H) quay xung quanh Ox

Câu 36: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = a\,(a > 1)$ quay xung quanh trục Ox

Câu 37: Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{\frac{x}{2}}$ trục Ox và hai đường thẳng $x = 0,\ x = 1$. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình (D) quay quanh trục Ox.

Câu 38: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 0$ và $x = 1$.

Dạng 2. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x)$, $x = a, x = b$ khi quay quanh trục Ox được tính bởi công thức: $V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$.

(chú ý là đồ thị của 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ nằm về cùng 1 phía đối với trục hoành)

Câu 39: Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

Câu 40: Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2$ quay quanh trục Ox.

Câu 41: Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành phần hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ là:

CHƯƠNG III NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

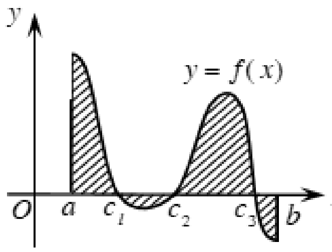
BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I. LÝ THUYẾT.

1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

a) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$ được tính bởi công thức $S = \int_a^b |f(x)|dx$

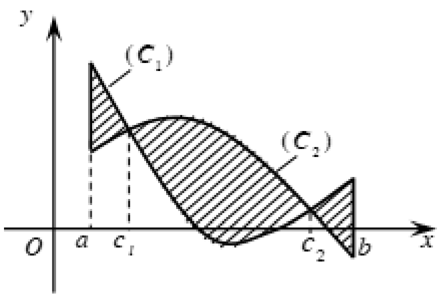


$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

b) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx}$$

Chú ý: Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right|$$

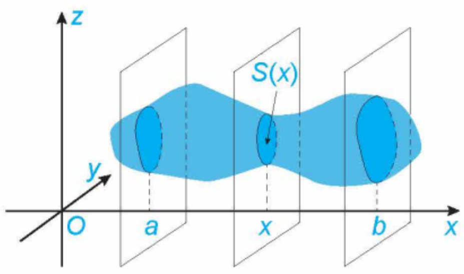
2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

a) Tính thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi $\mathcal{B}$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$, $x = b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó thể tích V của phần vật thể $\mathcal{B}$ được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$



Hình 4.21

b) Thể tích khối tròn xoay

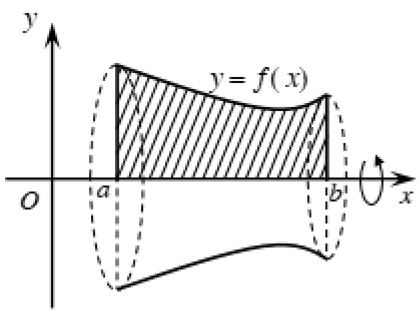
Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Quay D quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là *khối tròn xoay.*

Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;b]$ ta được mặt cắt là một hình tròn có bán kính $f(x)$ và diện tích $S(x) = \pi f^2(x)$

Vậy khối tròn có thể tích là:

$$V_N = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Dạng 1: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), Ox, x = a, x = b.$

Phương pháp Giải theo phương pháp tự luận: Sử dụng tính chất cơ bản của tích phân để tính tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối.

+) Tính chất: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và a,b,c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó, ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Phương pháp trắc nghiệm:

- Xác định các yếu tố cần thiết như công thức $y = f(x), Ox, x = a, x = b.$
- Sử dụng chức năng tính tích phân có sẵn trong máy tính Casio để tính.

Chú ý: Nếu đề bài chưa cho $x = a, x = b$ *thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm* $f(x) = 0$ *để tìm cận tích phân.*

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{-1}^{3} \left| x^4 \right| dx = \int_{-1}^{3} x^4 dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{244}{5}$

Giải theo phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng máy tính Casio tính tích phân $S = \int_{-1}^{3} \left| x^4 \right| dx = \frac{244}{5}$

Câu 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1 - \frac{1}{x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}, x = 2$ có diện tích là

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\left| x^2 - 1 \right|}{x^2} dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2 - 1}{x^2} dx + \int_{1}^{2} \frac{x^2 - 1}{x^2} dx$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx + \int_{1}^{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = -\left(x + \frac{1}{x} \right) \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} + \left(x + \frac{1}{x} \right) \Bigg|_{1}^{2} = 1$$

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án D*

Giải theo phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng máy tính Casio tính tích phân $S = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx = 1$

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x^4$ và trục hoành

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là:

$$2x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2 \left(2 - x^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \left| 2x^2 - x^4 \right| dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} \left| 2x^2 - x^4 \right| dx = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \left(2x^2 - x^4 \right) dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} \left(2x^2 - x^4 \right) dx$$

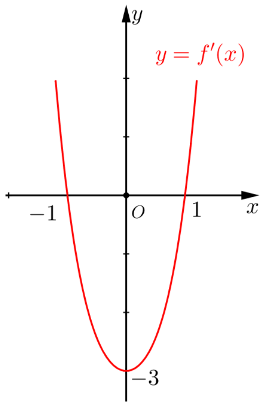
$$= \left. \left(2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \right|_{-\sqrt{2}}^{0} + \left. \left(2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \right|_{0}^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

Giải theo phương pháp trắc nghiệm

+)Tìm hoành độ giao điểm tương tự như trên

+) Sử dụng máy tính Casio tính tích phân $S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left| 2x^2 - x^4 \right| dx$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 3)dx = x^3 - 3x + C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Suy ra $f(-1) = 4 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow (C): y = x^3 - 3x + 2$

Xét phương trình $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $\int_{-2}^{1} \left| x^3 - 3x + 2 \right| dx = \dfrac{27}{4}$.

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos^2 x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = \pi$ là.

Lời giải

Diện tích S cần tìm: $S = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \dfrac{1 + \cos 2x}{2} dx = \dfrac{1}{2} x \Big|_0^{\pi} + \dfrac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}$.

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và $x = 4$ là

Lời giải

Diện tích cần tìm $S = \int_{-2}^{4} \left| x^3 - 4x \right| dx$

Ta có: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

Vậy $S = \int_{-2}^{0} \left| x^3 - 4x \right| dx + \int_0^2 \left| x^3 - 4x \right| dx + \int_2^4 \left| x^3 - 4x \right| dx$

$= \left| \left(\dfrac{x^4}{4} - 4\dfrac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-2}^{0} \right| + \left| \left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^2}{2} \right) \Bigg|_0^2 \right| + \left| \left(\dfrac{x^4}{4} - 4\dfrac{x^2}{2} \right) \Bigg|_2^4 \right| = 44$.

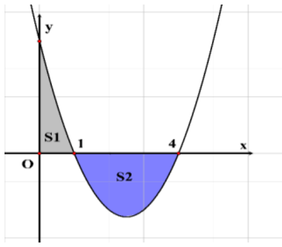
Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$ là.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x-1}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$

Suy ra $S=\int\limits_1^2\left|\dfrac{x-1}{x}\right|dx=\left|\int\limits_1^2\dfrac{x-1}{x}dx\right|=\left|\int\limits_1^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right|=\left|(x-\ln x)\Big|_1^2\right|=1-\ln 2$.

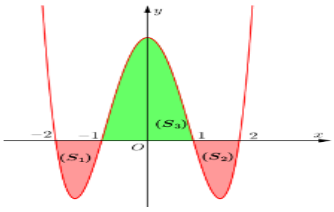
Câu 8: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;\,4]$ như hình vẽ và có diện tích $S_1=\dfrac{11}{6}$, $S_2=\dfrac{9}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 f(x)dx$



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $I=\int\limits_0^4 f(x)dx=S_1-S_2=\dfrac{11}{6}-\dfrac{9}{2}=-\dfrac{8}{3}$.

Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;\,2]$ như hình vẽ ở bên và có diện tích $S_1=S_2=\dfrac{22}{15}$, $S_3=\dfrac{76}{15}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^2 f(x)dx$



Lời giải

Ta có $I=\int\limits_{-2}^2 f(x)dx=S_3-S_1-S_2=\dfrac{76}{15}-2.\dfrac{22}{15}=\dfrac{32}{15}$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=3$ là.

Lời giải

Ta thấy $x^2\ge 0\;\;\forall x$ nên diện tích S cần tìm bằng $S=\int_{-1}^3\left|x^2\right|dx=\int_{-1}^0 x^2dx+\int_0^3 x^2dx=\dfrac{28}{3}$.

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\dfrac{7\pi}{6}$ là.

Lời giải

Ta thấy $\sin x+1\geq 0\ \ \forall x\in\left(0;\ \dfrac{7\pi}{6}\right)$ nên diện tích S cần tìm bằng:

$$S=\int_0^{\frac{7\pi}{6}}\left|\sin x+1\right|dx=\int_0^{\frac{7\pi}{6}}\left(\sin x+1\right)dx\ =\left(-\cos\frac{7\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}\right)-\left(-\cos 0+0\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7\pi}{6}+1.$$

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=2$ là.

Lời giải

Ta có: $e^x=0\Leftrightarrow x=1$. Vậy $S=\int_0^2\left|e^x\right|dx=\left|e^x\ |_0^2\right|=e^2-1$.

Câu 13: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ và trục Ox

Lời giải

PT hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ và trục Ox là $x^4-2x^2+1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Suy ra diện tích hình phẳng cần tính bằng $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4-2x^2+1\right)dx=\dfrac{16}{15}$.

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2$ và trục hoành là.

Lời giải

Đặt $(C):y=-x^3+3x^2$. Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

Khi đó: $S=\int\limits_0^3\left|-x^3+3x^2\right|dx=\left|\int\limits_0^3\left(-x^3+3x^2\right)dx\right|=\left|\left(-\dfrac{x^4}{4}+x^3\right)\Big|_0^3\right|=\dfrac{27}{4}$.

Câu 15: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=-x^2+2x$ và trục hoành là:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Ta có: $S=\int\limits_0^2\left|-x^2+2x\right|dx=\int\limits_0^2\left(-x^2+2x\right)dx=\left(-\dfrac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2=\dfrac{4}{3}$

Câu 16: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2+x-5=0,\ x+y-3=0$

Lời giải

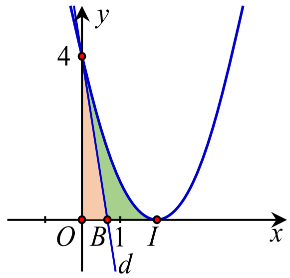
Hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases}y^2+x-5=0\\x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-y^2\\x=3-y\end{cases}$

Xét phương trình: $5-y^2=3-y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=2\end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|y^2-y-2\right|dy=\left(\dfrac{y^3}{3}-\dfrac{y^2}{2}-2y\right)\Big|_{-1}^{2}=4,5$

Câu 17: Gọi $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng $\left(d\right)$ đi qua điểm $A\left(0;\ 4\right)$ có hệ số góc k chia thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải



Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$ và trục hoành là:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành

là: $S = \int_0^2 \left|x^2 - 4x + 4\right| dx = \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\right|_0^2 = \frac{8}{3}$.

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k có dạng: $y = kx + 4$.

Gọi B là giao điểm của (d) và trục hoành. Khi đó $B\left(-\frac{4}{k};\ 0\right)$.

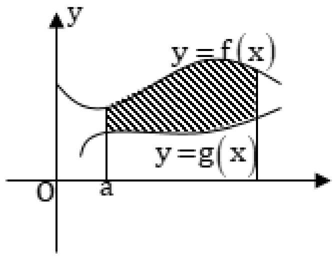
Đường thẳng (d) chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau khi $\mathrm{B} \in \mathrm{OI}$ và

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}S = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < -\frac{4}{k} < 2 \\ S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.4.\frac{-4}{k} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -2 \\ k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow k = -6.$$

2. Dạng 2: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$$y = f(x), y = g(x), x = a, x = b.$$

Phương pháp giải:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $(C_1): y = f(x)$ $(C_2): y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định bởi công thức: $S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx$.

Chú ý: Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

* Giải phương trình: $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$, $(x_1 < x_2 < ... < x_n)$.

Tính: $S = \int_a^{x_1} \left|f(x) - g(x)\right| dx + \int_{x_1}^{x_2} \left|f(x) - g(x)\right| dx + ... + \int_{x_n}^b \left|f(x) - g(x)\right| dx$

$= \left|\int_a^{x_1} \left(f(x) - g(x)\right) dx\right| + ... + \left|\int_{x_n}^b \left(f(x) - g(x)\right) dx\right|$.

Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Câu 18: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và $y = x$ và các đường thẳng $x = -2, x = 1$

Lời giải

Diện tích hình phẳng S = $\int_{-2}^{1}\left|-x^2-x+2\right|dx=\left|\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\right|=\frac{9}{2}$

Câu 19: . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3+x;\ \ y=2x$ và các đường thẳng $x=-1,x=1$ được xác định bởi công thức.

Lời giải

Giải theo phương pháp tự luận: GPT hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x-x^3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

$$S=\int_{-1}^{1}\left|x-x^3\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|x-x^3\right|dx+\int_{0}^{1}\left|x-x^3\right|dx=\left|\int_{-1}^{0}(x-x^3)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x-x^3)dx\right|=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)dx$$

Câu 20: Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=2x+3$ và hai đường $x=0,\ \ x=2$. Công thức nào sau đây tính diện tích hình phẳng (H)?

Lời giải

Áp dụng lý thuyết: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $(C_1):y=f(x)$, $(C_2):y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a,x=b$ được xác định bởi công thức:

$S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$.

Khi đó diện tích hình phẳng H = $\int_{0}^{2}\left|x^2-2x-3\right|dx$

Câu 21: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^3, y=2-x^2, x=0$.

Lời giải

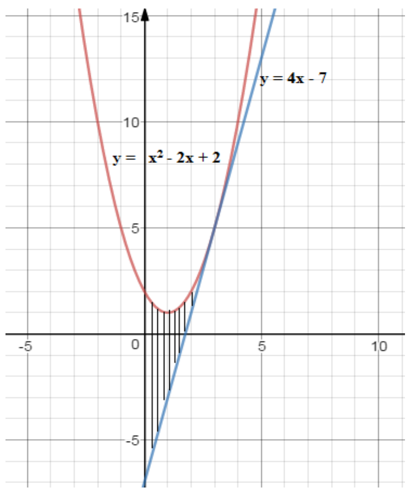
Ta có $x^3=2-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2=0\Leftrightarrow x=1$

$\Rightarrow S=\int_{0}^{1}\left|x^3+x^2-2\right|dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-2x\right)\Big|_0^1=\frac{17}{12}$.

Câu 22: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P):y=x^2-2x+2,$ trục tung, tiếp tuyến của (P) tại $M(3;5)$ là:

Lời giải

Ta có $y'=2x-2\Rightarrow y'(3)=4$



Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y-5=4(x-3)$ hay $y=4x-7$

Diện tích cần tìm là: $S = \int_0^3 \left[(x-2x+2)-(4x-7)\right]dx$

$= \int_0^3 \left(x^2-6x+9\right)dx = \int_0^3 (x-3)^2 dx = \left.\dfrac{(x-3)^3}{3}\right|_0^3 = 9.$

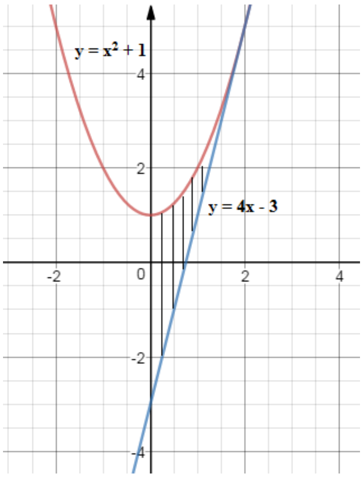
Câu 23: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol: $y = x^2+1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2;5)$ và trục Oy.

Lời giải

$y' = f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$

Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(2;5) \in (P)$ là: $y-5 = 4(x-2) \Leftrightarrow y = 4x-3$

$S = \int\limits_0^2 \left(x^2+1-4x+3\right)dx = \int\limits_0^2 \left(x^2-4x+4\right)dx = \int\limits_0^2 (x-2)^2\,dx$



Đặt $u = x-2 \Rightarrow du = dx$
Đổi cận $x = 2 \Rightarrow u = 0$; $x = 0 \Rightarrow u = -2$

Do đó: $S = \int\limits_{-2}^{0} u^2 du = \left.\dfrac{u^3}{3}\right|_{-2}^{0} = \dfrac{8}{3}$ đvdt.

3. Dạng 3: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x)$.

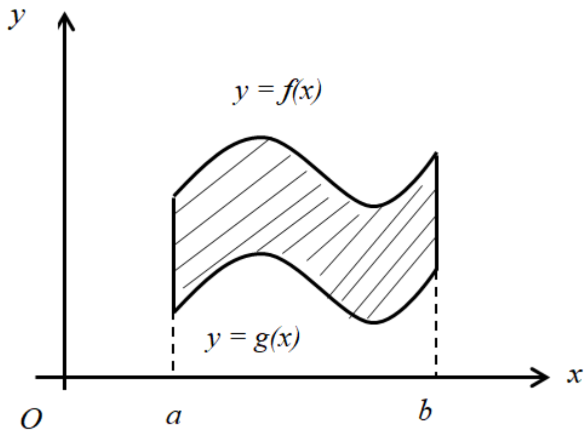
Phương pháp giải:

Dạng: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là $S = \int\limits_\alpha^\beta \left|f(x)-g(x)\right|dx$. Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$

Cách giải:

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm các giá trị α, β.

Bước 2: Tính $S = \int\limits_\alpha^\beta \left|f(x)-g(x)\right|dx$.



Chú ý: Nếu $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a;b]$ thì $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Câu 24: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = x + 2$ bằng?

Lời giải

Ta có $x^2 = x + 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Do đó: $S = \int_{-1}^{2} |x^2 - x - 2|dx = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)dx = \frac{9}{2}$

Câu 25: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(\mathrm{P}): \mathrm{y} = \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $\mathrm{A}(1;2)$, $\mathrm{B}(4;5)$ là:

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại $A(1;2)$ là $y = -2x + 4$

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại $B(4;5)$ là $y = 4x - 11$

Giao của hai tiếp tuyến có hoành độ $x = \frac{5}{2}$

Xét phương trình $x^2 - 4x + 5 = -2x + 4 \Rightarrow x = 1$

Xét phương trình $x^2 - 4x + 5 = 4x - 11 \Rightarrow x = 4$

Do đó: $S = \int_1^{\frac{5}{2}} |x^2 - 4x + 5 + 2x - 4|dx + \int_{\frac{5}{2}}^{4} |x^2 - 4x + 5 - 4x + 11|dx = \frac{9}{4}$

Câu 26: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x + 3, y = x^2 - 4x + 3$ là:

Lời giải

Ta có: $x + 3 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Do đó: $S = \int_0^5 |x^2 - 5x|dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^5 = \frac{125}{6}$.

Câu 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3, y = 4x$ là:

Lời giải

Ta có: $x^3 = 4x \Leftrightarrow x = -2, x = 0, x = 2$

Suy ra: $S = \left|\int_{-2}^{0}\left(x^3 - 4x\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{2}\left(x^3 - 4x\right)dx\right| = 8$

Nếu trong đoạn $[\alpha;\beta]$ phương trình $f(x) = g(x)$ không còn nghiệm nào nữa thì ta có thể dùng công thức $S = \int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x) - g(x)\right|dx = \left|\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x) - g(x)\right]dx\right|$.

Câu 28: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 12x$ và $y = x^2$ là:

Lời giải

Ta có: $x^3 - 12x = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Do đó: $S = \int_{-3}^{4}\left|x^3 - 12x - x^2\right|dx = \int_{-3}^{0}\left|x^3 - 12x - x^2\right|dx + \int_{0}^{4}\left|x^3 - 12x - x^2\right|dx$

$= \left|\int_{-3}^{0}\left(x^3 - 12x - x^2\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{4}\left(x^3 - 12x - x^2\right)dx\right| = \frac{937}{12}$.

Câu 29: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1, y = x^4 + x - 1$ là:

Lời giải

Ta có: $x^2 + x - 1 = x^4 + x - 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Do đó: $S = \int_{-1}^{1}\left|x^4 - x^2\right|dx = \left|2\int_{0}^{1}\left(x^4 - x^2\right)dx\right| = \left|2\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1\right| = \frac{4}{15}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x, y = 2x - 2$ là:

Lời giải

Ta có: $(2x - 2)^2 = 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Do đó: $S = 2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sqrt{2x}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\sqrt{2x} - 2x + 2\right]dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt[3]{x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} - x^2 + 2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{9}{4}$.

Câu 31: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2 - 2y + x = 0$, $x + y = 0$ là:

Lời giải

Biến đổi về hàm số theo biến số y là: $x = -y^2 + 2y, x = -y$

Ta có: $-y^2 + 2y - (-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 3 \end{array}\right.$

Do đó: $S = \int_{0}^{3}\left|-y^2 + 3y\right|dy = \int_{0}^{3}\left(-y^2 + 3y\right)dy = \frac{9}{2}$.

Câu 32: Gọi S là diện tích mặt phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $y = kx + 1$ với k là tham số thực. Tìm k để S nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $x^2 + 2x - 3 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - (k-2)x - 4 = 0$

Do $ac = -4 < 0$ PT trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = k - 2 \\ x_1.x_2 = -4 \end{cases}$

Giả sử $x_1 < x_2 \Rightarrow S = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(x^2 - (k-2)x - 4\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{k-2}{2}x^2 - 4x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$

$= \left|\frac{1}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) - \frac{k-2}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) - 4\left(x_2 - x_1\right)\right| = \left|\left(x_2 - x_1\right)\right|\left|\frac{1}{3}\left[x_1^2 + x_2^2 + x_1.x_2\right] - \frac{k-2}{2}\left(x_1 + x_2\right) - 4\right|$

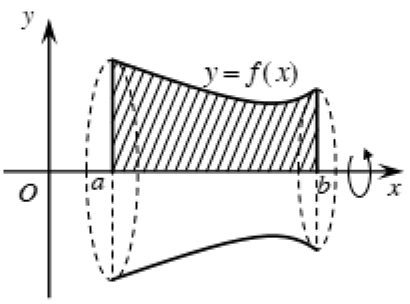
$= \sqrt{\left(x_2 + x_1\right)^2 - 4x_1.x_2}\left|\frac{1}{3}\left[\left(x_2 + x_1\right)^2 - x_1.x_2\right] - \frac{k-2}{2}\left(x_1 + x_2\right) - 4\right| = \sqrt{(k-2)^2 + 16}\left|\frac{(k-2)^2}{6} + \frac{8}{3}\right|$

Vậy S nhỏ nhất khi $k = 2$.

THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

Dạng 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:

Phương pháp giải:



$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ $\boxed{V_x = \pi\int\limits_a^b [f(x)]^2 dx}$

Câu 33: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox.

Lời giải

Ta có: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow V = \pi\int\limits_0^2\left(2x - x^2\right)^2 dx$

$= \pi\int\limits_0^2\left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}$

Câu 34: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = 0; x = 2$. Tính thể tích V ủa khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox.

Lời giải

Thể tích cần tính là $V = \pi\int\limits_0^2 x^4 dx = \pi.\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$

Câu 35: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2, y = 0$. Tính thể tích V của khối tròn xoay hình thành khi cho (H) quay xung quanh Ox

Lời giải

PT hoành độ giao điểm các đồ thị là $4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$

Suy ra thể tích cần tính bằng $V=\pi\int\limits_{-2}^{3}\left(4-x^2\right)^2dx=\dfrac{512\pi}{15}(vtt)$

Câu 36: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{x}, y=0, x=1, x=a\,(a>1)$ quay xung quanh trục Ox

Lời giải

Ta có: $V=\pi\int\limits_{1}^{a}\dfrac{1}{x^2}dx=-\pi\left.\dfrac{1}{x}\right|_1^a=\pi\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$.

Câu 37: Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ trục Ox và hai đường thẳng $x=0,\ x=1$. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình (D) quay quanh trục Ox.

Lời giải

Thể tích của khối tròn xoay: $V=\pi\int\limits_0^1\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x$.

Câu 38: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x, y=0, x=0$ và $x=1$.

Lời giải

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{8\pi}{15}.$$

Dạng 2. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=g(x)$, $x=a, x=b$ **khi quay quanh trục** Ox **được tính bởi công thức:** $V=\pi\int\limits_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$.

(chú ý là đồ thị của 2 hàm số $y=f(x), y=g(x)$ nằm về cùng 1 phía đối với trục hoành)

Câu 39: Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Do $2x\ge x^2$ với $x\in(0;2)$ nên $V=V_1-V_2$ trong đó V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $d: y=2x$, trục Ox, đường thẳng $x=2$ và trục Ox quay quanh trục Ox; V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P), trục Ox, đường thẳng $x=2$ và trục Ox quay quanh trục Ox.

Câu 40: Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2-2x$ và $y=-x^2$ quay quanh trục Ox.

Lời giải

Xét $x^2-2x=-x^2 \Rightarrow x=0;x=1$. $V_1=\pi\int_0^1\left(x^2-2x\right)^2dx=\frac{8\pi}{15}$

$V_2=\pi\int_0^1\left(-x^2\right)^2dx=\frac{1}{5}\pi$.

$V=\frac{8\pi}{15}-\frac{1}{5}\pi=\frac{\pi}{3}$.

Hoặc sử dụng trực tiếp $V=\pi\int_0^1\left[\left(x^2-2x\right)^2-\left(-x^2\right)^2\right]dx=\frac{8\pi}{15}-\frac{1}{5}\pi=\frac{\pi}{3}$

Câu 41: Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành phần hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$ là:

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là thể tích được tạo bởi hình phẳng có diện tích là phần gạch chéo trong hình bên khi quay quanh trục hoành.

Khi đó: $V=\pi\int_0^1\left(x-x^4\right)dx=\frac{3\pi}{10}$.

CHƯƠNG III

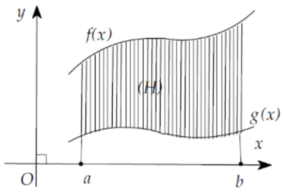
NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

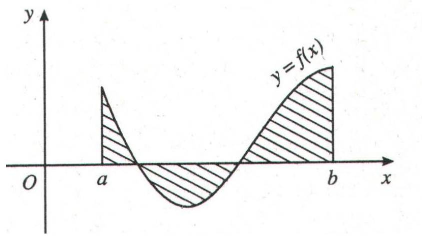
III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

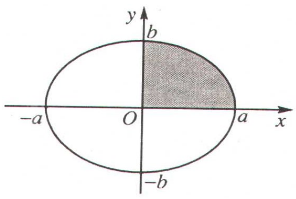
DẠNG 1. ỨNG DỤNG TICH PHAN DỂ TIM DIỆN TICH

① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\(C_2): y = g(x)\\x = a,\ x = b\ (a < b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x}$.



Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\(C_2): Ox: y = 0\\x = a,\ x = b\ (a < b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S = \int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x}$.





$\boxed{S_{\text{elip}} = \pi ab.}$

$(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H): \{y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b\ (a < b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}} \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x =$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H): \{y = f(x),\ y = g(x)\}$

Giải $f(x) = g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1, \ldots, x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}} \int_{x_1}^{x_i} \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x$.

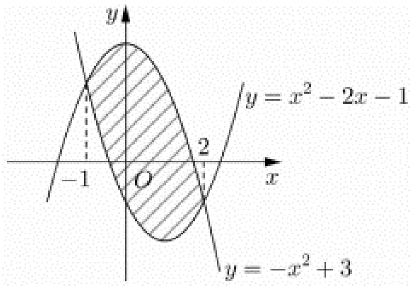
Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm, chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$ ta nên vẽ hình.

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $S=-\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_b^a\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

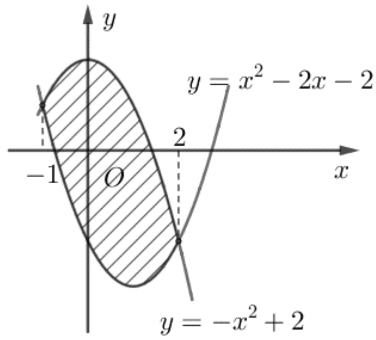
Câu 2: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$.

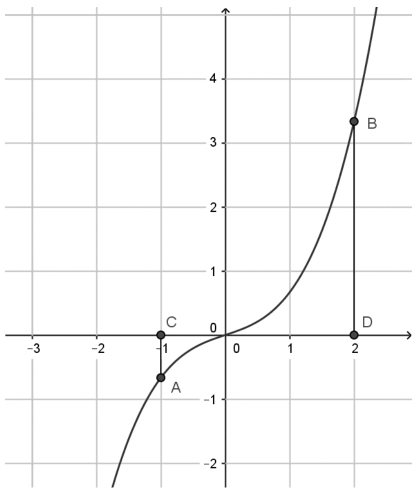
Câu 3: Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

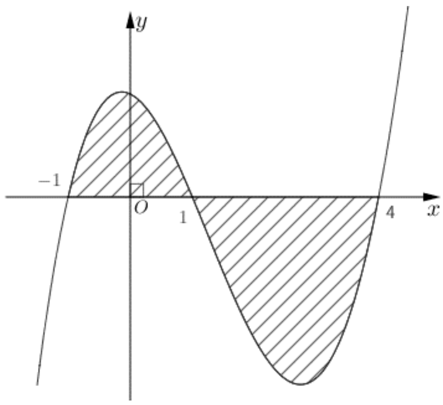
Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt $a=\int\limits_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=b-a$ **B.** $S=b+a$

C. $S=-b+a$ **D.** $S=-b-a$

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right), y=0, x=-1$ và $x=4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



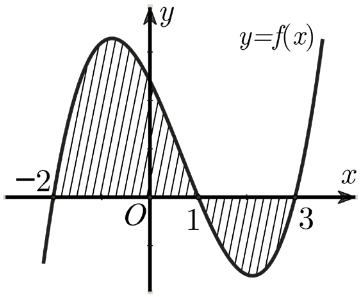
A. $S=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y=f\left(x\right)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

C. $S=-\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

Câu 7: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\pi\int\limits_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_{0}^{1}\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

A. $\frac{125\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-2$ và $y=3x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

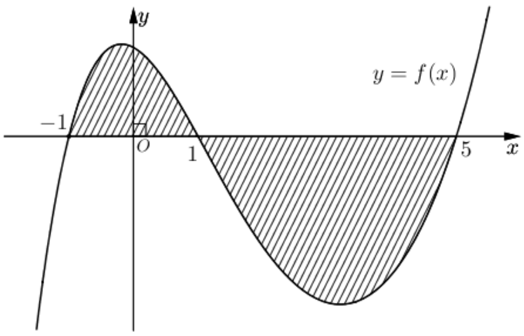
Câu 12: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int\limits_{0}^{2}2^x\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int\limits_{0}^{2}2^x\mathrm{d}x$ **C.** $S=\pi\int\limits_{0}^{2}2^{2x}\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int\limits_{0}^{2}2^{2x}\mathrm{d}x$

Câu 13: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_{0}^{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **B.** $S=\pi\int\limits_{0}^{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **C.** $S=\pi\int\limits_{0}^{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **D.** $S=\pi\int\limits_{0}^{2}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=5$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

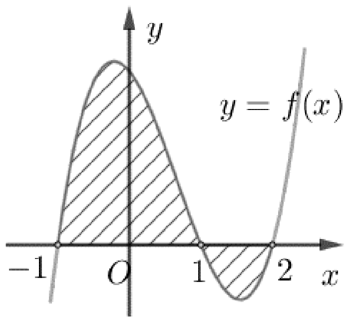
A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}$.

B. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}$.

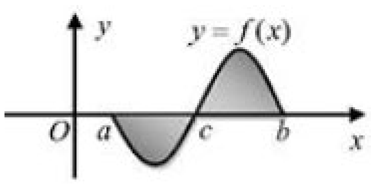
C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}$.

D. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}$.

Câu 16: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Câu 17: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$. Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{a}^{b} f(x)dx$.

B. $S=\left|\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx\right|$.

C. $S=-\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx$.

D. $S=\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx$.

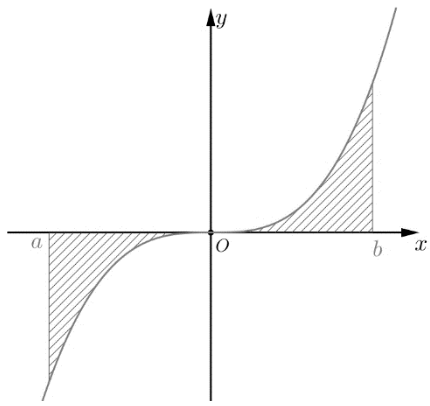
Câu 18: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x$, $y = x$. Tính S.

A. $S = 4$. **B.** $S = 8$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 0$.

Câu 19: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 3^x dx$. **B.** $S = \pi\int_0^2 3^{2x} dx$. **C.** $S = \pi\int_0^2 3^x dx$. **D.** $S = \int_0^2 3^{2x} dx$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S_D = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S_D = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 21: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

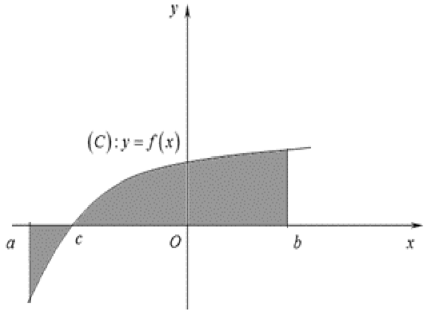
Câu 22: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

A. $\left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int_a^b |f(x) + g(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $\int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

Câu 23: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox

A. 11. **B.** $\frac{34}{3}$. **C.** $\frac{31}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 24: Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S = -\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Câu 25: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1, x = -1, x = 2$ và trục hoành.

A. $S = 6$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = \frac{13}{6}$. **D.** $S = 13$.

Câu 26: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5$, $y = 6x$, $x = 0$, $x = 1$. Tính S.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 27: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S = 1 - \ln\frac{4}{3}$ **B.** $S = 4\ln\frac{4}{3}$ **C.** $S = 4\ln\frac{4}{3} - 1$ **D.** $S = \ln\frac{4}{3} - 1$

Câu 28: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 1.

Câu 29: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $2\ln 2 - 1$. **B.** $\ln 2 + 1$. **C.** $\ln 2 - 1$. **D.** $2\ln 2 + 1$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 31: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

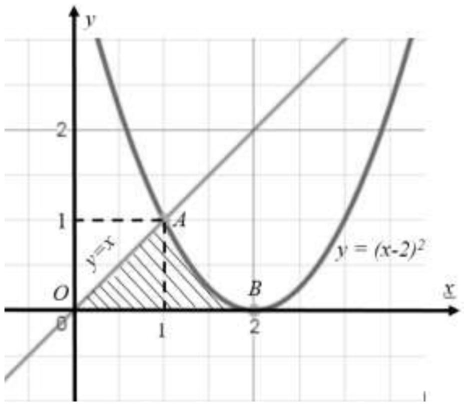
Câu 32: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 3x - 2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{6}$

Câu 33: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$

Câu 34: Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên.

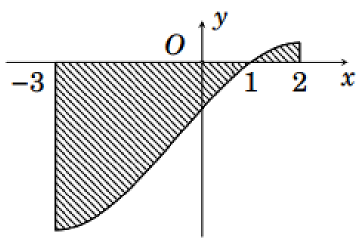


A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 35: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\frac{2008}{3}$.

Câu 36: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$. Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Câu 37: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$ là :

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{23}{15}$

Câu 38: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 10

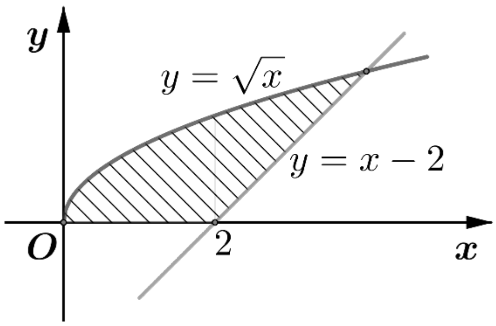
Câu 39: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 7-4x^3 \text{ khi } 0\le x\le 1 \\ 4-x^2 \text{ khi } x>1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 40: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

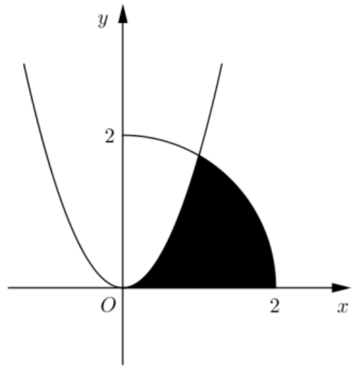
A. $S=\frac{937}{12}$ **B.** $S=\frac{343}{12}$ **C.** $S=\frac{793}{4}$ **D.** $S=\frac{397}{4}$

Câu 41: Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



A. $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Câu 42: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng

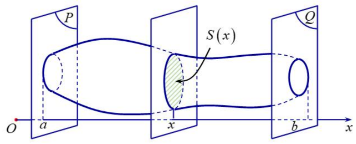


A. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

DẠNG 2. ỨNG DỤNG TICH PHAN DỂ TIM THỂ TICH

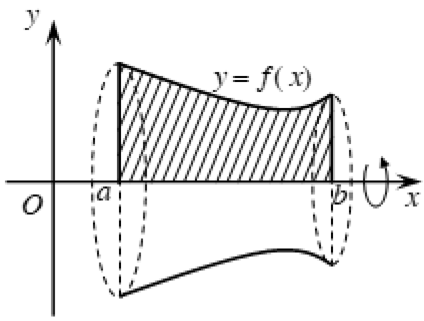
① ***Thể tích vật thể***

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x}$.



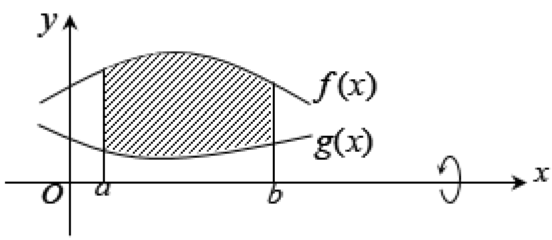
② ***Thể tích khối tròn xoay***

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:*



$$\begin{cases}(C): y=f(x)\\(Ox): y=0\\x=a\\x=b\end{cases}\qquad \boxed{V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx}$$

b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$*



Câu 43: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a,x=b\left(a<b\right)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right)dx$ **C.** $V=\int\limits_a^b f^2\left(x\right)dx$ **D.** $V=\pi\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$

Câu 44: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b\left(a<b\right)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V=\pi^2\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right)dx$ **C.** $V=2\pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right)dx$ **D.** $V=\pi^2\int\limits_a^b f^2\left(x\right)dx$

Câu 45: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int\limits_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_0^1\mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int\limits_0^1\mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Câu 46: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x},y=0,x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int\limits_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int\limits_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int\limits_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$.

Câu 47: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{2x},y=0,x=0$ và $x=1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$.

Câu 48: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x,y=0,x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\pi\int\limits_0^1 e^{2x}dx$. **B.** $\pi\int\limits_0^1 e^x dx$ **C.** $\int\limits_0^1 e^x dx$. **D.** $\int\limits_0^1 e^{2x}dx$.

Câu 49: Cho hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\left(H\right)$ xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **C.** $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **D.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$

Câu 50: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$

Câu 51: Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\frac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\frac{4}{3}$

Câu 52: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Câu 53: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi(\pi+1)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2(\pi+1)$ **D.** $V=2\pi^2$

Câu 54: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$ **B.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **C.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$

Câu 55: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1\le x\le 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=\frac{124}{3}$ **B.** $V=(32+2\sqrt{15})\pi$ **C.** $V=32+2\sqrt{15}$ **D.** $V=\frac{124\pi}{3}$

Câu 56: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

Câu 57: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$ **B.** $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$ **C.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$ **D.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$

Câu 58: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 59: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 60: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2 (2x-x^2)dx$ **B.** $\pi\int_0^2 (2x-x^2)^2 dx$ **C.** $\int_0^2 (2x-x^2)^2 dx$ **D.** $\pi\int_0^2 (2x-x^2)dx$

Câu 61: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox là

A. $\frac{81\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71\pi}{35}$. **D.** $\frac{71}{35}$.

Câu 62: Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parapol: $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^2 (2x-x^2)\,dx$. **B.** $\pi\int_0^2 (x^2-2x)^2\,dx$. **C.** $\pi\int_0^2 4x^2\,dx+\pi\int_0^2 x^4\,dx$. **D.** $\pi\int_0^2 4x^2\,dx-\pi\int_0^2 x^4\,dx$.

Câu 63: Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox bằng:

A. $V=\frac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 64: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 5 **B.** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ **C.** $\frac{3\pi}{2}$ **D.** $\pi\left(\frac{1}{2}+\pi\right)$

Câu 65: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\frac{11\pi}{6}$.

Câu 66: Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** $\frac{34\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Câu 67: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V=\frac{4}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{16}{15}\pi$. **C.** $V=\frac{16}{15}$. **D.** $V=\frac{4}{3}$.

CHƯƠNG III

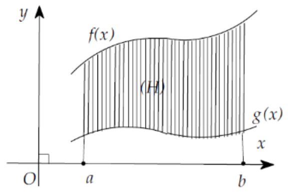
NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

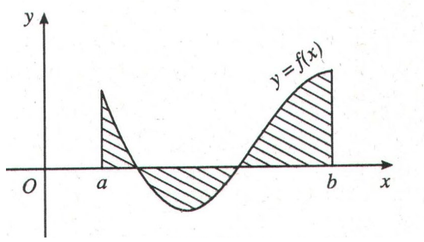
III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

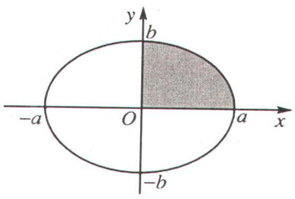
DẠNG 1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÌM DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\ (C_2): y = g(x)\\ x = a,\ x = b\ (a < b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x}$.



Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\ (C_2): Ox: y = 0\\ x = a,\ x = b\ (a < b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$.





$\boxed{S_{\text{elip}} = \pi ab}$.

$(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

<u>Hình thức 1</u>: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H): \{y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b\ (a < b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}} \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x =$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

<u>Hình thức 2</u>: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H): \{y = f(x),\ y = g(x)\}$

Giải $f(x) = g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1, \ldots, x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}} \int_{x_1}^{x_i} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

<u>Hình thức 3</u>: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm, chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$ ta nên vẽ hình.

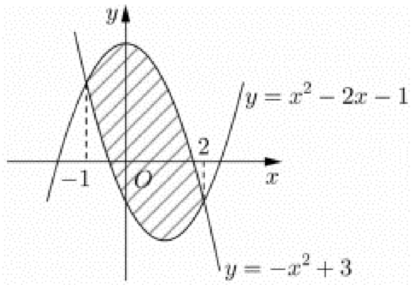
Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $S=-\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_b^a\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

Câu 2: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$.

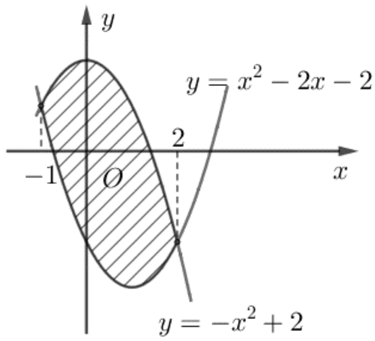
Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $-x^2+3\ge x^2-2x-1,\ \forall x\in\left[-1;2\right]$.

Vậy diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 3: Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

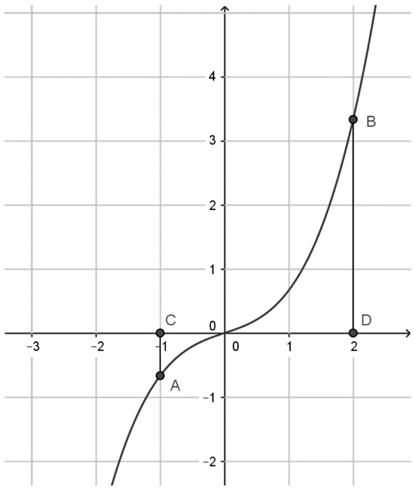
Lời giải

Chọn A

Dựa và hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là:

$$\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2\right)-\left(x^2-2x-2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x.$$

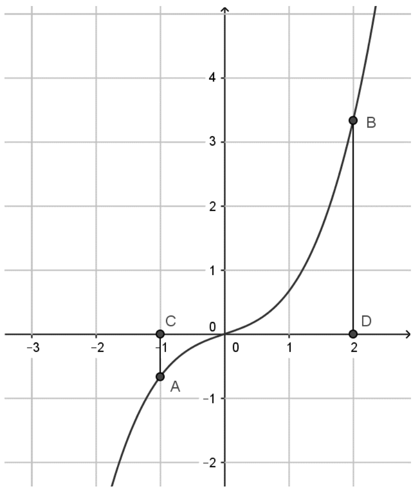
Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1,\ x=2$. Đặt $a=\int\limits_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=b-a$ **B.** $S=b+a$ **C.** $S=-b+a$ **D.** $S=-b-a$

Lời giải

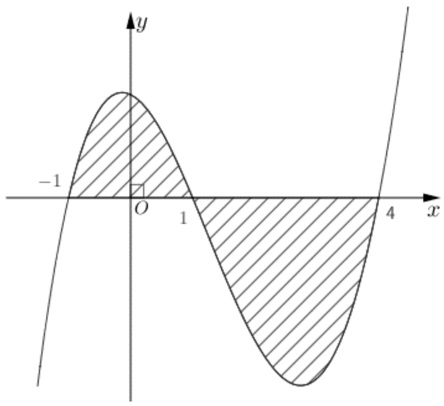
Chọn A



Ta có:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b.$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

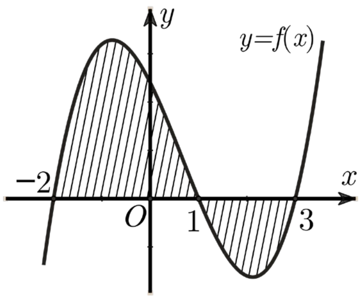
Lời giải

Chọn A

Ta có: hàm số $f(x)\geq 0\,\forall x\in[-1;1];f(x)\leq 0\,\forall x\in[1;4]$, nên:

$$S=\int_{-1}^{4}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x.$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x.$

C. $S=-\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $S=\int_{-2}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=S=\int_{-2}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x.$

Do $f(x)\geq 0$ với $\forall x\in[-2;1]$ và $f(x)\leq 0$ với $\forall x\in[1;3]$ nên $S=\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x.$

Câu 7: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\pi\int_{0}^{1}(2x^2+1)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{0}^{1}(2x^2-1)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{0}^{1}(2x^2+1)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{0}^{1}(2x^2+1)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{0}^{1}|2x^2+1|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(2x^2+1)\mathrm{d}x$ do $2x^2+1>0\ \forall x\in[0;1]$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$x^2-4=2x-4 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho là:

$S=\int_0^2\left|\left(x^2-4\right)-(2x-4)\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$.

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm hai đường là: $x^2-1=x-1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường là $\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

A. $\frac{125\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3=x-3 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng: $S=\int_0^1\left|\left(x^2-3\right)-(x-3)\right|dx=\int_0^1\left|x^2-x\right|dx=\frac{1}{6}$.

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-2$ và $y=3x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm, ta có:

$$x^2-2=3x-2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0. \\ x=3. \end{array}\right.$$

Như vậy, diện tích hình phẳng được gói hạn bằng $\int_0^3\left|\left(x^2-2\right)-(3x-2)\right|dx=\frac{9}{2}$.

Câu 12: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$ **C.** $S=\pi\int_0^2 2^{2x}\,\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int_0^2 2^{2x}\,\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn B

$S=\int_0^2 \left|2^x\right| dx=\int_0^2 2^x\,dx$.

Câu 13: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

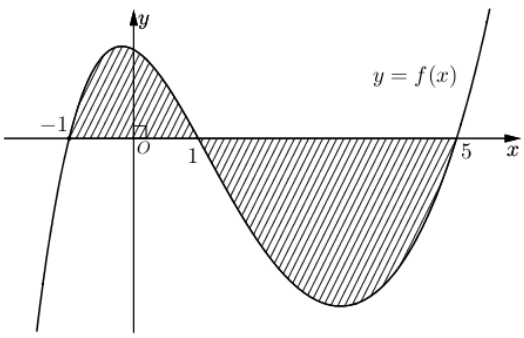
A. $S=\int_0^2 e^x dx$ **B.** $S=\pi\int_0^2 e^x dx$ **C.** $S=\pi\int_0^2 e^x dx$ **D.** $S=\pi\int_0^2 e^{2x} dx$

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là: $S=\int_0^2 e^x dx$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right), y=0, x=-1$ và $x=5$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_1^5 f(x)dx$. **B.** $S=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$.

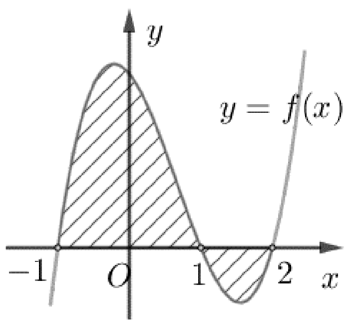
C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_1^5 f(x)dx$. **D.** $S=-\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S=\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx+\int_1^5\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx-\int_1^5 f\left(x\right)dx$.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right), y=0, x=-1, x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}$.

B. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}$.

C. $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}$.

D. $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}$.

Lời giải

Chọn D

$S=\int\limits_{-1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{dx}=\int\limits_{-1}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{dx}+\int\limits_{1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{dx}$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$ nên $\int\limits_{-1}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{dx}=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{dx}$; hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$ nên $\int\limits_{1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{dx}=-\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{dx}$

Vậy $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}$

Câu 16: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Lời giải

Chọn A

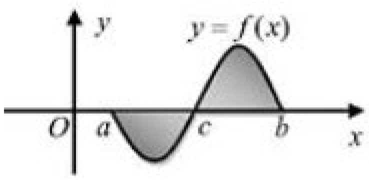
Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x=x-x^2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$ là:

$$S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3-x-\left(x-x^2\right)\right|dx=\left|\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|+\left|\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}\right|=\left|-\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right|=\frac{37}{12}.$$

Câu 17: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$. Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

B. $S=\left|\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{b} f(x)dx\right|$.

C. $S=-\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{b} f(x)dx$.

D. $S=\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{b} f(x)dx$.

Lời giải.

Chọn B

Câu 18: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x$, $y = x$. Tính S.

A. $S = 4$. **B.** $S = 8$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 0$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3 - 3x = x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy $S = \left|\int_{-2}^{0}\left(x^3 - 4x\right)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{2}\left(x^3 - 4x\right)\mathrm{d}x\right| = 4 + 4 = 8$.

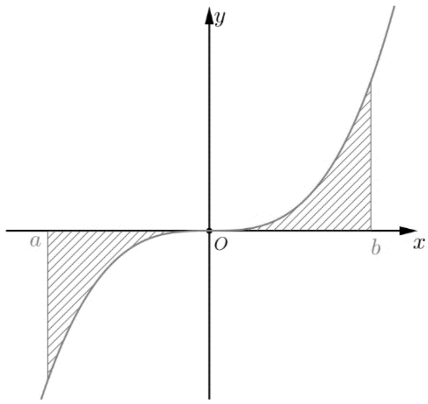
Câu 19: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 3^x dx$. **B.** $S = \pi\int_0^2 3^{2x} dx$. **C.** $S = \pi\int_0^2 3^x dx$. **D.** $S = \int_0^2 3^{2x} dx$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S = \int_0^2 3^x dx$

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S_D = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S_D = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $S_D = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^0 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Vì $f(x) \le 0, \forall x \in [a;0], f(x) \ge 0, \forall x \in [0;b]$ nên:

$S_D = \int_a^0 (-f(x))\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$

Câu 21: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Ta có: $S=\int_1^2\left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\int_1^2\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\left|\int_1^2\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{3}$.

Câu 22: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ bằng

A. $\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int_a^b|f(x)+g(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 23: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox

A. 11. **B.** $\frac{34}{3}$. **C.** $\frac{31}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

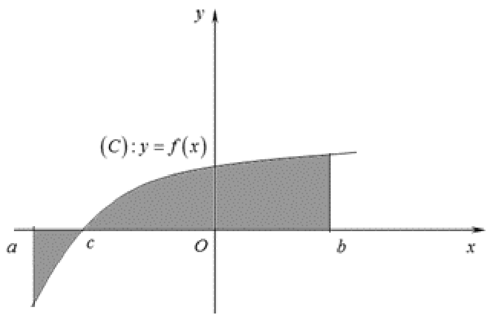
Chọn D

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox.

Xét phương trình $4x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Ta có $S=\int_0^4\left|4x-x^2\right|dx=\left|\int_0^4(4x-x^2)dx\right|=\left|\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4\right|=\frac{32}{3}$.

Câu 24: Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_a^c\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_c^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 25: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\dfrac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Lời giải

Ta có: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=6$.

Câu 26: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5$, $y=6x$, $x=0$, $x=1$. Tính S.

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{7}{3}$ **C.** $\dfrac{8}{3}$ **D.** $\dfrac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+5=6x \Leftrightarrow x=5; x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S=\int\limits_0^1\left|x^2-6x+5\right|\mathrm{d}x=\dfrac{7}{3}$.

Câu 27: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $\left(C\right): y=\dfrac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=1-\ln\dfrac{4}{3}$ **B.** $S=4\ln\dfrac{4}{3}$ **C.** $S=4\ln\dfrac{4}{3}-1$ **D.** $S=\ln\dfrac{4}{3}-1$

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và trục hoành là nghiệm của phương trình $\dfrac{-3x-1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$.

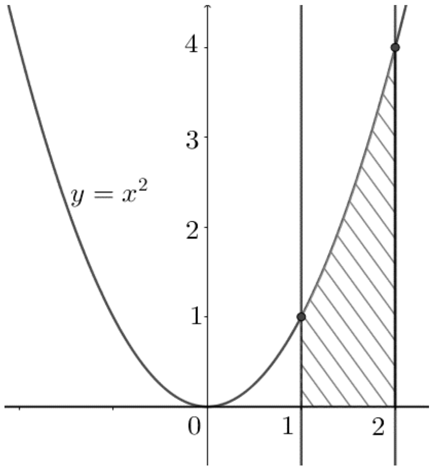
Do đó diện tích hình phẳng là

$$S=\left|\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{-3x-1}{x-1}\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0}\left(3+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(3x+4\ln\left|x-1\right|\right)\right|_{-\frac{1}{3}}^{0}=4\ln\frac{4}{3}-1.$$

Câu 28: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2; y=0; x=1; x=2$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 1.

Lời giải



Ta có $S=\int_1^2\left|x^2\right|dx=\int_1^2 x^2dx=\frac{7}{3}$.

Câu 29: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $2\ln 2-1$. **B.** $\ln 2+1$. **C.** $\ln 2-1$. **D.** $2\ln 2+1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (H) và trục hoành $\frac{x-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H) và các trục tọa độ là

$$S=\int_0^1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-x+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(-x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=2\ln 2-1.$$

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^2+2x+1=2x^2-4x+1 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Diện tích hính phẳng là $S=\left|\int_0^2\left[\left(2x^2-4x+1\right)-\left(-x^2+2x+1\right)\right]dx\right|$

$=\left|\int_0^2\left(3x^2-6x\right)dx\right|=\left|\left(x^3-3x^2\right)\Big|_0^2\right|=4$.

Câu 31: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2+2x$, $y=x+2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2+2x=x+2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}\right|=\left|-\frac{7}{6}-\frac{10}{3}\right|=\frac{9}{2}.$$

Câu 32: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=3x-2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{6}$

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường là:

$$S=\int_{1}^{2}\left|x^2-(3x-2)\right|dx=\left|\int_{1}^{2}\left(x^2-3x+2\right)dx\right|=\frac{1}{6}.$$

Câu 33: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2$ và đường thẳng $y=2x$ bằng

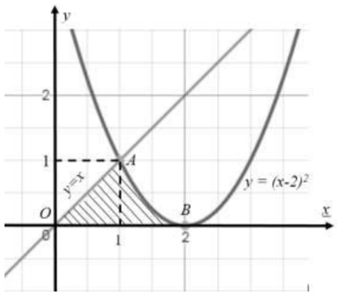
A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $4x-x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{0}^{2}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{4}{3}$.

Câu 34: Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên.



A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x=(x-2)^2\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị, khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}(x-2)^2dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Vậy $S=\frac{5}{6}$.

Câu 35: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\frac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y=x^2-2x$ và $(d): y=0$ là:

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

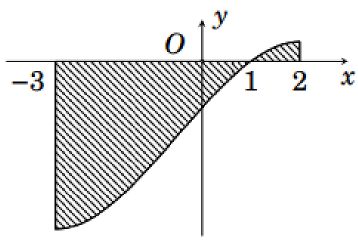
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích cần tìm: $S=\int\limits_{-10}^{10}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-10}^{0}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{10}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-10}^{0}-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{2}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{2}^{10}=\frac{1300}{3}+\frac{4}{3}+\frac{704}{3}=\frac{2008}{3}$.

Câu 36: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$. Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b$.

Câu 37: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$ là :

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{23}{15}$

Lờigiải

Chọn A

Xét phương trình $x^2=x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$ là :

$S=\int\limits_{0}^{1}\left|x^2-x\right|dx=\left|\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-x\right)dx\right|=\frac{4}{3}$

Câu 38: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 10

Lời giải

Phương trình hoành đồ giao điểm hai đồ thị hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là:

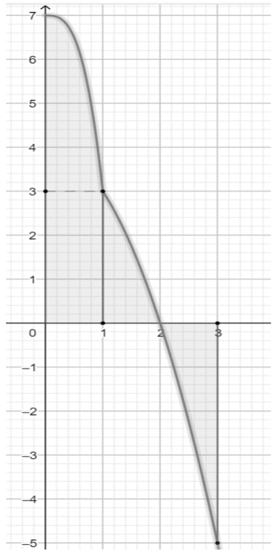
$$-x^2+2x+1=2x^2-4x+1 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng đã cho là $\int_0^2\left|3x^2-6x\right|dx=\int_0^2\left(6x-3x^2\right)dx=\left(3x^2-x^3\right)\Big|_0^2=4$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 7-4x^3 \ khi \ 0\le x\le 1 \\ 4-x^2 \ khi \ x>1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải



$$S=\int_0^1\left(7-4x^3\right)dx+\int_1^2\left(4-x^2\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx$$

$$=\left(7x-x^4\right)\Big|_0^1+\left|4x-\frac{x^3}{3}\right|\Big|_1^2+\left|\frac{x^3}{3}-4x\right|\Big|_2^3=6+4-\frac{7}{3}-3-\frac{8}{3}+8=10.$$

Câu 40: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\frac{937}{12}$ **B.** $S=\frac{343}{12}$ **C.** $S=\frac{793}{4}$ **D.** $S=\frac{397}{4}$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

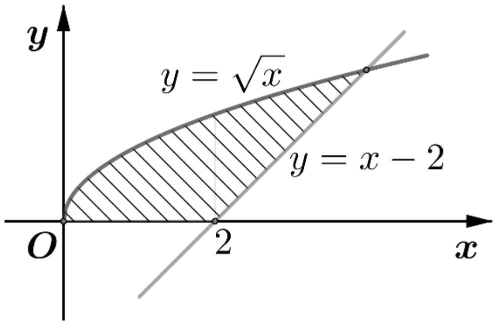
$$-x^3+12x=-x^2 \Leftrightarrow x(x^2-x-12)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \\ x=4 \end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ Diện tích cần tìm là: $S=\int_{-3}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_{-3}^{0}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{4}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Bigg|_{-3}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Bigg|_{0}^{4}\right|$$

$$=\left|\frac{-99}{4}\right|+\left|\frac{-160}{3}\right|=\frac{937}{12}.$$

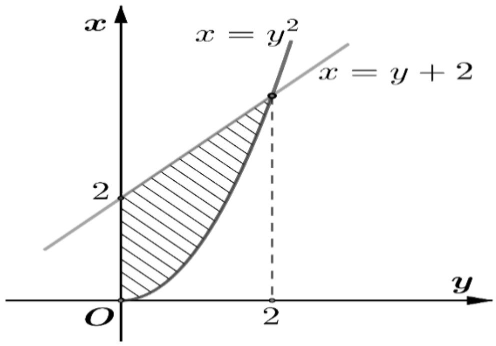
Câu 41: Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



A. $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Cách 1: Coi x là hàm số theo biến số y.



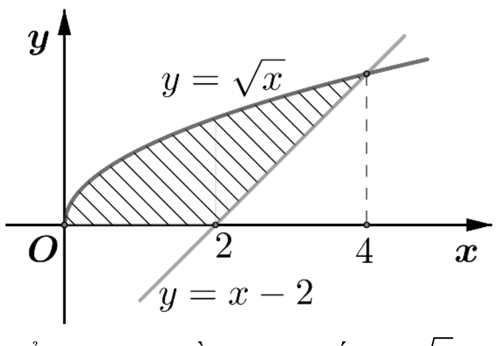
Hình phẳng đã cho giới hạn bởi các đường:

$x=y^2$; $x=y+2$; $y=0$.

Ta có: $y^2=y+2\Leftrightarrow y^2-y-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}y=-1 & (loai)\\ y=2 & (t/m)\end{array}\right.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^2\left|y+2-y^2\right|\mathrm{d}y=\int_0^2\left(y+2-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{10}{3}$

Cách 2:

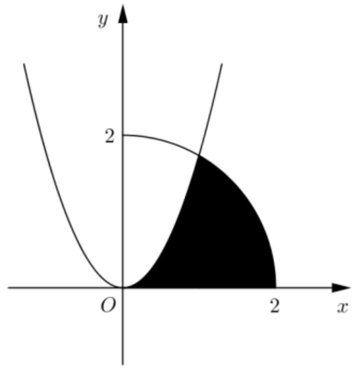


Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$:

$\sqrt{x}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int_2^4 (x-2)\,\mathrm{d}x=\frac{10}{3}$

Câu 42: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $\mathrm{y}=\sqrt{3}\mathrm{x}^2$, cung tròn có phương trình $\mathrm{y}=\sqrt{4-\mathrm{x}^2}$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được $\sqrt{3}x^2=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x=\pm 1$ với $0\le \mathrm{x}\le 2$ nên ta có $x=1$

Ta có diện tích $S=\int_0^1 \sqrt{3}x^2dx+\int_1^2 \sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+\int_1^2 \sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}+\int_1^2 \sqrt{4-x^2}dx$

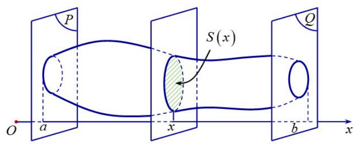
Đặt: $x=2\sin t => dx=2\cos t dt; x=1 => t=\frac{\pi}{6}; x=2 => t=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{3}+2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$

DẠNG 2. ỨNG DỤNG TICH PHAN DỂ TIM THỂ TICH

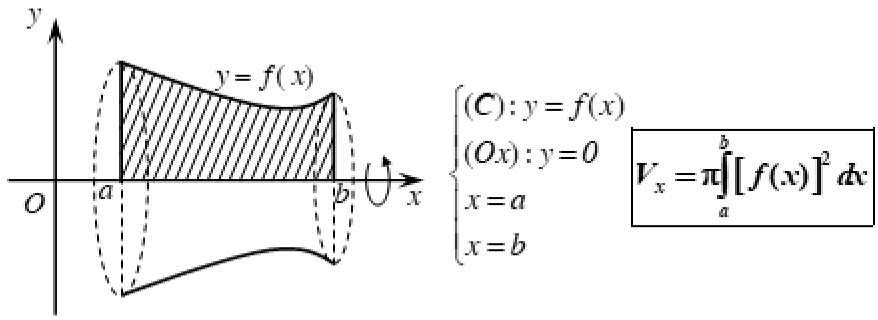
① ***Thể tích vật thể***

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x}$.

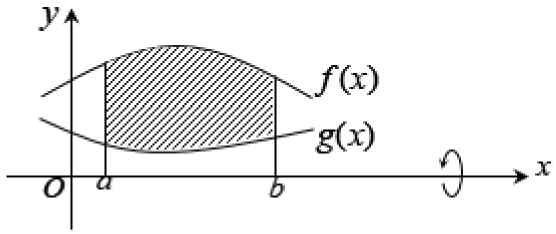


② ***Thể tích khối tròn xoay***

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:*



b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y = f(x)$, $y = g(x)$



Câu 43: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b\,(a < b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V = \int_a^b |f(x)|dx$ **B.** $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V = \int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V = \pi\int_a^b f(x)dx$

Lời giải

Chọn B

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b\,(a < b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V = \pi^2\int_a^b f(x)dx$ **B.** $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V = 2\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V = \pi^2\int_a^b f^2(x)dx$

Lời giải

Chọn B

Câu 45: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^1 e^{3x}dx$. **B.** $\int_0^1 e^{6x}dx$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{6x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{3x}dx$.

Lời giải

Chọn C

Ta có thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

$$\pi\int_0^1 \left(e^{3x}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 e^{6x}dx.$$

Câu 46: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{4x}, y = 0, x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^1\left(e^{4x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x.$$

Câu 47: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{2x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox là $V=\pi\int_0^1\left(e^{2x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$.

Câu 48: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{2x}dx$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{x}dx$ **C.** $\int_0^1 e^{x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{2x}dx$.

Lời giải

Chọn A

Câu 49: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **B.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$

C. $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **D.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx.$$

Câu 50: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$V=\pi\int_0^1 e^{2x}dx=\pi\frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$$

Câu 51: Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\frac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 dx=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\pi}{3}.$$

Câu 52: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Lời giải

Chọn A

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2 dx=\pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 53: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi(\pi+1)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2(\pi+1)$ **D.** $V=2\pi^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^2 dx=\pi\int_0^{\pi}\left(2+\sin x\right)dx=\pi\left(2x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi(\pi+1)$.

Câu 54: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)dx$ **B.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2 dx$

C. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2 dx$ **D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)dx$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 55: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1\le x\le 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=\dfrac{124}{3}$ **B.** $V=(32+2\sqrt{15})\pi$ **C.** $V=32+2\sqrt{15}$ **D.** $V=\dfrac{124\pi}{3}$

Lời giải

Chọn A

Diện tích thiết diện là: $S(x)=3x.\sqrt{3x^2-2}$

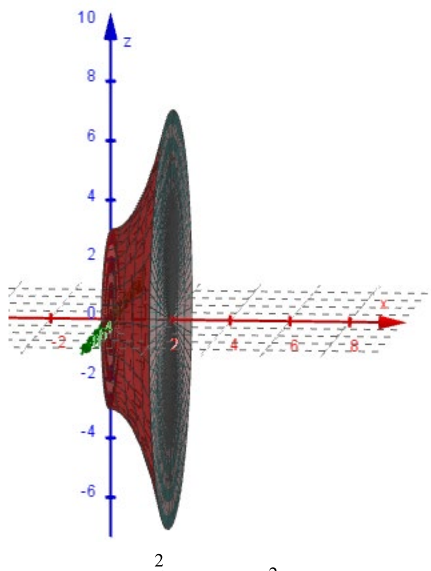
$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V=\int_1^3 3x.\sqrt{3x^2-2}dx=\dfrac{124}{3}$

Câu 56: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

C. $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải



Thể tích của vật thể được tạo nên là $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 57: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$ **B.** $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ **C.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$ **D.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$

Lời giải

Công thức tính: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

Câu 58: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Ta có $V=\pi\int_0^1\left(x^2-2x\right)^2\text{d}x=\pi\int_0^1\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\text{d}x=\pi.\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\pi.\left(\frac{1}{5}-1+\frac{4}{3}\right)=\frac{8\pi}{15}.$

Câu 59: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$V=\pi\int_1^2 xdx=\frac{\pi x^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{3\pi}{2}$.

Câu 60: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$ **B.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$ **C.** $\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$ **D.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$

Lời giải

Chọn B

Theo công thức ta chọn $V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$

Câu 61: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox là

A. $\frac{81\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71\pi}{35}$. **D.** $\frac{71}{35}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\text{d}x=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\text{d}x=\frac{81\pi}{35}$.

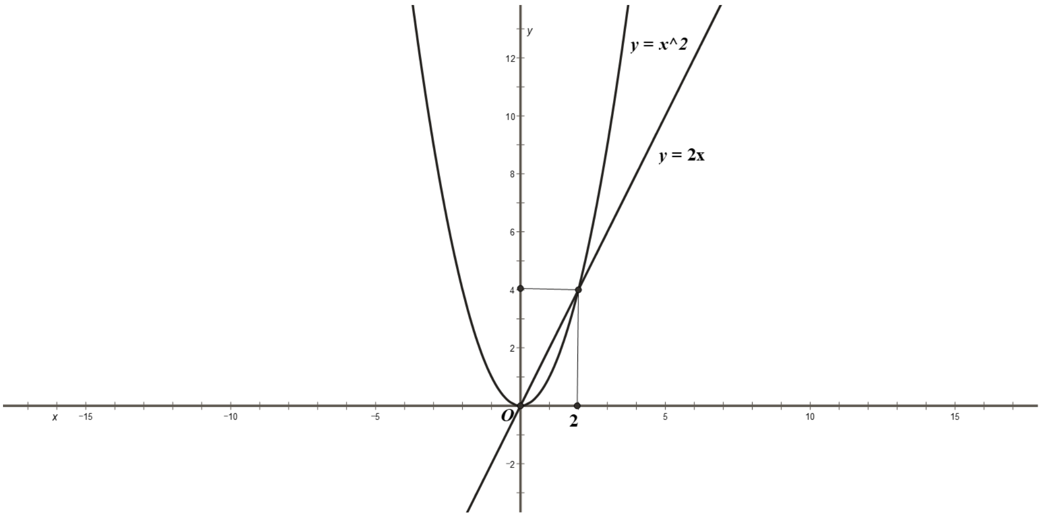
Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là : $V=\frac{81\pi}{35}$.

Câu 62: Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parapol: $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int\limits_0^2 (2x-x^2)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int\limits_0^2 (x^2-2x)^2\,\mathrm{d}x$.

C. $\pi\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

Lời giải



Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Ta có: $V_{Ox}=\pi\int\limits_0^2(2x)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2(x^2)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2 4x^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2 x^4\mathrm{d}x$

Câu 63: Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox bằng:

A. $V=\dfrac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox:

$2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Khi đó:

$V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{4}{3}x^3-x^4+\dfrac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2=\dfrac{16}{15}\pi$.

Câu 64: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 5 **B.** $\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$ **C.** $\dfrac{3\pi}{2}$ **D.** $\pi\left(\dfrac{1}{2}+\pi\right)$

Lời giải

Chọn B

$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,d(\tan x)=\pi\int\limits_0^1\dfrac{t^2}{t^2+1}dt=\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Câu 65: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\frac{11\pi}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}-2$ và trục hoành: $\sqrt{x}-2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$V=\pi\int_4^9\left(\sqrt{x}-2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_4^9\left(x-4\sqrt{x}+4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}+4x\right)\Bigg|_4^9$$

$$=\pi\left(\frac{81}{2}-72+36\right)-\pi\left(\frac{16}{2}-\frac{64}{3}+16\right)=\frac{11\pi}{6}.$$

Câu 66: Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** $\frac{34\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành

$$\sqrt{4x-x^2}=0 \Leftrightarrow 4x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right..$$

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là :

$$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^4\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}\pi.$$

Vậy thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là $\frac{32}{3}\pi$.

Câu 67: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V=\frac{4}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{16}{15}\pi$. **C.** $V=\frac{16}{15}$. **D.** $V=\frac{4}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với trục hoành: $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=0\end{array}\right.$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra do (H) quay quanh Ox là:

$$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2.\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right).\mathrm{d}x=\pi.\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2\right)=\frac{16}{15}\pi.$$

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai đường cong $(C): y=-x^3+12x$ và $(P): y=-x^2$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P).

a) (P) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

b) $S=\int_0^4 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x$.

c) $S=\left|\int_{-3}^4 \left(x^3-x^2-12x\right) \mathrm{d}x\right|$.

d) $S=\dfrac{937}{12}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3+4x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.

a) $f(0)=2$.

b) $f'(x)=3x^2+2$.

c) $S=\int_1^2 \left|x^3-3x^2+2x\right| \mathrm{d}x$.

d) $S=\dfrac{1}{2}$.

Câu 3: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 5x + 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$.

a) Diện tích $S = \int_0^3 \left|x^2 - 5x + 4\right| dx$.

b) Diện tích $S = \int_0^3 \left(x^2 - 5x + 4\right) dx$.

c) $S = \int_0^3 \left(x^2 - 5x + 4\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_0^3$.

d) Diện tích $S = \frac{31}{6}$.

Câu 4: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x - 1, y = g(x) = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

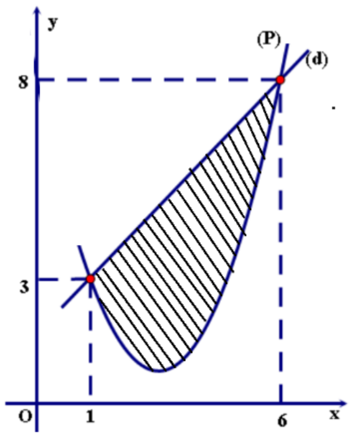
a) Diện tích $S = \int_1^4 \left|x^2 - 3x - 2\right| dx$.

b) $S = \int_0^3 \left|x^2 - 3x\right| dx + \int_3^4 \left|x^2 - 3x\right| dx$.

c) $S = \left|\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right) dx\right| + \left|\int_3^4 \left(x^2 - 3x\right) dx\right|$

d) Diện tích $S = \frac{31}{6}$.

Câu 5: Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \frac{125}{9}$.



a) Phương trình đường thẳng d là $y = x + 2$.

b) $\int_1^6 f'(x)\,dx = 5$.

c) $S = \int_1^6 \left[f(x) - (x + 2)\right] dx$.

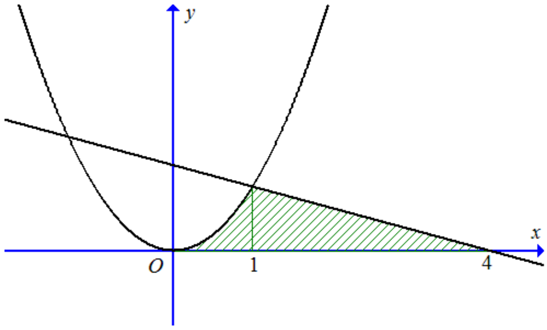
d) $\int_1^6 f(x)\,dx = \frac{745}{18}$.

Câu 6: Cho đường $y=x^2$ có đồ thị là (P), $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ có đồ thị là (d) và trục hoành.

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi (P), trục hoành và đường thẳng $x=1$

Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi (d), trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=4$

Gọi S là diện tích giới hạn bởi (P), (d) và trục hoành.



a) $S_1=\frac{1}{3}$

b) $S_2=\frac{3}{2}$

c) $S=S_1+S_2$

d) $S=\frac{11}{6}$

Câu 7: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}, y=2e^x$ và hai đường thẳng $x=0, x=4$.

a) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=4$ là $S=\pi\int_0^4 xdx.$

b) Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=4$ khi quay quanh trục Ox. Khi đó, $V=2\pi\left(e^8-1\right)$

c) Diện tích của hình H là $S_H=2e^4-\frac{16}{3}$.

d) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là $2\pi\left(e^8-5\right)$

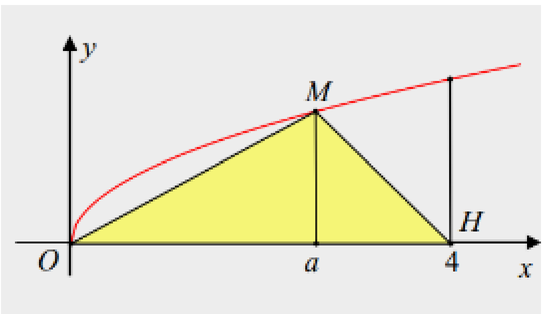
Câu 8: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x=0, x=4$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

a) Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là $\int_0^4 \sqrt{x}dx$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $\frac{19}{6}$.

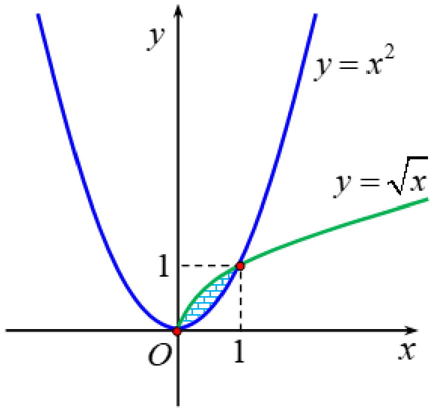
c) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, $x=0, x=4$ và trục hoành Ox là 8π.

d) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quanh hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $x=0, x=4$ và trục Ox. Đường thẳng $x=a\left(0<a<4\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M.



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó $a=3$.

Câu 9: Cho hình phẳng được tô trong hình bên dưới.



a) Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y=x^2; y=\sqrt{x}$

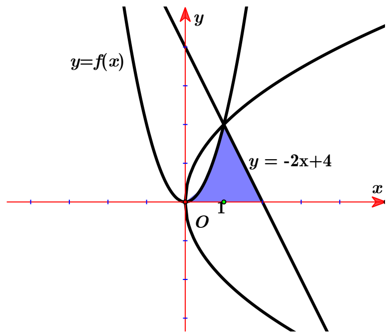
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\frac{1}{3}$.

c) Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$

.

d) Thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $(P): y=x^2$; $(C): y=\sqrt{x}$ quanh trục Oy bằng $\frac{3\pi}{10}$.

Câu 10: Cho đồ thị các hàm số $y=f(x)=2x^2$, $y=-2x+4$, đường parabol $y^2=4x$ và hình phẳng (S) được tô màu như hình vẽ bên dưới.



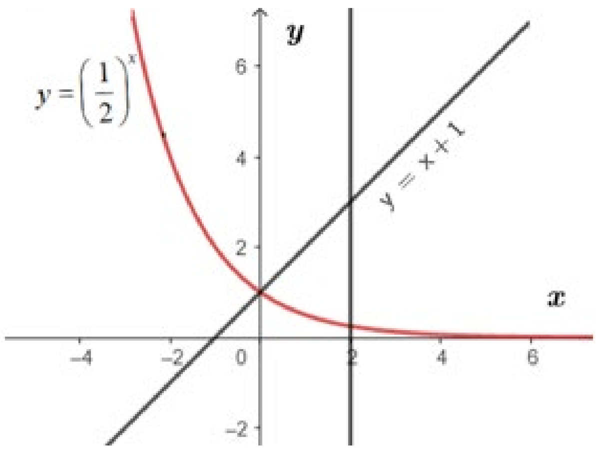
a) Phần hình phẳng (S) được giới hạn bởi các đường $y^2=4x$, $y=-2x+4$ và trục Ox.

b) Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$ được tính bởi công thức $S=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x$.

c) Diện tích của phần hình phẳng (S) được tính bởi công thức $S=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-4)\mathrm{d}x$.

d) Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x^2$ và đường $y^2=4x$ là $\frac{2}{3}$.

Câu 11: Cho đồ thị các hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=x+1$ như hình vẽ bên dưới:



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x+1$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$. Được tính bởi công thức: $S=\int_0^2\left[x+1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$.

b) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$ quanh trục Ox. Được tính bởi công thức: $V_1=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}\right)^x dx$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+1$, $y=0$ và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$ bằng: 4.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=x+1$ và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$ quanh trục Ox bằng: 26.

Câu 12: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2\ (P)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=4$.

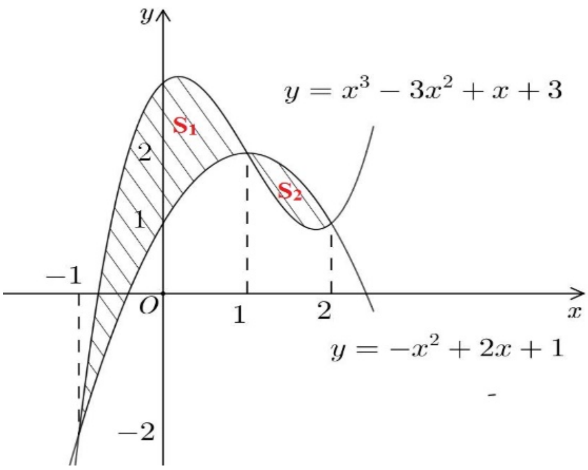
a) Diện tích S được xác định theo công thức $S=\int\limits_0^4 x^2dx$.

b) Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích $V=\frac{1024}{5}$.

c) Đường thẳng $y=4$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

d) Gọi A, B là hai điểm thuộc (P) sao cho $AB=2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{3}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 3\left(P\right)$ và $y = -x^2 + 2x + 1\left(H\right)$.



Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(P\right)$ và $\left(H\right)$ như hình vẽ.

a) Diện tích phần hình phẳng $\left(E\right)$ được gạch sọc tính theo công thức $\int\limits_{-1}^{2}\left(-x^3 + 2x^2 + x - 2\right)\mathrm{d}x$.

b) $S_1 = 3S_2$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(H\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ bằng $\frac{10}{3}$.

d) Khi quay hình phẳng $\left(E\right)$ quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích $V = \frac{185}{21}$.

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho nửa hình tròn $\left(C\right): x^2 + y^2 = 8, y \ge 0$.

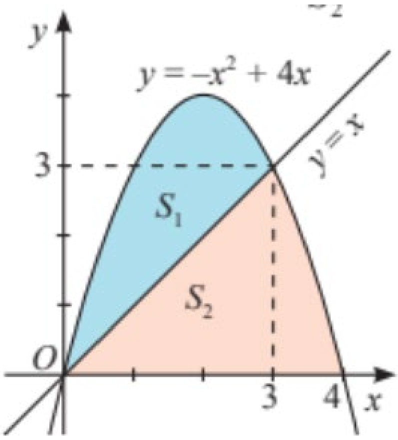
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $\left(C\right)$ là: $S = \int\limits_{0}^{2\sqrt{2}}\sqrt{8 - x^2}\,dx$.

b) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $\left(C\right)$ quanh trục hoành là: $V = \pi\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(8 - x^2\right)dx$.

c) Đường thẳng $y = 2$ chia nửa hình tròn $\left(C\right)$ thành hai phần, phần có diện tích bé hơn bằng $2\pi - 8$.

d) Parabol $\left(P\right): y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là diện tích phần nhỏ, S_2 là diện tích phần lớn. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2} < 1$.

Câu 15: Cho S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng được mô tả trong hình bên.



a) Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$, trục hoành và $x=0, x=4$ bằng $\frac{32}{3}$.

b) Diện tích $S_1=\frac{9}{2}$.

c) Diện tích $S_2=8$.

d) $\frac{S_1}{S_2}=\frac{27}{37}$

Câu 16: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi $(C): y=x^2$, đường thẳng $x=a, (a>0)$, và 2 trục tọa độ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

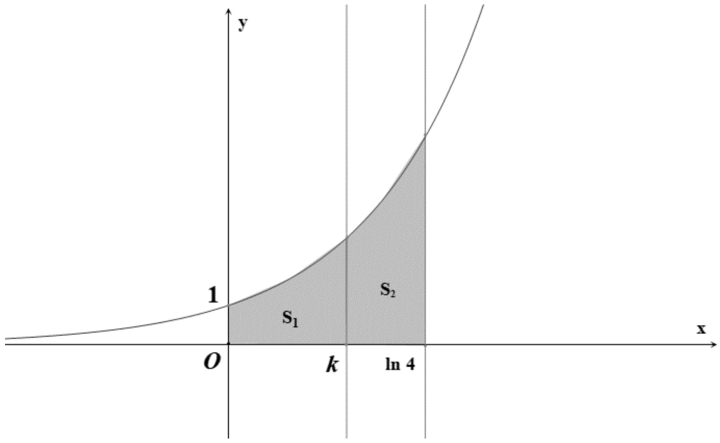
a) $S=\int_0^a x^2dx$.

b) $S=\frac{a^3}{3}$.

c) Nếu $S=\frac{1}{2}$ thì $a=1$.

d) Khi $a=1$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 17: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần (H_1) và (H_2) có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



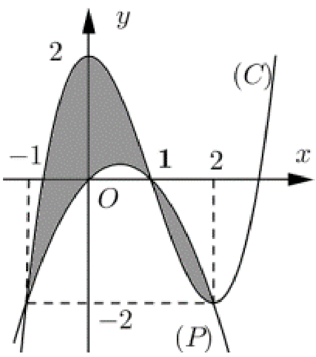
a) Khi $k = 1$ thì $S_1 = \int_0^1 e^x dx$.

b) Khi $k = 1$ thì $\frac{S_1}{S_2} = \frac{e-1}{2}$.

c) Nếu $S_1 = 2S_2$ thì $k = \ln 3$

d) Khi quay các hình phẳng $(H_1),(H_2)$ quay xung quanh trục Ox ta được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2 thỏa $V_1 = V_2$ thì $k = \frac{1}{2}\ln 17$.

Câu 18: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$ của hàm đa thức bậc ba và parabol $(P): y = g(x)$ có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



a) $S = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| dx$

b) $S = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx + \int_{1}^{2} (g(x) - f(x))dx$.

c) $S = \frac{37}{12}$.

d) Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi (C), (P) và 2 đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ xung quanh trục Ox bằng $\frac{191}{210}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là V. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $f(1)=e.$

b) $f'(x)>0\ \forall x\in R.$

c) $S_H>2.$

d) $V>15$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục với mọi $x\neq 0$ thỏa mãn: $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$ với $x\neq 0$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là V.

a) $\int\limits_1^2 f'(x).dx=-2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(1;2)$.

c) $S_H=\dfrac{1}{2}$

d) $V=\dfrac{\pi}{3}$.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai đường cong $(C): y=-x^3+12x$ và $(P): y=-x^2$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P).

a) (P) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

b) $S=\int_0^4 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x$.

c) $S=\left|\int_{-3}^4 \left(x^3-x^2-12x\right) \mathrm{d}x\right|$.

d) $S=\dfrac{937}{12}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng vì phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là

$$-x^3+12x=-x^2 \Leftrightarrow x\left(x^2-x-12\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-x-12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{array}\right. .$$

b) Sai vì $S=\int_{-3}^4 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x$.

c) Sai vì $S=\int_{-3}^4 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x=\left|\int_{-3}^0 \left(x^3-x^2-12x\right) \mathrm{d}x\right|+\left|\int_0^4 \left(x^3-x^2-12x\right) \mathrm{d}x\right|$.

d) Đúng vì $S=\int_{-3}^4 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x=\int_{-3}^0 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x+\int_0^4 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x=\dfrac{99}{4}+\dfrac{160}{3}=\dfrac{937}{12}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3+4x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.

a) $f(0)=2$.

b) $f'(x)=3x^2+2$.

c) $S=\int\limits_1^2 \left|x^3-3x^2+2x\right|\mathrm{d}x$.

d) $S=\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng vì theo giả thiết $f(x)+xf'(x)=4x^3+4x+2, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(0)=2$.

b) Đúng vì ta có $f(x)+xf'(x)=4x^3+4x+2 \Leftrightarrow (x)'.f(x)+x.f'(x)=4x^3+4x+2$

$\Leftrightarrow \left[xf(x)\right]'=4x^3+4x+2\Rightarrow xf(x)=\int\left(4x^3+4x+2\right)\mathrm{d}x=x^4+2x^2+2x+C\ (*)$.

Cho $x=0$ ta được $C=0$.

$(*)\Rightarrow f(x)=x^3+2x+2\Rightarrow f'(x)=3x^2+2$.

c) Sai vì phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là

$$f(x)=f'(x)\Leftrightarrow x^3+2x+2=3x^2+2\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Vậy $S=\int\limits_0^2\left|x^3-3x^2+2x\right|\mathrm{d}x$.

d) Đúng vì $S=\int\limits_0^2\left|x^3-3x^2+2x\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Câu 3: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-5x+4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=3$.

a) Diện tích $S=\int\limits_0^3\left|x^2-5x+4\right|\mathrm{d}x$.

b) Diện tích $S=\int\limits_0^3\left(x^2-5x+4\right)\mathrm{d}x$.

c) $S=\int_0^3\left(x^2-5x+4\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right)\Big|_0^3$.

d) Diện tích $S=\frac{31}{6}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng: diện tích $S=\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_0^3\left|x^2-5x+4\right|\mathrm{d}x$.

b) Sai: ta có $x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

Phương trình có một nghiệm $x=1$ thuộc $[0;3]$.

$x^2-5x+4\geq 0$ với mọi $x\in[0;1]$ và $x^2-5x+4\leq 0$ với mọi $x\in[1;3]$

$S=\int_0^3\left|x^2-5x+4\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-5x+4\right)\mathrm{d}x+\int_1^3-\left(x^2-5x+4\right)\mathrm{d}x$

c) Sai: $S=\int_0^1\left(x^2-5x+4\right)\mathrm{d}x+\int_1^3-\left(x^2-5x+4\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right)\Big|_0^1-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right)\Big|_1^3$.

d) Đúng: diện tích $S=\frac{11}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{31}{6}$.

Câu 4: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị của hàm số $y=f(x)=x^2-2x-1, y=g(x)=x-1$ và hai đường thẳng $x=1, x=4$.

a) Diện tích $S=\int_1^4\left|x^2-3x-2\right|\mathrm{d}x$.

b) $S=\int_0^3\left|x^2-3x\right|\mathrm{d}x+\int_3^4\left|x^2-3x\right|\mathrm{d}x$.

c) $S=\left|\int_0^3\left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_3^4\left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x\right|$

d) Diện tích $S=\frac{31}{6}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai: diện tích $S=\int_1^4\left|x^2-2x-1-(x-1)\right|\mathrm{d}x=\int_1^4\left|x^2-3x\right|\mathrm{d}x$.

b) Sai: ta có $x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

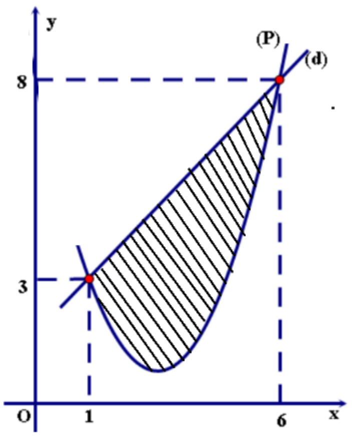
Phương trình có một nghiệm $x=3$ thuộc $[1;4]$.

$$S=\int_1^3\left|x^2-3x\right|\mathrm{d}x+\int_3^4\left|x^2-3x\right|\mathrm{d}x$$

c) Đúng: $S=\int_1^3\left|x^2-3x\right|\mathrm{d}x+\int_3^4\left|x^2-3x\right|\mathrm{d}x=\left|\int_1^3\left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_3^4\left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x\right|$

d) Đúng: $S=\left|-\dfrac{10}{3}\right|+\left|\dfrac{11}{6}\right|=\dfrac{31}{36}$.

Câu 5: Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\dfrac{125}{9}$.



a) Phương trình đường thẳng d là $y=x+2$.

b) $\int_1^6 f'(x)\mathrm{d}x=5$.

c) $S=\int_1^6\left[f(x)-(x+2)\right]\mathrm{d}x$.

d) $\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{745}{18}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng vì đường thẳng $d: y=ax+b$.

d đi qua hai điểm $(1;3)$ và $(6;8)$ nên $\begin{cases} a+b=3 \\ 6a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow d: y=x+2$.

b) Đúng vì $\int_1^6 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_1^6=f(6)-f(1)=8-3=5$.

c) Sai vì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+2, y=f(x), x=1, x=6$ là

$S=\int_1^6\left[(x+2)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

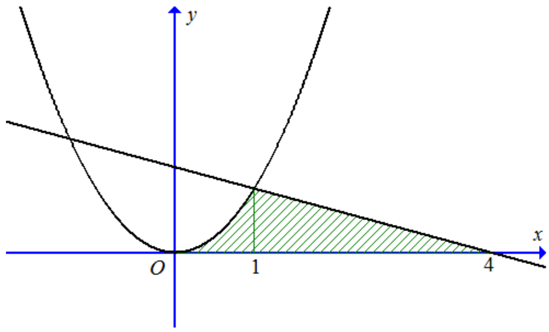
d) Sai vì $S=\int_1^6\left[(x+2)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{125}{9}\Leftrightarrow\frac{55}{2}-\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x=\frac{125}{9}\Leftrightarrow\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x=\frac{245}{18}$.

Câu 6: Cho đường $y=x^2$ có đồ thị là (P), $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ có đồ thị là (d) và trục hoành.

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi (P), trục hoành và đường thẳng $x=1$

Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi (d), trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=4$

Gọi S là diện tích giới hạn bởi (P), (d) và trục hoành.



a) $S_1=\frac{1}{3}$

b) $S_2=\frac{3}{2}$

c) $S=S_1+S_2$

d) $S=\frac{11}{6}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) $S_1=\int_0^1\left|x^2\right|dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$, do đó: $S_1=\frac{1}{3}$ là mệnh đề đúng

b) $S_2=\int_0^4\left|-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right|dx=\frac{8}{3}$, do đó: $S_2=\frac{3}{2}$ là mệnh đề sai

c) $S=\int_0^1\left|x^2\right|\mathrm{d}x+\int_1^4\left|-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right|\mathrm{d}x=\frac{11}{6}\neq S_1+S_2$, do đó: $S=S_1+S_2$ là mệnh đề sai

d) $S = S = \int_0^1 \left|x^2\right| \mathrm{d}x + \int_1^4 \left|-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x\right)\right|_1^4 = \frac{11}{6}$

, do đó: $S = \frac{11}{6}$ là mệnh đề đúng

Câu 7: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}, y = 2e^x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$.

a) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ là $S = \pi \int_0^4 x dx.$

b) Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ khi quay quanh trục Ox. Khi đó, $V = 2\pi\left(e^8 - 1\right)$

c) Diện tích của hình H là $S_H = 2e^4 - \frac{16}{3}.$

d) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là $2\pi\left(e^8 - 5\right)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Sai

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ là $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx.$

b) Đúng

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ khi quay quanh trục Ox.

Khi đó, $V = \pi \int_0^4 \left(2e^x\right)^2 dx = \pi \int_0^4 4e^{2x} dx = 2\pi e^{2x}\Big|_0^4 = 2\pi\left(e^8 - 1\right)$

c) Sai

Diện tích của hình H là $S_H = \int_0^4 \left|2e^x - \sqrt{x}\right| dx = \int_0^4 \left(2e^x - \sqrt{x}\right) dx = \left.\left(2e^x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\right|_0^4 = 2e^4 - \frac{22}{3}.$

(Vì $2e^x - \sqrt{x} > 0, \forall x \in [0;4]$)

d) Đúng

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là $V = \pi \int_0^4 \left|\left(2e^x\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2\right| dx = \pi \int_0^4 \left|4e^{2x} - x\right| dx = \pi \int_0^4 \left(4e^{2x} - x\right) dx = \pi \left.\left(2e^{2x} - \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^4 = 2\pi\left(e^8 - 5\right)$

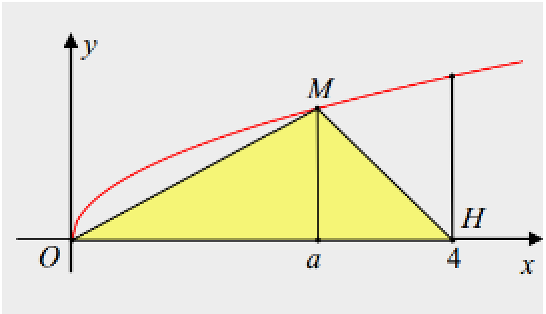
Câu 8: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

a) Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là $\int_0^4 \sqrt{x} dx$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $\frac{19}{6}$.

c) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, $x=0, x=4$ và trục hoành Ox là 8π.

d) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quanh hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $x=0, x=4$ và trục Ox. Đường thẳng $x=a\,(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M.



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó $a=3$.

Lời giải

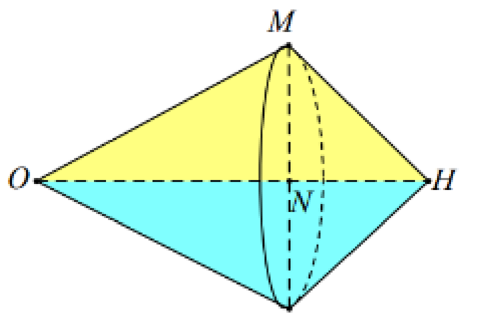
a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Ta có $S=\int_0^4 \sqrt{x}dx$. Vậy a) Đúng.

b) $S=\int_0^4 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{16}{3}$. Vậy b) Sai

c) Ta có $V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^4 xdx=8\pi$. Vậy c) Đúng

d) $V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^4 xdx=8\pi \Rightarrow V_1=\frac{V}{2}=4\pi$

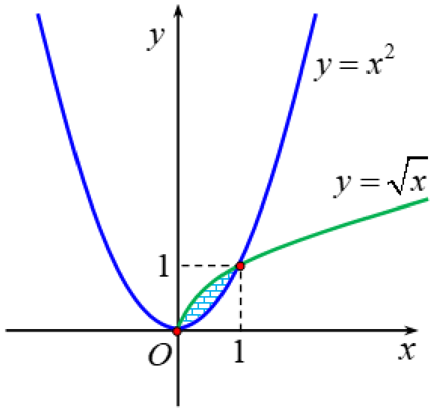


Tam giác MOH quanh trục Ox tạo nên hai khối nón chung đáy. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Suy ra $r=MN=y_M=y(a)=\sqrt{a}$.

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}.OH.\pi.r^2 = \frac{1}{3}.4.\pi.\left(\sqrt{a}\right)^2 = \frac{4\pi a}{3}$. Suy ra $4\pi = \frac{4\pi a}{3} \Rightarrow a = 3$

Vậy d) Đúng.

Câu 9: Cho hình phẳng được tô trong hình bên dưới.



a) Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$

b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\frac{1}{3}$.

c) Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$

.

d) Thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $(P): y = x^2$; $(C): y = \sqrt{x}$ quanh trục Oy bằng $\frac{3\pi}{10}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng

Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$

b, **Đúng**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Khi đó diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$ là:

$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \frac{1}{3}$.

c, **Sai**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Khi đó thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi\int_0^1 (x - x^4)\,dx$.

d, **Đúng**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$

Mặt khác:

$(P): y = x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{y} \\ x=-\sqrt{y} \end{array}\right. (y \geq 0)$

$(C): y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$

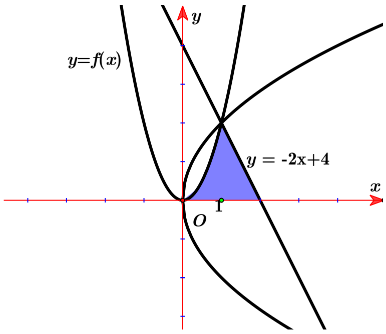
Xét $(H_1): \begin{cases} x=\sqrt{y} \\ Oy \\ y=0 \\ y=1 \end{cases}$ quay quanh Oy được V_1

Xét $(H_2): \begin{cases} x=y^2 \\ Oy \\ y=0 \\ y=1 \end{cases}$ quay quanh Oy được V_2

Do đó, thể tích cần tìm chính là:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\left[\int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 \mathrm{d}y - \int_0^1 \left(y^2\right)^2 \mathrm{d}y\right] = \frac{3\pi}{10}.$$

Câu 10: Cho đồ thị các hàm số $y = f(x) = 2x^2$, $y = -2x + 4$, đường parabol $y^2 = 4x$ và hình phẳng (S) được tô màu như hình vẽ bên dưới.



a) Phần hình phẳng (S) được giới hạn bởi các đường $y^2 = 4x$, $y = -2x + 4$ và trục Ox.

b) Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ được tính bởi công thức $S = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x$.

c) Diện tích của phần hình phẳng (S) được tính bởi công thức $S = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 (2x-4) \mathrm{d}x$.

d) Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và đường $y^2 = 4x$ là $\frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Phần hình phẳng (S) được giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -2x + 4$ và trục Ox.

b) Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ được tính bởi công thức $S = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x$.

c) Diện tích của phần hình phẳng (S) được tính bởi công thức $S = \int_0^1 \left|2x^2\right| \mathrm{d}x + \int_1^2 \left|-2x+4\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 (-2x+4) \mathrm{d}x$.

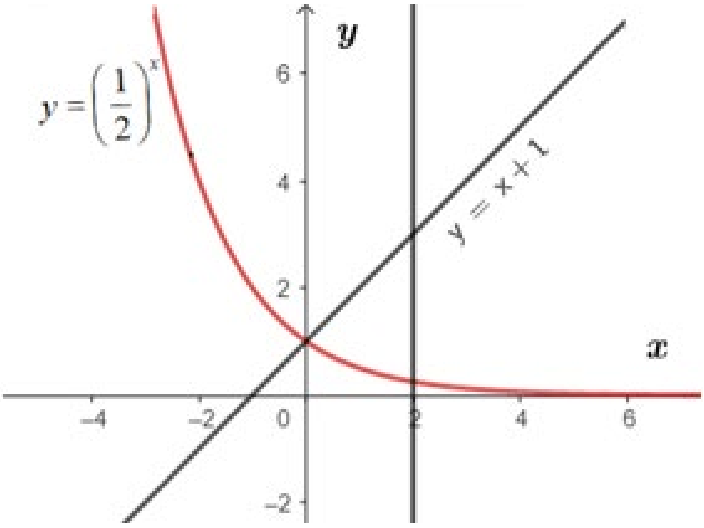
d) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và đường $y^2 = 4x$ là nghiệm của phương trình $4x^4 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Với $x \in (0;1)$, ta có $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}$.

Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và đường $y^2 = 4x$ là:

$S = \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - 2x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

Câu 11: Cho đồ thị các hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = x + 1$ như hình vẽ bên dưới:



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x+1$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$. Được tính bởi công thức: $S=\int_0^2\left[x+1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$.

b) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$ quanh trục Ox. Được tính bởi công thức: $V_1=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}\right)^x dx$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+1$, $y=0$ và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$ bằng: 4.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=x+1$ và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$ quanh trục Ox bằng: 26.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Từ hình vẽ ta có**:** $x+1-\left(\frac{1}{2}\right)^x>0$ nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x+1$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$. Được tính bởi công thức:

$$S=\int_0^2\left|x+1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|dx=\int_0^2\left[x+1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx.$$

b) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

,

trục hoành và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$ quanh trục Ox.

Được tính bởi công thức: $V_1=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}dx$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+1$, $y=0$ và hai đường thẳng

$x=0;\ x=2$

là: $S=\int\limits_0^2(x+1)dx=4$.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

,

$y=x+1$ và hai đường thẳng $x=0;\ x=2$ quanh trục Ox là:

$V=\pi\int\limits_0^2\left|(x+1)^2-(\frac{1}{2})^{2x}\right|dx\approx 25{,}1$.

Câu 12: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2\ (P)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=4$.

a) Diện tích S được xác định theo công thức $S=\int\limits_0^4 x^2dx$.

b) Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích $V=\frac{1024}{5}$.

c) Đường thẳng $y=4$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

d) Gọi A, B là hai điểm thuộc (P) sao cho $AB=2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{3}$.

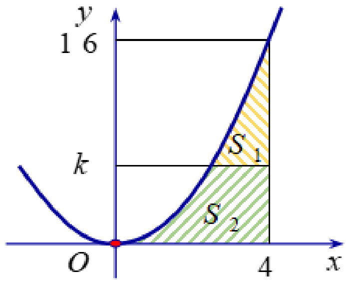
Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Ta có: $S=\int\limits_0^4\left|x^2\right|dx=\int\limits_0^4 x^2dx$.

b) Ta có: $V=\pi\int\limits_0^4\left(x^2\right)^2dx=\pi\int\limits_0^4 x^4dx=\frac{\pi}{5}x^5\Big|_0^4=\frac{1024\pi}{5}$.

c)

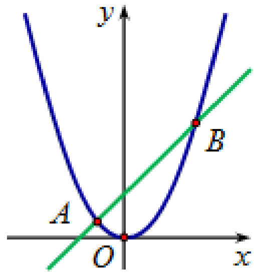


Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=x^2$ và $y=4$ là $x=2$.

Do đó diện tích $S_1=\int_2^4\left(x^2-4\right)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$, diện tích $S_2=\int_0^4 x^2\mathrm{d}x-S_1=\frac{32}{3}$.

Do đó, $S_1=S_2$.

d)



Cách 1: Gọi $A\left(a;a^2\right)$, $B\left(b;b^2\right)$với $a<b$.

Ta có: $AB=2\Leftrightarrow\left(b-a\right)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=4$

$$AB:\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-a^2}{b^2-a^2}\Leftrightarrow\frac{x-a}{1}=\frac{y-a^2}{b+a}$$

$$\Leftrightarrow y=\left(a+b\right)\left(x-a\right)+a^2\Leftrightarrow y=\left(a+b\right)x-ab$$

$$S=\int_a^b\left(\left(a+b\right)x-ab-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(x-a\right)\left(b-x\right)\mathrm{d}x$$

Đặt $t=x-a$. Suy r**A.**

$$S=\int_0^{b-a}t\left(b-a-t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{b-a}\left(\left(b-a\right)t-t^2\right)\mathrm{d}t=\left.\frac{\left(b-a\right)t^2}{2}\right|_0^{b-a}-\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{b-a}=\frac{\left(b-a\right)^3}{6}$$

Ta có:

$$\left(b-a\right)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=4\Leftrightarrow\left(b-a\right)^2\left(1+\left(b+a\right)^2\right)=4\Leftrightarrow\left(b-a\right)^2=\frac{4}{1+\left(a+b\right)^2}\le 4$$

Suy ra $b-a\le 2\Rightarrow S=\frac{\left(b-a\right)^3}{6}\le\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chi khi $\begin{cases}a+b=0\\b-a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow A\left(-1;1\right)$; $B\left(1;1\right)$.

Vậy giá trị lớn nhất của AB bằng $\frac{4}{3}$.

Chú ý: Khi làm trắc nghiệm ta có thể dự đoán (linh cảm:D) a, b đối nhau, nghĩa là: $a+b=0$. Từ đó, thay vào $\left(b-a\right)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=4$, tìm được $a=-1$, $b=1$. Suy r**A.** $A\left(-1;1\right)$; $B\left(1;1\right)$.

Viết phương trình: $AB: y=1$. Từ đó: $S=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Hoặc cũng linh cảm, đặc biệt hóa AB song song với Ox, từ đó cũng tìm được $a+b=0$.

Cách 2: Sử dụng công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=ax^2+bx+c$ và $(d): y=mx+n$.

Đầu tiên ta lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$ax^2+bx+c=mx+n \Leftrightarrow ax^2+(b-m)x+c-n=0.$$

Khi đó diện tích hình phẳng là: $S^2=\frac{\Delta^3}{36a^4}$, với $\Delta=(b-m)^2-4a(c-n)$.

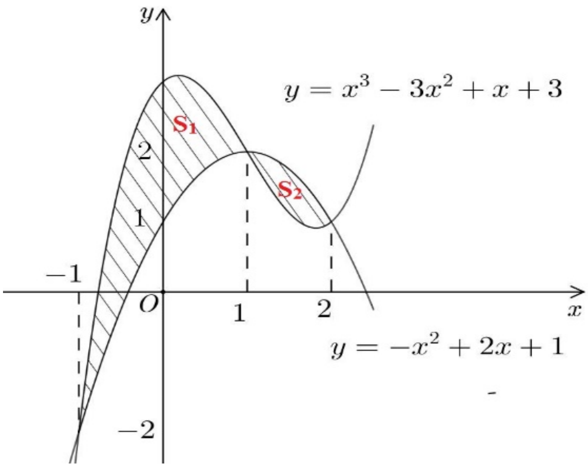
Áp dụng:

Tương tự, ta có $(AB): y=(a+b)x-ab$, $a<b$.

PTHĐGĐ: $x^2=(a+b)x-ab \Leftrightarrow x^2-(a+b)x+ab=0$, có $\Delta=(b-a)^2$.

Suy ra $S^2=\frac{\Delta^3}{36}=\frac{(b-a)^6}{36} \Rightarrow S=\frac{(b-a)^3}{6}$ và đánh giá như cách 1.

Câu 13: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+x+3\,(P)$ và $y=-x^2+2x+1\,(H)$.



Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) và (H) như hình vẽ.

a) Diện tích phần hình phẳng (E) được gạch sọc tính theo công thức $\int_{-1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

b) $S_1=3S_2$.

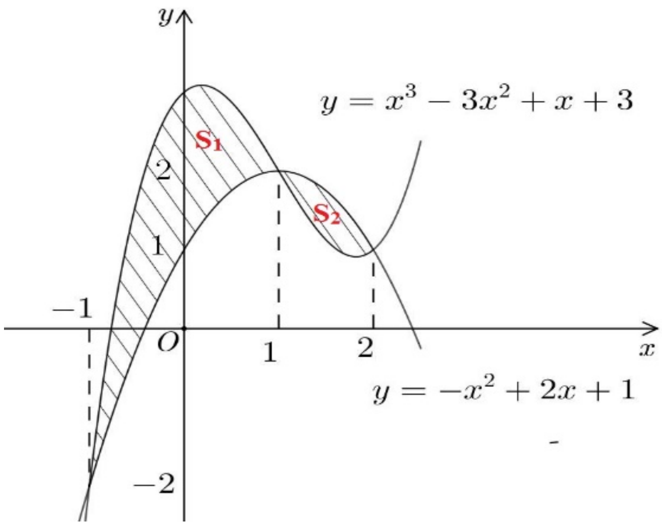
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H), trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$ bằng $\frac{10}{3}$.

d) Khi quay hình phẳng (E) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích $V=\frac{185}{21}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a)



+ Phần S_1: phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$, $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ và các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

Dựa vào đồ thị ta có $S_1 = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2) \mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.

+ Phần S_2: phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$, $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

Dựa vào đồ thị ta có $S_2 = \int_{1}^{2} [g(x) - f(x)] \mathrm{d}x = \int_{1}^{2} (-x^3 + 2x^2 + x - 2) \mathrm{d}x = \frac{5}{12}$.

Vậy $S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2) \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (-x^3 + 2x^2 + x - 2) \mathrm{d}x$.

b) $S_1 = \frac{32}{5} S_2$.

c) $S = \int_{0}^{2} [g(x)] \mathrm{d}x = \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x + 1) dx = \frac{10}{3}$.

d) Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (E) quanh trục Ox với các đường thẳng $x = -1; x = 1$ và $x = 2$.

+) $V_1 = \pi \int_{-1}^{1} [f^2(x) - g^2(x)] dx = \frac{160}{21}$;

+) $V_2 = \pi \int_{1}^{2} [g^2(x) - f^2(x)] dx = \frac{25}{21}$.

Vậy $V = V_1 + V_2 = \frac{185}{21}$.

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho nửa hình tròn $(C): x^2 + y^2 = 8, y \geq 0$.

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn (C) là: $S = \int_{0}^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2} dx$.

b) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn (C) quanh trục hoành là: $V=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(8-x^2\right)dx$.

c) Đường thẳng $y=2$ chia nửa hình tròn (C) thành hai phần, phần có diện tích bé hơn bằng $2\pi-8$.

d) Parabol $(P): y=\dfrac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là diện tích phần nhỏ, S_2 là diện tích phần lớn. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}<1$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

Xét phương trình $y=0\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$.

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn (C) là: $S=\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,dx$.

b) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn (C) quanh trục hoành là: $V=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}y^2dx=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(8-x^2\right)dx$.

c) Xét phương trình: $y=2\Leftrightarrow\sqrt{8-x^2}=2\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Gọi $S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-2\right)dx=2\pi-4$, $S_2=\dfrac{1}{2}S-S_1=2\pi+4\Rightarrow S_1<S_2$.

d) Giao điểm của (P) và (C) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=8\,(1)\\ y=\dfrac{x^2}{2}\,(2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $x^2+\dfrac{x^4}{4}=8\Leftrightarrow x^4+4x^2-32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4\\ x^2=-8\,(L)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm 2$

Phần nhỏ giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{x^2}{2}$; $y=\sqrt{8-x^2}$; $x=-2$; $x=2$ nên ta có:

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\underbrace{\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}\right)\mathrm{d}x}_{A}-\underbrace{\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x}_{B}$$

Tính $A=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t\Rightarrow\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}$; $x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

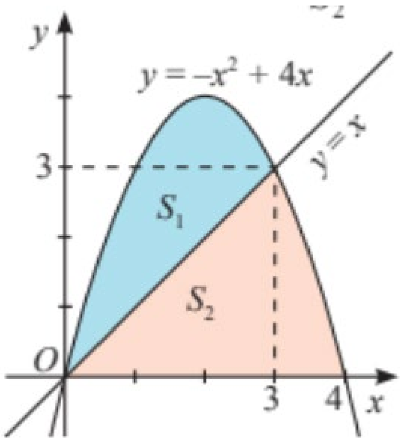
$A=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2 t}.2\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t=8\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\pi+4$.

$B=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$.

$\Rightarrow S_1=2\pi+\frac{4}{3}\Rightarrow S_2=\frac{1}{2}\pi R^2-S_1=2\pi-\frac{4}{3}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}\approx 1,5>1$.

Câu 15: Cho S_1,S_2 là diện tích các hình phẳng được mô tả trong hình bên.



a) Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$, trục hoành và $x=0,x=4$ bằng $\frac{32}{3}$.

b) Diện tích $S_1=\frac{9}{2}$.

c) Diện tích $S_2=8$.

d) $\frac{S_1}{S_2}=\frac{27}{37}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng: $S=\int\limits_0^4\left(-x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$.

b) Đúng: $S_1=\int\limits_0^3\left|-x^2+4x-x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left(-x^2+3x\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$.

c) Sai: $S_2=\int\limits_0^3 x\mathrm{d}x+\int\limits_3^4\left(-x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\frac{37}{6}$.

d) Đúng: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{27}{37}$.

Câu 16: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi $(C): y=x^2$, đường thẳng $x=a,(a>0)$, và 2 trục tọa độ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $S=\int_0^a x^2dx$.

b) $S=\frac{a^3}{3}$.

c) Nếu $S=\frac{1}{2}$ thì $a=1$.

d) Khi $a=1$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox bằng $\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

+ Ta có diện tích hình phẳng (H) là $S=\int_0^a x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a=\frac{a^3}{3}$

+ $S=\frac{a^3}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow a^3=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

+ $a=1\Rightarrow V=\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\frac{\pi}{5}$.

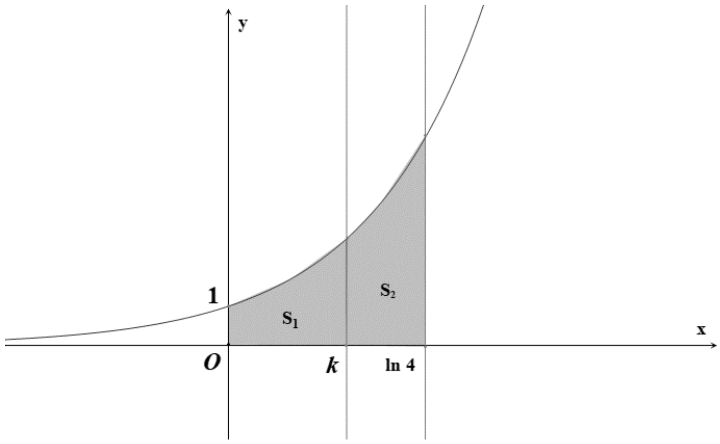
a)Đúng: theo công thức tính diện tích hình phẳng.

b)Đúng: Vì $S=\frac{a^3}{3}$.

c)Sai: Vì $a=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\neq 1$.

d)Sai: Vì $V=\frac{\pi}{5}\neq\frac{1}{3}$..

Câu 17: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần (H_1) và (H_2) có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



a) Khi $k=1$ thì $S_1=\int_0^1 e^x dx$.

b) Khi $k=1$ thì $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{e-1}{2}$.

c) Nếu $S_1=2S_2$ thì $k=\ln 3$

d) Khi quay các hình phẳng $(H_1),(H_2)$ quay xung quanh trục Ox ta được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1,V_2 thỏa $V_1=V_2$ thì $k=\dfrac{1}{2}\ln 17$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

$+$ Khi $k=1$ thì $S_1=\int_0^1 e^x dx$. $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\int_0^1 e^x dx}{\int_1^{\ln 4} e^x dx}=\dfrac{\left.e^x\right|_0^1}{\left.e^x\right|_1^{\ln 4}}=\dfrac{e-1}{4-e}$.

$+\ S_1=2S_2 \Leftrightarrow \int_0^k e^x dx=2\int_k^{\ln 4} e^x dx \Leftrightarrow e^k-1=2(4-e^k)\Leftrightarrow e^k=3\Leftrightarrow k=\ln 3.$

$+\ V_1=V_2\Rightarrow \pi\int_0^k e^{2x}dx=\pi\int_k^{\ln 4} e^{2x}dx \Leftrightarrow \left.e^{2x}\right|_0^k=\left.e^{2x}\right|_k^{ln 4}\Leftrightarrow e^{2k}-1=16-e^{2k}\Leftrightarrow e^{2k}=17\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}\ln 17.$

a)Đúng: vì theo theo công thức tính diện tích hình phẳng.

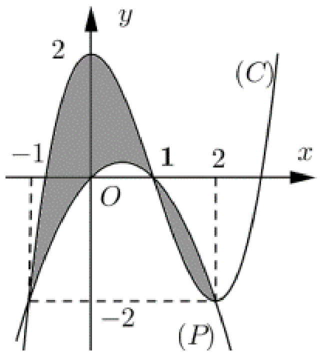
b)Sai: Vì khi $k=1$ thì $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{e-1}{4-e}\neq\dfrac{e-1}{2}$.

c)Đúng: Vì $S_1=2S_2\Rightarrow k=\ln 3$.

d) Đúng:Vì $V_1=V_2\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}\ln 17$.

Câu 18: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$ của hàm đa thức bậc ba và parabol

$(P): y = g(x)$ có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



a) $S = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| dx$

b) $S = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx + \int_{1}^{2} (g(x) - f(x))dx$.

c) $S = \dfrac{37}{12}$.

d) Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi (C), (P) và 2 đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ xung quanh trục Ox bằng $\dfrac{191}{210}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

+ Diện tích phần tô đậm $S = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{1}^{2} |f(x) - g(x)| dx$

$= \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx + \int_{1}^{2} (g(x) - f(x))dx$

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2, y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $g(x) = mx^2 + nx$.

* Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1; x = 1; x = 2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2) = 0$. Với $x = 0$ ta được $2a = 2 \to a = 1$.

*Vậy diện tích phần tô đậm là: $S = \int_{-1}^{2} |(x+1)(x-1)(x-2)| dx = \dfrac{37}{12}$.

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi (C), (P) và 2 đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ xung quanh trục Ox: $V = \left| \pi \int_{1}^{2} (f^2(x) - g^2(x))d \right| x = \dfrac{191}{210}\pi$.

a) Đúng: Vì theo công thức tính diện tích.

b) Đúng vì: $S=\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx+\int_{1}^{2}(g(x)-f(x))dx$

c) Đúng vì: $S=\frac{37}{12}$.

d) Sai vì $V=V=\frac{191}{210}\pi\neq\frac{191}{210}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là V. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $f(1)=e.$

b) $f'(x)>0\ \forall x\in R.$

c) $S_H>2.$

d) $V>15$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=2-2x\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2-2x)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow\ln f(x)=2x-x^2+C\Leftrightarrow f(x)=A.e^{2x-x^2}$. Mà $f(0)=1$ suy ra $f(x)=e^{2x-x^2}$.

a) Đúng vì $f(1)=e.$

b) Sai vì $f'(x)=(2-2x).e^{2x-x^2}\Rightarrow f'(x)>0\Leftrightarrow x<1$.

c) Đúng vì $S_H=\int_1^2 e^{2x-x^2}.dx=2.03>2.$

d) Sai vì $V=\pi.\int_1^2\left(e^{2x-x^2}\right)^2.dx=13.88<15$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục với mọi $x\neq0$ thỏa mãn: $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ với $x\neq0$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là V.

a) $\int_1^2 f'(x).dx=-2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(1;2)$.

c) $S_H=\frac{1}{2}$

d) $V = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Ta có: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ (1)

Thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta có: $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$ (2)

Từ (1) (2) suy ra: $f(x) = \frac{2}{x} - x$

a) Đúng vì $\int_1^2 f'(x).dx = f(2) - f(1) = -2$.

b) Sai vì $f(x) = \frac{2}{x} - x \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2} - 1$ nên hàm số nghịch biến trên $(1;2)$.

c) Đúng vì $S_H = \int_1^2 \left|\frac{2}{x} - x\right|.dx = \frac{1}{2}$.

d) Đúng vì $V = \pi.\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - x\right)^2 dx = \frac{\pi}{3}$.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

V. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH

Câu 1: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx = F(3)-G(0)+a,\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0, x=3$. Khi $S=15$ thì a bằng

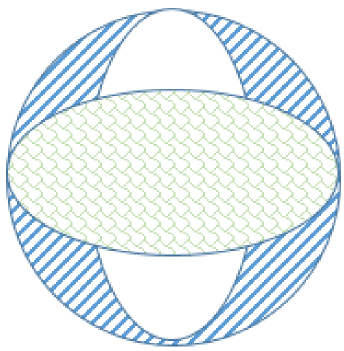
Câu 2: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5)-G(0)+a$ $(a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=5$. Khi $S=20$ thì a bằng

Câu 3: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = F(4)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=4$. Khi $S=8$ thì a bằng

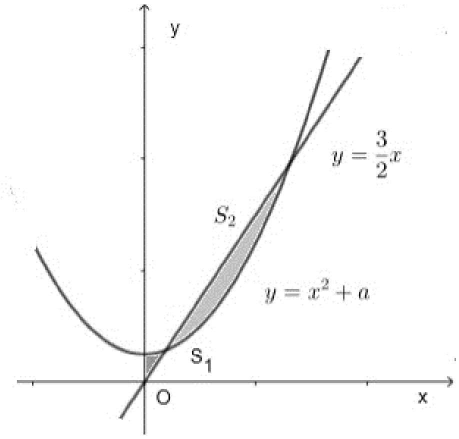
Câu 4: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=2$. Khi $S=6$ thì a bằng

Câu 5: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x) = F(4)-G(0)+2m(m>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=4$. Khi $S=8$ thì m bằng:

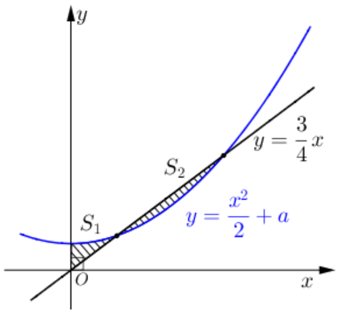
Câu 6: Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip bằng. ((kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



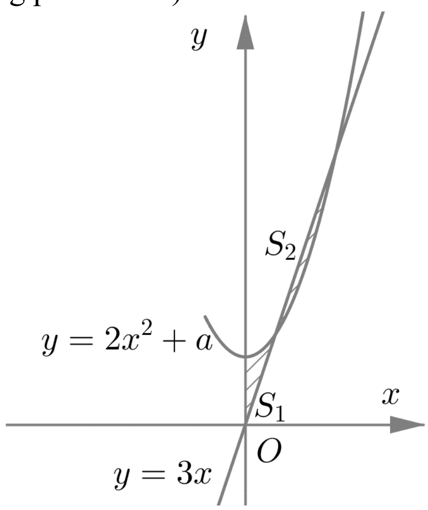
Câu 7: Cho đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



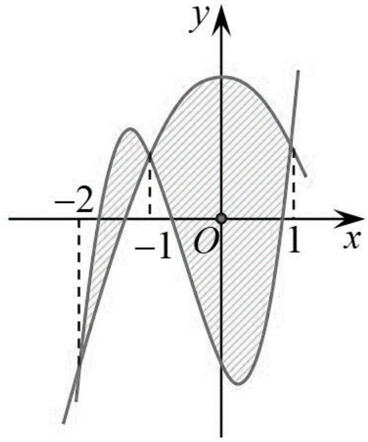
Câu 8: Cho đường thẳng $y=\dfrac{3}{4}x$ và parabol $y=\dfrac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Câu 9: Cho đường thẳng $y=3x$ và parabol $2x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

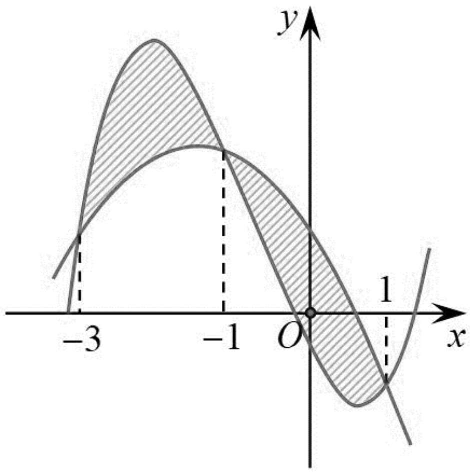


Câu 10: Cho hai hàm số $f(x)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1; 1.

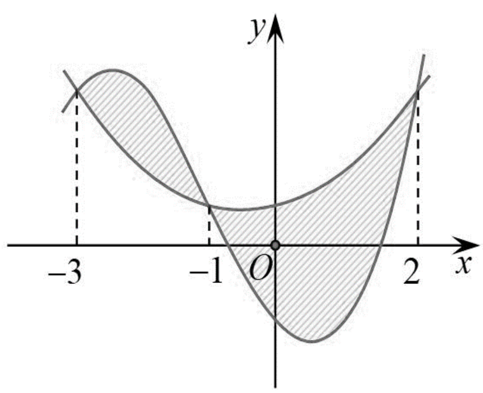


Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

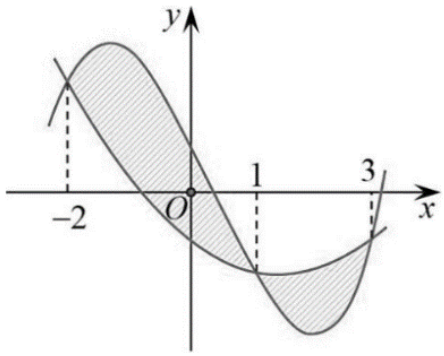


Câu 12: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Câu 13: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Câu 14: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Câu 15: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

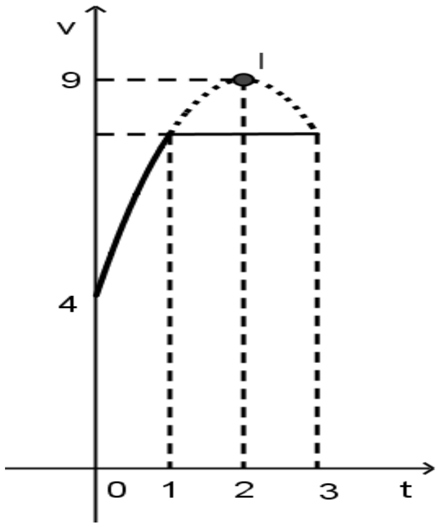
Câu 16: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

Câu 17: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

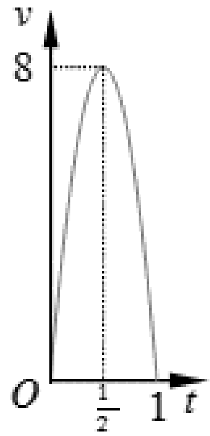
Câu 18: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Câu 19: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s\left(\text{m}\right)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bào nhiêu?

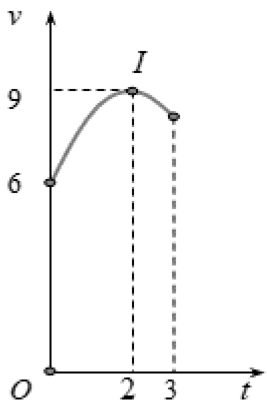
Câu 20: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



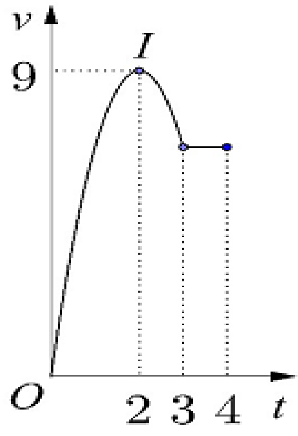
Câu 21: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



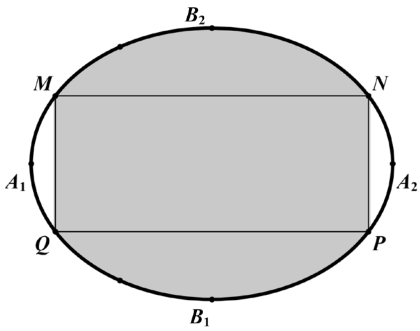
Câu 22: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v\left(\text{km/h}\right)$ phụ thuộc thời gian t $\left(\text{h}\right)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(2;9\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Câu 23: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v phụ thuộc thời gian t có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



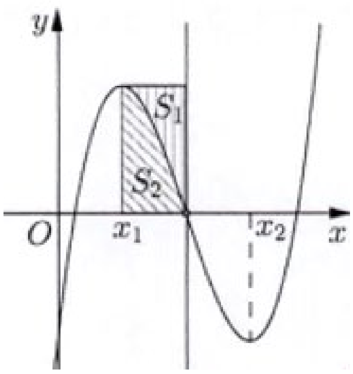
Câu 24: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 vnđ / m^2 và phần còn lại 100.000 vnđ / m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{m}$, $B_1B_2 = 6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3\text{m}$? (đơn vị nghìn đồng)



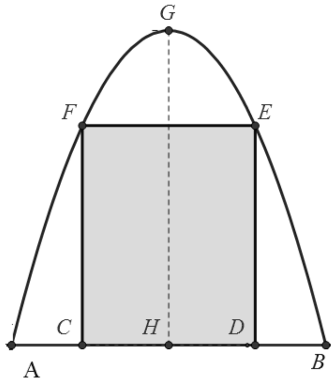
Câu 25: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a,b,c,m,n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2, 3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và hàm số $g(x) = mx^3 + nx^2 - x$; với $a,b,c,m,n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1; 2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

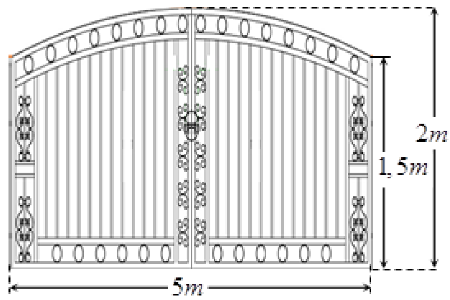
Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi điểm S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng



Câu 28: Cho Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng thì trang trí hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên bằng bao nhiêu? (đơn vị nghìn đồng)

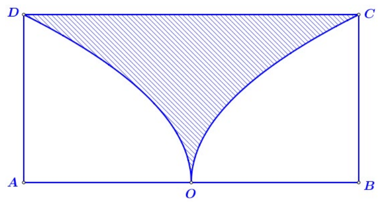


Câu 29: Bác Bình muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy. (đơn vị nghin đồng) (làm tròn đến hàng nghìn)

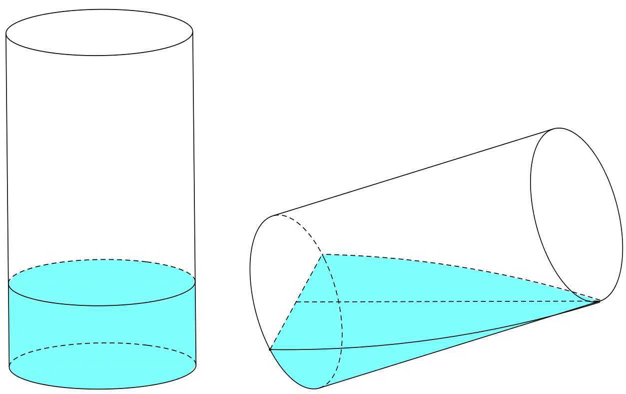


DẠNG 2: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

Câu 30: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 10$ cm và chiều rộng $BC = 5$ cm; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB, chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhật đó. Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

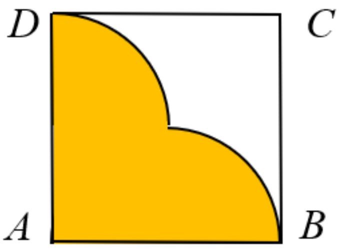


Câu 31: Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\text{cm}$, chiều cao lòng cốc là $10\,\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.

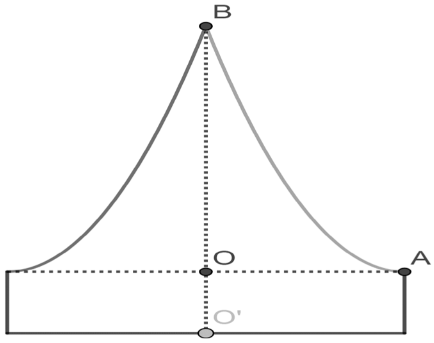


Câu 32: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.

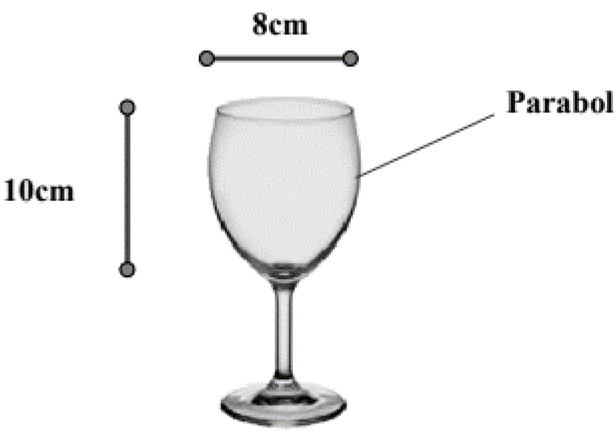
Tính thể tích của vật trang trí đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



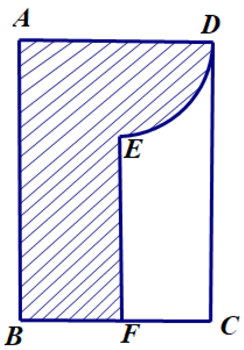
Câu 33: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Câu 34: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



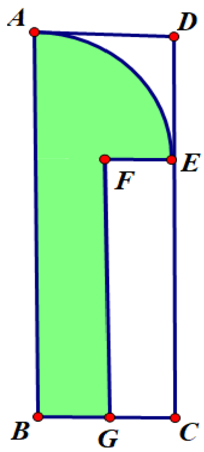
Câu 35: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) quay xung quanh trục AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3cm$, $AD = 2cm$; F là trung điểm của BC; điểm E cách AD một đoạn bằng $1cm$.



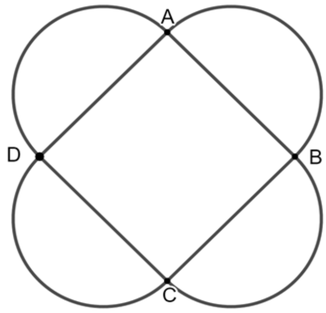
Thể tích của vật thể trang trí trên là (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Câu 36: Một chiếc đinh tán có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi cho phần tô đậm quay xung quanh cạnh AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 20mm$, $AD = 6mm$, cung AE là cung một phần tư của đường tròn có bán kính bằng $6mm$, điểm F cách AB một đoạn bằng $3mm$

Thể tích của đinh tán là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

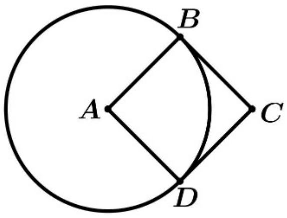


Câu 37: Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn nửa đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính.

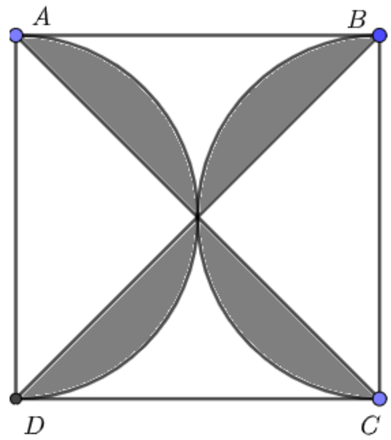


Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình trên quanh đường thẳng AC là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

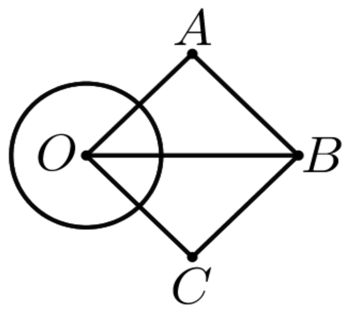
Câu 38: Trên một mảnh giấy vẽ hình tròn có bán kính bằng 2, vẽ chồng lên trên đó một hình vuông có 1 đỉnh là tâm của hình tròn và 2 đỉnh khác nằm trên đường tròn. Tính thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình đó quanh trục đối xứng của nó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



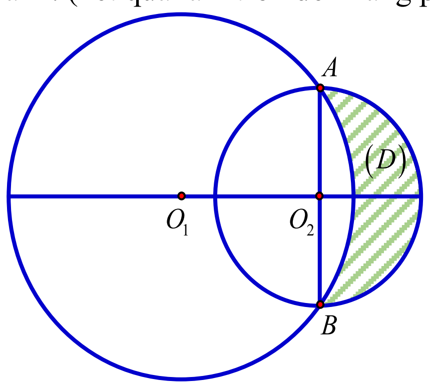
Câu 39: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$ vẽ hai đường chéo và hai nửa đường tròn đường kính là hai cạnh AD, BC cắt nhau tạo thành 4 hình cánh quạt như hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay 4 cánh quạt này quanh cạnh CD. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



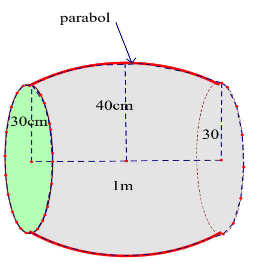
Câu 40: Cho hình tròn tâm O có bán kính $R=2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



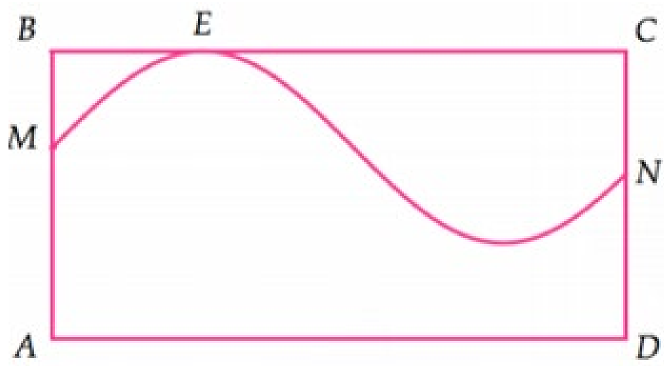
Câu 41: Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm $A,\ B$ sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình thẳng được giới hạn bởi hai đường tròn. Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Câu 42: Một cái trống trường có bán kính các đáy là $30\,\text{cm}$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, chiều dài của trống là $1m$. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

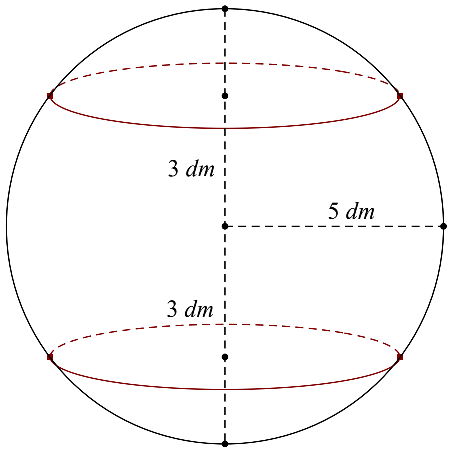


Câu 43: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=30\,cm, AD=\dfrac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình $\sin$ như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM=20\,cm$, $CN=15\,cm$, $BE=5\pi\,cm$. Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD (đơn vị dm^3) (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

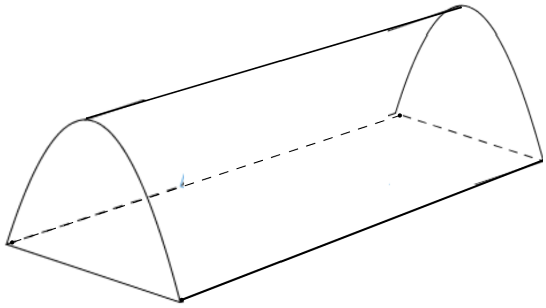


Câu 44: Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M,N,P,Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/ m^2 và trồng rau là 50.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$ m, $B_1B_2 = 4$ m? (đơn vị nghìn đồng)

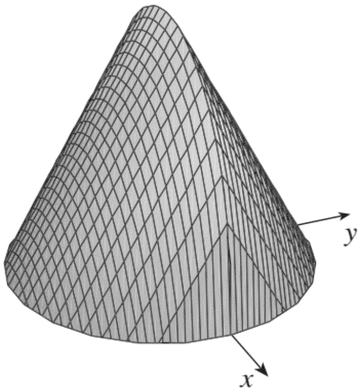
Câu 45: Người ta làm một cái lu đựng nước bằng cách cắt bỏ 2 chỏm của một khối cầu có bán kính 5 dm bằng 2 mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm khối cầu 3 dm. Tính thể tích của chiếc lu. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



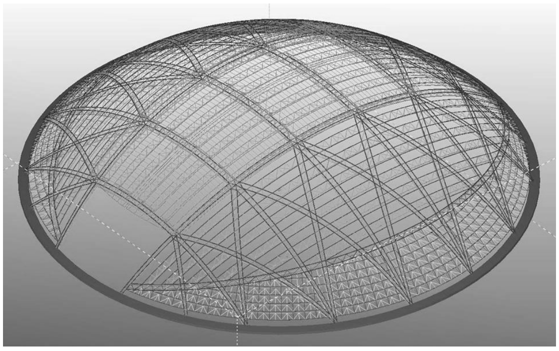
Câu 46: Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12a dự kiến dựng một cái trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?

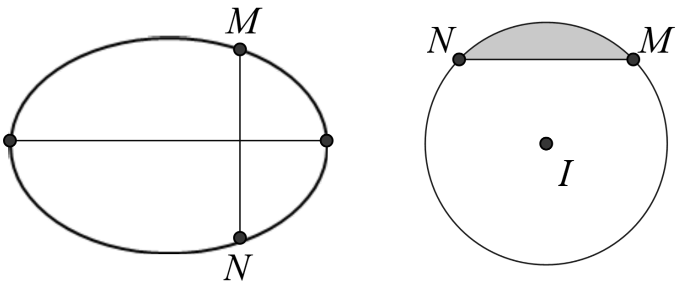


Câu 47: Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1. Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-1\le x\le 1\right)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Câu 48: Sân vận động Sport Hub là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip $\left(E\right)$ có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của $\left(E\right)$ và cắt elip ở M,N thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN}=90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích bằng bao nhiêu? (đơn vị dam^3) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)





CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

V. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH

Câu 1: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx = F(3) - G(0) + a,\ (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0, x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên

$G(x) = F(x) + C, \forall x \in \mathbb{R}$, với C là hằng số.

Mặt khác $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = F(3) - F(0)$

Lại có $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = F(3) - G(0) + a$, suy ra $G(0) = F(0) + a$.

Do đó $a = C \Rightarrow G(x) = F(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0, x = 3$.

$$S = \int_0^3 |G(x) - F(x)|\mathrm{d}x \Leftrightarrow 15 = \int_0^3 |a|\mathrm{d}x \overset{a>0}{\Leftrightarrow} 15 = 3a \Leftrightarrow a = 5.$$

Câu 2: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5) - G(0) + a$ $(a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Vì $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên

$$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5) - F(0) = G(5) - G(0) = F(5) - G(0) + a \Rightarrow \begin{cases} F(0) = G(0) - a \\ F(5) = G(5) - a \end{cases}.$$

Do đó $F(x) = G(x) - a \Leftrightarrow F(x) - G(x) = -a$

S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=5$ nên

$$S=\int_0^5 |F(x)-G(x)|\mathrm{d}x=\int_0^5 |-a|\mathrm{d}x=\int_0^5 |a|\mathrm{d}x=\int_0^5 a\mathrm{d}x=ax\Big|_0^5=5a\ \ (a>0).$$

Mà $S=20$ nên $5a=20 \Leftrightarrow a=4$..

Câu 3: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=F(4)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=4$. Khi $S=8$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 2

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=F(4)-F(0)$.

Mà $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=F(4)-G(0)+a\ (a>0)$ nên

$F(4)-F(0)=F(4)-G(0)+a \Leftrightarrow G(0)=F(0)+a$.

Lại có $G(x)$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x)=F(x)+a\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=4$ là

$$S=\int_0^4 |F(x)-G(x)|\mathrm{d}x=\int_0^4 a\,\mathrm{d}x=4a=8 \Rightarrow a=2.$$

Câu 4: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=2$. Khi $S=6$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)-G(x)=C$ với C là hằng số.

Ta có $S=\int_0^2 |F(x)-G(x)|\mathrm{d}x=\int_0^2 |C|\mathrm{d}x=|C|.\int_0^2 1\mathrm{d}x=2|C|=6 \Rightarrow |C|=3\ \ (*)$.

Ta lại có: $F(0)-G(0)=C \Leftrightarrow F(0)=G(0)+C$

Theo đề bài:

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=F(2)-\big(G(0)+C\big)=F(2)-G(0)-C=F(2)-G(0)+a.$$

Suy ra: $a=-C$ mà $a>0$ nên $C<0\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $C=-3 \Rightarrow a=-C=3$.

Vậy: $a=3$.

Câu 5: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và

$\int_0^4 f(x) = F(4) - G(0) + 2m\,(m > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 4$. Khi $S = 8$ thì m bằng:

Lời giải

Trả lời: 1

Vì $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên giả sử trên $\mathbb{R}$, ta có:

$G(x) = F(x) + C$ suy ra $G(0) = F(0) + C$

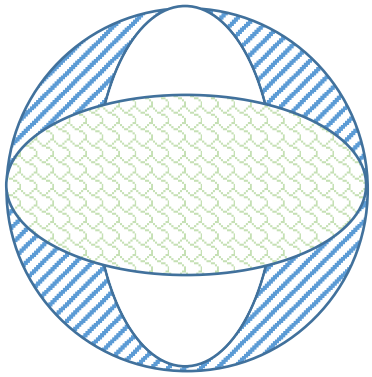
$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = F(4) - G(0) + 2m \Leftrightarrow F(4) - F(0) = F(4) - F(0) - C + 2m \Leftrightarrow C = 2m$

Vậy $G(x) = F(x) + 2m$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $S = \int_0^4 |F(x) - G(x)|\mathrm{d}x = \int_0^4 2m\mathrm{d}x = 2mx\Big|_0^4 = 8m$,

Mà $S = 8$ nên $m = 1$.

Câu 6: Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip bằng. ((kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 3,7

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

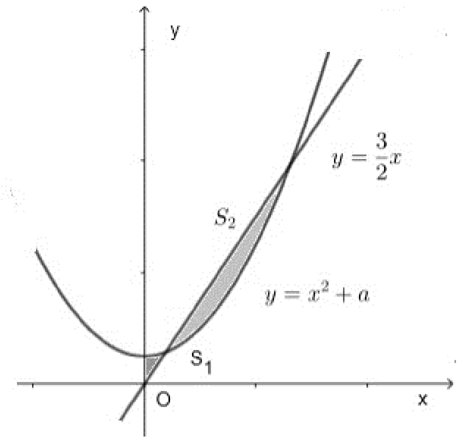
Hai Elip lần lượt có phương trình: $(E_1): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

Tọa độ giao điểm của hai Elip trong góc phần tư thứ nhất là nghiệm phương trình:

$$x^2 + \frac{1 - \frac{x^2}{4}}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S = \pi.2^2 - \pi.2.1 - 4\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \left(2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)dx = 3,71$

Câu 7: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,4

Giải toán:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+a=\frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2-3x+2a=0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a<\frac{9}{16} \end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0<x_1<x_2$ thì $x_2=\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}$.

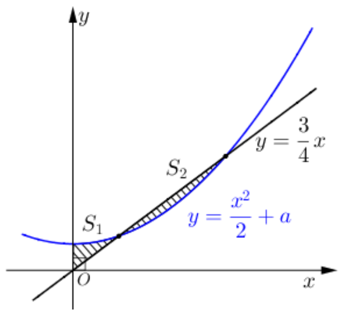
Để $S_1=S_2$ khi và chỉ khi $\int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)dx=0$

Ta có: $\int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3}+ax_2-\frac{3}{4}x_2^2=0$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^3}{3}+a\cdot\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^2=0$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x=0,421875\approx 0,4$.

Câu 8: Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,2

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+4a=0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0<x_1<x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{3}{2} & (*) \\ x_1x_2=2a & (**) \end{cases}$.

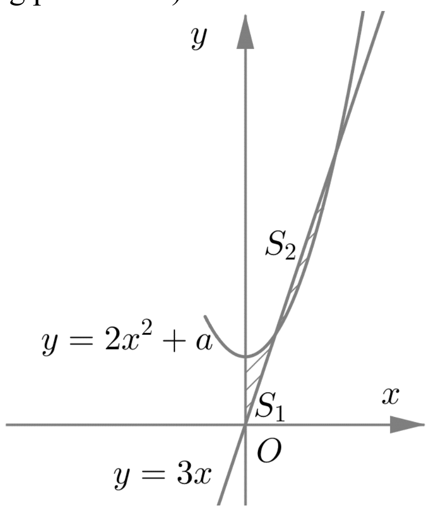
$$S_1-S_2=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|dx+\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|dx=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|dx=0$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{8}x^2+ax\right|\Bigg|_0^{x_2}=0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x_2^3-\frac{3}{8}x_2^2+ax_2\right|=0 \Rightarrow a=-\frac{x_2^2}{6}+\frac{3x_2}{8}\ (***).$$

Từ $(*) \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}-x_2$, thay vào $(**) \Rightarrow \left(\frac{3}{2}-x_2\right)x_2=-\frac{x_2^2}{3}+\frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3}-\frac{3x_2}{4}=0 \Rightarrow x_2=\frac{9}{8}$

$\xrightarrow{(***)} a=\frac{27}{128}\approx 0,2$.

Câu 9: Cho đường thẳng $y=3x$ và parabol $2x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,8

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2+a=3x \Leftrightarrow 2x^2-3x+a=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9-8a>0 \\ \frac{a}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\frac{9}{8} \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{9}{8}.$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x=\frac{3\pm\sqrt{9-8a}}{4}$.

Ta có $S_1=S_2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)dx=-\int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)dx$.

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}} \left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} \left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} \left(2x^2-3x+a\right)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax\right)\Bigg|_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} = 0$$

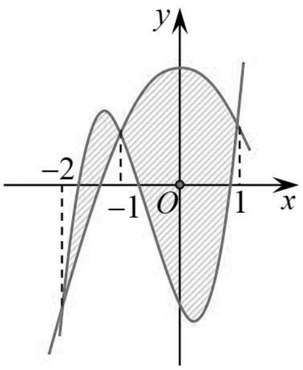
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2 + a\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right) + a\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4} = 0 \ \ (vn) \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2 - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right) + a = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right) + a = 0 \xrightarrow[\text{Shift Solve}]{\text{CASIO}} a = \frac{27}{32} \approx 0,8$$

Câu 10: Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ (a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1; 1.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 6,2

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow a^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0.$ $\qquad (*)$

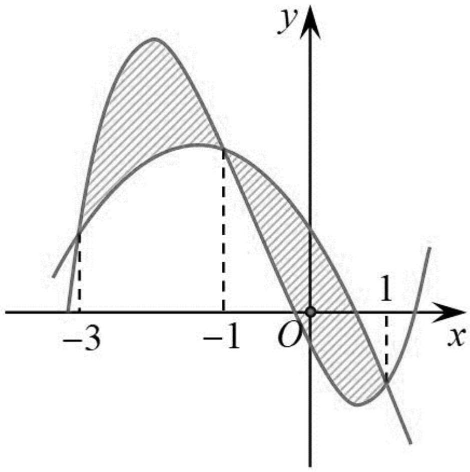
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$. Ta được

$ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = k(x+2)(x+1)(x-1)$.

Khi đó $-4 = -2k \Rightarrow k = 2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^{1}\left|2(x+2)(x+1)(x-1)\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{6}$.

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



Lời giải

Trả lời: 4

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là -3; -1; 1 nên suy ra $\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\-a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-d=\frac{3}{2}\\a=\frac{1}{2}\\c-e=\frac{-1}{2}\end{cases}$

Vậy $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$$S=\int_{-3}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$\Leftrightarrow S=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4.$$

Cách 2:

Ta có: $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}$

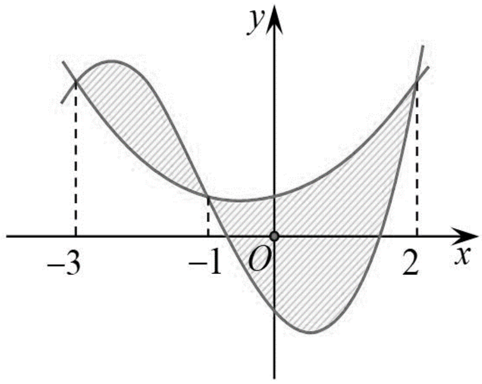
Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Do đó: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng: $S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]dx+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]dx$

$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)dx=4$.

Câu 12: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 5,3

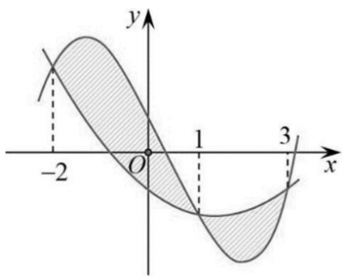
Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên

$f(x)-g(x)=a(x+3)(x-2)(x+1)$.

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$. Do đó $S=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{48}$

.

Câu 13: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 5,3

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}=0$.

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\dfrac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1; x=3$.

Với $x=-2$ ta có $-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\dfrac{3}{2}$, (1).

Với $x=1$ ta có $a+(b-d)+(c-e)=-\dfrac{3}{2}$, (2).

Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\dfrac{3}{2}$, (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\dfrac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\dfrac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b-d=-\dfrac{1}{2}\\ c-e=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$.

Hay ta có

$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{2}\right|\mathrm{d}x=\dfrac{63}{16}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{253}{48}$.

Câu 14: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{13}{30}t\,(\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 25

Ta có $v_B(t)=\int a.\mathrm{d}t=at+C$, $v_B(0)=0\Rightarrow C=0 \Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$S_A=\int_0^{25}\left(\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{13}{30}t\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\dfrac{1}{300}t^3+\dfrac{13}{60}t^2\right)\right|_0^{25}=\dfrac{375}{2}$.

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$S_B=\int_0^{15}at.\mathrm{d}t=\left.\dfrac{at^2}{2}\right|_0^{15}=\dfrac{225a}{2}$.

Ta có $\dfrac{375}{2}=\dfrac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\dfrac{5}{3}.15=25\,(\mathrm{m/s})$.

Câu 15: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{120}t^2+\dfrac{58}{45}t\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 30

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a\mathrm{d}t = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{15} at\mathrm{d}t \Leftrightarrow 225 = a.\frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2.15 = 30(m/s)$.

Câu 16: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 10

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$ Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10)\,dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t\right)\Bigg|_0^2 = 10m.$$

Câu 17: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 16

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t\right)dt = 96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a\,dt = at + C$.

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

$$S_2 = \int_3^{15}(at - 3a)\,dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at\right)\Bigg|_3^{15} = 72a(m).$$

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}\left(m/s^2\right)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16(m/s)$.

Câu 18: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\left(m/s\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 15

Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường đi được tới lúc đó là $\int_0^{15} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{15}\left(\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{1}{540}t^3+\frac{11}{36}t^2\right)\right|_0^{15}=75\left(m\right)$.

Vận tốc của chất điểm B là $y\left(t\right)=\int a.\mathrm{d}t=a.t+C$ (C là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $y\left(0\right)=0\Leftrightarrow C=0$;

Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t)\mathrm{d}t=75\Leftrightarrow\int_0^{10} a.t\mathrm{d}t=75\Leftrightarrow\left.\frac{a.t^2}{2}\right|_0^{10}=75\Leftrightarrow 50a=75\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

Vậy có $y\left(t\right)=\frac{3t}{2}$; suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $y\left(10\right)=15\left(m/s\right)$.

Câu 19: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s\left(\mathrm{m}\right)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bào nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 108

Vận tốc của vật chuyển động là $v=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t=f\left(t\right)$

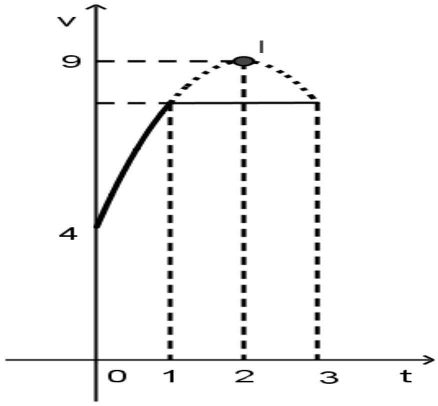
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[0;6\right]$

Ta có $f'\left(t\right)=-3t+12\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=4\in\left[0;6\right]$

$f\left(0\right)=0; f\left(4\right)=24; f\left(6\right)=18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24\left(\mathrm{m/s}\right)$.

Câu 20: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

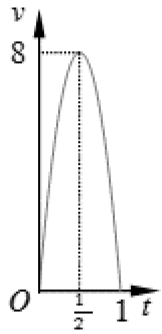
Trả lời: 21,6

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau: $\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Với $t = 1$ ta có $v = \dfrac{31}{4}$.

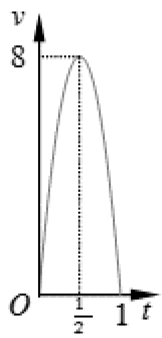
Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s = \int\limits_0^1 \left(-\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int\limits_1^3 \dfrac{31}{4} dt = \dfrac{259}{12} \approx 21{,}583$

Câu 21: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 4,5



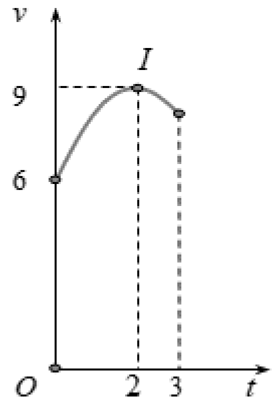
Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}$.

Suy ra $(P): y = -32x^2 + 32x$.

Vậy quảng đường người đó đi được là $s = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(-32x^2 + 32x\right) \mathrm{d}x = 4,5$.

Câu 22: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 24,8

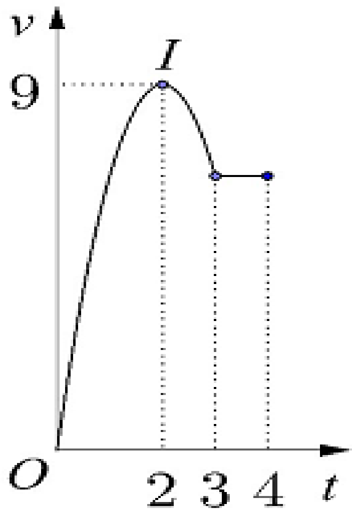
Gọi $v(t) = a.t^2 + bt + c$.

Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 9 \\ a.0^2 + b.0 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3}{4} \\ b = 3 \\ c = 6 \end{cases}$. Tìm được $v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$

Vậy $S = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6\right) dt = 24,75$

Câu 23: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v phụ thuộc thời gian t có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;\ 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



Lời giải

Trả lời: 27

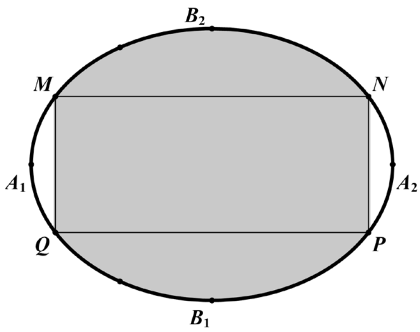
Gọi $\left(P\right): y = ax^2 + bx + c$.

Vì $\left(P\right)$ qua $O\left(0;0\right)$ và có đỉnh $I\left(2;9\right)$ nên dễ tìm được phương trình là $y = \dfrac{-9}{4}x^2 + 9x$.

Ngoài ra tại $x = 3$ ta có $y = \dfrac{27}{4}$

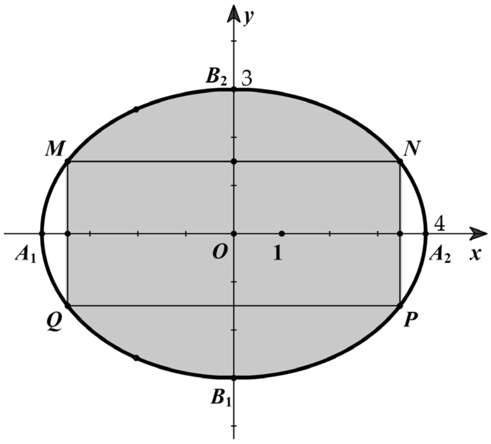
Vậy quãng đường cần tìm là: $S = \int\limits_0^3 \left(\dfrac{-9}{4}x^2 + 9x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \dfrac{27}{4}\mathrm{d}x = 27 \ \ (km)$.

Câu 24: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là $200.000 \ \text{vnđ} / \text{m}^2$ và phần còn lại $100.000 \ \text{vnđ} / \text{m}^2$. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{m}$, $B_1B_2 = 6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3\text{m}$? (đơn vị nghìn đồng)



Lời giải

Trả lời: 7322



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Với $\begin{cases} A_1A_2=8=2a \\ B_1B_2=6=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \to (E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Suy ra diên tích của hình elip là $S_{(E)}=\pi a.b=12\pi\ (\mathrm{m}^2)$.

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ=3\to M\left(x;\frac{3}{2}\right)\in(E)$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow x^2=12 \to M\left(-2\sqrt{3};\frac{3}{2}\right);N\left(2\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)$

Gọi $S_1;S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

Ta có: $S_2=4.\frac{3}{4}\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=3\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{x=4\sin t} S_2=4\pi-6\sqrt{3}\ (\mathrm{m}^2)$

Suy ra: $S_1=S_{(E)}-S_2=8\pi+6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$T=\left(4\pi-6\sqrt{3}\right).100+\left(8\pi+6\sqrt{3}\right).200\simeq 7.322.000$.

Câu 25: Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 5,9

Vì hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$ nên hàm số $y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+3$ có ba nghiệm là $-1,2,3$. Suy ra, tồn tại số thực k để $y'=k(x+1)(x-2)(x-3)$.

Ta có $f'(0)=3$ nên $k=\frac{1}{2}$. Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng: $\int\limits_{-1}^{3}|y'(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{3}\left|\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{12}$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và hàm số $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1;2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 7,9

Vì hàm số bậc bốn $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1;2$ và 3 nên phương trình hàm số $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $-1;2$ và 3.

Hay

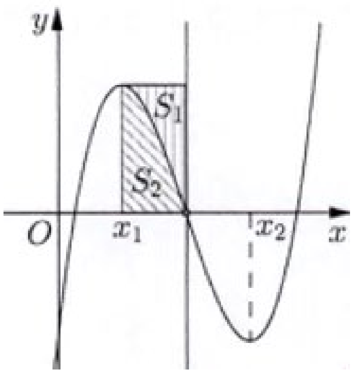
$$f'(x)-g'(x)=A(x+1)(x-2)(x-3)$$
$$\Leftrightarrow 4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+4=A(x+1)(x-2)(x-3)$$

Đồng nhất thức hệ số tự do ta thấy $4=6A\Leftrightarrow A=\frac{2}{3}$

Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

$$S=\int_{-1}^{3}\left|f'(x)-g'(x)\right|dx=\int_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx$$
$$=\int_{-1}^{2}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx+\int_{2}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx$$
$$=\left|\int_{-1}^{2}\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{3}\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\,dx\right|$$
$$=\frac{15}{2}+\frac{7}{18}=\frac{71}{9}$$

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi điểm S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



Lời giải

Trả lời: 0,6

Rõ ràng kết quả bài toán không đổi nếu ta tịnh tiến đồ thị sang trái cho điểm uốn trùng gốc tọa độ O.

Gọi $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là hàm số khi đó thì dễ thấy $g(x)$ lẻ nên có ngay $b=d=0$ và $g(x)=ax^3+cx$ có hai điểm cực trị tương ứng là $-1,1,$ cũng là nghiệm của $3ax^2+c=0.$

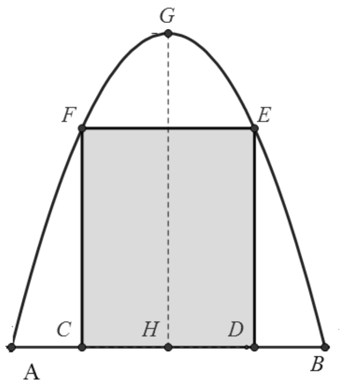
Từ đó dễ dàng có $g(x)=k(x^3-3x)$ với $k>0$.

Xét diện tích hình chữ nhật $S_1+S_2=|(-1)\cdot g(-1)|=2k$. Ngoài ra,

$$S_2=k\int_{-1}^{0}\left|x^3-3x\right|\mathrm{d}x=\frac{5}{4}k.$$

Vì thế $S_1=2k-\frac{5k}{4}=\frac{3k}{4}$ và $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$.

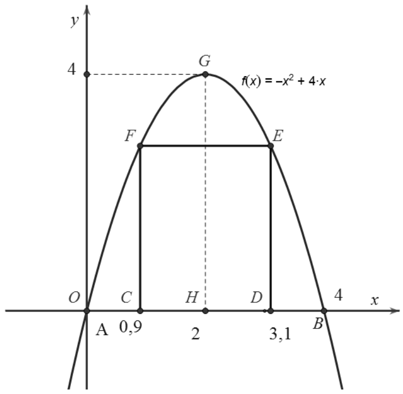
Câu 28: Cho Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng thì trang trí hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên bằng bao nhiêu? (đơn vị nghìn đồng)



Lời giải

Trả lời: 11441

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng với gốc O. Khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có $\begin{cases} c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \\ a.2^2+b.2+c=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=0 \end{cases}$.

Suy ra phương trình parabol là $y=f(x)=-x^2+4x$.

Diện tích của cả cổng là $S=\int_0^4\left(-x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\right|_0^4=\frac{32}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

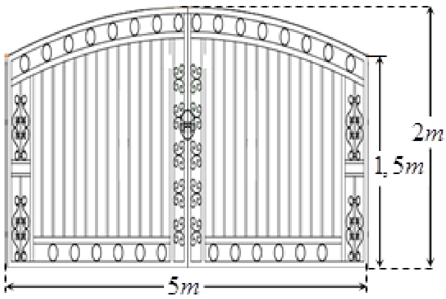
Mặt khác chiều cao $CF=DE=f\left(0,9\right)=2,79(\mathrm{m})$; $CD=4-2.0,9=2,2\left(\mathrm{m}\right)$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF}=CD.CF=6,138\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần để trắng là $S_1=S-S_{CDEF}=\frac{32}{3}-6,138=\frac{6793}{1500}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000+\frac{6793}{1500}.900000=11441400$ đồng.

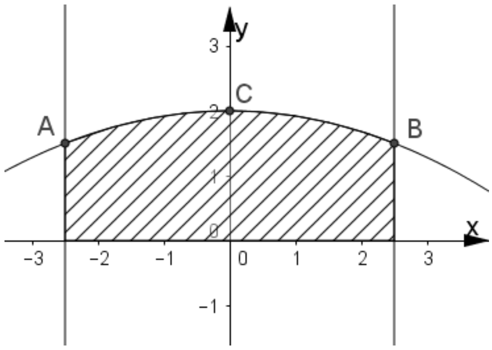
Câu 29: Bác Bình muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy. (đơn vị nghìn đồng) (làm tròn đến hàng nghìn)



Lời giải

Trả lời: 6416

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A\left(-2,5;1,5\right)$, $B\left(2,5;1,5\right)$, $C\left(0;2\right)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y=ax^2+bx+c$, với $a;b;c\in\mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A\left(-2,5;1,5\right)$, $B\left(2,5;1,5\right)$, $C\left(0;2\right)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a\left(-2,5\right)^2+b\left(-2,5\right)+c=1,5\\ a\left(2,5\right)^2+b\left(2,5\right)+c=1,5\\ c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{2}{25}\\ b=0\\ c=2\end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y=-\frac{2}{25}x^2+2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\frac{2}{25}x^2+2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2,5$; $x=2,5$.

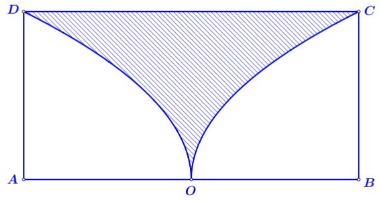
Ta có $S=\int\limits_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2+2\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-2,5}^{2,5}=\frac{55}{6}$.

Vậy bác Bình phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

$S\times 700000=\frac{55}{6}\times 700000\approx 6.417.000$.

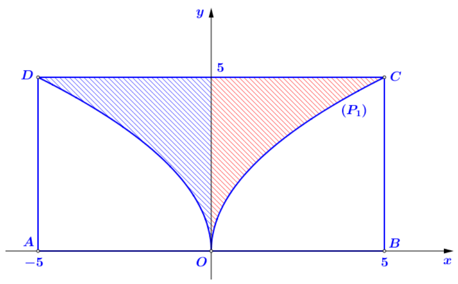
DẠNG 2: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

Câu 30: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=10$ cm và chiều rộng $BC=5$ cm; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB, chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C,D của hình chữ nhật đó. Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 393



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AB ta được khối trụ có

- Bán kính đáy $r=BC=5$ cm.
- Chiều cao $h=AB=10$ cm.

Do đó thể tích khối trụ này có thể tích $V_1=\pi.5^2.10=250\pi\left(\mathrm{cm}^3\right)$

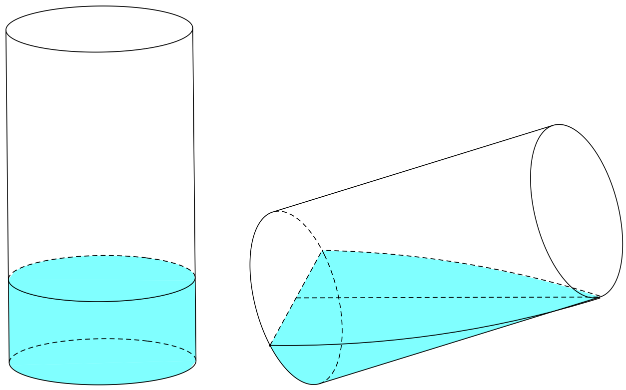
Mặt khác, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ thì $C(5;5)$ và parabol bên phải trục Ox có dạng $(P_1):y^2=2px$.

Ta có $C\in(P_1)\Leftrightarrow p=\frac{5}{2}\Rightarrow(P_1):y^2=5x$ hay $y=\sqrt{5x}$.

Khi đó miền (R) khi quay quanh trục Ox có thể tích $V_2=2\pi\int\limits_0^5\left[5^2-5x\right]\mathrm{d}x=2\pi\left(25x-\frac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_0^5=125\pi$

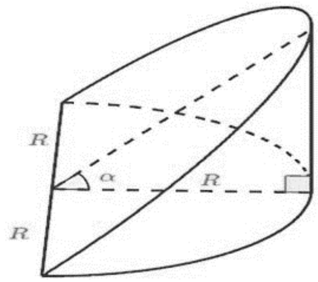
Vậy thể tích phần còn lại là $V=V_1-V_2=125\pi\left(\mathrm{cm}^3\right)\approx 393\left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Câu 31: Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\mathrm{cm}$, chiều cao lòng cốc là $10\,\mathrm{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



Lời giải

Trả lời: 240



Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

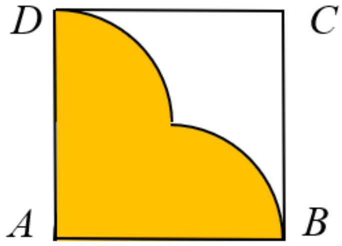
$$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}.\sqrt{R^2-x^2}.\tan\alpha \Rightarrow S(x)=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)tan\,\alpha .$$

Thể tích hình cái nêm là: $V=\frac{1}{2}\tan\alpha\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V_{kn}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

$\Rightarrow V_{kn}=\frac{2}{3}R^3.\frac{h}{R}=240\,cm^3$.

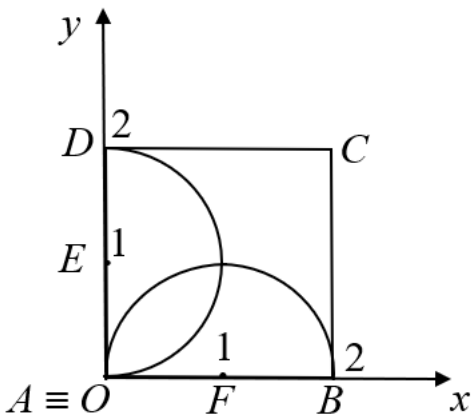
Câu 32: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.



Tính thể tích của vật trang trí đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 12,3



Chọn trục Ox chứa điểm B, trục Oy chứa điểm D, và gốc tọa độ O trùng điểm A.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, AB. Khi đó $E(0;1), F(1;0)$.

*Phương trình đường tròn có tâm $E(0;1)$ và đường kính $AD=2$ là: $x^2+(y-1)^2=1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm E là: $y=1+\sqrt{1-x^2}$

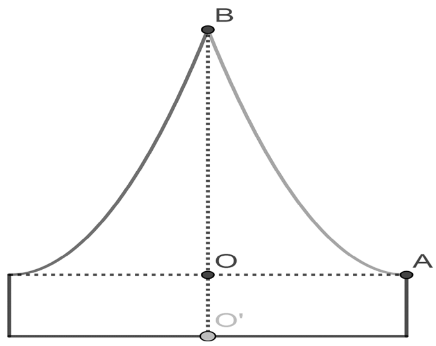
*Phương trình đường tròn có tâm $F(1;0)$ và đường kính $AB=2$ là: $(x-1)^2+y^2=1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm F là: $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$

Vậy, thể tích vật trang trí là:

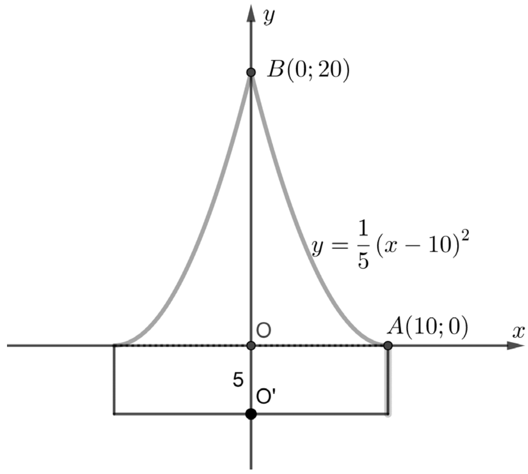
$$V=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2.\mathrm{d}x+\pi\int_1^2\left(1-(x-1)^2\right).\mathrm{d}x\approx 12{,}3\left(\mathrm{cm}^3\right)$$

Câu 33: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 2618



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V = V_1 + V_2$

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi \ (\text{cm}^3)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

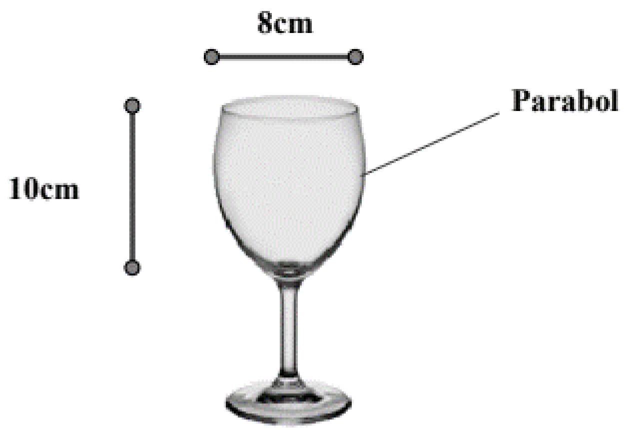
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$.

Suy ra $V_2 = \pi\int_0^{20}\left(10-\sqrt{5y}\right)^2 \text{dy} = \pi\left(3000 - \frac{8000}{3}\right) = \frac{1000}{3}\pi \ (\text{cm}^3)$.

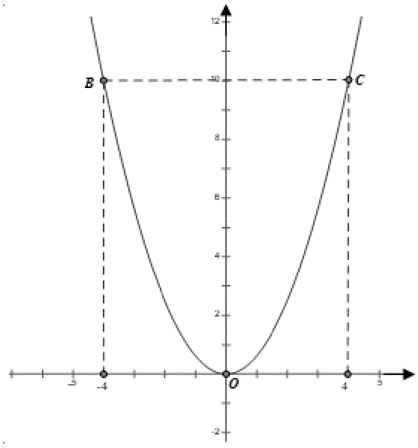
Do đó $V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3}\pi + 500\pi = \frac{2500}{3}\pi \approx 2618 \ (\text{cm}^3)$.

Câu 34: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

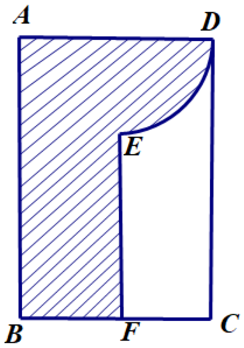
Trả lời: 251



Parabol có phương trình $y=\frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc $V=\pi\int_0^{10}\left(\frac{8}{5}y\right).dy \approx 251$.

Câu 35: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) quay xung quanh trục AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=3cm$, $AD=2cm$; F là trung điểm của BC; điểm E cách AD một đoạn bằng $1cm$.



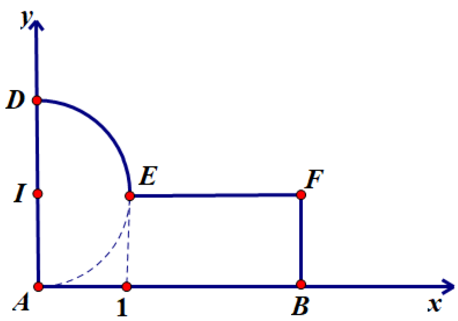
Thể tích của vật thể trang trí trên là (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 16,5

Chọn hệ trục Oxy có $O\equiv A$; $B\in Ox; D\in Oy$.

Ta có: $A(0;0)$; $D(0;2)$; $B(3;0)$; $E(1;1)$



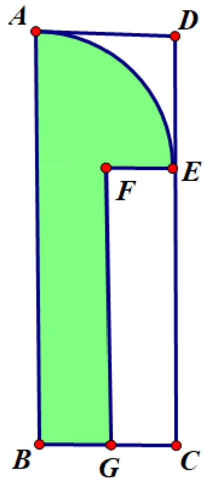
Đường tròn tâm $I(0;1)$ chứa cung ED có phương trình là: $x^2+(y-1)^2=1$.

Nên cung trên của đường tròn tâm I là: $y=1+\sqrt{1-x^2}$.

Thể tích của vật thể trang trí là:

$$V=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx+\pi\int_1^3 1^2dx\approx 16,5(cm^3).$$

Câu 36: Một chiếc đinh tán có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi cho phần tô đậm quay xung quanh cạnh AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=20mm$, $AD=6mm$, cung AE là cung một phần tư của đường tròn có bán kính bằng $6mm$, điểm F cách AB một đoạn bằng $3mm$

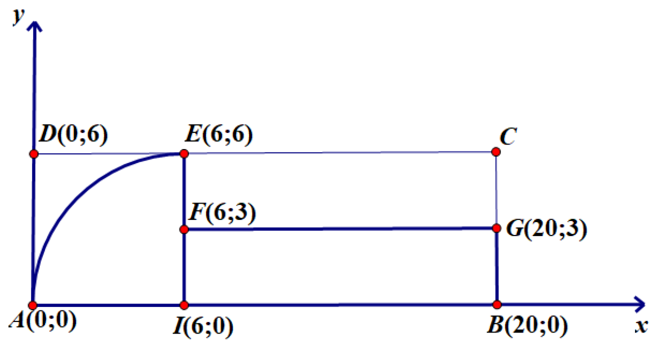


Thể tích của đinh tán là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 848

Chọn hệ trục Oxy có $A\equiv O$; $B(20;0);D(0;6)$.



Khi đó: F là trung điểm của EI và $I(6;0);E(6;6);F(6;3);G(20;3)$.

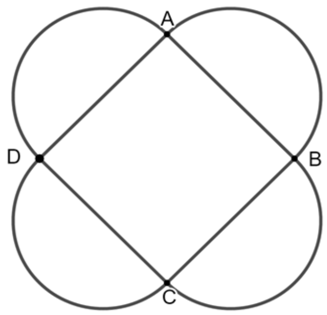
+ Đường tròn tâm $I(6;0)$ bán kính bằng 6 có phương trình là: $(x-6)^2+y^2=36$.

Nên nửa cung phía trên của trục Ox có phương trình là: $y=\sqrt{36-(x-6)^2}$.

+ Phương trình đường thẳng FG là: $y=3$.

Vậy thể tích của đinh tán là: $V=\pi\int_0^6\left[36-(x-6)^2\right]dx+\pi\int_6^{20}3^2dx\approx 848,2\left(mm^3\right)$

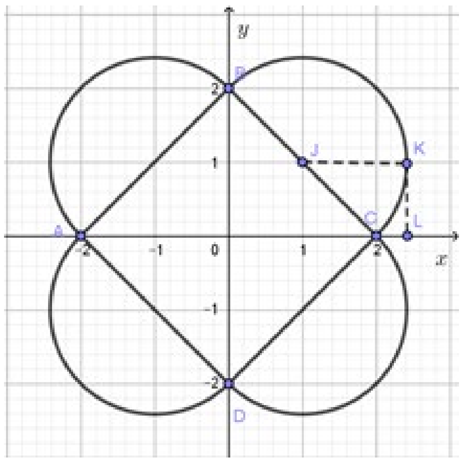
Câu 37: Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn nửa đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính.



Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình trên quanh đường thẳng AC là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 73



• Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Ta có: $J(1;1), K\left(\sqrt{2}+1;1\right), L\left(\sqrt{2}+1;0\right), C(2;0)$.

Phương trình đường tròn tâm $J(1;1)$ bán kính $JB=\sqrt{2}$ là

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{2-(x-1)^2}+1=1+\sqrt{1+2x-x^2}, \quad \text{khi } y\ge 1 \\ y=-\sqrt{2-(x-1)^2}+1=1-\sqrt{1+2x-x^2}, \text{ khi } y<1 \end{array}\right.$$

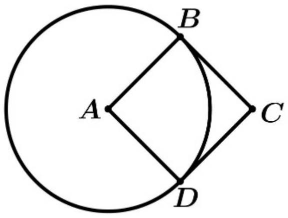
• Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=1+\sqrt{1+2x-x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=0$, $x=1+\sqrt{2}$.

Gọi (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=1-\sqrt{1+2x-x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=2$, $x=1+\sqrt{2}$.

• Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

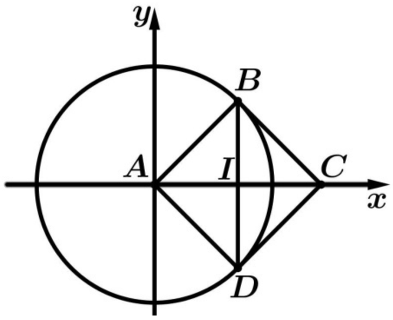
$$V=2\left[V_{(H_1)}-V_{(H_2)}\right]=2\left[\pi\int_0^{1+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1+2x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_2^{1+\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{1+2x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]\approx 72{,}989\approx 73.$$

Câu 38: Trên một mảnh giấy vẽ hình tròn có bán kính bằng 2, vẽ chồng lên trên đó một hình vuông có 1 đỉnh là tâm của hình tròn và 2 đỉnh khác nằm trên đường tròn. Tính thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình đó quanh trục đối xứng của nó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 34,5



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Phương trình đường tròn là $x^2+y^2=4$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên trái BD quanh trục đối xứng của nó là

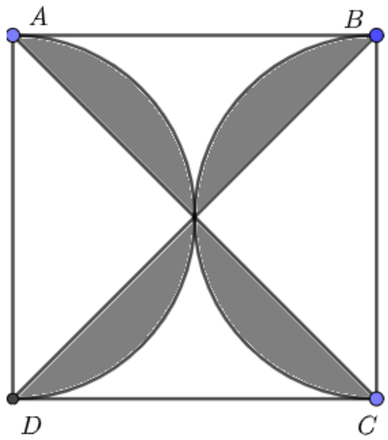
$$V_1=\pi\int_{-2}^{\sqrt{2}}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\left(16+10\sqrt{2}\right)\pi}{3}$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên phải BD quanh trục đối xứng của nó là

$$V_2=\frac{1}{3}\pi.\left(\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

Thể tích cần tìm là $V=V_1+V_2=\dfrac{\left(16+12\sqrt{2}\right)\pi}{3}\approx 34,5$.

Câu 39: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$ vẽ hai đường chéo và hai nửa đường tròn đường kính là hai cạnh AD,BC cắt nhau tạo thành 4 hình cánh quạt như hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay 4 cánh quạt này quanh cạnh CD. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 28,7

Đặt hệ trục toạ độ Oxy với gốc O là đỉnh D, hai tia Ox,Oy tương ứng là là các tia DC,DA.

Phương trình đường tròn đường kính AD là $x^2+(y-2)^2=4$.

Phương trình đường tròn đường kính BC là $(x-4)^2+(y-2)^2=4$.

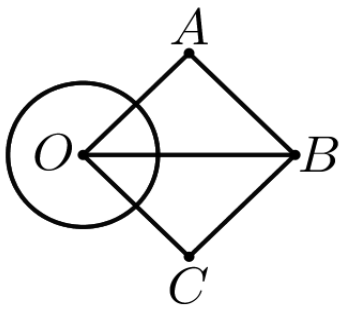
Phương trình $AC: x+y-4=0$, $BD: x-y=0$.

Thể tích cánh quạt đỉnh D quay quanh DC là $V_1=\pi\int_0^2 x^2dx-\pi\int_0^2\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^2dx$.

Thể tích cánh quạt đỉnh A quay quanh DC là $V_2=\pi\int_0^2\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)^2dx-\pi\int_0^2(4-x)^2dx$.

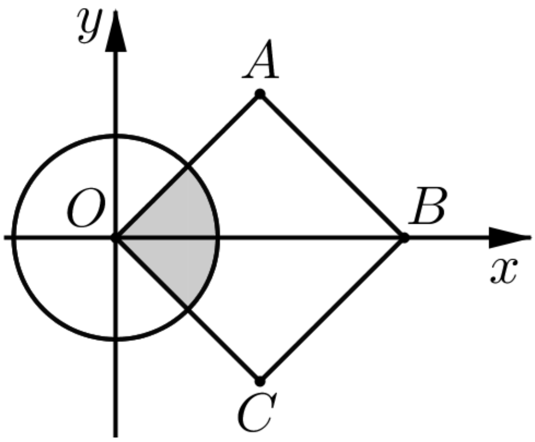
Thể tích cần tìm là $V=2(V_1+V_2)=28,7\ cm^2$.

Câu 40: Cho hình tròn tâm O có bán kính $R=2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 76



Chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc tọa độ trùng O, tia Ox có giá là OB và tia Oy song song AC.

Khi đó đường tròn (O) có phương trình $x^2+y^2=4$ và đường thẳng OA có phương trình $y=x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng OA và đường tròn (C) là: $\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay phần tô đen quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_0^{\sqrt{2}}x^2dx+\pi.\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(4-x^2\right)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\left(16-10\sqrt{2}\right)\pi}{3}=\frac{\left(16-8\sqrt{2}\right)\pi}{3}.$$

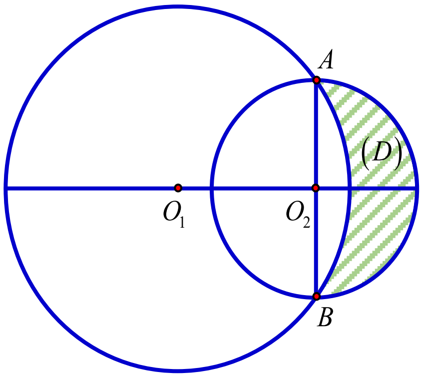
Thể tích khối tròn xoay khi quay (O) quanh Ox là khối cầu có $V_2=\frac{4}{3}\pi.2^3=\frac{32}{3}\pi.$

Thể tích khối tròn xoay khi quay $OABC$ quanh Ox là

$V_3 = 2\times\left[\frac{1}{3}\pi.\left(2\sqrt{2}\right)^2.2\sqrt{2}\right] = \frac{32\sqrt{2}\pi}{3}.$

Vậy thể tích cần tính: $V = V_2 + V_3 - V_1 = \frac{16+40\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{8\pi\left(2+5\sqrt{2}\right)}{3} \approx 76.$

Câu 41: Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình thẳng được giới hạn bởi hai đường tròn. Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

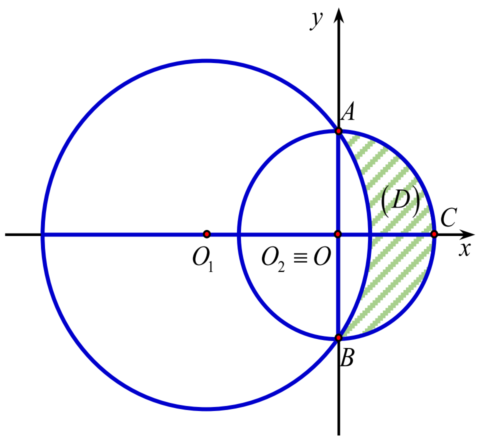
Trả lời: 41,9

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O,\ O_2C \equiv Ox,\ O_2A \equiv Oy.$

Đoạn $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25.$

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25,\ Oy: x = 0,\ x \geq 0.$

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_2): x^2 + y^2 = 9,\ Oy: x = 0,\ x \geq 0.$



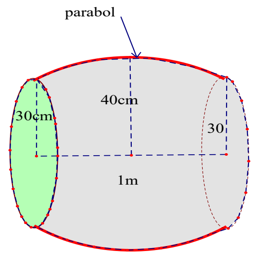
Khi đó thể tích V cần tìm chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi.3^3 = 18\pi.$

Lại có $V_1 = \pi\int_0^1 y^2 dx = \pi\int_0^1\left[25 - (x+4)^2\right]dx = \pi\left[25x - \frac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{14\pi}{3}.$

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3} \approx 41,9.$

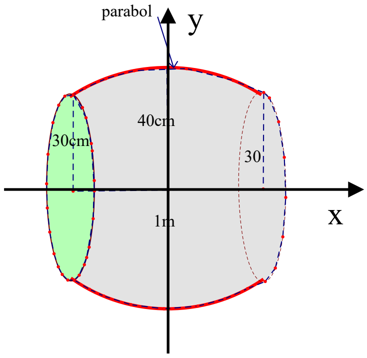
Câu 42: Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, chiều dài của trống là $1m$. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 425

Ta có chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là hình tròn.

có bán kính r có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, nên.

$r^2\pi = 1600\pi \Rightarrow r = 40cm$.

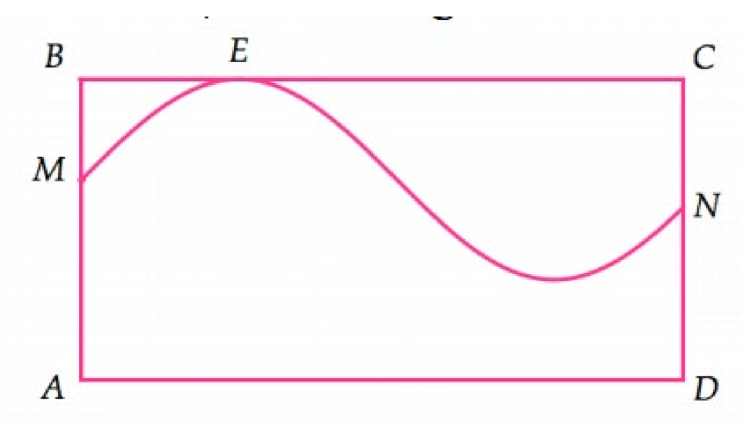
Ta có: Parabol có đỉnh $I(0;40)$ và qua $A(50;30)$.

Nên có phương trình $y = -\frac{1}{250}x^2 + 40$.

Thể tích của trống là.

$V = \pi\int_{-50}^{50}\left(-\frac{1}{250}x^2 + 40\right)^2 dx = \pi.\frac{406000}{3}cm^3 \approx 425dm^3$.

Câu 43: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30\,cm, AD = \frac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình $\sin$ như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM = 20\,cm$, $CN = 15\,cm$, $BE = 5\pi\,cm$. Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD (đơn vị dm^3) (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



.

Lời giải

Trả lời: 83,8

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A \equiv O$, $D \in Ox, B \in Oy$.

Ta có $BE = 5\pi$ suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 20\pi$.

Suy ra phương trình đồ thị hình sin cần tìm có dạng: $y = a\sin\left(\frac{x}{10}\right) + b$.

Do đồ thị hình sin đi qua $M(0;20)$, $N\left(\frac{55\pi}{3};15\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a\sin\left(\frac{1}{10}.0\right) + b = 20 \\ a\sin\left(\frac{1}{10}.\frac{55\pi}{3}\right) + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 20 \end{cases}.$$

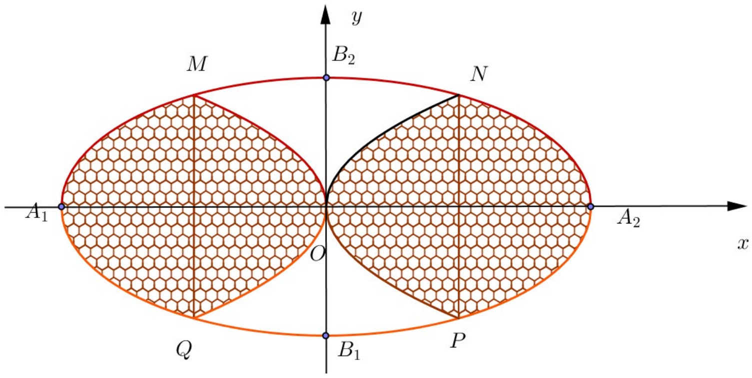
Ta có phương trình đồ thị hình sin cần tìm là $y = 10\sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20$.

Thể tích cần tìm là: $\pi\int_0^{\frac{55\pi}{3}} \left(10\sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20\right)^2 dx \simeq 83788\,cm^3 \approx 83,8dm^3$.

Câu 44: Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M, N, P, Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/ m^2 và trồng rau là 50.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$ m, $B_1B_2 = 4$ m? (đơn vị nghìn đồng)

Lời giải

Trả lời: 4889



Giả sử phương trình elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2=8 \\ B_1B_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=8 \\ 2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)}=\pi ab=8\pi \quad (m^2)$.

Ta có: $MN=4 \Rightarrow \begin{cases} M=(P)\cap(E) \\ N=(P)\cap(E) \end{cases} \Rightarrow N(2;y_0)$. Do $N\in(E)\Rightarrow N\left(2;\sqrt{3}\right)$.

(P) đỉnh O và đi qua $N \Rightarrow (P): x=\frac{2}{3}y^2 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}$

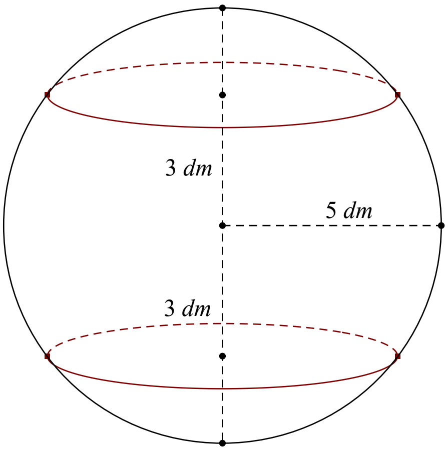
Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S=4\int_0^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=4\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}\left(m^2\right)$.

Diện tích phần tô màu là $S'=S_{(E)}-S=8\pi-4\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}=\frac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}$.

Số tiền phải chi theo yêu cầu bài toán là

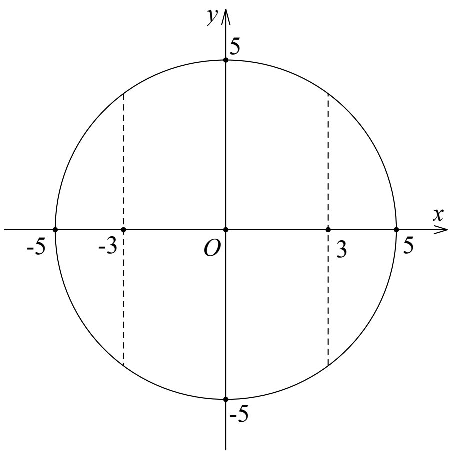
$T=600.000\times\frac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}+50.000\times4\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}\approx 4.889.000$ đồng.

Câu 45: Người ta làm một cái lu đựng nước bằng cách cắt bỏ 2 chỏm của một khối cầu có bán kính 5 dm bằng 2 mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm khối cầu 3 dm. Tính thể tích của chiếc lu. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 415



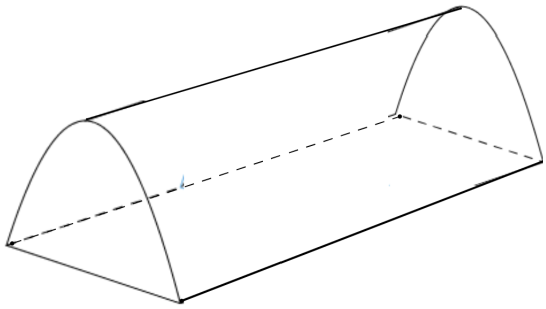
Đặt hệ trục với tâm O là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox, đường ngang là Oy.

Ta có phương trình của đường tròn lớn là $x^2+y^2=25$.

Thể tích cái lu là thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi các đường cong $y=\sqrt{25-x^2}$, trục Ox, đường thẳng $x=-3, x=3$ quay quanh Ox.

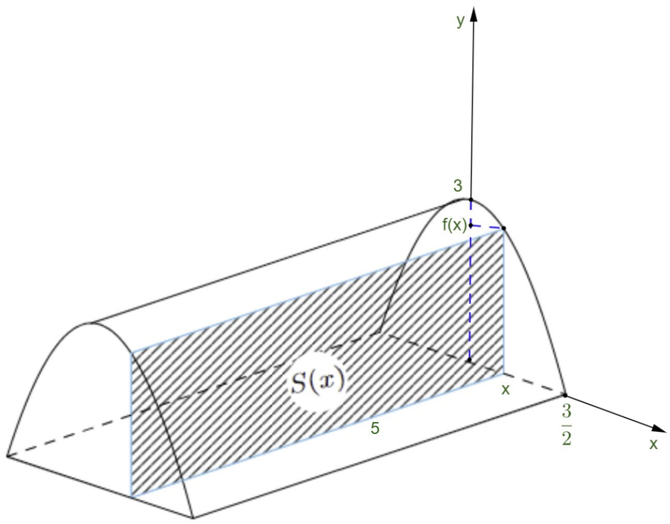
$$V=\pi\int_{-3}^{3}\left(25-x^2\right)dx=\pi\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3}=132\pi\left(\text{dm}^3\right)\approx 415\left(\text{dm}^3\right).$$

Câu 46: Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12a dự kiến dựng một cái trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?



Lời giải

Trả lời: 30



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, hình dạng khung trại là parabol có phương trình $y=f(x)=ax^2+bx+c$, vì đỉnh trại cao 3m và bề ngang rộng 3m nên parabol đi qua điểm $(0;3)$ và $\left(\frac{3}{2};0\right)$.

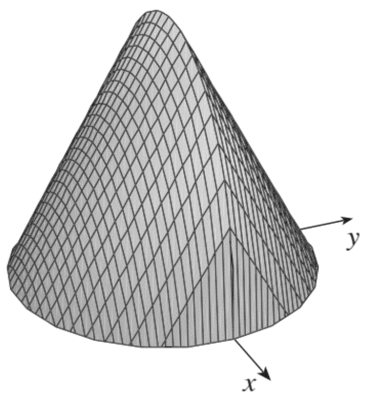
Ta có : $\begin{cases} b=0 \\ 3=c \\ 0=a.\left(\frac{3}{2}\right)^2+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-\frac{4}{3} \\ c=3 \end{cases}$

Suy ra parabol có phương trình $y=f(x)=-\frac{4}{3}x^2+3$.

Mỗi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ $x, 0\le x\le h$ cắt khối chót theo mặt cắt là hình chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là 5 và $|f(x)|$, có diện tích $S(x)=5.|f(x)|$, với $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}$.

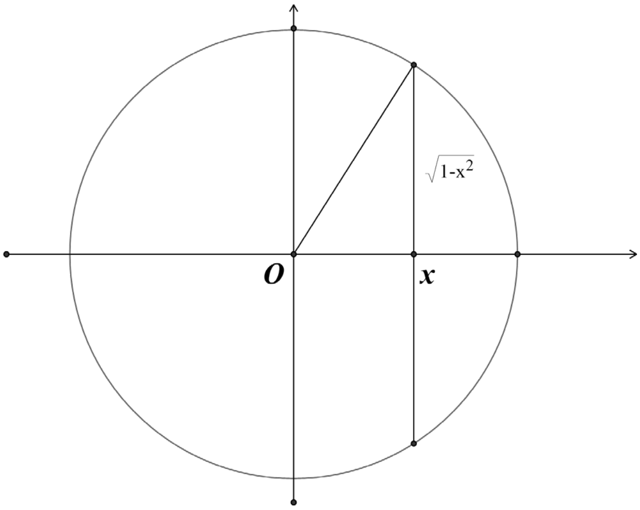
Vậy thể tích phần không gian trong trại là $V=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}5.|f(x)|dx=5.\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|-\frac{4}{3}x^2+3\right|dx=30\ m^3$.

Câu 47: Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1. Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(-1\le x\le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 2,31



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O.

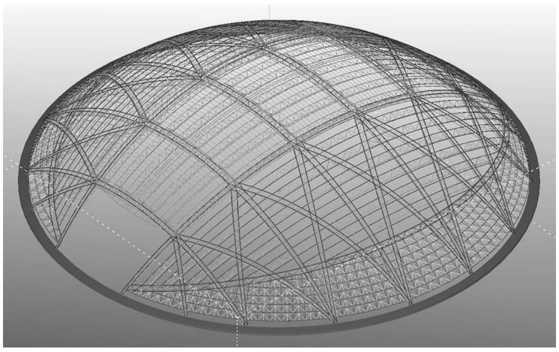
Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1-x^2}$.

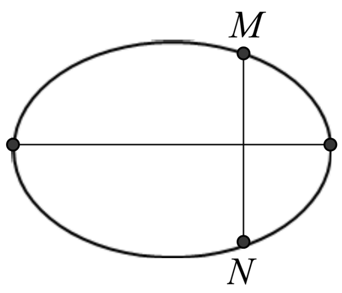
Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \left(1-x^2\right)\sqrt{3}$.

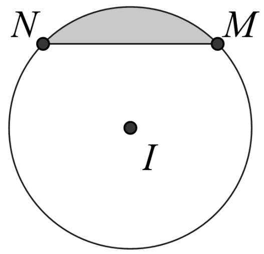
Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2\int_0^1 S dx = 2\int_0^1 \sqrt{3}\left(1-x^2\right) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31.$$

Câu 48: Sân vận động Sport Hub là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích bằng bao nhiêu? (đơn vị dam^3) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

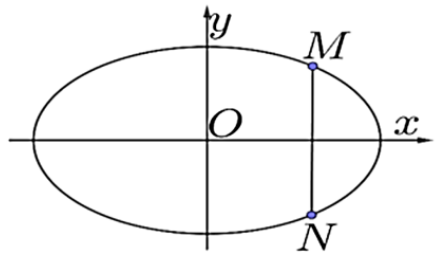






Lời giải

Trả lời: 116



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

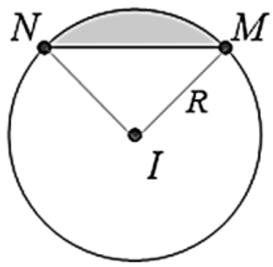
Phương trình chính tắc của E-líp đáy:

$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$

Gọi $M(x;y) \Rightarrow MN = 2y = 2\sqrt{45^2\left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$

$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}}.\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2}.\left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$

Ta có công thức diện tích hình quạt: $S_{quat} = \frac{\pi R^2.\alpha}{360°}$ với α là số đo góc ở tâm chắn cung tương ứng.



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện, ta có:

$S(x) = S_{quat} - S_{\Delta IMN} = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2)\frac{2025}{2}.\left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$

Thể tích khoảng không gian sân vận động là

$V = \int\limits_{-75}^{75} (\pi - 2)\frac{2025}{2}.\left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \approx 115586 m^3 \approx 116 dam^3.$