

**I- PHẦN GHI KẾT QUẢ** (Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi).

Mỗi câu trả lời đúng 0,25 điểm.

**Câu 1.** Tìm  $m$  để phương trình  $x^2 - 2(m+1)x - 3 = 0$  có hai nghiệm là các số nguyên.

**Câu 2.** Cho các số  $a, b$  thỏa mãn  $a + b = 2$ . Tính  $S = a^3 + b^3 + 6ab$ .

**Câu 3.** Cho  $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $P = a^2 + b^2$ .

**Câu 4.** Thống kê điểm một bài kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9A được ghi lại theo bảng tần số sau:

|        |     |     |       |       |      |       |
|--------|-----|-----|-------|-------|------|-------|
| Điểm   | 5   | 6   | 7     | 8     | 9    | 10    |
| Tần số | $m$ | $n$ | $n+3$ | $m+1$ | $2m$ | $n-1$ |

Biết điểm trung bình của 40 bài kiểm tra trên là 7,6. Tìm  $m, n$ .

**Câu 5.** Cho đa thức  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ . Biết  $P(x)$  chia cho  $x^2 - 1$  dư  $2x + 5$ . Tìm  $a, b$ .

**Câu 6.** Cho  $\alpha$  là góc nhọn thỏa mãn  $\cot \alpha = 2$ . Tính  $Q = \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + 3$ .

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết diện tích các tam giác  $ABH$  và  $ACH$  lần lượt là  $19,44 \text{ cm}^2$  và  $34,56 \text{ cm}^2$ . Tính độ dài  $AH$ .

**Câu 8.** Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d): y = 2x + m$  tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 9.** Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d): y = (m+2)x - m$  cắt parabol  $(P): y = 2x^2$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  khác gốc tọa độ  $O$  sao cho  $OA$  vuông góc với  $OB$ .

**Câu 10.** Cho đường tròn  $(O)$  bán kính  $R$ . Hai điểm  $A, B$  nằm trên đường tròn  $(O)$  sao cho  $\widehat{AOB} = 30^\circ$ . Biết diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung  $AB$  và cung nhỏ  $AB$  bằng  $\frac{3}{2} \text{ cm}^2$ . Tính bán kính của đường tròn  $(O)$  (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).

**Câu 11.** Một hình nón có thể tích  $V = 96\pi \text{ dm}^3$ . Biết tỷ số giữa đường cao và đường sinh của hình nón là  $\frac{4}{5}$ . Tính diện tích xung quanh của hình nón.

**Câu 12.** Gọi  $A$  là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau. Bạn An chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp  $A$ . Tính xác suất bạn An chọn được số chẵn.

## II- PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi).

**Câu 13 (2 điểm).**

a) Giải phương trình  $\sqrt{x^2 + 8x + 13} + \sqrt{x + 1} = 3\sqrt{x^2 - 2x + 3}$ .

b) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x + 2y + \sqrt{(2x-1)(2-y)} = 5 \\ \sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{y^2 - x^2 - 3y + 19} \end{cases}$$

**Câu 14 (1 điểm).** Tìm tất cả các số nguyên tố  $p, q$  sao cho  $p+q$  và  $p+4q$  đều là các số chính phương.

**Câu 15 (2 điểm).** Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Đường thẳng  $AI$  cắt đường tròn ( $O$ ) tại  $D$  (khác  $A$ ), đường thẳng qua  $I$  vuông góc với  $AD$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $S$ . Gọi  $J$  là điểm đối xứng của  $I$  qua  $O$ .

a) Chứng minh  $D$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BIC$  và  $SDJ$  là tam giác vuông.

b) Gọi  $P$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  trên đường thẳng  $OI$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $Q$  là giao điểm (khác  $M$ ) của  $MI$  với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OMS$ . Chứng minh ba điểm  $A, P, Q$  thẳng hàng.

**Câu 16 (1 điểm).** Cho các số  $x, y, z$  thỏa mãn  $0 < x, y, z < 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức 
$$P = \frac{4}{(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(\sqrt{x} + 2\sqrt{z})} + 3(x-1)(y-1)(z-1).$$

**Câu 17 (1 điểm).**

a) Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt tổng  $S_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$ . Chứng minh trong các số  $S_n; S_{n+1}; S_{n+2}; \dots; S_{n+1}$  có ít nhất một số chính phương.

b) Một giải cờ vua có  $n$  vận động viên tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn tính điểm. Hai vận động viên bất kỳ phải thi đấu với nhau đúng một ván. Nếu ván đấu có phân định thắng - thua thì người thắng được 2 điểm, người thua không có điểm; nếu ván đấu hòa thì mỗi người được 1 điểm. Sau khi thi đấu xong tất cả các ván đấu, các vận động viên được xếp hạng theo thứ tự số điểm từ cao xuống thấp, nếu có từ hai người trở lên cùng điểm thì sẽ dùng tiêu chí phụ để xếp hạng. Kết quả người xếp thứ nhất được 8 điểm, người xếp thứ hai được 6 điểm, người xếp thứ ba được 5 điểm và các vận động viên còn lại có số điểm khác nhau từng cặp. Tìm  $n$  và số điểm của các vận động viên.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN TỈNH HÀ TĨNH  
Năm học 2025 – 2026

**Câu 1.**

Giả sử phương trình  $x^2 - 2(m+1)x - 3 = 0$  (1) có hai nghiệm là  $x_1, x_2$  ( $|x_1| \leq |x_2|$ ).

Khi đó, theo vi-ét ta có:  $\begin{cases} x_1 x_2 = -3 = (-1) \cdot 3 = 1 \cdot (-3) \\ x_1 + x_2 = 2(m+1) \end{cases}$ . Để phương trình (1) có hai nghiệm nguyên thì:

TH1:  $x_1 = -1, x_2 = 3$ , khi đó  $x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2 \Leftrightarrow m = 0$

TH2:  $x_1 = 1, x_2 = -3$ , khi đó  $x_1 + x_2 = 2(m+1) = -2 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy với  $m=0, m=-2$  thì phương trình (1) có hai nghiệm nguyên.

**Câu 2.** Ta có

$$S = a^3 + b^3 + 6ab = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 6ab = 2(a^2 - ab + b^2) + 6ab$$

$$S = 2(a^2 + 2ab + b^2) = 2(a+b)^2 = 8$$

Vậy  $S = 8$  với  $a+b = 2$ .

**Câu 3.** Đặt

$$P = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} + \sqrt{4-4\sqrt{5}+5} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$$
$$\Rightarrow P = (2-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-2) = \sqrt{5}-\sqrt{3} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

Khi đó,  $a = 5$  và  $b = 3$  suy ra  $a^2 + b^2 = 34$ . Vậy  $a^2 + b^2 = 34$

**Câu 4.**

Theo bảng tần số ta có điểm trung bình của 40 bài kiểm tra là:

$$\frac{5m + 6n + 7(n+3) + 8(m+1) + 9(2m) + 10(n-1)}{40} = \frac{31m + 23n + 19}{40} = 7,6 \Rightarrow 31m + 23n = 285(1)$$

Mà ta có  $m + n + (n+3) + (m+1) + 2m + (n-1) = 40 \Leftrightarrow 4m + 3n = 37(2)$

Từ (1) và (2), ta có hệ:  $\begin{cases} 31m + 23n = 285 \\ 4m + 3n = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 7 \end{cases}$

Vậy  $m = 4, n = 7$ .

**Câu 5.**

Chia đa thức  $P(x)$  cho  $x^2-1$  ta được:  $P(x) = (x^2-1)(x+a) + (b+1)x + (a+1)$

Mà chia  $P(x)$  cho  $x^2-1$  dư  $2x+5$ , suy ra  $\begin{cases} b+1=2 \\ a+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases}$

Vậy  $a = 4, b = 1$ .

**Câu 6.** Ta có

$$+) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \Leftrightarrow \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

$$+) Q = \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + 3 = 1 - \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha (2 \sin \alpha) + 3 = 7 \sin^2 \alpha + 4 = 7 \cdot \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1} + 4 = \frac{27}{5}$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{27}{5}$$

**Câu 7.**

Xét tam giác  $ABC$ , có:  $AH^2 = BH \cdot CH$

$$\text{Có } S_{ABH} \cdot S_{ACH} = \frac{1}{2} AH \cdot BH \cdot \frac{1}{2} AH \cdot CH = \frac{1}{4} AH^4 = 19,44.34,56 = 671,8464 \Rightarrow AH = 7,2(\text{cm})$$

$$\text{Vậy } AH = 7,2\text{cm}$$

**Câu 8.**

Đường thẳng  $(d)$  giao với  $Oy$  tại  $A(0;m)$ , giao với  $Ox$  tại  $B(-\frac{m}{2};0)$ . Khi đó tam giác tạo bởi  $(d)$  và

$$\text{hai trục tọa độ là tam giác vuông } OAB. \text{ Có: } S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |m| \left| \frac{m}{2} \right| = \frac{m^2}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } m = \pm\sqrt{3}$$

**Câu 9.**

Hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  là nghiệm của phương trình:

$$(m+2)x - m = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - (m+2)x + m = 0 \quad (1)$$

Dễ thấy (1) có hai nghiệm là  $x_1 = 1, x_2 = \frac{m}{2}$ . Suy ra tọa độ hai điểm giao là  $A(1;2), B(\frac{m}{2}; \frac{m^2}{2})$

$$\text{Mà } OA \text{ vuông góc với } OB, \text{ suy ra } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} + m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m = 0, m = -\frac{1}{2}$$

**Câu 10.**

$$\text{Ta có } S_{vp} = S_q - S_{OAB} = \frac{30}{360} \cdot \pi R^2 - \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin 30^\circ = \left( \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \right) R^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}}} \approx 11,3(\text{cm})$$

$$\text{Vậy } R \approx 11,3\text{cm}$$

**Câu 11.**

$$\text{Vì tỷ số giữa đường cao và đường sinh của hình nón là } \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{h}{l} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow l = \frac{5h}{4}$$

$$\text{Có } V = \frac{1}{3} \pi h r^2 = 96\pi \Leftrightarrow h r^2 = 288 \Leftrightarrow h(l^2 - h^2) = 288 \Leftrightarrow h \left[ \left( \frac{5h}{4} \right)^2 - h^2 \right] = 288 \Leftrightarrow h = 8(\text{dm})$$

$$\Rightarrow l = 10(\text{dm}), r = 6(\text{dm}) \Rightarrow S_{xq} = \pi l = 60\pi(\text{dm}^2). \text{ Vậy } S_{xq} = 60\pi \text{dm}^2$$

**Câu 12.**

Ta có  $n(A) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ . Gọi  $B$  là biến cố: “Bạn An chọn được số chẵn”. Xét các TH:

TH1: số được chọn có chữ số tận cùng là 0, khi đó có  $9 \cdot 8 = 72$  (số) thỏa mãn

TH2: số được chọn là số chẵn có tận cùng khác 0, khi đó có  $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$  (số) thỏa mãn

Suy ra  $n(B) = 81 + 256 = 328$

Vậy xác suất của biến cố B là  $p(B) = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{328}{648} = \frac{41}{81}$

**Câu 13.** ĐKXD  $x \geq -1$ . Đặt  $a = \sqrt{x^2 + 8x + 13}, b = \sqrt{x + 1} \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = a^2 - 10b^2$

Khi đó phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} a + b &= 3\sqrt{a^2 - 10b^2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 9(a^2 - 10b^2) \\ &\Leftrightarrow 8a^2 - 2ab - 91b^2 = 0 \Leftrightarrow (4a + 13b)(2a - 7b) = 0 \end{aligned}$$

Do  $4a + 13b > 0$  nên  $2a - 7b = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 8x + 13} = 7\sqrt{x + 1}$ .

Bình phương hai vế phương trình trên ta có:

$$4x^2 + 32x + 52 = 49x + 49 \Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17 - \sqrt{241}}{8} \\ x = \frac{17 + \sqrt{241}}{8} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện xác định, ta thử lại thấy  $x = \frac{17 \pm \sqrt{241}}{8}$  thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $\left\{ \frac{17 + \sqrt{241}}{8}, \frac{17 - \sqrt{241}}{8} \right\}$ .

**b) ĐKXD:**  $x \geq 2 \geq y, y^2 - x^2 - 3y + 19 \geq 0$ .

Ta có: 
$$\begin{cases} 2x + 2y + \sqrt{(2x-1)(2-y)} = 5(1) \\ \sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{y^2 - x^2 - 3y + 19}(2) \end{cases}$$

Từ (1):  $2x + 2y + \sqrt{(2x-1)(2-y)} = 5 \Leftrightarrow (2x-1) + \sqrt{(2x-1)(2-y)} - 2(2-y) = 0$ .

Suy ra  $(\sqrt{2x-1} - \sqrt{2-y})(\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{2-y}) = 0$ .

Ta thấy  $\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{2-y} > 0$ . Khi đó  $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2-y} \Leftrightarrow y = 3 - 2x$ .

Thay vào (2) ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} &= \sqrt{(3-2x)^2 - x^2 - 3(3-2x) + 19} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 19} \end{aligned}$$

Ta bình phương hai vế của phương trình

$$\begin{aligned}x^2 + 10x - 15 + 6\sqrt{(x^2 + x - 6)(x - 1)} &= 3x^2 - 6x + 19 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{(x - 2)(x + 3)(x - 1)} &= x^2 - 8x + 17 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{(x - 2)(x^2 + 2x - 3)} &= x^2 + 2x - 3 - 10(x - 2) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 2x - 3} - 5\sqrt{x - 2})(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2\sqrt{x - 2}) &= 0\end{aligned}$$

Ta thấy  $\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2\sqrt{x - 2} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 5\sqrt{x - 2}$ .

Ta bình phương hai vế của phương trình trên

$$x^2 + 2x - 3 = 25(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 23x + 47 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{2}.$$

Như vậy  $x = \frac{23 + \sqrt{341}}{2}, y = -20 - \sqrt{341}$ . Hoặc  $x = \frac{23 - \sqrt{341}}{2}, y = -20 + \sqrt{341}$ .

Kết hợp với điều kiện xác định, ta thử lại thấy 2 bộ trên thoả mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$x = \frac{23 + \sqrt{341}}{2}, y = -20 - \sqrt{341} \text{ hoặc } x = \frac{23 - \sqrt{341}}{2}, y = -20 + \sqrt{341}.$$

#### **Câu 14.**

Giả sử tồn tại số nguyên tố  $p, q$  sao cho thoả mãn điều kiện bài toán.

Đặt  $p + q = a^2, p + 4q = b^2$ , trong đó  $a, b$  là các số nguyên dương.

Khi đó  $3q = (b - a)(b + a)$ . Ta thấy  $b - a < b + a$ .

**Trường hợp 1:**  $b - a = 1, b + a = 3q \Rightarrow 2a + 1 = 3q$  thì  $q$  lẻ. Đặt  $q = 2k + 1, k$  nguyên dương.

Khi đó  $a = \frac{3q - 1}{2} = 3k + 1$  và  $p = a^2 - q = (3k + 1)^2 - (2k + 1) = k(9k + 4)$ .

Mà do  $p$  nguyên tố nên  $k = 1, p = 13, q = 3$ .

**Trường hợp 2:**  $b - a = 3, b + a = q \Rightarrow b = a + 3, q = 2a + 3$ .

Do đó  $p = a^2 - q = a^2 - 2a - 3 = (a + 1)(a - 3)$ . Mà do  $p$  nguyên tố nên  $a = 4, p = 5, q = 11$ .

**Trường hợp 3:**  $b - a = q, b + a = 3$ , vì  $b > a \geq 1$  nên  $b = 2, a = 1 \Rightarrow q = 1$  (vô lý).

Thử lại ta thấy (5,11), (13,3) thoả mãn bài toán.

Vậy (5,11), (13,3) là các bộ số cần tìm của bài toán.

**Câu 15.** Ta có:

$$(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(\sqrt{x} + 2\sqrt{z}) \leq \frac{(2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{z})^2}{4} = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz*, ta có:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \leq 3(x + y + z).$$

Khi đó ta có:

$$P \geq \frac{4}{3(x+y+z)} + 3(x-1)(y-1)(z-1) = \frac{4}{3(x+y+z)} - 3(1-x)(1-y)(1-z).$$

Theo bất đẳng thức *AM - GM*, ta có:

$$(1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{(3-x-y-z)^3}{27}.$$

Đặt  $t = x + y + z$ . Khi đó:  $P \geq \frac{4}{3t} + \frac{(t-3)^3}{9}$ .

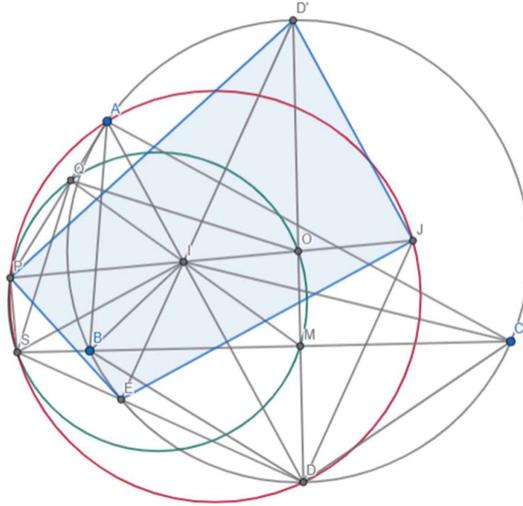
Ta sẽ chứng minh  $\frac{4}{3t} + \frac{(t-3)^3}{9} \geq \frac{4}{9}$ , thật vậy

$$\frac{4}{3t} + \frac{(t-3)^3}{9} \geq \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{12 + t(t-3)^2 - 4t}{9t} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^4 - 6t^2 + 5t + 12}{9t} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t+1)(t-3)(t-4)}{9t} \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng do  $0 < t = x + y + z < 3$ .

Như vậy  $\min P = \frac{4}{9}$ , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = \frac{1}{3}$ .

**Câu 16.**



**a)** Ta có  $\angle BID = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2}$ ,  $\angle DBI = \angle IBC + \angle DBC = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2}$ .

Suy ra  $\angle BID = \angle DBI$  suy ra tam giác *BID* cân tại *B*.

Mà *AD* là phân giác của góc *BAC*, suy ra  $BD = DC$ .

Như vậy  $DB = DC = DI$ . Hay *D* là tâm của tam giác *BIC*.

Gọi *D'* là điểm đối xứng của *D* qua. Khi đó *D'IDJ* là hình bình hành.

Giả sử *SD* cắt (*O*) tại *E*. Ta có:  $\angle SIB = 90 - \angle DIB = 90 - \angle IBD = 90 - \frac{\angle BAC}{2} - \frac{\angle CBA}{2} = \angle ICB$ .

Như vậy  $\triangle SIB \sim \triangle SCI$  (g.g). Kết hợp với tứ giác *BCDE* nội tiếp.

Ta dễ dàng suy ra  $SI^2 = SB.SC = SE.SD$ . Khi đó  $\angle IED = 90 = \angle D'ED$  hay  $D', I, E$  thẳng hàng.

Suy ra  $D'E$  vuông góc với  $SD$  nên tam giác  $SJD$  vuông tại  $D$ .

b) Ta có tứ giác  $IPSE$  nội tiếp suy ra ta có biến đổi góc sau:

$$\angle IPE = \angle ISE = \angle IDJ = \angle ID'J.$$

Suy ra tứ giác  $D'JEP$  nội tiếp. Khi đó  $IP.IJ = IE.ID' = IA.ID$ .

Do đó tứ giác  $APQJ$  nội tiếp. Do đó:

$$\angle APJ = \angle IDJ = \angle ISD = \angle OMQ = \angle QPJ.$$

Vậy  $A, P, Q$  thẳng hàng.

### Câu 17.

a) Với mọi số nguyên dương  $n$ , ta có:

$$S_n = 1 + 4 + 7 + \dots + 3n - 2 = \sum_{i=1}^n (3i - 2) = 3 \sum_{i=1}^n i - 2n = \frac{3n(n+1) - 4n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Ta giả sử giữa  $S_n, S_{n+1}$  không có một số chính phương nào, tức là tồn tại  $a$  nguyên dương sao cho

$a^2 < S_n < S_{n+1} < (a+1)^2$ . Suy ra

$$\frac{3(n+1)^2 - (n+1) - (3n^2 - n)}{2} = S_{n+1} - S_n < (a+1)^2 - a^2 = 2a+1 \Leftrightarrow 3n < 2a.$$

Khi đó:  $\frac{9}{4}n^2 < \frac{3n^2 - n}{2}$ , điều này vô lý.

Như vậy trong dãy  $S_n, S_n + 1, S_n + 2, \dots, S_{n+1}$  phải chứa ít nhất một số chính phương.

b) Ta thấy có tất cả là  $\frac{n(n-1)}{2}$  trận đấu và khi kết thúc mỗi trận thì tổng điểm của hai đội đều tăng lên 2. Như vậy tổng điểm của  $n$  đội là  $n(n-1)$ . Lập luận như trên, trừ ba đội đứng đầu thì tổng số điểm trong các trận đấu với nhau là  $(n-3)(n-4)$ .

Gọi điểm của đội hạng 4 đến hạng  $n$  là  $a_1, a_2, \dots, a_{n-3}$ . Trong đó  $5 \geq a_1 > a_2 > \dots > a_{n-3}$ .

Khi đó từ giả thiết ta có  $(n-3)(n-4) \leq n(n-1) - 19 < 5(n-3)$  suy ra  $n = 6$ .

Suy ra tổng số điểm của 6 đội thi là 30. Và tổng điểm các đội còn lại là 11.

Ta dễ chỉ điểm của đội hạng tư, năm, sáu lần lượt là 5, 4, 2.

Vậy có 6 vận động viên tham gia và điểm số đạt được từ cao xuống thấp là 8; 6; 5; 5; 4; 2.