

CHUYÊN ĐỀ 1: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ GIẢI CÂU TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (I)$$

- Nếu hai phương trình trên có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (I).
- Nếu hai phương trình trên không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.
- Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

1. Phương pháp thế

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ đó cho (coi là PT (1)), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình thứ hai (PT (2)) để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho PT (2) trong hệ (PT (1) cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia).

2. Phương pháp cộng đại số

- Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới chỉ còn một ẩn.
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (giữ nguyên phương trình còn lại).

Chú ý:

- Trong phương pháp cộng đại số, trước khi thực hiện bước 1, có thể nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.
- Đôi khi ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ phương trình đó về hệ phương trình với hai ẩn mới, rồi sau đó sử dụng một trong hai phương pháp giải ở trên.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU TẬP

Dạng 1: Giải hệ phương trình đơn giản bằng phương pháp cộng, phương pháp thế và phương pháp đặt ẩn phụ

Câu 1: Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Câu 2: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng
$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Câu 3: Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 5(x+2) = 2(y+7) \\ 3(x+y) = 17-x \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} (x+2)(y-5) = xy-50 \\ (x+4)(y+4) = xy+216 \end{cases}$$

Câu 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+2)(y-5) = xy - 50 \\ (x+4)(y+4) = xy + 216 \end{cases}$$

Câu 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

Câu 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{-1}{2} \\ 2x - \frac{3}{y} = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

Câu 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$$

Câu 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{1}{y-1} = 5 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{y-1} = -1 \end{cases}$$

Câu 9: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{2}{y-2} = 6 \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases}$$

Câu 10: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |x| + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4|x| - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

Câu 11: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |x+2| + \frac{2}{\sqrt{y-3}} = 9 \\ |x+2| - \frac{1}{2(\sqrt{y-3})} = 4 \end{cases}$$

Dạng 2: Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m .

1. Phương pháp:

Cách 1: Đưa hệ phương trình đã cho về phương trình bậc nhất

- **Bước 1:** Đưa hệ phương trình về phương trình bậc nhất dạng $ax + b = 0$ (Dùng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số,...)
- **Bước 2:** Xét phương trình $ax + b = 0$ (1) (a, b là hằng số)

TH 1: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

TH 2: Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

TH 3: Phương trình (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

□ **Bước 3:** Kết luận.

Cách 2: Xem hai phương trình của hệ là hai phương trình đường thẳng, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$ vô nghiệm

Câu 2: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ có nghiệm

Câu 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + ay = -4 \\ ax - 3y = 5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $a = 1$

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-2)x - 3y = -5 \\ x + my = 3 \end{cases} (I)$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình (I) với $m = 1$.

b) Chứng minh hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất với mọi m . Tìm nghiệm duy nhất đó theo m .

Dạng 3: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa điều kiện cho trước.

1. Phương pháp:

- **Bước 1:** Giải hệ phương trình tìm nghiệm (x, y) theo tham số m ;
- **Bước 2:** Thế nghiệm x, y vào biểu thức điều kiện cho trước, giải tìm m ;
- **Bước 3:** Kết luận.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = m + 3 \\ 2x - 3y = m \end{cases} (I)$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m = 1$.

b) Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = -3$.

Câu 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = -2$

Câu 3: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$;

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn: $2x + y \leq 3$.

Câu 4: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + y = 2m + 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$$
 có nghiệm $(x; y)$. Tìm m để biểu thức $A = xy + x - 1$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 2m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Câu 6: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1 & (1) \\ x + (a-1)y = 2 & (2) \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình khi $a = 2$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên

d) Tìm a để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn $x + y$ đạt GTNN.

Câu 7: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 5 & (1) \\ mx - y = 4 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) trong đó x, y trái dấu.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x = |y|$.

Câu 8: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases}$$

a) Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

b) Giải và biện luận hệ phương trình trên theo m .

c) Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) mà x, y đều là số nguyên.

d) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x, y) thì điểm $M(x, y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

e) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm. Gọi $(x_0; y_0)$ là một cặp nghiệm của phương trình: Chứng minh: $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán - ĐHSP Hà Nội 2015).

Câu 10: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 3 & (1) \\ mx + y = 2m + 1 & (2) \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất (x, y) , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây:

a) $P = x^2 + 3y^2$ (1).

b) $Q = x^4 + y^4$ (2).

Dạng 4: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Phương pháp chung giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Cách giải một Câu toán bằng cách lập hệ phương trình, chúng ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Lập hệ phương trình.

- Biểu diễn hai đại lượng phù hợp bằng ẩn số x và y (thường đặt ẩn số là những đại lượng đề Câu yêu cầu cần tìm, Câu yêu cầu tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn thì chúng ta sẽ đặt x là chiều dài mảnh vườn, y là chiều rộng mảnh vườn.). Sau đó, đặt đơn vị và điều kiện của ẩn một cách thích hợp (Câu độ dài, thời gian hoàn thành công việc thì không thể là số âm.).

- Biểu thị các đại lượng chưa biết còn lại qua ẩn.

- Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng và thành lập hệ hai ẩn từ các phương trình vừa tìm.

- **Bước 2:** Giải hệ phương trình nói trên.

- **Bước 3:** Kiểm tra nghiệm tìm được thỏa mãn điều kiện của Câu toán và nêu kết luận

Bài toán 1: Chuyển động (trên đường bộ, trên đường sông có tính đến dòng nước chảy)

1. Một số lưu ý

Đối với dạng toán này, cần chú ý đến điều kiện của ẩn:

- Nếu gọi x là vận tốc của chuyển động thì điều kiện là $x > 0$.

- Đặt thời gian chuyển động là y thì điều kiện là $y \geq 0$.

- Một số công thức:

- Quãng đường bằng vận tốc nhân thời gian, $s = v.t$;

- Vận tốc khi nước đứng yên = vận tốc riêng;

- Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước;
- Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng - vận tốc dòng nước.
- Nếu hai xe đi ngược chiều nhau cùng xuất phát khi gặp nhau lần đầu:
- Thời gian hai xe đi được là như nhau,
- Tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.
- Cách đổi đơn vị thời gian, vận tốc:
- 1h (1 giờ) = 60 phút.
- $1(\text{m/s}) = 3,6(\text{km/h})$, vì $1\text{m} = 1/1000\text{km}$ và $1\text{s} = 1/3600$ giờ.
- $1(\text{km/h}) = 5/18(\text{m/s})$.

2. Bài tập áp dụng

- Câu 1:** Đoạn đường AB dài 180 km. Cùng một lúc xe máy đi từ A và ô tô đi từ B xe máy gặp ô tô tại C cách A 80 km. Nếu xe máy khởi hành sau 54 phút thì chúng gặp nhau tại D cách A là 60 km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy?
- Câu 2:** Một xe máy đi từ A đến B. Sau đó 1 giờ, một ô tô cũng đi từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 km/h. Biết rằng ô tô và xe máy đến B cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi xe, với giả thiết quãng đường AB dài 200km
- Câu 3:** Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một xe ô tô đi từ B đến A, sau 4 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ô tô đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB
- Câu 4:** Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ
- Câu 5:** Hai ô tô đi từ A đến B dài 200km. Biết vận tốc xe thứ nhất nhanh hơn vận tốc xe thứ hai là 10km/h nên xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe
- Câu 6:** Hai xe ô tô cùng đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh, xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1 giờ. Lúc trở về xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km mỗi giờ, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc nhưng dừng lại nghỉ ở một điểm trên đường hết 40 phút, sau đó về đến cảng Dung Quất cùng lúc với xe thứ nhất. Tìm vận tốc ban đầu của mỗi xe, biết chiều dài quãng đường từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là 120 km và khi đi hay về hai xe đều xuất phát cùng một lúc

Bài toán 2: Toán làm chung - làm riêng (Câu toán vôi nước)

1. Một số lưu ý

Lập bảng	Thời gian làm (chảy) một mình xong công việc	Phần công việc (thể tích) trong 1 giờ	Phần công việc (thể tích) trong thời gian Câu cho
Cả hai đơn vị (hai vôi nước)	(Câu cho số liệu này)	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	

Đơn vị 1 (vòi nước 1)	x	$\frac{1}{x}$	
Đơn vị 2 (vòi nước 2)	y	$\frac{1}{y}$	

Gọi thời gian người thứ nhất làm xong công việc là x , thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là y thì:

1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc),

1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc

1 giờ cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

Chú ý:

- ☐ Khi công việc không được đo bằng số lượng cụ thể, ta coi toàn bộ công việc là một đơn vị công việc, biểu thị bởi số 1.
- ☐ Năng suất làm việc là phần việc làm được trong một đơn vị thời gian.
- ☐ Gọi A là khối lượng công việc, n là năng suất, t là thời gian làm việc. Ta có: $A = n \cdot t$.
- ☐ Tổng năng suất riêng bằng năng suất chung khi cùng làm.

2. Bài tập áp dụng

- Câu 1:** Hai vòi nước cùng chảy đầy một bể không có nước trong 3h45ph. Nếu chảy riêng rẽ, mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể? biết rằng vòi chảy sau lâu hơn vòi trước 4 h.
- Câu 2:** Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 1giờ 20 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10phút và vòi thứ hai chảy trong 12phút thì được $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?
- Câu 3:** Hai người thợ làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình trong mấy giờ thì xong?
- Câu 4:** Hai đội công nhân cùng làm chung trong 4 giờ thì xong một con đường. Nếu mỗi đội làm riêng để xong con đường thì thời gian đội thứ nhất ít hơn đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội làm xong con đường trong thời gian bao lâu?
- Câu 5:** Hai người thợ cùng làm một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được một phần tư công việc. Hỏi mỗi người thợ làm một mình thì trong bao nhiêu giờ mới xong công việc đó.

Câu 6: Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ 20 phút và người thứ hai làm trong 10 giờ thì xong công việc. Tính thời gian mỗi công nhân khi làm riêng xong công việc.

Bài toán 3: Toán có nội dung hình học.

1. Một số lưu ý

- Khi đặt ẩn là độ dài các đoạn thẳng, độ dài các cạnh thì điều kiện của ẩn là không âm
- Diện tích hình chữ nhật $S = x.y$, với x là chiều rộng; y là chiều dài.
- Diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}a.h_a$ với a là độ dài một cạnh tam giác và h_a là chiều cao ứng với cạnh đó.
- Định lý Pitago trong tam giác vuông với độ dài cạnh huyền là c , độ dài hai cạnh góc vuông là a, b thì

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28m. Đường chéo của hình chữ nhật dài 10m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật đó.

Câu 2: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích 100 m². Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m².

Câu 3: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 360 m². Nếu tăng chiều dài thêm 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì diện tích của mảnh vườn sẽ là 400 m². Xác định chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu.

Vậy chiều dài hình chữ nhật ban đầu là 24 cm, chiều rộng là 15 cm.

Câu 4: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34 m. Nếu tăng thêm chiều dài 3m và chiều rộng 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m². Hãy tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Bài toán 4: Toán về tìm số.

1. Một số lưu ý

- Số có hai, chữ số được ký hiệu là $\overline{ab}$, điều kiện $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; a, b \in \mathbb{N}$.
- Giá trị của số: $\overline{ab} = 10a + b$.
- Số có ba, chữ số được ký hiệu là $\overline{abc}$ thì $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, điều kiện $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Tổng hai số x, y là: $x + y$.
- Tổng bình phương hai số x, y là: $x^2 + y^2$.
- Bình phương của tổng hai số x, y là: $(x + y)^2$.

- Tổng nghịch đảo hai số x, y là: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho số tự nhiên có hai chữ số, tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14. Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị. Tìm số đã cho.

Câu 2: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị và khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị.

Câu 3. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

Câu 4. Tìm một số tự nhiên có ba chữ số, tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số giảm đi 99 đơn vị.

Câu 5. Tìm số có ba chữ số chia hết cho 11, biết rằng khi chia số đó cho 11 được thương bằng tổng các chữ số của số bị chia.

CHUYÊN ĐỀ 1: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ GIẢI CÂU TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (I)$$

- Nếu hai phương trình trên có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (I).
- Nếu hai phương trình trên không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.
- Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

1. Phương pháp thế

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ đó cho (coi là PT (1)), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình thứ hai (PT (2)) để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho PT (2) trong hệ (PT (1) cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia).

2. Phương pháp cộng đại số

- Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới chỉ còn một ẩn.
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (giữ nguyên phương trình còn lại).

Chú ý:

- Trong phương pháp cộng đại số, trước khi thực hiện bước 1, có thể nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.
- Đôi khi ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ phương trình đó về hệ phương trình với hai ẩn mới, rồi sau đó sử dụng một trong hai phương pháp giải ở trên.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU TẬP

Dạng 1: Giải hệ phương trình đơn giản bằng phương pháp cộng, phương pháp thế và phương pháp đặt ẩn phụ

Câu 1: Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Lời giải

Từ phương trình dưới suy ra $y = 4 - 2x$. Thay vào phương trình trên ta có phương trình:

$$3x + 2(4 - 2x) = 7 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 2: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng
$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Cộng hai phương trình lại với nhau, ta có: $\begin{cases} 4x = 12 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; -1)$

Câu 3: Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 5(x+2) = 2(y+7) \\ 3(x+y) = 17-x \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} (x+2)(y-5) = xy-50 \\ (x+4)(y+4) = xy+216 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a) } \begin{cases} 5(x+2) = 2(y+7) \\ 3(x+y) = 17-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x - 6y = 12 \\ 8x + 6y = 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23x = 46 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(2; 3)$.

$$\text{b)) } \begin{cases} (x+2)(y-5) = xy-50 \\ (x+4)(y+4) = xy+216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy + 2y - 5x - 10 = xy - 50 \\ xy + 4x + 4y + 16 = xy + 216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 40 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 40 \\ 2x + 2y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 140 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(20;30)$.

Câu 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+2)(y-5) = xy - 50 \\ (x+4)(y+4) = xy + 216 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} xy + 2y - 5x - 10 = xy - 50 \\ xy + 4x + 4y + 16 = xy + 216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 40 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 40 \\ 2x + 2y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 140 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(20;30)$.

Câu 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 5x - 5y \\ x = 2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 8y \\ x = 2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y \\ x = 2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - 4 = 0 \\ x = 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 8 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(8; 2)$.

Câu 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{-1}{2} \\ 2x - \frac{3}{y} = \frac{-7}{2} \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện $y \neq 0$. Đặt $t = \frac{1}{y}$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x + t = \frac{-1}{2} \\ 2x - 3t = \frac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{2} - x \\ 2x - 3(\frac{-1}{2} - x) = \frac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{2} - x \\ 5x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (-1; 2)$.

Câu 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}.$$

Lời giải

ĐK $x \neq 1; y \neq -2$

Đặt
$$\begin{cases} \frac{x}{x-1} = a \\ \frac{1}{y+2} = b \end{cases} \quad b \neq 0$$
 Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 4 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 4 \\ 4a + 2b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a = 14 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Khi đó ta có:
$$\begin{cases} \frac{x}{x-1} = 2 \\ \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -1)$.

Câu 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{1}{y-1} = 5 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{y-1} = -1 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -y; y \neq 1$

Đặt $u = \frac{1}{x+y}$ và $v = \frac{1}{y-1}$. Hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} 4u + v = 5 \\ u - 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u + 2v = 10 \\ u - 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u = 9 \\ 2v = u + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$$

Do đó, hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x; y) = (-1; 2)$.

Câu 9: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{2}{y-2} = 6 \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases}.$$

Lời giải

+ Điều kiện: $x \neq -1; y \neq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y-2} = 6 \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y-2} = 5 \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x+1} + \frac{10}{y-2} = 25 \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{y-2} = 22 \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2 = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2} \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{\frac{5}{2}-2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(0; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 10: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |x| + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4|x| - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} |x| + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4|x| - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases} \quad (I)$$

ĐKXĐ: $y \geq 1$

Đặt $|x| = a; \sqrt{y-1} = b; a \geq 0; b \geq 0$

Hệ phương trình (I) trở thành thiếu
$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ 4a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad (tm)$$

Suy ra
$$\begin{cases} |x| = 1 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad (t/m)$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(x, y) = (1; 3), (-1; 3)$.

Câu 11: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |x+2| + \frac{2}{\sqrt{y-3}} = 9 \\ |x+2| - \frac{1}{2(\sqrt{y-3})} = 4 \end{cases}$$

Lời giải

ĐKXĐ: $y \geq 0; y \neq 9$

Đặt $|x+2| = a; \frac{1}{\sqrt{y-3}} = b; a \geq 0$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + 2b = 9 \\ a - \frac{1}{2}b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases} \quad (tm)$$

Khi đó ta có
$$\begin{cases} |x+2| = 5 \\ \frac{1}{\sqrt{y-3}} = 2 \end{cases}$$

Trường hợp 1:
$$\begin{cases} x+2 = 5 \\ \sqrt{y-3} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{49}{4} \end{cases} \quad (t/m)$$

Trường hợp 1:
$$\begin{cases} x+2 = -5 \\ \sqrt{y-3} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = \frac{49}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = \left(3; \frac{49}{4}\right), \left(-7; \frac{49}{4}\right)$.

Dạng 2: Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m .

1. Phương pháp:

Cách 1: Đưa hệ phương trình đã cho về phương trình bậc nhất

□ **Bước 1:** Đưa hệ phương trình về phương trình bậc nhất dạng $ax + b = 0$ (Dùng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số,...)

□ **Bước 2:** Xét phương trình $ax + b = 0$ (1) (a, b là hằng số)

TH 1: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

TH 2: Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

TH 3: Phương trình (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

□ **Bước 3:** Kết luận.

Cách 2: Xem hai phương trình của hệ là hai phương trình đường thẳng, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$ vô nghiệm

Lời giải

Từ phương trình đầu ta có $y = mx - 2m$ (*).

Thế (*) vào phương trình thứ hai ta được:

$$4x - m(mx - 2m) = m + 6 \Leftrightarrow (4 - m^2)x = -2m^2 + m + 6 \quad (**).$$

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) vô nghiệm.

$$(**) \text{ vô nghiệm khi và chỉ khi: } \begin{cases} 4 - m^2 = 0 \\ -2m^2 + m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 2: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ có nghiệm

Lời giải

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 & (1) \\ 2x + y = 2 & (2) \end{cases}$$

Từ pt $\Leftrightarrow y = 2 - 2x$. Thế vào pt ta được:

$$mx - 2(2 - 2x) = 1 \Leftrightarrow (m + 4)x = 5 \quad (3)$$

$\Rightarrow m \neq -4$ thì pt có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + ay = -4 \\ ax - 3y = 5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $a = 1$

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải

a) Với $a = 1$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = -4 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = -12 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -7 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -1 - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy với $a = 1$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x; y) = (-1; -2)$.

b) Ta xét 2 trường hợp:

+ Nếu $a = 0$, hệ có dạng: $\begin{cases} 2x = -4 \\ -3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất

+ Nếu $a \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\frac{2}{a} \neq \frac{a}{-3} \Leftrightarrow a^2 \neq -6$ (luôn đúng, vì $a^2 \geq 0$ với mọi a)

Do đó, với $a \neq 0$, hệ luôn có nghiệm duy nhất.

Tóm lại hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất với mọi a .

Câu 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-2)x - 3y = -5 \\ x + my = 3 \end{cases} \quad (I) \quad (m \text{ là tham số})$

a) Giải hệ phương trình (I) với $m = 1$.

b) Chứng minh hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất với mọi m . Tìm nghiệm duy nhất đó theo m .

Lời giải

a) Thay $m = 1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -x - 3y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (m-2)x - 3y = -5 \\ x + my = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(3-my) - 3y = -5 \\ x = 3-my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - m^2y - 6 + 2my - 3y = -5 \\ x = 3-my \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 2m + 3)y = 3m - 1 & (1) \\ x = 3 - my & (2) \end{cases}$$

Ta có: $m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0 \forall m$ nên PT (1) có nghiệm duy nhất $\forall m$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\forall m$

Từ (1) ta có: $y = \frac{3m-1}{m^2-2m+3}$ thay vào (2) ta có $x = \frac{9-5m}{m^2-2m+3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = \left(\frac{9-5m}{m^2-2m+3}; \frac{3m-1}{m^2-2m+3} \right)$

Dạng 3: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa điều kiện cho trước.

1. Phương pháp:

- **Bước 1:** Giải hệ phương trình tìm nghiệm (x, y) theo tham số m ;
- **Bước 2:** Thế nghiệm x, y vào biểu thức điều kiện cho trước, giải tìm m ;
- **Bước 3:** Kết luận.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=m+3 \\ 2x-3y=m \end{cases} (I)$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m=1$.

b) Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x+y=-3$.

Lời giải

a) Với $m=1$, hệ phương trình (I) có dạng:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=8 \\ 2x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2; 1)$.

$$\text{b) } \begin{cases} x+2y=m+3 \\ 2x-3y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=2m+6 \\ 2x-3y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=m+3 \\ 7y=m+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5m+9}{7} \\ y=\frac{m+6}{7} \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{5m+9}{7}; \frac{m+6}{7} \right)$.

Lại có $x+y=-3$ hay $\frac{5m+9}{7} + \frac{m+6}{7} = -3 \Leftrightarrow 5m+9+m+6=-21 \Leftrightarrow 6m=-36 \Leftrightarrow m=-6$

Vậy với $m=-6$ thì hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x+y=-3$.

Câu 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$.

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = -2$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5m - 1 - 2x \\ x - 2(5m - 1 - 2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5m - 1 - 2x \\ 5x = 10m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m \\ y = m - 1 \end{cases}$$

Thay vào ta có

$$x^2 - 2y^2 = -2 \Leftrightarrow (2m)^2 - 2(m - 1)^2 = -2 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-2; 0\}$.

Câu 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m + 1 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$;

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn: $2x + y \leq 3$.

Lời giải

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.

b) Ta có $y = 2 - (m - 1)x$ thế vào phương trình còn lại ta được phương trình:

$$mx + 2 - (m - 1)x = m + 1 \Leftrightarrow x = m - 1 \text{ suy ra } y = 2 - (m - 1)^2 \text{ với mọi } m$$

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y) = (m - 1; 2 - (m - 1)^2)$

$$2x + y = 2(m - 1) + 2 - (m - 1)^2 = -m^2 + 4m - 1 = 3 - (m - 2)^2 \leq 3 \text{ với mọi } m.$$

Câu 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 2m + 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$. Tìm m để biểu thức $A = xy + x - 1$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\begin{cases} 3x + y = 2m + 9 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 2 \\ y = 3 - m \end{cases} \Rightarrow A = xy + x - 1 = 8 - (m - 1)^2 \Rightarrow A_{\max} = 8 \text{ khi } m = 1.$$

Câu 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 2m \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Lời giải

a) Thay $m = 1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

b) Xét hệ $\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 2m & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow y = 2m - mx$ thay vào (1) ta được $x + m(2m - mx) = m + 1 \Leftrightarrow 2m^2 - m^2x + x = m + 1$
 $\Leftrightarrow (1 - m^2)x = -2m^2 + m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2m^2 - m - 1$ (3)

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm duy nhất $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$
 (*)

Khi đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{2m+1}{m+1} \\ y = \frac{m}{m+1} \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+1}{m+1} \geq 2 \\ \frac{m}{m+1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{m+1} \geq 0 \\ \frac{-1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$

Kết hợp với (*) ta được giá trị m cần tìm là $m < -1$.

Câu 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 & (1) \\ x + (a-1)y = 2 & (2) \end{cases}$ (a là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $a = 2$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên

d) Tìm a để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn $x + y$ đạt GTNN.

Lời giải

a) Khi $a = 2$ hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 5 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

Vậy với $a = 2$ hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$

b) Giải và biện luận:

Từ PT (1) ta có: $y = (a+1)x - (a-1)$ (3) thế vào PT (2) ta được:

$$x + (a+1)[(a+1)x - (a-1)] = 2 \Leftrightarrow x + (a^2 - 1)x - (a^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow a^2 x = a^2 + 1 \quad (4)$$

TH1: $a \neq 0$, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x = \frac{a^2 + 1}{a^2}$. Thay vào (3) ta có:

$$y = (a+1)\frac{a^2 + 1}{a^2} - (a-1) = \frac{(a+1)(a^2 + 1) - a^2(a-1)}{a^2} = \frac{a^3 + a + a^2 + 1 - a^3 + a^2}{a^2} = \frac{a+1}{a^2}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{a^2 + 1}{a^2}; \frac{a+1}{a^2}\right)$

TH2: Nếu $a = 0$, phương trình (4) vô nghiệm. Suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

KL: $a \neq 0$ hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{a^2 + 1}{a^2}; \frac{a+1}{a^2}\right)$

$a = 0$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Với $a \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{a^2 + 1}{a^2}; \frac{a+1}{a^2}\right)$

Hệ phương trình có nghiệm nguyên: $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 + 1}{a^2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{a+1}{a^2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{Z})$

Điều kiện cần: $x = \frac{a^2 + 1}{a^2} = 1 + \frac{1}{a^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Điều kiện đủ:

$a = -1 \Rightarrow y = 0 \in \mathbb{Z}$ (nhận)

$a = 1 \Rightarrow y = 2 \in \mathbb{Z}$ (nhận)

Vậy $a = \pm 1$ hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

d) Với $a \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{a^2 + 1}{a^2}; \frac{a+1}{a^2}\right)$

Ta có $x + y = \frac{a^2 + 1}{a^2} + \frac{a+1}{a^2} = \frac{a^2 + a + 2}{a^2} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2}$.

Đặt $t = \frac{1}{a}$ ta được:

$$x + y = 2t^2 + t + 1 = 2\left(t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = -\frac{1}{4}$, khi đó $a = -4$

Vậy $a = -4$ thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn $x + y$ đạt GTNN bằng $\frac{7}{8}$

Câu 7: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 5 & (1) \\ mx - y = 4 & (2) \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình với $m = 2$.
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) trong đó x, y trái dấu.
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x = |y|$.

Giải:

a) Với $m = 2$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ 2(2y + 5) - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

b) Từ phương trình (1) ta có $x = 2y + 5$. Thay $x = 2y + 5$ vào phương trình (2) ta được: $m(2y + 5) - y = 4 \Leftrightarrow (2m - 1) \cdot y = 4 - 5m$ (3)

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với:

$$2m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}. \text{ Từ đó ta được: } y = \frac{4 - 5m}{2m - 1}; x = 5 + 2y = \frac{3}{2m - 1}. \text{ Ta có: } x \cdot y = \frac{3(4 - 5m)}{(2m - 1)^2}.$$

Do đó $x, y < 0 \Leftrightarrow 4 - 5m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{c) Ta có: } x = |y| \Leftrightarrow \frac{3}{2m - 1} = \left| \frac{4 - 5m}{2m - 1} \right| \quad (4)$$

Từ (4) suy ra $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$. Với điều kiện $m > \frac{1}{2}$ ta có:

$$(4) \Leftrightarrow |4 - 5m| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 5m = 3 \\ 4 - 5m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{5} (l) \\ m = \frac{7}{5} \end{cases}. \text{ Vậy } m = \frac{7}{5}.$$

Câu 8: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases}$$

- a) Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?
- b) Giải và biện luận hệ phương trình trên theo m .
- c) Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) mà x, y đều là số nguyên.
- d) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x, y) thì điểm $M(x, y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
- e) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được: $x + m(3m - 1 - mx) = m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 3m^2 - 2m - 1$ (3)

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, tức là $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Ta cũng có thể lập luận theo cách khác: Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

b) Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được: $x + m(3m - 1 - mx) = m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1).x = 3m^2 - 2m - 1$ (3)

Trường hợp 1: $m \neq \pm 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{3m^2 - 2m - 1}{m^2 - 1} = \frac{(m-1)(3m+1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{3m+1}{m+1} \\ y = 3m - 1 - m \cdot \frac{3m+1}{m+1} = \frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m = 1$. Khi đó phương trình (3) thành: $0.x = 0$.

Vậy hệ có vô số nghiệm dạng $(x; 2 - x), x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 3: $m = -1$ khi đó phương trình (3) thành: $0.x = 4$

(3) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.

c) Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq \pm 1$.

Ta có: $\begin{cases} x = \frac{3m+1}{m+1} = 3 - \frac{2}{m+1} \\ y = \frac{m-1}{m+1} = 1 - \frac{2}{m+1} \end{cases}$. Vậy x, y nguyên khi và chỉ khi $\frac{2}{m+1}$ nguyên. Do đó $m+1$ chỉ

có thể là $-2; -1; 1; 2$. Vậy $m = -3; -2; 0$ (thỏa mãn) hoặc $m = 1$ (loại)

Vậy m nhận các giá trị là $-3; -2; 0$.

d) Khi hệ có nghiệm duy nhất (x, y) ta có: $x - y = 3 - \frac{2}{m+1} - \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) = 2$

Vậy điểm $M(x; y)$ luôn chạy trên đường thẳng cố định có phương trình $y = x - 2$.

e) Khi hệ có nghiệm duy nhất (x, y) theo (d) ta có: $y = x - 2$. Do đó:

$$xy = x(x - 2) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x = 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{m+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m+1} = 2 \Leftrightarrow m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy với $m = 0$ thì x, y đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ $x - y = 2$ theo cách khác: Khi hệ phương trình

$$\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất } (m \neq \pm 1) \text{ lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1)}$$

của hệ ta thu được: $(m - 1)x - (m - 1)y = 2(m - 1) \Rightarrow x - y = 2$

Câu 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm. Gọi $(x_0; y_0)$ là một cặp nghiệm của phương trình: Chứng minh: $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán - ĐHSP Hà Nội 2015).

Lời giải:

Từ phương trình (2) của hệ phương trình ta có $y = 3m + 1 - mx$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có: $(m^2 + 1)x = 3m^2 - 3m + 2$. Do $m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên phương trình này luôn có nghiệm duy nhất x_0 . Suy ra hệ luôn có nghiệm với mọi m .

Gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ: Từ hệ phương trình ta có: $\begin{cases} x_0 - 2 = m(y_0 - 4) \\ y_0 - 1 = m(3 - x_0) \end{cases}$. Nhân cả hai

về phương trình thứ nhất với $(3 - x_0)$, phương trình thứ hai với $(y_0 - 4)$ rồi trừ hai phương trình cho nhau ta được: $(3 - x_0)(x_0 - 2) - (y_0 - 4)(y_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$.

Ngoài ra ta cũng có thể giải theo cách khác như sau:

$(d): x - my + 4m - 2 = 0, (d'): mx + y - 3m - 1 = 0$. Ta dễ dàng chứng minh được đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định: $A(2; 4)$ và đường thẳng (d') luôn đi qua điểm cố định: $B(3; 1)$. Mặt khác ta cũng dễ chứng minh đường thẳng (d) và đường thẳng (d') vuông góc với nhau nên hai đường thẳng này luôn cắt nhau. Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng thì

tam giác MAB vuông tại M . Gọi I là trung điểm của AB thì $I\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $AB = \sqrt{10}$ suy ra

$$IM = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow 4IM^2 = AB^2 \Leftrightarrow 4\left[\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{5}{2}\right)^2\right] = 10 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0.$$

Câu 10: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 3 & (1) \\ mx + y = 2m + 1 & (2) \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất (x, y) , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây:

a) $P = x^2 + 3y^2$ (1).

b) $Q = x^4 + y^4$ (2).

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta suy ra: $y = 2m + 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x + m(2m + 1 - mx) = 3 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2m^2 + m - 3 \quad (3).$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, điều đó xảy ra khi và chỉ khi: $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x = \frac{2m^2 + m - 3}{m^2 - 1} = \frac{(m-1)(2m+3)}{(m-1)(m+1)} = \frac{2m+3}{m+1} = 2 + \frac{1}{m+1} \\ y = 2m + 1 - m \cdot \frac{2m+3}{m+1} = \frac{1}{m+1} \end{cases}.$$

a) Ta có: $P = x^2 + 3y^2 = (2 + \frac{1}{m+1})^2 + 3(\frac{1}{m+1})^2 = 4 + \frac{4}{m+1} + \frac{3}{(m+1)^2} = (\frac{2m+3}{m+1})^2 + 3 \geq 3$

$$P = 3 \text{ khi } x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2m+3}{m+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4m+6 = 3m+3 \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

b) Ta có: $Q = x^4 + y^4 = x^4 + (x-2)^4$

đặt $t = x - 1$.

Khi đó

$$Q = (t+1)^4 + (t-1)^4 = t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 2t^4 + 12t^2 + 2 \geq 2$$

$$Q = 2 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow \frac{2m+3}{m+1} = 1 \Leftrightarrow 2m+3 = m+1 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng 2.

Dạng 4: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Phương pháp chung giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Cách giải một Câu toán bằng cách lập hệ phương trình, chúng ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Lập hệ phương trình.

- Biểu diễn hai đại lượng phù hợp bằng ẩn số x và y (thường đặt ẩn số là những đại lượng đề Câu yêu cầu cần tìm, Câu yêu cầu tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn thì chúng ta sẽ đặt x là chiều dài mảnh vườn, y là chiều rộng mảnh vườn.). Sau đó, đặt đơn vị và điều kiện của ẩn một cách thích hợp (Câu độ dài, thời gian hoàn thành công việc thì không thể là số âm.).

- Biểu thị các đại lượng chưa biết còn lại qua ẩn.

- Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng và thành lập hệ hai ẩn từ các phương trình vừa tìm.

- **Bước 2:** Giải hệ phương trình nói trên.

- **Bước 3:** Kiểm tra nghiệm tìm được thỏa mãn điều kiện của Câu toán và nêu kết luận

Bài toán 1: Chuyển động (trên đường bộ, trên đường sông có tính đến dòng nước chảy)

1. Một số lưu ý

Đối với dạng toán này, cần chú ý đến điều kiện của ẩn:

- Nếu gọi x là vận tốc của chuyển động thì điều kiện là $x > 0$.

- Đặt thời gian chuyển động là y thì điều kiện là $y \geq 0$.

- Một số công thức:

- Quãng đường bằng vận tốc nhân thời gian, $s = v.t$;

- Vận tốc khi nước đứng yên = vận tốc riêng;

- Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước;

- Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng - vận tốc dòng nước.

- Nếu hai xe đi ngược chiều nhau cùng xuất phát khi gặp nhau lần đầu:

- Thời gian hai xe đi được là như nhau,

- Tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.

- Cách đổi đơn vị thời gian, vận tốc:

- $1h$ (1 giờ) = 60 phút.

- $1(m/s) = 3,6(km/h)$, vì $1m = 1/1000km$ và $1s = 1/3600$ giờ.

- $1(km/h) = 5/18(m/s)$.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Đoạn đường AB dài 180 km. Cùng một lúc xe máy đi từ A và ô tô đi từ B xe máy gặp ô tô tại C cách A 80 km. Nếu xe máy khởi hành sau 54 phút thì chúng gặp nhau tại D cách A là 60 km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy?

Giải

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h), đk: $x > 0$.

Gọi vận tốc của xe máy là y (km/h), đk: $y > 0$.

Thời gian xe máy đi để gặp ô tô là $\frac{80}{y}$ (giờ)

Quãng đường ô tô đi là 100 km nên thời gian ô tô đi là $\frac{100}{x}$ (giờ)

ta có phương trình $\frac{100}{x} = \frac{80}{y}$ (1)

Quãng đường xe máy đi là 60 km nên thời gian xe máy đi là $\frac{60}{y}$ (giờ)

Quãng đường ô tô đi là 120 km nên thời gian ô tô đi là $\frac{120}{x}$ (giờ)

Vì ô tô đi trước xe máy 54 phút = $\frac{9}{10}$ nên ta có phương trình $\frac{120}{x} - \frac{60}{y} = \frac{9}{10}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{100}{x} = \frac{80}{y} \\ \frac{120}{x} - \frac{60}{y} = \frac{9}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{100}{x} - \frac{80}{y} = 0 \\ \frac{40}{x} - \frac{20}{y} = \frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{100}{x} - \frac{80}{y} = 0 \\ \frac{160}{x} - \frac{80}{y} = \frac{12}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{x} = \frac{12}{10} \\ \frac{100}{x} - \frac{80}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases} (TM)$$

Vậy vận tốc của ô tô là 50 km/h. Vận tốc của xe máy là 40 km/h.

Câu 2: Một xe máy đi từ A đến B. Sau đó 1 giờ, một ô tô cũng đi từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 km/h. Biết rằng ô tô và xe máy đến B cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi xe, với giả thiết quãng đường AB dài 200km

Giải

Gọi vận tốc của xe máy và ô tô lần lượt là x và y (km/h) ($x, y > 0$)

Vận tốc ô tô lớn hơn xe máy 10km/h $\Rightarrow y - x = 10$ (1)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{AB}{x} = \frac{200}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{AB}{y} = \frac{200}{y}$ (h)

Vì ô tô xuất phát sau xe máy 1h mà 2 xe đến nơi cùng lúc, do đó thời gian đi của ô tô ít hơn xe máy là 1h.

$$\Rightarrow \frac{200}{x} - \frac{200}{y} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $y = x + 10$

Thay vào (2) ta được:

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+10} = 1 \quad (2) \Leftrightarrow \frac{200(x+10) - 200x}{x(x+10)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 200x + 2000 - 200x = x^2 + 10x \Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 40 \text{ (thỏa mãn)} \text{ hoặc } x = -50 \text{ (loại)} \Rightarrow y = x + 10 = 50.$$

Vậy vận tốc của xe máy và ô tô lần lượt là 40km/h và 50km/h.

Câu 3: Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một xe ô tô đi từ B đến A, sau 4 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ô tô đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB

Giải

Gọi x (h) là thời gian xe máy đi hết quãng đường AB ($x > 4$)

y (h) là thời gian ô tô đi hết quãng đường AB ($y > 4$)

Trong 1 giờ xe máy đi được: $\frac{1}{x}$ (quãng đường)

Trong 1 giờ xe ô tô đi được: $\frac{1}{y}$ (quãng đường)

Trong 1 giờ hai xe đi được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ (1)

Mà thời gian xe ô tô về đến A sớm hơn xe máy về đến B là 6 giờ nên: $x - y = 6$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{4} \\ y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 14x + 24 = 0 \\ y = x - 6 \end{cases} \quad (DK : x \neq 6)$$

Giải hệ phương trình trên được: $x = 12$ (thỏa mãn); hoặc $x = 2$ (loại)

Với $x = 12$, tìm được $y = 6$. Do đó, nghiệm của hệ là (12; 6)

Vậy thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là 12 giờ, ô tô đi hết quãng đường AB là 6 giờ

Câu 4: Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ

Giải

Gọi t_1 là thời gian tàu tuần tra chạy ngược dòng nước.

Gọi t_2 là thời gian tàu tuần tra chạy xuôi dòng nước.

Gọi V là vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên.

Ta có:

$$V - 2 = \frac{60}{t_1}; V + 2 = \frac{48}{t_2}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{t_1} + 2 = \frac{48}{t_2} - 2 \Leftrightarrow \frac{60}{t_1} - \frac{48}{t_2} = -4(1)$$

$$t_1 - t_2 = 1(2)$$

$$(1); (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{t_1} - \frac{48}{t_2} = -4 \\ t_1 - t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{t_1} - \frac{48}{t_2} = -4 \\ t_1 = 1 + t_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{60}{1+t_2} - \frac{48}{t_2} = -4 \Leftrightarrow 4t_2^2 + 16t_2 - 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = -6(L) \\ t_2 = 2(TM) \end{cases} \Rightarrow V = 22(\text{km/h})$$

Câu 5: Hai ô tô đi từ A đến B dài 200km. Biết vận tốc xe thứ nhất nhanh hơn vận tốc xe thứ hai là 10km/h nên xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe

Giải

Gọi vận tốc hai xe lần lượt là x (km/h) và y (km/h) ($x, y > 0$)

Xe thứ nhất nhanh hơn xe thứ hai là 10km/h nên $x - y = 10 \Rightarrow x = y + 10$

Thời gian xe thứ nhất và xe thứ hai đi hết quãng đường AB lần lượt là $\frac{200}{x}$ (h); $\frac{200}{y}$ (h)

Vì xe thứ nhất đến sớm hơn xe thứ hai 1h nên $\frac{200}{y} - \frac{200}{x} = 1(*)$

Thay $x = y + 10$ vào (*) ta được:

$$\begin{aligned}\frac{200}{y} - \frac{200}{y+10} &= 1 \Leftrightarrow \frac{200(y+10)}{y(y+10)} - \frac{200y}{y(y+10)} = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{200(y+10) - 200y}{y(y+10)} &= 1 \Leftrightarrow \frac{2000}{y(y+10)} = 1 \\ \Leftrightarrow y^2 + 10y - 2000 &= 0 \Leftrightarrow (y+50)(y-40) = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = -50 \text{ (loại) hoặc } y = 40 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow x = 50$$

Vậy vận tốc mỗi xe lần lượt là 50km/h và 40km/h

Câu 6: Hai xe ô tô cùng đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh, xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1 giờ. Lúc trở về xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km mỗi giờ, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc nhưng dừng lại nghỉ ở một điểm trên đường hết 40 phút, sau đó về đến cảng Dung Quất cùng lúc với xe thứ nhất. Tìm vận tốc ban đầu của mỗi xe, biết chiều dài quãng đường từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là 120 km và khi đi hay về hai xe đều xuất phát cùng một lúc

Giải

Gọi vận tốc ban đầu của xe thứ nhất là x (km/h), xe thứ hai là y (km/h). ĐK: $x > 0; y > 0$.

Thời gian xe thứ nhất đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là $\frac{120}{x}$ (h).

Thời gian xe thứ hai đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là $\frac{120}{y}$ (h).

Vì xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1 giờ nên ta có phương trình: $\frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 1$ (1)

Vận tốc lúc về của xe thứ nhất là $x + 5$ (km/h).

Thời gian xe thứ nhất về từ khu du lịch Sa Huỳnh đến cảng Dung Quất $\frac{120}{x+5}$ (h).

Thời gian xe thứ hai về từ khu du lịch Sa Huỳnh đến cảng Dung Quất $\frac{120}{y}$ (h).

Vì xe thứ hai dừng lại nghỉ hết 40ph = $\frac{2}{3}$ h, sau đó về đến cảng Dung Quất cùng lúc với xe thứ

nhất nên ta có phương trình: $\frac{120}{x+5} - \frac{120}{y} = \frac{2}{3}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hpt:
$$\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 1 \\ \frac{120}{x+5} - \frac{120}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Giải hpt:

$$\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 1 \\ \frac{120}{x+5} - \frac{120}{y} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{120}{x} - \frac{120}{x+5} = \frac{1}{3} \Rightarrow 360(x+5) - 360x = x(x+5)$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 1800 = 0$$

$$x_1 = \frac{-5+85}{2} = 40 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

$$x_2 = \frac{-5-85}{2} = -45 \text{ (không thỏa mãn ĐK)}$$

Thay $x = 40$ vào pt (1) ta được: $\frac{120}{40} - \frac{120}{y} = 1 \Rightarrow \frac{120}{y} = 2 \Rightarrow y = 60$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy vận tốc ban đầu của xe thứ nhất là 40 km/h, xe thứ hai là 60 km/h

Bài toán 2: Toán làm chung - làm riêng (Câu toán vòi nước)

1. Một số lưu ý

Lập bảng	Thời gian làm (chảy) một mình xong công việc	Phần công việc (thể tích) trong 1 giờ	Phần công việc (thể tích) trong thời gian Câu cho
Cả hai đơn vị (hai vòi nước)	(Câu cho số liệu này)	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	
Đơn vị 1 (vòi nước 1)	x	$\frac{1}{x}$	
Đơn vị 2 (vòi nước 2)	y	$\frac{1}{y}$	

Gọi thời gian người thứ nhất làm xong công việc là x , thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là y thì:

1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc),

1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc

1 giờ cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

Chú ý:

- ☐ Khi công việc không được đo bằng số lượng cụ thể, ta coi toàn bộ công việc là một đơn vị công việc, biểu thị bởi số 1.
- ☐ Năng suất làm việc là phần việc làm được trong một đơn vị thời gian.
- ☐ Gọi A là khối lượng công việc, n là năng suất, t là thời gian làm việc. Ta có: $A = n \cdot t$.

- Tổng năng suất riêng bằng năng suất chung khi cùng làm.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Hai vòi nước cùng chảy đầy một bể không có nước trong 3h45ph. Nếu chảy riêng rẽ, mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể? biết rằng vòi chảy sau lâu hơn vòi trước 4 h.

Lời giải

- Gọi thời gian vòi đầu chảy chảy một mình đầy bể là x (điều kiện $x > 0$, x tính bằng giờ)
- Gọi thời gian vòi sau chảy chảy một mình đầy bể là y (điều kiện $y > 4$, y tính bằng giờ)
- Suy ra, trong 1 giờ vòi đầu chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi sau chảy được $\frac{1}{y}$ bể.
- Sau 1 giờ, cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể.

Hai vòi cùng chảy thì đầy bể trong 3h45ph = $15/4$ h, nên trong 1 giờ thì cả hai vòi chảy được

$$1: \frac{15}{4} = \frac{4}{15} \text{ bể}$$

Suy ra, ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{15}$

Mặt khác, nếu chảy một mình thì vòi sau chảy lâu hơn vòi trước 4 giờ tức là $y - x = 4$ nên ta có

$$\text{hệ phương trình} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{15} \\ y - x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \end{cases}$$

- Vậy, vòi đầu chảy một mình đầy bể trong 6 h; vòi sau chảy một mình đầy bể trong 10

Câu 2: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì được $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Hướng dẫn giải

Đổi $1h20' = 80'$

Gọi x (phút) là thời gian vòi I chảy một mình đầy bể ($x > 80$)

Gọi y (phút) là thời gian vòi II chảy một mình đầy bể ($y > 80$)

Trong 1 phút vòi I chảy được: $\frac{1}{x}$ (bể)

Trong 1 phút vòi II chảy được: $\frac{1}{y}$ (bể)

Trong 1 phút cả hai vòi chảy được: $\frac{1}{80}$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{80}$ (1)

Trong 10 phút vòi I chảy được: $\frac{10}{x}$ (bể)

Trong 12 phút vòi II chảy được: $\frac{12}{y}$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{80} \\ \frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$, ta được $\begin{cases} u + v = \frac{1}{80} \\ 10u + 12v = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{120} \\ v = \frac{1}{240} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120 \\ y = 240 \end{cases}$

Vậy vòi I chảy một mình thì sau 120 phút đầy bể.

Vòi II chảy một mình thì sau 240 phút đầy bể.

Câu 3: Hai người thợ làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình trong mấy giờ thì xong?

Hướng dẫn giải

Gọi số giờ để mỗi người làm một mình hết công việc đó lần lượt là $x(h)$ và $y(h)$, ($x, y > 0$).

Mỗi giờ, người thứ nhất và người thứ hai làm được: $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (công việc).

Hai người làm hết công việc đó trong 16 giờ nên: $16\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì được $\frac{1}{4}$ công việc

nên $3 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2) có hệ: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ 3 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{48} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian để mỗi người làm một mình xong công việc là 24 giờ và 48 giờ.

Câu 4: Hai đội công nhân cùng làm chung trong 4 giờ thì xong một con đường. Nếu mỗi đội làm riêng để xong con đường thì thời gian đội thứ nhất ít hơn đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội làm xong con đường trong thời gian bao lâu?

Hướng Dẫn Giải

Gọi đội thứ nhất làm một mình xong công việc trong x (giờ)

Đội thứ hai làm một mình xong công việc y (giờ) ($x, y > 4$)

Ta có phương trình: $y - x = 6$ (1)

1 giờ đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

1 giờ đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

1 giờ cả hai đội làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 6 \\ 4x + 4y = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ 4x + 4x + 24 = x^2 + 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ x^2 - 2x - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases} \text{ (nhận) hoặc } \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (loại).}$$

Vậy đội thứ nhất làm trong 6 giờ, đội thứ hai làm trong 12 giờ.

Câu 5: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được một phần tư công việc. Hỏi mỗi người thợ làm một mình thì trong bao nhiêu giờ mới xong công việc đó.

Hướng Dẫn Giải

Gọi thời gian người thợ thứ nhất làm một mình xong việc là x (giờ) ($x > 16$)

Thời gian người thợ thứ hai làm một mình xong việc là: y (giờ) ($y > 16$)

Trong 1 giờ người thợ thứ nhất làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 3 giờ người thợ thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ người thợ thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Trong 6 giờ người thợ thứ hai làm được $\frac{6}{y}$ (công việc).

Hai người cùng làm trong 16 giờ thì xong việc, Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1)

Người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì được một phần tư công việc, ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$, ta được: $\begin{cases} 3u + 6v = \frac{1}{4} \\ u + v = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{24} \\ v = \frac{1}{48} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases}$ (nhận)

Vậy thời gian người thợ thứ nhất làm một mình xong việc là 24 (giờ).

Thời gian người thợ thứ hai làm một mình xong việc là 48 (giờ).

Câu 6: Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ 20 phút và người thứ hai làm trong 10 giờ thì xong công việc. Tính thời gian mỗi công nhân khi làm riêng xong công việc.

Hướng Dẫn Giải

Gọi x (h) là thời gian người thứ nhất làm 1 mình xong công việc ($x > 6$).

Trong 1 h người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (cv)

Gọi y (h) là thời gian người thứ hai làm 1 mình xong công việc ($y > 6$).

Trong 1h người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (cv)

Trong 3 giờ 20 phút người thứ nhất làm được $\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x}$ (cv)

Trong 10h người thứ hai làm được $10 \cdot \frac{1}{y}$ (cv)

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x} + 10 \cdot \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$, ta được:
$$\begin{cases} u + v = \frac{1}{6} \\ \frac{10}{3}u + 10v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{10} \\ v = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy người thứ nhất làm một mình trong 10 giờ thì xong công việc.

Người thứ hai làm một mình trong 15 giờ thì xong công việc.

Bài toán 3: Toán có nội dung hình học.

1. Một số lưu ý

- Khi đặt ẩn là độ dài các đoạn thẳng, độ dài các cạnh thì điều kiện của ẩn là không âm
- Diện tích hình chữ nhật $S = x.y$, với x là chiều rộng; y là chiều dài.
- Diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}a.h_a$ với a là độ dài một cạnh tam giác và h_a là chiều cao ứng với cạnh đó.
- Định lý Pitago trong tam giác vuông với độ dài cạnh huyền là c , độ dài hai cạnh góc vuông là a, b thì

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28m. Đường chéo của hình chữ nhật dài 10m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật đó.

Giải:

Gọi chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là a (m) ($0 < a < 28$)

Chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là b (m) ($0 < a < b$)

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là 28 m nên:

$$(a + b).2 = 28 \Leftrightarrow a + b = 14 \quad (1)$$

Đường chéo của hình chữ nhật 10 m nên: $a^2 + b^2 = 10^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 100 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ PT
$$\begin{cases} a + b = 14 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow b = 14 - a$ thay vào (2) được:

$$a^2 + (14 - a)^2 = 100 \Leftrightarrow a^2 + 196 - 28a + a^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 28a + 96 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 14a + 48 = 0$$

$$\Delta' = 49 - 48 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7 - 1 = 6 \Rightarrow b = 8(\text{loại}) \\ a = 7 + 1 = 8 \Rightarrow b = 6(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy chiều dài của HCN là 8 m Chiều rộng của HCN là 6 m.

Câu 2: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích 100 m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 .

Giải:

Gọi chiều dài ban đầu của thửa ruộng là a (m) ($a > 0$)

Chiều rộng ban đầu của thửa ruộng là b (m) ($0 < b < a$)

Diện tích ban đầu của thửa ruộng là 100 m^2 nên ta có: $a \cdot b = 100$ (1)

Chiều rộng của thửa ruộng sau khi tăng 2 m là: $b + 2$ (m)

Chiều dài của thửa ruộng sau khi giảm 5 m là: $a - 5$ (m)

Diện tích sau của thửa ruộng là: $(b + 2)(a - 5)$

Diện tích sau của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 là $100 + 5 = 105 \text{ (m}^2\text{)}$

$$\Leftrightarrow (b + 2)(a - 5) = 105 \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hpt: } \begin{cases} ab = 100(1) \\ (b + 2)(a - 5) = 105(2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) ta có: } ab - 5b + 2a - 10 = 105$$

$$\Leftrightarrow 100 - 5b + 2a - 10 = 105$$

$$\Leftrightarrow -5b + 2a = 15(*)$$

Từ (1) ta có: $a = \frac{100}{b}$ thay vào (*) ta được:

Câu 3: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 360 m^2 . Nếu tăng chiều dài thêm 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì diện tích của mảnh vườn sẽ là 400 m^2 . Xác định chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu.

Giải:

Gọi chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là x (m);

chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là y (m). (điều kiện: $x > y > 0$)

Diện tích mảnh vườn hình chữ nhật ban đầu là 360 m^2 .

Khi tăng chiều dài thêm 1 m, tăng chiều rộng thêm 1 m thì diện tích của mảnh vườn mới là 400 m^2 . Tức là: Chiều dài: $x + 1$ (m); chiều rộng: $y + 1$ (m)

Khi đó diện tích của hình chữ nhật mới là: $(x + 1)(y + 1) = 400$

$$\Leftrightarrow xy + x + y + 1 = 400 \Leftrightarrow x + y = 39 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ xy = 360 \end{cases}$$

Theo Vi-et x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 39X + 360 = 0$.

Giải phương trình ta được hai nghiệm: $X_1 = 15$; $X_2 = 24$

Vậy chiều dài hình chữ nhật ban đầu là 24 cm, chiều rộng là 15 cm.

Câu 4: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34 m. Nếu tăng thêm chiều dài 3m và chiều rộng 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m^2 . Hãy tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Giải:

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m); chiều rộng là y (m) ($0 < x, y < 17$)

$$\text{Theo Câu ra ta có hpt: } \begin{cases} x + y = 34 : 2 = 17 \\ (x + 3)(y + 2) = xy + 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Vậy : chiều dài = 12m, chiều rộng = 5m.

Bài toán 4: Toán về tìm số.

1. Một số lưu ý

- Số có hai, chữ số được ký hiệu là $\overline{ab}$, điều kiện $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; a, b \in \mathbb{N}$.
- Giá trị của số: $\overline{ab} = 10a + b$.
- Số có ba, chữ số được ký hiệu là $\overline{abc}$ thì $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, điều kiện $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Tổng hai số x, y là: $x + y$.
- Tổng bình phương hai số x, y là: $x^2 + y^2$.
- Bình phương của tổng hai số x, y là: $(x + y)^2$.
- Tổng nghịch đảo hai số x, y là: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho số tự nhiên có hai chữ số, tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14. Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị. Tìm số đã cho.

Hướng dẫn.

- Gọi chữ số cần tìm là $\overline{xy}$, điều kiện $x, y \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$.

- Tổng chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14 nên có phương trình:

$$x + y = 14$$

Đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị nên có phương trình: $\overline{yx} - \overline{xy} = 18$ hay chính là $10y + x - (10x + y) = 18$

Do đó ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 10y + x - (10x + y) = 18 \end{cases}$$

Giải hệ này, tìm được $x = 6, y = 8$ (thỏa mãn điều kiện) nên số cần tìm là 68.

Câu 2: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị và khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị.

Hướng dẫn

- Gọi chữ số hàng chục là a , chữ số hàng đơn vị là b , điều kiện $a, b \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$.

- Số cần tìm là $\overline{ab}$ có giá trị $\overline{ab} = 10a + b$.

- Ta có chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị nên ta có phương trình:

$$b - a = 5$$

- Lại có, khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới là $\overline{a1b}$ có giá trị $\overline{a1b} = 100a + 10 + b$.

- Do số mới lớn hơn số ban đầu là 280 đơn vị nên ta có phương trình:

$$100a + 10 + b - (10a + b) = 280$$

- Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -a + b = 5 \\ (100a + 10 + b) - (10a + b) = 280 \end{cases}$$

- Giải hệ này, tìm được $a = 3, b = 8$ đều thỏa mãn điều kiện nên số cần tìm là 38.

Câu 3. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

Hướng dẫn giải

Gọi số có hai chữ số là: $\overline{ab}$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} a+b=11 \\ 10b+a-(10a+b)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases}$$

Số cần tìm là 47.

Câu 4. Tìm một số tự nhiên có ba chữ số, tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số giảm đi 99 đơn vị.

Giải

Số cần tìm có dạng $\overline{x4y}$ ta có hệ

$$\begin{cases} x+y=13 \\ 100x+40+y-(100y+40+x)=99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases}$$

Câu 5. Tìm số có ba chữ số chia hết cho 11, biết rằng khi chia số đó cho 11 được thương bằng tổng các chữ số của số bị chia.

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm là $\overline{xyz}$, ta có:

$$100x+10y+z=11(x+y+z) \Leftrightarrow 89x=10z+y=\overline{zy}$$

$\Rightarrow x=1, y=9, z=8$ ta có số 198.

CHUYÊN ĐỀ 2_PƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ HỆ THỨC VIẾT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt ($ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$.)

Dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

Lưu ý: • Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.

• Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

• Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

4. Định lý Vi-et

Ta có định lý Viète như sau:

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

5. Áp dụng định lý Vi-et để tính nhanh nghiệm

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

6. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

MỘT SỐ LƯU Ý VÀ CÁC KẾT QUẢ CẦN NHỚ KHI GIẢI CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỊNH LÝ VI-ET

Bài toán thường gặp : Tìm m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2 thỏa mãn một biểu thức đối xứng đối với x_1, x_2

Quy trình

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2

- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$ ($\Delta' \geq 0$)
- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)

Bước 2. Biến đổi biểu thức đối xứng đối với x_1, x_2 về tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1.x_2$

Bước 3. Sử dụng định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ và thay vào biểu thức chứa tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1.x_2$ ở trên. Giải ra m , đối chiếu điều kiện ở bước 1.

Một số phép biến đổi thường gặp

- $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$

Hoặc $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 + 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$.
- $|x_1 - x_2|$ thì xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.
- $|x_1| + |x_2|$ thì xét $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1|.|x_2|$
 $= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|$.

Chú ý : $|A|^2 = A^2$, $|A \pm B|^2 = (A \pm B)^2$, $|A|.|B| = |A.B|$.

THỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ VIÉT

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 .

Định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\frac{a}{b}$, $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

Hệ quả 1. Nếu $x = 1$ là nghiệm của phương trình thì

$$a.1^2 + b.1 + c = 0 \text{ hay } a + b + c = 0.$$

Ngược lại, nếu $a + b + c = 0$ thì $x = 1$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $x = \frac{c}{a}$

Hệ quả 2. Nếu $x = -1$ là một nghiệm của phương trình thì

$$a.(-1)^2 + b.(-1) + c = 0 \text{ hay } a - b + c = 0.$$

Ngược lại, nếu $a - b + c = 0$ thì $x = -1$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $x = -\frac{c}{a}$.

Hệ quả 3. Nếu a và c trái dấu thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, đồng thời hai nghiệm luôn trái dấu nhau.

Hệ quả 4. Điều kiện để $x_1 > 0, x_2 > 0$ (cả hai nghiệm đều dương) là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Hệ quả 5. Điều kiện để $x_1 < 0, x_2 < 0$ (cả hai nghiệm đều âm) là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Hệ quả 6. Điều kiện để $x_1 < 0 < x_2$ (cả hai nghiệm trái dấu) là $x_1 \cdot x_2 < 0$ hay a và c trái dấu.

DẠNG TOÁN CÓ THÊM ĐIỀU KIỆN PHỤ

Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

Nếu có $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ ta cần thêm điều kiện phụ là $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$

Nếu x_1, x_2 là độ dài hai cạnh đa giác ta cần thêm điều kiện phụ là: $x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

DẠNG TOÁN SO SÁNH NGHIỆM VỚI SỐ 0 VÀ SỐ α

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < 0, x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2 < 0$$

$$x_1 > \alpha, x_2 > \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha > 0, x_2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < \alpha, x_2 < \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0, x_2 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0, x_2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 1: phương trình bậc hai và ứng dụng vi-ét (không chứa tham số)

Câu 1: Giải phương trình sau: $x^2 + 2\sqrt{2}x = 6$

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 10 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1}$

Câu 3: Cho phương trình $3x^2 - 2x - 4 = 0$ (1). Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Câu 4: Cho phương trình $3x^2 - 11x - 15 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{3x_1}{x_2} + \frac{3x_2}{x_1}$

- Câu 5:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 4 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$.
- Câu 6:** Cho phương trình: $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = (x_1 - x_2)^2$.
- Câu 7:** Cho phương trình $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 , không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức: $Q = x_1^3 + x_2^3$
- Câu 8:** Cho phương trình: $4x^2 - 5x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $S = x_1 + x_2$; $P = x_1x_2$; $F = (x_1 + 1)(x_2 + 1) - (x_1 - x_2)^2$.
- Câu 9:** Cho phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính:

$$P = \frac{2x_2^2}{x_1 + x_2} + 2x_1$$
- Câu 10:** a). Hãy tìm một phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số a, b, c là số nguyên nhận $x = \frac{\sqrt{5} - 2}{3}$ làm nghiệm.
 b). Tính tổng lập phương hai nghiệm của phương trình vừa tìm được ở câu a)
- Câu 11:** Cho phương trình $x^2 - 5x + a = 0$. Biết phương trình có một nghiệm là $x = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x_1^3 - x_1 + x_2^3 - x_2 - 285$
- Câu 12:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức $D = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}$.
- Câu 13:** Cho phương trình $x^2 + 5x - 7 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.
- Câu 14:** Cho phương trình $3x^2 - 12x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $T = \frac{x_1^2 + 4x_2 - x_1x_2}{4x_1 + x_2^2 + x_1x_2}$
- Câu 15:** Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$.
- Câu 16:** Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$
- Câu 17:** Cho phương trình $-\sqrt{2}x^2 + 2x + 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_2 + 1}{1 - x_1} + \frac{x_1 + 1}{1 - x_2}$

Câu 18: Cho phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{5x_1 - x_2}{x_1} - \frac{x_1 - 5x_2}{x_2}$.

Câu 19: Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{|x_1| + |x_2|}{2x_1^2 + 24x_2 - 4}$

Câu 20: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x - 7 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$.

Câu 21: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 , không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1}$

Câu 22: Cho phương trình: $x^2 - 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Hãy tính giá trị của biểu thức sau: $A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}$

Câu 23: Cho phương trình: $x^2 + 3x - 10 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$

Câu 24: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_2 + 1}{x_1}; \frac{x_1 + 1}{x_2}$

Câu 25: Cho phương trình $3x^2 - 6x + 2 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.

Bài toán 2: các bài toán có liên qua đến tham số

Câu 1: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 6x + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 2x_2$. Tính giá trị biểu thức $S = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

Câu 2: Cho phương trình: $x^2 + 5x + m = 0$ (*) có một nghiệm là $\frac{-\sqrt{13} - 5}{2}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Câu 3: Cho phương trình $mx^2 + 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ (m là tham số). Khi phương trình có nghiệm, tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho không phụ thuộc vào m .

Câu 4: Biết phương trình $2x^2 + 4x + m = 0$ (m là tham số) có 1 nghiệm bằng 1. Tính tổng bình phương hai nghiệm của phương trình.

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - (m + 1)x - 1 = 0$ có nghiệm $x = 1 - \sqrt{2}$. Tính bình phương của hiệu hai nghiệm trong phương trình trên.

- Câu 6:** Biết rằng phương trình $x^2 - 5x + a = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , biết $x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.
- Câu 7:** Cho phương trình $x^2 - 6x - 2m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 20$.
- Câu 8:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$.
- Câu 9:** Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 2x + m = 0$ có một nghiệm là $x = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$. Tính tổng nghịch đảo bình phương hai nghiệm của phương trình trên.
- Câu 10:** Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 + 6x + a = 0$ có một nghiệm là $x = -3 + \sqrt{14}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.
- Câu 11:** Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt sao cho tổng các bình phương của hai nghiệm bằng 13.
- Câu 12:** Phương trình $x^2 - 2x - m + 1 = 0$ (m là tham số) có một nghiệm là $x = 1 + \sqrt{7}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2x_2 + x_2^2x_1$.
- Câu 13:** Phương trình $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$ có x_1, x_2 hai nghiệm và $x_1 = -1$, tính giá trị của biểu thức $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$.
- Câu 14:** Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 + 4x + m = 0$ có một nghiệm là $x = -\sqrt{3}$. Tìm tổng các nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên.
- Câu 15:** Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1x_2 - 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
- Câu 16:** Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - m - 3 = 0$. Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Câu 17:** Biết rằng phương trình bậc hai $2x^2 - 4x + m = 0$ có một nghiệm $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$. Tính tổng nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên.
- Câu 18:** Cho phương trình $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9$.
- Câu 19:** Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 4m - m^2 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- Câu 20:** Cho phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$.
- Câu 21:** Cho phương trình $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.
- Câu 22:** Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = -5x_1$.
- Câu 23:** Cho phương trình $x^2 - 2(k-1)x - 4k = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 2$.
- Câu 24:** Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = x_1^2$.
- Câu 25:** Cho phương trình $x^2 - (m-3)x - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là các số nguyên.
- Câu 26:** Cho phương trình $x^2 - 20x + m + 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là các số nguyên tố.
- Câu 27:** Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$.
- Câu 28:** Cho phương trình $x^2 - (2m+5)x + 2m+1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà biểu thức $M = \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Câu 29:** Cho phương trình $x^2 - 5x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2x_1 = \sqrt{x_2}$.
- Câu 30:** Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m+6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài của hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.
- Câu 31:** Cho phương trình $x^2 - (m-2)x + m-3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.
- Câu 32:** Cho phương trình $x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 \leq x_2$.
Vậy $m > -4$ là giá trị cần tìm.
- Câu 33:** Cho phương trình $x^2 + (m-2)x + m-5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2$.
- Câu 34:** Cho phương trình $x^2 + 2mx + 4m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2, x_2 < 2$.

Câu 35: Cho phương trình $x^2 - (m + 3)x + m - 1 = 0$ Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 < -\frac{3}{2} < x_2$.

CHUYÊN ĐỀ 2_PƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ HỆ THỨC VIẾT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt ($ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$.)

Dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

Lưu ý: • Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.

• Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

• Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

4. Định lý Vi-et

Ta có định lý Viète như sau:

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

5. Áp dụng định lý Vi-et để tính nhanh nghiệm

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

6. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

MỘT SỐ LƯU Ý VÀ CÁC KẾT QUẢ CẦN NẮM KHI GIẢI CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỊNH LÝ VI-ET

Bài toán thường gặp : Tìm m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2 thỏa mãn một biểu thức đối xứng đối với x_1, x_2

Quy trình

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2

- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$ ($\Delta' \geq 0$)
- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)

Bước 2. Biến đổi biểu thức đối xứng đối với x_1, x_2 về tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 \cdot x_2$

Bước 3. Sử dụng định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ và thay vào biểu thức chứa tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 x_2$ ở trên. Giải ra m , đối chiếu điều kiện ở bước 1.

Một số phép biến đổi thường gặp

- $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]$

Hoặc $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2(x_1 + x_2)$.

- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$.
- $|x_1 - x_2|$ thì xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$.
- $|x_1| + |x_2|$ thì xét $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1| \cdot |x_2|$
 $= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2|$.

Chú ý : $|A|^2 = A^2$, $|A \pm B|^2 = (A \pm B)^2$, $|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$.

THỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ VIET

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 .

Định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\frac{a}{b}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Hệ quả 1. Nếu $x = 1$ là nghiệm của phương trình thì

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \text{ hay } a + b + c = 0.$$

Ngược lại, nếu $a + b + c = 0$ thì $x = 1$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $x = \frac{c}{a}$

Hệ quả 2. Nếu $x = -1$ là một nghiệm của phương trình thì

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \text{ hay } a - b + c = 0.$$

Ngược lại, nếu $a - b + c = 0$ thì $x = -1$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $x = -\frac{c}{a}$.

Hệ quả 3. Nếu a và c trái dấu thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, đồng thời hai nghiệm luôn trái dấu nhau.

Hệ quả 4. Điều kiện để $x_1 > 0, x_2 > 0$ (cả hai nghiệm đều dương) là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Hệ quả 5. Điều kiện để $x_1 < 0, x_2 < 0$ (cả hai nghiệm đều âm) là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Hệ quả 6. Điều kiện để $x_1 < 0 < x_2$ (cả hai nghiệm trái dấu) là $x_1 x_2 < 0$ hay a và c trái dấu.

DẠNG TOÁN CÓ THÊM ĐIỀU KIỆN PHỤ

Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

Nếu có $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ ta cần thêm điều kiện phụ là $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$

Nếu x_1, x_2 là độ dài hai cạnh đa giác ta cần thêm điều kiện phụ là: $x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

DẠNG TOÁN SO SÁNH NGHIỆM VỚI SỐ 0 VÀ SỐ α

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < 0, x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2 < 0$$

$$x_1 > \alpha, x_2 > \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha > 0, x_2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < \alpha, x_2 < \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0, x_2 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0, x_2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 1: phương trình bậc hai và ứng dụng vi-ét (không chứa tham số)

Câu 1: Giải phương trình sau: $x^2 + 2\sqrt{2}x = 6$

Lời giải

Ta có $x^2 + 2\sqrt{2}x = 6$ đưa về $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

Tính được $\Delta' = 2 + 6 = 8 > 0$.

Khi đó, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{8}}{1} = \sqrt{2} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{8}}{1} = -3\sqrt{2}$$

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 10 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính

giá trị của biểu thức: $A = \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1}$

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (-10) = 49 > 0$. Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo hệ thức Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -10 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1} \\ &= \frac{x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{3^2 - 2 \cdot (-10) + 3}{-10} = -\frac{16}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = -\frac{16}{5}.$$

Câu 3: Cho phương trình $3x^2 - 2x - 4 = 0$ (1). Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Lời giải

Phương trình $3x^2 - 2x - 4 = 0$ (1)

Ta có: $a \cdot c = 3 \cdot (-4) = -12 < 0$

Suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ trái dấu

Áp dụng hệ thức Ta-lét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

$$A = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

$$A = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

$$A = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

$$A = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right)}{\left(\frac{-4}{3}\right)^2} = \frac{7}{4}$$

Vậy $A = \frac{7}{4}$

Câu 4: Cho phương trình $3x^2 - 11x - 15 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{3x_1}{x_2} + \frac{3x_2}{x_1}$

Lời giải

Ta có

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) + x_2 = 6$$

$$\Rightarrow x_2 = -9$$

Vì $x = -9$ là nghiệm của phương trình nên ta có $(-9)^2 - 5(-9) + m + 4 = 0$.

Tìm được $m = -3 \pm \sqrt{13}$

Câu 5: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 4 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$.

Lời giải

Áp dụng định lí Vi-ét cho phương trình $2x^2 - 3x - 4 = 0$, ta có :

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, x_1x_2 = -2.$$

Suy ra : $A = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2) = \frac{1}{4}$.

Câu 6: Cho phương trình: $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là $x_1; x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = (x_1 - x_2)^2$.

Lời giải

Phương trình có $ac = -6 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = -\frac{3}{2}$

Ta có:

$$A = (x_1 - x_2)^2$$

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$A = 2^2 - 4 \cdot \left(\frac{-3}{2} \right)$$

$$A = 10$$

Vậy $A = 10$.

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$, không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức: $Q = x_1^3 + x_2^3$

Lời giải

Phương trình $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$

$\Delta' = (2\sqrt{3})^2 - 8 = 4 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 4\sqrt{3}$ và $x_1 x_2 = 8$

Ta có: $Q = x_1^3 + x_2^3$

$$Q = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$Q = (x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 x_2)$$

$$Q = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]$$

$$Q = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

Thay $x_1 + x_2 = 4\sqrt{3}$ và $x_1 x_2 = 8$ vào Q ta được:

$$Q = (4\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

Câu 8: Cho phương trình: $4x^2 - 5x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $S = x_1 + x_2$; $P = x_1 x_2$; $F = (x_1 + 1)(x_2 + 1) - (x_1 - x_2)^2$.

Lời giải

Theo định lí Viète, ta có: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{4}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{4}$.

Ta có: $F = (x_1 + 1)(x_2 + 1) - (x_1 - x_2)^2$

$$F = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 - x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2$$

$$F = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 - x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_2^2 + 4x_1 x_2$$

$$F = 5x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 - (x_1 + x_2)^2$$

$$F = 5 \cdot \frac{-3}{4} + \frac{5}{4} + 1 - \left(\frac{5}{4} \right)^2 = \frac{-49}{16}.$$

Câu 9: Cho phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính:

$$P = \frac{2x_2^2}{x_1 + x_2} + 2x_1$$

Lời giải

Chứng minh PT có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-5}{3} \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$$

Theo đề Câu ta có :

$$\frac{2x_2^2}{x_1 + x_2} + 2x_1 = \frac{2x_2^2 + 2x_1^2 + 2x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 2x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{-86}{15}$$

Câu 10: a). Hãy tìm một phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số a, b, c là số nguyên nhận

$x = \frac{\sqrt{5}-2}{3}$ làm nghiệm.

b). Tính tổng lập phương hai nghiệm của phương trình vừa tìm được ở câu a)

Lời giải

a). Ta có $x = \frac{\sqrt{5}-2}{3}$

$$3x = \sqrt{5} - 2$$

$$3x + 2 = \sqrt{5}$$

$$(3x + 2)^2 = 5$$

$$9x^2 + 12x + 4 = 5$$

$$9x^2 + 12x - 1 = 0$$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $9x^2 + 12x - 1 = 0$

b). Theo hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{9} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = \left(\frac{-4}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{9}\right)\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{-76}{27}$$

Câu 11: Cho phương trình $x^2 - 5x + a = 0$. Biết phương trình có một nghiệm là $x = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x_1^3 - x_1 + x_2^3 - x_2 - 285$

Lời giải

Ta có $x = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$

Vì phương trình có một nghiệm là $x = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$ nên thay $x = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$ vào phương trình ta có $a = -11 + 7\sqrt{5}$

Áp dụng hệ thức Viets ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= x_1^3 - x_1 + x_2^3 - x_2 - 285 \\ &= x_1^3 + x_2^3 - (x_1 + x_2) - 185 \\ &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) - 5 - 285 \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2] - 290 \\ &= 5 \cdot [5^2 - 3 \cdot (-11 + 7\sqrt{5})] \\ &= -105\sqrt{5} \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A là $-105\sqrt{5}$

Câu 12: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức $D = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}$.

Lời giải

Phương trình có tích $ac = 3 \cdot (-6) = -18 < 0$ nên có nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo định lý Viète, ta có $x_1 + x_2 = \frac{-5}{3}$ và $x_1 x_2 = -2$.

$$x_1, x_2 \neq -2$$

$$D = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2} = \frac{x_1(x_1 + 2) + x_2(x_2 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$$

$$D = \frac{(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}$$

$$D = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}$$

$$D = \frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^2 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)}{(-2) + 2 \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) + 4} = \frac{-31}{12}$$

Câu 13: Cho phương trình $x^2 + 5x - 7 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$.

Lời giải

$\Delta = 25 + 28 = 53 > 0$ nên pt có 2 nghiệm x_1, x_2 . Theo Vi-et ta có

$$x_1 \cdot x_2 = -7; x_1 + x_2 = -5$$

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (-5)^2 - 4 \cdot (-7) = 53$$

Vậy $A = 53$

Câu 14: Cho phương trình $3x^2 - 12x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính

giá trị của biểu thức: $T = \frac{x_1^2 + 4x_2 - x_1x_2}{4x_1 + x_2^2 + x_1x_2}$

Lời giải

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai của x có: $ac = 3 \cdot (-5) < 0$

Nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

- Theo định lý Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{12}{3} = 4 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } T = \frac{x_1^2 + 4x_2 - x_1x_2}{4x_1 + x_2^2 + x_1x_2} = \frac{x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2 - 2x_1x_2}{4x_1 + x_2^2 + x_1x_2} = \frac{x_1(x_1 + x_2) + 4x_2 - 2x_1x_2}{4x_1 + x_2(x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{4x_1 + 4x_2 - 2x_1x_2}{4x_1 + 4x_2} = \frac{4(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{4(x_1 + x_2)} = \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)}{4 \cdot 4} = \frac{29}{24}$$

Vậy giá trị của biểu thức $T = \frac{29}{24}$

Câu 15: Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương

trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$.

Lời giải

$$x^2 - 12x + 4 = 0$$

Xét $\Delta' = b'^2 - ac = (-6)^2 - 1 \cdot 4 = 32 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = 12; x_1x_2 = 4 \Rightarrow x_1 > 0, x_2 > 0$

Ta có:

$$T^2 = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right)^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \frac{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2}{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}} = \frac{(12^2 - 2 \cdot 4)^2}{12 + 2\sqrt{4}} = 1156$$

Nhận xét $x_1^2 + x_2^2 > 0$ và $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ với mọi $x_1, x_2 > 0$ suy ra $T > 0$

$$\Rightarrow T = \sqrt{T^2} = \sqrt{1156} = 34$$

Vậy $T = 34$.

Câu 16: Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

Theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = -3$

Khi đó $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$

$$= 3x_1x_2(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)$$

$$= (3x_1x_2 + 1)(x_1 + x_2)$$

$$= [3 \cdot (-3) + 1] \cdot 1 = -8$$

Câu 17: Cho phương trình $-\sqrt{2}x^2 + 2x + 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_2 + 1}{1 - x_1} + \frac{x_1 + 1}{1 - x_2}$

Lời giải

$$\text{Vì } \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot 3 = 4 + 12\sqrt{2} > 0$$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo định lí Viète, ta có: } S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{-\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A &= \frac{x_2 + 1}{1 - x_1} + \frac{x_1 + 1}{1 - x_2} = \frac{(x_2 + 1)(1 - x_2)}{(1 - x_1)(1 - x_2)} + \frac{(x_1 + 1)(1 - x_1)}{(1 - x_2)(1 - x_1)} = \frac{x_2 - x_2^2 + 1 - x_2 + x_1 - x_1^2 + 1 - x_1}{1 - x_2 - x_1 + x_1x_2} \\ &= \frac{2 - (x_1^2 + x_2^2)}{1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2} = \frac{2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]}{1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2} = \frac{2 - (S^2 - 2P)}{1 - S + P} = \frac{2 - \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \right) \right]}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Câu 18: Cho phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{5x_1 - x_2}{x_1} - \frac{x_1 - 5x_2}{x_2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$\text{Vì } \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0.$$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo định lí Vi-et, ta có: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 4 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}.$$

$$A = \frac{5x_1 - x_2}{x_1} - \frac{x_1 - 5x_2}{x_2} = \frac{(5x_1 - x_2) \cdot x_2 - (x_1 - 5x_2) \cdot x_1}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{5x_1 \cdot x_2 - x_2^2 - x_1^2 + 5x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{10x_1 \cdot x_2 - (x_1^2 + x_2^2)}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{10 \cdot P - (S^2 - 2 \cdot P)}{P} = \frac{10 \cdot 3 - (4^2 - 2 \cdot 3)}{3} = \frac{20}{3}$$

Câu 19: Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{|x_1| + |x_2|}{2x_1^2 + 24x_2 - 4}$

Lời giải

Theo hệ thức Viet có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases}$

Nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

Suy ra $|x_1| + |x_2| = x_1 + x_2 = 12$

x_1 là nghiệm của PT đã cho nên $x_1^2 - 12x_1 + 4 = 0$ hay $x_1^2 = 12x_1 - 4$ hay $2x_1^2 = 24x_1 - 8$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + 24x_2 - 4 &= 24x_1 - 8 + 24x_2 - 4 \\ &= 24(x_1 + x_2) - 12 = 24 \cdot 12 - 12 = 276 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } T = \frac{12}{276} = \frac{1}{24}$$

Câu 20: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x - 7 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$.

Lời giải

Phương trình có $ac = -7 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = 4; x_1 x_2 = -7$.

$$\text{Khi đó ta có: } T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} - 2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} - 2 = \frac{4^2 - 2 \cdot (-7)}{-7} - 2 = \frac{-44}{7}$$

$$\text{Vậy } T = -\frac{44}{7}$$

Câu 21: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 , không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1}$

Lời giải

Xét phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ (1) có $a = 2, b = -3, c = -1$

Do $a \cdot c = -2 < 0$ nên pt(1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức viete có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Do đó
$$A = \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2}{x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2) + 1}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2}{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1} = \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) - 2}{\frac{-1}{2} + \frac{3}{2} + 1} = \frac{\frac{9}{4} + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Câu 22: Cho phương trình: $x^2 - 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Hãy tính giá trị của biểu thức sau: $A =$

$$\frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}$$

Lời giải

PT: $x^2 - 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = -6 \end{cases}$$

Khi đó:
$$A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1} = \frac{x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$$A = \frac{x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2)}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$$

Vậy:
$$A = \frac{5^2 - 2 \cdot (-6) - 5}{-6 - 5 + 1} = \frac{-16}{5}$$

Câu 23: Cho phương trình: $x^2 + 3x - 10 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$

Lời giải

Phương trình $x^2 + 3x - 10 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Theo định lý Viète, ta có

$$x_1 + x_2 = -3; x_1 \cdot x_2 = -10$$

$$A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1} = \frac{x_1(x_1 + 2) + x_2(x_2 + 2)}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2) + (2x_1 + 2x_2)}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2)}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{(-3)^2 - 2(-10) + 2(-3)}{-10}$$

$$A = \frac{-23}{10}$$

Câu 24: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_2 + 1}{x_1}; \frac{x_1 + 1}{x_2}$

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ (1)

Ta có: $ac = -1 < 0$ nên PT (1) luôn có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$

$$\text{Xét } \frac{x_2 + 1}{x_1} + \frac{x_1 + 1}{x_2} = \frac{x_2^2 + x_2 + x_1^2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1^2 + 2 - 1}{-1} = -2$$

$$\frac{x_2 + 1}{x_1} \cdot \frac{x_1 + 1}{x_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-1 + 1 + 1}{-1} = -1$$

Do đó: $\frac{x_2 + 1}{x_1}; \frac{x_1 + 1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn t sau: $t^2 + 2t - 1 = 0$.

Câu 25: Cho phương trình $3x^2 - 6x + 2 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$.

Lời giải

Phương trình $3x^2 - 6x + 2 = 0$ có $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$.

$$\text{Ta có } A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 2^2 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Vậy $A = 2$.

Bài toán 2: các bài toán có liên qua đến tham số

Câu 1: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 6x + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 2x_2$. Tính giá trị biểu thức $S = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$.

Lời giải

Áp dụng định lý Vi - ét ta có:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{6}{1} = 6.$$

$$P = x_1 x_2 = c$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{Nên } \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } S = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^3 = (2 + 4)^3 = 216.$$

Câu 2: Cho phương trình: $x^2 + 5x + m = 0$ (*) có một nghiệm là $\frac{-\sqrt{13}-5}{2}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

Thay $x = \frac{-\sqrt{13}-5}{2}$ vào phương trình (*) ta được:

$$\left(\frac{-\sqrt{13}-5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{-\sqrt{13}-5}{2}\right) + m = 0$$

$$m = 3$$

$$\text{Phương trình (*): } x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$\text{Theo định lí Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$$

Tổng bình phương hai nghiệm là:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-5)^2 - 2 \cdot 3 = 19$$

Câu 3: Cho phương trình $mx^2 + 2(m-2)x + m-3 = 0$ (m là tham số). Khi phương trình có nghiệm, tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho không phụ thuộc vào m.

Lời giải

$$\text{Ta có } \Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m = -m + 4$$

Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta' \geq 0$ hay $-m + 4 > 0$ suy ra $m < 4$.

Khi đó theo Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m-2)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 + \frac{4}{m} \\ x_1 x_2 = 1 - \frac{3}{m} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 3(x_1 + x_2) = -6 + \frac{12}{m} \quad (1) \\ 4x_1 x_2 = 4 - \frac{12}{m} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Công hai vế của (1) và (2) ta có } 3(x_1 + x_2) + 4x_1 x_2 = -2$$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m.

Câu 4: Biết phương trình $2x^2 + 4x + m = 0$ (m là tham số) có 1 nghiệm bằng 1. Tính tổng bình phương hai nghiệm của phương trình.

Lời giải

Vì phương trình có một nghiệm bằng 1 nên ta có: $2.1 + 4.1 + m = 0$ suy ra $m = -6$

Với $m = -6$ phương trình (*) có dạng: $2x^2 + 4x - 6 = 0$

Ta có $a + b + c = 2 + 4 - 6 = 0$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = -6$

Vậy tổng bình phương 2 nghiệm là: $1^2 + (-6)^2 = 1 + 36 = 37$

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - (m+1)x - 1 = 0$ có nghiệm $x = 1 - \sqrt{2}$. Tính bình phương của hiệu hai nghiệm trong phương trình trên.

Lời giải

Ta có $ac = -1 < 0$ nên PT có 2 nghiệm phân biệt trái dấu hay PT có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

Ta có $x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow (1 - \sqrt{2})x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2} + 1$

$$(x_1 - x_2)^2 = \left[(\sqrt{2} + 1) - (1 - \sqrt{2}) \right]^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

Câu 6: Biết rằng phương trình $x^2 - 5x + a = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , biết $x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.

Lời giải

Thay $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ vào phương trình đã cho ta có:

$$\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)^2 - 5 \cdot \frac{5 - \sqrt{13}}{2} + a = 0, \text{ tìm được } a = 3$$

Với $a = 3$, pt đã cho là $x^2 - 5x + 3 = 0$. Theo Viet có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$

$$\text{Biến đổi: } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 5^2 - 3 \cdot 3 = 16$$

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 6x - 2m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Lời giải

Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm là: $\Delta' = 2m + 6 \geq 0$ hay $m \geq -3$.

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -2m + 3 \end{cases}$ nên

$$x_1^2 + x_2^2 = 20$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 20$$

$$4m = 10$$

$$m = \frac{5}{2} \text{ (TM)}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{5}{2}.$$

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi

$$\Delta' > 0$$

$$m^2 - 4m + 4 > 0$$

$$(m - 2)^2 > 0$$

$$m - 2 \neq 0$$

$$m \neq 2$$

Với $m \neq 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m; x_1x_2 = \frac{c}{a} = 4m - 4$

Theo đề Câu ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 8 = 0$$

$$(2m)^2 - 2.(4m - 4) - 8 = 0$$

$$4m^2 - 8m + 8 - 8 = 0$$

$$4m^2 - 8m = 0$$

$$4m(m - 2) = 0$$

$$4m = 0 \text{ hoặc } m - 2 = 0$$

$m = 0$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $m = 2$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m = 0$.

Câu 9: Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 2x + m = 0$ có một nghiệm là $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$. Tính tổng nghịch đảo bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

Ta có $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$, thay vào phương trình ta được

$$(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1) + m = 0$$

$$4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 + m = 0$$

$$2 + m = 0$$

$$m = -2$$

Mà theo hệ thức Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m = -2 \end{cases}$

$$\text{Do đó } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{2^2 - 2 \cdot (-2)}{(-2)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

Câu 10: Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 + 6x + a = 0$ có một nghiệm là $x = -3 + \sqrt{14}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

Vì phương trình bậc hai $x^2 + 6x + a = 0$ có một nghiệm là $x = -3 + \sqrt{14}$ nên tổng hai nghiệm của phương trình $x^2 + 6x + a = 0$ là $S = \frac{-b}{a} = -6$. Suy ra nghiệm còn lại là

$$x = -6 - (-3 + \sqrt{14}) = -3 - \sqrt{14}. \text{ Khi đó, tổng bình phương hai nghiệm của phương trình}$$

$$x^2 + 6x + a = 0 \text{ là: } (-3 + \sqrt{14})^2 + (-3 - \sqrt{14})^2 = 9 - 6\sqrt{14} + 14 + 9 + 6\sqrt{14} + 14 = 46$$

Vậy tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên là 46.

Câu 11: Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt sao cho tổng các bình phương của hai nghiệm bằng 13.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số)

Ta có: $a = 1; b = -5; c = m$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 25 - 4m$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì: $\Delta > 0$

$$25 - 4m > 0$$

$$m < \frac{25}{4}$$

Với $m < \frac{25}{4}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$, theo định lí Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$\text{Nên: } 5^2 - 2m = 13$$

$$2m = 12$$

$$m = 6 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy với $m = 6$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn tổng các bình phương của hai nghiệm bằng 13.

Câu 12: Phương trình $x^2 - 2x - m + 1 = 0$ (m là tham số) có một nghiệm là $x = 1 + \sqrt{7}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2x_2 + x_2^2x_1$.

Lời giải

Thay $x = 1 + \sqrt{7}$ vào phương trình ta có:

$$(1 + \sqrt{7})^2 - 2(1 + \sqrt{7}) - m + 1 = 0$$

$$8 + 2\sqrt{7} - 2 - 2\sqrt{7} - m + 1 = 0$$

$$m = 7$$

Phương trình có dạng $x^2 - 2x - 6 = 0$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi - ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -6 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } A = x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1 + x_2) = -6 \cdot 2 = -12$$

$$\text{Vậy } A = -12$$

Câu 13: Phương trình $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$ có x_1, x_2 hai nghiệm và $x_1 = -1$, tính giá trị của biểu thức

$$N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$$

Lời giải

Thay $x_1 = -1$ vào phương trình đã cho ta có

$$(-1)^2 + m \cdot (-1) + 2m - 4 = 0$$

$$m = 3$$

$$\text{Ta có } N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3} = \frac{x_1 + x_2 + 6}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} \text{ (điều kiện } x_1 \neq -3, x_2 \neq -3)$$

$$N = \frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9}$$

$$N = \frac{-m+6}{2m-4+3(-m)+9} = \frac{6-m}{5-m} = \frac{6-3}{5-3} = \frac{3}{2}.$$

Câu 14: Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 + 4x + m = 0$ có một nghiệm là $x = -\sqrt{3}$. Tìm tổng các nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

Vì $x = -\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 4x + m = 0$ nên ta có:

$$(-\sqrt{3})^2 + 4(-\sqrt{3}) + m = 0$$

$$\Rightarrow m = 4\sqrt{3} - 3$$

Với $m = 3$ phương trình đã cho trở thành: $x^2 + 4x + 4\sqrt{3} - 3 = 0$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = 2^2 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} > 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 + x_2 = -4$; $x_1 \cdot x_2 = 4\sqrt{3} - 3$

Vậy tổng các nghịch đảo hai nghiệm của phương trình là:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-4}{4\sqrt{3} - 3} = \frac{-1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Câu 15: Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1 x_2 - 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Lời giải

Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1) với m là tham số.

$$\Delta' = 1 - m + 1 = 2 - m$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Áp dụng Định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Có: } x_1 x_2 - 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$x_1 x_2 - 1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$m - 1 - 1 = \frac{2}{m - 1} \quad (\text{Điều kiện: } m \neq 1)$$

$$(m - 2)(m - 1) = 2$$

$$m^2 - 3m = 0$$

$$m = 0(TM); m = 3(KTM)$$

Vậy $m = 0$

Câu 16: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$. Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1).

$$(1) \text{ có } \Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (-m-3) = m^2 - 2m + 1 + m + 3 = m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ với}$$

mọi m Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo hệ thức Vi-et, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = -m-3 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A = x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = [2(m-1)]^2 - 2(-m-3) = 4m^2 - 8m + 4 + 2m + 6 = 4m^2 - 6m + 10 \\ &= \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10 = \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} \geq \frac{31}{4} \text{ với mọi } m. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{31}{4} \text{ khi } m = \frac{3}{4}.$$

Câu 17: Biết rằng phương trình bậc hai $2x^2 - 4x + m = 0$ có một nghiệm $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$. Tính tổng nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

$$2x^2 - 4x + m = 0 \text{ có nghiệm } x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \text{ nên ta thay } x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \text{ vào phương trình:}$$

$$2\left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2 + \sqrt{10}}{2} + m = 0$$

$$7 + 2\sqrt{10} - 4 - 2\sqrt{10} + m = 0$$

$$m = -3$$

$$\text{Phương trình: } 2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\text{Theo định lí Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Tổng nghịch đảo 2 nghiệm: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2}{\frac{-3}{2}} = \frac{-4}{3}$$

Câu 18: Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = [-(m+3)]^2 - 1 \cdot (m^2 + 3) = (m+3)^2 - m^2 - 3 = 6m + 6$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

$$\text{Có } (2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9 \Leftrightarrow 4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 9 \quad (*)$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m+3), \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = m^2 + 3$$

$$\text{Thay vào } (*) \text{ ta được } 4(m^2 + 3) - 4(m+3) + 1 = 9 \Leftrightarrow (2m-1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2m-1 = \pm 3 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại)}, m = 2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 19: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m - m^2 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = [-(m+1)]^2 - 1 \cdot (4m - m^2) = (m+1)^2 - 4m + m^2 = 2m^2 - 2m + 1 > 0 \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Có } A^2 = |x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2.$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m+1), \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = 4m - m^2$$

Thay vào $A^2 = |x_1 - x_2|^2$ ta được

$$A^2 = |x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$A^2 = 4(m+1)^2 - 4(4m - m^2) = 8m^2 - 8m + 4 = 8\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow A \geq \sqrt{2} \Rightarrow \text{Min } A = \sqrt{2} \text{ khi } m = \frac{1}{2}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 20: Cho phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$.

Lời giải

Có $ac = -3 < 0 \forall m$ do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -m, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = -3$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } (|x_1| + |x_2|)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| \\ &= m^2 - 2 \cdot (-3) + 2|-3| = m^2 + 12 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } |x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow m^2 + 12 = 16 \Rightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 21: Cho phương trình $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = (-m)^2 - 4 \cdot (2m - 4) = m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 4$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } (|x_1| + |x_2|)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| \\ &= m^2 - 2 \cdot (2m - 4) + 2|2m - 4| = m^2 - 4m + 8 + 4|m - 2| = (m - 2)^2 + 4|m - 2| + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Nên } |x_1| + |x_2| = 3 \Rightarrow (m - 2)^2 + 4|m - 2| + 4 = 9$$

$$(m - 2)^2 + 4|m - 2| - 5 = 0 \Rightarrow |m - 2| = 1 \Rightarrow m = 1, m = 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = 1, m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 22: Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = -5x_1$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (-m^2 - 1) = m^2 + 5 > 0 \forall m.$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 - 1$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x_2 = -5x_1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow -5x_1 + x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 5.$$

$$\text{Thay } x_1 = -1, x_2 = 5 \text{ vào } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 - 1, \text{ ta được } m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 23: Cho phương trình $x^2 - 2(k - 1)x - 4k = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = [-(k - 1)]^2 - 1 \cdot (-4k) = (k - 1)^2 + 4k = (k + 1)^2$$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $k \neq -1$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2k - 2, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4k$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2k - 2 \end{cases} \Rightarrow 4x_1 = 2k \Rightarrow x_1 = \frac{k}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3k - 4}{2}.$$

$$\text{Thay } x_1 = \frac{k}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3k - 4}{2} \text{ vào } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4k, \text{ ta được}$$

$$\frac{k}{2} \cdot \frac{3k - 4}{2} = -4k \Leftrightarrow 3k^2 + 12k = 0 \Leftrightarrow k = 0, k = -4 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $k = 0, k = -4$ là giá trị cần tìm.

Câu 24: Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = x_1^2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = (-3)^2 - 1 \cdot (m + 3) = 6 - m.$$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m + 3$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \Rightarrow x_1 = 2.$$

□ Với $x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 9$ thay vào $x_1 x_2 = m + 3 \Rightarrow m = -30$ (thỏa mãn)

□ Với $x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 4$ thay vào $x_1 x_2 = m + 3 \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $m = -30$; $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 25: Cho phương trình $x^2 - (m - 3)x - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là các số nguyên.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = [-(m - 3)]^2 - 4 \cdot (-5) = (m - 3)^2 + 20 > 0 \quad \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Cách 1: (Theo định lý Viét)

Theo định lý Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m - 3$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -5$

$$\text{Từ } x_1 x_2 = -5, x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Thay vào $x_1 x_2 = m - 3 \Rightarrow m = 7; m = -1$

Vậy $m = 7; m = -1$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: (Sử dụng Δ phải là số chính phương)

Từ $x_1 + x_2 = m - 3 \in \mathbb{Z}$

Do đó để $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ thì trước hết $\Delta = (m - 3)^2 + 20$ phải là số chính phương

$$\Rightarrow (m - 3)^2 + 20 = n^2, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (m - 3 - n)(m - 3 + n) = -20$$

Mà $m - 3 - n < m - 3 + n$ và tổng $(m - 3 - n) + (m - 3 + n) = 2m - 6$ chẵn và tích $(m - 3 - n)(m - 3 + n) = -20$ chẵn nên $m - 3 - n; m - 3 + n$ phải cùng chẵn, do đó:

$$* \begin{cases} m - 3 - n = -2 \\ m - 3 - n = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ n = 6 \end{cases} \text{ thử lại thỏa mãn}$$

$$* \begin{cases} m - 3 - n = -10 \\ m - 3 - n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 6 \end{cases} \text{ thử lại thỏa mãn}$$

Vậy $m = 7, m = -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 26: Cho phương trình $x^2 - 20x + m + 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là các số nguyên tố.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = (-10)^2 - 1(m+5) = 95 - m$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 95 - m > 0 \Leftrightarrow m < 95$.

$$\text{Theo định lý Viét, ta có: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 20, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m + 5$$

Từ $x_1 + x_2 = 20$ và x_1, x_2 là các số nguyên tố, suy ra:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 17 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 17 \\ x_2 = 3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 13 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

Thay vào $x_1 x_2 = m + 5 \Rightarrow m = 46, m = 86$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 46, m = 86$ là giá trị cần tìm.

Câu 27: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m-1) = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall m.$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1.$$

$$\text{Để tồn tại } \sqrt{x_1}; \sqrt{x_2} \text{ ta cần có } x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 0 \\ m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

$$\text{Có } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) + 2\sqrt{x_1 x_2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} = 2 - m.$$

Điều kiện để có bình phương hai vế của $\sqrt{m-1} = 2 - m$ là $1 \leq m \leq 2$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{m-1} = 2 - m \Leftrightarrow m - 1 = (2 - m)^2 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kết hợp các điều kiện ta được $m = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$. Vậy $m = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: bài này ta cần lưu ý điều kiện $1 \leq m \leq 2$ trong quá trình giải.

Câu 28: Cho phương trình $x^2 - (2m+5)x + 2m+1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà biểu thức $M = \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = [-(2m+5)]^2 - 4 \cdot (2m+1) = (2m+5)^2 - 8m - 4$$

$$= 4m^2 + 12m + 21 = (2m+3)^2 + 12 > 0 \quad \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m+5, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m+1$$

$$\text{Để tồn tại } \sqrt{x_1}; \sqrt{x_2} \text{ ta cần có } x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+5 \geq 0 \\ 2m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Xét } M^2 = \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right|^2 = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m+5, x_1 x_2 = 2m+1$ vào M^2 ta được

$$M^2 = 2m + 5 - 2\sqrt{2m+1} = (2m+1 - 2\sqrt{2m+1} + 1) + 3$$

$$= (\sqrt{2m+1} - 1)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow M \geq \sqrt{3}. \text{ Vậy min } M = \sqrt{3} \text{ khi } \sqrt{2m+1} = 1 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 29: Cho phương trình $x^2 - 5x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2x_1 = \sqrt{x_2}$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = (-5)^2 - 4.1.(m-1) = 29 - 4m.$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi } \Delta > 0 \Leftrightarrow 29 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{29}{4}.$$

$$\text{Theo định lý Viét ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$$

$$\text{Điều kiện để bình phương hai vế của } 2x_1 = \sqrt{x_2} \text{ là } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geq 0 \\ m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

$$\text{Khi đó } 2x_1 = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_2 = 4x_1^2 \text{ thay vào } x_1 + x_2 = 5 \text{ ta được}$$

$$4x_1^2 + x_1 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ (thỏa mãn), } x_1 = -\frac{5}{4} \text{ (loại).}$$

$$\text{Với } x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 4 \text{ thay vào } x_1 x_2 = m - 1 \text{ ta được } 1.4 = m - 1 \Leftrightarrow m = 5 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta cần lưu ý điều kiện $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ trong quá trình giải.

Câu 30: Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m+6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài của hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = [-(m+5)]^2 - 4.1.(3m+6) = (m+5)^2 - 12m - 24 = (m-1)^2$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ phân biệt khi } \Delta > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m+5, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 3m+6.$$

$$\text{Do } x_1, x_2 \text{ là độ dài hai cạnh của một tam giác nên } x_1 > 0, x_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+5 > 0 \\ 3m+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

$$\text{Do độ dài cạnh huyền bằng 5 nên } x_1^2 + x_2^2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 25$$

$$\text{Thay } x_1 + x_2 = m+5, x_1 x_2 = 3m+6 \text{ vào } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 25 \text{ ta được}$$

$$(m+5)^2 - 2(3m+6) = 25 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 = 16 \Leftrightarrow m+2 = \pm 4 \Leftrightarrow m = -6 \text{ (loại), } m = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta cần lưu ý đến điều kiện $m > -2$ trong quá trình giải.

Câu 31: Cho phương trình $x^2 - (m-2)x + m-3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = [-(m-2)]^2 - 4.1.(m-3) = (m-2)^2 - 4m + 12 = (m-4)^2$$

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m-4)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m-2, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m-3$.

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ m-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Vì $\Delta = (m-4)^2$ nên hai nghiệm của phương trình là $x = \frac{m-2 \pm (m-4)}{2} \Leftrightarrow x = 1, x = m-3$

Do $x_1 \neq x_2$ nên x_1, x_2 không thể cùng là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông cân. Giả sử x_1 là độ dài cạnh huyền, x_2 là độ dài cạnh góc vuông thì theo định lý Pytago ta có

$$x_1^2 = x_2^2 + x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2}x_2.$$

Trường hợp 1. Xét $x_1 = 1, x_2 = m-3$, thay vào $x_1 = \sqrt{2}x_2$ ta được

$$1 = \sqrt{2}(m-3) \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 2. Xét $x_1 = m-3, x_2 = 1$ thay vào $x_1 = \sqrt{2}x_2$ ta được

$$m-3 = \sqrt{2}.1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2} + 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3, m = \sqrt{2} + 3$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: ta có thể nhận xét $a + b + c = 0$ để được hai nghiệm của phương trình (*) là $x = 1, x = m-3$.

Câu 32: Cho phương trình $x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 \leq x_2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = (m+2)^2 - 4.1.(-m-4) = m^2 + 8m + 20 = (m+4)^2 + 4 > 0 \quad \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

Trường hợp 1: Xét riêng $x_2 = 0$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$0^2 + (m+2).0 - m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

Thay $m = -4$ vào phương trình đã cho ta được

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = 2 \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow a$ và c trái dấu

$$\Leftrightarrow 1.(-m-4) < 0 \Leftrightarrow m > -4$$

Vậy $m > -4$ là giá trị cần tìm.

Câu 33: Cho phương trình $x^2 + (m-2)x + m - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = (m-2)^2 - 4.1.(m-5) = m^2 - 8m + 24 = (m-4)^2 + 8 > 0 \quad \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

Trường hợp 1: Xét riêng $x_1 = 0$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$0^2 + (m-2) \cdot 0 + m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$$

Thay $m = 5$ vào phương trình đã cho ta được $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3$ (loại).

Trường hợp 2: xét $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow a$ và c trái dấu $\Leftrightarrow 1 \cdot (m-5) < 0 \Leftrightarrow m < 5$. Vậy $m < 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 34: Cho phương trình $x^2 + 2mx + 4m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 2, x_2 < 2$

Lời giải

Ta có $\Delta' = m^2 - 1 \cdot (4m - 4) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Cách 1: (sử dụng định lý Viète)

Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2m, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 4m - 4$.

$$x_1 < 2, x_2 < 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < 0, x_2 - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m - 4 < 0 \\ 4m - 4 + 4m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Kết hợp với $m \neq 2$ ta được $m > 0; m \neq 2$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: (Giải x_1, x_2 dựa vào $\Delta' = (m - 2)^2$)

Do $\Delta' = (m - 2)^2$ nên hai nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = -m \pm (m - 2) \Leftrightarrow x = -2, x = -2m + 2$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 2 \\ -2m + 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Kết hợp với $m \neq 2$ ta được $m > 0; m \neq 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 35: Cho phương trình $x^2 - (m + 3)x + m - 1 = 0$ Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 < -\frac{3}{2} < x_2$.

Lời giải

Ta có $\Delta = [-(m + 3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) = (m + 3)^2 - 4m + 4 = m^2 + 2m + 13 = (m + 1)^2 + 12 > 0 \forall m$

Do phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

Theo định lý Viète, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m + 3; x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$.

$$\text{Có } x_1 < -\frac{3}{2} < x_2 \Leftrightarrow x_1 + \frac{3}{2} < 0 < x_2 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)\left(x_2 + \frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{9}{4} < 0$$

Thay $x_1 + x_2 = m + 3$; $x_1 x_2 = m - 1$ ta được

$$(m-1) + \frac{3}{2}(m+3) + \frac{9}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}m + \frac{23}{4} < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{23}{10}$$

Vậy: $m < -\frac{23}{10}$ là giá trị cần tìm.

CHUYÊN ĐỀ 3: TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ VI-ET VỚI NHỮNG BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG

Câu 1: Biết rằng phương trình $x^2 - 19x + 7 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 , không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức: $P = x_2(2x_1^2 - 38x_1 + x_1x_2 - 3)^2 + x_1(2x_2^2 - 38x_2 + x_1x_2 - 3)^2$

Câu 2: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4m - 5 = 0$ (1) (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -2$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{2}x_1^2 - (m-1)x_1 + x_2 - 2m + \frac{33}{2} = 4059$$

Câu 3: Cho phương trình $x^2 - 4(m+1)x + 3m^2 + 2m - 5 = 0$, với m là tham số. Xác định giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4(m+1)x_2 + 3m^2 + 2m - 5 = 9$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = -3$

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 2$

b) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + mx_2 - x_2 = 4$

Câu 6: Cho phương trình $x^2 - mx - 8 = 0$. Chứng minh với mọi m , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và giá trị của biểu thức $H = \frac{2x_1^2 + 5x_1 - 16}{3x_1} = \frac{2x_2^2 + 5x_2 - 16}{3x_2}$ không phụ thuộc vào m .

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_2 + 1} = \frac{1}{4}$.

Câu 8: Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $P = \frac{2x_1x_2 + 1}{x_1^2 - 2mx_2 + 1 - 2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 9: Cho phương trình $x^2 - 2(m-5)x + 1 - 2m = 0$ (1), với x là ẩn số

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$

b) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

c) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 1) = 64$$

Câu 10: Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 6m - 4 = 0$ (*) với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 - 2mx_1 - 6m + 13)x_2^2 - 24x_1 - 100 = 0$.

CHUYÊN ĐỀ 3: TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ VI-ET VỚI NHỮNG BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG

Câu 1: Biết rằng phương trình $x^2 - 19x + 7 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 , không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức: $P = x_2(2x_1^2 - 38x_1 + x_1x_2 - 3)^2 + x_1(2x_2^2 - 38x_2 + x_1x_2 - 3)^2$

Lời giải

Xét phương trình có $\Delta = 19^2 - 4 \cdot 7 = 333 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt

Áp dụng hệ thức Vi - ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 19 \\ x_1x_2 = 7 \end{cases}$

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho $\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 19x_1 + 7 = 0 \\ x_2^2 - 19x_2 + 7 = 0 \end{cases}$

Theo đề Câu ta có:

$$\begin{aligned} P &= x_2(2x_1^2 - 38x_1 + x_1x_2 - 3)^2 + x_1(2x_2^2 - 38x_2 + x_1x_2 - 3)^2 \\ &= x_2[2(x_1^2 - 19x_1 + 7) - 14 + x_1x_2 - 3]^2 + x_1[2(x_2^2 - 19x_2 + 7) - 14 + x_1x_2 - 3]^2 \\ &= x_2(x_1x_2 - 17)^2 + x_1(x_1x_2 - 17)^2 = (x_1x_2 - 17)^2(x_1 + x_2) = (7 - 17)^2 \cdot 19 = 1900 \end{aligned}$$

Câu 2: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4m - 5 = 0$ (1) (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -2$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{2}x_1^2 - (m-1)x_1 + x_2 - 2m + \frac{33}{2} = 4059$$

Lời giải

a) Giải phương trình khi $m = -2$

Thay $m = -2$ vào phương trình (1) ta có: $x^2 + 4x + 3 = 0$

Ta có $a - b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Vậy khi $m = -2$ thì tập nghiệm là $S = \{-1; -3\}$

b) Tìm m

Phương trình (1) có $\Delta' = m^2 - (4m - 5) = m^2 - 4m + 5 = (m - 2)^2 + 1 > 0, \forall m$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m

Áp dụng hệ thức Vi - et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -4m - 5 \end{cases}$

Theo Câu a ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1^2 - (m-1)x_1 + x_2 - 2m + \frac{33}{2} &= 4059 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2x_2 - 4m + 33 &= 8118 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2x_1 + 2x_2 - 4m &= 8085 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 - 4m - 5 + 2x_1 + 2x_2 &= 8085 - 5 \\ \Leftrightarrow (x_1^2 - 2mx_1 - 4m - 5) + 2(x_1 + x_2) &= 8080 \end{aligned}$$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có $x_1^2 - 2mx_1 - 4m - 5 = 0$. Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = 8080 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4040 \Leftrightarrow 2m = 4040 \Leftrightarrow m = 2020$$

Vậy $m = 2020$

Câu 3: Cho phương trình $x^2 - 4(m+1)x + 3m^2 + 2m - 5 = 0$, với m là tham số. Xác định giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4(m+1)x_2 + 3m^2 + 2m - 5 = 9$.

Lời giải

$$\begin{aligned} x^2 - 4(m+1)x + 3m^2 + 2m - 5 &= 0(1) \\ \Delta' &= [-2(m+1)]^2 - (3m^2 + 2m - 5) = m^2 + 2m + 9 = (m+1)^2 + 8 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, áp dụng Vi et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m + 4 \\ x_1 x_2 = 3m^2 + 2m - 5 \end{cases}$$

Vì x_1 là một nghiệm của phương trình (1)

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1^2 + 4(m+1)x_2 + 3m^2 + 2m - 5 &= 9 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 4(m+1)x_1 + 3m^2 + 2m - 5 + 4(m+1)x_1 + 4(m+1)x_2 &= 9 \\ \Leftrightarrow 0 + 4(m+1)(x_1 + x_2) &= 9 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (4m+4)(4m+4) = 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+4=3 \\ 4m+4=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{1}{4} \\ m=-\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \in \left\{ -\frac{1}{4}; -\frac{7}{4} \right\}$$

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = -3$

Lời giải

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thì:

$$\begin{aligned}\Delta' &= (m-1)^2 - (m^2 - 6) \geq 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - m^2 + 6 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2m + 7 &\geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Khi đó áp dụng định lý Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = m^2 - 6 \end{cases}$

Theo Caura ta có:

$$\begin{aligned}x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 &= -3 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 6 + 2x_1 + 2x_2 &= m^2 - 6 - 3 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 6 + 2(x_1 + x_2) &= m^2 - 9 (*)\end{aligned}$$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình đã cho nên $x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 6 = 0$, do đó:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = m^2 - 9 \Leftrightarrow 2(2m - 2) = m^2 - 9 \\ &\Leftrightarrow 4m - 4 = m^2 - 9 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + m - 5m - 5 = 0 \Leftrightarrow m(m+1) - 5(m+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (m+1)(m-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = 0 \\ m-5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1(tm) \\ m = 5(ktm) \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $m = -1$

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$

- Giải phương trình khi $m = 2$
- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + mx_2 - x_2 = 4$

Lời giải

a) Khi $m = 2$, pt thành $x^2 - 4x + 1 = 0$

Ta có: $\Delta' = (-2)^2 - 1.1 = 3 > 0$, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}; x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

b) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Xét phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (*) ta có:

$$\Delta' = m^2 - 1.(m-1) = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} > 0 (\forall m)$$

$$\Rightarrow \Delta' > 0 (\forall m)$$

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

c) Với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, áp dụng hệ thức

Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$. Theo Caura ta có:

$$\begin{aligned}
x_1^2 x_2 + m x_2 - x_2 &= 4 \Leftrightarrow x_1^2 x_2 + x_2(m-1) = 4 \\
\Leftrightarrow x_1^2 x_2 + x_2 x_1 x_2 &= 4 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 4 \\
\Leftrightarrow (m-1) \cdot 2m &= 4 \Leftrightarrow m(m-1) = 2 \\
\Leftrightarrow m^2 - m - 2 &= 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + m - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow m(m-2) + (m-2) &= 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $m = -1, m = 2$ thỏa đề.

Câu 6: Cho phương trình $x^2 - mx - 8 = 0$. Chứng minh với mọi m , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và giá trị của biểu thức $H = \frac{2x_1^2 + 5x_1 - 16}{3x_1} = \frac{2x_2^2 + 5x_2 - 16}{3x_2}$ không phụ thuộc vào m .

Lời giải

Có $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = m^2 + 32 > 0 \quad \forall m$.

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

Theo định lý Viét, ta có $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -8 < 0 \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx - 8 = 0$ nên

$$\begin{cases} x_1^2 - mx_1 - 8 = 0 \\ x_2^2 - mx_2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = mx_1 + 8 \\ x_2^2 = mx_2 + 8 \end{cases}$$

Thay vào H , ta được

$$\begin{aligned}
H &= \frac{2(mx_1 + 8) + 5x_1 - 16}{3x_1} - \frac{2(mx_2 + 8) + 5x_2 - 16}{3x_2} \\
&= \frac{2(mx_1 + 8) + 5x_1 - 16}{3x_1} - \frac{2(mx_2 + 8) + 5x_2 - 16}{3x_2} \\
&= \frac{2mx_1 + 5x_1}{3x_1} - \frac{2mx_2 + 5x_2}{3x_2} = \frac{2m+5}{3} - \frac{2m+5}{3} = 0
\end{aligned}$$

Không phụ thuộc vào m (đpcm).

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_2 + 1} = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (m-1) = 2 - m$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ nên

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + m - 1 = 0 \\ x_2^2 - 2x_2 + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 2x_1 - m + 1 \\ x_2^2 = 2x_2 - m + 1 \end{cases}$$

Thay vào $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_2 + 1} = \frac{1}{4}$, ta được

$$\frac{x_1}{2x_2 + 2x_1 - m + 2} + \frac{x_2}{2x_1 + 2x_2 - m + 2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2(x_1 + x_2) - m + 2} = \frac{1}{4}.$$

Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$ nên ta được

$$\frac{2}{2 \cdot 2 - m + 2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{6 - m} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 6 - m = 8 \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 8: Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $P = \frac{2x_1x_2 + 1}{x_1^2 - 2mx_2 + 1 - 2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = m^2 - 1 \cdot (-2m - 1) = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Do x_1 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 1 = 0$ nên

$$x_1^2 + 2mx_1 - 2m - 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 = -2mx_1 + 2m + 1.$$

$$\text{Thay vào P, ta được } P = \frac{2x_1x_2 + 1}{-2mx_1 + 2m + 1 - 2mx_2 + 1 - 2m} = \frac{2x_1x_2 + 1}{-2m(x_1 + x_2) + 2}$$

Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2m$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2m - 1$ nên ta được

$$P = \frac{2 \cdot (-2m - 1) + 1}{-2m \cdot (-2m) + 2} = \frac{-4m - 1}{4m^2 + 2}$$

$$\Rightarrow P(4m^2 + 2) = -4m - 1 \Leftrightarrow 4P \cdot m^2 + 4m + 2P + 1 = 0$$

$$* P = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

$$* P \neq 0 \Rightarrow \Delta_M' = 4 - 4P(2P + 1) \geq 0 \Rightarrow 2P^2 + P - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq P \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy $\text{Min} P = -1$ khi $-4m^2 + 4M - 1 = 0 \Rightarrow M = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Câu 9: Cho phương trình $x^2 - 2(m - 5)x + 1 - 2m = 0$ (1), với x là ẩn số

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$

b) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

c) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 1) = 64$$

Lời giải

a) Với $m = 3$ thì phương trình (1) trở thành: $x^2 + 4x - 5 = 0$ (2)

+) Phương trình (2) có $a + b + c = 1 + 4 + (-5) = 0$

nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$.

Vậy với $m = 3$ thì phương trình (1) có tập nghiệm $S = \{1; -5\}$.

b) Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac$

$$= [- (m-5)]^2 - 1 \cdot (1-2m)$$

$$= m^2 - 10m + 25 - 1 + 2m$$

$$= m^2 - 8m + 24$$

$$= m^2 - 2 \cdot m \cdot 4 + 4^2 + 8$$

$$= (m-4)^2 + 8 \geq 8 > 0 \text{ với mọi } m.$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

c) Theo câu b) phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m nên

$$\text{theo định lí Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-[-2(m-5)]}{1} = 2(m-5) = 2m-10 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1-2m}{1} = 1-2m \end{cases}.$$

$$+) \text{ Vì } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình (1) nên ta có } \begin{cases} x_1^2 - 2(m-5)x_1 + 1 - 2m = 0 \\ x_2^2 - 2(m-5)x_2 + 1 - 2m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + 10x_1 + 1 - 2m = 0 \\ x_2^2 - 2mx_2 + 10x_2 + 1 - 2m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + 1 = 2m - 10x_1 \\ x_2^2 - 2mx_2 + 1 = 2m - 10x_2 \end{cases}$$

$$+) \text{ Mặt khác ta có: } (x_1^2 - 2mx_1 + 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 1) = 64$$

$$\Leftrightarrow (2m - 10x_1)(2m - 10x_2) = 64$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20mx_1 - 20mx_2 + 100x_1x_2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20m(x_1 + x_2) + 100x_1x_2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20m(2m-10) + 100(1-2m) = 64$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 40m^2 + 200m + 100 - 200m - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow -36m^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Vậy $m = 1, m = -1$.

Câu 10: Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 6m - 4 = 0$ (*) với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 - 2mx_1 - 6m + 13)x_2^2 - 24x_1 - 100 = 0$.

Lời giải

a. Khi $m = 2$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=1 \\ x+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-4 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-4; -2\}$ khi $m = 2$.

$$\text{b. } x^2 + 2(m+1)x + 6m - 4 = 0 \quad (*)$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 6m + 4 > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 + 1 > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + 1 > 0 \text{ (đúng với mọi } m \text{)}$$

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

$$\text{Theo hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2(m+1) \quad (1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 6m - 4 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) = -6m - 6 \Leftrightarrow 3x_2 + 6m = -3x_1 - 6 \quad (2)$$

Vì x_1 là nghiệm của $(*)$ nên: $x_1^2 + 2mx_1 + 2x_1 + 6m - 4 = 0$

$$\Rightarrow 4x_1 - 2mx_1 - 6m + 13 = x_1^2 + 6x_1 + 9$$

$$= (x_1 + 3)^2$$

Theo đề bài: $(4x_1 - 2mx_1 - 6m + 13)x_2^2 - 24x_1 - 100 = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 + 3)^2 x_2^2 - 24x_2 - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 x_2 + 3x_2)^2 - 24x_1 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow (6m - 4 + 3x_2)^2 - 24x_1 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow (-3x_1 - 10)^2 - 24x_1 - 100 = 0 \text{ (do (2))}$$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2 + 36x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x_1(x_1 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = -4 \end{cases}$$

□ □ Với $x_1 = 0$

$$(1) \Leftrightarrow 6m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

□ □ Với $x_1 = -4$

$$(1) \Leftrightarrow -2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m \in \left\{ \frac{2}{3}; 2 \right\}$ thoả bài toán.

CHUYÊN ĐỀ 4: GIẢI CÂU BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Bài toán 1: Câu liên quan tới diện tích, tam giác, tứ giác

1. Một số lưu ý

Diện tích tam giác vuông= nửa tích hai cạnh góc vuông.

Diện tích hình chữ nhật= dài nhân rộng.

Diện tích hình vuông= cạnh nhân cạnh.

2. Bài tập áp dụng

- Câu 1:** Nhà bạn Dũng được ông bà nội cho một mảnh đất hình chữ nhật. Khi bạn Nam đến nhà bạn Dũng chơi, Dũng đố Nam tìm ra kích thước của mảnh đất khi biết: mảnh đất có chiều dài gấp 4 lần chiều rộng và nếu giảm chiều rộng đi 2 m, tăng chiều dài lên gấp đôi thì diện tích mảnh đất đó sẽ tăng thêm 20 m². Các em hãy giúp bạn Nam tìm ra chiều dài và chiều rộng của mảnh đất nhà bạn Dũng đó.
- Câu 2:** Cho mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 360 m². Nếu tăng chiều rộng 2 m và giảm chiều dài 6 m thì diện tích không thay đổi. Tính chu vi của mảnh vườn lúc ban đầu.
- Câu 3:** Một hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Nếu cả chiều dài và chiều rộng cùng tăng thêm 5 cm thì được một hình chữ nhật mới có diện tích bằng 153 cm². Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu.
- Câu 4:** Một miếng bìa hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{3}{5}$ chiều dài. Nếu chiều rộng giảm đi 1cm và chiều dài giảm đi 4cm thì diện tích của nó bằng nửa diện tích ban đầu. Tính chu vi miếng bìa đó.
- Câu 5:** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m². Nếu tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.
- Câu 6:** Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 3 m và diện tích bằng 270 m². Tìm chiều dài, chiều rộng của khu vườn.
- Câu 7:** Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng 20 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 4 cm. Tính độ dài mỗi cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.
- Câu 8:** Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 12 m. Nếu tăng chiều dài thêm 12 m và chiều rộng thêm 2 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng gấp đôi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.
- Câu 9:** Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính kích thước của mảnh đất, biết rằng diện tích mảnh đất là 150 m²
- Câu 10:** Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 100 m. Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh vườn giảm 2 m². Tính diện tích của mảnh vườn.
- Câu 11:** Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 8 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 90 m². Tính diện tích thửa ruộng đã cho ban đầu.

- Câu 12:** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 168 m^2 . Nếu giảm chiều dài đi 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì mảnh vườn trở thành hình vuông. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.
- Câu 13:** Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng một nửa chiều dài. Biết rằng nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì diện tích hình chữ nhật đã cho giảm đi một nửa. Tính chiều dài hình chữ nhật đã cho.

Bài toán 2: Bài toán năng suất

1. Một số lưu ý

$$N = \frac{1}{t}; \quad t = \frac{1}{N}; \quad CV = N.t;$$

Trong đó:

N : là năng suất làm việc

t : là thời gian hoàn thành công việc.

1 : là công việc cần thực hiện.

CV : số công việc thực hiện trong thời gian t

2. Bài tập áp dụng

- Câu 1.** Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?
- Câu 2.** Một tổ sản xuất theo kế hoạch, mỗi ngày phải sản xuất 50 sản phẩm. Nhưng khi thực hiện tổ đã sản xuất được 57 sản phẩm một ngày. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ sản xuất bao nhiêu sản phẩm.
- Câu 3.** Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 800 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai, tổ I sản xuất vượt mức 15% , tổ II sản xuất vượt mức 20% . Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.
- Câu 4.** Một đội công nhân hoàn thành một công việc với mức 420 ngày công thợ. Hãy tính số công nhân của đội, biết rằng nếu đội tăng thêm 5 người thì số ngày hoàn thành công việc được giảm đi 7 ngày.
- Câu 5.** Một đội xe cần chở 12 tấn hàng. Khi làm việc, do 2 xe cần điều đi nơi khác. Nên mỗi xe phải chở thêm 16 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe?
- Câu 6.** Một xí nghiệp đóng giày dự định kế hoạch hoàn thành trong 26 ngày. Do cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày sản xuất vượt mức 6000 đôi giày, do đó hoàn thành kế hoạch trong vòng 24 ngày và vượt kế hoạch 104000 đôi. Hỏi số giày đóng theo kế hoạch là bao nhiêu?
- Câu 7.** Dân số Hà Nội sau hai năm tăng từ 2000000 lên 2048288 người. Hỏi hàng năm trung bình dân số tăng bao nhiêu phần trăm?
- Câu 8.** Hợp tác xã Long Khánh có hai kho gạo, kho thứ nhất chứa nhiều hơn kho thứ hai 100 tấn, nếu chuyển từ kho thứ nhất sang kho thứ hai 60 tấn thì số thóc ở kho thứ nhất bằng $\frac{12}{13}$ số gạo ở kho thứ hai. Tính số gạo ở mỗi kho lúc đầu?
- Câu 14:** Hai đội công nhân cùng đào một con mương. Nếu họ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội A hoàn thành công việc nhanh hơn đội B 12 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu giờ mới xong việc.

Câu 15: Bạn An dự định trong khoảng thời gian từ ngày 1/3 đến ngày 30/4 sẽ giải mỗi ngày 3 Câu. Thực hiện đúng kế hoạch được một thời gian, vào khoảng cuối tháng 3 thì An bị bệnh, phải nghỉ giải toán nhiều ngày liên tiếp. Khi hồi phục, trong tuần đầu An chỉ giải được 16 bài; sau đó, An cố gắng giải 4 bài mỗi ngày và đến 30/4 thì An cũng hoàn thành kế hoạch đã định. Hỏi An phải nghỉ giải toán bao nhiêu ngày?

Câu 16: Một bác nông dân đem trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau:

Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

...

Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. nhưng thật thú vị, số trứng bán được trong mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng bán được là bao nhiêu và bán hết trong bao nhiêu ngày?

Câu 17: Theo kế hoạch, một người công nhân phải hoàn thành 84 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật, nên thực tế mỗi giờ người đó đã làm được nhiều hơn 2 sản phẩm so với số sản phẩm phải làm trong một giờ theo kế hoạch. Vì vậy, người đó hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ người công nhân phải làm bao nhiêu sản phẩm?

Câu 18: Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian để mỗi đội hoàn thành công việc là bao nhiêu?

Câu 19: Một xưởng có kế hoạch in xong 6000 quyển sách giống nhau trong một thời gian quy định, biết số quyển sách in được trong một ngày là bằng nhau. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng đã in nhiều hơn 300 quyển sách so với số quyển sách phải in trong kế hoạch, nên xưởng in xong 6000 quyển sách nói trên sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Tính số quyển sách xưởng in được trong 1 ngày theo kế hoạch.

Câu 20: Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Câu 21: Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần. Thực tế, mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên cuối cùng đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định một tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

Câu 22: Một tổ công nhân phải may xong 420 bộ đồng phục trong khoảng thời gian nhất định. Nếu thêm 3 công nhân vào tổ thì mỗi người sẽ may ít hơn lúc ban đầu là 7 bộ đồng phục. Tính số công nhân có trong tổ lúc đầu.

Câu 23: Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, nhờ cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

- Câu 24:** Lớp 9A dự định trồng 420 cây xanh. Đến ngày thực hiện có 7 bạn không tham gia do được triệu tập học bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi của nhà trường nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 3 cây mới đảm bảo kế hoạch đặt ra. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh.
- Câu 25:** Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 30 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì được bổ sung thêm 2 xe nên mỗi xe chở ít hơn 0,5 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc xe?
- Câu 26:** Một đội xe cần chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc, đội được bổ sung thêm 3 chiếc nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn hàng so với dự định. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe, biết khối lượng hàng chở trên mỗi xe như nhau.
- Câu 27:** Hưởng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở thêm hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau.
- Câu 28:** Nhân ngày quốc tế thiếu nhi, 13 HS tham gia gói 80 phần quà cho các em thiếu nhi. Biết tổng số quà mà HS nam gói được bằng tổng số quà mà HS nữ gói được. Số quà mỗi bạn nam gói nhiều hơn số quà mà mỗi bạn nữ gói là 3 phần. Tính số HS nam và nữ.
- Câu 29:** Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 120 tấn hàng. Hôm làm việc do có 5 xe được điều đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 0,8 tấn hàng so với dự định ban đầu. Biết khối lượng hàng mỗi xe chuyên chở như nhau, hỏi đoàn xe ban đầu có bao nhiêu chiếc?

Bài toán 3. Bài toán liên quan tới chuyển động

1. Các công thức liên quan:

$$\text{Quãng đường} = \text{Vận tốc} \cdot \text{Thời gian}$$

$$v_{\text{xuôi}} = v_{\text{thực}} + v_{\text{nước}}$$

$$v_{\text{ngược}} = v_{\text{thực}} - v_{\text{nước}}$$

$$v_{\text{xuôi}} - v_{\text{ngược}} = 2v_{\text{nước}}$$

2. Bài tập áp dụng

- Câu 1:** Một ô tô đi trên quãng đường dài 400 km. Khi đi được 180 km, ô tô tăng vận tốc thêm 10 km/h đi trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của ô tô. Biết thời gian đi hết quãng đường là 8 giờ.
- Câu 2:** Một ca nô chạy xuôi dòng sông từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B về A hết tất cả 7 giờ 30 phút. Tính vận tốc thực của ca nô biết quãng đường sông AB dài 54 km và vận tốc dòng nước là 3 km/h
- Câu 3:** Một ô tô tải đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Sau 2 giờ 30 phút thì một ô tô taxi cũng xuất phát đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h và đến B cùng lúc với xe ô tô tải. Tính độ dài quãng đường AB
- Câu 4:** Xe máy thứ nhất đi trên quãng đường từ Hà Nội về Thái Bình hết 3 giờ 20 phút. Xe máy thứ hai đi hết 3 giờ 40 phút. Mỗi giờ xe máy thứ nhất đi nhanh hơn xe máy thứ hai 3 km. Tính vận tốc của mỗi xe máy và quãng đường từ Hà Nội đến Thái Bình?
- Câu 5:** Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một canô đi xuôi dòng từ A đến B, rồi đi ngược dòng trở về A ngay. Thời gian kể từ lúc đi cho đến lúc về là 5 giờ 20 phút. Tính vận tốc của dòng nước, biết vận tốc thực của canô là 12 km/h

- Câu 6:** Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B
- Câu 7:** Một tàu hỏa đi từ A đến B với quãng đường 40 km. Khi đi đến B, tàu dừng lại 20 phút rồi đi tiếp 30 km nữa để đến C với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi từ A đến B là 5 km/h. Tính vận tốc của tàu hỏa khi đi trên quãng đường AB, biết thời gian kể từ khi tàu hỏa xuất phát từ A đến khi tới C hết tất cả 2 giờ
- Câu 8:** Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một ô tô đi từ B đến A, sau 4 giờ 2 xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ô tô đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB.
- Câu 9:** Quãng đường AB dài 156 km. Một người đi xe máy từ A, một người đi xe đạp từ B. Hai xe xuất phát cùng một lúc và sau 3 giờ gặp nhau. Biết rằng vận tốc của người đi xe máy nhanh hơn vận tốc của người đi xe đạp là 28 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe?
- Câu 10:** Một ca nô chạy xuôi dòng với quãng đường 42km, rồi sau đó ngược dòng trở lại 20 km hết tổng cộng 5h. Biết vận tốc của dòng nước chảy là 2 km/h. Tính vận tốc của ca nô lúc dòng nước yên lặng
- Câu 11:** Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được 1 giờ thì ô tô bị chặn bởi xe cứu hỏa 10 phút. Do đó để đến B đúng hạn xe phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc lúc đầu của ô tô
- Câu 12:** Khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là 60km. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ A đến B với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải dừng lại sửa xe 20 phút, còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi xe sửa xong, người thứ nhất đi với vận tốc nhanh hơn trước 4km/h nên đã đến B cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người đi lúc đầu
- Câu 13:** Cho quãng đường từ địa điểm A tới địa điểm B dài 90 km. Lúc 6 giờ một xe máy đi từ A để tới B. Lúc 6 giờ 30 phút cùng ngày, một ô tô cũng đi từ A để tới B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h. Hai xe nói trên đều đến B cùng lúc. Tính vận tốc mỗi xe
- Câu 14:** Một ca nô chạy xuôi dòng từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B đến A hết tất cả 4 giờ. Tính vận tốc ca nô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30 km và vận tốc dòng nước là 4 km/h
- Câu 15:** Một bè gỗ được thả trôi trên sông từ cầu Đắk Bla. Sau khi thả bè gỗ trôi được 3 giờ 20 phút, một người chèo thuyền độc mộc cũng xuất phát từ cầu Đắk Bla đuổi theo và đi được 10km thì gặp bè gỗ. Tính vận tốc của bè gỗ biết rằng vận tốc của người chèo thuyền độc mộc lớn hơn vận tốc của bè gỗ là 4km/h
- Câu 16:** Hàng ngày, bạn An đi học từ nhà đến trường trên quãng đường dài 8km bằng xe máy điện với vận tốc không đổi. Hôm nay, vẫn trên đoạn đường đó, 2km đầu bạn An đi với vận tốc như mọi khi, sau đó vì xe non hơi nên bạn đã dừng lại 1 phút để bơm. Để đến trường đúng giờ như mọi ngày, bạn An phải tăng vận tốc lên thêm 4km/h. Tính vận tốc xe máy điện của bạn An khi tăng tốc. Với vận tốc đó bạn An có vi phạm luật giao thông hay không? Tại sao? Biết rằng đoạn đường bạn An đi là trong khu vực đông dân cư
- Câu 17:** Quãng đường từ Quy Nhơn đến Bồng Sơn dài 100 km. Cùng một lúc, một xe máy khởi hành từ Quy Nhơn đi Bồng Sơn và một xe ô tô khởi hành từ Bồng Sơn đi Quy Nhơn. Sau khi hai xe

gặp nhau, xe máy đi 1 giờ 30 phút nữa mới đến Bồng Sơn. Biết vận tốc hai xe không thay đổi trên suốt quãng đường đi và vận tốc của xe máy kém vận tốc xe ô tô là 20 km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

Câu 18: Quãng đường AB dài 90 km, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B, ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Câu 19: Khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là 60 km. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ A đến B với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải dừng lại sửa xe 20 phút, còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi sửa xe xong, người thứ nhất đi với vận tốc nhanh hơn trước 4 km/h nên đã đến B cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người đi lúc đầu

Câu 20: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 108 km. Cùng lúc đó, một ô tô đi từ B đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc xe đạp 18 km/h. Sau khi hai xe gặp nhau, xe đạp phải mất 4h nữa mới đến B. Tính vận tốc mới xe?

Câu 21: Quãng đường từ A đến B dài 50km. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi đi được 2 giờ, người ấy dừng lại 30 phút để nghỉ. Muốn đến B đúng thời gian đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp

Câu 22: Trên một vùng biển được xem như bằng phẳng và không có chướng ngại vật. Vào lúc 6 giờ có một tàu cá đi thẳng qua tọa độ X theo hướng Từ Nam đến Bắc với vận tốc không đổi. Đến 7 giờ một tàu du lịch cũng đi thẳng qua tọa độ X theo hướng từ Đông sang Tây với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá 12 km/h. Đến 8 giờ khoảng cách giữa hai tàu là 60 km. Tính vận tốc của mỗi tàu

Bài toán 4. Bài toán liên quan tới công việc – nước chảy

1. Các công thức liên quan:

Quãng đường = Vận tốc. Thời gian

$$V_{xuôi} = V_{thực} + V_{nước}$$

$$V_{ngược} = V_{thực} - V_{nước}$$

$$V_{xuôi} - V_{ngược} = 2V_{nước}$$

B. Bài tập áp dụng

Câu 1: Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 120 tấn hàng. Hôm làm việc do có 5 xe được điều đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 0,8 tấn hàng so với dự định ban đầu. Biết khối lượng hàng mỗi xe chuyên chở như nhau, hỏi đoàn xe ban đầu có bao nhiêu chiếc?

Câu 2: Hưởng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở thêm hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau.

Câu 3: Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

- Câu 4:** Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian để mỗi đội hoàn thành công việc là bao nhiêu?
- Câu 5:** Một tổ công nhân phải may xong 420 bộ đồng phục trong khoảng thời gian nhất định. Nếu thêm 3 công nhân vào tổ thì mỗi người sẽ may ít hơn lúc ban đầu là 7 bộ đồng phục. Tính số công nhân có trong tổ lúc đầu.
- Câu 6:** Cho hai vòi nước cùng lúc chảy vào một bể cạn. Nếu chảy riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Khi nước đầy bể, người ta khóa vòi thứ nhất và vòi thứ hai lại, đồng thời mở vòi thứ ba cho nước chảy ra thì sau 6 giờ bể cạn nước. Khi nước trong bể đã cạn mở cả ba vòi thì sau 24 giờ bể lại đầy nước. Hỏi nếu chỉ dùng vòi thứ nhất thì sau bao lâu bể đầy nước.
- Câu 7:** Một công ty vận tải dự định điều một số xe tải để vận chuyển 24 tấn hàng. Thực tế khi đến nơi thì công ty bổ sung thêm 2 xe nữa nên mỗi xe chở ít đi 2 tấn so với dự định. Hỏi số xe dự định được điều động là bao nhiêu? Biết số lượng hàng chở ở mỗi xe như nhau và mỗi xe chở một lượt.
- Câu 8:** Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?
- Câu 9:** Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần. Thực tế mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên cuối cùng đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định một tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?
- Câu 10:** Một bác nông dân đem trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau:
 Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại
 Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại
 Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại
 ...
 Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. nhưng thật thú vị, số trứng bán được trong mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng bán được là bao nhiêu và bán hết trong bao nhiêu ngày?
- Câu 11:** Hai máy xúc đất được giao xúc hết một khối lượng đất để đắp đập. Nếu cả hai máy cùng làm việc thì xúc hết khối lượng đất đó trong 4 ngày. Nếu máy thứ nhất xúc xong $\frac{1}{2}$ số đất rồi máy thứ hai xúc hết số đất còn lại thì thời gian xúc của cả hai máy cộng lại là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi máy xúc hết khối lượng đất đó trong mấy ngày?
- Câu 12:** Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?
- Câu 13:** Hai đội thủy lợi gồm 25 người đào đắp một con mương. Đội I đào được $45 m^3$ đất, đội II đào được $40 m^3$ đất. biết mỗi công nhân đội II đào được nhiều hơn mỗi công nhân đội I là $1 m^3$. Tính số đất mỗi công nhân đội I đào được.

- Câu 14:** Một xưởng có kế hoạch in xong 6000 quyển sách giống nhau trong một thời gian quy định biết số quyển sách in được trong một ngày là bằng nhau. Để hoàn thành sớm kế hoạch mỗi ngày xưởng đã in nhiều hơn 300 quyển sách so với số quyển sách phải in trong kế hoạch nên xưởng in xong 6000 quyển sách nói trên sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Tính số quyển sách xưởng in được trong 1 ngày theo kế hoạch.
- Câu 15:** Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?
- Câu 16:** Hai người đồng thời đào chung một cái giếng có thể đào xong sau 2 ngày. Hỏi sau bao nhiêu ngày mỗi người đào riêng rẽ có thể xong cái giếng đó biết để đào xong cái giếng đó một mình người thứ hai phải tốn 3 ngày nhiều hơn người thứ nhất đào một mình.
- Câu 17:** Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 16 giờ sẽ xong công việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ và người thứ hai làm một mình trong 6 giờ thì cả hai làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người làm trong bao lâu thì xong công việc.
- Câu 18:** Nếu hai người cùng làm chung một công việc thì trong $\frac{12}{5}$ giờ xong công việc. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc.
- Câu 19:** Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1h30 phút bể sẽ đầy. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 20 phút rồi khóa lại và mở tiếp vòi thứ hai trong 15 phút thì sẽ đầy một phần năm bể. Hỏi nếu chảy riêng thì sau bao lâu sẽ đầy bể.
- Câu 20:** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 30 phút sẽ đầy bể. Nếu từng vòi chảy riêng thì vòi I chảy trong 3 giờ bằng lượng nước vòi II chảy trong 2 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy trong bao lâu?
- Câu 21:** Nếu mở cả hai vòi chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là hai giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu thì đầy bể?
- Câu 22:** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2h 55' thì đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là hai giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.
- Câu 23:** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 3 giờ đầy bể. Nếu để vòi một chảy trong 20 phút khóa lại rồi mở tiếp vòi hai trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{8}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.
- Câu 24:** Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 24 giờ. Nếu đội thứ nhất làm trong 10 giờ đội thứ hai làm trong 15 giờ thì cả hai đội làm được một nửa công việc. Tính thời gian mỗi đội làm một mình để xong công việc.
- Câu 25:** Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc. Thời gian để đội I hoàn thành công việc ít hơn thời gian để đội II hoàn thành công việc đó là 4 giờ. Tổng hai thời gian này gấp 4 lần thời gian hai đội cùng làm chung để xong công việc đó. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội phải mất bao lâu mới xong.

- Câu 26:** Hai đội công nhân cùng làm một quãng đường thì 12 ngày xong việc. Nếu một đội làm một mình hết nửa công việc rồi đội thứ hai tiếp tục một mình làm nốt phần việc còn lại thì hết tất cả 25 ngày. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong việc.
- Câu 27:** Hai người cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình công việc ấy thì tổng số thời gian làm việc của hai người là 25 giờ. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc.
- Câu 28:** Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch là 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu.
- Câu 29:** Người ta trộn 8g chất lỏng này với 6g chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn nó là $0,2\text{g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng $0,7\text{g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Bài toán 5: Các bài toán thuộc thể loại khác

1. Các lưu ý thêm:

- Toán nồng độ dung dịch: Biết rằng m lít chất tan trong M lít dung dịch thì nồng độ phần trăm là $\frac{m}{M} \cdot 100\%$
- Toán nhiệt lượng:
 - + m Kg nước giảm $t^\circ\text{C}$ thì toả ra một nhiệt lượng $Q = m.t$.
 - + m Kg nước tăng $t^\circ\text{C}$ thì thu vào một nhiệt lượng $Q = m.t$.
- Toán lãi suất: $A_n = A(1+r)^n$ với A_n : vốn sau n chu kỳ; A : vốn ban đầu; n số chu kỳ

2. Bài tập áp dụng

- Câu 1:** Một phòng học có 10 băng ghế. Học sinh của lớp 9A được sắp xếp chỗ ngồi đều nhau trên mỗi băng ghế. Nếu bớt đi 2 băng ghế, thì mỗi băng ghế phải bố trí thêm một học sinh ngồi nữa mới đảm bảo chỗ ngồi cho tất cả học sinh của lớp. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh.
- Câu 2:** Ông Sáu gửi một số tiền vào ngân hàng theo mức lãi suất tiết kiệm với kỳ hạn 1 năm là 6%. Tuy nhiên sau thời hạn một năm ông Sáu không đến nhận tiền lãi mà để thêm một năm nữa mới lãnh. Khi đó số tiền lãi có được sau năm đầu tiên sẽ được ngân hàng cộng dồn vào số tiền gửi ban đầu để thành số tiền gửi cho năm kế tiếp với mức lãi suất cũ. Sau 2 năm ông Sáu nhận được số tiền là 112.360.000 đồng. Hỏi ban đầu ông Sáu đã gửi bao nhiêu tiền?
- Câu 3:** Một bác nông dân đem trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau:
 Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại
 Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại
 Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại
 ...
 Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. nhưng thật thú vị, số trứng bán được trong mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng bán được là bao nhiêu và bán hết trong bao nhiêu ngày?
- Câu 4:** Số tiền mua 1 quả dừa và một quả thanh long là 25 nghìn đồng. Số tiền mua 5 quả dừa và 4 quả thanh long là 120 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi quả dừa và giá mỗi quả thanh long là bao nhiêu? Biết rằng mỗi quả dừa có giá như nhau và mỗi quả thanh long có giá như nhau.

- Câu 5:** Năm học 2014 – 2015 hai trường A và B có tổng số 390 học sinh thi đỗ vào đại học đạt tỉ lệ 78%, biết trường A có tỉ lệ đỗ đại học là 75%, trường B có tỉ lệ đỗ đại học là 80%. Tính số học sinh dự thi đại học năm học 2014 – 2015 ở mỗi trường.
- Câu 6:** Khi thêm 200g Axít vào dung dịch Axít thì dung dịch mới có nồng độ A xít là 50%. Lại thêm 300gam nước vào dung dịch mới,ta được dung dịch A xít có nồng độ là 40%. Tính nồng độ A xít trong dung dịch đầu tiên.
- Câu 7:** Có hai can đựng dầu, can thứ nhất đang chứa 38 lít và can thứ hai đang chứa 22 lít. Nếu rót từ can thứ nhất sang cho đầy can thứ hai thì lượng dầu trong can thứ nhất chỉ còn lại một nửa thể tích của nó. Nếu rót từ can thứ hai sang cho đầy can thứ nhất thì lượng dầu trong can thứ hai chỉ còn lại một phần ba thể tích của nó. Tính thể tích của mỗi can.
- Câu 8:** Trong đợt quyên góp ủng hộ người nghèo, lớp 9A và 9B có 79 học sinh quyên góp được 975000 đồng. Mỗi học sinh lớp 9A đóng góp 10000 đồng, mỗi học sinh lớp 9B đóng góp 15000 đồng. Tính số học sinh mỗi lớp.
- Câu 9:** Phải dùng bao nhiêu lít nước sôi 100°C và bao nhiêu lít nước lạnh 20°C để có hỗn hợp 100lít nước ở nhiệt độ 40°C .
- Câu 10:** Tìm hai số biết tổng bằng 19 và tổng các bình phương của chúng bằng 185
- Câu 11:** Một phòng họp có 360 Ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số Ghế của từng dãy đều như nhau. Nếu số dãy tăng thêm 1 và số Ghế của mỗi dãy tăng thêm 1, thì trong phòng có 400 Ghế. Hỏi trong phòng họp có bao nhiêu dãy Ghế, mỗi dãy có bao nhiêu ghế.
- Câu 12:** Một đội máy kéo dự định mỗi ngày cày 40 ha. Khi thực hiện mỗi ngày cày được 52 ha, vì vậy đội không những cày xong trước thời hạn 2 ngày mà còn cày thêm được 4 ha nữa. Tính diện tích thửa ruộng mà đội phải cày theo kế hoạch.
- Câu 13:** Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch là 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu.

CHUYÊN ĐỀ 4: GIẢI CÂU BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Bài toán 1: Câu liên quan tới diện tích, tam giác, tứ giác

1. Một số lưu ý

Diện tích tam giác vuông = nửa tích hai cạnh góc vuông.

Diện tích hình chữ nhật = dài nhân rộng.

Diện tích hình vuông = cạnh nhân cạnh.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Nhà bạn Dũng được ông bà nội cho một mảnh đất hình chữ nhật. Khi bạn Nam đến nhà bạn Dũng chơi, Dũng đố Nam tìm ra kích thước của mảnh đất khi biết: mảnh đất có chiều dài gấp 4 lần chiều rộng và nếu giảm chiều rộng đi 2 m, tăng chiều dài lên gấp đôi thì diện tích mảnh đất đó sẽ tăng thêm 20 m². Các em hãy giúp bạn Nam tìm ra chiều dài và chiều rộng của mảnh đất nhà bạn Dũng đó.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh đất là x

Khi đó chiều dài của mảnh đất là: 4x

Diện tích mảnh đất nhà bạn Dũng là: $4x^2$

Khi giảm chiều rộng 2m tức là $x - 2$ và tăng chiều dài lên gấp đôi là 8x.

Lúc đó: diện tích mảnh đất là $(x - 2) \cdot 8x = 20 + 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x - 20 = 0$

Giải phương trình ta được $x = 5$ và $x = -1$.

Đổi chiều với điều kiện ta được $x = 5$.

Vậy chiều rộng mảnh đất là 5 m và chiều dài mảnh đất là 20 m.

Câu 2: Cho mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 360 m². Nếu tăng chiều rộng 2 m và giảm chiều dài 6 m thì diện tích không thay đổi. Tính chu vi của mảnh vườn lúc ban đầu.

Lời giải

Gọi x là chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật

Chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật: $\frac{360}{x}(m)$

Theo đề bài ta có pt:

$$(x + 2) \left(\frac{360}{x} - 6 \right) = 360$$

$$\Leftrightarrow -6x^2 - 12x + 720 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10(TM) \\ x = -12(L) \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 10 \Rightarrow \frac{360}{10} = 36$$

$$\text{Chu vi của mảnh vườn: } (10 + 36) \cdot 2 = 92$$

Câu 3: Một hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Nếu cả chiều dài và chiều rộng cùng tăng thêm 5 cm thì được một hình chữ nhật mới có diện tích bằng 153 cm². Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu.

Lời giải

Gọi x là chiều rộng hình chữ nhật lúc đầu

Chiều dài hình chữ nhật lúc đầu: $3x$

Chiều rộng hình chữ nhật lúc sau: $x + 5$

Chiều dài hình chữ nhật lúc sau: $3x + 5$

Theo đề bài ta có phương trình: $(x + 5)(3x + 5) = 153$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 20x - 128 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ hay } x = \frac{-32}{3} < 0 (L)$$

Vậy chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật ban đầu là: 12 cm và 4 cm.

Câu 4: Một miếng bìa hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{3}{5}$ chiều dài. Nếu chiều rộng giảm đi 1cm và chiều dài giảm đi 4cm thì diện tích của nó bằng nửa diện tích ban đầu. Tính chu vi miếng bìa đó.

Lời giải

Gọi chiều dài của hình chữ nhật đó là x

Vì chiều rộng bằng $\frac{3}{5}$ chiều dài nên chiều rộng của hình chữ nhật là $\frac{3}{5}x$

Diện tích của hình chữ nhật ban đầu là $\frac{3}{5}x^2$

Khi giảm chiều rộng 1cm và giảm chiều dài 4cm thì diện tích của hình chữ nhật mới là

$$\left(\frac{3}{5}x - 1\right)(x - 4) (cm^2)$$

Diện tích hình chữ nhật mới bằng một nửa diện tích ban đầu nên ta có phương trình:

$$\left(\frac{3}{5}x - 1\right)(x - 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}x^2$$

$$\frac{3}{10}x^2 - \frac{17}{5}x + 4 = 0$$

$$\begin{cases} x = 10 (TM) \\ x = \frac{4}{3} (L) \end{cases}$$

Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu lần lượt là 10cm và $\frac{3}{5} \cdot 10 = 6$ cm

Chu vi miếng bìa là $(10 + 6) \cdot 2 = 32$

Câu 5: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m². Nếu tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật là x

Vì diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là 720 m² nên chiều dài là: $\frac{720}{x}$

Sau khi thay đổi kích thước:

Chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật là: $x - 6$

Chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật là: $\frac{720}{x} + 10$

Vì diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật không đổi nên ta có phương trình:

$$(x-6)\left(\frac{720}{x}+10\right)=720$$

$$x^2-6x-432=0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=24$; $x_2=-18$

Vậy chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật đó là 24 m; chiều dài mảnh đất hình chữ nhật đó là:
 $720:24=30$.

Câu 6: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 3 m và diện tích bằng 270 m².
 Tìm chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật là x

Vì chiều dài lớn hơn chiều rộng 3 m nên chiều dài của hình chữ nhật là x+3

Lại có diện tích hình chữ nhật là 270 m² nên ta có phương trình:

$$x(x+3)=270$$

$$x^2+3x-270=0$$

$$\Leftrightarrow x=15 \text{ hoặc } x=-18$$

Vậy chiều rộng của hình chữ nhật là 15 m; chiều dài của hình chữ nhật là $15+3=18$

Câu 7: Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng 20 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 4 cm. Tính độ dài mỗi cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ hơn của tam giác vuông đó là x

Cạnh góc vuông lớn hơn của tam giác vuông đó dài là x+4

Theo Pitago, cạnh huyền của tam giác vuông đó dài là $\sqrt{x^2+(x+4)^2}$

Vì cạnh huyền bằng 20cm nên $\sqrt{x^2+(x+4)^2}=20$

$$x^2+(x+4)^2=400$$

$$2x^2+8x-384=0$$

$$x=12 \text{ hoặc } x=-16$$

Vậy độ dài 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông đó lần lượt là 12cm và $12+4=16$ cm.

Câu 8: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 12 m. Nếu tăng chiều dài thêm 12 m và chiều rộng thêm 2 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng gấp đôi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật là x ĐK: $x>0$

Thì chiều dài của khu vườn hình chữ nhật là: x+12

Diện tích của khu vườn khi đó là: $x(x+12)$

Nếu tăng chiều dài 12m và chiều rộng lên 2m thì:

Chiều dài mới là: $x+12+12=x+24$

Chiều rộng mới là: x+2

Diện tích của hình chữ nhật mới là: $(x+24)(x+2)$

Vì diện tích sau khi thay đổi gấp đôi diện tích ban đầu nên:

$$(x+24)(x+2)=2x(x+12)$$

$$x^2-2x-48=0$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Vậy chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật là 8, chiều dài của khu vườn là 20m.

Câu 9: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính kích thước của mảnh đất, biết rằng diện tích mảnh đất là 150 m^2

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh đất là a , $a > 0$

Khi đó ta có chiều dài của mảnh đất là $a + 5$.

Theo bài ra ta có diện tích của mảnh đất là 150 m^2 nên:

$$a.(a+5)=150$$

$$a=10; a=-15.$$

Vậy chiều rộng là 10m, chiều dài là 15 m.

Câu 10: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 100 m. Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh vườn giảm 2 m^2 . Tính diện tích của mảnh vườn.

Lời giải

Gọi x là chiều rộng của mảnh vườn

Chiều dài của mảnh vườn là: $50-x$.

Diện tích của mảnh vườn là: $x(50-x)$

Nếu tăng chiều rộng 3m thì chiều rộng mới là $x+3$; giảm chiều dài 4 m thì chiều dài mới là $46-x$.

Diện tích mới của mảnh vườn là: $(x+3)(46-x)$

Theo bài ra ta có phương trình: $(x+3)(46-x)=x(50-x)-2$

$$x=20. \text{ Vậy diện tích của mảnh vườn là } 20.30=600 \text{ m}^2.$$

Câu 11: Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 8 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 90 m^2 . Tính diện tích thửa ruộng đã cho ban đầu.

Lời giải

Gọi hình chiều của thửa ruộng đã cho ban đầu là x

Khi đó chiều dài của thửa ruộng đã cho ban đầu là $x+8$

Diện tích của thửa ruộng đã cho ban đầu là x

Chiều rộng của thửa ruộng khi tăng thêm 3m là $x+3$.

Chiều dài của thửa ruộng khi tăng thêm 2m là $x+10$.

Diện tích của thửa ruộng sau khi tăng chiều dài và chiều rộng là $(x+3)(x+10)$

Theo đề bài ta có phương trình: $(x+3)(x+10)=x(x+8)+90$

$$x^2+13x+30-(x^2+8x)=90$$

$$5x=60$$

$$x=12(TM)$$

Vậy diện tích của thửa ruộng ban đầu là $12.20=240$

Câu 12: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 168 m^2 . Nếu giảm chiều dài đi 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì mảnh vườn trở thành hình vuông. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Lời giải

Gọi chiều dài của mảnh vườn là x . ĐK $x > 1$.

Thì chiều rộng của mảnh vườn là $\frac{168}{x}$

Nếu giảm chiều dài đi 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì mảnh vườn có chiều dài mới là $x-1$ và chiều rộng mới là $\frac{168}{x}+1$

Vì mảnh vườn trở thành hình vuông lên ra có phương trình $\frac{168}{x}+1 = x-1$

$$\begin{aligned}168+x &= x^2-x \\&= x^2-2x-168=0 \\x &= 14(TM), x = -12(L)\end{aligned}$$

Vậy mảnh vườn có chiều dài là 14m, chiều rộng là $168:14=12$ m

Câu 13: Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng một nửa chiều dài. Biết rằng nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì diện tích hình chữ nhật đã cho giảm đi một nửa. Tính chiều dài hình chữ nhật đã cho.

Lời giải

Gọi chiều dài của hình chữ nhật đã cho là x , với $x > 4$.

Vì chiều rộng bằng nửa chiều dài nên chiều rộng là: $\frac{x}{2}$

$$\Rightarrow \text{diện tích hình chữ nhật đã cho là: } x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là:

$$x-2 \quad \text{và} \quad \frac{x}{2}-2$$

khi đó, diện tích hình chữ nhật giảm đi một nửa nên ta có phương trình:

$$(x-2)\left(\frac{x}{2}-2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} - 2x - x + 4 = \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 - 12x + 16 = 0$$

$$x_1 = 6 + 2\sqrt{5};$$

$$x_2 = 6 - 2\sqrt{5} (l)$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là $6 + 2\sqrt{5}$

Bài toán 2: Bài toán năng suất

1. Một số lưu ý

$$N = \frac{1}{t}; \quad t = \frac{1}{N}; \quad CV = N.t;$$

Trong đó:

N : là năng suất làm việc

t : là thời gian hoàn thành công việc.

1: là công việc cần thực hiện.

CV : số công việc thực hiện trong thời gian t

2. Bài tập áp dụng

Câu 1. Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

Lời giải

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành một mình xong công việc là x , ĐK $x > \frac{12}{5}$

Thì thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là $x + 2$

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$, người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$

Vì cả hai người cùng làm xong công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ nên mỗi giờ cả hai đội làm được $\frac{5}{12}$

Do đó ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

Vậy người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ, người thứ hai làm xong công việc trong $4 + 2 = 6$ giờ.

Câu 2. Một tổ sản xuất theo kế hoạch, mỗi ngày phải sản xuất 50 sản phẩm. Nhưng khi thực hiện tổ đã sản xuất được 57 sản phẩm một ngày. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ sản xuất bao nhiêu sản phẩm.

Lời giải

Gọi x là số sản phẩm mà tổ sản xuất theo kế hoạch ($x \in N^*$)

Số ngày mà tổ sản xuất theo kế hoạch là: $\frac{x}{50}$

Số sản phẩm thực tế tổ sản xuất được là: $x + 13$

Số ngày mà tổ sản xuất theo thực tế là $\frac{x+13}{57}$.

Ta có phương trình: $\frac{x}{50} - \frac{x+13}{57} = 1$

$$\Leftrightarrow 57x - 50(x+13) = 2850 \Leftrightarrow x = 500$$

Vậy theo kế hoạch tổ sản xuất 500 sản phẩm.

Câu 3. Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 800 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai, tổ I sản xuất vượt mức 15%, tổ II sản xuất vượt mức 20%. Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Lời giải

Gọi x là số chi tiết máy của tổ I sản xuất trong tháng đầu ($0 < x < 800, x \in N$)

Số chi tiết máy của tổ II sản xuất trong tháng đầu là: $800 - x$.

Số chi tiết máy tổ I vượt mức ở tháng thứ hai là: $\frac{15}{100}x$

Số chi tiết máy tổ II vượt mức ở tháng thứ hai là: $\frac{20}{100}(800 - x)$

Số chi tiết máy cả hai tổ vượt mức trong tháng thứ hai là: $945 - 800 = 145$

Ta có phương trình: $\frac{15}{100}x + \frac{20}{100}(800 - x) = 145$

$$15x - 20x + 16000 = 14500 \Leftrightarrow x = 300$$

Vậy trong tháng đầu tổ I sản xuất được 300 chi tiết máy; Tổ II sản xuất được $800 - 300 = 500$ chi tiết máy.

Câu 4. Một đội công nhân hoàn thành một công việc với mức 420 ngày công thợ. Hãy tính số công nhân của đội, biết rằng nếu đội tăng thêm 5 người thì số ngày hoàn thành công việc được giảm đi 7 ngày.

Lời giải

Gọi số công nhân của đội là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Sau khi tăng 5 người thì đội có $x + 5$.

Số ngày hoàn thành công việc với x người là $\frac{420}{x}$

Số ngày hoàn thành công việc sau khi tăng 5 người là: $\frac{420}{x + 5}$

Ta có phương trình: $\frac{420}{x} - \frac{420}{x + 5} = 7$

$$\Leftrightarrow 420(x + 5) - 420x = 7x(x + 5) \Leftrightarrow 7x^2 + 35x - 2100 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ hoặc } x = -20.$$

Vậy số công nhân của đội là 15 người.

Câu 5. Một đội xe cần chở 12 tấn hàng. Khi làm việc, do 2 xe cần điều đi nơi khác. Nên mỗi xe phải chở thêm 16 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe?

Lời giải

Gọi số xe của đội lúc đầu là x ($x \in \mathbb{N}, x > 12$)

Theo dự định mỗi xe phải chở $\frac{120}{x}$

Số xe trên thực tế là: $x - 2$.

Thực tế mỗi xe phải chở: $\frac{120}{x - 2}$

Ta có phương trình: $\frac{120}{x - 2} - \frac{120}{x} = 16$

$$\Leftrightarrow 120x - 120(x - 2) = 16x(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = -3.$$

Vậy lúc đầu đội có 5 xe.

Câu 6. Một xí nghiệp đóng giày dự định kế hoạch hoàn thành trong 26 ngày. Do cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày sản xuất vượt mức 6000 đôi giày, do đó hoàn thành kế hoạch trong vòng 24 ngày và vượt kế hoạch 104000 đôi. Hỏi số giày đóng theo kế hoạch là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số giày theo kế hoạch sản xuất trong một ngày ($x > 0, x \in N$)

Số giày thực tế sản xuất trong một ngày là: $x + 6000$

Tổng số giày xí nghiệp sản xuất theo kế hoạch là: $26x$

Tổng số giày xí nghiệp sản xuất thực tế là: $24(x + 6000)$

Ta có phương trình: $24(x + 6000) - 26x = 104000 \Leftrightarrow x = 20000$.

Vậy số đôi giày theo kế hoạch sản xuất là: $26.2000 = 52000$ đôi.

Câu 7. Dân số Hà Nội sau hai năm tăng từ 2000000 lên 2048288 người. Hỏi hàng năm trung bình dân số tăng bao nhiêu phần trăm?

Lời giải

Gọi số phần trăm dân số tăng mỗi năm của Hà Nội là $x(\%)$ ($x > 0$)

Số dân năm đầu của Hà Nội tăng lên là $2000000.x\% = 20000x$

Sau năm đầu dân số của Hà Nội là: $2000000 + 20000x = 2000(x + 100)$

Năm thứ hai dân số Hà Nội tăng là: $20000(x + 100).x\% = 200x(x + 100)$

Ta có phương trình: $20000(x + 100) + 200x(x + 100) = 2048288$

$$\Leftrightarrow 200x^2 + 40000x - 48288 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \text{ hoặc } x = -\frac{1006}{5}.$$

Vậy mỗi năm dân số Hà Nội tăng trung bình là 1,2%

Câu 8. Hợp tác xã Long Khánh có hai kho gạo, kho thứ nhất chứa nhiều hơn kho thứ hai 100 tấn, nếu chuyển từ kho thứ nhất sang kho thứ hai 60 tấn thì số thóc ở kho thứ nhất bằng $\frac{12}{13}$ số gạo ở kho thứ hai. Tính số gạo ở mỗi kho lúc đầu?

Lời giải

Gọi x là số gạo ở kho thứ nhất ($x > 100$).

Số gạo ở kho thứ hai là $x - 100$

Số gạo kho thứ nhất sau khi chuyển 60 tấn là: $x - 60$

Số gạo kho thứ hai sau khi nhận 60 tấn là: $x - 40$

$$\text{Ta có phương trình: } x - 60 = \frac{12}{13}(x - 40)$$

$$\Leftrightarrow 13x - 780 = 12x - 480 \Leftrightarrow x = 300$$

Vậy lúc đầu kho thứ nhất có 300 tấn gạo, kho thứ hai có 200 tấn gạo.

Câu 14: Hai đội công nhân cùng đào một con mương. Nếu họ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội A hoàn thành công việc nhanh hơn đội B 12 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu giờ mới xong việc.

Lời giải

Gọi x là số giờ đội A làm riêng để xong công việc

Nên $x+12$ là số giờ đội B làm riêng để xong công việc.

Mỗi giờ đội A làm $\frac{1}{x}$. mỗi giờ đội B làm $\frac{1}{x+12}$.

Mỗi giờ cả hai đội làm $\frac{1}{8}$.

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -8 \end{cases}$

Vậy số giờ đội A làm riêng để xong công việc là 12 giờ. Số giờ đội B làm riêng để xong công việc là 24 giờ.

Câu 15: Bạn An dự định trong khoảng thời gian từ ngày 1/3 đến ngày 30/4 sẽ giải mỗi ngày 3 Câu. Thực hiện đúng kế hoạch được một thời gian, vào khoảng cuối tháng 3 thì An bị bệnh, phải nghỉ giải toán nhiều ngày liên tiếp. Khi hồi phục, trong tuần đầu An chỉ giải được 16 bài; sau đó, An cố gắng giải 4 bài mỗi ngày và đến 30/4 thì An cũng hoàn thành kế hoạch đã định. Hỏi An phải nghỉ giải toán bao nhiêu ngày?

Lời giải

Từ 1/3 đến 30/4 có 61 ngày.

Số Câu theo kế hoạch mà An phải giải là: $61 \cdot 3 = 183$.

Gọi số ngày An giải toán theo đúng kế hoạch là x .

Trong thời gian này, An giải $3x$

Số ngày An nghỉ giải toán là y . $(x, y \in \mathbb{N}^*, 1 \leq x \leq 30), (y \text{ bé nhất})$.

Khi đó số ngày An giải mỗi ngày 4 bài là: $61 - 7 - x - y = 54 - x - y$

Trong thời gian này, An giải được: $4(54 - x - y)$

Vậy tổng số bài An đã giải là: $3x + 16 + 4(54 - x - y)$

Theo bài ra ta có phương trình: $3x + 16 + 4(54 - x - y) = 183$

$$\Leftrightarrow x + 4y = 49$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{49 - x}{4}$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 30 \Rightarrow y = \frac{49 - x}{4} \geq \frac{49 - 30}{4} = \frac{19}{4}$$

y là số nguyên, bé nhất $\Rightarrow y = 5$

Vậy An phải nghỉ ít nhất 5 ngày.

Câu 16: Một bác nông dân đem trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau:

Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

...

Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. nhưng thật thú vị, số trứng bán được trong mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng bán được là bao nhiêu và bán hết trong bao nhiêu ngày?

Lời giải

Gọi x là số trứng bán được ($x \in N^*$) thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là: $8 + \frac{x-8}{8}$

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là: $16 + \frac{x - (16 + 8 + \frac{x-8}{8})}{8}$

Theo đề toán ta có phương trình: $8 + \frac{x-8}{8} = 16 + \frac{x - (16 + 8 + \frac{x-8}{8})}{8}$

$$\Leftrightarrow 64 + x - 8 = 128 + x - 24 - \frac{x-8}{8} \Leftrightarrow x = 392.$$

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng

Số trứng bán được trong mỗi ngày là $8 + \frac{x-8}{8} = 56$

Số ngày là $\frac{392}{56} = 7$ ngày.

Câu 17: Theo kế hoạch, một người công nhân phải hoàn thành 84 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật, nên thực tế mỗi giờ người đó đã làm được nhiều hơn 2 sản phẩm so với số sản phẩm phải làm trong một giờ theo kế hoạch. Vì vậy, người đó hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ người công nhân phải làm bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Gọi x là số sản phẩm mỗi giờ mà người công nhân phải hoàn thành theo kế hoạch.

$$(x \in N^*, x < 84)$$

Số sản phẩm mỗi giờ mà người công nhân phải hoàn thành theo thực tế: $x + 2$

Thời gian mà công nhân hoàn thành theo kế hoạch: $\frac{84}{x}(h)$

Thời gian mà công nhân hoàn thành theo thực tế: $\frac{84}{x+2}(h)$

Người công nhân đó hoàn thành công việc sớm hơn định $1h$ nên ta có phương trình:

$$\frac{84}{x} - \frac{84}{x+2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 84(x+2) - 84x = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 126 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 12 \text{ hoặc } x = -14$$

Vậy theo kế hoạch mỗi giờ người công nhân phải làm 12 sản phẩm.

Câu 18: Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian để mỗi đội hoàn thành công việc là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là thời gian đội I làm xong công việc ($x > 12$)

Thời gian đội thứ II làm xong công việc là: $x - 7$

Trong một giờ đội I làm được $\frac{1}{x}$

Trong một giờ đội II làm được $\frac{1}{x-7}$

Trong một giờ cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-7} = \frac{1}{12}$

$$\Leftrightarrow 12(x-7) + 12x = x(x-7) \Leftrightarrow x^2 - 31x + 84 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 28 \text{ hoặc } x = 3.$$

Vậy thời gian đội I làm xong công việc là 28 giờ, thời gian đội II làm xong công việc là: $28 - 7 = 21$.

Câu 19: Một xưởng có kế hoạch in xong 6000 quyển sách giống nhau trong một thời gian quy định, biết số quyển sách in được trong một ngày là bằng nhau. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng đã in nhiều hơn 300 quyển sách so với số quyển sách phải in trong kế hoạch, nên xưởng in xong 6000 quyển sách nói trên sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Tính số quyển sách xưởng in được trong 1 ngày theo kế hoạch.

Lời giải

Gọi x là số quyển sách xưởng in được trong mỗi ngày theo kế hoạch, ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số ngày in theo kế hoạch: $\frac{6000}{x}$

Số quyển sách xưởng in được thực tế trong mỗi ngày: $x + 300$

Số ngày in thực tế: $\frac{6000}{x+300}$

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{6000}{x} - \frac{6000}{x+300} = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 300x - 1800000 = 0 \Leftrightarrow x = 1200 \text{ hoặc } x = -15000.$$

Vậy số quyển sách xưởng in được trong mỗi ngày theo kế hoạch là: 1200.

Câu 20: Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Gọi x là sản phẩm xưởng sản xuất trong 1 ngày theo kế hoạch ($x > 0$)

Số ngày theo kế hoạch là: $\frac{1100}{x}$

Số ngày thực tế là $\frac{1100}{x+5}$

Ta có phương trình: $\frac{1100}{x} - \frac{1100}{x+5} = 2$

$$\Leftrightarrow 1100(x+5) - 1100x = 2x(x+5) \Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 5500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ hoặc } x = -55.$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất là 55 sản phẩm.

Câu 21: Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần. Thực tế, mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên cuối cùng đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định một tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

Lời giải

Gọi diện tích rừng mà mỗi tuần lâm trường dự định trồng là x (ha)

Theo dự định, thời gian trồng hết 75 ha rừng là: $\frac{75}{x}$

Vì mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên thực tế mỗi tuần lâm trường trồng được: $x+5$

Do đó thời gian thực tế lâm trường trồng hết 80 ha rừng là: $\frac{80}{x+5}$

Vì thực tế, lâm trường trồng xong sớm so với dự định là 1 tuần nên ta có phương trình:

$$\frac{75}{x} - \frac{80}{x+5} = 1$$

$$\Leftrightarrow 75(x+5) - 80x = x(x+5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 375 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ hoặc } x = -25$$

Vậy mỗi tuần lâm trường dự định trồng 15 ha rừng.

Câu 22: Một tổ công nhân phải may xong 420 bộ đồng phục trong khoảng thời gian nhất định. Nếu thêm 3 công nhân vào tổ thì mỗi người sẽ may ít hơn lúc ban đầu là 7 bộ đồng phục. Tính số công nhân có trong tổ lúc đầu.

Lời giải

Gọi số công nhân của tổ lúc đầu là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số công nhân của tổ lúc sau là: $x+3$.

Số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc đầu là: $\frac{420}{x}$.

Số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc sau là $\frac{420}{x+3}$.

Ta có phương trình: $\frac{420}{x} = \frac{420}{x+3} + 7$.

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow x = 12 \text{ hoặc } x = -15.$$

Vậy số công nhân của tổ lúc đầu là 12 người.

Câu 23: Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định.

Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Gọi số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là x . ĐK: ($x > 10, x \in \mathbb{Z}$)

Số sản phẩm tổ dự định làm trong mỗi ngày là: $x - 10$.

Thời gian tổ hoàn thành công việc trong thực tế là: $\frac{240}{x}$

Thời gian tổ hoàn thành công việc theo dự định là: $\frac{240}{x-10}$

Vì tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày, ta có phương trình: $\frac{240}{x-10} - \frac{240}{x} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{120}{x-10} - \frac{120}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 1200 = 0 \Leftrightarrow x = 40 \text{ hoặc } x = -30.$$

Vậy số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là 40 sản phẩm.

Câu 24: Lớp 9A dự định trồng 420 cây xanh. Đến ngày thực hiện có 7 bạn không tham gia do được triệu tập học bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi của nhà trường nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 3 cây mới đảm bảo kế hoạch đặt ra. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh.

Lời giải

Gọi số học sinh lớp 9A là x , ($x \in \mathbb{N}, x > 7$)

Theo kế hoạch, mỗi em phải trồng $\frac{420}{x}$

Trên thực tế số học sinh còn lại là: $x - 7$.

Trên thực tế, mỗi em phải trồng $\frac{420}{x-7}$

Do lượng cây mỗi em trồng trên thực tế hơn 3 cây so với kế hoạch nên ta có phương trình:

$$\frac{420}{x-7} - \frac{420}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 420x - 420(x-7) = 3x(x-7) \Leftrightarrow x^2 - 7x - 980 = 0 \Leftrightarrow x = 35 \text{ hoặc } x = -28.$$

Vậy lớp 9A có 35 học sinh.

Câu 25: Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 30 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì được bổ sung thêm 2 xe nên mỗi xe chở ít hơn 0,5 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc xe?

Lời giải

Gọi số xe trong đoàn xe lúc đầu là x , ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số xe trong đoàn xe khi bổ sung thêm là: $x + 2$.

Lúc đầu, lượng hàng mỗi xe phải chở là $\frac{30}{x}$

Lúc thêm 2 xe, lượng hàng mỗi xe phải chở là $\frac{30}{x+2}$

Do bổ sung thêm 2 xe thì mỗi xe chở ít hơn $0,5 = \frac{1}{2}$ tấn hàng nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 60(x+2) - 60x = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ hoặc } x = -12.$$

Vậy lúc đầu đoàn xe có 10 chiếc.

Câu 26: Một đội xe cần chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc, đội được bổ sung thêm 3 chiếc nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn hàng so với dự định. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe, biết khối lượng hàng chở trên mỗi xe như nhau.

Lời giải

Gọi x là số xe ban đầu của đội

Số xe lúc sau: $x + 3$

Số tấn hàng được chở trên mỗi xe lúc đầu: $\frac{36}{x}$

Số tấn hàng được chở trên mỗi xe lúc sau: $\frac{36}{x+3}$

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = 1.$

$$\Leftrightarrow 36(x+3) - 36x = x(x+3) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 108 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \text{ hoặc } x = -12$$

Vậy lúc đầu đội có 9 chiếc xe.

Câu 27: Hưởng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở thêm hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau.

Lời giải

Gọi x là số tàu dự định của đội ($x \in \mathbb{N}^*, x < 14$)

Số tàu tham gia vận chuyển là: $x + 1$

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định: $\frac{280}{x}$

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo thực tế: $\frac{280}{x+1}$

Theo đề bài ta có pt: $\frac{280}{x} - \frac{280}{x+1} = 2$

$$\Leftrightarrow 280(x+1) - 286x = 2x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ hoặc } x = -14.$$

Vậy đội tàu lúc đầu là có 10 chiếc

Câu 28: Nhân ngày quốc tế thiếu nhi, 13 HS tham gia gói 80 phần quà cho các em thiếu nhi. Biết tổng số quà mà HS nam gói được bằng tổng số quà mà HS nữ gói được. Số quà mỗi bạn nam gói nhiều hơn số quà mà mỗi bạn nữ gói là 3 phần. Tính số HS nam và nữ.

Lời giải

Gọi x là số HS nam, ($0 < x < 13, x \in \mathbb{N}$)

Số HS nữ là: $13 - x$

Số phần quà mà mỗi HS Nam gói được: $\frac{40}{x}$

Số phần quà mà mỗi HS nữ gói được: $\frac{40}{13-x}$

Theo Câu ta có phương trình: $\frac{40}{x} - \frac{40}{13-x} = 3$

$$\Leftrightarrow 40(13-x) - 40x = 3x(13-x) \Leftrightarrow 3x^2 - 119x + 520 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = \frac{104}{3}.$$

Vậy số HS nam là 5, số HS nữ là 8.

Câu 29: Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 120 tấn hàng. Hôm làm việc do có 5 xe được điều đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 0,8 tấn hàng so với dự định ban đầu. Biết khối lượng hàng mỗi xe chuyên chở như nhau, hỏi đoàn xe ban đầu có bao nhiêu chiếc?

Lời giải

Gọi số chiếc xe ban đầu của đoàn xe vận tải là x ($x > 5, x \in \mathbb{N}$)

Số chiếc xe thực tế của đoàn xe vận tải là: $x - 5$

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở ban đầu là $\frac{120}{x}$ tấn

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở thực tế là $\frac{120}{x-5}$ tấn

Theo giả thiết ta có phương trình: $\frac{120}{x-5} - \frac{4}{5} = \frac{120}{x}$

$$\Leftrightarrow 600x - 4x(x-5) = 600(x-5) \Leftrightarrow 4x^2 - 20x - 3000 = 0 \Leftrightarrow x = 30 \text{ hoặc } x = -25.$$

Vậy số chiếc xe ban đầu của đoàn xe vận tải là 30 chiếc.

Bài toán 3. Bài toán liên quan tới chuyển động

1. Các công thức liên quan:

Quãng đường = Vận tốc. Thời gian

$$v_{xuôi} = v_{thực} + v_{nước}$$

$$v_{ngược} = v_{thực} - v_{nước}$$

$$v_{xuôi} - v_{ngược} = 2v_{nước}$$

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Một ô tô đi trên quãng đường dài 400 km. Khi đi được 180 km, ô tô tăng vận tốc thêm 10 km/h đi trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của ô tô. Biết thời gian đi hết quãng đường là 8 giờ.

Lời giải

Theo bài ra ta có:



$$AC = 180 \text{ km}, CB = 400 - 180 = 220 \text{ km}.$$

Gọi vận tốc ban đầu của ô tô là x (km/h) ($x > 0$).

Vận tốc của ô tô trên quãng đường CB là $x + 10$

Thời gian ô tô đi từ A đến C là: $\frac{180}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi từ C đến B là: $\frac{220}{x+10}$ (h)

Theo giả thiết ta có phương trình:

$$\frac{180}{x} + \frac{220}{x+10} = 8$$

$$\Leftrightarrow 180(x+10) + 220x = 8x(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 180x + 1800 + 220x = 8x^2 + 80x$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 320x - 1800 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 40x - 225 = 0$$

Giải phương trình này ta được $x_1 = 45$, $x_2 = -5$

Vậy vận tốc ban đầu của ô tô là 45 km/h

Câu 2: Một ca nô chạy xuôi dòng sông từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B về A hết tất cả 7 giờ 30 phút. Tính vận tốc thực của ca nô biết quãng đường sông AB dài 54 km và vận tốc dòng nước là 3 km/h

Lời giải

$$\text{Đổi } 7 \text{ giờ } 30 \text{ phút} = \frac{15}{2}$$

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h), $x > 3$

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng sông từ A đến B là: $x + 3$ (km/h)

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng sông từ B về A là: $x - 3$ (km/h)

Thời gian của ca nô khi xuôi dòng sông từ A đến B là: $\frac{54}{x+3}$ (h)

Thời gian của ca nô khi ngược dòng sông từ B về A là: $\frac{54}{x-3}$ (h)

Do ca nô chạy xuôi dòng sông từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B về A hết tất cả 7 giờ 30 phút nên ta có phương trình: $\frac{54}{x+3} + \frac{54}{x-3} = \frac{15}{2}$

Ta có:

$$\frac{54}{x+3} + \frac{54}{x-3} = \frac{15}{2}$$

$$54\left(\frac{x-3+x+3}{x^2-9}\right) = \frac{15}{2}$$

$$\frac{2x}{x^2-9} = \frac{5}{36}$$

$$72x = 5x^2 - 45$$

$$5x^2 - 72x - 45 = 0$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ x = \frac{-3}{5} \end{cases}$$

Ta thấy chỉ có $x = 15$ thỏa mãn điều kiện $x > 3$.

Vậy vận tốc thực của ca nô là 15 (km/h)

Câu 3: Một ô tô tải đi từ A đến B với vận tốc 40km/h. Sau 2 giờ 30 phút thì một ô tô taxi cũng xuất phát đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h và đến B cùng lúc với xe ô tô tải. Tính độ dài quãng đường AB

Lời giải

Gọi độ dài quãng đường AB là x (km); $x > 0$

Thời gian xe tải đi từ A đến B là $\frac{x}{40}$ h

Thời gian xe Taxi đi từ A đến B là: $\frac{x}{60}$ h

Do xe tải xuất phát trước 2h30 phút = $\frac{5}{2}$ nên ta có pt

$$\frac{x}{40} - \frac{x}{60} = \frac{5}{2}$$

Giải phương trình tìm được $x = 300$

Vậy độ dài quãng đường AB là 300 km

Câu 4: Xe máy thứ nhất đi trên quãng đường từ Hà Nội về Thái Bình hết 3 giờ 20 phút. Xe máy thứ hai đi hết 3 giờ 40 phút. Mỗi giờ xe máy thứ nhất đi nhanh hơn xe máy thứ hai 3 km. Tính vận tốc của mỗi xe máy và quãng đường từ Hà Nội đến Thái Bình?

Lời giải

Gọi vận tốc x thứ nhất là x (km/h), đk: $x > 3$;

Vận tốc của xe thứ hai là $x - 3$ (km/h).

Trong 3 giờ 20 phút xe máy thứ nhất đi được $\frac{10}{3}x$ (km)

Trong 3 giờ 40 phút xe máy thứ hai đi được $\frac{11}{3}(x-3)$ (km)

Đó là quãng đường từ Hà nội đến Thái Bình nên ta có phương trình

$$\frac{10}{3}x = \frac{11}{3}(x-3) \Leftrightarrow x = 33.$$

Vậy vận tốc của xe máy thứ nhất là 33 km/h. Vận tốc của xe máy thứ hai là 30 km/h.

Quãng đường từ Hà Nội đến Thái Bình là 110 km.

Câu 5: Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một canô đi xuôi dòng từ A đến B, rồi đi ngược dòng trở về A ngay. Thời gian kể từ lúc đi cho đến lúc về là 5 giờ 20 phút. Tính vận tốc của dòng nước, biết vận tốc thực của canô là 12 km/h

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc dòng nước

Vận tốc của canô lúc đi là: $12 + x$ (km/h)

Vận tốc của canô lúc về là: $12 - x$ (km/h)

Tổng thời gian cả đi lẫn về là: $5\text{h}20' = \frac{16}{3}$ (h)

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{30}{12+x} + \frac{30}{12-x} &= \frac{16}{3} \\ \frac{3 \cdot 30(12-x)}{3(12-x)(12+x)} + \frac{3 \cdot 30(12+x)}{3(12-x)(12+x)} &= \frac{16(12-x)(12+x)}{3(12-x)(12+x)} \\ 90(12-x) + 90(12+x) &= 16(144 - x^2) \\ -16x^2 + 144 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm 3 \\ x &= -3 \text{ hoặc } x = 3\end{aligned}$$

Vậy vận tốc của dòng nước là 3 (km/h)

Câu 6: Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B

Lời giải

Đặt x (km/h) là vận tốc đi từ A đến B, vậy vận tốc đi từ B đến A là $x+9$ (km/h)

Do giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}\frac{90}{x} + \frac{90}{x+9} &= 5 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{10}{x} + \frac{10}{x+9} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x(x+9) &= 20(2x+9) \\ \Leftrightarrow x^2 - 31x - 180 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 36 \text{ (Do } x > 0\text{)}\end{aligned}$$

Vậy vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B là 36 km/h

Câu 7: Một tàu hỏa đi từ A đến B với quãng đường 40 km. Khi đi đến B, tàu dừng lại 20 phút rồi đi tiếp 30 km nữa để đến C với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi từ A đến B là 5 km/h. Tính vận tốc của tàu hỏa khi đi trên quãng đường AB, biết thời gian kể từ khi tàu hỏa xuất phát từ A đến khi tới C hết tất cả 2 giờ

Lời giải

Gọi vận tốc tàu hỏa khi đi trên quãng đường AB là x (km/h; $x > 0$)

Thời gian tàu hỏa đi hết quãng đường AB là $\frac{40}{x}$

Thời gian tàu hỏa đi hết quãng đường BC là $\frac{30}{x+5}$

Theo bài ta có phương trình $\frac{40}{x} + \frac{30}{x+5} + \frac{1}{3} = 2$

Biến đổi pt ta được $x^2 - 37x - 120 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=40(\text{TM}) \\ x=-3(\text{L}) \end{cases}$$

Vận tốc của tàu hỏa khi đi trên quãng đường AB là 40 km/h .

Câu 8: Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một ô tô đi từ B đến A, sau 4 giờ 2 xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ô tô đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB.

Lời giải

Gọi x là thời gian ô tô đi hết AB ($x > 4$)

Thời gian xe máy đi hết AB là $x + 6$

Trong 1 giờ ô tô đi được $\frac{1}{x}$ quãng đường

Trong 1 giờ xe máy đi được $\frac{1}{x+6}$ quãng đường

Trong 1 giờ 2 xe đi được $\frac{1}{4}$ quãng đường

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

Giải phương trình được $x = 6$

Vậy thời gian ô tô đi hết AB là 6 giờ, xe máy đi hết AB là $x + 6 = 12$ giờ

Câu 9: Quãng đường AB dài 156 km. Một người đi xe máy từ A, một người đi xe đạp từ B. Hai xe xuất phát cùng một lúc và sau 3 giờ gặp nhau. Biết rằng vận tốc của người đi xe máy nhanh hơn vận tốc của người đi xe đạp là 28 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe?

Lời giải

Gọi vận tốc của xe đạp là x (km/h), điều kiện $x > 0$

Thì vận tốc của xe máy là $x + 28$ (km/h)

Trong 3 giờ:

+ Xe đạp đi được quãng đường $3x$ (km),

+ Xe máy đi được quãng đường $3(x + 28)$ (km), theo bài ra ta có phương trình:

$$3x + 3(x + 28) = 156$$

Giải tìm $x = 12$

Trả lời: Vận tốc của xe đạp là 12 km/h và vận tốc của xe máy là $12 + 28 = 40$ (km/h)

Câu 10: Một ca nô chạy xuôi dòng với quãng đường 42km, rồi sau đó ngược dòng trở lại 20 km hết tổng cộng 5h. Biết vận tốc của dòng nước chảy là 2 km/h. Tính vận tốc của ca nô lúc dòng nước yên lặng

Lời giải

Gọi vận tốc của ca nô lúc dòng nước yên lặng là x (km/h) ($x > 0$)

Vì vận tốc nước là 2 km/h nên vận tốc xuôi dòng và ngược dòng lần lượt là $x + 2$ và $x - 2$ (km/h)

Suy ra $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Thời gian để ca nô đi hết 42 km xuôi dòng là $\frac{42}{x+2}$ (h)

Thời gian để ca nô đi hết 20 km ngược dòng là $\frac{20}{x-2}$ (h)

Tổng thời gian là 5h do đó

$$\frac{42}{x+2} + \frac{20}{x-2} = 5$$

$$\frac{42(x-2) + 20(x+2)}{(x-2)(x+2)} = 5$$

$$\frac{62x - 44}{x^2 - 4} = 5$$

$$5x^2 - 62x + 24 = 0$$

$$\begin{cases} x = 12 \text{ (TM)} \\ x = 0,4 \text{ (L)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 12 km/h

Câu 11: Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được 1 giờ thì ô tô bị chặn bởi xe cứu hỏa 10 phút. Do đó để đến B đúng hạn xe phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc lúc đầu của ô tô

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định: $x > 0$

Thời gian dự định: $\frac{120}{x}$ (h)

Sau 1 h ô tô đi được x km nên quãng đường còn lại $120 - x$ (km)

Vt lúc sau: $x + 6$ (km/h)

$$\text{Pt } 1 + \frac{1}{6} + \frac{120 - x}{x + 6} = \frac{120}{x} \Rightarrow x = 48$$

Vậy vận tốc lúc đầu của ô tô là 48 km/h

Câu 12: Khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là 60 km. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ A đến B với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải dừng lại sửa xe 20 phút, còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi xe sửa xong, người thứ nhất đi với vận tốc nhanh hơn trước 4 km/h nên đã đến B cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người đi lúc đầu

Lời giải

Gọi vận tốc ban đầu của hai người là x (km/h).

Theo đề bài ta có pt:

$$\frac{60 - x}{x} = \frac{1}{3} + \frac{60 - x}{x + 4}$$

Giải và chọn được $x = 20$

Vậy vận tốc hai người đi lúc đầu là 20 km/h

Câu 13: Cho quãng đường từ địa điểm A tới địa điểm B dài 90 km. Lúc 6 giờ một xe máy đi từ A để tới B. Lúc 6 giờ 30 phút cùng ngày, một ô tô cũng đi từ A để tới B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h. Hai xe nói trên đều đến B cùng lúc. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải

Xe máy đi trước ô tô thời gian là: 6 giờ 30 phút – 6 giờ = 30 phút = $\frac{1}{2}$ h.

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) ($x > 0$)

Vì vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h nên vận tốc của ô tô là $x + 15$ (km/h)

Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là: $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là: $\frac{90}{x+15}$ (h)

Do xe máy đi trước ô tô $\frac{1}{2}$ giờ và hai xe đều tới B cùng một lúc nên ta có phương trình:

$$\frac{90}{x} - \frac{1}{2} = \frac{90}{x+15}$$

$$90.2.(x+15) - x(x+15) = 90.2x$$

$$180x + 2700 - x^2 - 15x = 180x$$

$$x^2 + 15x - 2700 = 0$$

$$x_1 = \frac{-15 - 105}{2} = -60$$

$$x_2 = \frac{-15 + 105}{2} = 45$$

Vậy vận tốc của xe máy là 45 (km/h), vận tốc của ô tô là $45 + 15 = 60$ (km/h)

Câu 14: Một ca nô chạy xuôi dòng từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B đến A hết tất cả 4 giờ. Tính vận tốc ca nô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30 km và vận tốc dòng nước là 4 km/h

Lời giải

Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x km/h ($x > 4$)

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/h), khi ngược dòng là $x - 4$ (km/h). Thời

gian ca nô xuôi dòng từ A đến B là $\frac{30}{x+4}$ giờ, đi ngược dòng

từ B đến A là $\frac{30}{x-4}$ giờ.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{30}{x+4} + \frac{30}{x-4} = 4$

$$\Leftrightarrow 30(x-4) + 30(x+4) = 4(x+4)(x-4) \Leftrightarrow x^2 - 15x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

hoặc $x = 16$. Nghiệm $x = -1 < 0$ nên bị loại

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 16km/h.

Câu 15: Một bè gỗ được thả trôi trên sông từ cầu Đắk Bla. Sau khi thả bè gỗ trôi được 3 giờ 20 phút, một người chèo thuyền độc mộc cũng xuất phát từ cầu Đắk Bla đuổi theo và đi được 10km thì gặp bè gỗ. Tính vận tốc của bè gỗ biết rằng vận tốc của người chèo thuyền độc mộc lớn hơn vận tốc của bè gỗ là 4km/h

Lời giải

$$3\text{giờ } 20\text{ phút} = \frac{10}{3} \text{ giờ}$$

Gọi x là vận tốc của bè gỗ ($x > 0$) (km/h)

vận tốc của người chèo thuyền độc mộc: $x + 4$

Thời gian người chèo thuyền độc mộc đi được khi gặp bè gỗ: $\frac{10}{x+4}$

Thời gian bè gỗ trôi được 10 km: $\frac{10}{x}$

Theo đề bài ta có PT:

$$\frac{10}{x} - \frac{10}{x+4} = \frac{10}{3}$$

$$3x + 12 - 3x = x^2 + 4x$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2(TM) \\ x = -6(L) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của bè gỗ là 2 km/h

Câu 16: Hàng ngày, bạn An đi học từ nhà đến trường trên quãng đường dài 8km bằng xe máy điện với vận tốc không đổi. Hôm nay, vẫn trên đoạn đường đó, 2km đầu bạn An đi với vận tốc như mọi khi, sau đó vì xe non hơi nên bạn đã dừng lại 1phút để bơm. Để đến trường đúng giờ như mọi ngày, bạn An phải tăng vận tốc lên thêm 4km/h. Tính vận tốc xe máy điện của bạn An khi tăng tốc. Với vận tốc đó bạn An có vi phạm luật giao thông hay không? Tại sao? Biết rằng đoạn đường bạn An đi là trong khu vực đông dân cư

Lời giải

Gọi vận tốc xe máy điện của An bình thường là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc xe máy điện của An khi tăng tốc là $x + 4$ (km/h)

Thời gian An đi từ nhà đến trường bình thường là $\frac{8}{x}$

Đổi 1phút = $\frac{1}{60}$ h. Thời gian An đi từ nhà đến trường ngày hôm nay là $\frac{2}{x} + \frac{1}{60} + \frac{6}{x+4}$ (h)

$$\text{Ta có: } \frac{8}{x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{60} + \frac{6}{x+4} \Leftrightarrow \frac{6}{x} - \frac{6}{x+4} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow \frac{24}{x(x+4)} = \frac{1}{60}$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) = 1440 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1440 = 0 \Leftrightarrow x = -40 \text{ hoặc } x = 36$$

Vậy vận tốc xe máy điện của An khi tăng tốc là $36 + 4 = 40$ (km/h)

Vận tốc này không vi phạm luật giao thông vì trong khu vực đông dân cư, vận tốc tối đa của xe máy điện là 40 km/h

Câu 17: Quãng đường từ Quy Nhơn đến Bồng Sơn dài 100 km. Cùng một lúc, một xe máy khởi hành từ Quy Nhơn đi Bồng Sơn và một xe ô tô khởi hành từ Bồng Sơn đi Quy Nhơn. Sau khi hai xe gặp nhau, xe máy đi 1 giờ 30 phút nữa mới đến Bồng Sơn. Biết vận tốc hai xe không thay đổi trên suốt quãng đường đi và vận tốc của xe máy kém vận tốc xe ô tô là 20 km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải

Đổi 1h30' = 1,5h



Đặt địa điểm :

- Quy Nhơn là A
- Hai xe gặp nhau là C
- Bồng Sơn là B

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h). ĐK : $x > 0$.

Suy ra :

Vận tốc của ô tô là $x + 20$ (km/h).

Quãng đường BC là : $1,5x$ (km)

Quãng đường AC là: $100 - 1,5x$ (km)

Thời gian xe máy đi từ A đến C là : $\frac{100 - 1,5x}{x}$ (h)

Thời gian ô tô máy đi từ B đến C là : $\frac{1,5x}{x + 20}$ (h)

Vì hai xe khởi hành cùng lúc, nên ta có phương trình : $\frac{100 - 1,5x}{x} = \frac{1,5x}{x + 20}$

Giải pt :

$$\frac{100 - 1,5x}{x} = \frac{1,5x}{x + 20}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 40 km/h.

Vận tốc của ô tô là $40 + 20 = 60$ (km/h).

Cách 2 : Ta có: $2h30' = \frac{3}{2}h$

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe máy ($x > 0$). Vận tốc xe ô tô là: $x + 20$ (km/h)

Thời gian xe máy đi từ BS đến QN là: $\frac{100}{x}$ (h).

Thời gian ô tô đi từ QN đến BS là $\frac{100}{x+20}$ (h)

Vậy thời gian hai xe đi từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau là: $\frac{100}{x+(x+20)}$ (h).

Ta lập được pt: $\frac{100}{2x+20} + \frac{3}{2} = \frac{100}{x}$

Vận tốc xe máy là: 40 km/h . Vận tốc ô tô là: $40 + 20 = 60$ (km/h).

Câu 18: Quãng đường AB dài 90 km, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B, ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải

Gọi x là vận tốc ô tô thứ nhất ($0 < x < 90$)

Vận tốc ô tô thứ hai là $90 - x$

Thời gian ô tô thứ nhất đi từ A đến B $\frac{90}{x}$

Thời gian ô tô thứ nhất đi từ B đến A $\frac{90}{90-x}$

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{90}{x} = \frac{90}{90-x} + \frac{27}{60}$

Giải phương trình nhận nghiệm $x = 40$

Vận tốc xe thứ nhất là 40 km/h ; xe thứ hai là 50 km/h

Câu 19: Khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là 60 km. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ A đến B với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải dừng lại sửa xe 20 phút, còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi sửa xe xong, người thứ nhất đi với vận tốc nhanh hơn trước 4 km/h nên đã đến B cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người đi lúc đầu

Lời giải

Gọi vận tốc hai người đi lúc đầu là x km/h ($x > 0$)

Thời gian đi từ A đến B của người thứ hai là $\frac{60}{x}$

Quãng đường người thứ nhất đi được trong 1 giờ đầu là x (km)

$\Rightarrow$ Quãng đường còn lại là $60 - x$ (km)

$\Rightarrow$ Thời gian người thứ nhất đi quãng đường còn lại là $\frac{60-x}{x+4}$

$20' = \frac{1}{3}$ (h)

Theo bài ra ta có:

$$\frac{60}{x} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{60-x}{x+4}$$

$$60.3(x+4) = 4.x(x+4) + 3.x.(60-x)$$

$$x^2 + 16x - 720 = 0$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ x = -36 \end{cases}$$

Do $x > 0$ nên $x = 20$. Vậy vận tốc hai người đi lúc đầu là 20 km/h

Câu 20: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 108 km. Cùng lúc đó, một ô tô đi từ B đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc xe đạp 18 km/h. Sau khi hai xe gặp nhau, xe đạp phải mất 4h nữa mới đến B. Tính vận tốc mới xe?

Lời giải



Gọi x là vận tốc xe đạp. Điều kiện $x > 0$

Vận tốc xe máy là $x + 18$

Gọi C là điểm 2 xe gặp nhau

Thời gian xe đạp đi CB là 4h.

Suy ra quãng đường CB là $4x$

Nên quãng đường AC là $108 - 4x$

Thời gian xe đạp đi quãng đường AC là $\frac{108-4x}{x}$

Thời gian ô tô đi quãng đường BC là $\frac{4x}{x+18}$

Ta có thời gian xe đạp đi quãng đường AC bằng Thời gian ô tô đi quãng đường BC nên ta có phương trình

$$\frac{108-4x}{x} = \frac{4x}{x+18}$$

Giải tìm được $x = 18$

Vậy vận tốc xe đạp là 18 km/h, xe ô tô là 26 km/h

Câu 21: Quãng đường từ A đến B dài 50km. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi đi được 2 giờ, người ấy dừng lại 30 phút để nghỉ. Muốn đến B đúng thời gian đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định; $x > 0$

Thời gian dự định: $\frac{50}{x}$ (h)

Quãng đường đi được sau 2h : $2x$ (km)

Quãng đường còn lại : $50 - 2x$ (km)

Vận tốc đi trên quãng đường còn lại : $x + 2$ (km/h)

Thời gian đi quãng đường còn lại : $\frac{50-2x}{x+2}$ (h)

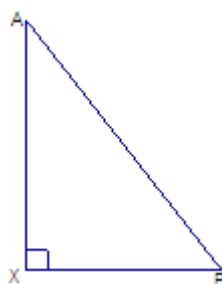
Theo đề bài ta có PT: $2 + \frac{1}{2} + \frac{50-2x}{x+2} = \frac{50}{x}$

Giải ra ta được : $x = 10$

Vậy Vận tốc dự định : 10 km/h

Câu 22: Trên một vùng biển được xem như bằng phẳng và không có chướng ngại vật. Vào lúc 6 giờ có một tàu cá đi thẳng qua tọa độ X theo hướng Từ Nam đến Bắc với vận tốc không đổi. Đến 7 giờ một tàu du lịch cũng đi thẳng qua tọa độ X theo hướng từ Đông sang Tây với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá 12 km/h. Đến 8 giờ khoảng cách giữa hai tàu là 60 km. Tính vận tốc của mỗi tàu

Lời giải



– Gọi vận tốc của tàu cá là: x (km/h), $x > 0$

– Vận tốc của tàu du lịch là: $x + 12$ (km/h)

– Đến 8 giờ thì hai tàu cách nhau khoảng $AB = 60$ km. Lúc đó, thời gian tàu cá đã đi là: $8 - 6 = 2$

– Thời gian tàu du lịch đã đi là: $8 - 7 = 1$

– Giả sử tàu cá đến điểm A, tàu du lịch đến điểm B

– Tàu cá đã đi đoạn $XA = 2x$ (km)

– Tàu du lịch đã đi đoạn $XB = x + 12$ (km)

– Vì $XA \perp XB$

– Nên theo định lý Pytago, ta có: $XA^2 + XB^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 + (x+12)^2 = 60^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 24x - 3456 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -28,8 \quad x_2 = 24$$

Vậy vận tốc của tàu cá và tàu du lịch lần lượt là: 24 km/h và 36 km/h

Bài toán 4. Bài toán liên quan tới công việc – nước chảy

1. Các công thức liên quan:

Quãng đường = Vận tốc. Thời gian

$$V_{xuôi} = V_{thực} + V_{nước}$$

$$V_{ngược} = V_{thực} - V_{nước}$$

$$V_{xuôi} - V_{ngược} = 2V_{nước}$$

B. Bài tập áp dụng

Câu 1: Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 120 tấn hàng. Hôm làm việc do có 5 xe được điều đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 0,8 tấn hàng so với dự định ban đầu. Biết khối lượng hàng mỗi xe chuyên chở như nhau, hỏi đoàn xe ban đầu có bao nhiêu chiếc?

Lời giải

Gọi số chiếc xe ban đầu của đoàn xe vận tải là x ($x > 5, x \in \mathbb{N}$).

Số chiếc xe thực tế của đoàn xe vận tải là $x - 5$.

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở ban đầu là $\frac{120}{x}$ tấn.

Khối lượng hàng mỗi xe phải chở thực tế là $\frac{120}{x-5}$ tấn.

Theo giả thiết ta có phương trình: $\frac{120}{x-5} - \frac{4}{5} = \frac{120}{x} \Leftrightarrow 4x^2 - 20x - 3000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -25 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện, ta được số chiếc xe ban đầu của đoàn xe vận tải là 30 chiếc.

Câu 2: Hưởng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở thêm hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau.

Lời giải

Gọi x là số tàu dự định của đội ($x \in \mathbb{N}^*, x < 140$).

Số tàu tham gia vận chuyển là $x + 1$.

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định: $\frac{280}{x}$.

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo thực tế: $\frac{280}{x+1}$.

Theo đề bài ta có pt: $\frac{280}{x} - \frac{280}{x+1} = 2$.

$$\Leftrightarrow 280(x+1) - 280x = 2x(x+1).$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -14(l) \end{cases}$$

Vậy đội tàu lúc đầu là có 10 chiếc.

Câu 3: Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

Lời giải

Gọi x là thời gian người thứ nhất làm xong công việc.

Thời gian mà người thứ hai làm riêng xong công việc là $x + 2$.

Trong một giờ:

+) Người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$.

+) Người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$.

+) Cả hai người làm được $\frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy thời gian người thứ nhất làm xong công việc là 4 giờ, thời gian người thứ hai làm xong công việc là 6.

Câu 4: Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian để mỗi đội hoàn thành công việc là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là thời gian đội I làm xong công việc ($x > 12$).

Thời gian đội thứ II làm xong công việc là: $x - 7$.

Trong một giờ:

+) Đội I làm được $\frac{1}{x}$.

+) Đội II làm được $\frac{1}{x-7}$.

+) Cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$.

Theo bài ra ta có phương

trình: $\Leftrightarrow 12(x-7) + 12x = x(x-7) \Leftrightarrow 12x - 84 + 12x = x^2 - 7x \Leftrightarrow x^2 - 31x + 84 = 0 \Rightarrow x = 21$.

Vậy thời gian đội I làm xong công việc là 28 giờ, thời gian đội II làm xong công việc là: $28 - 7 = 21$.

Câu 5: Một tổ công nhân phải may xong 420 bộ đồng phục trong khoảng thời gian nhất định. Nếu thêm 3 công nhân vào tổ thì mỗi người sẽ may ít hơn lúc ban đầu là 7 bộ đồng phục. Tính số công nhân có trong tổ lúc đầu.

Lời giải

Gọi số công nhân của tổ lúc đầu là x thì số công nhân của tổ lúc sau là $x + 3$.

Suy ra số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc đầu là $\frac{420}{x}$.

Suy ra số bộ đồng phục mỗi người phải may lúc sau là $\frac{420}{x+3}$.

Theo đề bài ta có $\frac{420}{x} = \frac{420}{x+3} + 7$.

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$.

Vậy số công nhân của tổ lúc đầu là 12 người.

Câu 6: Cho hai vòi nước cùng lúc chảy vào một bể cạn. Nếu chảy riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Khi nước đầy bể, người ta khóa vòi thứ nhất và vòi thứ hai lại, đồng thời mở vòi thứ ba cho nước chảy ra thì sau 6 giờ bể cạn nước. Khi nước trong bể đã

cạn mở cả ba vòi thì sau 24 giờ bể lại đầy nước. Hỏi nếu chỉ dùng vòi thứ nhất thì sau bao lâu bể đầy nước.

Lời giải

Gọi thời gian mà vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x , ($x > 0$).

Trong một giờ:

-Vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$.

- Vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x+4}$.

- Vòi thứ ba chảy được $\frac{1}{6}$.

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy chỉ dùng vòi thứ nhất thì sau 8 giờ bể đầy nước.

Câu 7: Một công ty vận tải dự định điều một số xe tải để vận chuyển 24 tấn hàng. Thực tế khi đến nơi thì công ty bổ sung thêm 2 xe nữa nên mỗi xe chở ít đi 2 tấn so với dự định. Hỏi số xe dự định được điều động là bao nhiêu? Biết số lượng hàng chở ở mỗi xe như nhau và mỗi xe chở một lượt.

Lời giải

Gọi số xe ban đầu là x nên số hàng thực tế mỗi xe chở là $\frac{24}{x}$.

Số xe thực tế là $x+2$ nên số hàng thực tế mỗi xe chở là $\frac{24}{x+2}$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{x} - \frac{12}{x+2} = 1$$

$$\Rightarrow 12(x+2) - 12x = x(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-24) = 25$$

Từ đó ta tìm được $x_1 = 4$ và $x_2 = -6$.

Vậy số xe ban đầu là 4 xe.

Câu 8: Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Gọi x là sản phẩm xưởng sản xuất trong 1 ngày theo kế hoạch ($x > 0$).

$\Rightarrow$ Số ngày theo kế hoạch là: $\frac{1100}{x}$.

Số ngày thực tế là $\frac{1100}{x+5}$ Theo giả thiết của Câu ta có:

$$\Leftrightarrow 1100(x+5) - 1100x = 2x(x+5).$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 5500 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ hay } x = -55(l).$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất là 50 sản phẩm.

Câu 9: Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần. Thực tế mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên cuối cùng đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn dự định một tuần. Hỏi mỗi tuần lâm trường dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

Lời giải

Gọi diện tích rừng mà mỗi tuần lâm trường dự định trồng là x .

Theo dự định, thời gian trồng hết 75 ha rừng là: $\frac{75}{x}$.

Vì mỗi tuần lâm trường trồng vượt mức 5 ha so với dự định nên thực tế mỗi tuần lâm trường trồng được $x + 5$.

Do đó thời gian thực tế lâm trường trồng hết 80 ha rừng là $\frac{80}{x+5}$.

Vì thực tế, lâm trường trồng xong sớm so với dự định là 1 tuần nên ta có phương trình:

$$\frac{75}{x} - \frac{80}{x+5} = 1.$$

Giải ra ta được: $x = 15$; $x = -20$.

Vậy mỗi tuần lâm trường dự định trồng 15 ha rừng.

Câu 10: Một bác nông dân đem trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau:

Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

...

Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. nhưng thật thú vị, số trứng bán được trong mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng bán được là bao nhiêu và bán hết trong bao nhiêu ngày?

Lời giải

Gọi x là số trứng bán được ($x \in \mathbb{N}^*$) thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là: $8 + \frac{x-8}{8}$.

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là: $16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}$.

Theo đề toán ta có phương trình:

$$8 + \frac{x-8}{8} = 16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}.$$

$x = 392$. Giải phương trình ta được

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng

Số trứng bán được trong mỗi ngày là $8 + \frac{x-8}{8} = 56$.

Số ngày là $392:56=7$ ngày.

Câu 11: Hai máy xúc đất được giao xúc hết một khối lượng đất để đắp đập. Nếu cả hai máy cùng làm việc thì xúc hết khối lượng đất đó trong 4 ngày. Nếu máy thứ nhất xúc xong $\frac{1}{2}$ số đất rồi máy thứ hai xúc hết số đất còn lại thì thời gian xúc của cả hai máy cộng lại là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi máy xúc hết khối lượng đất đó trong mấy ngày?

Lời giải

Gọi x là thời gian mà máy thứ nhất xúc hết nửa lượng đất. Khi đó, $9 - x$ là thời gian máy thứ hai xúc xong khối lượng đất còn lại.

Suy ra $2x; 18 - 2x$ lần lượt là số ngày mà máy thứ nhất và máy thứ hai xúc xong khối lượng đất đó.

Trong một ngày:

- Máy thứ nhất xúc được $\frac{1}{2x}$.

- Máy thứ hai xúc được $\frac{1}{9-x}$.

- Cả hai máy xúc được $\frac{1}{4}$.

Ta có phương trình $\frac{1}{2x} + \frac{1}{18-2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=3 \end{cases}$.

Vậy, số ngày máy thứ nhất và máy thứ hai xúc hết số đất theo thứ tự là 6 ngày, 12 ngày hoặc 12 ngày, 6 ngày.

Câu 12: Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Gọi trọng tải của mỗi xe nhỏ là x ($x > 0$).

Trọng tải của mỗi xe lớn là $x+1$.

Số xe dự định phải dùng là $\frac{20}{x+1}$; số xe thực tế phải dùng là $\frac{20}{x}$.

Vì số xe nhỏ thực tế phải dùng nhiều hơn dự định 1 xe nên:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x+1} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{x(x+1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 20$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4(TM) \\ x=-5(L) \end{cases}$$

Vậy trọng tải của mỗi xe nhỏ là 4 tấn.

Câu 13: Hai đội thủy lợi gồm 25 người đào đắp một con mương. Đội I đào được $45 m^3$ đất, đội II đào được $40 m^3$ đất. biết mỗi công nhân đội II đào được nhiều hơn mỗi công nhân đội I là $1 m^3$. Tính số đất mỗi công nhân đội I đào được.

Lời giải

Gọi số đất mỗi công nhân đội I đào được là $x(m^3)$, $x > 0$.

Khi đó, số đất mỗi công nhân đội II đào được là $x+1(m^3)$.

Suy ra:

- Số công nhân đội I là $\frac{45}{x}$.

- Số công nhân đội II là $\frac{40}{x+1}$.

Ta có phương trình $\frac{45}{x} + \frac{40}{x+1} = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases}$.

Vậy số đất mỗi công nhân đội I đào được là $3(m^3)$.

Câu 14: Một xưởng có kế hoạch in xong 6000 quyển sách giống nhau trong một thời gian quy định biết số quyển sách in được trong một ngày là bằng nhau. Để hoàn thành sớm kế hoạch mỗi ngày xưởng đã in nhiều hơn 300 quyển sách so với số quyển sách phải in trong kế hoạch nên xưởng in xong 6000 quyển sách nói trên sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Tính số quyển sách xưởng in được trong 1 ngày theo kế hoạch.

Lời giải

Gọi x là số quyển sách xưởng in được trong mỗi ngày theo kế hoạch (x nguyên dương)

Số ngày in theo kế hoạch: $\frac{6000}{x}$.

Số quyển sách xưởng in được thực tế trong mỗi ngày: $x+300$.

Số ngày in thực tế: $\frac{6000}{x+300}$.

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{6000}{x} - \frac{6000}{x+300} = 1$,

$$\Leftrightarrow x^2 + 300x - 1800000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1200(n); x_2 = -1500(l)$$

Vậy số quyển sách xưởng in được trong mỗi ngày theo kế hoạch là: 1200.

Câu 15: Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

Lời giải

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành một mình xong công việc là x , ĐK $x > \frac{12}{5}$.

Thì thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là $x+2$.

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$, người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$.

Vì cả hai người cùng làm xong công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ nên mỗi giờ cả hai đội làm

$$\text{được } 1: \frac{12}{5} = \frac{5}{12}.$$

Do đó ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$.

$$\Delta' = 49 + 120 = 169, \sqrt{\Delta'} = 13 \Rightarrow x = \frac{7-13}{5} = \frac{-6}{5} \text{ và } x = \frac{7+13}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

Vậy người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ, người thứ hai làm xong công việc trong $4+2 = 6$ giờ.

Câu 16: Hai người đồng thời đào chung một cái giếng có thể đào xong sau 2 ngày. Hỏi sau bao nhiêu ngày mỗi người đào riêng rẽ có thể xong cái giếng đó biết để đào xong cái giếng đó một mình người thứ hai phải tốn 3 ngày nhiều hơn người thứ nhất đào một mình.

Lời giải

Gọi thời gian đào một mình xong cái giếng đó của người thứ nhất là x ($x > 0$, ngày).
thì người thứ hai đào một mình xong cái giếng đó hết $x+3$.

Một ngày người thứ nhất đào được $\frac{1}{x}$ giếng, người thứ hai đào được $\frac{1}{x+3}$, cả hai người đào

được $\frac{1}{2}$ giếng. Theo bài ra ta có pt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2.$$

Vậy để đào một mình người thứ nhất cần 3 ngày, người thứ hai cần 6 ngày.

Câu 17: Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 16 giờ sẽ xong công việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ và người thứ hai làm một mình trong 6 giờ thì cả hai làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người làm trong bao lâu thì xong công việc.

Lời giải

Gọi thời gian làm một mình xong công việc của người thứ nhất là x ($x > 16$, giờ), một giờ người đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc. trong một giờ cả hai người làm được $\frac{1}{16}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{16} - \frac{1}{x}$ công việc. Người thứ nhất làm trong 3 giờ được $3 \cdot \frac{1}{x}$ công việc, người thứ

hai trong 6 giờ làm được $6 \cdot \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{x} \right)$ công việc.

Theo bài ra ta có phương trình: $3 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{4}$; $x = 24$. Người thứ nhất làm một mình xong công việc hết 24 giờ, người thứ hai hết 48 giờ.

Câu 18: Nếu hai người cùng làm chung một công việc thì trong $\frac{12}{5}$ giờ xong công việc. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc.

Lời giải

Gọi thời gian làm một mình xong công việc của người thứ nhất là x ($x > \frac{12}{5}$, giờ), người thứ hai làm hết $x + 2$. Trong một giờ người đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$ công việc, cả hai người trong một giờ làm được $\frac{5}{12}$ công việc. Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$, $\Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -\frac{6}{5}$ (L).
 Vậy nếu làm một mình thì người thứ nhất làm hết 4 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ.

Câu 19: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1h30 phút bể sẽ đầy. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 20 phút rồi khóa lại và mở tiếp vòi thứ hai trong 15 phút thì sẽ đầy một phần năm bể. Hỏi nếu chảy riêng thì sau bao lâu sẽ đầy bể.

Lời giải

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x ($x > \frac{3}{2}$, giờ); trong một giờ vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi hai chảy được $\frac{2}{3} - \frac{1}{x}$ phần bể. Sau 20 phút vòi I chảy được $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$, vòi II chảy trong 15 phút đầy $\frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{x} \right)$ bể. Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{5}$$

$$\text{Giải ra ta được } x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Kết luận: } \frac{5}{2}; \frac{15}{4}.$$

Câu 20: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 30 phút sẽ đầy bể. Nếu từng vòi chảy riêng thì vòi I chảy trong 3 giờ bằng lượng nước vòi II chảy trong 2 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy trong bao lâu?

Lời giải

Gọi thời gian vòi I chảy đầy bể một mình là x , một giờ chảy được $\frac{1}{x}$ phần bể, vòi II chảy được $\frac{2}{5} - \frac{1}{x}$ phần bể.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{3}{x} = 2 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{Giải phương trình được } x = \frac{25}{4}.$$

Câu 21: Nếu mở cả hai vòi chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là hai giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu thì đầy bể?

Lời giải

Gọi thời gian vòi một chảy một mình đầy bể là x , thời gian vòi hai chảy một mình đầy bể là $x+2$

2 giờ 55 phút = $\frac{35}{12}$ giờ. Trong một giờ cả hai vòi chảy được $\frac{12}{35}$.

Trong một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$, vòi hai chảy được $\frac{1}{x+2}$.

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35}$.

Hay $6x^2 - 23x - 35 = 0$, giải ra ta được $x = 5$ $x = -\frac{7}{6}$

Trả lời: Vòi thứ nhất chảy một mình trong 5 giờ thì đầy bể, còn vòi thứ hai chảy trong 7 giờ thì đầy bể.

Câu 22: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2h 55' thì đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là hai giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x ($x > 2h55'$, giờ), vòi hai chảy một mình hết $x+2$ giờ, trong một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x+2}$ bể.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35} \Leftrightarrow 12x^2 - 46x - 70 = 0 \Rightarrow x = 5(tm)$.

Vậy chảy một mình vòi thứ nhất chảy hết 5 giờ, vòi thứ hai chảy hết 7 giờ.

Câu 23: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 3 giờ đầy bể. Nếu để vòi một chảy trong 20 phút khóa lại rồi mở tiếp vòi hai trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{8}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải

Gọi thời gian vòi một chảy một mình đầy bể là x ($x > 3$, giờ) trong một giờ vòi một chảy được $\frac{1}{x}$ bể, cả hai vòi chảy được $\frac{1}{3}$ bể, vòi hai chảy được $\frac{1}{3} - \frac{1}{x}$. Trong 20 phút vòi một chảy được

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$ phần bể, trong 30 phút vòi hai chảy được $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} \right)$ bể. Theo bài ra ta có phương trình:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{8}$ giải ra $x = 4$. Vậy chảy một mình vòi một chảy trong 4 giờ thì đầy bể, vòi hai chảy trong 12 giờ thì đầy bể.

Câu 24: Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 24 giờ. Nếu đội thứ nhất làm trong 10 giờ đội thứ hai làm trong 15 giờ thì cả hai đội làm được một nửa công việc. Tính thời gian mỗi đội làm một mình để xong công việc.

Lời giải

Gọi thời gian đội một hoàn thành công việc một mình là x , thì trong một giờ đội một làm được $\frac{1}{x}$ công việc, cả hai đội làm được $\frac{1}{24}$ công việc, và đội hai làm được $\frac{1}{24} - \frac{1}{x}$ công việc.

Trong 10 giờ đội một làm được $10 \cdot \frac{1}{x}$ công việc, trong 15 giờ đội hai làm được

$15 \cdot \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{x} \right)$ công việc, cả hai đội làm được $\frac{1}{2}$ Công việc, nên theo bài ra ta có phương trình:

$10 \cdot \frac{1}{x} + 15 \cdot \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$. Giải ra ta được $x = 40$, vậy để làm một mình đội một hoàn thành

công việc trong 40 giờ, đội hai hoàn thành công việc trong 60 giờ.

Câu 25: Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc. Thời gian để đội I hoàn thành công việc ít hơn thời gian để đội II hoàn thành công việc đó là 4 giờ. Tổng hai thời gian này gấp 4 lần thời gian hai đội cùng làm chung để xong công việc đó. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội phải mất bao lâu mới xong.

Lời giải

Gọi thời gian đội I hoàn thành công việc một mình là x , đội II hoàn thành công việc là $x + 4$.

Trong một giờ hai đội làm chung được $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}$ công việc.

Thời gian để hai đội làm chung xong công việc là $\frac{x(x+4)}{2x+4}$.

Ta có phương trình:

$$2x + 4 = \frac{9}{2} \cdot \frac{x(x+4)}{2x+4} \text{ hay } x^2 + 4x - 32 = 0;$$

Giải phương trình được $x_1 = -8$; $x_2 = 4$

Câu 26: Hai đội công nhân cùng làm một quãng đường thì 12 ngày xong việc. Nếu một đội làm một mình hết nửa công việc rồi đội thứ hai tiếp tục một mình làm nốt phần việc còn lại thì hết tất cả 25 ngày. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong việc.

Lời giải

Gọi thời gian đội thứ nhất làm xong nửa công việc là x , $2x > 12$ và $x < 25$ hay $6 < x < 25$.

Thời gian đội thứ hai làm xong nửa công việc là $25 - x$.

Trong 1 ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{2x}$; đội thứ hai làm được $\frac{1}{2(25-x)}$.

Trong 1 ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$.

Ta có phương trình: $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(25-x)} = \frac{1}{12}$ hay $x^2 - 25x + 150 = 0$.

Giải ra ta được $x_1 = 15$; $x_2 = 10$. Vậy nếu đội I hoàn thành công việc trong 20 ngày thì đội II trong 30 ngày và ngược lại.

Câu 27: Hai người cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình công việc ấy thì tổng số thời gian làm việc của hai người là 25 giờ. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc.

Lời giải

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là x . Khi đó thời gian làm một mình xong việc của người thứ hai là $25 - x$. Trong một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$. Người thứ hai làm được $\frac{1}{25 - x}$, hai người làm chung được $\frac{1}{6}$. Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{25 - x} = \frac{1}{6}$ giải ra ta được $x_1 = 15$; $x_2 = 10$.

Trả lời: Làm một mình người thứ nhất hết 15 giờ thì xong việc, người thứ hai làm một mình xong việc hết 10 giờ. Và ngược lại.

Câu 28: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch là 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu.

Lời giải

Gọi x là số sản phẩm tổ I hoàn thành theo kế hoạch, đk $0 < x < 600$.

Số sản phẩm tổ II hoàn thành theo kế hoạch là $600 - x$.

Số sản phẩm vượt mức của tổ I là $x \cdot \frac{18}{100}$.

Số sản phẩm vượt mức của tổ II là $(600 - x) \cdot \frac{21}{100}$.

Vì số sản phẩm vượt mức kế hoạch của hai tổ là 120 sản phẩm ta có pt

$$\frac{18x}{100} + \frac{21(600 - x)}{100} = 120 \Leftrightarrow x = 200$$

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ I là 200

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ II là 400

Câu 29: Người ta trộn 8g chất lỏng này với 6g chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn nó là $0,2\text{g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng $0,7\text{g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Lời giải

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là x . Đk $x > 0,2$

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $x - 0,2$.

Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\frac{8}{x}(\text{cm}^3)$

Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\frac{6}{x - 0,2}(\text{cm}^3)$

Thể tích của hỗn hợp là $\frac{8}{x} + \frac{6}{x - 0,2}(\text{cm}^3)$

Theo bài ra ta có pt $\frac{8}{x} + \frac{6}{x - 0,2} = \frac{14}{0,7} \Leftrightarrow 14x^2 - 12,6x + 1,2 = 0$. Giải pt ta được kết quả

$$x_1 = 0,1; x_2 = 0,8$$

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là 0,8

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là 0,6.

Bài toán 5: Các bài toán thuộc thể loại khác

1. Các lưu ý thêm:

- Toán nồng độ dung dịch: Biết rằng m lít chất tan trong M lít dung dịch thì nồng độ phần trăm là $\frac{m}{M} \cdot 100\%$
- Toán nhiệt lượng:
 - + m Kg nước giảm $t^{\circ}\text{C}$ thì toả ra một nhiệt lượng $Q = m \cdot t$.
 - + m Kg nước tăng $t^{\circ}\text{C}$ thì thu vào một nhiệt lượng $Q = m \cdot t$.
- Toán lãi suất: $A_n = A(1+r)^n$ với A_n : vốn sau n chu kỳ; A : vốn ban đầu; n số chu kỳ

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Một phòng học có 10 băng ghế. Học sinh của lớp 9A được sắp xếp chỗ ngồi đều nhau trên mỗi băng ghế. Nếu bớt đi 2 băng ghế, thì mỗi băng ghế phải bố trí thêm một học sinh ngồi nữa mới đảm bảo chỗ ngồi cho tất cả học sinh của lớp. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh.

Lời giải

Gọi số học sinh lớp 9A là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Nếu có 10 băng ghế thì mỗi băng có số học sinh là $\frac{x}{10}$

Nếu bớt đi 2 băng ghế, còn 8 băng thì mỗi băng có số học sinh là $\frac{x}{8}$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{8} - \frac{x}{10} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right)x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{40}x = 1 \Leftrightarrow x = 40.$$

Vậy lớp 9A có 40 học sinh.

Câu 2: Ông Sáu gửi một số tiền vào ngân hàng theo mức lãi suất tiết kiệm với kỳ hạn 1 năm là 6%. Tuy nhiên sau thời hạn một năm ông Sáu không đến nhận tiền lãi mà để thêm một năm nữa mới lãnh. Khi đó số tiền lãi có được sau năm đầu tiên sẽ được ngân hàng cộng dồn vào số tiền gửi ban đầu để thành số tiền gửi cho năm kế tiếp với mức lãi suất cũ. Sau 2 năm ông Sáu nhận được số tiền là 112.360.000 đồng. Hỏi ban đầu ông Sáu đã gửi bao nhiêu tiền?

Lời giải

Gọi số tiền ông Sáu gửi ban đầu là x .

Theo đề bài ta có:

Số tiền lãi sau 1 năm ông Sáu nhận được là: $0,06x$.

Số tiền có được sau 1 năm của ông Sáu là: $x + 0,06x = 1,06x$.

Số tiền lãi năm thứ 2 ông Sáu nhận được là: $1,06x \cdot 0,06 = 0,0636x$.

Do vậy số tiền tổng cộng sau 2 năm ông Sáu nhận được là: $1,06x + 0,0636x = 1,1236x$.

Mặt khác: $1,1236x = 112360000$ nên $x = 100000000$ hay 100 triệu đồng.

Vậy ban đầu ông Sáu đã gửi 100 triệu đồng.

Câu 3: Một bác nông dân đem trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau:

Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại

...

Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. nhưng thật thú vị, số trứng bán được trong mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng bán được là bao nhiêu và bán hết trong bao nhiêu ngày?

Lời giải

Gọi x là số trứng bán được ($x \in N^*$) thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là: $8 + \frac{x-8}{8}$.

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là: $16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}$.

Theo đề toán ta có phương trình: $8 + \frac{x-8}{8} = 16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}$.

Giải phương trình ta được $x = 392$.

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng.

Số trứng bán được trong mỗi ngày là $8 + \frac{x-8}{8} = 56$.

Số ngày là $392:56=7$ ngày.

Câu 4: Số tiền mua 1 quả dưa và một quả thanh long là 25 nghìn đồng. Số tiền mua 5 quả dưa và 4 quả thanh long là 120 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi quả dưa và giá mỗi quả thanh long là bao nhiêu? Biết rằng mỗi quả dưa có giá như nhau và mỗi quả thanh long có giá như nhau.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là giá của 1 quả dưa và 1 quả thanh long.

Điều kiện: $0 < x; y < 25$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 5x + 4y = 120 \end{cases}$$

Giải ra ta được: $x = 20, y = 5$.

Vậy: Giá 1 quả dưa 20 nghìn.

Giá 1 quả thanh long 5 nghìn.

Câu 5: Năm học 2014 – 2015 hai trường A và B có tổng số 390 học sinh thi đỗ vào đại học đạt tỉ lệ 78%, biết trường A có tỉ lệ đỗ đại học là 75%, trường B có tỉ lệ đỗ đại học là 80%. Tính số học sinh dự thi đại học năm học 2014 – 2015 ở mỗi trường.

Lời giải

Gọi số học sinh dự thi đại học ở trường A và trường B lần lượt là x và y ($x, y \in N^*$).

Tổng số học sinh 2 trường thi đỗ là 390 và tỉ lệ đỗ đại học của cả hai trường là 78% $\Rightarrow$ Số học sinh dự thi đại học của cả hai trường là $390:78\% = 500$

Suy ra $x + y = 500$

Tỉ lệ đỗ đại học của trường A là 75% $\Rightarrow$ Trường A có $0,75x$ học sinh đỗ đại học

Tỉ lệ đỗ đại học của trường B là 80% $\Rightarrow$ Trường B có $0,8x$ học sinh đỗ đại học

Suy ra $0,75x + 0,8y = 390$

Từ và giải hệ phương trình ta có $x = 200; y = 300$.

Vậy số học sinh dự thi đại học ở trường A và trường B lần lượt là 200 và 300 học sinh.

Câu 6: Khi thêm 200g Axít vào dung dịch Axít thì dung dịch mới có nồng độ A xít là 50%. Lại thêm 300gam nước vào dung dịch mới,ta được dung dịch A xít có nồng độ là 40%. Tính nồng độ A xít trong dung dịch đầu tiên.

Lời giải

Khối lượng nước trong dung dịch đầu tiên là x gam, khối lượng A xít trong dung dịch đầu tiên là y gam Sau khi thêm, 200 gam A xít vào dung dịch A xít ta có lượng A xít là: gam và nồng độ là 50% Do đó ta có: $\frac{y+200}{y+200+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-y=200$

Sau khi thêm 300 gam nước vào dung dịch thì khối lượng nước là: gam và nồng độ là 40% nên ta có: $\frac{y+200}{y+200+x+300} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2x-3y=0$

Giải hệ và ta được $x=600$; $y=400$ Vậy nồng độ A xít là: $\frac{400}{600+400} = 40\%$

Câu 7: Có hai can đựng dầu, can thứ nhất đang chứa 38 lít và can thứ hai đang chứa 22 lít. Nếu rót từ can thứ nhất sang cho đầy can thứ hai thì lượng dầu trong can thứ nhất chỉ còn lại một nửa thể tích của nó. Nếu rót từ can thứ hai sang cho đầy can thứ nhất thì lượng dầu trong can thứ hai chỉ còn lại một phần ba thể tích của nó. Tính thể tích của mỗi can.

Lời giải

Gọi thể tích của can thứ nhất và can thứ hai lần lượt là x và y ($x > 38$, $y > 22$).

Rót từ can 1 sang cho đầy can 2, thì lượng rót là $y-22$, nên can 1 còn $38-(y-22)=60-y$, bằng 1 nửa thể tích can 1 do đó $x=2(60-y) \Leftrightarrow x+2y=120$

Rót từ can 2 sang cho đầy can 1, thì lượng rót là $x-38$, nên can 2 còn $22-(x-38)=60-x$, bằng một phần ba thể tích can 2 do đó $y=3(60-x) \Leftrightarrow 3x+y=180$

Từ và, giải hệ ta có $x=48$; $y=36$

Vậy thể tích của can thứ nhất và can thứ hai lần lượt là 48 lít và 36 lít.

Vậy số học sinh lớp 9A và 9B lần lượt là 40 và 42.

.

Câu 8: Trong đợt quyên góp ủng hộ người nghèo, lớp 9A và 9B có 79 học sinh quyên góp được 975000 đồng. Mỗi học sinh lớp 9A đóng góp 10000 đồng, mỗi học sinh lớp 9B đóng góp 15000 đồng. Tính số học sinh mỗi lớp.

Lời giải

Gọi x là số học sinh lớp 9A ($x \in \mathbb{N}^*$ và $x < 79$).

$\Rightarrow$ Số học sinh lớp 9B là: $79-x$

Lớp 9A quyên góp được: $10000x$

Lớp 9B quyên góp được: $15000(79-x)$

Do cả hai lớp quyên góp được 975000 đồng nên ta có phương trình:

$10000x + 15000(79-x) = 975000 \Leftrightarrow 10x + 15(79-x) = 975 - 5x = -210x = 42$

Vậy lớp 9A có 42 học sinh; lớp 9B có: $79-42=37$.

Câu 9: Phải dùng bao nhiêu lít nước sôi 100°C và bao nhiêu lít nước lạnh 20°C để có hỗn hợp 100 lít nước ở nhiệt độ 40°C .

Lời giải

Gọi khối lượng nước sôi là x Kg thì khối lượng nước lạnh là: $100-x$

Nhiệt lượng nước sôi tỏa ra khi hạ xuống đến 40°C là: $x(100-40)=60x$

Nhiệt lượng nước lạnh tăng từ 20^0C đến 40^0C là: $(100 - x).20$

Vì nhiệt lượng thu vào bằng nhiệt lượng toả ra nên ta có: $60x = (100 - x).20$.

Giải ra ta có: $x = 25$. Vậy khối lượng nước sôi là 25 Kg; nước lạnh là 75 Kg tương đương với 25 lít và 75 lít.

Câu 10: Tìm hai số biết tổng bằng 19 và tổng các bình phương của chúng bằng 185

Lời giải

Gọi số thứ nhất là x , ($0 < x < 19$).

Ta có số thứ hai là $19 - x$.

Vì tổng các bình phương của chúng bằng 185 do đó ta có phương trình: $x^2 + (19 - x)^2 = 185$

Giải phương trình ta được $x^2 + (19 - x)^2 = 185 \Leftrightarrow x^2 - 19x + 88 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = 9 \end{cases}$.

Vậy hai số phải tìm là 11 và 9.

Câu 11: Một phòng họp có 360 Ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số Ghế của từng dãy đều như nhau. Nếu số dãy tăng thêm 1 và số Ghế của mỗi dãy tăng thêm 1, thì trong phòng có 400 Ghế. Hỏi trong phòng họp có bao nhiêu dãy Ghế, mỗi dãy có bao nhiêu ghế.

Lời giải

Gọi số dãy của ghế của phòng học là x , x nguyên dương.

Ta có số người của từng dãy là: $\frac{360}{x}$ người.

Số dãy ghế sau khi tăng thêm 1 dãy là: $(x + 1)$.

Số người sau khi tăng thêm 1 người trên dãy là: $\frac{360}{x} + 1$.

Vì sau khi tăng số dãy tăng thêm 1 và số ghế của mỗi dãy tăng thêm 1, thì trong phòng có 400 Ghế do đó ta có phương trình: $(x + 1)(\frac{360}{x} + 1) = 400$; Giải PTBH ta được: $x_1 = 15$, $x_2 = 24$.

Vậy nếu số dãy là 15 thì số ghế trên dãy là 24....

Câu 12: Một đội máy kéo dự định mỗi ngày cày 40 ha. Khi thực hiện mỗi ngày cày được 52 ha, vì vậy đội không những cày xong trước thời hạn 2 ngày mà còn cày thêm được 4 ha nữa. Tính diện tích thửa ruộng mà đội phải cày theo kế hoạch.

Lời giải

Gọi diện tích mà đội phải cày theo kế hoạch là x , ($x > 0$).

Thời gian đội dự định cày là: $\frac{x}{40}$.

Diện tích mà đội thực cày là: $(x + 4)$.

Thời gian mà đội thực cày là: $\frac{x + 4}{52}$.

Vì khi thực hiện đội đã cày xong trước thời hạn 2 ngày do đó ta có phương trình:

$$\frac{x}{40} - \frac{x + 4}{52} = 2.$$

Giải PTBN ta được $x = 360$. Vậy diện tích mà đội dự định cày theo kế hoạch là: 360 ha.

Câu 13: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch là 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu.

Lời giải

Gọi x là số sản phẩm tổ I hoàn thành theo kế hoạch, đk $0 < x < 600$.

Số sản phẩm tổ II hoàn thành theo kế hoạch là $600 - x$.

Số sản phẩm vượt mức của tổ I là $x \cdot \frac{18}{100}$.

Số sản phẩm vượt mức của tổ II là $(600 - x) \cdot \frac{21}{100}$.

Vì số sản phẩm vượt mức kế hoạch của hai tổ là 120 sản phẩm ta có pt

$$\frac{18x}{100} + \frac{21(600 - x)}{100} = 120 \Leftrightarrow x = 200$$

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ I là 200

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ II là 400

CHUYÊN ĐỀ 5_HÀM SỐ BẬC HAI VÀ CÁC CÂU TOÁN TƯƠNG GIAO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

DẠNG 1: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC PARABOL, TÌM TỌA ĐỘ TIẾP ĐIỂM

Giả sử đường thẳng là $d: y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 (*)$$

Bước 2 Lập luận: d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) thì tìm được tham số.

Bước 3 Thay giá trị tham số tìm được vào phương trình $(*)$ ta tìm được x , thay x vừa tìm vào $y = ax^2$ hoặc $y = mx + n$ thì tìm được y và kết luận.

DẠNG 2: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI x_A VÀ x_B

Giả sử đường thẳng $d: y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 (*)$$

Bước 2 Tìm điều kiện để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).

Bước 3 Biến đổi biểu thức đối xứng với x_A, x_B về $x_A + x_B; x_A \cdot x_B$ rồi sử dụng định lý Viét với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Một số điều kiện và phép biến đổi cần nhớ

- ☐ Hai điểm A và B nằm bên phải trục Oy khi x_A, x_B cùng dương.
- ☐ Hai điểm A và B nằm bên trái trục Oy khi x_A, x_B cùng âm.
- ☐ Hai điểm A và B nằm cùng một phía trục Oy khi x_A, x_B cùng dấu.
- ☐ Hai điểm A và B nằm về hai phía trục Oy khi x_A, x_B trái dấu.
- ☐ Công thức tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B

Cách 1 Tính theo (P) : vì $A, B \in (P): y = ax^2$ nên $y_A = ax_A^2; y_B = ax_B^2$.

Cách 2 Tính theo d : vì $A, B \in d: y = mx + n$ nên $y_A = mx_A + n; y_B = mx_B + n$

Giả sử $x_A = x_1; x_B = x_2$

- ☐ Gặp $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- ☐ Gặp $|x_1 - x_2|$ thì xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- ☐ Gặp $|x_1| + |x_2|$ thì xét $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1||x_2| = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 + 2|x_1x_2| - 2x_1x_2$
- ☐ Gặp $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ thì cần thêm điều kiện phụ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} \geq 0 \\ \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$

- Gặp x_1, x_2 là độ dài hai cạnh tam giác ta cần thêm điều kiện phụ $x_1, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$
- Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

DẠNG 3: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI x_A VÀ x_B

Cách 1 Kết hợp điều kiện của bài toán với $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ để giải x_1, x_2 theo tham số rồi thay x_1, x_2 vừa giải được vào $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Cách 2 Nếu tính Δ hoặc Δ' mà ra một biểu thức bình phương thì ta tìm hai nghiệm đó và phải xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

DẠNG 4: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B LIÊN QUAN ĐẾN TUNG ĐỘ A, B.

Dạng này ta cần tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B theo một trong hai cách:

Cách 1: Tính theo (P): Vì $A, B \in (P): y = ax^2$ nên $y_A = ax_A^2, y_B = ax_B^2$

Cách 2: Tính theo d: Vì $A, B \in d: y = mx + n$ nên $y_A = mx_A + n, y_B = mx_B + n$

DẠNG 5: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH

Ghi nhớ một số công thức về khoảng cách

- Khoảng cách từ gốc tọa độ đến một điểm

+) Nếu $A(a; 0) \in Ox$ thì $OA = |x_A| = |a|$.

+) Nếu $B(0; b) \in Oy$ thì $OB = |y_B| = |b|$.

+) Nếu $M(a; b)$ bất kì thì $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

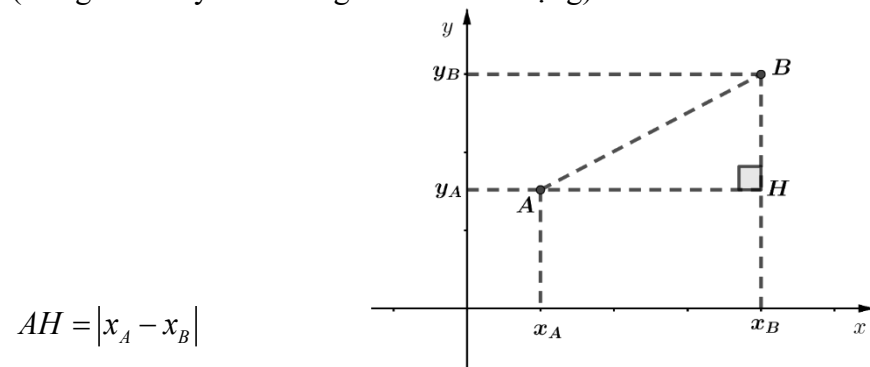
- Khoảng cách giữa hai điểm trên cùng một trục Ox hoặc Oy

+) Nếu $A, B \in Ox$ (hoặc $AB \parallel Ox$) thì $AB = |x_A - x_B|$.

+) Nếu $M, N \in Oy$ (hoặc $MN \parallel Oy$) thì $MN = |y_M - y_N|$.

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ bất kỳ

(Công thức này cần chứng minh khi sử dụng)

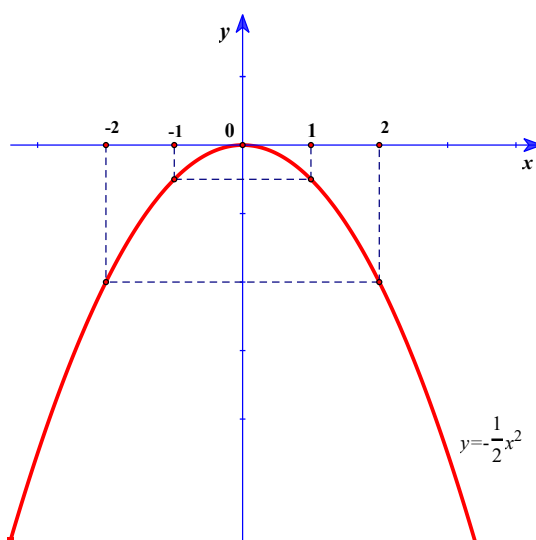


$$BH = |y_A - y_B|$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

- Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = 2x^2$. Vẽ đồ thị parabol (P) .
- Câu 2:** Tìm tọa độ điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$, biết hoành độ của điểm A bằng 2.
- Câu 3:** Biết đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}ax^2$, ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(3; -6)$. Hãy xác định giá trị của a .
- Câu 4:** Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) . Tìm trên (P) các điểm có tung độ bằng 4, vẽ đồ thị (P) .
- Câu 5:** Xác định tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $P(1; -2)$.
- Câu 6:** Tìm hàm số $y = ax^2$, biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(-1; 2)$. Với hàm số tìm được hãy tìm các điểm trên đồ thị có tung độ là 8.
- Câu 7:** Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$
- Câu 8:** Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng $y = 2$.
- Câu 9:** Biết đường cong trong Hình 1 là một parabol $y = ax^2$. Tính hệ số a và tìm tọa độ các điểm thuộc parabol có tung độ $y = -9$.



Hình 1

- Câu 10:** Cho parabol $(P): y = ax^2$. Tìm a biết rằng parabol (P) đi qua điểm $A(3; -3)$. Vẽ (P) với a vừa tìm được.
- Câu 11:** Xác định hàm số $y = (a+1)x^2$, biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -2)$.

Câu 12: Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = 2x^2$ trên hệ trục tọa độ. Tìm giao điểm của $(P): y = 2x^2$ với $(d): y = -x + 3$ bằng phép tính.

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = -\frac{1}{4}x^2$

a) Vẽ đồ thị của (P)

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) với đường thẳng $d: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Câu 14:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng $(D): y = \frac{x}{2} - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

Câu 15:

a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = 3x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Xác định tọa độ các giao điểm của hai đồ thị trên.

Câu 16: Cho hai hàm số $y = 2x + 3$ và $y = x^2$ có đồ thị lần lượt là (d) và (P)

j) Vẽ (d) và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

k) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) bằng phép toán.

Câu 17: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m - 1)x - m + 2$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

Câu 18: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 4x + 9$.

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) song song với đường thẳng (d) và (d_1) tiếp xúc (P) .

Câu 19: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 1$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một trục tọa độ.

b) Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d và đi qua $A(-1; 2)$.

Câu 20: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng

$$(d): y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

a) Vẽ đồ thị của (P) .

b) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ lần lượt là các giao điểm của (P) với (d) . Tính giá trị biểu thức $T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$.

Câu 21: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2ax - 4a$ (với a là tham số)

- Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $a = -\frac{1}{2}$.
- Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

Câu 22: Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = mx + 4$, với m là tham số.

- Khi $m = 3$, tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số trên.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị m , đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1)$ và $A_2(x_2; y_2)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $(y_1)^2 + (y_2)^2 = 7^2$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là $x_A = -1, x_B = 2$.

- Tìm tọa độ của hai điểm A, B .
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B .
- Tính khoảng cách từ điểm O (gốc tọa độ) tới đường thẳng (d) .

Câu 24: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = -x + 2$ có đồ thị là (d) .

- Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) ; (hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B). Gọi C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành, tính diện tích của tứ giác $ABDC$.

Câu 25: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) .

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Cho đường thẳng $y = mx + n$ (Δ). Tìm m, n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y = -2x + 5$ (d) và có duy nhất một điểm chung với đồ thị (P) .

Câu 26: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 1$.

- Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Bằng phép tính, xác định tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số: $y = \frac{1}{4}x^2$

b) Cho đường thẳng $(D): y = \frac{3}{2}x + m$ đi qua điểm $C(6;7)$. Tìm tọa độ giao điểm của (D) và (P) .

Câu 28: Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = x + 2$ và parabol (P) có phương trình $y = x^2$.

- Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .
- Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm A và B (với A có hoành độ âm, B có hoành độ dương). Bằng tính toán hãy tìm tọa độ các điểm A và B .

Câu 29: Cho hai hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và đồ thị hàm số (P) và $y = x + 4$ có đồ thị (d)

- Vẽ đồ thị (P) .
- Gọi A, B là các giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) . Biết rằng đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét, tìm tất cả các điểm M trên tia Ox sao cho diện tích tam giác MAB bằng 30 cm^2 .

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = 3x + m - 1$ và parabol $(P): y = x^2$

- Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .
- Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm m để a) $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - 3$

- Vẽ đồ thị Parabol (P) .
- Bằng phương pháp đại số, hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .
- Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d) và có điểm chung với parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 .

Câu 32:

- Vẽ đồ thị (P) hàm số $y = \frac{x^2}{4}$
- Xác định a, b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua gốc tọa độ và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng -3 .

Câu 33:

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$.
- Chứng minh rằng đường thẳng $(d) y = kx + 1$ luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt với mọi k .

Câu 34: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P)

- Vẽ đồ thị (P) .
- Cho các hàm số $y = x + 2$ và $y = -x + m$ (với m là tham số) lần lượt có đồ thị là (d) và (d_m) .
Tìm tất cả các giá trị của m để trên một mặt phẳng tọa độ các đồ thị của $(P), (d)$ và (d_m) cùng đi qua một điểm.

Câu 35: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = -x^2$

a) Vẽ parabol (P) .

b) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y = -x - 2$ và (P) . Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M .

Câu 36: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(a): y = -2x + 1$

c) Vẽ (P) và a trên cùng một hệ trục tọa độ.

d) Xác định đường thẳng (d) biết đường thẳng (d) song song với đường thẳng (a) và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -2 .

Câu 37: Cho các hàm số $(P): y = -x^2$ và $(d): y = 2x - 3$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên bằng phép tính.

c) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$, biết rằng (d_1) song song với (d) và (d_1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 .

Câu 38: Cho parabol $(P): y = x^2$ và điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là $-1; 2$. Đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + n$.

e) Tìm tọa độ điểm A, B . Tìm m, n biết (d) đi qua điểm A và B .

f) Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB (điểm O là gốc tọa độ).

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = x + m - 1$ và parabol $(P): y = x^2$

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(0; 1)$

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1,$

$$x_2 \text{ thỏa mãn: } 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0.$$

Câu 40: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$

g) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

h) Bằng phép tính, xác định tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) .

i) Tìm tọa độ điểm M trên cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất.

Câu 41: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx - 3$ (với m là tham số).

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 3)$.

b) Xác định các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho tổng 2 tung độ của hai giao điểm đó bằng -10 .

Câu 42: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x + 5 - 2m$ (m là tham số)

l) Vẽ đồ thị parabol (P) .

m) Biết đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là x_1, x_2 . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Câu 43: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y = 2(m+1)x - 3m + 2$

- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) với $m = 3$.
- Chứng minh (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B với mọi m .
- Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của A và B . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Câu 44: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là Parabol (P)

- Vẽ đồ thị hàm số đã cho trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm nằm trên Parabol (P) có hoành độ $x = 2$ và có hệ số góc k . Với giá trị k nào thì (d) tiếp xúc (P) ?

Câu 45: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$.

- Vẽ đồ thị của (P) .
- Gọi $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ là hoành độ giao điểm của (P) và $(d): y = x - 4$. Chứng minh:
$$y_1 + y_2 - 5(x_1 + x_2) = 0$$

Câu 46: Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = 3x + 2$.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Viết phương trình đường thẳng d' vuông góc với đường thẳng d và tiếp xúc với (P) .

Câu 47: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = 4x + m$ có đồ thị (d_m)

- Vẽ đồ thị (P) .
- Tìm tất cả các giá trị của m sao cho (d_m) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt, trong đó tung độ của một trong hai giao điểm đó bằng 1.

Câu 48: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y = -2x + m$ (với m là tham số).

- Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ là 2.
- Tìm giá trị của m để (d) cắt tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức
$$x_1^2 + x_2^2 = 6x_1^2 x_2^2$$
.

Câu 49: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $(P): y = x^2$.

- Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .
- Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB .

Câu 50:

- Vẽ đồ thị hai hàm số: $y = x^2$ và $y = x + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .
- Xác định đường thẳng $y = ax + b$ biết rằng đường thẳng này song song với đường thẳng $y = -3x + 5$ và cắt Parabol $y = 2x^2$ tại điểm A có hoành độ bằng -1 .

Câu 51: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

- Hãy vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .
- Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$. Biết rằng (d_1) song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ là 2.

Câu 52: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m+3)x - 2m + 2$ (m là tham số).

- Với $m = -5$, tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) .
- Chứng minh rằng: với mọi m parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
Tìm m sao cho hai giao điểm đó có hoành độ dương.
- Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m .

Câu 53: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = mx - 3$ tham số m và Parabol $(P): y = x^2$.

- Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0)$.
- Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Câu 54: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y = mx + m - 3$

- Tìm a để đồ thị (P) đi qua điểm $B(2;-2)$.
- Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt C và D với mọi giá trị của m .
- Gọi x_C và x_D lần lượt là hoành độ của hai điểm C và D . Tìm các giá trị của m sao cho $x_C^2 + x_D^2 - 2x_Cx_D - 20 = 0$

Câu 55: Trong mặt phẳng tọa độ cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$

- Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) bằng phép tính.
- Tính độ dài đoạn AB .

Câu 56: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - m + 1$ (với m là tham số)

- Vẽ Parabol (P) .
- Tìm tất cả các giá trị của m để (P) cắt (d) có đúng một điểm chung.
- Tìm tọa độ các điểm thuộc (P) có hoành độ bằng hai lần tung độ.

Câu 57: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+3)x - m^2 - 3$. Tìm m để d tiếp xúc với (P) . Khi đó hãy tìm tọa độ tiếp điểm.

Câu 58: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + 3$.

- a) Tìm tọa độ các giao điểm A và B của d và (P) , trong đó A là điểm có hoành độ âm. Vẽ d và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB để $S_{\triangle ABC}$ lớn nhất.

Câu 59: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x - 2m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 60: Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng d đi qua $I(0; -1)$ hệ số góc k .

- a) Viết phương trình d theo k
- b) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt thuộc hai phía Oy .
- c) Gọi hoành độ A và B lần lượt là x_1 và x_2 . Chứng minh: $|x_1 - x_2| \geq 2$

Giả sử $x_1 < x_2$. Tìm m để $|x_1| > |x_2|$.

Câu 61: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và $d: y = mx - m + 1$. Tìm m để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$

Câu 62: Cho $(P): y = x^2$ và $d: y = 2(m-1)x + 3 - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$.

Câu 63: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 - 3x_2 = 5$

Câu 64: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn $d: y = 2(m+1) + 3$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1| + |x_2| = 5$.

Câu 65: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -4x + m^2 - 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$.

Câu 66: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m-1)x - m^2 + m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2}$.

Câu 67: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-3)x - m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Câu 68: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2 + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$

Câu 69: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m+1)x - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 70: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2 + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 > 4$

Câu 71: Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + m - 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ mà $x_1y_1 - x_2y_2 - x_1x_2 = -4$

Câu 72: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$.

- a) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai phía Oy .

- b) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính độ dài MN theo m và tìm m để $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN}$.
- c) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục tung. Tính độ dài đoạn HK theo m .
- d) Tính độ dài đoạn AB theo m và chứng minh $AB \geq \sqrt{m^2 + 8} \quad \forall m$.
- e) Tính diện tích ΔOAB theo m và tìm m để $S_{\Delta OAB} = 2m + 1$ (đvdt).
- f) Chứng minh với mọi m , ΔOAB không thể vuông tại O.

Câu 73: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2x + 3$.

- a) Tìm tọa độ giao điểm A, B của d và (P) với $x_A > 0$ và vẽ $d, (P)$.
- b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.
- c) Tìm tọa độ điểm $M \in Oy$ để $S_{MAB} = 4$ (đvdt).
- d) Cho điểm $E(3;0)$. Tìm tọa độ điểm $F \in (P)$ sao cho độ dài EF ngắn nhất.

CHUYÊN ĐỀ 5_HÀM SỐ BẬC HAI VÀ CÁC CÂU TOÁN TƯƠNG GIAO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

DẠNG 1: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC PARABOL, TÌM TỌA ĐỘ TIẾP ĐIỂM

Giả sử đường thẳng là $d: y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 (*)$$

Bước 2 Lập luận: d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) thì tìm được tham số.

Bước 3 Thay giá trị tham số tìm được vào phương trình $(*)$ ta tìm được x , thay x vừa tìm vào $y = ax^2$ hoặc $y = mx + n$ thì tìm được y và kết luận.

DẠNG 2: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI x_A VÀ x_B

Giả sử đường thẳng $d: y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 (*)$$

Bước 2 Tìm điều kiện để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).

Bước 3 Biến đổi biểu thức đối xứng với x_A, x_B về $x_A + x_B; x_A \cdot x_B$ rồi sử dụng định lý Viét với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Một số điều kiện và phép biến đổi cần nhớ

- Hai điểm A và B nằm bên phải trục Oy khi x_A, x_B cùng dương.
- Hai điểm A và B nằm bên trái trục Oy khi x_A, x_B cùng âm.
- Hai điểm A và B nằm cùng một phía trục Oy khi x_A, x_B cùng dấu.
- Hai điểm A và B nằm về hai phía trục Oy khi x_A, x_B trái dấu.
- Công thức tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B

Cách 1 Tính theo (P) : vì $A, B \in (P): y = ax^2$ nên $y_A = ax_A^2; y_B = ax_B^2$.

Cách 2 Tính theo d : vì $A, B \in d: y = mx + n$ nên $y_A = mx_A + n; y_B = mx_B + n$

Giả sử $x_A = x_1; x_B = x_2$

- Gặp $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- Gặp $|x_1 - x_2|$ thì xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- Gặp $|x_1| + |x_2|$ thì xét $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1||x_2| = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 + 2|x_1x_2| - 2x_1x_2$
- Gặp $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ thì cần thêm điều kiện phụ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} \geq 0 \\ \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$

- Gặp x_1, x_2 là độ dài hai cạnh tam giác ta cần thêm điều kiện phụ $x_1, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$
- Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

DẠNG 3: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI x_A VÀ x_B

Cách 1 Kết hợp điều kiện của bài toán với $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ để giải x_1, x_2 theo tham số rồi thay x_1, x_2 vừa giải được vào $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Cách 2 Nếu tính Δ hoặc Δ' mà ra một biểu thức bình phương thì ta tìm hai nghiệm đó và phải xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

DẠNG 4: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARAPOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B LIÊN QUAN ĐẾN TUNG ĐỘ A, B.

Dạng này ta cần tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B theo một trong hai cách:

Cách 1: Tính theo (P): Vì $A, B \in (P): y = ax^2$ nên $y_A = ax_A^2, y_B = ax_B^2$

Cách 2: Tính theo d: Vì $A, B \in d: y = mx + n$ nên $y_A = mx_A + n, y_B = mx_B + n$

DẠNG 5: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH

Ghi nhớ một số công thức về khoảng cách

- Khoảng cách từ gốc tọa độ đến một điểm

+) Nếu $A(a; 0) \in Ox$ thì $OA = |x_A| = |a|$.

+) Nếu $B(0; b) \in Oy$ thì $OB = |y_B| = |b|$.

+) Nếu $M(a; b)$ bất kì thì $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

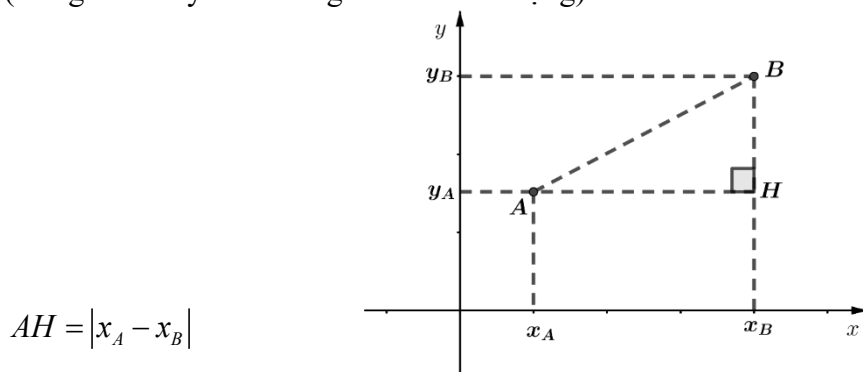
- Khoảng cách giữa hai điểm trên cùng một trục Ox hoặc Oy

+) Nếu $A, B \in Ox$ (hoặc $AB \parallel Ox$) thì $AB = |x_A - x_B|$.

+) Nếu $M, N \in Oy$ (hoặc $MN \parallel Oy$) thì $MN = |y_M - y_N|$.

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ bất kì

(Công thức này cần chứng minh khi sử dụng)



$$BH = |y_A - y_B|$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = 2x^2$. Vẽ đồ thị parabol (P) .

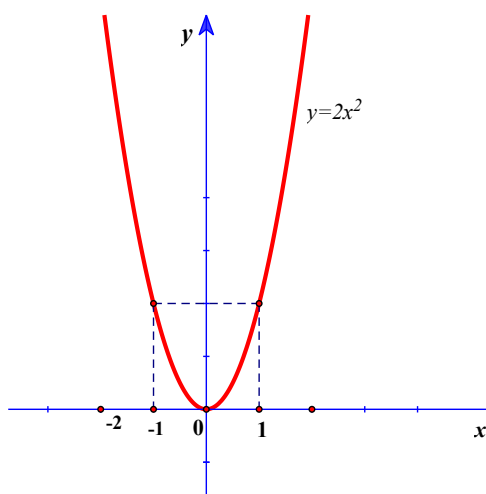
Lời giải

Vẽ Parabol $(P): y = 2x^2$

Bảng giá trị giữa x và y :

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Vẽ đúng đồ thị



Câu 2: Tìm tọa độ điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$, biết hoành độ của điểm A bằng 2.

Lời giải

Vì A có hoành độ bằng 2 và thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$ nên $y = 2.2^2 = 8$.

Vậy $A(2;8)$.

Câu 3: Biết đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}ax^2$, ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(3;-6)$. Hãy xác định giá trị của a .

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}ax^2$, ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(3;-6)$ khi $-6 = \frac{1}{3}a.3^2 \Leftrightarrow -6 = 3a \Leftrightarrow a = -2$

Vậy $a = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) . Tìm trên (P) các điểm có tung độ bằng 4, vẽ đồ thị (P) .

Lời giải

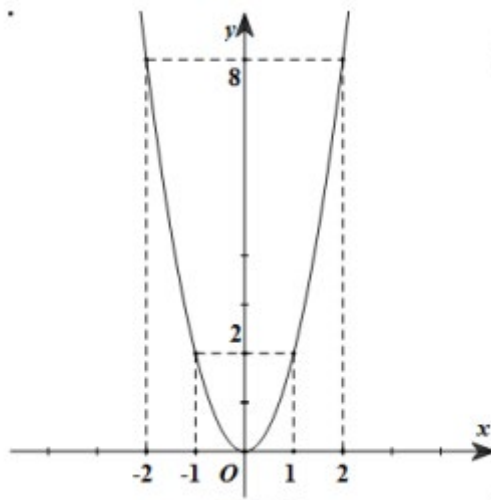
Thay $y = 4$ ta có $4 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Vậy các điểm cần tìm là $(\sqrt{2};4)$ và $(-\sqrt{2};4)$.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị



Câu 5: Xác định tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $P(1; -2)$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $P(1; -2)$ suy ra $-2 = m.1^2 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy $m = -2$.

Câu 6: Tìm hàm số $y = ax^2$, biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(-1; 2)$. Với hàm số tìm được hãy tìm các điểm trên đồ thị có tung độ là 8.

Lời giải

+ Ta có đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(-1; 2)$ nên ta có: $2 = a.(-1)^2 \Leftrightarrow a = 2$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x^2$.

+ Các điểm trên đồ thị có tung độ là 8.

Gọi điểm cần tìm là $M(x_0; y_0)$

Ta có: $y_0 = 8 \Rightarrow 8 = 2.x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

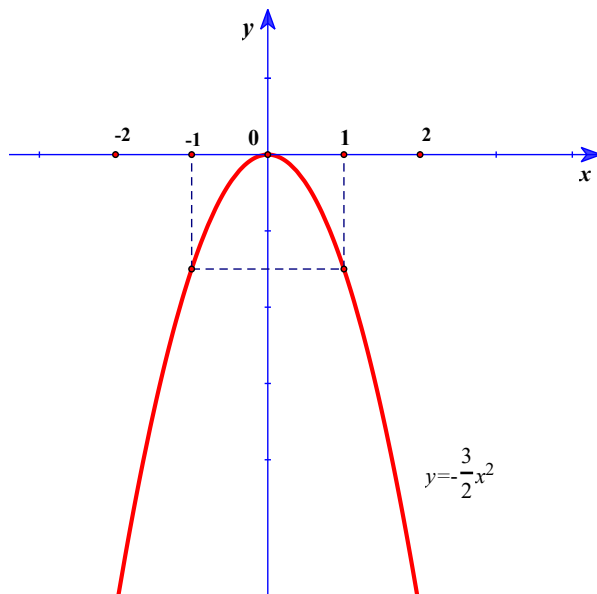
Vậy các điểm cần tìm trên đồ thị có tung độ là 8 là: $M(-2; 8); M(2; 8)$.

Câu 7: Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$

Lời giải

Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-1,5	0	-1,5	-6

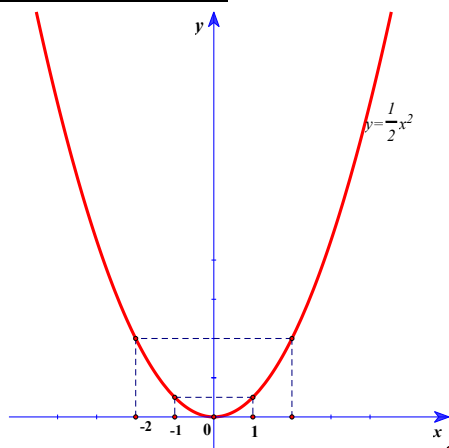


Câu 8: Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng $y = 2$.

Lời giải

Bảng giá trị:

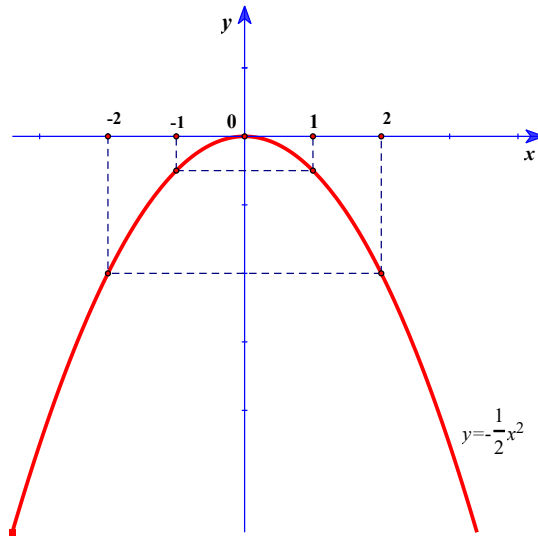
x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{x^2}{2}$	2	1/2	0	1/2	2



$$(P) \text{ cắt } (d) \text{ nên } \Rightarrow 2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

hay tọa độ giao điểm là $(-2; 2)$ và $(2; 2)$

Câu 9: Biết đường cong trong *Hình 1* là một parabol $y = ax^2$. Tính hệ số a và tìm tọa độ các điểm thuộc parabol có tung độ $y = -9$.



Hình 1

Lời giải

Từ Hình 1, ta có parabol $y = ax^2$ đi qua điểm $(2; -2)$

$$\text{nên } -2 = a.2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Gọi điểm trên parabol có tung độ $y = -9$ là $(x; -9)$,

$$\text{ta có: } -9 = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}.$$

Vậy có 2 điểm trên parabol có tung độ bằng -9

$$\text{là } (3\sqrt{2}; -9)$$

Câu 10: Cho parabol $(P): y = ax^2$. Tìm a biết rằng parabol (P) đi qua điểm $A(3; -3)$. Vẽ (P) với a vừa tìm được.

Lời giải

$$(P) \text{ đi qua điểm } A(3; -3) \text{ nên ta có } -3 = 3^2.a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } P = -\frac{1}{3}x^2.$$

Câu 11: Xác định hàm số $y = (a+1)x^2$, biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -2)$.

Lời giải

$$y = (a+1)x^2 \text{ đi qua điểm } A(1; -2) \text{ nên } -2 = (a+1)1^2 \Leftrightarrow a+1 = -2 \Leftrightarrow a = -3.$$

Câu 12: Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = 2x^2$ trên hệ trục tọa độ. Tìm giao điểm của $(P): y = 2x^2$ với $(d): y = -x + 3$ bằng phép tính.

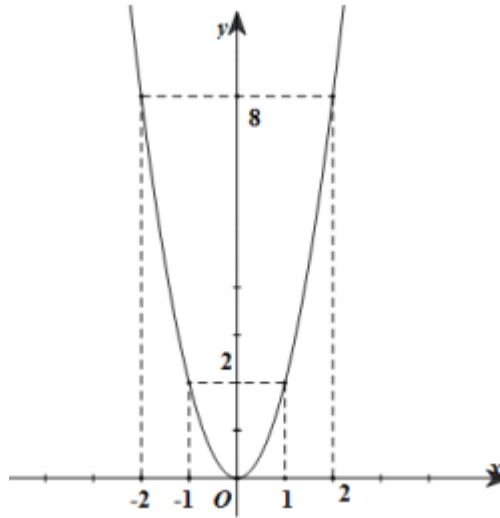
Lời giải

$$\text{Vẽ đồ thị } (P): y = 2x^2$$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Vẽ đồ thị:



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4.2.(-3) = 25 > 0$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-3}{2}; x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$

Hoặc học sinh có thể làm theo cách: ta có $a + b + c = 2 + 1 + (-3) = 0$

Với $x = 1$ ta có: $y = 2$

Với $x = \frac{-3}{2}$ ta có: $y = \frac{9}{2}$

Vậy tọa độ giao điểm là $(1; 2)$ và $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol (P) : $y = -\frac{1}{4}x^2$

a) Vẽ đồ thị của (P)

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) với đường thẳng d : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

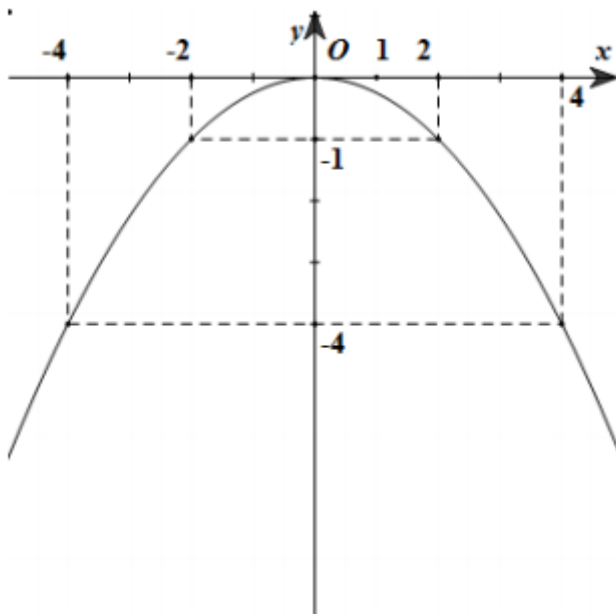
Lời giải

$$(P): y = -\frac{1}{4}x^2$$

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
y	-4	-1	0	-1	-4

Vẽ



Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng d là

$$-\frac{1}{4}x^2 = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Delta' = (-4)^2 - 3.4 = 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3} \\ x = \frac{4+2}{3} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \frac{2}{3} \text{ ta có } y = \frac{-1}{9} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{9}\right)$$

$$\text{Với } x = 2 \text{ ta có } y = -1 \Rightarrow B(2; -1)$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và là $A\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{9}\right)$ và $B(2; -1)$.

Câu 14:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng $(D): y = \frac{x}{2} - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

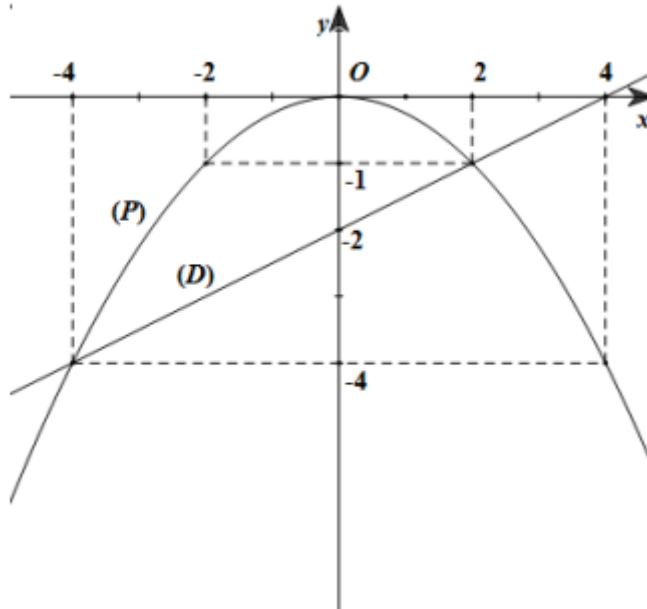
Lời giải

a) Vẽ đồ thị hai hàm số.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4
$y = \frac{x}{2} - 2$			-2		0

Đồ thị



b) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) bằng phép tính

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$\frac{-x^2}{4} = \frac{x}{2} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta' = 9$$

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 2; x_2 = -4$

Với $x_1 = 2$ ta có $y_1 = -1, A(2; -1)$

Với $x_2 = -4$ ta có $y_2 = -4, A(-4; -4)$

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(2; -1); B(-4; -4)$.

Câu 15:

a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = 3x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Xác định tọa độ các giao điểm của hai đồ thị trên.

Lời giải

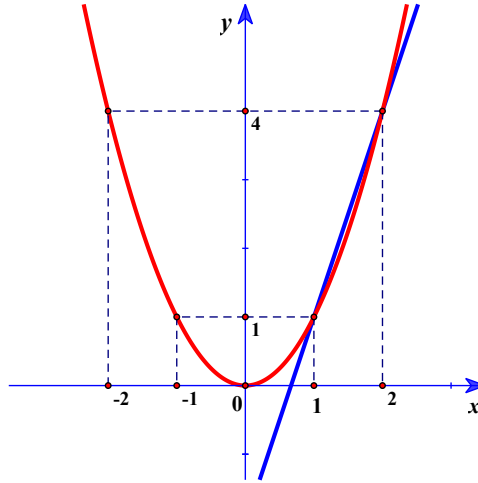
a) Vẽ đồ thị trên cùng một hệ trục

Vẽ $y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vẽ $y = 3x - 2$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -2$; cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$



b) *Tính tọa độ giao điểm*

Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
có $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2$

Tại $x = 1$ ta có $y = 1$, tọa độ thứ nhất là $(1; 1)$

Tại $x = 2$ ta có $y = 4$, tọa độ thứ 2 là $(2; 4)$

Câu 16: Cho hai hàm số $y = 2x + 3$ và $y = x^2$ có đồ thị lần lượt là (d) và (P)

j) Vẽ (d) và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

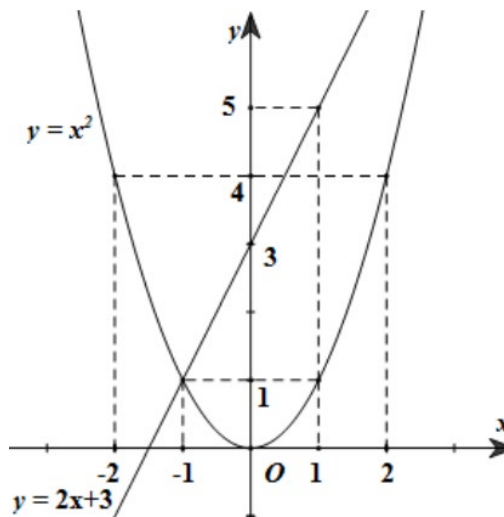
k) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) bằng phép toán.

Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x + 3$			3	5	
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$2x + 3 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 = 1$; với $x = 3 \Rightarrow y = 3^2 = 9$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $(-1;1)$ và $(3;9)$.

Câu 17: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m-1)x - m + 2$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = (2m-1)x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - (2m-1)x + m - 2 = 0(*)$

Ta có $\Delta = (2m-1)^2 - 4.1.(m-2) = 4m^2 - 8m + 9 = 4(m-1)^2 + 5 \geq 5 > 0$

Vậy Parabol luôn cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt.

b) Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}$. Mặt khác $\begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$.

Ta có $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 = 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ 4m^2 - 7m + 7 = 0 (vn) \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 4x + 9$.

a) Vẽ đồ thị (P) .

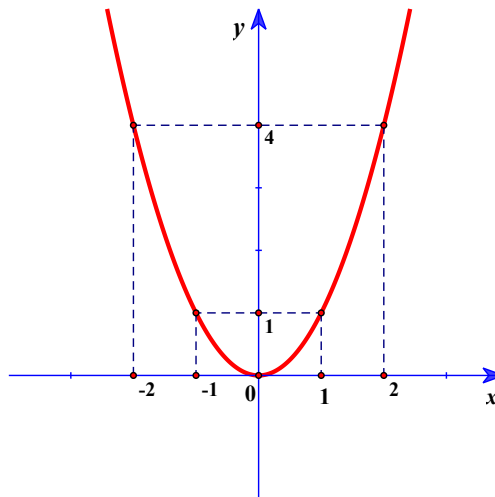
b) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) song song với đường thẳng (d) và (d_1) tiếp xúc (P) .

Lời giải

a) Vẽ đồ thị $(P): y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Ta có đồ thị hàm số



b) Gọi phương trình đường thẳng (d_1) có dạng: $y = ax + b$

Vì (d_1) song song với (d) nên ta có: $\begin{cases} a = 4 \\ b \neq 9 \end{cases} \Rightarrow (d_1): y = 4x + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_1) là:

$$x^2 = 4x + b \Leftrightarrow x^2 - 4x - b = 0 (*)$$

Vì (d_1) tiếp xúc với (P) nên $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 + b = 0 \Leftrightarrow b = -4 \text{ (tmđk)}$$

Vậy phương trình đường thẳng (d_1) là: $y = 4x - 4$.

Câu 19: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 1$.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một trục tọa độ.
- Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d và đi qua $A(-1; 2)$.

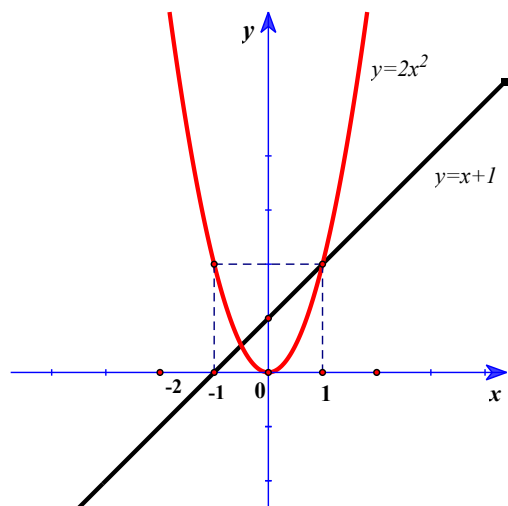
Lời giải

- Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 1$.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

x	0	-1
$y = x + 1$	1	0



- Phương trình đường thẳng d_1 song song với đường thẳng d có dạng $y = x + b$.

d_1 đi qua điểm $A(-1; 2)$ nên ta có $-1 + b = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow d_1: y = x + 3$.

Câu 20: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng

$$(d): y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

- Vẽ đồ thị của (P) .

- Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ lần lượt là các giao điểm của (P) với (d) . Tính giá trị biểu

thức $T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$.

Lời giải

a) HS tự vẽ.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(2;2) \\ x=-\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{9}{8} \Rightarrow B\left(\frac{-3}{2}; \frac{9}{8}\right) \end{cases} \cdot \text{Vậy } T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{2 + \left(-\frac{3}{2}\right)}{2 + \frac{9}{8}} = \frac{4}{25}.$$

Câu 21: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2ax - 4a$ (với a là tham số)

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $a = -\frac{1}{2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ (d) và (P) là $x^2 + 2ax + 4a = 0$

Khi $a = -\frac{1}{2}$ thì phương trình trở thành $x^2 - x - 2 = 0$

Có $a - b + c = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm là $x = -1$; $x = 2$.

b) Phương trình hoành độ (d) và (P) là $x^2 + 2ax + 4a = 0$ (*)

để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \Delta' = a(a - 4) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a < 0 \\ a > 4 \end{cases} \text{ theo Viét}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a \\ x_1 x_2 = 4a \end{cases}$$

$$|x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 9$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 8a + |8a| = 9$$

$$\text{Với } a < 0: 4a^2 - 8a + |8a| = 9 \Leftrightarrow 4a^2 - 16a - 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Với } a > 4: 4a^2 - 8a + |8a| = 9 \Leftrightarrow 4a^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \notin dk \\ a = \frac{-3}{2} \notin dk \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{1}{2}.$$

Câu 22: Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = mx + 4$, với m là tham số.

a) Khi $m = 3$, tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số trên.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị m , đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1)$ và $A_2(x_2; y_2)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $(y_1)^2 + (y_2)^2 = 7^2$.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2$ và $y = mx + 4$ là $x^2 - mx - 4 = 0$ (1)

Thay $m = 3$ vào phương trình (1) ta có: $x^2 - 3x - 4 = 0$

Ta có: $a - b + c = 1 - (-3) + (-4) = 0$

Vậy phương trình $x^2 - 3x - 4 = 0$ có hai nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$

Với $x = 4 \Rightarrow y = 16 \Rightarrow B(4; 16)$

Vậy với $m = 3$ thì hai đồ thị hàm số giao nhau tại 2 điểm $A(-1; 1)$ và $B(4; 16)$.

b) Ta có số giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là số nghiệm của phương trình (1)

Phương trình (1) có: $\Delta = m^2 - 4 \cdot (-4) = m^2 + 16 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$

Do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Vậy đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1)$ và $A_2(x_2; y_2)$ với mọi m .

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$

Ta lại có: $\begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$

Theo đề, ta có:

$$(y_1)^2 + (y_2)^2 = 7^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 + (x_2^2)^2 - 2(x_1^2 x_2^2) = 49$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2(x_1 x_2)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow [m^2 - 2 \cdot (-4)]^2 - 2(-4)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 8)^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 = 9 \\ m^2 + 8 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 8 = 9 \text{ (do } m^2 + 8 > 0 \forall m)$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy với $m = 1; m = -1$ thì $(y_1)^2 + (y_2)^2 = 7^2$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là $x_A = -1, x_B = 2$.

- Tìm tọa độ của hai điểm A, B .
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B .
- Tính khoảng cách từ điểm O (gốc tọa độ) tới đường thẳng (d) .

Lời giải

a) Vì A, B thuộc (P) nên:

$$x_A = -1 \Rightarrow y_A = \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_B = 2 \Rightarrow y_B = \frac{1}{2}2^2 = 2$$

$$\text{Vậy } A\left(-1; \frac{1}{2}\right), B(2; 2).$$

b) Gọi phương trình của đường thẳng d là $y = ax + b$.

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} -a + b = \frac{1}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } d: y = \frac{1}{2}x + 1.$$

c) d cắt trục Oy tại điểm $C(0; 1)$ và cắt trục Ox tại điểm $D(-2; 0) \Rightarrow OC = 1$ và $OD = 2$.

Gọi h là khoảng cách từ O tới d

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông OCD , ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 24: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = -x + 2$ có đồ thị là (d) .

- Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) ; (hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B). Gọi C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành, tính diện tích của tứ giác $ABDC$.

Lời giải

Phương trình hđgđ của (P) và (d) : $x^2 = -x + 2$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

$$\square x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

$$\square x = -2 \Rightarrow y = 4$$

$$\text{Vậy } A(-2; 4), B(1; 1).$$

$ABDC$ là hình thang vuông có 2 đáy $BD = |y_B| = 1; AC = |y_A| = 4$. Đường cao $CD = |x_B - x_A| = 3$.

$$\text{Vậy } S_{ABDC} = \frac{1}{2}(1 + 4) \cdot 3 = 7,5 \text{ (đvdt)}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) .

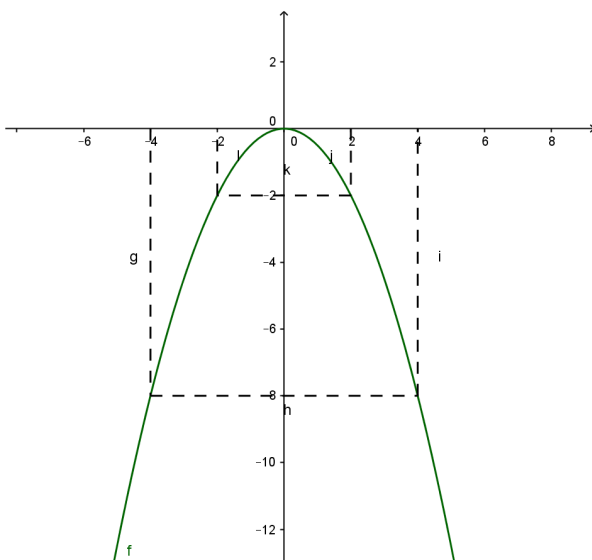
a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Cho đường thẳng $y = mx + n$ (Δ). Tìm m, n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y = -2x + 5$ (d) và có duy nhất một điểm chung với đồ thị (P) .

Lời giải

a) Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, bề lõm hướng xuống và đi qua các điểm $(0;0); (2;-2); (-2;-2); (4;-8); (-4;-8)$.

Đồ thị $y = -\frac{1}{2}x^2$:



b) Δ song song với $y = -2x + 5$ suy ra $\begin{cases} m = -2 \\ n \neq 5 \end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (P) : $-\frac{1}{2}x^2 = -2x + n$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2n = 0 \quad (*)$$

Để Δ và (P) có một điểm chung duy nhất thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất thì

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 - 2n = 0 \Leftrightarrow n = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = -2; n = 2$.

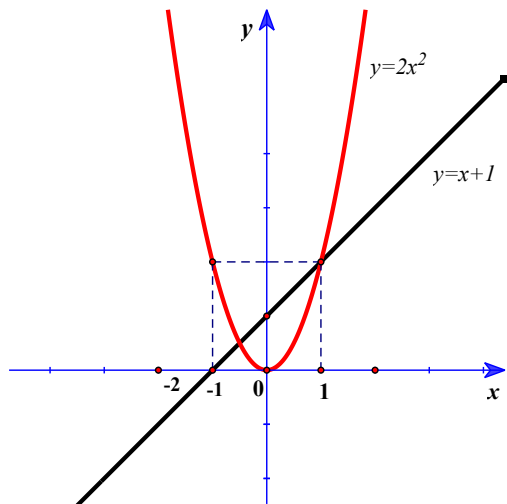
Câu 26: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 1$.

a) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

b) Bằng phép tính, xác định tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải

a) Vẽ đồ thị: (như hình vẽ bên)



Tọa độ giao điểm của (P) và (d)

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - x - 1 = 0$

Ta có $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm

$-\frac{1}{2}; 1$ suy ra tọa độ hai giao điểm là: $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $B(1; 2)$

b) Tính độ dài AB :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số: $y = \frac{1}{4}x^2$

b) Cho đường thẳng (D) : $y = \frac{3}{2}x + m$ đi qua điểm $C(6; 7)$. Tìm tọa độ giao điểm của (D) và (P) .

Lời giải

a) Vẽ (P) học sinh tự vẽ.

b) (D) : $y = \frac{3}{2}x + m$ đi qua điểm $C(6; 7)$ nên $\frac{3}{2} \cdot 6 + m = 7 \Leftrightarrow m = -2$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (D) và (P) : $\frac{x^2}{4} = \frac{3}{2}x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm là $(2; 1), (4; 4)$.

Câu 28: Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = x + 2$ và parabol (P) có phương trình $y = x^2$.

a) Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

b) Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm A và B (với A có hoành độ âm, B có hoành độ dương). Bằng tính toán hãy tìm tọa độ các điểm A và B .

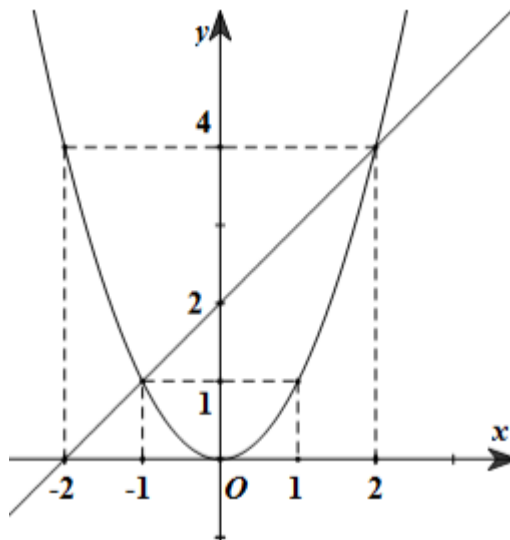
Lời giải

a) Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x + 2$	0		2		
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -1$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(2; 4)$ (vì B có hoành độ dương)

Với $x = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$ (vì A có hoành độ âm)

Vậy $A(-1; 1), B(2; 4)$.

Câu 29: Cho hai hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và đồ thị hàm số (P) và $y = x + 4$ có đồ thị (d)

a) Vẽ đồ thị (P) .

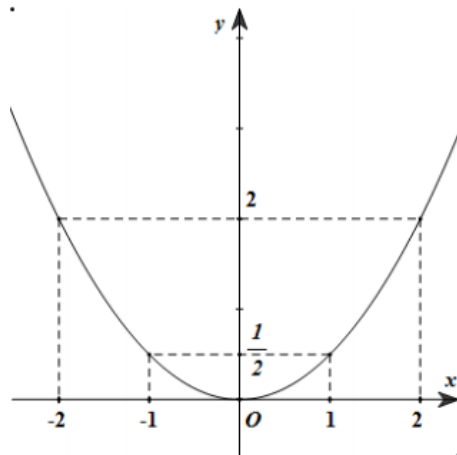
b) Gọi A, B là các giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) . Biết rằng đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét, tìm tất cả các điểm M trên tia Ox sao cho diện tích tam giác MAB bằng 30 cm^2 .

Lời giải

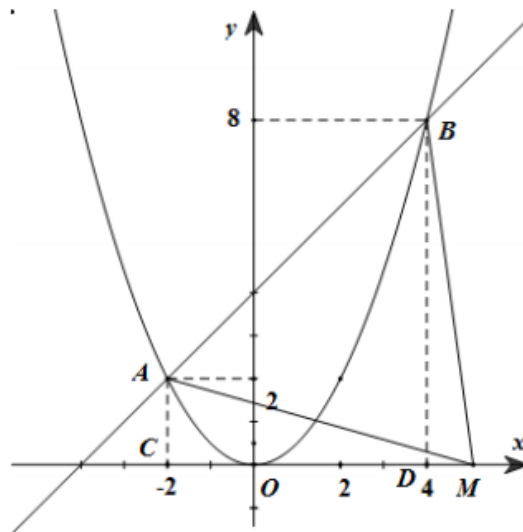
a) Vẽ đồ thị (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:



$$\frac{1}{2}x^2 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 - (-8) = 9 > 0$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x = 4; x = -2$

Với $x = -2$ ta có $y = 2 \Rightarrow A(-2; 2)$

Với $x = 4$ ta có $y = 8 \Rightarrow B(4; 8)$

Gọi $M(m; 0)$ thuộc tia $Ox(m > 0)$. Gọi $C(-2; 0), D(4; 0)$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: M thuộc đoạn OD : Ta có $S_{AMB} = S_{ABDC} - S_{ACM} - S_{BDM}$

Có $ABDC$ là hình thang, $AC = 2cm, BD = 8cm, CD = 6cm$

$$\Rightarrow S_{ABDC} = \frac{(2+8).6}{2} = 30(cm^2)$$

Suy ra $S_{AMB} < 30cm^2$ (loại)

Trường hợp 2: M thuộc tia $Dx(M \neq D) \Rightarrow m > 4$

Ta có: $S_{AMB} = S_{ABDC} - S_{ACM} + S_{BDM}$

Có $S_{ABCD} = 30cm^2, MC = m + 2(cm), MD = m - 4(cm)$

Suy ra

$$S_{ACM} = \frac{1}{2} AC.CM = \frac{1}{2}.2.(m+2) = m+2(cm^2)$$

$$S_{BDM} = \frac{1}{2} BD.DM = \frac{1}{2}.8.(m-4) = 4(m-4)(cm^2)$$

$$\Rightarrow S_{AMB} = 30cm^2 \Leftrightarrow S_{ACM} = S_{BDM} \Leftrightarrow m+2 = 4(m-4) \Leftrightarrow m = 6$$

(thỏa mãn)

Vậy $M(6;0)$ là điểm cần tìm.

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = 3x + m - 1$ và parabol $(P): y = x^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm m để a) $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = 3x + m^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - m^2 + 1 = 0(*)$$

$$\Delta = 9 + m^2 - 1 = 8 + m^2 > 0 \forall m$$

Suy ra phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Ta có: $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + x_2) = 0$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et cho } (*): \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -m^2 + 1 \end{cases}$$

$$(**) \Leftrightarrow -m^2 + 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$.

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - 3$

a) Vẽ đồ thị Parabol (P) .

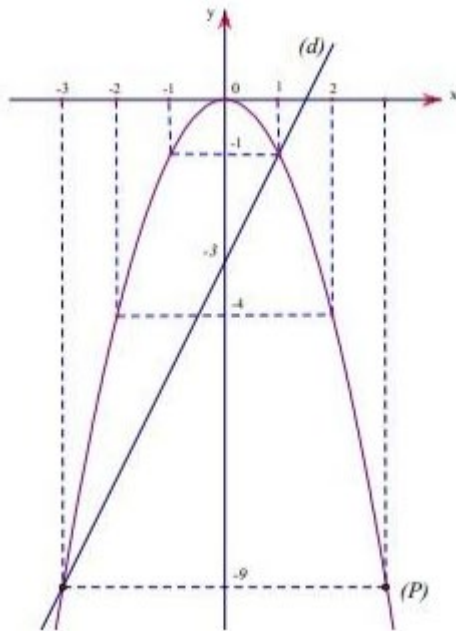
b) Bằng phương pháp đại số, hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

c) Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d) và có điểm chung với parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 .

Lời giải

a) Bảng một số giá trị của (P) :

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $-x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ y = -3 \Rightarrow y = -9 \end{cases}$$

Vậy giao điểm của (P) và (d) : $(1; -1)$ và $(-3; -9)$

c) Phương trình đường thẳng (d_1) có dạng: $y = ax + b$

$$(d_1) \parallel (d) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x + b \ (b \neq -3)$$

Gọi A là điểm thuộc (P) có $x_A = -1 \Rightarrow y_A = -1 \Rightarrow A(-1; -1)$

(d_1) có chung với (P) điểm $A(-1; -1)$ nên: $-1 = 2 \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = 1$

Vậy (d_1) có phương trình: $y = 2x + 1$

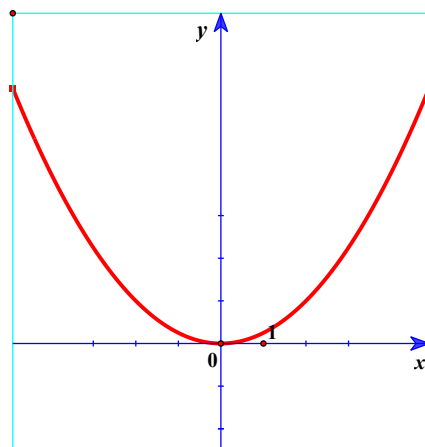
Câu 32:

a) Vẽ đồ thị (P) hàm số $y = \frac{x^2}{4}$

b) Xác định a, b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua gốc tọa độ và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng -3 .

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) hàm số $y = \frac{x^2}{4}$



b) Gọi (d) là đường thẳng có phương trình $y = ax + b$.

Vì (d) đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên $b = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $\frac{x^2}{4} = ax$

Vì (d) cắt (P) tại điểm A có hoành độ là -3 nên: $\frac{9}{4} = a(-3) \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$

Vậy: $a = -\frac{3}{4}; b = 0$

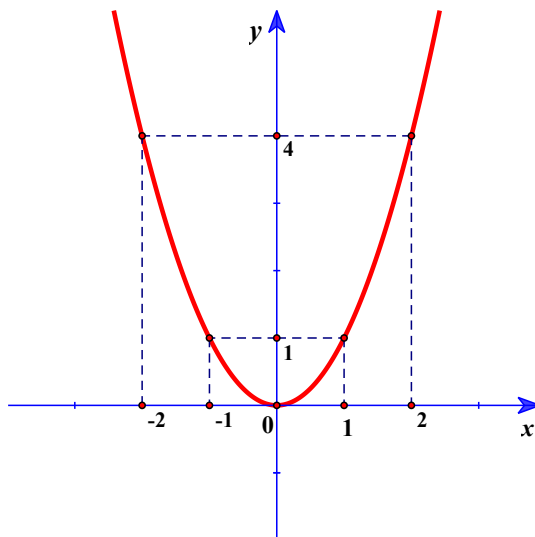
Câu 33:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng $(d) y = kx + 1$ luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt với mọi k .

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$.



b) PT hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0$$

$$\Delta = k^2 + 4$$

Vì $k^2 \geq 0$ với mọi giá trị k

Nên $k^2 + 4 > 0$ với mọi giá trị k

$\Rightarrow \Delta > 0$ với mọi giá trị k

Vậy đường thẳng $(d) y = kx + 1$ luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt với mọi k .

Câu 34: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P)

a) Vẽ đồ thị (P) .

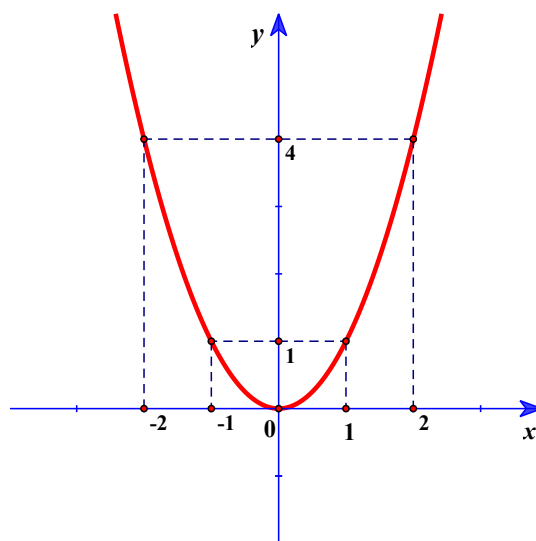
b) Cho các hàm số $y = x + 2$ và $y = -x + m$ (với m là tham số) lần lượt có đồ thị là (d) và (d_m) .

Tìm tất cả các giá trị của m để trên một mặt phẳng tọa độ các đồ thị của (P) , (d) và (d_m) cùng đi qua một điểm.

Lời giải:

a) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị: $y = x^2$

x	0	1	2
y	0	1	4



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 (*)$$

Phương trình $(*)$ có dạng: $a - b + c = 0$ nên có 2 nghiệm:
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-c}{a} = 2 \end{cases}$$

Ta có (d) cắt (P) tại hai điểm $A(-1;1)$ và $B(2;4)$.

Đề $(P), (d)$ và (d_m) cùng đi qua một điểm thì hoặc $A \in (d_m)$ hoặc $B \in (d_m)$

+ Với $A(-1;1) \in (d_m)$, ta có: $1 = -(-1) + m \Leftrightarrow m = 0$

+ Với $B(2;4) \in (d_m)$, ta có: $4 = -2 + m \Leftrightarrow m = 6$

Vậy khi $m = 0$ hoặc $m = 6$ thì $(P), (d)$ và (d_m) cùng đi qua một điểm.

Câu 35: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = -x^2$

a) Vẽ parabol (P) .

b) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y = -x - 2$ và (P) . Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M .

Lời giải:

a) Vẽ đồ thị $(P): y = -x^2$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Tọa độ đỉnh: $I(0;0)$

Trục đối xứng: $x = 0$

Tính biến thiên:

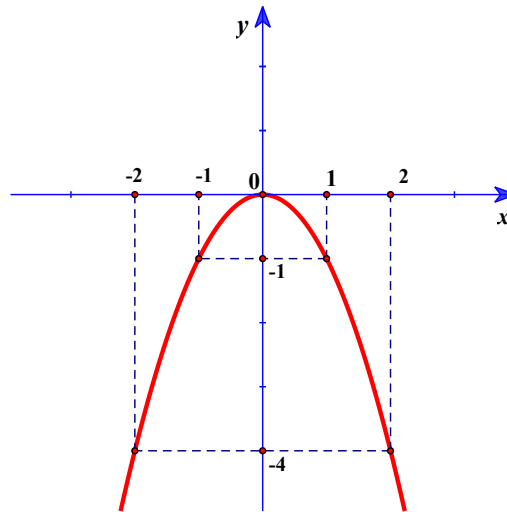
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y		0	

Bảng giá trị

x	-1	0	1
y	-1	0	-1



- b) Viết phương trình đường trung trực (d') của AB , tìm giao điểm của (d') và (P), ta tìm được hai điểm M .

Hoàn thành các giao điểm A, B của đường thẳng (d): $y = -x - 2$ và (P) là nghiệm của phương trình: $-x^2 = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$

+ Với $x = -1$, thay vào (P), ta có: $y = -(-1)^2 = -1$, ta có: $A(-1; -1)$

+ Với $x = 2$, thay vào (P), ta có: $y = -(2)^2 = -4$, ta có: $B(2; -4)$

Suy ra trung điểm của AB là: $I\left(\frac{1}{2}; \frac{-5}{2}\right)$

Đường thẳng (d') vuông góc với (d) có dạng: $y = x + b$;

Vì (d') đi qua I nên: $\frac{-5}{2} = \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = -3$

Vậy (d'): $y = x - 3$.

Phương trình hoành độ của (d') và (P) là: $x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

+ Với $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{-7 - \sqrt{13}}{2}$

+ Với $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{-7 + \sqrt{13}}{2}$

Vậy có hai điểm M cần tìm là: $\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-7 - \sqrt{13}}{2}\right)$ và $\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{13}}{2}\right)$.

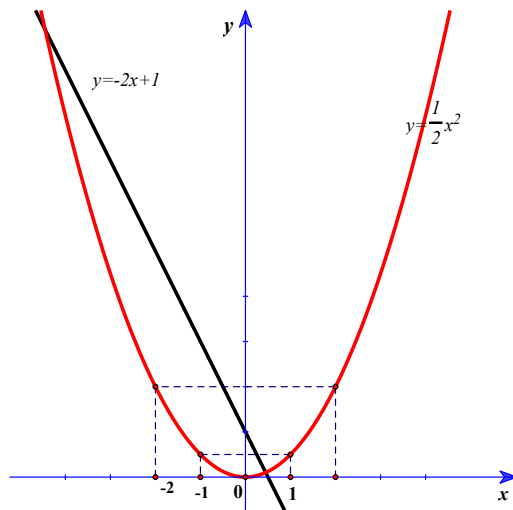
Câu 36: Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (a): $y = -2x + 1$

- c) Vẽ (P) và a trên cùng một hệ trục tọa độ.

- d) Xác định đường thẳng (d) biết đường thẳng (d) song song với đường thẳng (a) và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -2 .

Lời giải

- a) Parabol có đỉnh gốc O đi qua hai điểm $A(-2;2), B(2;2)$, đường thẳng đi qua hai điểm $C(1;-1), D(0;1)$



- b) Vì $(d) \parallel (a) \Rightarrow (d): y = -2x + b$ (b khác 1)

Gọi $N(x_0; y_0)$ là giao điểm của (d) và (P) ta có $x_0 = -2$

$$N \in (P) \Rightarrow y_0 = 2$$

$$N \in (d) \Rightarrow 2 = -2(-2) + b \Rightarrow b = -2 \text{ (TM) } 0,25$$

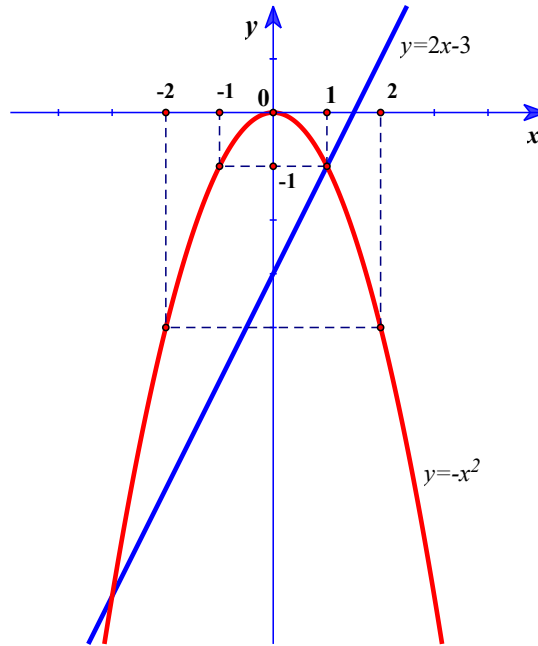
$$\text{Vậy } (d): y = -2x - 2.$$

Câu 37: Cho các hàm số $(P): y = -x^2$ và $(d): y = 2x - 3$.

- Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên bằng phép tính.
- Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$, biết rằng (d_1) song song với (d) và (d_1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 .

Lời giải

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .



b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị bằng phép tính.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$-x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -3$$

* Với $x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ giao điểm thứ nhất là $(1; -1)$

* Với $x = -3 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow$ giao điểm thứ hai là $(-3; -9)$

c) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$, biết rằng (d_1) song song với (d) và (d_1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 .

Đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ song song đường thẳng $(d): y = 2x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $(d_1): y = 2x + b$

Vì đường thẳng $(d_1): y = 2x + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4

$$\Rightarrow b = -4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Suy ra phương trình đường thẳng (d_1) là $y = 2x - 4$.

Câu 38: Cho parabol $(P): y = x^2$ và điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là $-1; 2$. Đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + n$.

e) Tìm tọa độ điểm A, B . Tìm m, n biết (d) đi qua điểm A và B .

f) Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB (điểm O là gốc tọa độ).

Lời giải

a) Ta có: $A(x_A; y_A) \in (P)$ có hoành độ $x_A = -1 \Rightarrow y_A = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

$B(x_B; y_B) \in (P)$ có hoành độ $x_B = 2 \Rightarrow y_B = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2 \Rightarrow B(2; 2)$

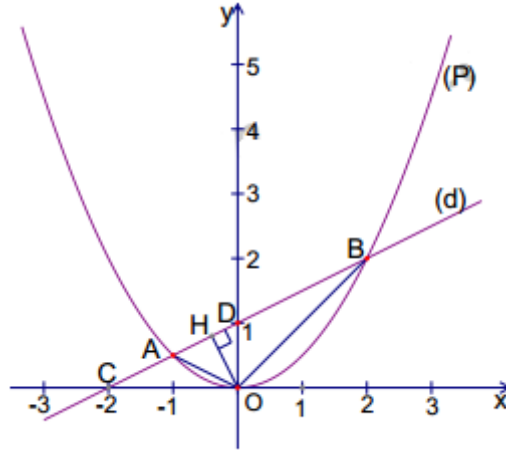
Vì đường thẳng $y = mx + n$ đi qua 2 điểm A và B nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -m+n=\frac{1}{2} \\ 2m+n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m=\frac{3}{2} \\ 2m+n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ 2\cdot\frac{1}{2}+n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ n=1 \end{cases}$$

Vậy với $m=\frac{1}{2}, n=1$ thì (d) đi qua 2 điểm $A\left(-1;\frac{1}{2}\right); B(2;2)$

b) Vẽ (P) và (d) trên cùng 1 hệ trục tọa độ như hình vẽ

Dễ thấy (d) cắt Ox tại $C(-2;0)$ và cắt Oy tại $D(0;1) \Rightarrow OC=2; OD=1$



Độ dài đường cao OH của tam giác OAB chính là độ dài đường cao OH của tam giác OCD

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OCD ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow OH = \frac{2\sqrt{5}}{5} (dvdv)$$

$$\text{Vậy } OH = \frac{2\sqrt{5}}{5} (dvdv)$$

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = x + m - 1$ và parabol $(P): y = x^2$

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(0;1)$

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1,$

$$x_2 \text{ thỏa mãn: } 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0.$$

Lời giải

a) Thay $x=0; y=1$ vào phương trình đường thẳng (d) ta được: $m=2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 - x - (m-1) = 0(*)$

Để (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$$

$$\text{Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -(m-1) \end{cases}$$

Theo đề Câu:

$$4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{-m+1} + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \text{ (DK : } m \neq 1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3(L) \\ m = 2(TM) \end{cases}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 40: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$

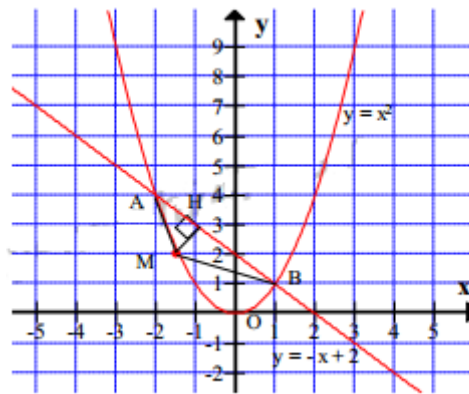
g) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.

h) Bằng phép tính, xác định tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) .

i) Tìm tọa độ điểm M trên cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) và (d) như hình vẽ



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2.$$

$$\text{Nếu } x = -2 \text{ thì } y = 4 \Rightarrow A(-2; 4)$$

$$\text{Nếu } x = 1 \text{ thì } y = 1 \Rightarrow B(1; 1)$$

c) Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm thuộc parabol (P) , cung AB sao cho diện tích tam giác AMB lớn nhất.

$$\text{Điều kiện: } -2 < x_M < 1 \text{ và } 0 \leq y_M < 4$$

Từ M , kẻ $MH \perp AB$ tại H , ta có:

+ Phương trình đường thẳng $AB: y = -x + 2$.

+ Phương trình đường thẳng MH có dạng: $y = ax + b$. Đường thẳng này vuông góc với AB

Suy ra $a \cdot (-1) = -1$. Suy ra: $a = 1$, đường thẳng MH có phương trình $y = x + b$

+ Phương trình hoành độ giao điểm giữa (P) và $MH: x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 - x - b = 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b) = 1 + 4b$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Do đó: MH có phương trình: $y = x - \frac{1}{4}$

+ phương trình hoành độ giao điểm giữa AB và MH : $x - \frac{1}{4} = -x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$

Khi đó: $y = \frac{9}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ và $H\left(\frac{9}{8}; \frac{7}{8}\right)$

+ Phương trình hoành độ giao điểm giữa (P) và MH : $x^2 = x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

phương trình có nghiệm kép: $x = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện)

Khi đó: $y = x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (thỏa điều kiện)

Vậy: $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

Khi đó:

$$MH = \sqrt{(x_M - x_H)^2 + (y_M - y_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{32}} = \frac{5}{8}\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Diện tích tam giác } AMB \text{ là } S_{AMB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{5}{8}\sqrt{2} = \frac{15}{8} \text{ (đvdt)}$$

Câu 41: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx - 3$ (với m là tham số).

- Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;3)$.
- Xác định các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho tổng 2 tung độ của hai giao điểm đó bằng -10 .

Lời giải

- Đường thẳng (d) đi qua $A(1;3)$ nên $3 = 3m \cdot 1 - 3 \Leftrightarrow m = 2$.
- Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là:

$$-x^2 = 3mx - 3 \Leftrightarrow x^2 + 3mx - 3 = 0(*)$$

Ta có $\Delta = 9m^2 + 12 > 0$, với mọi m nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt.

Do đó, đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -3m; x_1 \cdot x_2 = -3$.

Theo Câu ra ta có:

$$y_1 + y_2 = -10 \Leftrightarrow -x_1^2 - x_2^2 = -10$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + 6 = 10$$

$$\Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}$$

Câu 42: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x + 5 - 2m$ (m là tham số)

- Vẽ đồ thị parabol (P) .

m) Biết đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là x_1, x_2 . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

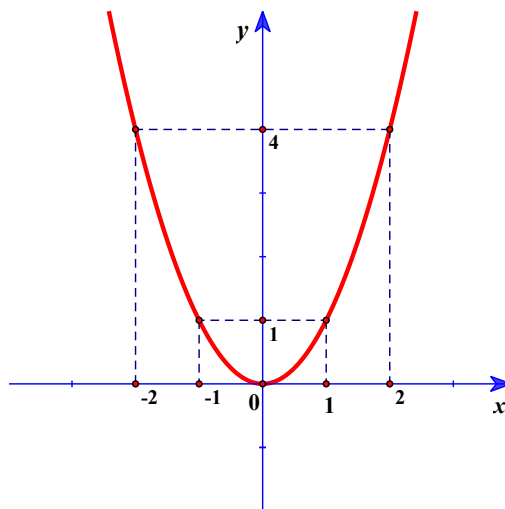
Lời giải

a) Vẽ đồ thị

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị:



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = 2(m-1)x + 5 - 2m \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$$

Theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = 2m - 5 \end{cases}$$

Theo đề Câu, ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6 \Leftrightarrow (2m - 2)^2 - 2(2m - 5) = 6 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy: $m = 1$ hoặc $m = 2$.

Câu 43: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y = 2(m+1)x - 3m + 2$

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) với $m = 3$.

b) Chứng minh (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B với mọi m .

c) Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ giao điểm của A và B . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Lời giải

Thay $m = 3$ ta được $(d): y = 8x - 7$

Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) khi $m = 3$ là

$$x^2 = 8x - 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 1; x_2 = 7$

Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1;1); (7;49)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 - 2(m+1)x + 3m - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = m^2 + 2m + 1 - 3m + 2 = m^2 - m + 3 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \quad \forall m$$

Nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ suy ra (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B với mọi m .

Ta có: $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình (1) vì $\Delta' > 0 \quad \forall m$. Theo Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = 3m - 2 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 20 \Leftrightarrow (2m + 2)^2 - 2(3m - 2) = 20$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)(2m + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 44: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là Parabol (P)

a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm nằm trên Parabol (P) có hoành độ $x = 2$ và có hệ số góc k . Với giá trị k nào thì (d) tiếp xúc (P) ?

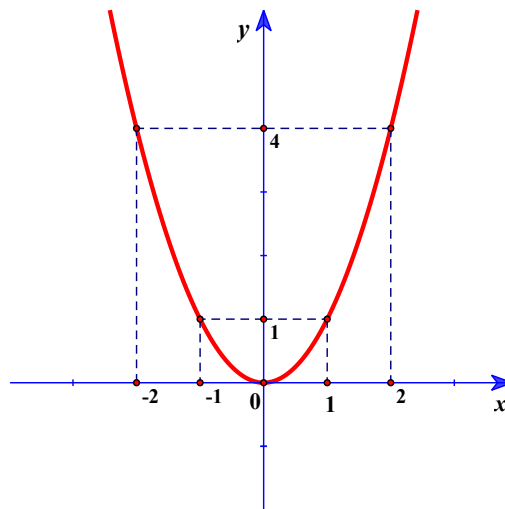
Lời giải

a)

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số là hình vẽ



b) Đường thẳng (d) có hệ số góc k nên có dạng $y = kx + b$

Điểm thuộc (P) có hoành độ $x = 2 \Rightarrow y = 4$

(d) qua $(2; 4) \Rightarrow 4 = k \cdot 2 + b \Rightarrow b = -2k + 4$

Suy ra $(d): y = kx - 2k + 4$

Đường thẳng (d) tiếp xúc (P) khi đó phương trình sau có nghiệm kép

$$x^2 = kx - 2k + 4 \Leftrightarrow x^2 - kx + 2k - 4 = 0$$

$$\Delta = k^2 - 8k + 16$$

Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 - 8k + 16 = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy $k = 4$.

Câu 45: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$.

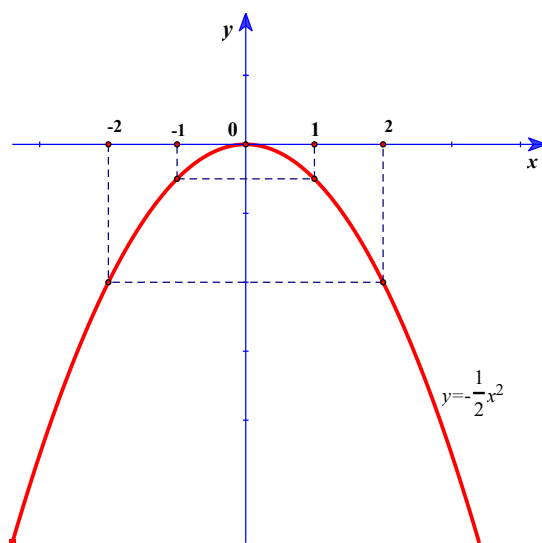
a) Vẽ đồ thị của (P) .

b) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là hoành độ giao điểm của (P) và $(d): y = x - 4$. Chứng minh:

$$y_1 + y_2 - 5(x_1 + x_2) = 0$$

Lời giải

a) $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$\frac{-1}{2}x^2 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x = 2; x = -4$

Tọa độ giao điểm là: $(2; -2)$ và $(-4; -8)$

Khi đó: $y_1 + y_2 - 5(x_1 + x_2) = -2 + (-8) - 5(2 - 4) = 0$.

Câu 46: Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = 3x + 2$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Viết phương trình đường thẳng d' vuông góc với đường thẳng d và tiếp xúc với (P) .

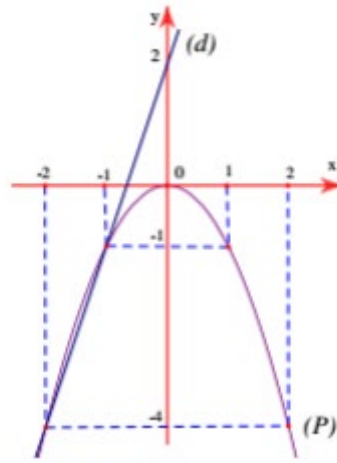
Lời giải

a) + Bảng một số giá trị của (P) :

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	-4	-1	0	-1	-4

+ (d) đi qua 2 điểm $(0; 2)$ và $(-1; -1)$.

+ Đồ thị:



b) d' có dạng: $y = a'x + b'$; $d' \perp d \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$

với $a = 3 \Rightarrow a' = \frac{-1}{3} \Rightarrow d': y = \frac{-1}{3}x + b'$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d' : $-x^2 = \frac{-1}{3}x + b' \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{3}x + b' = 0(*)$

PT $(*)$ có $\Delta = \frac{1}{9} - 4b'$

d tiếp xúc với (P) khi $\Delta = \frac{1}{9} - 4b' = 0 \Leftrightarrow b' = \frac{1}{36}$

Vậy d' có phương trình: $y = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{36}$

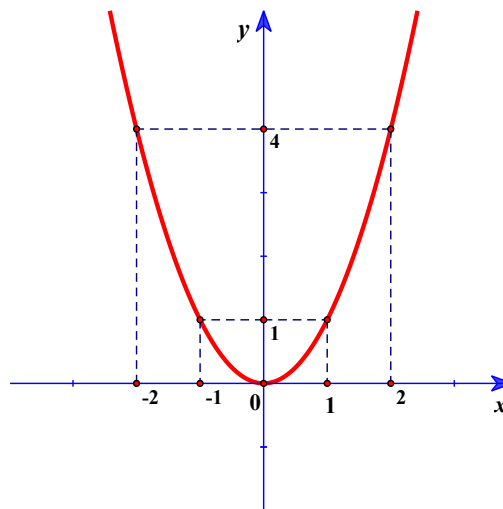
Câu 47: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = 4x + m$ có đồ thị (d_m)

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho (d_m) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt, trong đó tung độ của một trong hai giao điểm đó bằng 1.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) .



b) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4x + m$ là:

$$x^2 = 4x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x - m = 0(1)$$

(1) có $\Delta = 4 + m$

Đề (d_m) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 + m > 0 \Leftrightarrow m > -4$

$$y = 4x + m = 1 \Rightarrow x = \frac{1-m}{4}$$

Yêu cầu của Câu toán tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m > -4 \\ 2 \pm \sqrt{4+m} = \frac{1-m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ \sqrt{4+m} = \frac{-7-m}{4} \text{ hay } -\sqrt{4+m} = \frac{-7-m}{4} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m < -7 \\ \sqrt{4+m} = \frac{-7-m}{4} \end{cases} (L) \text{ hay } \begin{cases} m > -4 \\ m > -7 \\ 4\sqrt{4+m} = 7+m \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m^2 - 2m - 15 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m = -3 \Leftrightarrow m = -3 \text{ hay } m = 5 \\ m = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 48: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y = -2x + m$ (với m là tham số).

- Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ là 2.
- Tìm giá trị của m để (d) cắt tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 6x_1^2 x_2^2$.

Lời giải

- Điểm thuộc Parabol (P) : $y = x^2$ có hoành độ $x = 2$ nên tung độ $y = 2^2 = 4$

(d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 2 $\Leftrightarrow 4 = -2 \cdot 2 + m \Leftrightarrow m = 8$

Vậy $m = 8$ là giá trị cần tìm

- Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = -2x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x - m = 0 (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Với $m > -1$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$.

$$\text{Nên theo hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

$$\text{mà } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6x_1^2 x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (-2)^2 - 2(-m) = 6(-m)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1; m_2 = \frac{-2}{3}$$

Vậy $m_1 = 1; m_2 = \frac{-2}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 49: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) : $y = -x + 6$ và parabol (P) : $y = x^2$.

- Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 25 > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 2; x = -3$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(2; 4)$

Với $x = -3 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow B(-3; 9)$

Vậy d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $(2; 4)$ và $(-3; 9)$.

b) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A và B xuống trục hoành.

Ta có $S_{\Delta OAB} = S_{AA'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'}$

Ta có: $A'B' = |x_{B'} - x_{A'}| = x_{B'} - x_{A'} = 5, AA' = y_A = 9; BB' = y_B = 4$

Diện tích hình thang:

$$S_{AA'B'B} = \frac{AA' + BB'}{2} \cdot A'B' = \frac{9 + 4}{2} \cdot 5 = \frac{65}{2} (dvdv)$$

$$S_{\Delta OAA'} = \frac{1}{2} A'A \cdot A'O = \frac{27}{2} (dvdv)$$

$$S_{\Delta OBB'} = \frac{1}{2} B'B \cdot B'O = 4 (dvdv)$$

$$S_{\Delta OAB} = S_{AA'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'} = \frac{65}{2} - \frac{27}{2} - 4 = 15 (dvdv)$$

Câu 50:

a) Vẽ đồ thị hai hàm số: $y = x^2$ và $y = x + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

b) Xác định đường thẳng $y = ax + b$ biết rằng đường thẳng này song song với đường thẳng

$y = -3x + 5$ và cắt Parabol $y = 2x^2$ tại điểm A có hoành độ bằng -1 .

Lời giải

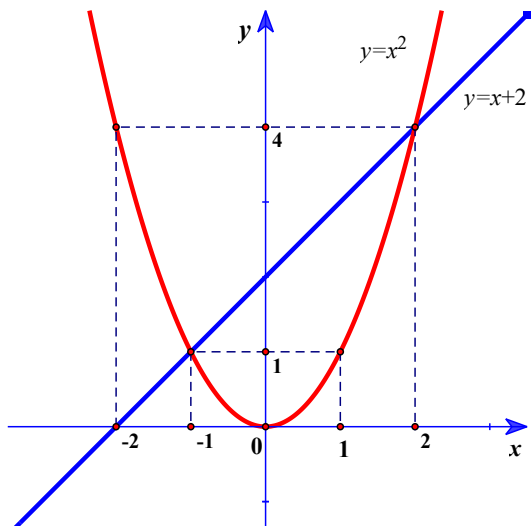
a) Gọi (P) và (d) là đồ thị của 2 hàm số: $y = x^2$ và $y = x + 2$

$$y = x^2$$

x	-1	0	1
y	1	0	1

$$y = x + 2$$

x	0	-2
y	2	0



b) Phương trình đường thẳng (d') có dạng $y = ax + b$

Vì (d') song song với đường thẳng $y = -3x + 5 \Rightarrow a = -3$ và $b \neq 5 \Rightarrow (d'): y = -3x + b$

A thuộc Parabol: $y = 2x^2 \Rightarrow y_A = 2(-1)^2 = 2$

Suy ra tọa độ $A(-1; 2) \in (d')$

$\Rightarrow 2 = (-3) \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = -1 \Leftrightarrow (d'): y = -3x - 1$

Câu 51: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

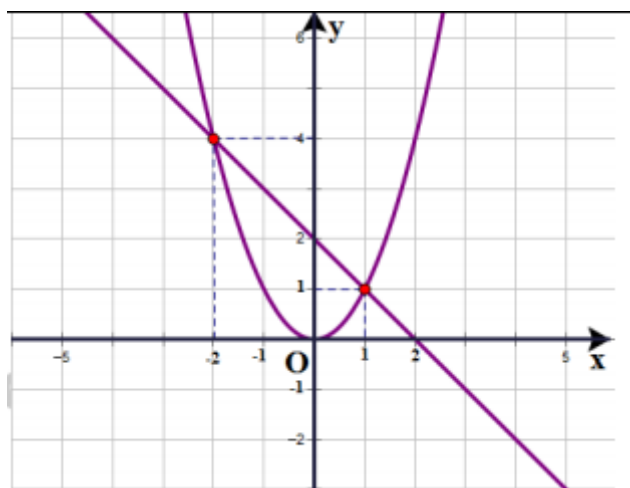
a) Hãy vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

c) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$. Biết rằng (d_1) song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ là 2.

Lời giải

a) Hãy vẽ (P) và (d)



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: hai giao điểm $(1; 1)$ và $(2; 4)$.

c) (d_1) song song với $(d) \Rightarrow a = -1$

Ta có $A(2; 4)$ thuộc $(P) \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow b = 6$

Vậy $(d_1): y = -x + 6$.

Câu 52: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m+3)x - 2m + 2$ (m là tham số).

- a) Với $m = -5$, tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) .
- b) Chứng minh rằng: với mọi m parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
Tìm m sao cho hai giao điểm đó có hoành độ dương.
- c) Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m .

Lời giải

- a) Với $m = -5$, (d) có phương trình $y = -4x + 12$

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm phương trình:

$$x^2 = -4x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$+ x = -6 \Rightarrow y = 36$$

$$+ x = 2 \Rightarrow y = 4$$

Vậy với $m = -5$, thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm $(-6; 36), (2; 4)$.

- b) Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm phương trình:

$$x^2 = 2(m+3)x - 2m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x + 2m - 2 = 0(1)$$

$$\Delta' = (m+3)^2 - (2m-2) = m^2 + 4m + 11 = (m+2)^2 + 6 > 0 \forall m$$

Do đó (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m suy ra (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt m .

$x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1), áp dụng định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+3) \\ x_1 x_2 = 2m - 2 \end{cases}$$

Hai giao điểm đó có hoành độ dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+3) > 0 \\ 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy với $m > 1$ thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt với hoành độ dương.

- c) Gọi điểm cố định mà đường thẳng (d) đi qua với mọi m là $(x_0; y_0)$ ta có:

$$y_0 = 2(m+3)x_0 - 2m + 2 \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(2x_0 - 2) + 6x_0 - y_0 + 2 = 0 \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 2 = 0 \\ 6x_0 - y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 8 \end{cases}$$

Vậy với mọi m thì đường thẳng (d) luôn đi qua $(1; 8)$.

Câu 53: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = mx - 3$ tham số m và Parabol $(P): y = x^2$.

- a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 0)$.

- b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải

- a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0)$ nên có $0 = m \cdot 1 - 3 \Leftrightarrow m = 3$.
 b) Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) : $x^2 - mx + 3 = 0$

Có $\Delta = m^2 - 12$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 khi

$$\Delta = m^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 12 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{3} \\ m < -2\sqrt{3} \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Vi – Ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$

Theo Câu ra ta có

$$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 \cdot 3 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$$

Vậy $m = \pm 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 54: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) : $y = mx + m - 3$

- a) Tìm a để đồ thị (P) đi qua điểm $B(2; -2)$.
 b) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt C và D với mọi giá trị của m .
 c) Gọi x_C và x_D lần lượt là hoành độ của hai điểm C và D . Tìm các giá trị của m sao cho $x_C^2 + x_D^2 - 2x_C x_D - 20 = 0$

Lời giải

- a) (P) đi qua điểm $B(2; -2)$ nên ta có: $-2 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Vậy (P) : $y = -\frac{1}{2}x^2$

- b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$-\frac{1}{2}x^2 = mx + m - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m - 6 = 0(*)$$

$$\Delta' = m^2 - (2m - 6) = m^2 - 2m + 6 = (m - 1)^2 + 5 > 0 \forall m$$

Do đó, đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt C và D với mọi giá trị của m .

- c) Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_C + x_D = -2m \\ x_C x_D = 2m - 6 \end{cases}$

Theo giả thiết

$$x_C^2 + x_D^2 - 2x_C x_D - 20 = 0 \Leftrightarrow (x_C + x_D)^2 - 4x_C x_D - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(2m - 6) - 20 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy với $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 55: Trong mặt phẳng tọa độ cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$

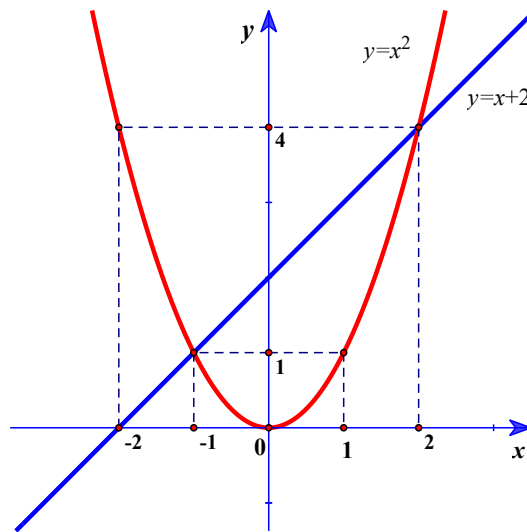
- Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) bằng phép tính.
- Tính độ dài đoạn AB .

Lời giải

- Vẽ (P) và (d)

Lập bảng giá trị (có ít nhất 5 giá trị)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Ta có: $a - b + c = 1 - (-1) - 2 = 0$ nên phương trình có nghiệm 2 nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 2$

Từ đó tính được: $y_1 = 1; y_2 = 4$

Vậy tọa độ giao điểm giữa (P) và (d) là: $A(-1; 1); B(2; 4)$

Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ (đvdt)}$$

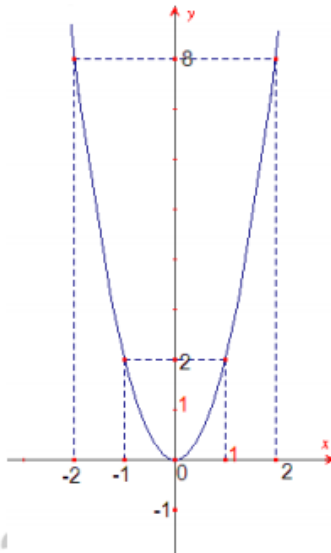
Câu 56: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - m + 1$ (với m là tham số)

- Vẽ Parabol (P) .
- Tìm tất cả các giá trị của m để (P) cắt (d) có đúng một điểm chung.
- Tìm tọa độ các điểm thuộc (P) có hoành độ bằng hai lần tung độ.

Lời giải

- Vẽ đồ thị hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm cả (P) và (d) :

$$2x^2 = x - m + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + m - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 1) = 9 - 8m$$

Để (P) và (d) có một điểm chung thì: $\Delta = 0 \Leftrightarrow 9 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{8}$

Vậy với $m = \frac{9}{8}$ thì (P) và (d) có một điểm chung.

c) Điểm thuộc (P) mà hoành độ bằng hai lần tung độ nghĩa là $x = 2y$ nên ta có:

$$y = 2(2y)^2 \Leftrightarrow y = 8y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Vậy điểm thuộc (P) mà hoành độ bằng hai lần tung độ là $(0; 0); \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right)$.

Câu 57: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+3)x - m^2 - 3$. Tìm m để d tiếp xúc với (P) . Khi đó hãy tìm tọa độ tiếp điểm.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 = 2(m+3)x - m^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0 (*)$$

$$\text{Có } \Delta' = [-(m+3)]^2 - 1 \cdot (m^2 + 3) = 6m + 6.$$

Để d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 6m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Thay $m = -1$ vào $(*)$ ta được

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4$$

Vậy $m = -1$ thì d tiếp xúc với (P) và tọa độ tiếp điểm là $M(2; 4)$.

Câu 58: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + 3$.

- a) Tìm tọa độ các giao điểm A và B của d và (P) , trong đó A là điểm có hoành độ âm. Vẽ d và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB để $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất.

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow y=3^2=9 \\ x=-1 \Rightarrow y=(-1)^2=1 \end{cases}$$

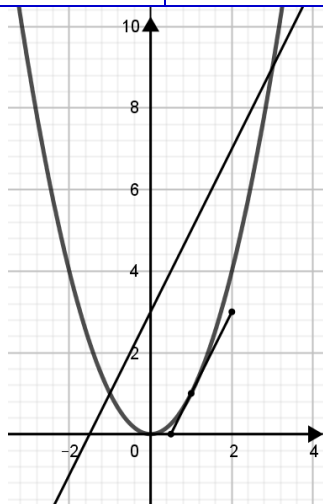
Vậy tọa độ các giao điểm của d và (P) là $A(-1;1), B(3;9)$.

* $d: y = 2x + 3$

x	0	$-\frac{3}{2}$
y	3	0

* $y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



b) Có $A(-1;1), B(3;9)$ cố định nên độ dài đoạn thẳng AB không đổi, do đó $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi khoảng cách từ C đến đường thẳng d lớn nhất, khi đó C là tiếp điểm của đường thẳng $d_1 \parallel d$ và d_1 tiếp xúc (P) .

Gọi phương trình đường thẳng $d_1: y = ax + b$.

$$\text{Do } d_1 \parallel d \text{ nên } \begin{cases} a_{d_1} = a_d \\ b_{d_1} \neq b_d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq 3 \end{cases}$$

Suy ra $d_1: y = 2x + b, b \neq 3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (P) :

$$x^2 = 2x + b \Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0$$

$$(*) \text{ có } \Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-b) = b + 1$$

d_1 tiếp xúc với (P) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa mãn).

Thay $b = -1$ vào (*) ta được

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1$$

Vậy $C(1;1)$ là điểm cần tìm.

Câu 59: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x - 2m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 = 2(m-1)x - 2m + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 2m - 4 = 0.$$

$$\text{Có } \Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (2m-4) = (m-1)^2 - 2m + 4$$

$$= m^2 - 4m + 5 = (m-2)^2 + 1 > 0 \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

$$\text{Theo định lý Viét, ta có: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m - 2; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 4$$

$$\text{Có } A = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m - 2$; $x_1 x_2 = 2m - 4$ vào A ta được:

$$A = (2m-2)^2 - 2(2m-4) = 4m^2 - 12m + 12 = (2m-3)^2 + 3 \geq 3 \quad \forall m$$

$$\text{Vậy } \min A = 3 \text{ khi } 2m-3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Câu 60: Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng d đi qua $I(0; -1)$ hệ số góc k .

a) Viết phương trình d theo k

b) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt thuộc hai phía Oy .

c) Gọi hoành độ A và B lần lượt là x_1 và x_2 . Chứng minh: $|x_1 - x_2| \geq 2$

Giả sử $x_1 < x_2$. Tìm m để $|x_1| > |x_2|$.

Lời giải

a) Gọi phương trình d là: $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

$$\text{Do } d \text{ đi qua } I(0; -1) \text{ nên } -1 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Vì d có hệ số góc k nên $a = k$

Vậy phương trình d là: $y = kx - 1$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$-x^2 = kx - 1 \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0 \quad (*)$$

Có $\Delta = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = k^2 + 4 > 0 \quad \forall k$ nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt

Do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt

Theo định lý Viét, ta có $x_A + x_B = -\frac{b}{a} = -k$; $x_A x_B = \frac{c}{a} = -1$

Vì $x_A x_B = -1 < 0 \Rightarrow x_A, x_B$ trái dấu

Vậy A, B thuộc hai phía Oy .

c) Xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$

Thay $x_1 + x_2 = -k$; $x_1 x_2 = -1$ vào $|x_1 - x_2|^2$ ta được

$$|x_1 - x_2|^2 = (-k)^2 - 4 \cdot (-1) = k^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

d) **Cách 1:** (Xét dấu của x_1, x_2)

Do $x_1 < x_2$ và x_1, x_2 trái dấu nên $x_1 < 0, x_2 > 0$

Suy ra $|x_1| = -x_1$; $|x_2| = x_2$ nên $|x_1| > |x_2| \Leftrightarrow -x_1 > x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 < 0$

Mà $x_1 + x_2 = -k$ nên ta được $-k < 0 \Leftrightarrow k > 0$

Cách 2: (bình phương):

$$\text{Có } |x_1| > |x_2| \Leftrightarrow |x_1|^2 > |x_2|^2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 \text{ và } x_1 + x_2 \text{ cùng dấu}$$

Mà $x_1 < x_2$ hay $x_1 - x_2 < 0$ nên $x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow -k < 0 \Leftrightarrow k > 0$

Vậy $k > 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 61: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và $d: y = mx - m + 1$. Tìm m để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$x^2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$

$$\begin{aligned} \text{Xét } (|x_1| + |x_2|)^2 &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1| \cdot |x_2| = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| \\ &= m^2 - 2 \cdot (m - 1) + 2 \cdot |m - 1| = m^2 - 2m + 2 + 2 \cdot |m - 1| \\ &= (m - 1)^2 + 2 \cdot |m - 1| + 1 = (|m - 1| + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } |x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 16 \Leftrightarrow (|m - 1| + 1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow |m - 1| + 1 = 4 \Leftrightarrow |m - 1| = 3 \Leftrightarrow m = -1, m = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = -1, m = 5$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Ta có thể giải theo cách chỉ ra hai nghiệm của $(*)$ là $x = 1, x = m - 1$ dựa vào Δ là bình phương hoặc dựa vào nhận xét $a + b + c = 0$.

Câu 62: Cho $(P): y = x^2$ và $d: y = 2(m-1)x + 3 - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$x^2 = 2(m-1)x + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 2m - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (2m-3) = (m-1)^2 - 2m + 3 = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m - 2; x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 3$$

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Do $x_1 \neq x_2$ và hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$ nên theo định lý Pytago ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m - 2, x_1 x_2 = 2m - 3$ vào $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$ ta được

$$(2m-2)^2 - 2(2m-3) = 10 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 10 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4m(m-3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (loại), } m = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Chú ý

- Bài này ta cần lưu ý điều kiện $m > \frac{3}{2}$ trong quá trình giải
- Ta có thể giải theo cách chỉ ra hai nghiệm của $(*)$ là $x = 1; x = 2m - 3$ dựa vào Δ' là bình phương hoặc dựa vào nhận xét $a + b + c = 0$.

Câu 63: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 - 3x_2 = 5$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 = mx + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m-1) = m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2$$

D cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -2$$

Cách 1 (Giải x_1, x_2 dựa vào định lý Viét)

Theo định lý Viét ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m - 1$

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ 2x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 3m \\ 2x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3m+5}{5}, x_2 = \frac{2m-5}{5}$$

Thay $x_1 = \frac{3m+5}{5}, x_2 = \frac{2m-5}{5}$ vào $x_1 x_2 = -m - 1$ ta được

$$\frac{3m+5}{5} \cdot \frac{2m-5}{5} = -m - 1 \Leftrightarrow 6m^2 + 20m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m(3m+10) = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -\frac{10}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Cách 2: (Giải x_1, x_2 dựa vào Δ là bình phương)

Do $\Delta = (m+2)^2$ nên hai nghiệm của phương trình (*) là

$$x = \frac{m \pm (m+2)}{2} \Leftrightarrow x = -1, x = m+1$$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = -1, x_2 = m+1$, thay vào $2x_1 - 3x_2 = 5$ ta

$$\text{được } -2 - 3(m+1) = 5 \Leftrightarrow m = -\frac{10}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = m+1, x_2 = -1$, thay vào $2x_1 - 3x_2 = 5$ ta được

$$2(m+1) - 3(-1) = 5 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 0, m = -\frac{10}{3}$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Ta có thể nhận xét $a - b + c = 0$ để được hai nghiệm của phương trình (*) là $x = -1, x = m+1$.

Câu 64: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường tròn d: $y = 2(m+1)x + 3$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1| + |x_2| = 5$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ của d và (P):

$$x^2 = 2(m+1)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x - 3 = 0 \text{ (*)}$$

Có $\Delta' = [-(m+1)]^2 - 1 \cdot (-3) = (m+1)^2 + 3 > 0 \forall m$ nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m+2$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -3$

Do $x_1 x_2 = -3 < 0$ nên x_1, x_2 trái dấu.

Cách 1 (Giải hệ $2|x_1| + |x_2| = 5$ và $x_1 + x_2 = 2m+2$)

Trường hợp 1: Xét $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$ nên $2|x_1| + |x_2| = 5 \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 5$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2m+2 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = 2m-3 \Rightarrow x_1 = \frac{2m-3}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4m+9}{3}$$

Thay $x_1 = \frac{2m-3}{3}, x_2 = \frac{4m+9}{3}$ vào $x_1 x_2 = -3$ ta được

$$\frac{2m-3}{3} \cdot \frac{4m+9}{3} = -3 \Leftrightarrow 8m^2 + 6m = 0 \Rightarrow m = 0, m = -\frac{3}{4}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 > 0, x_2 < 0 \Rightarrow |x_1| = x_1; |x_2| = -x_2$ nên $2|x_1| + |x_2| = 5 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 5$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2m + 2 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = 2m + 7 \Rightarrow x_1 = \frac{2m+7}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4m-1}{3}$$

Thay $x_1 = \frac{2m+7}{3}, x_2 = \frac{4m-1}{3}$ vào $x_1 x_2 = -3$ ta được

$$\frac{2m+7}{3} \cdot \frac{4m-1}{3} = -3 \Leftrightarrow 8m^2 + 26m + 20 = 0 \Rightarrow m = -2, m = -\frac{5}{4}$$

Cách 2: (Giải hệ $2|x_1| + |x_2| = 5$ và $x_1 x_2 = -3$):

Trường hợp 1: Xét $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$ nên $2|x_1| + |x_2| = 5 \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 5$
 $\Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 + 5$, thay vào $x_1 x_2 = -3$ ta được

$$x_1(2x_1 + 5) = -3 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 5x_1 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 2x_1 + 3x_1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1(x_1 + 1) + 3(x_1 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(2x_1 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 3 \\ x_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Thay vào $x_1 + x_2 = 2m + 2$ được $m = 0, m = -\frac{3}{4}$

Trường hợp 2: Xét $x_1 > 0, x_2 < 0 \Rightarrow |x_1| = x_1; |x_2| = -x_2$ nên $2|x_1| + |x_2| = 5 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 5$
 $x_2 = 2x_1 - 5$, thay vào $x_1 x_2 = -3$ ta được

$$x_1(2x_1 - 5) = -3 \Leftrightarrow 2x_1^2 - 5x_1 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2 - 2x_1 - 3x_1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1(x_1 - 1) - 3(x_1 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(2x_1 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -3 \\ x_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Thay vào $x_1 + x_2 = 2m + 2$ được $m = -2, m = -\frac{5}{4}$

Vậy $m \in \left\{ 0; 2; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{4} \right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 65: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = -4x + m^2 - 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = -4x + m^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - m^2 + 4 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta' = 2^2 - 1(-m^2 + 4) = m^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -4, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 + 4$

Cách 1: (Giải dựa vào định lý Viét)

Thay $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$ vào $x_1 + x_2 = -4$ ta được

$$x_1 + (x_1^3 + 4x_1^2) = -4 \Leftrightarrow x_1^2(x_1 + 4) + x_1 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + 4)(x_1^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4 \Rightarrow x_2 = 0$$

Thay $x_1 = -4, x_2 = 0$ vào $x_1 x_2 = -m^2 + 4 \Rightarrow -m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$ (thỏa mãn)

Cách 2 (Giải x_1, x_2 dựa vào Δ' là bình phương)

Do $\Delta' = m^2$ nên hai nghiệm của phương trình (*) là $x = -2 \pm m$.

Trường hợp 1: Xét $x_1 = -2 - m, x_2 = -2 + m$, thay vào $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$ ta được

$$-2 + m = (-2 + m)^3 + 4(-2 + m)^2 \Leftrightarrow (m + 2)^3 - 4(m + 2)^2 + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 2)^2(m + 2 - 4) + (m - 2) = 0 \Leftrightarrow (m - 2)[(m + 2)^2 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = -2 + m, x_2 = -2 - m$, thay vào $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$ ta được

$$-2 - m = (-2 + m)^3 + 4(-2 + m)^2 \Leftrightarrow (m - 2)^3 - 4(m - 2)^2 + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2(m - 2 + 4) + (m + 2) = 0 \Leftrightarrow (m + 2)[(m - 2)^2 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 66: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = (2m - 1)x - m^2 + m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = (2m - 1)x - m^2 + m \Leftrightarrow x^2 - (2m - 1)x + m^2 - m = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = [-(2m - 1)]^2 - 4.1(m^2 - m) = (2m - 1)^2 - 4m^2 + 4m = 1 > 0 \quad \forall m.$$

Do đó (*) luôn có hai nghiệm phân biệt nên d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Có } \Delta = 1 \text{ nên hai nghiệm của (*) là } x = \frac{2m - 1 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = m, x = m - 1$$

$$\text{Để tồn tại } \sqrt{x_1}, \sqrt{2x_2} \text{ ta cần có } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

$$\text{Khi đó } \sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = m, x_2 = m - 1$ thay vào $x_1 = 2x_2$ ta được

$$m = 2(m - 1) \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = m - 1, x_2 = m$ thay vào $x_1 = 2x_2$ ta được

$$m - 1 = 2m \Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại)}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta cần lưu ý điều kiện $m \geq 1$ trong quá trình giải.

Câu 67: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-3)x - m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = (m-3)x - m + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x + m - 4 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = [-(m-3)]^2 - 4.1.(m-4) = (m-3)^2 - 4m + 16 = (m-5)^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m-5)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 5.$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m-3, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m-4$$

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ m-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$$

Vì $\Delta = (m-5)^2$ nên hai nghiệm của phương trình (*) là

$$x = \frac{m-3 \pm (m-5)}{2} \Leftrightarrow x = 1, x = m-4. \text{ Do } x_1 \neq x_2 \text{ nên } x_1, x_2 \text{ không thể cùng là độ dài hai}$$

cạnh góc vuông của tam giác vuông cân. Giả sử x_1 là độ dài cạnh huyền, x_2 là độ dài cạnh góc

$$\text{vuông thì theo định lý Pytago ta có } x_1^2 = x_2^2 + x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2} \cdot x_2$$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = 1, x_2 = m-4$, Thay vào $x_1 = \sqrt{2} \cdot x_2$ ta được

$$1 = \sqrt{2}(m-4) \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = m-4, x_2 = 1$, thay vào $x_1 = \sqrt{2}x_2$ ta được

$$m-4 = \sqrt{2}.1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}(m-4) \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 4, m = \sqrt{2}(m-4) \text{ là giá trị cần tìm}$$

Chú ý: Ta có thể nhận xét $a + b + c = 0$ để được hai nghiệm của phương trình (*) là $x = 1, x = m-4$.

Câu 68: Cho paraboara (P) : $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2 + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = 2mx - m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta' = (-m)^2 - 1.(m^2 - m - 1) = m + 1$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - m - 1$$

$$\text{Vì } A, B \in (P): y = x^2 \text{ nên } y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$$

$$\text{Do đó } y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 22$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1x_2 = m^2 - m - 1$ Ta được

$$(2m)^2 - 2(m^2 - m - 1) + 2.2m = 22 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-5)(m+2)=0 \Leftrightarrow m=-5 \text{ (loại)}, m=2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm

Câu 69: Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng d: $y = (2m+1)x - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ Sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = (2m+1)x - 2m \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = [-(2m+1)]^2 - 4.1.2m = (2m+1)^2 - 8m = (2m-1)^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{Theo định lí Vi-et ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m+1, x_1x_2 = \frac{c}{a} = 2m$$

$$\text{Vì } A, B \in (P): y = x^2 \text{ nên } y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$$

$$\text{Do đó } T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m+1$, $x_1x_2 = 2m$ vào T ta được

$$T = (2m+1)^2 - 3.2m = 4m^2 - 2m + 1 = (2m - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } \min T = \frac{3}{4} \text{ khi } 2m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 70: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - m^2 + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 > 4$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = 2mx - m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

Có $\Delta' = (-m)^2 - 1.(m^2 - 1) = 1 > 0 \forall m$, do đó Phương trình (*) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt nên d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$$\text{Do } \Delta' = 1 \text{ nên hai nghiệm của (*) là } x = m \pm 1 \Leftrightarrow x = m - 1, x = m + 1$$

$$\text{Trường hợp 1: Xét } x_1 = m - 1, x_2 = m + 1 \Rightarrow y_1 = (m - 1)^2, y_2 = (m + 1)^2$$

$$\text{nên } y_1 - y_2 > 4 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m-1)^2 > 4 \Rightarrow m > 1$$

Vậy $m > 1$ hoặc $m < -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 71: Cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng d: $y = 2x + m - 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ mà $x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_1 x_2 = -4$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$-x^2 = 2x + m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + m - 1 = 0 (*)$$

$$\text{Có } \Delta' = 1^2 - 1 \cdot (m - 1) = 2 - m$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$

$$\text{Vì } A, B \in (P): y = -x^2 \text{ nên } y_1 = -x_1^2, y_2 = -x_2^2$$

Do đó:

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_1 x_2 = -4 \Leftrightarrow -x_1^3 + x_2^3 - x_1 x_2 = -4 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) + x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \right] + x_1 x_2 = 4$$

Thay $x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = m - 1$, ta được :

$$(x_1 - x_2) \left[(-2)^2 - m + 1 \right] + m - 1 = 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(5 - m) + m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 - 1)(5 - m) = 0 \Leftrightarrow m = 5 \text{ (loại)}, x_1 - x_2 = 1$$

Giải hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$, thay vào $x_1 x_2 = m - 1$ ta được

$$\frac{3}{4} = m - 1 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = \frac{7}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 72: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$.

- Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai phía Oy .
- Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính độ dài MN theo m và tìm m để $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN}$.
- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục tung. Tính độ dài đoạn HK theo m .
- Tính độ dài đoạn AB theo m và chứng minh $AB \geq \sqrt{m^2 + 8} \forall m$.
- Tính diện tích ΔOAB theo m và tìm m để $S_{\Delta OAB} = 2m + 1$ (đvdt).
- Chứng minh với mọi m , ΔOAB không thể vuông tại O .

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 2 = 0 \quad (*)$$

Có $\Delta = (-m)^2 - 4.1.(-2) = m^2 + 8 > 0 \forall m$ nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

Theo định lý Viét, ta có $x_A + x_B = -\frac{b}{a} = m$, $x_A x_B = \frac{c}{a} = -2 < 0$.

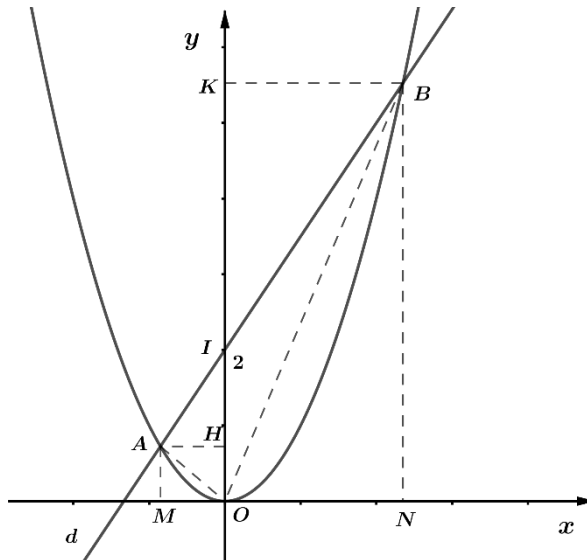
Vì $x_A x_B = -2 < 0 \Rightarrow x_A, x_B$ trái dấu nên A, B thuộc hai phía Oy .

Vậy d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B thuộc hai phía Oy .

b) Có

$$\begin{aligned} MN &= |x_A - x_B| \Rightarrow MN^2 = |x_A - x_B|^2 = (x_A - x_B)^2 - 4x_A x_B \\ &= m^2 + 8 \Rightarrow MN = \sqrt{m^2 + 8} \end{aligned}$$

Vậy $MN = \sqrt{m^2 + 8}$.



Do $\Delta OAM, \Delta OBN$ lần lượt vuông tại M, N nên

$$S_{\Delta OAM} = \frac{1}{2} AM \cdot OM = \frac{1}{2} |x_A^3|; S_{\Delta OBN} = \frac{1}{2} BN \cdot ON = \frac{1}{2} |x_B^3|.$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |x_A^3| = \frac{1}{2} |x_B^3| \Leftrightarrow |x_A^3| = |x_B^3| \Leftrightarrow |x_A| = |x_B|$$

$$\Leftrightarrow x_A = x_B \text{ (loại)}, x_A = -x_B \Leftrightarrow x_A + x_B = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $m = 0$ thì $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN}$.

$$\begin{aligned} \text{c) Có } HK &= |y_A - y_B| = |x_A^2 - x_B^2| = |(x_A + x_B)(x_A - x_B)| = |m \cdot (x_A - x_B)| \\ HK^2 &= m^2 [(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B] = m^2 (m^2 + 8). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } HK = |m| \sqrt{m^2 + 8}.$$

d) Có

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (mx_A + 2 - mx_B - 2)^2} \\ &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 (m^2 + 1)} = \sqrt{(m^2 + 8)(m^2 + 1)} \geq \sqrt{(m^2 + 8)}. \end{aligned}$$

e) Gọi I là giao điểm của d và $Oy \Rightarrow I(0; 2) \Rightarrow OI = |y_I| = 2$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục tung nên

$$AH = |x_A|, BK = |x_B|.$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta OAB} &= S_{\Delta OAI} + S_{\Delta OBI} = \frac{1}{2}(OI \cdot AH + OI \cdot BK) = |x_A| + |x_B| \\ &= m^2 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot |2| = m^2 + 8 \Rightarrow |x_A| + |x_B| = \sqrt{m^2 + 8} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta OAB} = \sqrt{m^2 + 8}.$$

$$\text{Có } S_{\Delta OAB} = 2m + 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 8} = 2m + 1 \text{ (điều kiện } 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 8 = 4m^2 + 4m + 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 4m - 7 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 3m + 7m - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m(m - 1) + 7(m - 1) \Leftrightarrow (m - 1)(3m + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{7}{3} \text{ (loại)}, m = 1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $m = 1$ thì $S_{\Delta OAB} = 2m + 1$ (đvdt).

Chú ý Câu này ta cần lưu ý đến điều kiện $m > -\frac{1}{2}$ trong quá trình giải.

$$\text{f) Ta có } OA^2 = x_A^2 + y_A^2, OB^2 = x_B^2 + y_B^2.$$

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = x_A^2 + x_B^2 - 2x_A x_B + y_A^2 + y_B^2 - 2y_A y_B.$$

$$\text{Xét } OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2x_A x_B + 2y_A y_B = 2(x_A x_B + x_A^2 x_B^2)$$

$$= 2x_A x_B (x_A x_B + 1) = 2 \cdot (-2) \cdot (-2 + 1) = 4 \neq 0$$

Do đó $OA^2 + OB^2 \neq AB^2$ nên ΔOAB không thể vuông tại O (đpcm).

Câu 73: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2x + 3$.

a) Tìm tọa độ giao điểm A, B của d và (P) với $x_A > 0$ và vẽ $d, (P)$.

b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.

c) Tìm tọa độ điểm $M \in Oy$ để $S_{MAB} = 4$ (đvdt).

d) Cho điểm $E(3; 0)$. Tìm tọa độ điểm $F \in (P)$ sao cho độ dài EF ngắn nhất.

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1^2 \\ x=-3 \Rightarrow y=(-3)^2 = 9 \end{cases}$$

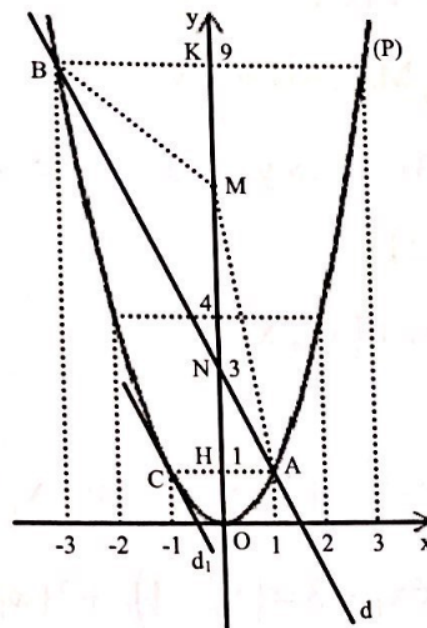
Vậy $A(1;1)$, $B(-3;9)$.

* $d: y = -2x + 3$

x		0		$\frac{3}{2}$	
y		3		0	

$(P): y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



b) Có $A(1;1)$, $B(-3;9)$ cố định nên độ dài đoạn AB không đổi, do đó S_{ABC} lớn nhất khi khoảng cách từ C đến đường thẳng d lớn nhất, khi đó C là tiếp điểm của đường thẳng $d_1 \parallel d$ và d_1 tiếp xúc với (P).

Gọi phương trình của d_1 : $y = ax + b$

Do $d_1 \parallel d$ nên ta có: $\begin{cases} a_{d_1} = a_d \\ b_{d_1} = b_d \end{cases} \Rightarrow d_1: y = -2x + b \quad (b \neq 3)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (P): $x^2 = -2x + b \Leftrightarrow x^2 + 2x - b = 0$ (*)

d_1 tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa mãn)

Khi đó x_c là nghiệm kép của (*): $x_c = -1 \Rightarrow y_c = (-1)^2 = 1$

Vậy $C(-1;1)$ là điểm cần tìm

c) Gọi N là giao điểm của d và Oy $\Rightarrow N(0;3)$

Do $M \in Oy \Rightarrow x_M = 0 \Rightarrow M(0; y_M)$, $y_M \neq 3$ (do $M \neq N$) $\Rightarrow MN = |y_M - y_N| = |y_M - 3|$

Kẻ $AH \perp Oy$ tại H, $BK \perp Oy$ tại K thì: $AH = |x_A| = |1| = 1$, $BK = |x_B| = |-3| = 3$

Vì A và B thuộc hai phía của Oy nên:

$$S_{MAB} = S_{MAN} + S_{MBN} = \frac{1}{2} MN \cdot AH + \frac{1}{2} MN \cdot BK = 2|y_M - 3| \quad (\text{đvdt})$$

Do đó $S_{AMB} = 4 \Rightarrow |y_M - 3| = 2 \Rightarrow y_M - 3 = \pm 2 \Rightarrow y_M = 5, y_M = 1$ (thỏa mãn)

Vậy $M(0; 1)$ hoặc $M(0; 5)$

d) Do $F \in (P) \Rightarrow y_F = x_F^2 \Rightarrow F(x_F; x_F^2)$

$$\text{Có: } EF = (x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 = (3 - x_F)^2 + (0 - x_F^2)^2 = x_F^4 + x_F^2 - 6x_F + 9$$

$$= x_F^4 - 2x_F^2 + 1 + 3x_F^2 - 6x_F + 3 = (x_F^2 - 1)^2 + 3(x_F - 1)^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow EF \geq 5$$

Vậy $\text{Min}EF = \sqrt{5} \Leftrightarrow x_F = 1$ hay $F(1; 1)$

CHUYÊN ĐỀ 6: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC CÂU TOÁN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CĂN THỨC BẬC 2

- Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a :

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

- Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$.
- Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

$$+ \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = A \sqrt{B} \text{ với } A, B \geq 0; \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = -A \sqrt{B} \text{ với } A < 0; B \geq 0$$

$$+ \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|} \text{ với } AB \geq 0, B \neq 0$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A}} = \frac{M \cdot \sqrt{A}}{A} \text{ với } A > 0; (\text{Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu})$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{M(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \text{ với } A, B \geq 0, A \neq B \text{ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)}$$

2. CĂN THỨC BẬC 3.

- Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$

$$\square \text{ Cho } a \in \mathbb{R}; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

- Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.

$$\square \text{ Nếu } a > 0 \text{ thì } \sqrt[3]{a} > 0.$$

$$\square \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } \sqrt[3]{a} < 0.$$

$$\square \text{ Nếu } a = 0 \text{ thì } \sqrt[3]{a} = 0.$$

$$\square \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \text{ với mọi } b \neq 0.$$

$$\square \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \text{ với mọi } a, b.$$

$$\square a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}.$$

$$\square A \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3 B}.$$

$$\square \sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{AB^2}}{B} \text{ với } B \neq 0$$

$$\square \frac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\frac{A}{B^3}}$$

$$\square \frac{1}{\sqrt[3]{A \pm \sqrt[3]{B}}} = \frac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B} \text{ với } A \neq \pm B.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU TẬP

Dạng 1: Rút gọn biểu thức không chứa biến

1. Phương pháp

1. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, & A \geq 0 \\ -A, & A < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
3. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
4. $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ (Với $B \geq 0$)
5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$ (Với $A < 0; B \geq 0$)
7. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
8. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B > 0$)
9. $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \pm B)}{A - B^2}$ (Với $A \geq 0; A \neq B^2$)
10. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})}{A - B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B$)
11. $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$

2. Câu tập

Câu 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{80}$$

$$N = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$$

$$P = \sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$$

$$A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$$

$$B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300}$$

$$C = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$$

Câu 2: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$$

$$\text{b) } \sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$$

$$\text{c) } \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

$$\text{d) } \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

$$\text{e) } \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$$

$$\text{f) } \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$$

Câu 3: Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } A = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } B = \sqrt{8-2\sqrt{15}}$$

$$\text{c) } C = \sqrt{9-4\sqrt{5}}$$

$$\text{d) } D = \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}}$$

$$\text{e) } E = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$\text{f) } F = \sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{8}$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức: (áp dụng các kiến thức tổng hợp)

$$A = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$D = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$E = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$$

$$F = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}}$$

Câu 5: Thu gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{18} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8}$

b) $B = \sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$

c) $C = \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} + \sqrt{2}$

Câu 6: Thực hiện phép tính

a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt[3]{8}$

c) $5\sqrt{2a} - \sqrt{50a} - 2\sqrt{a^3} + 4\sqrt{32a}$ với $a \geq 0$

Câu 7: Thu gọn các biểu thức sau: $A = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{5}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Câu 8: Tính $B = 21\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 - 6\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 - 15\sqrt{15}$.

Dạng 2: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

1. Phương pháp

	BIỂU THỨC - ĐKXĐ:		CÂU		
1.	$\sqrt{A}$	ĐKXĐ: $A \geq 0$	Câu: $\sqrt{x-2018}$	ĐKXĐ:	$x \geq 2018$
2.	$\frac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B \neq 0$	Câu: $\frac{x+4}{x-7}$	ĐKXĐ:	$x \neq 7$
3.	$\frac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B > 0$	Câu: $\frac{x+1}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$x > 3$
4.	$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A \geq 0; B > 0$	Câu: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$
5.	$\sqrt{\frac{A}{B}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \\ A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}$	Câu: $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$	ĐKXĐ:	$\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$

6.	Cho $a > 0$ ta có: $x^2 > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$.	Câu: $x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$
7.	Cho $a > 0$ ta có: $x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$	Câu: $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

2. Câu tập

Câu 1: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

- a. $\sqrt{-5x}$
- b. $\sqrt{4-3x}$
- c. $\sqrt{-3x+2}$

Câu 2: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

- a. $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$
- b. $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$
- c. $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$

Câu 3: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

- a. $\frac{x-1}{x+2} + \sqrt{x-2}$
- b. $\frac{2x}{x-4} + x^2\sqrt{x-2}$

Câu 4: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau

- a. $A = \frac{2x-1}{\sqrt{3-4x}}$
- b. $B = \frac{3x-2}{x-1} + \frac{4}{\sqrt{5-7x}}$
- c. $C = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4x+3} + \frac{1}{9-x^2}$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa biến và các câu hỏi phụ

1. Phương pháp

Bước 1: Tìm điều kiện xác định (nếu đề Câu chưa cho)

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích đa thức thành nhân tử

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung

Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn

2. Bài tập

Câu 1: Rút gọn $B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) \quad (x > 0)$.

Câu 2: Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x} + x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$, với $x > 0, x \neq 2$.

Câu 3: Thu gọn các biểu thức sau: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

Câu 4: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$.

b) $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x-1}}$ khi $x \geq \frac{1}{4}$.

Câu 5: Cho các số thực dương a, b ; $a \neq b$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x-9} + \frac{x - 7\sqrt{x} + 19}{x + \sqrt{x} - 12} - \frac{x - 5\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x}}$; $x > 0, x \neq 9$.

Câu 7: Cho biểu thức $P = \frac{3x + 5\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x sao cho $P = \frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho biểu thức $A = \left(\frac{4\sqrt{y}}{2 + \sqrt{y}} + \frac{8y}{4-y} \right) : \left(\frac{\sqrt{y}-1}{y-2\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{y}} \right)$, với $y > 0; y \neq 4; y \neq 9$

1) Rút gọn biểu thức A .

2) Tìm y để $A = -2$.

Câu 9: Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0, x \neq 25$.

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

Câu 10: Cho $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Rút gọn P .

2) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$.

3) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Câu 11: Cho biểu thức $P = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x + y}{x^2 - y^2}, x \neq y$.

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ và $y = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

Câu 12: Cho biểu thức $A = \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x}$ ($x \geq 0, x \neq 4$). Rút gọn A và tìm x để $A = \frac{1}{3}$.

Câu 13: Cho biểu thức $C = \frac{a}{a - 16} - \frac{2}{\sqrt{a} - 4} - \frac{2}{\sqrt{a} + 4}$.

1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C .

2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Câu 14: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{5x - 10\sqrt{x}}$ ($x > 0, x \neq 4$).

1) Rút gọn biểu thức A .

2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 15: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x - 2}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Câu 16: Cho biểu thức $P = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa

b) Rút gọn P

c) Tính giá trị của P khi $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$

Câu 17: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} - \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A khi $|a - 1| = 1$

Câu 18: Cho $A = \left(1 - \frac{a - 3\sqrt{a}}{a - 9} \right) : \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 3} + \frac{\sqrt{a} - 3}{2 - \sqrt{a}} - \frac{9 - a}{a + \sqrt{a} - 6} \right)$, với $a \geq 0; a \neq 4; a \neq 9$

a) Rút gọn A

b) Tìm a để $A + |A| = 0$.

Câu 19: Cho ba biểu thức $M = \frac{x\sqrt{x}-8}{3+(\sqrt{x}+1)^2}$; $N = \frac{(\sqrt{x}+1)^3 - (\sqrt{x}-1)^3}{(x-4)(3x+1)}$; $P = \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

- a) Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $M = x - 4$
 b) Trong trường hợp các biểu thức M, N và P xác định, rút gọn biểu thức $Q = MN + P$

Câu 20: Cho biểu thức $P = \frac{x+4\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Chứng minh với mọi $m < 0; m \neq 1$ thì phương trình $P = 3 + m\sqrt{x}$ luôn có một nghiệm duy nhất

Câu 21: Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, (với $x > 0; x \neq 9$).

Rút gọn biểu thức và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B > \frac{1}{2}$.

Câu 22: Cho hai biểu thức $T = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{a+1}{a-1}$ với $a > 0; a \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức T
 b) Tìm các giá trị nguyên của a để T nhận giá trị nguyên

Câu 23: Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tìm x là số chính phương để $2019A$ là số nguyên.

Câu 26: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tìm x để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất

Câu 27: Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Câu 28: Cho biểu thức $P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Câu 29: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{P}$

Câu 30: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{2}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm x để $A \geq 0$
- Tìm giá trị lớn nhất của A .

Câu 31: Cho biểu thức $Q = \frac{x+2\sqrt{x}-10}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ ($x \geq 0; x \neq 9$)

- Rút gọn biểu thức Q
- Tính giá trị của Q khi $x = 16$
- Tìm giá trị của x khi $Q = \frac{1}{3}$
- Tìm giá trị của x sao cho $Q > \frac{1}{9}$
- Tìm giá trị lớn nhất của Q .

Câu 32: Cho biểu thức $P = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

- Rút gọn P ;
- Tìm giá trị của P , biết $x = 4 + 2\sqrt{3}$;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 33: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}+2}{4-x} \right) : \frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$

- Rút gọn Q ;
- Tìm x để $Q = 2$;
- Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Câu 34: Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9}$ với $a \geq 0; a \neq 9$

- Rút gọn B
- Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên

Câu 35: Cho biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Câu 36: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{7}{12}$

c) Tìm x để $P > \frac{1}{2}$

d) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $\frac{1}{P}$ nhận giá trị nguyên.

e) Tìm tất cả các giá trị hữu tỷ của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 37: Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$, (với $x > 0$ và $x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x = \sqrt{2022+4\sqrt{2018}} - \sqrt{2022-4\sqrt{2018}}$.

Câu 38: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B \cdot |x-4|$.

Câu 39: Cho biểu thức $B = \frac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x \geq 0; x \neq 16$

a) Rút gọn B

b) Tìm giá trị của x để $B = 1$

c) Tính giá trị của x sao cho B không vượt quá $\frac{3}{2}$

d) Tìm giá trị của B khi x thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{2x-1} = x$

e) Tìm x để giá trị của B là một số nguyên.

Câu 40: Cho biểu thức $P = 1 : \left(\frac{x+2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$ với $x > 0$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$

c) Tìm x để $P = 2\sqrt{x} - 1$

d) Tìm m để có giá trị x thỏa mãn $P = m$

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Câu 41: Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x-2}}{x+\sqrt{x}-6}\right)$

với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$

d) So sánh P với 1

e) Tìm các giá trị của x để $P = \sqrt{x} - 3$.

Câu 42: Cho biểu thức: $A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$

a) Khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$ tính giá trị biểu thức A

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0; x \neq 5$

c) Tìm x để biểu thức $M = B - A$ nhận giá trị nguyên.

Dạng 4: Câu tập chinh phục điểm 9,10

Câu 1: Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Câu 2:

a) Cho $x = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}$.

b) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = x^4 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1942$.

c) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$

Câu 3: Tính $C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8+10\sqrt{7-4\sqrt{3}}}}}$

Câu 4: Chứng minh:

a) $A = \sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}}$ là số nguyên.

b) $B = \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên

Câu 5: Chứng minh rằng: $x = \sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a \geq \frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

Câu 6: Tính $x + y$ biết $\left(x + \sqrt{x^2 + 2015}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 2015}\right) = 2015$.

Câu 7:

- a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4$.
- b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
- c) Chứng minh: $2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

Câu 8: Cho $A = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}}$ và $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}$.
Chứng minh rằng $B > A$.

Câu 9: Cho $A = \frac{x\left(\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}\right)}{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}$ với $x > 4$

- a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.
- b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 10: Cho $a = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T = \frac{a^2 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}$.

Câu 11: Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$.

- a) Chứng minh rằng: $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.
- b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Câu 12: Cho $a = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$.

Giả sử có đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1940)^{2016}$. Hãy tính $f(a)$.

Câu 13: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 3$, ta có

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{65}{54}.$$

Câu 14: Chứng minh rằng: $\frac{43}{44} < \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2002\sqrt{2001} + 2001\sqrt{2002}} < \frac{44}{45}$

CHUYÊN ĐỀ 6: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC CÂU TOÁN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CĂN THỨC BẬC 2

- Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a :

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

- Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$.
- Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

$$+ \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = A \sqrt{B} \text{ với } A, B \geq 0; \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = -A \sqrt{B} \text{ với } A < 0; B \geq 0$$

$$+ \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|} \text{ với } AB \geq 0, B \neq 0$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A}} = \frac{M \cdot \sqrt{A}}{A} \text{ với } A > 0; (\text{Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu})$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{M(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \text{ với } A, B \geq 0, A \neq B \text{ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)}$$

2. CĂN THỨC BẬC 3.

- Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$

$$\square \text{ Cho } a \in \mathbb{R}; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

- Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.

$$\square \text{ Nếu } a > 0 \text{ thì } \sqrt[3]{a} > 0.$$

$$\square \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } \sqrt[3]{a} < 0.$$

$$\square \text{ Nếu } a = 0 \text{ thì } \sqrt[3]{a} = 0.$$

$$\square \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \text{ với mọi } b \neq 0.$$

$$\square \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \text{ với mọi } a, b.$$

$$\square a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}.$$

$$\square A \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3 B}.$$

$$\square \sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{AB^2}}{B} \text{ với } B \neq 0$$

$$\square \frac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\frac{A}{B^3}}$$

$$\square \frac{1}{\sqrt[3]{A \pm \sqrt[3]{B}}} = \frac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B} \text{ với } A \neq \pm B.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU TẬP

Dạng 1: Rút gọn biểu thức không chứa biến

1. Phương pháp

1. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
3. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
4. $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ (Với $B \geq 0$)
5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$ (Với $A < 0; B \geq 0$)
7. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
8. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B > 0$)
9. $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \pm B})}{A - B^2}$ (Với $A \geq 0; A \neq B^2$)
10. $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \pm \sqrt{B}})}{A - B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B$)
11. $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$

2. Câu tập

Câu 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{80}$$

$$N = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$$

$$P = \sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$$

$$A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$$

$$B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300}$$

$$C = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$$

Lời giải

$$M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{4^2 \cdot 5}$$

$$= \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{7^2 \cdot 5} - \sqrt{4^2 \cdot 5}$$

$$= 3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$N = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$$

$$= 5 \cdot 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2}$$

$$= 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$$

$$= (10 + 5 - 6)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

$$P = 5\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$$

$$= -5\sqrt{5}$$

$$A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{10^2 \cdot 3}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - 10\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$C = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$$

$$= (2\sqrt{3} - 5 \cdot 3\sqrt{3} + 4 \cdot 2\sqrt{3}) : \sqrt{3}$$

$$= -5\sqrt{3} : \sqrt{3} = -5$$

Nhận xét: Đây là một dạng toán dễ. Học sinh có thể bấm máy tính để kiểm tra kết quả, đa phần áp dụng kiến thức đưa thừa số ra ngoài dấu căn để giải toán. $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} \ (B \geq 0)$

Câu 2: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} & \text{b) } \sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2} & \text{c) } \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} \\ \text{d) } \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} & \text{e) } \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} & \text{f) } \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2} \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a) } \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} = |3-2\sqrt{2}| + |3+2\sqrt{2}| = 3-2\sqrt{2} + 3+2\sqrt{2} = 6$$

$$\text{Lưu ý: } \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$\text{Kết quả: b) } -4\sqrt{6} \text{ c) } 1 \text{ d) } 4 \text{ e) } 2\sqrt{5} \text{ f) } 2\sqrt{2} - 4$$

Câu 3: Rút gọn biểu thức

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} & \text{b) } B = \sqrt{8-2\sqrt{15}} \\ \text{c) } C = \sqrt{9-4\sqrt{5}} & \text{d) } D = \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} \\ \text{e) } E = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} & \text{f) } F = \sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{8} \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

$$\text{b) } B = \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{15}-1)^2} = \sqrt{15}-1$$

$$\text{c) } C = \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{14+2\sqrt{13}} - \sqrt{14-2\sqrt{13}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\sqrt{13}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{13}-1)^2} \right] = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } E &= \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}+1} - \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = |\sqrt{5}+1| - |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F &= \sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \\ &= |\sqrt{5}-\sqrt{2}| + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức: (áp dụng các kiến thức tổng hợp)

$$A = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$D = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$E = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$$

$$F = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} + (\sqrt{6}-\sqrt{5}) \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{5} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} + 2 - \sqrt{3} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } E &= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(3\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2-1}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+4)(5+2\sqrt{3})}{5^2-(2\sqrt{3})^2}} \\ &= \sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}} - \sqrt{\frac{26+13\sqrt{3}}{13}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\sqrt{3}-1| - \sqrt{3}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + (2+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) - 2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3(3-1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Kinh nghiệm: Đôi khi một số Câu toán rút gọn căn thức sẽ thực hiện dễ dàng hơn nếu chúng ta **trục căn thức** hoặc **rút gọn được một hạng tử** trong đề toán. Nếu quy đồng mẫu số thì việc thực hiện các phép tính rất phức tạp. Vì vậy trước khi làm Câu toán rút gọn, học sinh cần quan sát kỹ đề toán từ đó có định hướng giải đúng đắn để lời giải được ngắn gọn, chính xác.

Câu 5: Thu gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{18} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8}$

b) $B = \sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$

c) $C = \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} + \sqrt{2}$

Lời giải

a) $A = \sqrt{18} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8} = \sqrt{3^2 \cdot 2} - 2\sqrt{5^2 \cdot 2} + 3\sqrt{2^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

b) $B = \sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3^2 \cdot 3} - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$

c) $C = \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} + \sqrt{2} = \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} - \sqrt{7-2\sqrt{7}+1} + \sqrt{2}$

$$= \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{7} - \sqrt{2} - |\sqrt{7}-1| + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{7} - \sqrt{2} - (\sqrt{7}-1) + \sqrt{2} = 1 \quad (\text{Vì } \sqrt{7} > 1)$$

Câu 6: Thực hiện phép tính

a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt[3]{8}$

c) $5\sqrt{2a} - \sqrt{50a} - 2\sqrt{a^3} + 4\sqrt{32a}$ với $a \geq 0$

Lời giải

a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 \cdot 3} - 2\sqrt{5^2 \cdot 3} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{\frac{4}{3}}$

$$= 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{2^2}{3}} = -9\sqrt{3} + \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{-17\sqrt{3}}{3}$$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt[3]{8} = \sqrt{5+2\sqrt{5}+1} - \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} - \sqrt[3]{2^3} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} - 2$
 $= |\sqrt{5}+1| - |\sqrt{5}-1| - 2$

$$= \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1 - 2 \quad (\text{Vì } \sqrt{5} > 1) \\ = 0$$

$$\text{c) } 5\sqrt{2a} - \sqrt{50a} - 2\sqrt{a^3} + 4\sqrt{32a} = 5\sqrt{2a} - \sqrt{5^2 \cdot 2a} - 2\sqrt{a^2 \cdot a} + 4\sqrt{4^2 \cdot 2a} \\ = 5\sqrt{2a} - 5\sqrt{2a} - 2|a|\sqrt{a} + 16\sqrt{2a} = -2a\sqrt{a} + 16\sqrt{2a} \quad (\text{Vì } a \geq 0)$$

Câu 7: Thu gọn các biểu thức sau: $A = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{5}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Lời giải

$$A = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ = \frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{3\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ = 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{9\sqrt{5}-15}{4} = 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4} \\ = 3\sqrt{5} - 5 + 5 - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

Câu 8: Tính $B = 21(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})^2 - 6(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})^2 - 15\sqrt{15}.$

Lời giải

$$B = \frac{21}{2}(\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}})^2 - 3(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}})^2 - 15\sqrt{15} \\ = \frac{21}{2}(\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1)^2 - 3(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}+1)^2 - 15\sqrt{15} = \frac{15}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 - 15\sqrt{15} = 60.$$

Dạng 2: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

1. Phương pháp

	BIỂU THỨC - ĐKXĐ:		CÂU		
1.	$\sqrt{A}$	ĐKXĐ: $A \geq 0$	Câu: $\sqrt{x-2018}$	ĐKXĐ:	$x \geq 2018$
2.	$\frac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B \neq 0$	Câu: $\frac{x+4}{x-7}$	ĐKXĐ:	$x \neq 7$
3.	$\frac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B > 0$	Câu: $\frac{x+1}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$x > 3$
4.	$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A \geq 0; B > 0$	Câu: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$

5.	$\sqrt{\frac{A}{B}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \\ A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}$	Câu: $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$
6.	Cho $a > 0$ ta có: $x^2 > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$	Câu: $x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$		
7.	Cho $a > 0$ ta có: $x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$	Câu: $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$		

2. Câu tập

Câu 1: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

- a. $\sqrt{-5x}$
- b. $\sqrt{4-3x}$
- c. $\sqrt{-3x+2}$

Lời giải

- a) $\sqrt{-5x}$ có nghĩa khi $-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$
- b) $\sqrt{4-3x}$ có nghĩa khi $4-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$
- c) $\sqrt{-3x+2}$ có nghĩa khi $-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$

Câu 2: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

- a. $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$
- b. $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$
- c. $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$

- a) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} 3-2x \neq 0 \\ \frac{1}{3-2x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3}{2} \\ 1 \cdot (3-2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3}{2} \\ 3-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$
- b) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} 4 \cdot (2x+3) \geq 0 \\ 2x+3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$
- c) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} -2(x+1) \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Câu 3: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

- a. $\frac{x-1}{x+2} + \sqrt{x-2}$
- b. $\frac{2x}{x-4} + x^2\sqrt{x-2}$

Lời giải

- a) $\frac{x-1}{x+2} + \sqrt{x-2}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$
- b) $\frac{2x}{x-4} + x^2\sqrt{x-2}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Câu 4: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau

- a. $A = \frac{2x-1}{\sqrt{3-4x}}$
- b. $B = \frac{3x-2}{x-1} + \frac{4}{\sqrt{5-7x}}$
- c. $C = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4x+3} + \frac{1}{9-x^2}$

Lời giải

- a) $A = \frac{2x-1}{\sqrt{3-4x}}$ có nghĩa khi $3-4x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}$
- b) $B = \frac{3x-2}{x-1} + \frac{4}{\sqrt{5-7x}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 5-7x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x < \frac{5}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{5}{7}$
- c) $C = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4x+3} + \frac{1}{9-x^2}$ có nghĩa khi $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x^2-4x+3 \neq 0 \\ 9-x^2 \end{cases}$

Ta có: $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$; $x^2-4x+3 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

$9-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} x < 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa biến và các câu hỏi phụ

1. Phương pháp

Bước 1: Tìm điều kiện xác định (nếu đề Câu chưa cho)

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích đa thức thành nhân tử

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung

Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn

2. Bài tập

Câu 1: Rút gọn $B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) \quad (x > 0).$

Lời giải

$$B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) \quad (x > 0)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x+3})} \right) \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}} : \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+3})+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x+3})} \right) = (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = 1
\end{aligned}$$

Câu 2: Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x}+x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$, với $x > 0, x \neq 2$.

Lời giải

Với điều kiện đã cho thì:

$$P = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = 1.$$

Câu 3: Thu gọn các biểu thức sau: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{3}{\sqrt{x-3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

Lời giải

Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ ta có:

$$A = \left(\frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3.$$

Câu 4: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$.

b) $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x-1}}$ khi $x \geq \frac{1}{4}$.

Lời giải

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}} = \sqrt{x} - \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x} - \left| \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right|$

+ Nếu $\sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$ thì $\left| \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

+ Nếu $\sqrt{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4}$ thì $\left| \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right| = -\sqrt{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$

b)

$$B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x-1}} = \sqrt{4x-1-2\sqrt{4x-1}+1} + \sqrt{4x-1+2\sqrt{4x-1}+1}$$

Hay $B = \sqrt{(\sqrt{4x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4x-1}+1)^2} = |\sqrt{4x-1}-1| + |\sqrt{4x-1}+1| = |\sqrt{4x-1}-1| + \sqrt{4x-1} + 1$
 + Nếu $\sqrt{4x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ thì $|\sqrt{4x-1}-1| = \sqrt{4x-1}-1$ suy ra $B = 2\sqrt{4x-1}$.

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow 4x-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$ thì $|\sqrt{4x-1}-1| = -\sqrt{4x-1}+1$ suy ra $B = 2$.

Câu 5: Cho các số thực dương a, b ; $a \neq b$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= \frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a} \\ &= \frac{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}+(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = 0 \\ &= \frac{a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\ &= \frac{3a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} = 0 \end{aligned}$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}-6}{x-9} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12} - \frac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}}$; $x > 0, x \neq 9$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+\sqrt{x}-6}{x-9} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12} - \frac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} - \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+4} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}-8+x-7\sqrt{x}+19-x+8\sqrt{x}-15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

Câu 7: Cho biểu thức $P = \frac{3x+5\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x sao cho $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x+5\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} = \frac{3x+5\sqrt{x}-4-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+3)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{3x+5\sqrt{x}-4-(x-1)-(x+6\sqrt{x}+9)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x-\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x-4\sqrt{x}+3\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)+3(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}. \end{aligned}$$

$$b) P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-8 = \sqrt{x}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = 49 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy khi $x = 49$ thì $P = \frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho biểu thức $A = \left(\frac{4\sqrt{y}}{2+\sqrt{y}} + \frac{8y}{4-y} \right) : \left(\frac{\sqrt{y}-1}{y-2\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{y}} \right)$, với $y > 0; y \neq 4; y \neq 9$

1) Rút gọn biểu thức A .

2) Tìm y để $A = -2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{4\sqrt{y}(\sqrt{y}-2)-8y}{(\sqrt{y}-2)(\sqrt{y}+2)} : \left(\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}(\sqrt{y}-2)} - \frac{2}{\sqrt{y}} \right) = \frac{-4y-8\sqrt{y}}{(\sqrt{y}-2)(\sqrt{y}+2)} : \frac{\sqrt{y}-1-2(\sqrt{y}-2)}{\sqrt{y}(\sqrt{y}-2)} \\ &= \frac{-4\sqrt{y}(\sqrt{y}+2)}{(\sqrt{y}-2)(\sqrt{y}+2)} : \frac{-\sqrt{y}+3}{\sqrt{y}(\sqrt{y}-2)} = \frac{-4\sqrt{y}}{(\sqrt{y}-2)} \cdot \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}-2)}{-\sqrt{y}+3} = \frac{4y}{\sqrt{y}-3} \end{aligned} \quad (\text{với}$$

$y > 0; y \neq 4; y \neq 9$)

1) Tìm y để $A = -2$

$$\text{Ta có } A = -2 \Leftrightarrow \frac{4y}{\sqrt{y}-3} = -2 \Leftrightarrow 4y = -2(\sqrt{y}-3) \Leftrightarrow 4y+2\sqrt{y}-6=0$$

Đặt $\sqrt{y} = t > 0$ ta có phương trình $4t^2 + 2t - 6 = 0$

Ta có $a+b+c=0$ nên phương trình có hai nghiệm:

$t_1 = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

$t_2 = -6$ (không thỏa mãn điều kiện)

Với $t = 1$, ta có $y = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $A = -2 \Leftrightarrow y = 1$.

Câu 9: Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0, x \neq 25$.

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5) - 10\sqrt{x} - 5(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}. \end{aligned}$$

Với $x = 9$ ta có: $\sqrt{x} = 3$. Vậy $A = \frac{3-5}{3+5} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$.

Câu 10: Cho $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Rút gọn P .

2) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$.

3) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

$$1) P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$2) P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 9 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$3) \text{ Với } x \geq 0, P = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{3}{0+3} = 1 \Rightarrow P_{\max} = 1 \text{ khi } x = 0 \text{ (TM).}$$

Câu 11: Cho biểu thức $P = \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2-y^2}, x \neq y$.

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ và $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Lời giải

$$1) P = \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}.$$

2) Với $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ và $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$

Thay vào P ta được: $P = \frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{3-2\sqrt{3}} = -\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12: Cho biểu thức $A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ ($x \geq 0, x \neq 4$). Rút gọn A và tìm x để $A = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{4}{4-x} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2(2-\sqrt{x})}{4-x} = \frac{2}{2+\sqrt{x}}. \text{ Với } A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (nhận).}$$

Vậy $A = \frac{1}{3}$ khi $x = 16$.

Câu 13: Cho biểu thức $C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$.

1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C .

2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a = 9-4\sqrt{5}$.

Lời giải

1) Biểu thức C có nghĩa khi:
$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a-16 \neq 0 \\ \sqrt{a}-4 \neq 0 \\ \sqrt{a}+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 16 \\ a \neq 16 \\ \forall a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 0, a \neq 16.$$

$$\begin{aligned} \text{Rút gọn } C &= \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} = \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a-2(\sqrt{a}+4)-2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}. \end{aligned}$$

2) Giá trị của C khi $a = 9-4\sqrt{5}$.

Ta có: $a = 9-4\sqrt{5} = 4-4\sqrt{5}+5 = (2-\sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$

Vậy $C = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2+4} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 9-4\sqrt{5}$.

Câu 14: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ ($x > 0, x \neq 4$).

1) Rút gọn biểu thức A .

2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải

1) Với $x > 0, x \neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Ta có $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0, x > 0, x \neq 4$

$$A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}, \text{ kết hợp với } A \text{ nhận giá trị là một}$$

số nguyên thì $A \in \{1, 2\}$.

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

Câu 15: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Lời giải

$$P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

b) Theo câu a) $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5 \quad 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Câu 16: Cho biểu thức $P = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa

b) Rút gọn P

c) Tính giá trị của P khi $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$

Lời giải

a) Để P có nghĩa thì
$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ ab \geq 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0 \\ \sqrt{ab} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

Vậy P có nghĩa khi $a > 0$ và $b > 0$

b) Với $a > 0$ và $b > 0$ ta có: $P = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} = a - b$

Vậy $P = a - b (a > 0; b > 0)$

c) Ta có $\begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện) thay vào biểu thức P ta được $P = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Vậy $P = \sqrt{3}$ khi $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$.

Câu 17: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} - \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A khi $|a-1|=1$

Lời giải

a) Điều kiện để A có nghĩa là: $a > 0; a \neq 1$

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} - \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right) = \left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\frac{-4a}{a-1} \right) = -2\sqrt{a}$$

Vậy $A = -2\sqrt{a} (a > 0; a \neq 1)$

b) Ta có $|a-1|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=1 \\ a-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2(tm) \\ a=0(loại) \end{cases}$

Thay $a = 2$ vào biểu thức A ta được $A = -2\sqrt{2}$.

Câu 18: Cho $A = \left(1 - \frac{a-3\sqrt{a}}{a-9}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3} + \frac{\sqrt{a}-3}{2-\sqrt{a}} - \frac{9-a}{a+\sqrt{a}-6}\right)$, với $a \geq 0; a \neq 4; a \neq 9$

a) Rút gọn A

b) Tìm a để $A + |A| = 0$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } 1 - \frac{a-3\sqrt{a}}{a-9} = 1 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = 1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3} = \frac{3}{\sqrt{a}+3}$$

$$\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3} + \frac{\sqrt{a}-3}{2-\sqrt{a}} - \frac{9-a}{a+\sqrt{a}-6} = \frac{(\sqrt{a}-2)^2 - (\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3) - 9+a}{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-2)} = \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3}{\sqrt{a}+3} \cdot \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2} = \frac{3}{\sqrt{a}-2}$$

$$\text{b) Ta có } A + |A| = 0 \Leftrightarrow |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{a}-2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq a < 4$$

Vậy $0 \leq a < 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 19: Cho ba biểu thức $M = \frac{x\sqrt{x}-8}{3+(\sqrt{x}+1)^2}; N = \frac{(\sqrt{x}+1)^3 - (\sqrt{x}-1)^3}{(x-4)(3x+1)}; P = \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

a) Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $M = x-4$

b) Trong trường hợp các biểu thức M, N và P xác định, rút gọn biểu thức $Q = MN + P$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } M &= \frac{x\sqrt{x}-8}{3+(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{(\sqrt{x})^3 - 2^3}{3+(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{3+x+2\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{x+2\sqrt{x}+4} = \sqrt{x}-2 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } M = x-4 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = x-4 = (\sqrt{x})^2 - 2^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2=0 \\ \sqrt{x}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x=4$ thì $M = x-4$

b) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$

$$\text{Ta có } M = \sqrt{x}-2; P = \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{(\sqrt{x}+1)^3 - (\sqrt{x}-1)^3}{(x-4)(3x+1)} = \frac{(\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1)\left[(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}-1)^2\right]}{(x-4)(3x+1)} \\ &= \frac{2(x+2\sqrt{x}+1+x-1+x-2\sqrt{x}+1)}{(x-4)(3x+1)} = \frac{2(3x+1)}{(x-4)(3x+1)} = \frac{2}{x-4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q = M.N + P = (\sqrt{x} - 2) \cdot \frac{2}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 1$$

Vậy $Q = 1$.

Câu 20: Cho biểu thức $P = \frac{x+4\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh với mọi $m < 0; m \neq 1$ thì phương trình $P = 3 + m\sqrt{x}$ luôn có một nghiệm duy nhất

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$

b) Ta có $P = 3 + m\sqrt{x} (x \geq 0; x \neq 1) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} = 3 + m\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}+5 = 3\sqrt{x}+6+mx+2m\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow mx + (2m+2)\sqrt{x} + 1 = 0$$

Đặt $\sqrt{x} = t$ (vì $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow t \geq 0; t \neq 1$).

Ta có phương trình $mt^2 + (2m+2)t + 1 = 0 (*)$

Khi $m < 0$, ta có phương trình (*) là phương trình bậc nhất hai ẩn t, ta có:

$$\Delta' = (m+1)^2 - m = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{Phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân}$$

biệt t_1, t_2 . Theo định lý Viet, ta có
$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -\frac{2m+2}{m} \\ t_1 t_2 = \frac{1}{m} \end{cases}$$

Xét $f(t) = mt^2 + (2m+2)t + 1 \Rightarrow f(1) = m.1^2 + (2m+2).1 + 1 = 3m+3$

Nhận thấy, khi $m < 0; m \neq -1$, ta có $\begin{cases} f(1) \neq 0 \\ t_1 t_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt}$

trái dấu và nghiệm dương khác 1

Vậy với mọi $m < 0; m \neq -1$ thì phương trình $P = 3 + m\sqrt{x}$ luôn có một nghiệm duy nhất.

Câu 21: Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, (với $x > 0; x \neq 9$).

Rút gọn biểu thức và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B > \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3+\sqrt{x} - (3-\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3-\sqrt{x}}.$$

$$B > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{4-(3-\sqrt{x})}{2(3-\sqrt{x})} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{2(3-\sqrt{x})} > 0; (*)$$

Vì $1+\sqrt{x} > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow 3-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 9$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 22: Cho hai biểu thức $T = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{a+1}{a-1}$ với $a > 0; a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức T

b) Tìm các giá trị nguyên của a để T nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) Ta có

$$T = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{a+1}{a-1} = \frac{(\sqrt{a})^3-1}{(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}} - \frac{(\sqrt{a})^3+1}{(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = 2$$

$$\Rightarrow T = 2 : \frac{a+1}{a-1} = \frac{2(a-1)}{a+1}$$

b) Ta có $\Rightarrow T = \frac{2(a-1)}{a+1} = 2 - \frac{4}{a+1}$. Do đó $T \in \mathbb{Z}$, khi $a+1$ là ước của 4

Vì $a > 0, a \neq 1$ nên ta có $a+1 = 4 \Rightarrow a = 3$.

Vậy $a = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 23: Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x là số chính phương để $2019A$ là số nguyên.

Lời giải

$$a) A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 - 3\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$= \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{2x-2\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$b) 2019A = \frac{2019(2\sqrt{x}+2-3)}{\sqrt{x}+1} = 4038 - \frac{6057}{\sqrt{x}+1}$$

$2019A$ là số nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}+1$ là ước nguyên dương của 6057 gồm: 1; 3; 9; 673; 2019; 6057.

+) $\sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x} + 1 = 9 \Leftrightarrow x = 64$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x} + 1 = 673 \Leftrightarrow x = 451584$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x} + 1 = 2019 \Leftrightarrow x = 4072324$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x} + 1 = 6057 \Leftrightarrow x = 36675136$, thỏa mãn.

Câu 24: Cho biểu thức $P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm GTNN của P

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 9 \Rightarrow P = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}$

b) Với $x \geq 0; x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq 1 \Rightarrow P = \frac{-3}{\sqrt{x}+3} \geq -1$, dấu “=” xảy ra khi $x = 0$

Vậy $P_{\min} = -1$ khi $x = 0$.

Câu 25: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) (x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Với giá trị nào của x thì $\frac{1}{A}$ đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

b) Ta có $\frac{1}{A} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)-3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+1} \geq -3 \Rightarrow \frac{1}{A} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq -2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn). Khi đó $\left(\frac{1}{A} \right)_{\min} = -2 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 26: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

a) Điều kiện $0 \leq x \neq 1 \Rightarrow A = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$

b) Ta có $A = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$, với $0 \leq x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow A = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A_{\max} = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 27: Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$

- a) Rút gọn biểu thức P
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0 \Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

b) Ta có

$$\begin{cases} x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow P_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Câu 28: Cho biểu thức $P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

- a) Rút gọn biểu thức P
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

a) Điều kiện $a \geq 0 \Rightarrow P = a - \sqrt{a}$

b) Ta có $P = a - \sqrt{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Vì $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi $a > 0 \Rightarrow P \geq -\frac{1}{4}$, dấu “=” xảy

ra khi $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy $P_{\min} = -\frac{1}{4}$.

Câu 29: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)$

- a) Rút gọn biểu thức P
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{P}$

Lời giải

a) Điều kiện $x > 0; x \neq 1 \Rightarrow P = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$

b) Với $x > 0$, nên $\sqrt{P}$ có nghĩa khi $P > 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-1} > 0 \Rightarrow x > 1$

Do $P > 0$ với mọi $x > 1 \Rightarrow \sqrt{P}_{\min} \Leftrightarrow P_{\min}$

Xét $\frac{1}{P} = \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow P \geq 4$, dấu “=” xảy ra khi $x = 4$

$\Rightarrow P_{\min} = 4 \Rightarrow \sqrt{P}_{\min} = 2$ khi $x = 4$.

Câu 30: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{2}$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm x để $A \geq 0$

c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow A = -x + \sqrt{x}$

b) Ta có

$$A \geq 0 \Leftrightarrow -x + \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0; x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$$

$$c) A = -x + \sqrt{x} = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \forall x \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow GTLN A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Câu 31: Cho biểu thức $Q = \frac{x+2\sqrt{x}-10}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \quad (x \geq 0; x \neq 9)$

1. Rút gọn biểu thức Q

2. Tính giá trị của Q khi $x=16$

3. Tìm giá trị của x khi $Q = \frac{1}{3}$

4. Tìm giá trị của x sao cho $Q > \frac{1}{9}$

5. Tìm giá trị lớn nhất của Q .

Lời giải

1. Với $x \geq 0; x \neq 9$ thì

$$\begin{aligned} Q &= \frac{x+2\sqrt{x}-10}{x-3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{x+2\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+2(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}-10 - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}-10-x+4-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy với } x \geq 0; x \neq 9 \text{ thì } Q = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

2. Thay $x=16$ (thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 9$) vào Q ta được:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{16}+2} = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

Vậy khi $x=16$ thì $Q=\frac{1}{6}$

$$3. Q=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3=\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn } x \geq 0; x \neq 9 \text{)}$$

Vậy với $x=1$ thì $Q=\frac{1}{3}$

$$4. Q > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{9} > 0 \Leftrightarrow \frac{9-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{7-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > 0 \quad (1)$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$ nên $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 7-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 7 \Leftrightarrow x < 49$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 9$ nên $\begin{cases} 0 \leq x < 49 \\ x \neq 9 \end{cases}$

Vậy với $\begin{cases} 0 \leq x < 49 \\ x \neq 9 \end{cases}$ thì $Q > \frac{1}{9}$

5. Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$ nên $\sqrt{x}+2 \geq 2$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2} \text{ với mọi } x \geq 0; x \neq 9$$

Vậy Q đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $x=0$ (thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 9$)

Câu 32: Cho biểu thức $P = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị của P, biết $x = 4 + 2\sqrt{3}$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 9$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1) + 3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3x-9\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6+2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3-9\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5x - 17\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{5x - 15\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{(5\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}.
\end{aligned}$$

b) Ta có $x = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1$;

Do đó: $P = \frac{5(\sqrt{3} + 1) - 2}{(\sqrt{3} + 1) + 1} = \frac{5\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 2} = \frac{(5\sqrt{3} + 3)(2 - \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + 2)(2 - \sqrt{3})} = 7\sqrt{3} - 9$.

c) Ta có $P = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{5\sqrt{x} + 5 - 7}{\sqrt{x} + 1}$

$$P = 5 - \frac{7}{\sqrt{x} + 1}.$$

Vì $\frac{7}{\sqrt{x} + 1} > 0$ nên P có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x} + 1}$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = 0.$$

Khi đó min $P = 5 - 7 = -2$.

Câu 33: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{5\sqrt{x} + 2}{4 - x} \right) : \frac{3\sqrt{x} - x}{x + 4\sqrt{x} + 4}$

a) Rút gọn Q;

b) Tìm x để $Q = 2$;

c) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Lời giải

ĐKXĐ: $x > 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

$$\begin{aligned}
\text{a) } Q &= \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{5\sqrt{x} + 2}{4 - x} \right) : \frac{3\sqrt{x} - x}{x + 4\sqrt{x} + 4} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - (5\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} : \frac{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 2)^2} \\
&= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2 - 2x + 4\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$$

$$b) Q = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = 2\sqrt{x}-6$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64. (\text{Thỏa mãn ĐKXĐ}).$$

$$c) Q < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x}+2 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9.$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $Q < 0$ khi $0 < x < 9$ và $x \neq 4$.

Câu 34: Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9}$ với $a \geq 0; a \neq 9$

a) Rút gọn B

b) Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) Với $a \geq 0; a \neq 9$ ta có:

$$B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{3(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$= \frac{a+3\sqrt{a}-3\sqrt{a}+9-a+2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \frac{11}{a-9}$$

$$b) \text{ Để } B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{a-9} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 11:(a-9) \Leftrightarrow (a-9) \in U(11)$$

$U(11) = \{1; 11; -1; -11\}$. Khi đó ta có bảng giá trị

$a-9$	-11	-1	1	11
a	-2	8	10	20
	Không thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $a \in \{8; 10; 20\}$ thì $B \in \mathbb{Z}$

Câu 35: Cho biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

$$a) A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

b) Cách 1: Với $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$.

$$\text{Vậy } 0 < A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2.$$

$$\text{Vì A nguyên nên } A = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Không thỏa mãn).}$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giá trị A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Ax + (A-1)\sqrt{x} + A - 2 = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } A = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{Trường hợp 2: } A \neq 0 \Rightarrow \Delta = (A-1)^2 - 4A(A-2) = -3A^2 + 6A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A - \frac{1}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 2A + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (A-1)^2 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow A \in \{1; 2\} \text{ do } A \in \mathbb{Z}, A > 0$$

$$\text{Với } A = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } A = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại).}$$

Câu 36: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn P

$$b) \text{ Tìm } x \text{ để } P = \frac{7}{12}$$

$$c) \text{ Tìm } x \text{ để } P > \frac{1}{2}$$

d) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $\frac{1}{P}$ nhận giá trị nguyên.

e) Tìm tất cả các giá trị hữu tỷ của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Với } x \geq 0; x \neq 4 \text{ thì } P &= \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6} \\ &= \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-2(\sqrt{x}+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-2(\sqrt{x}+3)} \\
&= -\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{-(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) + (\sqrt{x}-2)^2 - 9+x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{9-x + (\sqrt{x}-2)^2 - 9+x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}
\end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 4$ thì $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$

$$b) P = \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow 12\sqrt{x}-24 = 7\sqrt{x}+21 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 45$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow x = 81 \text{ (thỏa mãn } x \geq 0; x \neq 4)$$

Vậy với $x = 81$ thì $P = \frac{7}{12}$

$$c) P > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-4-\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+3} > 0 \quad (3)$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 4$ nên $\sqrt{x}+3 > 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 4$

$$\text{Nên } (3) \Leftrightarrow \sqrt{x}-7 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 7 \Leftrightarrow x > 49$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$.

Vậy $x > 49$ thì $P > \frac{1}{2}$

$$d) \text{ Ta có } \frac{1}{P} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$$

$$\frac{1}{P} \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-2} \text{ nguyên} \Leftrightarrow 5 : (\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \text{ là Ư}(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

Lập bảng:

$\sqrt{x}-2$	-1	1	-5	5
$\sqrt{x}$	1	3	-3	7
x	1	9		49
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Loại	Thỏa mãn

Vậy $x \in \{1; 9; 49\}$ thì $\frac{1}{P}$ nguyên.

$$e) \text{ Ta có } P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+3-2}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

Vì $\frac{2}{\sqrt{x}+3} > 0$ nên $P < 1$ với mọi $x \geq 0; x \neq 4$

$$\text{Mà } \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{x}+3} \geq -\frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+3} \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Do đó $\frac{1}{3} \leq P < 1$. Vậy không có giá trị hữu tỷ nào của x để P nguyên.

Câu 37: Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$, (với $x > 0$ và $x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x = \sqrt{2022+4\sqrt{2018}} - \sqrt{2022-4\sqrt{2018}}$.

Lời giải

a) Ta có $1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$$\text{Và } \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{x-1+1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \text{ nên } P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

b) Có $x = \sqrt{2022+4\sqrt{2018}} - \sqrt{2022-4\sqrt{2018}} = \sqrt{(\sqrt{2018}+2)^2} - \sqrt{(\sqrt{2018}-2)^2}$
 $= |\sqrt{2018}+2| - |\sqrt{2018}-2| = \sqrt{2018}+2 - \sqrt{2018}+2 = 4$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$.

+ Vậy giá trị của biểu thức P tại $x = 4$ là: $\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

Câu 38: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B \cdot |x-4|$.

Lời giải

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.

Khi $x = 9$ ta có $A = \frac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-5} = \frac{3+2}{3-5} = -\frac{5}{2}$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

$$\begin{aligned} \text{Với } x \geq 0, x \neq 25 \text{ thì } B &= \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-15} = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}-5)+20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{3\sqrt{x}-15+20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{1}{\sqrt{x}-5} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

c) Tìm tất cả các giá trị của để $A = B \cdot |x-4|$.

Với $x \geq 0, x \neq 25$ Ta có: $A = B \cdot |x-4|$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \frac{1}{\sqrt{x}-5} \cdot |x-4| \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = |x-4| \quad (*)$$

Nếu $x \geq 4, x \neq 25$ thì (*) trở thành: $\sqrt{x}+2 = x-4$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) = 0$$

Do $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

Nếu $0 \leq x < 4$ thì (*) trở thành: $\sqrt{x}+2 = 4-x$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) = 0$$

Do $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy có hai giá trị $x = 1$ và $x = 9$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 39: Cho biểu thức $B = \frac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x \geq 0; x \neq 16$

a) Rút gọn **B.**

b) Tìm giá trị của x để $B = 1$

c) Tính giá trị của x sao cho B không vượt quá $\frac{3}{2}$

d) Tìm giá trị của B khi x thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{2x-1} = x$

e) Tìm x để giá trị của B là một số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Với } x \geq 0; x \neq 16 \text{ thì } B &= \frac{2(x+4)}{x+\sqrt{x}-4\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4} \\ &= \frac{2(x+4)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-4(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4} = \frac{2(x+4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x+8+\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)-8(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+8+x-4\sqrt{x}-8\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3x-12\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ Vậy với } x \geq 0; x \neq 16 \text{ thì } B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

b) $B=1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}=\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

(thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 16$). Vậy $x=\frac{1}{4}$ thì $B=1$

c) B không vượt quá $\frac{3}{2} \Leftrightarrow B \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+1)} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \leq 0 (*)$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$ nên $\sqrt{x}+1 > 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 16$

Vậy $0 \leq x \leq 1$ thì B không vượt quá $\frac{3}{2}$

d) Ta có $\sqrt{2x-1}=x$ ($x \geq 0; x \neq 16$) $\Leftrightarrow 2x-1=x^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ (

thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 16$) $\Rightarrow B = \frac{3\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}$ Vậy $\sqrt{2x-1}=x$ thì $B = \frac{3}{2}$

e) $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+3-3}{\sqrt{x}+1} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} < 3$ (vì $\frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0$ với $x \geq 0; x \neq 16$)

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$ nên $\sqrt{x}+1 \geq 1$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq -3 \Rightarrow 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 0$$

Suy ra $0 \leq B < 3$ Mà $B \in \mathbb{Z}$ nên $B \in \{0; 1; 2\}$

TH1: $B=0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=0 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

TH2: $B=1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}=\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$ (thỏa mãn)

TH3: $B=2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}=2\sqrt{x}+6 \Leftrightarrow \sqrt{x}=6 \Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{0; \frac{9}{4}; 36\right\}$ thì $B \in \mathbb{Z}$

Câu 40: Cho biểu thức $P = 1 : \left(\frac{x+2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x > 0$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$

c) Tìm x để $P = 2\sqrt{x} - 1$

d) Tìm m để có giá trị x thỏa mãn $P = m$

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

a) Với $x \geq 0$ thì $P = 1 : \left(\frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$

$$= 1 : \left[\frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right]$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x + 2\sqrt{x} - 2 - x + 1 + x - \sqrt{x} + 1} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

Vậy với $x > 0$ thì $P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

b) Với $x = 7 - 4\sqrt{3} = 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 = (2 - \sqrt{3})^2$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} \text{ (vì } 2 > \sqrt{3} \text{)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{7 - 4\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 3$$

Vậy với $x = 7 - 4\sqrt{3}$ thì $P = 3$

c) $P = 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 2x - \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn $x > 0$)

Vậy với $x = 1$ thì $P = 2\sqrt{x} - 1$

d) $P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = m \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = m\sqrt{x} \Leftrightarrow x - (m + 1)\sqrt{x} + 1 = 0 \text{ (1)}$

Vì $1 \neq 0$ nên (1) là phương trình bậc hai.

Đặt $t = \sqrt{x} \text{ (} t > 0 \text{)}$

(1) trở thành $t^2 - (m + 1)t + 1 = 0 \text{ (2)}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta &= (m + 1)^2 - 4 = m^2 + 2m - 3 = m^2 - m + 3m - 3 \\ &= m(m - 1) + 3(m - 1) = (m - 1)(m + 3) \end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm dương

TH1: Phương trình (2) có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)(m+3) \geq 0 \\ S = m+1 > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

TH2: Phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow S = 1 < 0 \text{ (vô lý)} \Rightarrow \text{Loại}$$

TH3: Phương trình (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0

$$\text{Với } t = 0 \text{ thay vào (2) ta được } 0^2 - (m+1) \cdot 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ (vô lý)} \Rightarrow \text{Loại}$$

Vậy $m \geq 1$ là giá trị cần tìm.

$$\text{e) } P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

$$\text{Vì } x > 0 \text{ nên } \sqrt{x} > 0; \frac{1}{\sqrt{x}} > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $\sqrt{x}; \frac{1}{\sqrt{x}}$ ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn } x > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow P \geq 2 - 1 = 1. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } P = 1 \text{ khi } x = 1$$

Câu 41: Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6}\right)$

với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$

d) So sánh P với 1

e) Tìm các giá trị của x để $P = \sqrt{x} - 3$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 4$

$$\begin{aligned}
 P &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-2(\sqrt{x}-3)}\right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}\right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) + \sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-4-x+9+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+3} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}. \text{ Vậy với } x \geq 0; x \neq 4 \text{ thì } P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

b) Với $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-2\sqrt{5}\cdot 1+1}{4} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$ thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 4$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} = \frac{|\sqrt{5}-1|}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (vì } \sqrt{5} > 1)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-2}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1} = \frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}+1} = \frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\
 &= \frac{5\sqrt{5}-5-5+\sqrt{5}}{4} = \frac{6\sqrt{5}-10}{4} = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}
 \end{aligned}$$

c) $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 : (\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \text{ là U}(3)$$

$$\mathbb{U}(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Mà $\sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0; x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 0 \forall x \geq 0; x \neq 4$ nên:

TH1: $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

TH2: $\sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (loại)

Vậy $x \in \{0\}$ thì $P \in Z$

d) Xét hiệu $P-1 = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{-3}{\sqrt{x}+1} < 0 \quad \forall x \geq 0; x \neq 4$

Suy ra $P < 1$

e) $P = \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = x - 3\sqrt{x} + \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} - 1 = 0 \quad (2)$$

Đặt $\sqrt{x} = t \quad (t \geq 0; t \neq 2)$

(2) trở thành: $t^2 - 3t - 1 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.1.(-1) = 13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3+\sqrt{13}}{2} & (TM) \\ t = \frac{3-\sqrt{13}}{2} & (loại) \end{cases} \Rightarrow x = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^2 = \frac{22+6\sqrt{13}}{4} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy $x = \frac{22+6\sqrt{13}}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 42: Cho biểu thức: $A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$

a) Khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$ tính giá trị biểu thức A

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0; x \neq 5$

c) Tìm x để biểu thức $M = B - A$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x = 6 - 2\sqrt{5}$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$

$$\text{Ta có } x = 6 - 2\sqrt{5} = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} - 1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1 \quad (\text{vì } \sqrt{5} > 1)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1 - (\sqrt{5} - 1)}{1 + \sqrt{5} - 1} = \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} - 5}{5}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 5$ thì

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} = \left[\frac{15-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right] : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} \\ &= \frac{15-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} = \frac{5+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 5$ thì $B = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$\text{c) Ta có } M = B - A = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{-1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x+1}} = -1 + \frac{3}{\sqrt{x+1}}$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0; x \neq 5 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \forall x \geq 0; x \neq 5$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x+1}} \leq 3 \Rightarrow M = -1 + \frac{3}{\sqrt{x+1}} \leq -1 + 3 = 2$$

$$\text{Lại có } \frac{3}{\sqrt{x+1}} > 0 \Rightarrow -1 + \frac{3}{\sqrt{x+1}} > -1$$

$$\Rightarrow -1 < M \leq 2. \text{ Mà } M \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \in \{0; 1; 2\}$$

$$\text{TH1: } M = 0 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TM)}$$

$$\text{TH2: } M = 1 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = 1 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (TM)}$$

$$\text{TH3: } M = 2 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = 2 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (TM)}$$

Vậy $x \in \left\{0; 4; \frac{1}{4}\right\}$ thì $M \in \mathbb{Z}$

Dạng 4: Câu tập chinh phục điểm 9,10

Câu 43: Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Giải

$$\begin{aligned} a^2 &= \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + 3 - \sqrt{5+2\sqrt{3}} + 2\sqrt{9-(5+2\sqrt{3})} = 6 + 2\sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= 6 + 2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 6 + 2(\sqrt{3}-1) = 4 + 2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2. \text{ Do } a > 0 \text{ nên } a = \sqrt{3} + 1. \text{ Do đó} \\ (a-1)^2 &= 3 \text{ hay } a^2 - 2a - 2 = 0. \end{aligned}$$

Câu 44:

a) Cho $x = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}$.

b) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = x^4 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1942$.

c) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$

Giải

a) Ta có:

$$x^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \right)^2 = 8 + 2\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5}-1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}+1)^2 \Rightarrow x = \sqrt{5} + 1. \text{ Từ}$$

đó ta suy ra $(x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4$. Ta biến đổi:

$$P = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 12}{4 + 12} = 1.$$

b) Ta có $x = 1 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P = x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + x(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + 1945 = 1945$$

c) Để ý rằng: $x = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2} - 1$ để tận dụng hằng đẳng thức: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Khi đó ta có: $(\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

$$\text{Ta biến đổi: } P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015 = (x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1) + 2016 = 2016$$

Câu 45: Tính $C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}}}$

Giải

$$\text{Để ý rằng: } 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10(2 - \sqrt{3})}}} = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}}}$$

$$= \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{(5 - \sqrt{3})^2}}}. \text{ Hay } C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} = \sqrt{9 - \sqrt{25}} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

Câu 46: Chứng minh:

a) $A = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$ là số nguyên.

b) $B = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên

Lời giải

a) Dễ thấy $A < 0$,

$$\text{Ta có } A^2 = \left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \right)^2 = 7 - 2\sqrt{6} + 7 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = 14 - 2 \cdot 5 = 4$$

$$\text{Suy ra } A = -2.$$

b) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$. Ta có:

$$B^3 = \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)^3 = 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)$$

$$\left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right). \text{ Hay}$$

$$B^3 = 2 + 3\sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)} \cdot B \Leftrightarrow B^3 = 2 + 3\sqrt[3]{1 - \frac{84}{81}} B \Leftrightarrow B^3 = 2 - B \Leftrightarrow B^3 + B - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (B-1)(B^2 + B + 2) = 0 \text{ mà } B^2 + B + 2 = \left(B + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ suy ra } B = 1. \text{ Vậy } B \text{ là số nguyên.}$$

Câu 47: Chứng minh rằng: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a \geq \frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

Lời giải

Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

$$\text{Ta có } x^3 = 2a + (1-2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2a) = 0$$

Xét đa thức bậc hai $x^2 + x + 2a$ với $\Delta = 1 - 8a \geq 0$

$$+ \text{ Khi } a = \frac{1}{8} \text{ ta có } x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1.$$

+ Khi $a > \frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1 - 8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$ Vậy với mọi $a \geq \frac{1}{8}$

$$\text{ta có: } x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1 \text{ là số tự nhiên.}$$

Câu 48: Tính $x+y$ biết $(x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015$.

Lời giải

$$\text{Nhận xét: } (\sqrt{x^2 + 2015} + x)(\sqrt{x^2 + 2015} - x) = x^2 + 2015 - x^2 = 2015.$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết ta suy ra } \sqrt{x^2 + 2015} - x = \sqrt{y^2 + 2015} + y$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 2015} + y + \sqrt{x^2 + 2015} + x = \sqrt{x^2 + 2015} - x + \sqrt{y^2 + 2015} - y \Leftrightarrow x + y = 0$$

Câu 49:

$$\text{a) Chứng minh rằng: } \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4.$$

$$\text{b) Chứng minh rằng: } \frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

$$\text{c) Chứng minh: } 2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1 \text{ với mọi số nguyên dương } n \geq 2.$$

Lời giải

$$\text{a) Xét } A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}}, B = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}}$$

Dễ thấy $A > B$.

Ta có $A+B = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

Suy ra $A+B = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81}-\sqrt{80}) = \sqrt{81}-1 = 8$. Do $A > B$ suy ra $2A > A+B = 8 \Leftrightarrow A > 4$.

b) Để ý rằng: $\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} < \frac{1}{2k\sqrt{k+1}}$ với mọi k nguyên dương.

Suy ra $VT > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Đặt $P = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có: $\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Từ đó suy ra $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ hay

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{2}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

Do đó: $2\left[(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right] < T$ và

$$T < 1 + 2\left[(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\right].$$

Hay $2\sqrt{n}-2 < T < 2\sqrt{n}-1$.

Câu 50: Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ và $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}$.

Chứng minh rằng $B > A$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{(\sqrt{120}+\sqrt{121})(\sqrt{120}-\sqrt{121})}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{-1} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-2 + \dots + \sqrt{121}-\sqrt{120} = -1 + \sqrt{121} = 10$$

(1)

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

Do đó $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}} \Rightarrow B > 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{36} - \sqrt{35})$

$\Rightarrow B > 2(-\sqrt{1} + \sqrt{36}) = 2(-1 + 6) = 10$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $B > A$.

Câu 51: Cho $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$

a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2})}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|)}{|x-4|} = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2|)}{x-4}$$

$$+ \text{ Nếu } 4 < x < 8 \text{ thì } \sqrt{x-4}-2 < 0 \text{ nên } A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + 2 - \sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + \sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8 \text{ (Theo bất}$$

đẳng thức Cô si). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

b) Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4 + \frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\frac{16}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số nguyên dương của 16. Hay $x-4 \in \{1; 2; 4; 8; 16\} \Leftrightarrow x \in \{5; 6; 8; 12; 20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x = 5$ hoặc $x = 6$.

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 + 4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có:

$$A = \frac{2(m^2 + 4)}{m} = 2m + \frac{8}{m} \text{ suy ra } m \in \{2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{8; 20; 68\}.$$

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

Câu 52: Cho $a = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T = \frac{a^2 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}$.

Giải

$$a^2 = 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5}. \text{ Vì}$$

$a > 0$ nên $a = \sqrt{5} + 1$. Do đó $(a - 1)^2 = 5$ hay $a^2 - 2a = 4$. Biểu diễn

$$T = \frac{(a^2 - 2a)^2 - 3(a^2 - 2a) + 4}{a^2 - 2a + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 4}{4 + 12} = \frac{1}{2}.$$

Câu 53: Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$.

a) Chứng minh rằng: $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.

b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Giải:

a) Vì $\sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})^3} = 1 + 2\sqrt{5}$

$$\text{Từ đó } a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - 1 - 2\sqrt{5}} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow a^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow a^4 - 14a^2 + 9 = 0.$$

b) Do $f(x) = (x^4 - 14x^2 + 9)(x + 2) + 1$ và $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$ nên ta được $f(a) = 1$.

Câu 54: Cho $a = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$.

Giả sử có đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1940)^{2016}$. Hãy tính $f(a)$.

Giải

$$\text{Vì } a^3 = 38 + 17\sqrt{5} + 38 - 17\sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow a^3 = 76 - 3a \Rightarrow a^3 + 3a = 76 \Rightarrow f(a) = (76 + 1940)^{2016} = 2016^{2016}.$$

Câu 55: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 3$, ta có

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{65}{54}.$$

Giải:

Đặt $P = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$. Thực hiện làm trội mỗi phân số ở vế trái bằng cách làm giảm mẫu, ta có:

$$\frac{2}{k^3} < \frac{2}{k^3 - k} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}, \forall k > 1$$

Cho $k = 4, 5, \dots, n$ thì

$$\begin{aligned} 2P &< 2 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \right) + \left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} \right) + \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} \right) + \dots + \left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right] \\ &= \frac{251}{108} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{n(n+1)} < \frac{251}{108} + \frac{1}{3.4} = \frac{65}{27}. \text{ Do đó } P < \frac{65}{64} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Câu 56:

Chúng minh rằng: $\frac{43}{44} < \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}} < \frac{44}{45}$

Giải:

Đặt $S_n = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

Để ý rằng:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 k - k^2(k+1)} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \forall k \geq 1$$

Cho $k = 1, 2, \dots, n$ rồi cộng vế với vế ta có:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Do đó $S_{2001} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}}$

Như vậy ta phải chứng minh:

$$\frac{43}{44} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{44}{45} \Leftrightarrow \frac{1}{45} < \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{1}{44}$$

$$\Leftrightarrow 44 < \sqrt{2002} < 45 \Leftrightarrow 1936 < 2002 < 2025$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

CHUYÊN ĐỀ 7_HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

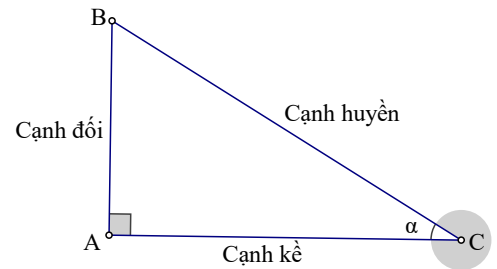
1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn

Xét α là góc nhọn trong một tam giác vuông.

Khi đó ta có các tỉ số lượng giác của góc nhọn α là

$\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được định nghĩa như sau:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}; \cos \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AB}{AC}; \cot \alpha = \frac{AC}{AB}$$



Chú ý: Nếu α là một góc nhọn thì $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1; \tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$

Nhận xét: Khi góc α tăng từ 0° đến 90° thì $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ tăng, $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$ giảm

Tức là: $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha < \sin \beta, \cos \alpha > \cos \beta, \tan \alpha < \tan \beta, \cot \alpha > \cot \beta$

2. Mối liên hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc nhọn phụ nhau

Với hai góc α, β mà $\alpha + \beta = 90^\circ$,

ta có: $\sin \alpha = \cos \beta; \cos \alpha = \sin \beta; \tan \alpha = \cot \beta; \cot \alpha = \tan \beta$.

Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin \alpha = \sin \beta$ hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$ thì $\alpha = \beta$.

3. Công thức liên hệ giữa các tỉ số lượng giác của góc nhọn α

Xét α là góc nhọn khi đó ta có:

$$+ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$+ \text{Công thức mở rộng: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ và } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

4. Với một số góc đặc biệt ta có:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

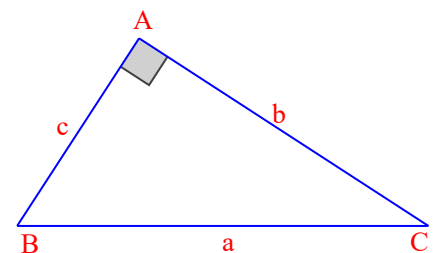
$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1; \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

5. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Từ công thức tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta chỉ ra được hệ thức giữa cạnh và góc của một tam giác vuông như sau:

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

- Cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cosin góc kề.
- Cạnh góc vuông kia nhân với tan của góc đối hay nhân với cot của góc kề. $b = a \cdot \sin B = a \cos C; c = a \cdot \sin C = a \cos B; b = c \cdot \tan B = c \cot C; c = b \cdot \tan C = b \cot C$



Chú ý: Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc chưa biết của tam giác vuông đó.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, đường cao AH

a. Cho $\widehat{C} = 30^\circ$, $AH = 4cm$. Tính AB , AC

b. Cho $\widehat{HAB} = 30^\circ$, $AB = 3cm$. Tính AC , BC

Câu 2: Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 90^\circ$, cho $\sin \widehat{B} = \frac{4}{5}$. $AB = 9cm$. Tính AC, BC

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\tan \widehat{C} = \frac{3}{4}$ và $BC = 20cm$. Tính AB, AC

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 30^\circ$ $AB = 8cm, AC = 6cm$. Tính S_{ABC}

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $\widehat{C} = 30^\circ$, kẻ phân giác BD , sao cho $CD = 8cm$. Tính. AC, AB, BC

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc B bằng 30° , $BC = 10cm$. Hãy tính cạnh AB và góc C

Câu 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc B bằng α , biết $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $AB = 8cm$. Hãy tính cạnh AC và BC

Câu 8: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 24cm, AC = 32cm, BC = 40cm$. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính $\sin B, \sin C, \cos B, \cos C$

Câu 9: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 21, AC = 28, BC = 35$

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông

b) Tính $\sin B, \sin C$, góc B , góc C và đường cao AH trong $\triangle ABC$

Câu 10: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có đường cao AH . Tính tỉ số lượng giác của góc C , từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc B , biết:

a) $AB = 16cm, AC = 12cm$

b) $AC = 13cm, CH = 5cm$

c) $CH = 3cm, BH = 4cm$

Câu 11: Giải các tam giác vuông sau, tam giác ABC vuông tại A , biết

a) $a = 18, b = 8$

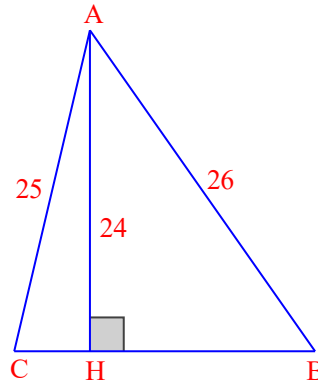
b) $b = 20, \widehat{C} = 38^\circ$

c) $\tan B = \frac{3}{4}, c = 4$

Câu 12: Cho tam giác ABC có $AB = 16cm, AC = 14cm$ và $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và diện tích tam giác ABC

Câu 13: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 18^\circ, \widehat{C} = 150^\circ, AC = 8cm$. Tính độ dài cạnh AB và BC .

Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 26cm$, $AC = 25cm$, đường cao $AH = 24cm$. Tính cạnh BC



Câu 15: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 12cm$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

a) Tính chiều cao CH và AC

b) Tính diện tích $\triangle ABC$

Câu 16: Cho đường tròn tâm O , bán kính $R = 10cm$. Trên (O) lấy A, B, C, D thỏa mãn $\widehat{AOB} = 60^\circ$; $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{COD} = 120^\circ$

a) Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân

b) Tính chu vi của $ABCD$.

Câu 17: Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 15cm$ và $DC = 20cm$. Góc ở đáy bằng 75° . Tính diện tích hình thang cân $ABCD$

Câu 18: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A có $AB = 6cm$, $AC = 8cm$

a) Giải tam giác vuông ABC .

b) Kẻ $AH \perp BC$ tại H . Tính AH , HB , HC

c) Từ H kẻ HE và HF lần lượt vuông góc với AB , AC .

Tính chu vi và diện tích tứ giác $AEHF$.

d) Cho BC cố định. Tìm vị trí điểm A để S_{AEHF} đạt giá trị lớn nhất.

Câu 19: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC \perp AD$. Kẻ $AH \perp DC$ tại H , đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại I . Chứng minh rằng:

1. $AC^2 = CH \cdot CD = CB \cdot CI$.

2. $AH \cdot AI + DH \cdot DC = BC \cdot BI$.

3. $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{HC \cdot HD} - \frac{1}{AI^2}$.

Câu 20: Cho $\triangle ABC$ vuông tại C , đường cao CK .

a) Cho $AB = 10cm$, $AC = 8cm$. Tính BC , CK , BK và AK

b) Gọi H và I thứ tự là hình chiếu của K trên BC và AC . Chứng minh $CB \cdot CH = CA \cdot CI$

- c) M là chân đường vuông góc kẻ từ K xuống IH . Chứng minh $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$
- d) Chứng minh rằng $\frac{AI}{BH} = \frac{AC^3}{BC^3}$

Câu 21: Cho tam giác MNP vuông tại M , góc $\widehat{N} = 60^\circ$, đường phân giác NI . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với NI tại K .

- 1) Chứng minh $\triangle MKN$ đồng dạng với $\triangle NMP$, tìm tỉ số đồng dạng của chúng.
- 2) Tính diện tích tam giác MKN biết diện tích tam giác NMP bằng 60cm^2 .
- 3) Chứng minh $NP.MK = NK.IP$

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC .

- a) Chứng minh $DE.BC = AB.AC$.
- b) Chứng minh $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$.
- c) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với DE cắt BC tại M . Chứng minh M là trung điểm BC .
- d) Cho $\widehat{C} = \alpha$, $BC = a$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt BC tại N . Chứng minh $CN = \frac{a(\cos 2\alpha + 1)}{2 \cos 2\alpha}$.

Câu 23: Cho tam giác MND vuông tại M ($MN < MD$), đường cao MH .

- a) Cho $MN = 6\text{ cm}$, $MD = 8\text{ cm}$. Tính ND, MH .
- b) Qua N kẻ Nx song song MD cắt đường thẳng MH tại Q . Chứng minh $MH.MQ = NH.ND$.
- c) Kẻ QG vuông góc MD (G thuộc MD), QG cắt ND tại K . Chứng minh $NH^2 = HK.HD$.
- d) Kẻ HP vuông góc MN (P thuộc MN). Chứng minh $NP = ND.\cos^3 MND$.

Câu 24: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , kẻ đường cao AH . Hạ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi M là trung điểm của BC

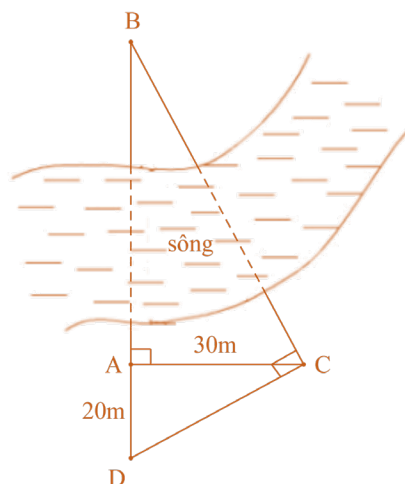
- a) Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$
- b) $\triangle AEF \sim \triangle ACE$
- c) $AM \perp EF$
- d) Cho $BH = 4\text{cm}, HC = 9\text{cm}$. Tính EF
- e) Cho BC cố định, tìm vị trí của điểm A để đoạn EF lớn nhất
- f) Cho BC cố định, tìm vị trí của A để diện tích tứ giác $AEHF$ lớn nhất.

- Câu 25:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $\widehat{A} = 60^\circ$, $M \in BC$. Gọi I là trung điểm của AM , hạ $ME \perp AB, MF \perp AC$
- Chứng minh rằng $IA = IM = IE = IF$
 - Tính $\widehat{EIF}$
 - Cho $AM = 20cm$. Tính EF
 - Tìm vị trí của điểm M để EF nhỏ nhất
- Câu 26:** Cho tam giác ABC đều, đường cao AH . Trên tia đối của tia AH lấy điểm M sao cho $MH = \frac{1}{3}AH$
- Chứng minh rằng $\triangle ACM$ vuông
 - Cho $CM = 5cm$. Tính AB
 - Phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt BC tại E , biết $CE = 4cm$. Tính AC
 - CM cắt AB tại N . Tính MN , BN theo cạnh của $\triangle ABC$
- Câu 27:** Cho $AB = 2a$ cố định. O là trung điểm của AB , vẽ cùng một phía của AB vẽ hai tia Ax, By trong đó $By \perp AB$. Lấy điểm C thuộc Ax , D thuộc By sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$ ($AC \leq BD$). Hạ $OM \perp CD$, nối OC cắt AM tại E , nối OD cắt BM tại F
- Chứng minh rằng CO và DO là phân giác của $\widehat{ACD}$ và $\widehat{BDC}$
 - Chứng minh $\triangle ABM$ vuông tại M
 - Chứng minh tứ giác $OEMF$ là hình chữ nhật
 - $OE \cdot OC = OF \cdot OD$
 - Cho C và D chuyển động mà $\widehat{COD} = 90^\circ$. Chứng minh $AC \cdot BD$ không đổi
 - Cho $\widehat{MBA} = 30^\circ$, tính AC và BD theo a
 - Xác định vị trí của điểm C để cho $\tan \widehat{CDB} = 3$
- Câu 28:** Một người thợ sử dụng thước ngắm có góc vuông để đo chiều cao của một cây dừa, với các kích thước đo được như hình bên. Khoảng cách từ vị trí gốc cây đến vị trí chân của người thợ là $4,8m$ và từ vị trí chân đứng thẳng trên mặt đất đến mắt của người ngắm là $1,6m$. Hỏi với các kích thước trên thì người thợ đo được chiều cao của cây đó là bao nhiêu? (làm tròn đến mét).

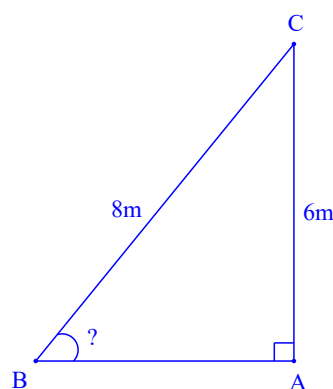


- Câu 29:** Muốn tính khoảng cách từ điểm A đến điểm B nằm bên kia bờ sông, ông Việt vạch từ A đường vuông góc với AB . Trên đường vuông góc này lấy một đoạn thẳng $AC = 30m$, rồi vạch CD

vuông góc với phương BC cắt AB tại D (xem hình vẽ). Đo $AD = 20m$, từ đó ông Việt tính được khoảng cách từ A đến B . Em hãy tính độ dài AB và số đo góc ACB .



Câu 30: Một cây cau có chiều cao $6m$. Để hái một buồng cau xuống, phải đặt thang tre sao cho đầu thang tre đạt độ cao đó, khi đó góc của thang tre với mặt đất là bao nhiêu, biết chiếc thang dài $8m$ (làm tròn đến phút)



Câu 31: Một máy bay đang bay ở độ cao $12km$. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.



a) Nếu cách sân bay $320km$ máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

b) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?

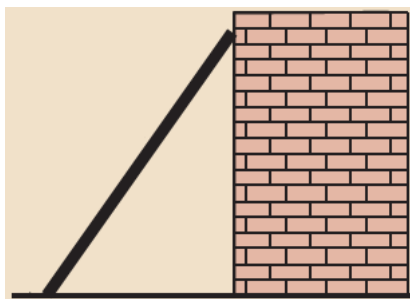
Câu 32: Hải đăng kê Gà thuộc xã Tân Thành, huyện Hàm Thuận Nam, Bình Thuận là ngọn hải đăng được trung tâm sách kỷ lục Việt Nam xác nhận là ngọn hải đăng cao nhất và nhiều tuổi nhất. Hải đăng Kê Gà được xây dựng từ năm 1897 – 1899 và toàn bộ bằng đá. Tháp đèn có hình bát giác, cao

66m so với mực nước biển. Ngọn đèn đặt trong tháp có thể phát sáng xa 22 hải lý (tương đương 40km)



Một người đi thuyền thúng trên biển, muốn đến ngọn hải đăng có độ cao 66m, người đó đứng trên mũi thuyền và dùng giác kế đo được góc giữa thuyền và tia nắng chiếu từ đỉnh ngọn hải đăng đến thuyền là 25° . Tính khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng (làm tròn đến m).

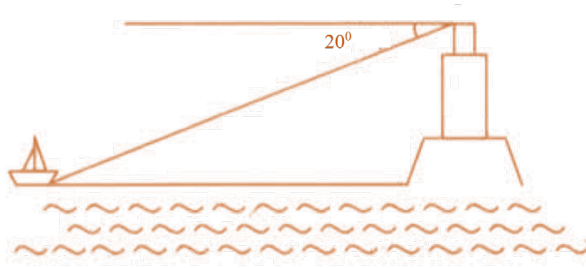
Câu 33: Trường bạn An có một chiếc thang dài 6 mét. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc “an toàn” là 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng)



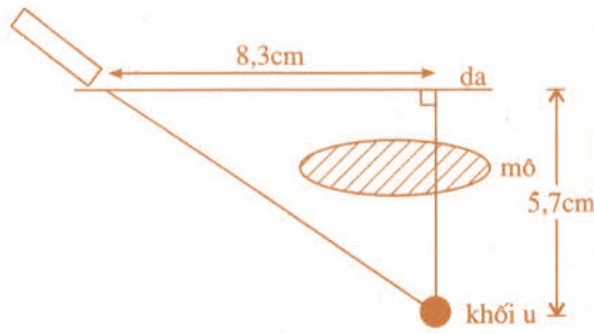
Câu 34: Thang xếp chữ A gồm 2 thang đơn tựa vào nhau. Để an toàn, mỗi thang đơn tạo với mặt đất một góc khoảng 75° . Nếu muốn tạo một thang xếp chữ A cao 2m tính từ mặt đất thì mỗi thang đơn phải dài bao nhiêu?



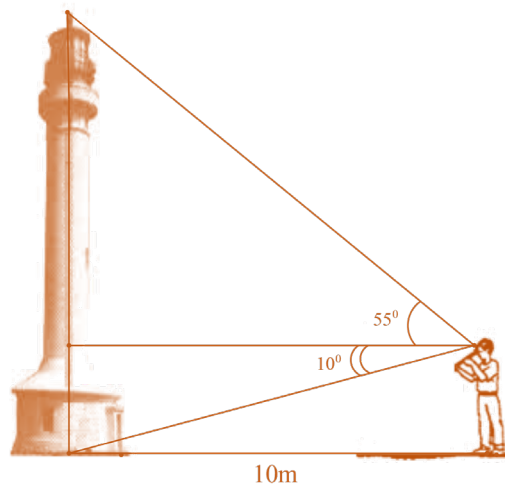
Câu 35: Từ một đài quan sát cao 350m so với mực nước biển, người ta nhìn thấy một chiếc thuyền bị nạn dưới góc 20° so với phương ngang của mực nước biển. Muốn đến cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài bao nhiêu mét?



Câu 36: Một khối u của một bệnh nhân cách mặt da $5,7\text{cm}$ được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u (trên mặt da) $8,3\text{cm}$ (xem hình vẽ). Tính góc tạo bởi chùm tia với mặt da và chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu để đến được khối u?



Câu 37: Một người quan sát đứng cách một cái tháp 10m , nhìn thẳng đỉnh tháp và chân tháp lần lượt dưới 1 góc 55° và 10° so với phương ngang của mặt đất. Hãy tính chiều cao của tháp.



Câu 38: Một cần cẩu có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là 40° . Vậy muốn nâng một vật nặng lên cao $8,1\text{m}$ thì cần cẩu phải dài bao nhiêu? Biết chiều cao của xe là $2,6\text{m}$, chiều cao của vật nặng là 1m (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân)



Câu 39: Một tòa nhà cao tầng có bóng trên mặt đất là $272m$, cùng thời điểm đó một cột đèn cao $7m$ có bóng trên mặt đất dài $14m$. Em hãy cho biết tòa nhà đó có bao nhiêu tầng, biết rằng mỗi tầng cao $3,4m$?



Câu 40: Tòa nhà Bitexco Financial, Bitexco Financial Tower hay Tháp Tài chính Bitexco là một tòa nhà chọc trời được xây dựng tại trung tâm Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh. Tòa nhà có 68 tầng (không tính 3 tầng hầm). Biết rằng, khi tòa nhà có bóng in trên mặt đất dài $47,3$ mét, thì cùng thời điểm đó có một cột tiêu (được cắm thẳng đứng trên mặt đất) cao 15 mét có bóng in trên mặt đất dài $2,64$ mét.



- Tính góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất (đơn vị đo góc được làm tròn đến độ)
- Tính chiều cao của tòa nhà (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 41: Giông bão thổi mạnh, một cây tre gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và ngọn cây tạo với mặt đất một góc 30° . Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây tre là $8,5m$. Giả sử cây tre mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây tre đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)



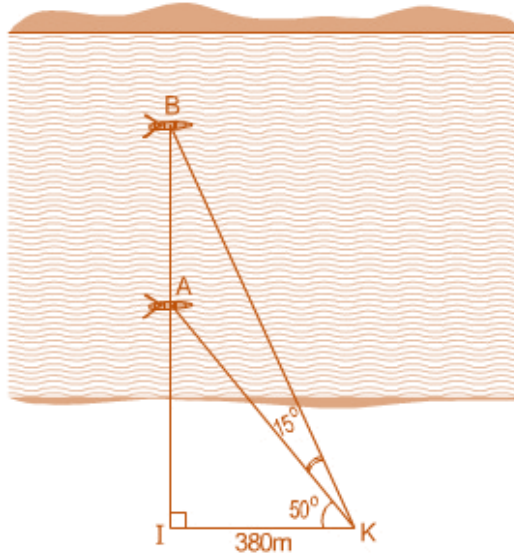
Câu 42: Tính chiều cao của trụ cầu Cần Thơ so với mặt sông Hậu cho biết tại hai điểm cách nhau 89m trên mặt sông người ta nhìn thấy đỉnh trụ cầu với góc nâng lần lượt là 40° và 30° .



Câu 43: Hai người A và B đứng cùng bờ sông nhìn ra một cồn nổi giữa sông. Người A nhìn ra cồn với 1 góc 43° so với bờ sông, người B nhìn ra cồn với 1 góc 28° so với bờ sông, 2 người đứng cách nhau 250m . Hỏi cồn cách bờ sông hai người đang đứng là bao nhiêu m?



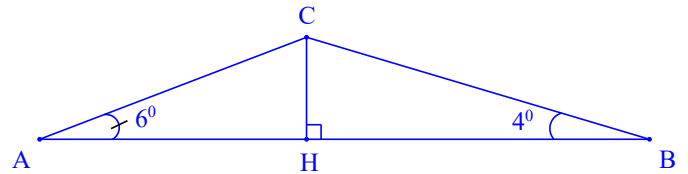
Câu 44: Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như hình vẽ dưới đây. Tính khoảng cách giữa chúng (làm tròn đến mét).



Câu 45: Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống một con dốc như hình vẽ dưới. Cho biết đoạn AB dài $762m$, $\hat{A} = 6^\circ$, $\hat{B} = 4^\circ$.

a) Tính chiều cao con dốc.

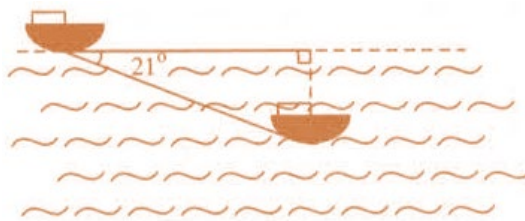
b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ lên dốc là $4km/h$ và tốc độ xuống dốc là $19km/h$.



Câu 46: Trong một buổi luyện tập, một tàu ngầm ở trên mặt biển bắt đầu lặn xuống và di chuyển theo một đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° .

a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được $250m$ thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước (làm tròn đến đơn vị mét).

b) Giả sử tốc độ trung bình của tàu là $9km/h$ thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200 mét (cách mặt nước biển $200m$) làm tròn đến phút.



CHUYÊN ĐỀ 7_HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

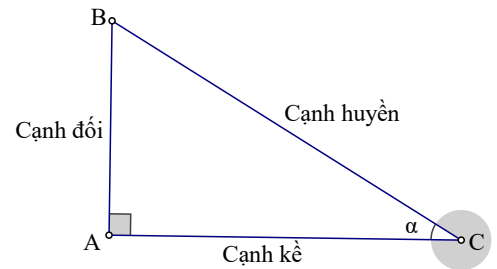
1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn

Xét α là góc nhọn trong một tam giác vuông.

Khi đó ta có các tỉ số lượng giác của góc nhọn α là

$\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được định nghĩa như sau:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}; \cos \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AB}{AC}; \cot \alpha = \frac{AC}{AB}$$



Chú ý: Nếu α là một góc nhọn thì $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1; \tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$

Nhận xét: Khi góc α tăng từ 0° đến 90° thì $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ tăng, $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$ giảm

Tức là: $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha < \sin \beta, \cos \alpha > \cos \beta, \tan \alpha < \tan \beta, \cot \alpha > \cot \beta$

2. Mối liên hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc nhọn phụ nhau

Với hai góc α, β mà $\alpha + \beta = 90^\circ$,

ta có: $\sin \alpha = \cos \beta; \cos \alpha = \sin \beta; \tan \alpha = \cot \beta; \cot \alpha = \tan \beta$.

Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin \alpha = \sin \beta$ hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$ thì $\alpha = \beta$.

3. Công thức liên hệ giữa các tỉ số lượng giác của góc nhọn α

Xét α là góc nhọn khi đó ta có:

$$+ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$+ \text{Công thức mở rộng: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ và } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

4. Với một số góc đặc biệt ta có:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

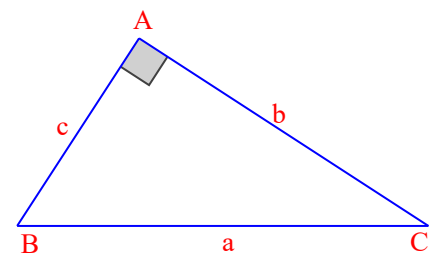
$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1; \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

5. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Từ công thức tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta chỉ ra được hệ thức giữa cạnh và góc của một tam giác vuông như sau:

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

- Cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cosin góc kề.
- Cạnh góc vuông kia nhân với tan của góc đối hay nhân với cot của góc kề. $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C; c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B; b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C; c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot C$



Chú ý: Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc chưa biết của tam giác vuông đó.

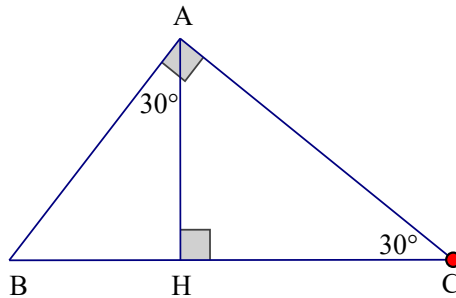
B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, đường cao AH

a. Cho $\widehat{C} = 30^\circ$, $AH = 4\text{cm}$. Tính AB , AC

b. Cho $\widehat{HAB} = 30^\circ$, $AB = 3\text{cm}$. Tính AC , BC

Lời giải



$$\text{a) } \sin \widehat{C} = 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin C} = 8(\text{cm}); \tan \widehat{C} = 90^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \tan \widehat{C} = \frac{8}{\sqrt{3}}(\text{cm})$$

(hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông).

b) Tính được $\widehat{B} = 60^\circ$.

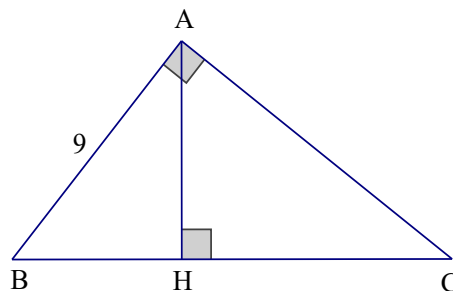
Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

$$AC = AB \cdot \tan \widehat{B} = 3 \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Dùng pytago suy ra $BC = 6\text{cm}$

Câu 2: Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 90^\circ$, cho $\sin \widehat{B} = \frac{4}{5}$. $AB = 9\text{cm}$. Tính AC, BC

Lời giải



Cách 1: Theo giả thiết ta có $\sin \widehat{B} = \frac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AC}{4} = \frac{BC}{5} = x \Rightarrow \begin{cases} AC = 4x \\ BC = 5x \end{cases} (x > 0)$$

Dùng định lí Pytago vào tam giác vuông ABC , có:

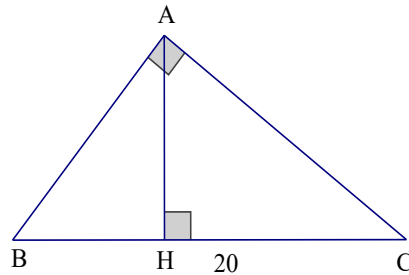
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 25x^2 = 81 + 16x^2 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow AC = 12; BC = 15$$

Cách 2: Xét $\triangle ABH$ ($\widehat{AHB} = 90^\circ$), ta có $\sin \widehat{B} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow AH = \frac{4AB}{5} = \frac{4.9}{5} = \frac{36}{5}$

$$\Rightarrow BH \Rightarrow BC \Rightarrow AC$$

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\tan \widehat{C} = \frac{3}{4}$ và $BC = 20cm$. Tính AB, AC

Lời giải

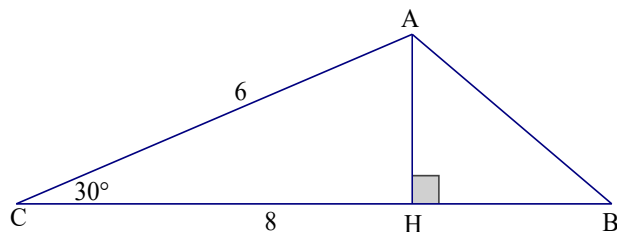


$$\text{Ta có: } \tan \widehat{C} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = x (x > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 3x \\ AC = 4x \end{cases}$$

$$\text{Dùng Pytago: } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow \begin{cases} AB = 12(cm) \\ AC = 16(cm) \end{cases}$$

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 30^\circ$ $AB = 8cm, AC = 6cm$. Tính S_{ABC}

Lời giải



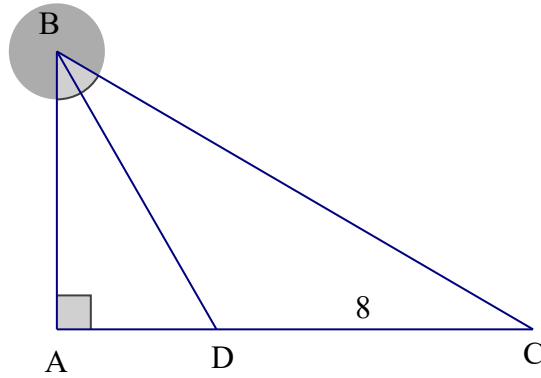
Hạ $CH \perp AB$. Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$CH = CA \cdot \sin \widehat{A} = 6 \cdot \sin 30^\circ = 3$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = 12 (cm^2)$$

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $\widehat{C} = 30^\circ$, kẻ phân giác BD , sao cho $CD = 8cm$. Tính. AC, AB, BC

Lời giải



Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow DA = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 (cm)$$

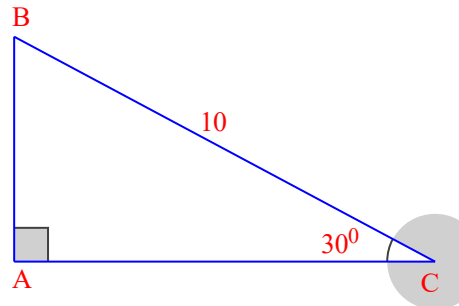
$$AC = 8 + 4 = 12 (cm)$$

Áp dụng quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$AB = AC \cdot \tan \hat{C} = 12 \cdot \tan 30^\circ = 4\sqrt{3} (cm)$$

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc B bằng 30° , $BC = 10cm$. Hãy tính cạnh AB và góc C

Lời giải



$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } A, \text{ có } \cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \cos B \cdot BC \Rightarrow AB = 10 \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} (cm)$$

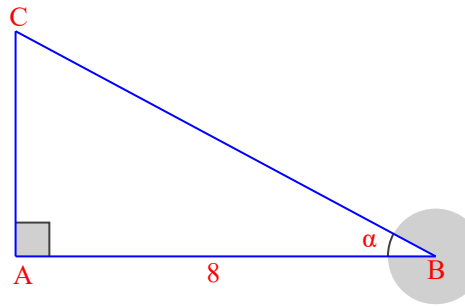
$$\text{Ta có } \triangle ABC \text{ vuông tại } A \text{ (giả thiết)} \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ ta có } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc của một tam giác)}$$

$$\text{Nên } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 60^\circ.$$

Câu 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc B bằng α , biết $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $AB = 8cm$. Hãy tính cạnh AC và BC

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có $\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{3}{4} AB = 6(cm)$

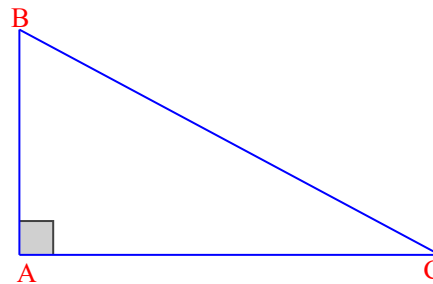
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Pitago)

$$\Rightarrow BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow BC = \sqrt{100} = 10(cm) \text{ (vì } BC > 0)$$

Vậy $AC = 6cm$; $BC = 10cm$.

Câu 8: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 24cm$, $AC = 32cm$, $BC = 40cm$. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính $\sin B, \sin C, \cos B, \cos C$

Lời giải



Ta có $AB^2 + AC^2 = 24^2 + 32^2 = 1600(cm^2)$ (1)

$$BC^2 = 40^2 = 1600(cm^2) \text{ (2)}$$

Từ (1)(2) suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A (Pitago đảo)

$\triangle ABC$ vuông tại A nên ta có

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}; \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}; \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

Chú ý: Vì $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc phụ nhau nên ta có thể tính $\cos B; \cos C$

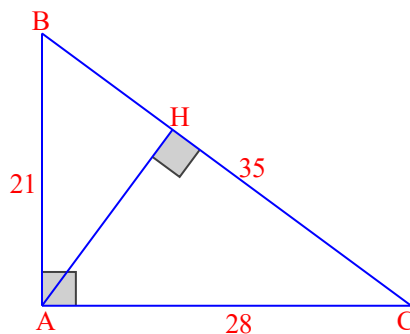
$$\cos B = \sin C = \frac{3}{5}; \cos C = \sin B = \frac{4}{5}$$

Câu 9: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 21$, $AC = 28$, $BC = 35$

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông

b) Tính $\sin B, \sin C$, góc B , góc C và đường cao AH trong $\triangle ABC$

Lời giải



a) Ta có $AB^2 + AC^2 = 21^2 + 28^2 = 1225$; $BC^2 = 35^2 = 1225$

$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A (định lí Pitago đảo)

b) Có $\sin B = \frac{AC}{BC} = 0,8 \Rightarrow \widehat{B} \approx 53^\circ$; $\sin C = \frac{AB}{BC} = 0,6 \Rightarrow \widehat{C} \approx 37^\circ$

Xét tam giác ABH vuông tại H , áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ta có $AH = AB \cdot \sin B = 21 \cdot \sin 53^\circ = 21 \cdot 0,8 = 16,8$ (hoặc $AH \cdot BC = AB \cdot AC$)

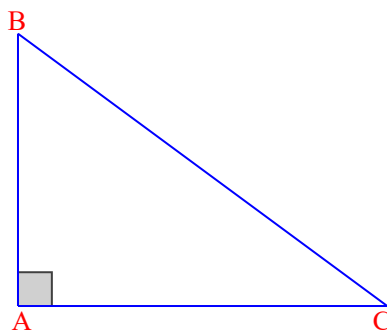
Câu 10: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có đường cao AH . Tính tỉ số lượng giác của góc C , từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc B , biết:

a) $AB = 16\text{cm}, AC = 12\text{cm}$

b) $AC = 13\text{cm}, CH = 5\text{cm}$

c) $CH = 3\text{cm}, BH = 4\text{cm}$

Lời giải



Ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}, \widehat{C}$ là hai góc phụ nhau

a) $\sin C = \cos B = \frac{4}{5}$; $\tan C = \cot B = \frac{4}{3}$; $\cos C = \sin B = \frac{3}{5}$; $\cot C = \tan B = \frac{3}{4}$

b) $\sin C = \cos B = \frac{5}{13}$; $\tan C = \cot B = \frac{5}{12}$; $\cos C = \sin B = \frac{12}{13}$; $\cot C = \tan B = \frac{12}{5}$

$$c) \sin C = \cos B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}; \tan C = \cot B = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \cos C = \sin B = \frac{3}{\sqrt{21}}; \cot C = \tan B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

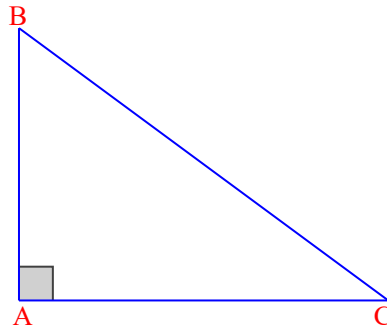
Câu 11: Giải các tam giác vuông sau, tam giác ABC vuông tại A , biết

a) $a=18, b=8$

b) $b=20, \widehat{C}=38^\circ$

c) $\tan B = \frac{3}{4}, c=4$

Lời giải



a) Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{18} \Rightarrow \widehat{B} = 23^\circ 23' \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ - 23^\circ 23' = 66^\circ 37'$

$$AB = BC \cdot \sin C = 18 \cdot \sin 66^\circ 37' \approx 16,1$$

b) $\widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ; AB = AC \cdot \tan C = 20 \cdot \tan 38^\circ \approx 15,6$

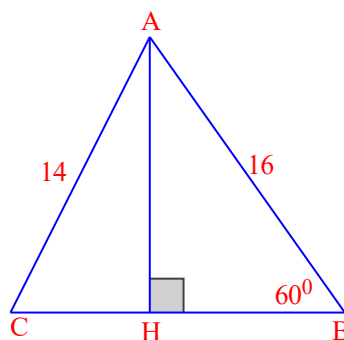
$$BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{20}{\sin 60^\circ} \approx 23,1$$

c) $AC = AB \cdot \tan B = 4 \cdot \frac{3}{4}; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\sin C = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow \widehat{C} \approx 53^\circ 08' \Rightarrow \widehat{B} \approx 36^\circ 52'$$

Câu 12: Cho tam giác ABC có $AB=16cm, AC=14cm$ và $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và diện tích tam giác ABC

Lời giải



Kẻ đường cao AH

Xét tam giác vuông ABH , ta có $BH = AB \cdot \cos B = AB \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8cm$

$$AH = AB \cdot \sin B = AB \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}cm$$

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông AHC ta có $AC^2 = HC^2 + AH^2$

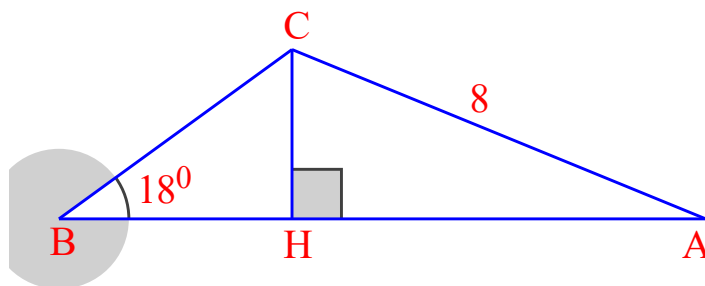
$$\Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 = 14^2 - (8\sqrt{3})^2 = 196 - 192 = 4 \Rightarrow HC = 2cm$$

$$\Rightarrow BC = CH + HB = 2 + 8 = 10cm$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8\sqrt{3} = 40\sqrt{3} (cm^2)$$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 18^\circ$, $\widehat{C} = 150^\circ$, $AC = 8cm$. Tính độ dài cạnh AB và BC .

Lời giải



Xét $\triangle BHC$ vuông tại H có $\widehat{B} + \widehat{BCH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCH} = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$

Khi đó $\triangle AHC$ vuông tại H có $\widehat{ACH} = 150^\circ - 72^\circ = 78^\circ$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác AHC có:

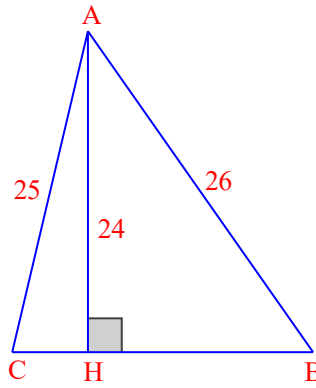
$$CH = AC \cdot \cos 78^\circ = 8 \cdot \cos 78^\circ \approx 1,66; \quad AH = AC \cdot \sin 78^\circ = 8 \cdot \sin 78^\circ \approx 7,82$$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác BHC có:

$$CH = BC \cdot \sin 18^\circ \approx 1,66 \Rightarrow BC \approx 5,37; \quad BH = BC \cdot \cos 18^\circ = 5,37 \cdot \cos 18^\circ \approx 5,12$$

$$\text{Khi đó } AB = BH + AH = 5,12 + 7,82 = 12,94$$

Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 26cm$, $AC = 25cm$, đường cao $AH = 24cm$. Tính cạnh BC



Lời giải

Cách 1: Sử dụng định lý Pitago

Ta có AH là đường cao của tam giác ABC (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{AHB} = 90^\circ$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H (do $\widehat{AHB} = 90^\circ$) ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2$ (Pitago)

$$\Rightarrow HB^2 = AB^2 - AH^2 \Rightarrow HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10 (cm)$$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H (do $\widehat{AHC} = 90^\circ$) ta có: $AC^2 = AH^2 + HC^2$ (Pitago)

$$\Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 \Rightarrow HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7 (cm)$$

$$BC = BH + HC = 7 + 10 = 17 (cm)$$

Vậy $BC = 17cm$.

Cách 2: Áp dụng tỉ số lượng giác

Ta có AH là đường cao của $\triangle ABC$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{AHB} = 90^\circ$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H (do $\widehat{AHB} = 90^\circ$) ta có $\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{13}$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$\text{Ta có } BH = AB \cdot \cos B = 26 \cdot \frac{5}{13} = 10 (cm)$$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H (do $\widehat{AHC} = 90^\circ$) ta có $\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{24}{25}$

$$\text{Xét } \sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}$$

$$\text{Ta có } HC = AC \cdot \cos C = 25 \cdot \frac{7}{25} = 7 (cm) \Rightarrow BC = HC + HB = 17 (cm)$$

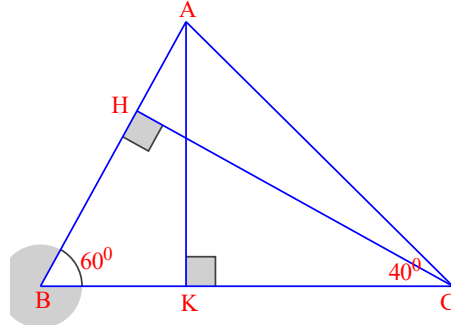
Vậy $BC = 17cm$.

Câu 15: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 12\text{cm}$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

a) Tính chiều cao CH và AC

b) Tính diện tích $\triangle ABC$

Lời giải



a) Xét $\triangle BHC$ vuông tại H . Áp dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

$$\Rightarrow CH = BC \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Trong } \triangle ABC \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 100^\circ \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 100^\circ} \approx 10,55(\text{cm})$$

b) Kẻ $AK \perp BC$. Xét $\triangle ACK$ vuông tại K ta có $AK = AC \cdot \sin C$

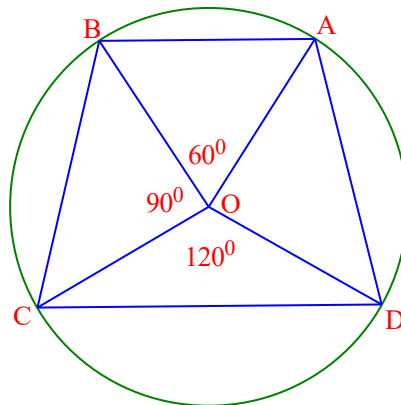
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C \approx 40,7(\text{cm}^2)$$

Câu 16: Cho đường tròn tâm O , bán kính $R = 10\text{cm}$. Trên (O) lấy A, B, C, D thỏa mãn $\widehat{AOB} = 60^\circ$; $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{COD} = 120^\circ$

a) Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân

b) Tính chu vi của $ABCD$.

Lời giải



$$\text{a) Ta có } \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{AOD} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle AOB \text{ cân tại } O \text{ có } \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \triangle AOB \text{ đều} \Rightarrow \widehat{OBA} = 60^\circ \quad (1)$$

Xét $\triangle OBC$ cân tại O có $\widehat{BOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBO} = 45^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CBA} = 105^\circ$

Tương tự chứng minh được $\widehat{BCD} = 45^\circ + 35^\circ = 75^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, mà hai góc ở vị trí trong cùng phía $\Rightarrow AB \parallel CD$

Xét $\triangle BOC$ và $\triangle AOD$ có $OB = OA = R; OC = OD = R$ và $\widehat{BOC} = \widehat{AOD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BOC = \triangle AOD$ (cgc) $\Rightarrow AD = BC$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow ABCD$ là hình thang cân

b) Ta có $AB = R$ (vì $\triangle OAB$ đều)

$BC = AD = \sqrt{2}R$ ($\triangle OBC$ và $\triangle OAD$ là hai tam giác vuông cân)

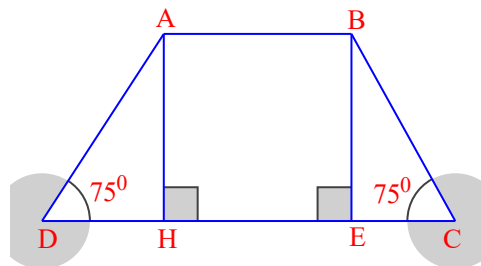
Kẻ $OH \perp CD \Rightarrow \widehat{COH} = 60^\circ$ ($\triangle COD$ cân)

$\Rightarrow CH = R \cdot \sin 60^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CD = R\sqrt{3}$

Vậy chu vi $ABCD = AB + BC + CD + DA = R + 2\sqrt{2}R + \sqrt{3}R \approx 55,6$ (cm).

Câu 17: Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 15$ cm và $DC = 20$ cm. Góc ở đáy bằng 75° . Tính diện tích hình thang cân $ABCD$

Lời giải



Kẻ $AH \perp CD, BE \perp CD$ ($A \in DC; B \in DC$)

Ta có $AH \perp AC, BE \perp DC$ ($A \in DC; B \in DC$)

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AHC} = \widehat{BEC} = \widehat{BED} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ABEH$ có $AB \parallel HE$ (do $AB \parallel CD$ và $H \in DC, E \in DC$)

$AH \parallel BE$ (cùng vuông góc với DC)

Suy ra tứ giác $ABEH$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow AB = HE = 15$ (cm) (tính chất)

Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân (giả thiết) nên $\begin{cases} \widehat{D} = \widehat{C} = 75^\circ \\ AD = BC \end{cases}$ (tính chất)

$$\Delta AHD \text{ vuông tại } H \text{ và } \Delta BEC \text{ vuông tại } E \text{ có } \begin{cases} \widehat{D} = \widehat{C} \\ AD = BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta AHD = \Delta BEC \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)} \Rightarrow DH = EC$$

$$\text{Mà } DH + EC + HE = DC \Rightarrow DH = EC = \frac{DC - HE}{2} = \frac{20 - 15}{2} = 2,5 (cm)$$

$$\text{Xét } \Delta AHD \text{ vuông tại } H \text{ ta có } AH = DH \cdot \tan D = 2,5 \cdot \tan 75^\circ = \frac{10 + 5\sqrt{3}}{2} (cm)$$

Diện tích hình thang $ABCD$ là:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot AH = \frac{1}{2}(15 + 20) \cdot \frac{10 + 5\sqrt{3}}{2} \approx 163,28 (cm^2)$$

Câu 18: Cho ΔABC vuông ở A có $AB = 6cm$, $AC = 8cm$

a) Giải tam giác vuông ABC .

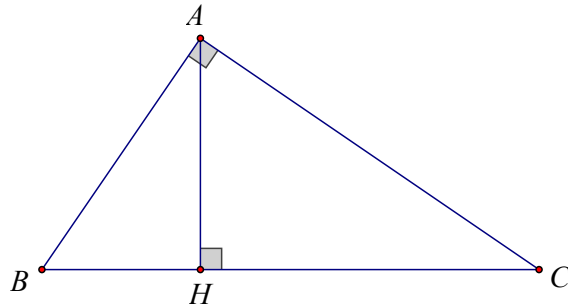
b) Kẻ $AH \perp BC$ tại H . Tính AH , HB , HC

c) Từ H kẻ HE và HF lần lượt vuông góc với AB , AC .

Tính chu vi và diện tích tứ giác $AEHF$.

d) Cho BC cố định. Tìm vị trí điểm A để S_{AEHF} đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $\Delta ABC (\widehat{A} = 90^\circ)$: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pytago). Khi đó, $BC = 10cm$.

$$\text{Ta có: } \sin \widehat{B} = \frac{8}{10} = 0,8 \Rightarrow \widehat{B} \approx 53^\circ \Rightarrow \widehat{C} \approx 37^\circ.$$

b) Áp dụng HTL trong tam giác vuông ABC :

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = 4,8cm.$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = 3,6cm.$$

$$CH = BC - BH = 6,4cm.$$

c) Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$ nên tứ giác là hình chữ nhật.

Mặt khác, áp dụng HTL trong tam giác vuông HAB :

$$HE.AB = HB.AH \Rightarrow HE = 2,88cm.$$

$$AH^2 = AE.AB \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB} = 3,84.$$

Do vậy chu vi HCN $AEHF : (2,88 + 3,84).2 = 13,44cm$.

Diện tích HCN $AEHF : 2,88.3.84 = 11,0592cm^2$.

$$d) \text{ Ta có } S_{AEHF} = HE.AE \leq \frac{HE^2 + AE^2}{2} = \frac{1}{2} AH^2.$$

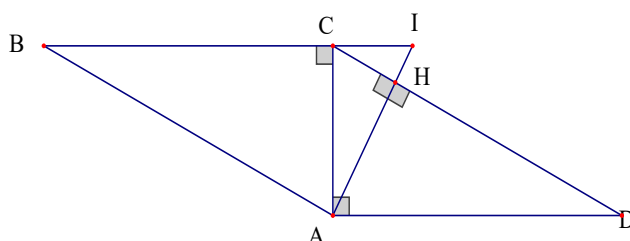
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \leq AM$. Vậy $S_{AEHF} \leq \frac{1}{2} AM^2$.

Dấu bằng xảy ra khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Câu 19: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC \perp AD$. Kẻ $AH \perp DC$ tại H , đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại I . Chứng minh rằng:

1. $AC^2 = CH.CD = CB.CI$.
2. $AH.AI + DH.DC = BC.BI$.
3. $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{HC.HD} - \frac{1}{AI^2}$.

Lời giải



a) Ta có: $ABCD$ là hình bình hành (gt) $\Rightarrow AD \parallel BC; AB \parallel CD$ (t/c hình bình hành)

Lại có: $AC \perp AD$ (gt) $\Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow AC \perp BI$

Xét $\triangle ADC$ vuông tại A, có: $AH \perp CD$ (gt) $\Rightarrow AH$ là đường cao của $\triangle ADC$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADC , có: $AC^2 = CH.CD$ (1)

Có: $AH \perp CD$ (gt) $\Rightarrow AH \perp AB$ (vì $BA \parallel CD$) $\Rightarrow \triangle ABI$ vuông tại A

Mà $AC \perp BI$ (cmt) $\Rightarrow AC$ là đường cao của $\triangle ABI$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABI , có: $AC^2 = CB.CI$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AC^2 = CH.CD = CB.CI$

b) Xét $\triangle ACI$ vuông tại C, có đường cao CH .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được: $AC^2 = AH.AI$ (3)

Xét $\triangle ACD$ vuông tại A , có đường cao AH .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được: $AD^2 = DH.DC$ (4)

Xét $\triangle ABI$ vuông tại A , đường cao AC . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được:

$$AB^2 = BC.BI \Rightarrow CD^2 = BC.BI \quad (5) \quad (\text{Vì } AB = CD \text{ do } ABCD \text{ là hình bình hành (gt)})$$

Xét $\triangle ACD$ vuông tại A . Áp dụng định lý Py – ta – go, có: $CD^2 = AC^2 + AD^2$ (6)

Từ (3), (4), (5) và (6), suy ra: $AH.AI + DH, DC = BC.BI$

c) Xét $\triangle ACD$ vuông tại A , có đường cao AH . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được:

$$+) AH^2 = HC.HD \Rightarrow \frac{1}{HC.HD} = \frac{1}{AH^2}$$

$$+) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$$

Xét $\triangle ABI$ vuông tại A , có đường cao AC . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được:

$$\frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AC^2} - \frac{1}{AI^2}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{HC.HD} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{HC.HD} - \frac{1}{AI^2}$$

Câu 20: Cho $\triangle ABC$ vuông tại C , đường cao CK .

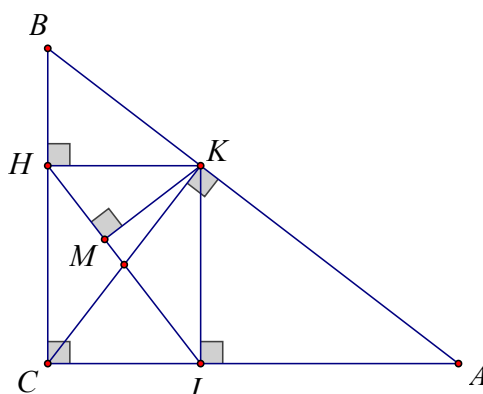
a) Cho $AB = 10\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Tính BC, CK, BK và AK

b) Gọi H và I thứ tự là hình chiếu của K trên BC và AC . Chứng minh $CB.CH = CA.CI$

c) M là chân đường vuông góc kẻ từ K xuống IH . Chứng minh $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$

d) Chứng minh rằng $\frac{AI}{BH} = \frac{AC^3}{BC^3}$

Lời giải



a) ΔABC vuông tại C có:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \Rightarrow BC^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BC = 6(cm)$$

$$Ta\ có: CK \cdot AB = BC \cdot AC \Leftrightarrow CK \cdot 10 = 6 \cdot 8 \Rightarrow CK = 4,8\ (cm)$$

$$BC^2 = BK \cdot AB \Leftrightarrow 6^2 = BK \cdot 10 \Leftrightarrow BK = 3,6(cm)$$

$$Ta\ có: BK + KA = AB \Rightarrow AK = 10 - 3,6 = 6,4\ (cm)$$

b) Xét ΔKBC vuông tại K có: $CH \cdot CB = CK^2$ (1)

$$\Delta KAC\ \text{vuông tại } K\ \text{có: } CI \cdot CA = CK^2\ (2)$$

$$Từ\ (1)\ \text{và}\ (2) \Rightarrow CH \cdot CB = CI \cdot CA$$

c) Xét tứ giác $CHKI$ có: $\widehat{CHK} = \widehat{HCI} = \widehat{CIK} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $CHKI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CH = KI; HK = CI$ (t/c) (3)

$$\Delta HKI\ \text{vuông tại } K\ \text{có } KM\ \text{là đường cao} \Rightarrow \frac{1}{KH^2} = \frac{1}{KH^2} + \frac{1}{KI^2}\ (4)$$

$$Từ\ (3),\ (4) \Rightarrow \frac{1}{KH^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}\ (\text{đpcm})$$

d) Tứ giác $CHKI$ là hình chữ nhật (cmt) $\Rightarrow IK \parallel CH \Rightarrow IK \parallel AB$

$$\Rightarrow \widehat{KBH} = \widehat{AKI}\ (\text{hai góc đồng vị}).$$

Xét ΔBKH và ΔKAI có:

$$\widehat{BHK} = \widehat{KIA} = 90^\circ\ (gt)$$

$$\widehat{BKH} = \widehat{KAI}$$

$$\Delta KAI \sim \Delta BKH\ (g.g) \Rightarrow \frac{KI}{BH} = \frac{AK}{BK}\ (t/c)$$

$$IK \parallel AB\ (cmt) \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{KI}{BC}\ (\text{hệ quả định lý Ta lét})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AI} = \frac{BC}{KI \cdot AC} \Rightarrow \frac{BH}{AI} = \frac{BC \cdot BH}{KI \cdot AC}$$

$$Mà\ \frac{KI}{BH} = \frac{AK}{BK}\ (cmt) \Rightarrow \frac{BH}{AI} = \frac{BC \cdot BK}{AK \cdot AC} \Rightarrow \frac{BH}{AI} = \frac{BC \cdot BK \cdot AB}{AK \cdot AC \cdot AB} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BK \cdot AB}{AK \cdot AB}$$

Mà $CB^2 = CK \cdot AB; CA^2 = KA \cdot BC$ (hệ thức lượng trong ΔABC vuông tại C có đường cao CH)

$$\Rightarrow \frac{BH}{AI} = \left(\frac{BC}{AC} \right)^3 \Rightarrow \frac{AI}{BH} = \frac{AC^3}{BC^3}\ (\text{đpcm})$$

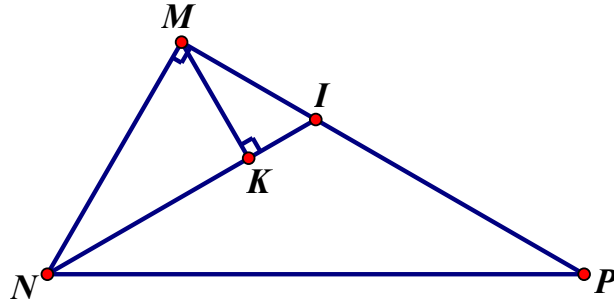
Câu 21: Cho tam giác MNP vuông tại M , góc $\widehat{N} = 60^\circ$, đường phân giác NI . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với NI tại K .

1) Chứng minh ΔMKN đồng dạng với ΔNMP , tìm tỉ số đồng dạng của chúng.

2) Tính diện tích tam giác MKN biết diện tích tam giác NMP bằng $60cm^2$.

3) Chứng minh $NP \cdot MK = NK \cdot IP$

Lời giải



$$1) \Delta NMP \text{ vuông tại } M \text{ có } \widehat{N} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 30^\circ \Rightarrow NM = \frac{NP}{2}$$

Do NI là phân giác của $\widehat{MNP} \Rightarrow \widehat{MNK} = \widehat{INP} = 30^\circ$

Xét ΔMKN và ΔNMP có: $\widehat{MKN} = \widehat{NMP} = 90^\circ$; $\widehat{MNK} = \widehat{P} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \Delta MKN \sim \Delta NMP \text{ (g.g), tỉ số đồng dạng } \frac{NM}{NP} = \frac{1}{2}$$

$$2) \Delta MKN \sim \Delta NMP, \text{ tỉ số } \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MKN}}{S_{NMP}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MKN} = \frac{S_{NMP}}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ cm}^2$$

$$3) \text{ Xét } \Delta NIP \text{ có } \widehat{INP} = \widehat{P} = 30^\circ \Rightarrow \Delta NIP \text{ cân tại } I \Rightarrow IP = IN$$

$$\Delta MKN \text{ vuông tại } K \text{ có } \widehat{MNK} = 30^\circ \Rightarrow MK = \frac{MN}{2}$$

$$\text{Mà } MN = \frac{NP}{2} \Rightarrow 2MN = NP \Rightarrow NP.MK = 2MN.\frac{MN}{2} = MN^2 \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông với ΔMNI vuông tại M có:

$$MN^2 = NK.NI = NK.IP \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow NP.MK = NK.IP$$

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC .

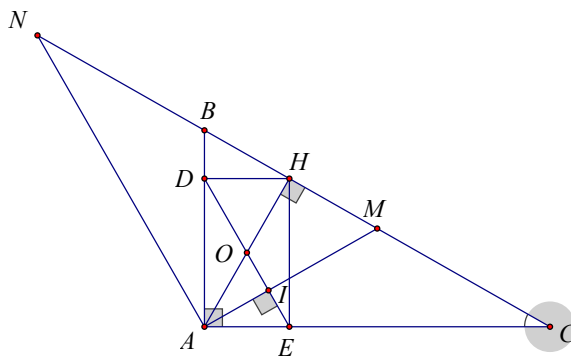
a) Chứng minh $DE.BC = AB.AC$.

$$b) \text{ Chứng minh } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}.$$

c) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với DE cắt BC tại M . Chứng minh M là trung điểm BC .

d) Cho $\widehat{C} = \alpha$, $BC = a$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt BC tại N . Chứng minh $CN = \frac{a.(\cos 2\alpha + 1)}{2 \cos 2\alpha}$.

Lời giải



a) Chỉ ra $AEHD$ là hình chữ nhật suy ra $AH = DE$.

Mà $AB.AC = AH.BC \Rightarrow AB.AC = DE.BC$.

b) Chỉ ra $\begin{cases} AB^2 = BH.BC \\ AC^2 = CH.BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH.BC}{CH.BC} = \frac{BH}{CH}$.

c) Chỉ ra $\widehat{IAE} = \widehat{IEH} = \widehat{OHE} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta MAC$ cân tại $M \Rightarrow MA = MC$ (1)

Ta có: $\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \\ \widehat{MAE} + \widehat{MAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{MAB} \Rightarrow \Delta MAB \text{ cân tại } M \Rightarrow MA = MB \text{ (2)}. \\ \widehat{MAE} = \widehat{C} \end{cases}$

Từ (1)(2) suy ra M là trung điểm BC .

d) Tam giác AMC cân tại $M \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{MAC} + \widehat{C} = 2\widehat{C} = 2\alpha$

Trong tam giác vuông AMN có:

$$\cos 2\alpha = \frac{AM}{NM} \Rightarrow \frac{a \cdot (\cos 2\alpha + 1)}{2 \cos 2\alpha} = \frac{a \cdot \left(\frac{AM}{NM} + 1 \right)}{2 \cdot \frac{AM}{NM}} = \frac{a \cdot \left(\frac{AM + MN}{NM} \right)}{2 \cdot \frac{AM}{NM}} = \frac{a \cdot (MC + MN)}{2AM} = \frac{a \cdot NC}{2 \cdot \frac{a}{2}} = NC$$

Câu 23: Cho tam giác MND vuông tại M ($MN < MD$), đường cao MH .

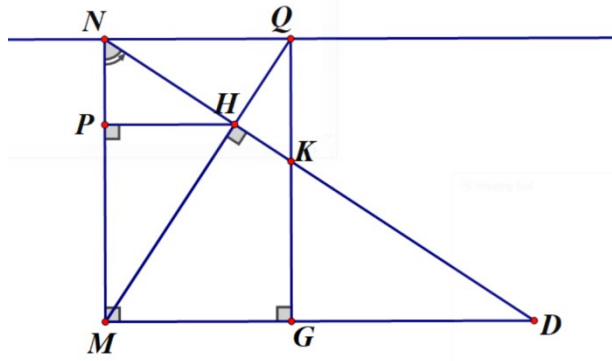
a) Cho $MN = 6 \text{ cm}$, $MD = 8 \text{ cm}$. Tính ND , MH .

b) Qua N kẻ Nx song song MD cắt đường thẳng MH tại Q . Chứng minh $MH.MQ = NH.ND$.

c) Kẻ QG vuông góc MD (G thuộc MD), QG cắt ND tại K . Chứng minh $NH^2 = HK.HD$.

d) Kẻ HP vuông góc MN (P thuộc MN). Chứng minh $NP = ND \cdot \cos^3 MND$.

Lời giải



a) Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông MND : $MN^2 + MD^2 = ND^2 \Rightarrow ND = 10 \text{ cm}$

Hệ thức lượng trong tam giác vuông MND , đường cao MH : $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MD^2}$

$$\Rightarrow MH = \frac{24}{5} \text{ cm}.$$

b) $NQ \parallel MD, NM \perp MD \Rightarrow NQ \perp NM$ (từ vuông góc đến song song).

Tam giác MNQ vuông, NH là đường cao: $NM^2 = MH.MQ$ (hệ thức trong tam giác vuông)

Tam giác MND vuông, MH là đường cao: $NM^2 = NH.ND$ (hệ thức trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow MH.MQ = NH.ND$$

c) Tam giác MNQ vuông, NH là đường cao: $NH^2 = MH.HQ$ (hệ thức trong tam giác vuông)

Tam giác QHK đồng dạng tam giác DHM (g - g) $\Rightarrow \frac{HK}{HM} = \frac{HQ}{HD} \Rightarrow HK.HD = MH.HQ$

$$\Rightarrow NH^2 = HK.HD$$

d) Tam giác NHM vuông, HP là đường cao: $NH^2 = NM.NP \Rightarrow NP = \frac{NH^2}{NM} = NH^2 \cdot \frac{1}{NM}$

Tam giác NMD vuông, MH là đường cao: $NM^2 = NH.ND \Rightarrow NH = \frac{NM^2}{ND}$

$$NP \Rightarrow \left(\frac{NM^2}{ND} \right)^2 \cdot \frac{1}{NM} = \frac{NM^3}{ND^2} = \frac{(ND \cdot \cos MND)^3}{ND^2} = ND \cdot \cos^3 MND$$

Câu 24: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , kẻ đường cao AH . Hạ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi M là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$

b) $\triangle AEF \sim \triangle ACE$

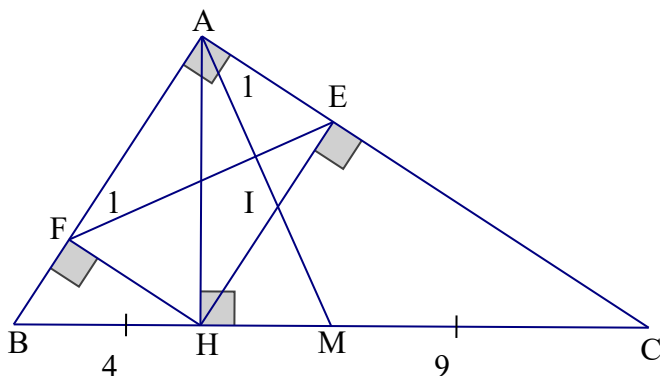
c) $AM \perp EF$

d) Cho $BH = 4\text{cm}, HC = 9\text{cm}$. Tính EF

e) Cho BC cố định, tìm vị trí của điểm A để đoạn EF lớn nhất

f) Cho BC cố định, tìm vị trí của A để diện tích tứ giác $AEHF$ lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ (vì cùng bằng AH^2)

b) Từ $AE \cdot AB = AF \cdot AC \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB}$, lại có $\widehat{A}$: chung $\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB$ (cgc)

c) Từ chứng minh trên $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E_1}$ (1)

$\triangle ABC$ vuông tại A , M là trung điểm của $BC \Rightarrow MA = MC \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A_1}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{MAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{MAB} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp FE = I$

d) Ta có $AH^2 = BH \cdot HC = 36 \Rightarrow AH = EF = 6$ (cm)

e) Theo chứng minh trên ta có $AH = EF = 6$ (cm) do đó EF lớn nhất khi AH lớn nhất

mà $AH \leq AM$, $AM = \frac{1}{2}BC$ (không đổi)

Dấu “=” xảy ra khi H trùng với M khi và chỉ khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A

Vậy EF lớn nhất khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

f) Theo câu a, có: $\begin{cases} AE \cdot AB = AH^2 \\ AF \cdot AC = AH^2 \end{cases} \Rightarrow AE \cdot AF \cdot AB \cdot AC = AH^4 \Rightarrow AE \cdot AF \cdot AH \cdot BC = AH^4$

$$\Rightarrow AE \cdot AF = \frac{AH^3}{BC}$$

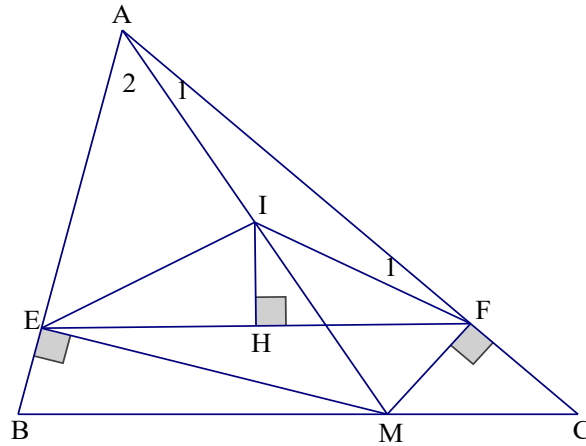
Vậy EF lớn nhất khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A

Có $S_{AEHF} = \frac{AH^3}{BC}$, mà BC không đổi $\Rightarrow S_{AEHF}$ lớn nhất khi AH lớn nhất khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Câu 25: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $\widehat{A} = 60^\circ$, $M \in BC$. Gọi I là trung điểm của AM , hạ $ME \perp AB, MF \perp AC$

- a) Chứng minh rằng $IA = IM = IE = IF$
 b) Tính $\widehat{EIF}$
 c) Cho $AM = 20cm$. Tính EF
 d) Tìm vị trí của điểm M để EF nhỏ nhất

Lời giải



- a) Dùng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông
 b) Theo chứng minh trên ta có:

$$IA = IF \Rightarrow \triangle IAF \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{F_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{MIF} = 2\widehat{A_1} \text{ (góc ngoài tam giác)}. \text{ Tương tự ta có } \Rightarrow \widehat{I_2} = 2\widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{EIF} = 2(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}) = 120^\circ$$

$$\text{c) Hạ } IH \perp EF, \text{ do } \triangle EIF \text{ cân tại } I \Rightarrow \begin{cases} HE = HF \\ \widehat{EIH} = \widehat{FIH} = 60^\circ \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức lượng giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

$$EH = IE \cdot \sin \widehat{EIH} = \frac{1}{2} AM \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow EF = AM \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow EF = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} (cm)$$

$$\text{d) Theo chứng minh trên ta có } EF = AM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Do đó } EF \text{ nhỏ nhất khi } AM \text{ nhỏ nhất}$$

AM nhỏ nhất khi $AM \perp BC$. Vậy EF nhỏ nhất khi $AM \perp BC$.

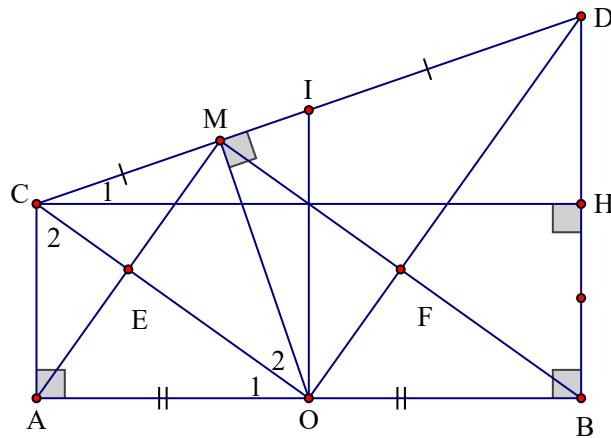
Câu 26: Cho tam giác ABC đều, đường cao AH . Trên tia đối của tia AH lấy điểm M sao cho $MH = \frac{1}{3}AH$

- a) Chứng minh rằng $\triangle ACM$ vuông
 b) Cho $CM = 5cm$. Tính AB
 c) Phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt BC tại E , biết $CE = 4cm$. Tính AC
 d) CM cắt AB tại N . Tính MN , BN theo cạnh của $\triangle ABC$

Lời giải

- Câu 27:** Cho $AB = 2a$ cố định. O là trung điểm của AB , vẽ cùng một phía của AB vẽ hai tia Ax, By trong đó $By \perp AB$. Lấy điểm C thuộc Ax, D thuộc By sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$ ($AC \leq BD$). Hạ $OM \perp CD$, nối OC cắt AM tại E , nối OD cắt BM tại F
- Chứng minh rằng CO và DO là phân giác của $\widehat{ACD}$ và $\widehat{BDC}$
 - Chứng minh $\triangle ABM$ vuông tại M
 - Chứng minh tứ giác $OEMF$ là hình chữ nhật
 - $OE \cdot OC = OF \cdot OD$
 - Cho C và D chuyển động mà $\widehat{COD} = 90^\circ$. Chứng minh $AC \cdot BD$ không đổi
 - Cho $\widehat{MBA} = 30^\circ$, tính AC và BD theo a
 - Xác định vị trí của điểm C để cho $\tan \widehat{CDB} = 3$

Lời giải



a) Từ giả thiết suy ra $AC \parallel BD$ vì cùng vuông góc với $ACDB$

Tứ giác $ACDB$ là hình thang.

Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang $ACDB$

$$\Rightarrow OI \parallel AC \Rightarrow \widehat{IOC} = \widehat{C}_2 \text{ (so le trong)}$$

Tam giác COD vuông tại O (giả thiết), $IC = ID \Rightarrow IO = IC \rightarrow \widehat{IOC} = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow CO$ là phân giác của $\widehat{ACD}$

Tương tự: DO là phân giác của $\widehat{BDC}$

b) Theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow OM = OA = OB \Rightarrow OM = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle ABM$ vuông tại M

c) $\triangle OMC$ vuông tại M và $\triangle OAC$ vuông tại A ,

$$\text{mà } \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \text{ (cmt)} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MOC} = \widehat{AOC} \\ OM = OA \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow OC \perp AM = E \text{ (đpcm)}$$

d, e) Ta có:

$$\widehat{AOC} + \widehat{BOD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD} \Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle BDO \Rightarrow \frac{AO}{BD} = \frac{AC}{BO} \Rightarrow AC \cdot BD = AO \cdot BO = a^2$$

f) Ta có $OC \parallel MB$ (cùng vuông góc với AM)

$$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{MBO} = 30^\circ \Rightarrow AC = AO \cdot \tan 30^\circ = a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$AC \cdot BD = a^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$$

g) Hạ $CH \perp BD$, đặt $AC = x (x > 0)$

Tứ giác $ACHD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BH = x; CH = AB = 2a$

$$\text{Ta có } \tan \widehat{CDB} = 3 \Leftrightarrow \frac{CH}{DH} = 3 \Leftrightarrow DH = \frac{CH}{3} = \frac{2a}{3} \Rightarrow BD = \frac{2a}{3} + x$$

Theo chứng minh trên $AC \cdot BD = a^2$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(x + \frac{2a}{3}\right) = a^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2ax}{3} = a^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{a}{3} + \frac{a^2}{9} = a^2 + \frac{a^2}{9} \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{10a^2}{9} (x, a > 0)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{a}{3} = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow x = \frac{a(\sqrt{10}-1)}{3} \Rightarrow AC = \frac{a(\sqrt{10}-1)}{3}.$$

Câu 28: Một người thợ sử dụng thước ngắm có góc vuông để đo chiều cao của một cây dừa, với các kích thước đo được như hình bên. Khoảng cách từ vị trí gốc cây đến vị trí chân của người thợ là $4,8m$ và từ vị trí chân đứng thẳng trên mặt đất đến mắt của người ngắm là $1,6m$. Hỏi với các kích thước trên thì người thợ đo được chiều cao của cây đó là bao nhiêu? (làm tròn đến mét).



Lời giải

Xét tứ giác $ABDH$ có:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{H} = 90^\circ \text{ (hình vẽ)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDH$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

$$\Rightarrow BA = DH = 1,6m; BD = AH = 4,8m$$

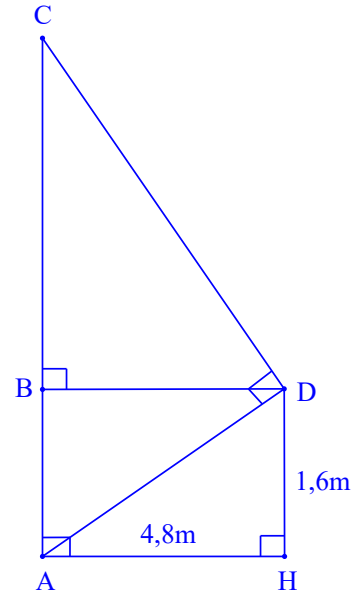
Xét $\triangle ADC$ vuông tại D và DB là đường cao, ta có:

$$DB^2 = BA \cdot BC \text{ (hệ thức lượng)}$$

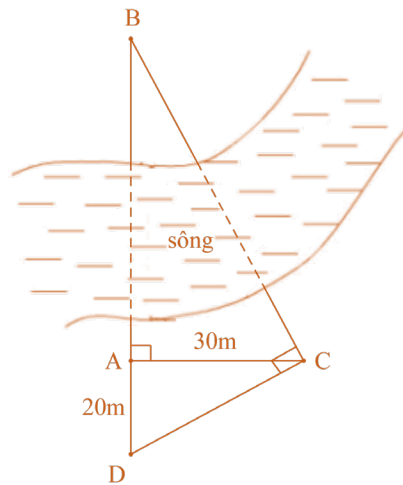
$$\Rightarrow BC = \frac{DB^2}{BA} = \frac{4,8^2}{1,6} = 14,4m$$

$$\Rightarrow AC = AB + BC = 1,6 + 14,4 = 16m$$

Vậy chiều cao của cây dừa là $16m$



Câu 29: Muốn tính khoảng cách từ điểm A đến điểm B nằm bên kia bờ sông, ông Việt vạch từ A đường vuông góc với AB . Trên đường vuông góc này lấy một đoạn thẳng $AC = 30m$, rồi vạch CD vuông góc với phương BC cắt AB tại D (xem hình vẽ). Đo $AD = 20m$, từ đó ông Việt tính được khoảng cách từ A đến B . Em hãy tính độ dài AB và số đo góc ACB .



Lời giải

Xét $\triangle BCD$ vuông tại C và CA là đường cao, ta có:

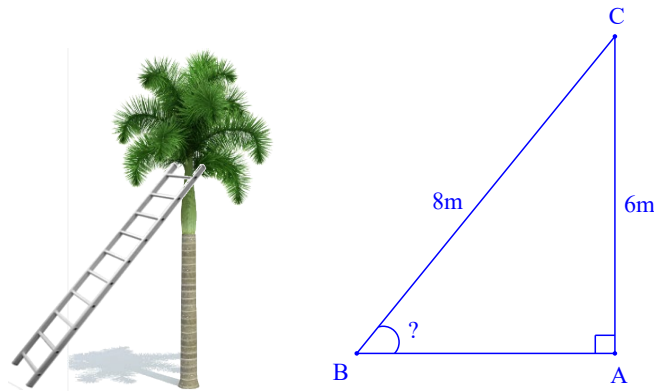
$$AB \cdot AD = AC^2 \text{ (hệ thức lượng)} \Rightarrow AB = \frac{AC^2}{AD} = \frac{30^2}{20} = 45m$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\tan ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{45}{30} = 1,5 \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)} \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 56^\circ 18'$$

Vậy tính độ dài $AB = 45m$ và số đo góc ACB là $56^\circ 18'$

Câu 30: Một cây cau có chiều cao $6m$. Để hái một buồng cau xuống, phải đặt thang tre sao cho đầu thang tre đạt độ cao đó, khi đó góc của thang tre với mặt đất là bao nhiêu, biết chiếc thang dài $8m$ (làm tròn đến phút)



Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)} \Rightarrow \hat{B} \approx 48^\circ 35'$$

Vậy góc giữa thang tre với mặt đất là $48^\circ 35'$

Câu 31: Một máy bay đang bay ở độ cao $12km$. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.

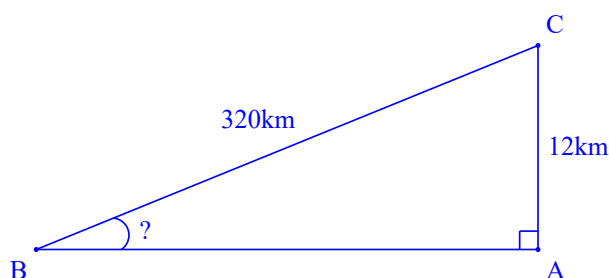


a) Nếu cách sân bay $320km$ máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

b) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Lời giải

a) Hình vẽ minh họa bài toán:



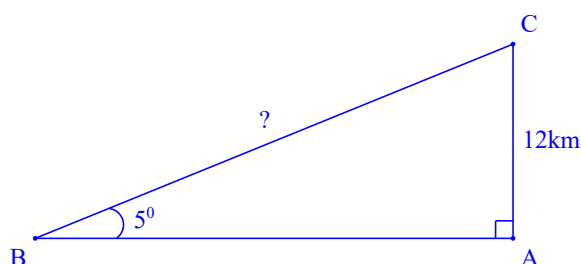
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{320} = \frac{3}{80}$$

(tỉ số lượng giác của góc nhọn) $\Rightarrow \hat{B} \approx 2^{\circ}9'$

Vậy góc nghiêng là $2^{\circ}9'$

b) Hình vẽ minh họa bài toán:



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{12}{\sin 5^{\circ}} \approx 137,7km$$

Vậy phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh khi cách sân bay $137,7km$

Câu 32: Hải đăng kê Gà thuộc xã Tân Thành, huyện Hàm Thuận Nam, Bình Thuận là ngọn hải đăng được trung tâm sách kỷ lục Việt Nam xác nhận là ngọn hải đăng cao nhất và nhiều tuổi nhất. Hải đăng Kê Gà được xây dựng từ năm 1897 – 1899 và toàn bộ bằng đá. Tháp đèn có hình bát giác, cao $66m$ so với mực nước biển. Ngọn đèn đặt trong tháp có thể phát sáng xa 22 hải lý (tương đương $40km$)



Một người đi thuyền thúng trên biển, muốn đến ngọn hải đăng có độ cao $66m$, người đó đứng trên mũi thuyền và dùng giác kế đo được góc giữa thuyền và tia nắng chiếu từ đỉnh ngọn hải đăng đến thuyền là 25° . Tính khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng (làm tròn đến m).

Lời giải

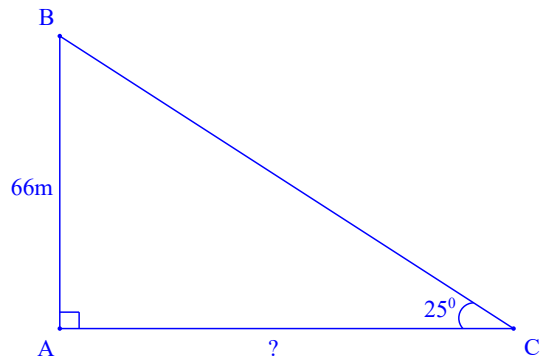
Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

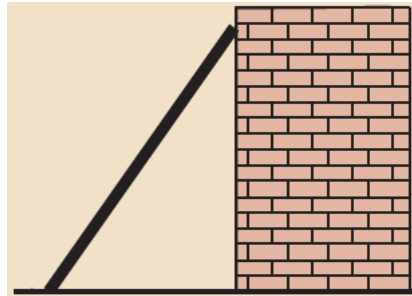
$$\tan C = \frac{AB}{AC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan C} = \frac{66}{\tan 25^\circ} \approx 142m$$

Vậy khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng là $142m$



Câu 33: Trường bạn An có một chiếc thang dài 6 mét. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc “an toàn” là 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng)



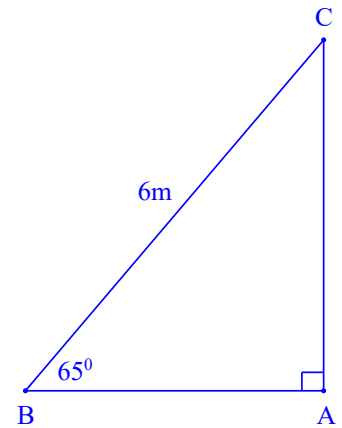
Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có: $\cos B = \frac{AB}{BC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn) $\Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 6 \cdot \cos 65^\circ \approx 2,5m$

Vậy cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng $2,5m$

Câu 34: Thang xếp chữ A gồm 2 thang đơn tựa vào nhau. Để an toàn, mỗi thang đơn tạo với mặt đất một góc khoảng 75° . Nếu muốn tạo một thang xếp chữ A cao $2m$ tính từ mặt đất thì mỗi thang đơn phải dài bao nhiêu?



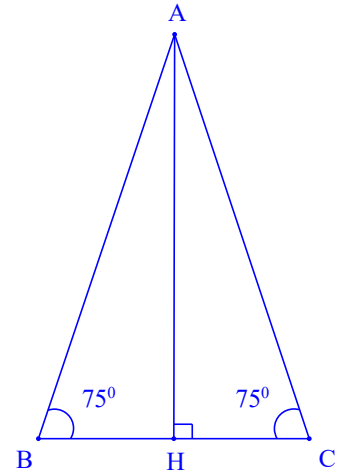
Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

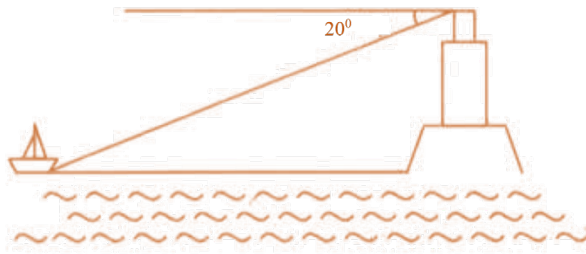
Do tam giác ABC cân nên đường cao AH cũng là trung tuyến hay H là trung điểm BC

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có: $\sin B = \frac{AH}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn) $\Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin B} = \frac{2}{\sin 75^\circ} \approx 2,07m$

Vậy thang đơn cần có chiều dài $2,07m$



Câu 35: Từ một đài quan sát cao $350m$ so với mực nước biển, người ta nhìn thấy một chiếc thuyền bị nạn dưới góc 20° so với phương ngang của mực nước biển. Muốn đến cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài bao nhiêu mét?



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Theo đề bài, ta có: $\widehat{BCA} = \widehat{CBx} = 20^\circ$

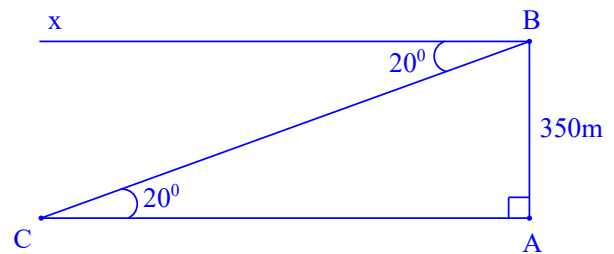
(vì $AC \parallel Bx$ và 2 góc ở vị trí so le trong)

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

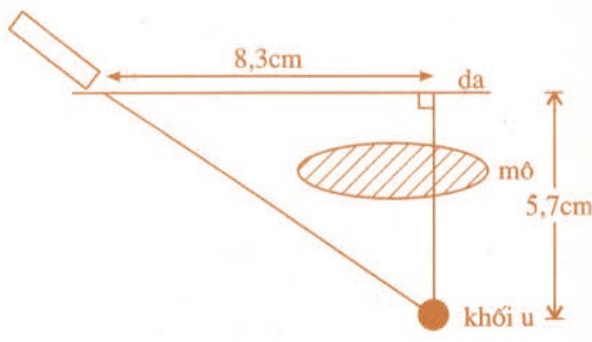
$\tan ACB = \frac{AB}{AC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan ACB} = \frac{350}{\tan 20^\circ} \approx 961,6m$$

Vậy muốn cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài khoảng $961,6m$.



Câu 36: Một khối u của một bệnh nhân cách mặt da $5,7cm$ được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u (trên mặt da) $8,3cm$ (xem hình vẽ). Tính góc tạo bởi chùm tia với mặt da và chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu để đến được khối u?



Lời giải

Dựa vào hình vẽ bài toán, ta có:

Xét ΔABC vuông tại A , ta có:

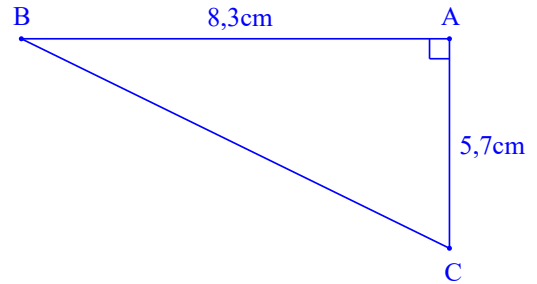
$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{5,7}{8,3} \text{ (tỉ số lượng giác của góc}$$

nhọn) $\Rightarrow \hat{B} \approx 34^\circ 28'$

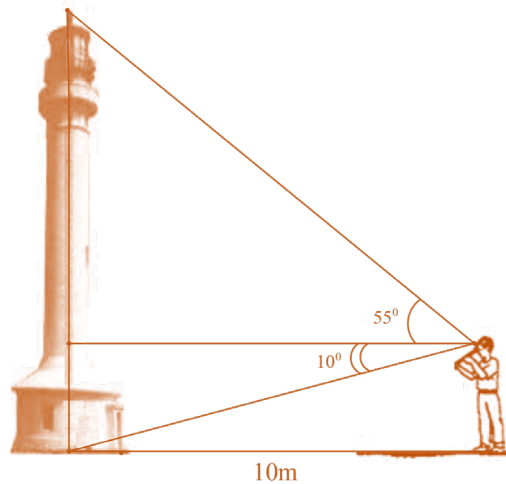
Và: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pytago)

$$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(8,3)^2 + (5,7)^2} \approx 10,1(cm)$$

Vậy góc tạo bởi chùm tia với mặt da là $34^\circ 28'$ và chùm tia phải đi một đoạn dài khoảng $10,1cm$ để đến được khối u.



Câu 37: Một người quan sát đứng cách một cái tháp $10m$, nhìn thẳng đỉnh tháp và chân tháp lần lượt dưới 1 góc 55° và 10° so với phương ngang của mặt đất. Hãy tính chiều cao của tháp.



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Dựa vào hình vẽ minh họa, ta có: $AH = BD = 10m$

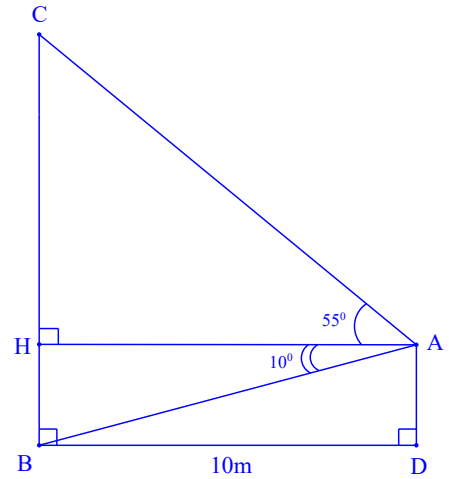
Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , ta có: $\tan BAH = \frac{BH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow BH = AH \cdot \tan BAH = 10 \cdot \tan 10^\circ (m)$$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có: $\tan CAH = \frac{CH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow CH = AH \cdot \tan CAH = 10 \cdot \tan 55^\circ (m)$$

Ta có: $BC = BH + CH = 10 \cdot \tan 10^\circ + 10 \cdot \tan 55^\circ \approx 16m$. Vậy chiều cao của tháp là $16m$



Câu 38: Một cần cẩu có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là 40° . Vậy muốn nâng một vật nặng lên cao $8,1$ mét thì cần cẩu phải dài bao nhiêu? Biết chiều cao của xe là $2,6$ mét, chiều cao của vật nặng là 1 mét (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân)



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Ta có: $AK = CH$

$$\Rightarrow AD + DK = CH$$

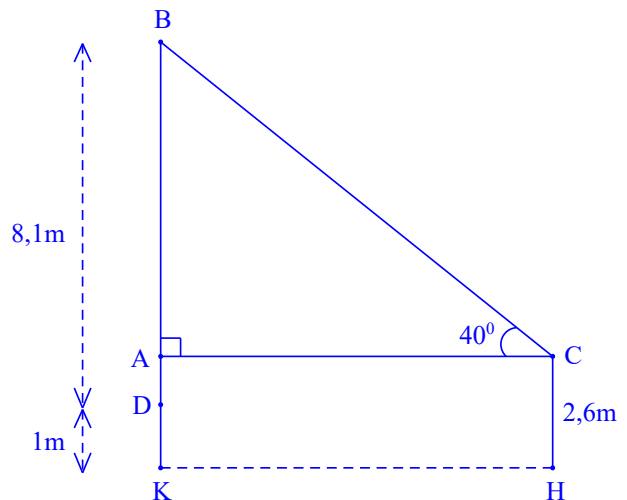
$$\Rightarrow AD = CH - DK = 2,6 - 1 = 1,6m$$

Mà: $AB + AD = BD$

$$\Rightarrow AB = BD - AD = 8,1 - 1,6 = 6,5m$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

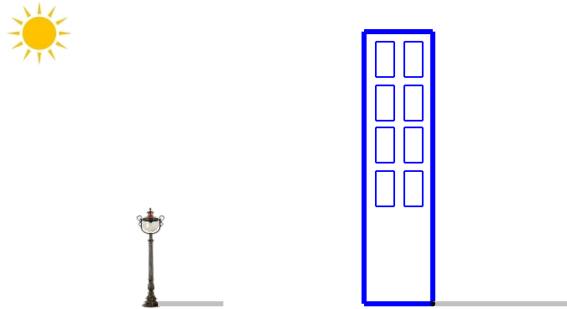
$\sin C = \frac{AB}{BC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)



$$\Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{6,5}{\sin 40^\circ} \approx 10,1m$$

Vậy cần cầu phải dài 10,1m

Câu 39: Một tòa nhà cao tầng có bóng trên mặt đất là 272m , cùng thời điểm đó một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 14m . Em hãy cho biết tòa nhà đó có bao nhiêu tầng, biết rằng mỗi tầng cao 3,4m ?



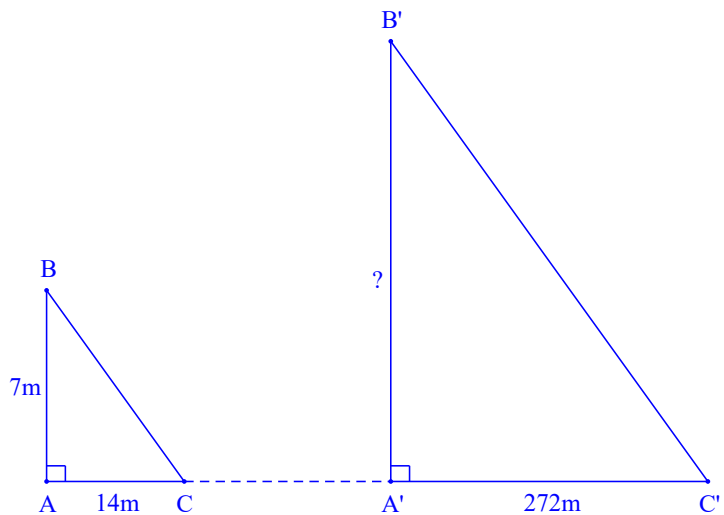
Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Vì các góc tạo bởi tia nắng mặt trời và mặt đất là bằng nhau nên góc C bằng góc C'

$$\Rightarrow \tan C = \tan C' \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

(tỉ số lượng giác của góc nhọn)



$$\Rightarrow A'B' = \frac{AB \cdot A'C'}{AC} = \frac{7 \cdot 272}{14} = 136m$$

Vậy tòa nhà có: $\frac{136}{3,4} = 40$ (tầng).

Câu 40: Tòa nhà Bitexco Financial, Bitexco Financial Tower hay Tháp Tài chính Bitexco là một tòa nhà chọc trời được xây dựng tại trung tâm Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh. Tòa nhà có 68 tầng (không tính 3 tầng hầm). Biết rằng, khi tòa nhà có bóng in trên mặt đất dài 47,3mét, thì cùng thời điểm đó có một cột tiêu (được cắm thẳng đứng trên mặt đất) cao 15 mét có bóng in trên mặt đất dài 2,64 mét.



- a) Tính góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất (đơn vị đo góc được làm tròn đến độ)
- b) Tính chiều cao của tòa nhà (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

- a) Vì các góc tạo bởi tia nắng mặt trời và mặt đất là bằng nhau nên góc B bằng góc B'

$$\Rightarrow \tan B = \tan B' = \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{15}{2,64} \text{ (tỉ số}$$

lượng giác của góc nhọn)

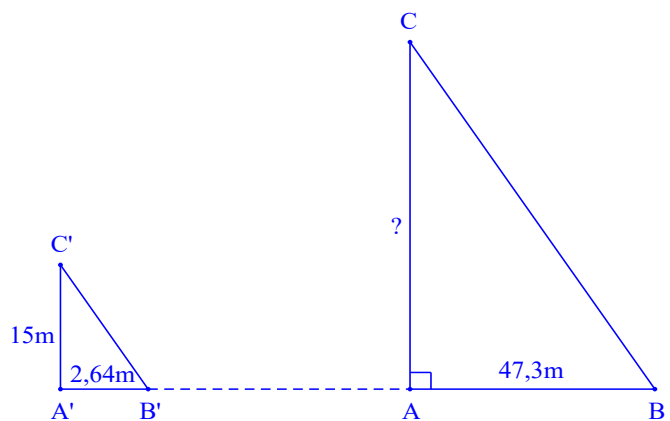
$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{B'} \approx 80^\circ$$

Vậy góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất là 80°

- b) Ta có $\tan B = \frac{AC}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AC = AB \cdot \tan B = 47,3 \cdot \frac{15}{2,64} \approx 268,8m$$

Vậy chiều cao của tòa nhà là $268,8m$



- Câu 41:** Giông bão thổi mạnh, một cây tre gãy gấp xuống làm ngọn cây chạm đất và ngọn cây tạo với mặt đất một góc 30° . Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây tre là $8,5m$. Giả sử cây tre mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây tre đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét $\triangle ADC$ vuông tại C , ta có:

$$\tan DCA = \frac{AD}{AC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

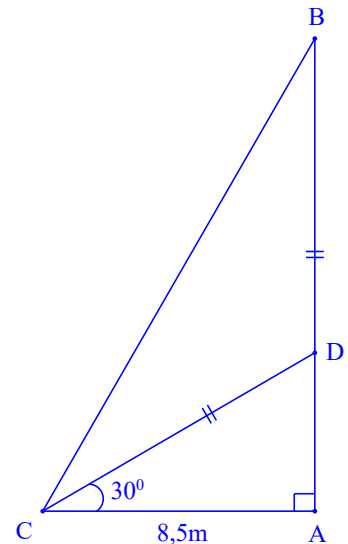
$$\Rightarrow AD = AC \cdot \tan DCA = 8,5 \cdot \tan 30^\circ \text{ (m)}$$

$$\text{Và: } \cos DCA = \frac{AC}{DC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

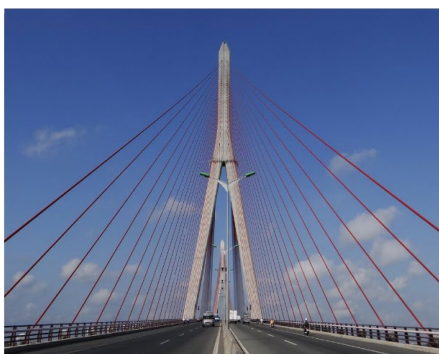
$$\Rightarrow DC = \frac{AC}{\cos DCA} = \frac{8,5}{\cos 30^\circ} \text{ (m)}$$

$$\Rightarrow AB = AD + DC = 8,5 \cdot \tan 30^\circ + \frac{8,5}{\cos 30^\circ} \approx 14,72 \text{ m}$$

Vậy chiều cao của cây tre là $14,72 \text{ m}$.



Câu 42: Tính chiều cao của trụ cầu Cần Thơ so với mặt sông Hậu cho biết tại hai điểm cách nhau 89m trên mặt sông người ta nhìn thấy đỉnh trụ cầu với góc nâng lần lượt là 40° và 30° .



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

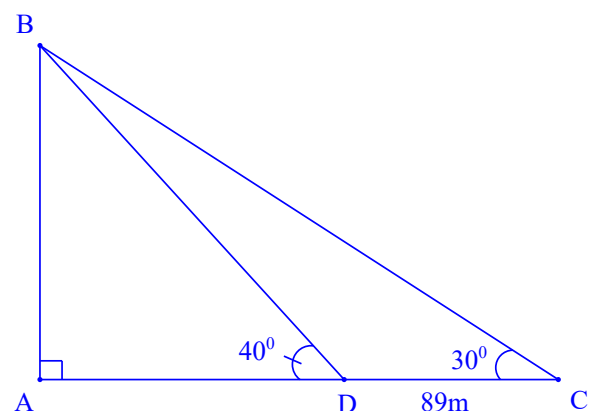
$$\text{Xét } \triangle ABD \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } \tan ADB = \frac{AB}{AD} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB}{\tan ADB} = \frac{AB}{\tan 40^\circ} \text{ m (1)}$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } \tan ACB = \frac{AB}{AC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan ACB} = \frac{AB}{\tan 30^\circ} \text{ m (2)}$$

Ta có: $AD + DC = AC$ (vì D thuộc AC)



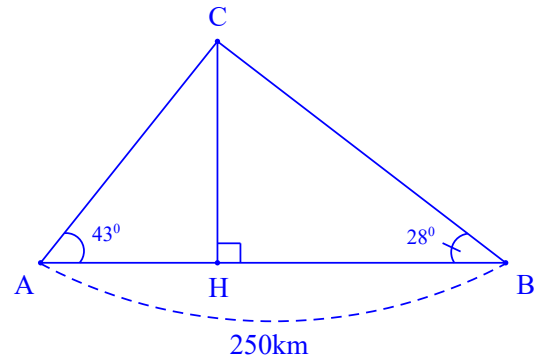
$$\Leftrightarrow \frac{AB}{\tan 40^\circ} + 89 = \frac{AB}{\tan 30^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{\tan 30^\circ} - \frac{AB}{\tan 40^\circ} = 89$$

$$\hat{U}AB \cdot \left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 40^\circ} \right) = 89$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{89}{\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 40^\circ}}$$

$$\Leftrightarrow AB \approx 164,7m$$



Vậy chiều cao của trụ cầu Cần thơ so với mặt sông Hậu là 164,7m .

Câu 43: Hai người A và B đứng cùng bờ sông nhìn ra một cồn nổi giữa sông. Người A nhìn ra cồn với 1 góc 43° so với bờ sông, người B nhìn ra cồn với 1 góc 28° so với bờ sông, 2 người đứng cách nhau 250m . Hỏi cồn cách bờ sông hai người đang đứng là bao nhiêu m?



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét $\triangle AHC$ vuông tại A , ta có:

$$\tan \hat{CAH} = \frac{CH}{AH} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan \hat{CAH}} = \frac{CH}{\tan 43^\circ} (m) \quad (1)$$

Xét $\triangle BHC$ vuông tại A , ta có: $\tan \hat{CBH} = \frac{CH}{BH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

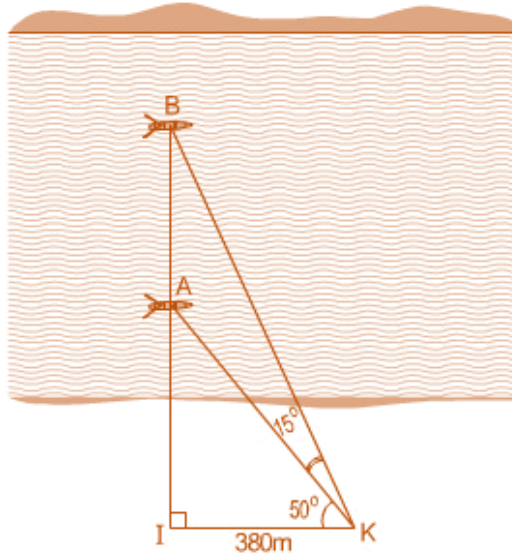
$$\Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan \hat{CBH}} = \frac{CH}{\tan 28^\circ} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AH + BH = \frac{CH}{\tan 43^\circ} + \frac{CH}{\tan 28^\circ} \Leftrightarrow AB = CH \cdot \left(\frac{1}{\tan 43^\circ} + \frac{1}{\tan 28^\circ} \right)$$

$$\Leftrightarrow 250 = CH \cdot \left(\frac{1}{\tan 43^\circ} + \frac{1}{\tan 28^\circ} \right) \Leftrightarrow CH = \frac{250}{\frac{1}{\tan 43^\circ} + \frac{1}{\tan 28^\circ}} \approx 84,66m$$

Vậy cồn cách bờ sông hai người đang đứng là 84,66m .

Câu 44: Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như hình vẽ dưới đây. Tính khoảng cách giữa chúng (làm tròn đến mét).



Lời giải

Xét $\triangle AIK$ vuông tại I , ta có: $\tan AKI = \frac{AI}{IK}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AI = IK \cdot \tan AKI = 380 \cdot \tan 50^\circ \approx 453m$$

Xét $\triangle BIK$ vuông tại I , ta có: $\tan BKI = \frac{BI}{IK}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow BI = IK \cdot \tan BKI = 380 \cdot \tan (15^\circ + 50^\circ) = 380 \cdot \tan 65^\circ \approx 815m$$

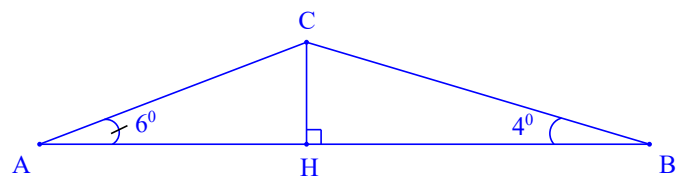
$$\text{Ta có: } AB + AI = BI \Rightarrow AB = BI - AI = 815 - 453 = 362m$$

Vậy khoảng cách giữa chúng là $362m$.

Câu 45: Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống một con dốc như hình vẽ dưới. Cho biết đoạn AB dài $762m$, $\hat{A} = 6^\circ$, $\hat{B} = 4^\circ$.

a) Tính chiều cao con dốc.

b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ lên dốc là $4km/h$ và tốc độ xuống dốc là $19km/h$.



Lời giải

a) Xét ΔACH vuông tại H , ta có: $\tan CAH = \frac{CH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan CAH} = \frac{CH}{\tan 6^\circ} (m) \quad (1)$$

Xét ΔBCH vuông tại H , ta có: $\tan CBH = \frac{CH}{BH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan CBH} = \frac{CH}{\tan 4^\circ} (m) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AH + BH = \frac{CH}{\tan 6^\circ} + \frac{CH}{\tan 4^\circ}$$

$$\Leftrightarrow AB = CH \left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ} \right) \Leftrightarrow 762 = CH \left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ} \right)$$

$$\Rightarrow CH = \frac{762}{\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ}} \approx 32m$$

Vậy chiều cao của con dốc là $32m$

b) Xét ΔACH vuông tại H , ta có: $\sin CAH = \frac{CH}{AC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 6^\circ} = \frac{32}{\sin 6^\circ} (m) \quad (3)$$

Xét ΔBCH vuông tại H , ta có: $\sin CBH = \frac{CH}{CB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow CB = \frac{CH}{\sin 4^\circ} = \frac{32}{\sin 4^\circ} (m) \quad (4)$$

$$\text{Đổi đơn vị: } 4km/h = \frac{10}{9} m/s; 19km/h = \frac{95}{18} m/s$$

$$\text{Thời gian lên dốc } AC \text{ là: } t_{AC} = \frac{S_{AC}}{v_{AC}} = \frac{AC}{v_{AC}} = \frac{32/\sin 6^\circ}{14,4} (s)$$

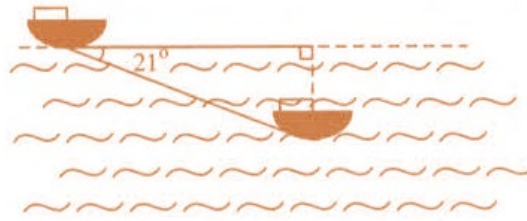
$$\text{Thời gian xuống dốc } CB \text{ là: } t_{CB} = \frac{S_{CB}}{v_{CB}} = \frac{CB}{v_{CB}} = \frac{32/\sin 4^\circ}{68,4} (s)$$

$$\text{Thời gian đi từ } A \text{ đến } B \text{ là: } t_{AB} = t_{AC} + t_{CB} = \frac{32}{\frac{10}{9} \cdot \sin 6^\circ} + \frac{32}{\frac{95}{18} \cdot \sin 4^\circ} \approx 362,44s \approx 6 \text{ phút } 3 \text{ giây.}$$

Câu 46: Trong một buổi luyện tập, một tàu ngầm ở trên mặt biển bắt đầu lặn xuống và di chuyển theo một đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° .

a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được $250m$ thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước (làm tròn đến đơn vị mét).

b) Giả sử tốc độ trung bình của tàu là 9km/h thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200 mét (cách mặt nước biển 200m) làm tròn đến phút.



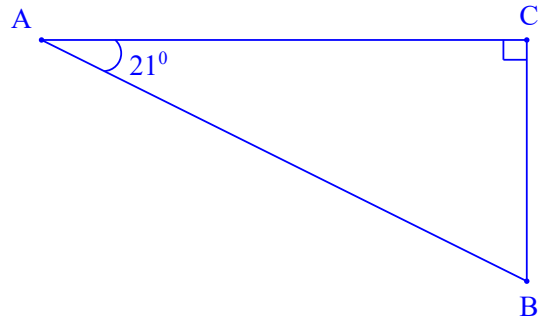
Lời giải

a) Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét ΔABC vuông tại C , ta có: $\sin A = \frac{CB}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow CB = AB \cdot \sin A = 250 \cdot \sin 21^\circ \approx 89,6\text{m}$$

Vậy khi tàu đi được 250m , thì tàu ở độ sâu là $89,6\text{m}$



b) Đổi đơn vị: $9\text{km/h} = 2,5\text{m/s}$

Gọi $t(\text{s})$ là thời gian tàu đi để đạt được độ sâu là 200m

Quãng đường tàu đi được trong thời gian $t(\text{s})$ là: $AB = S_{AB} = v_{AB} \cdot t_{AB} = 2,5t(\text{m})$

Xét ΔABC vuông tại C , ta có: $\sin A = \frac{CB}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Leftrightarrow \sin 21^\circ = \frac{200}{2,5t} \Rightarrow t = \frac{200}{2,5 \cdot \sin 21^\circ} \approx 223\text{s} \approx 4\text{ phút}$$

Vậy thời gian tàu đi là 4 phút.

CHUYÊN ĐỀ 8: MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. TẦN SỐ, TẦN SỐ GHEP VÀ BIỂU ĐỒ

1. Bảng tần số và biểu đồ tần số

1.1. Bảng tần số

- ✓ *Mẫu dữ liệu* là tập hợp các dữ liệu thu thập được theo tiêu chí cho trước.
- ✓ *Tần số* của một giá trị là số lần xuất hiện giá trị đó trong mẫu dữ liệu.
- ✓ *Bảng tần số* là bảng thống kê cho biết tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu.
Bảng gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương ứng với mỗi giá trị đó.

☞ Chú ý:

- Khi dữ liệu là các số thì mẫu dữ liệu còn được gọi là *mẫu số liệu*.
- Số các dữ liệu trong mẫu được gọi là *cỡ mẫu*, thường được kí hiệu là N . Cỡ mẫu N cũng bằng tổng các tần số của từng giá trị khác nhau.

☞ Nhận xét:

- Trong bảng tần số ta chỉ liệt kê các giá trị **khác nhau** của mẫu dữ liệu. Các giá trị này có thể không là số
- Bảng tần số giúp chúng ta nhanh chóng quan sát các đặc điểm của mẫu dữ liệu như số lần xuất hiện của mỗi giá trị, giá trị xuất hiện nhiều lần nhất, giá trị xuất hiện ít lần nhất...

1.2. Biểu đồ tần số

- ✓ Biểu đồ biểu diễn bảng tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu gọi là *biểu đồ tần số*.
- ✓ Biểu đồ tần số thường có dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng.

☞ Chú ý:

- Trong biểu đồ tần số dạng cột, mỗi cột tương ứng với một giá trị, chiều cao của cột tương ứng với tần số của giá trị đó.
- Trong biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng, đường gấp khúc đi từ trái qua phải nối các điểm có hoành độ là giá trị số liệu và tung độ là tần số của giá trị đó.

2. Bảng tần số tương đối và biểu đồ tần số tương đối

2.1. Bảng tần số tương đối

- ✓ *Tần số tương đối* của một giá trị x trong mẫu dữ liệu được tính theo công thức:

$$f = \frac{m}{N} \cdot 100\%$$

trong đó: m là tần số của x và N là cỡ mẫu

- ✓ *Bảng tần số tương đối* là bảng thống kê cho biết tần số tương đối của các giá trị trong mẫu dữ liệu. Bảng gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương đối ứng với mỗi giá trị đó.

☞ Chú ý:

- Tần số tương đối còn gọi là **tần suất**.
- Tổng tần số tương đối của tất cả các giá trị luôn bằng 100%
- Có thể ghép bảng tần số và bảng tần số tương đối thành bảng **tần số - tần số tương đối**.

☞ Nhận xét:

- Tần số tương đối của một giá trị là ước lượng cho xác suất xuất hiện giá trị đó.
- Bảng tần số tương đối giúp chúng ta nhanh chóng quan sát được đặc điểm của mẫu dữ liệu cũng như tần số tương đối của mỗi giá trị, giá trị xuất hiện thường xuyên nhất...

2.2. Biểu đồ tần số tương đối

- ✓ Biểu đồ biểu diễn bảng tần số tương đối của các giá trị trong mẫu dữ liệu được gọi là **biểu đồ tần số tương đối**.
- ✓ Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối là biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

☞ Chú ý:

- Trong biểu đồ hình quạt tròn, hình quạt tròn biểu thị tần số tương đối $a\%$ có số đo cung tương ứng là $a\% \cdot 360^\circ = 3,6a^\circ$
- Trong biểu đồ cột, độ cao của mỗi cột tương ứng với tần số tương đối của từng giá trị.

3. Bảng tần số, tần số tương đối ghép nhóm và biểu đồ

3.1. Bảng tần số ghép nhóm

Trong nhiều trường hợp, ta khó biết giá trị chính xác của số liệu mà chỉ biết nó thuộc một nhóm số liệu nào đó. Nhóm số liệu thường gặp là $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

- ✓ Số lượng các giá trị của mẫu số liệu thuộc vào một nhóm được gọi là **tần số** của nhóm đó.
- ✓ **Bảng tần số ghép nhóm** là bảng tần số của các nhóm số liệu.
Bảng gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các nhóm số liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương ứng với mỗi nhóm đó.

☞ Chú ý:

- Hiệu $b - a$ được gọi là **độ rộng** của nhóm $[a; b)$.
- Giá trị $\frac{a+b}{2}$ được gọi là **giá trị đại diện** của nhóm $[a; b)$.
- Nếu $[a; b)$ là nhóm chứa các giá trị x của mẫu số liệu thì $a \leq x < b$.
- Các nhóm số liệu thường được chọn sao cho có độ rộng bằng nhau, thuận tiện cho việc tính toán và phù hợp với mục đích của việc thống kê.
- Khi ghép nhóm số liệu, đầu mút của các nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu.

3.2. Bảng tần số tương đối ghép nhóm

- ✓ **Tần số tương đối của một nhóm** được tính theo công thức:

$$f = \frac{m}{N} \cdot 100\%$$

trong đó: m là tần số của nhóm và N là cỡ mẫu.

- ✓ **Bảng tần số tương đối ghép nhóm** là bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu.

Bảng tần số tương đối ghép nhóm gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các nhóm số liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương đối tương ứng với mỗi nhóm đó.

3. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm

Để trình bày mẫu số liệu ghép nhóm một cách trực quan sinh động, dễ nhớ và gây ấn tượng, người ta sử dụng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.

Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm là biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng.

☞ Chú ý:

- Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột gồm các cột kề nhau, mỗi cột tương ứng với một nhóm. Cột biểu diễn nhóm $[a;b)$ có đầu mút trái là a , đầu mút phải là b và có chiều cao tương ứng với tần số tương đối của nhóm.
- Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng là đường gấp khúc đi từ trái qua phải, nối các điểm trên mặt phẳng, mỗi điểm có hoành độ là giá trị đại diện của nhóm số liệu và có tung độ tương ứng với tần số tương đối của nhóm số liệu đó.

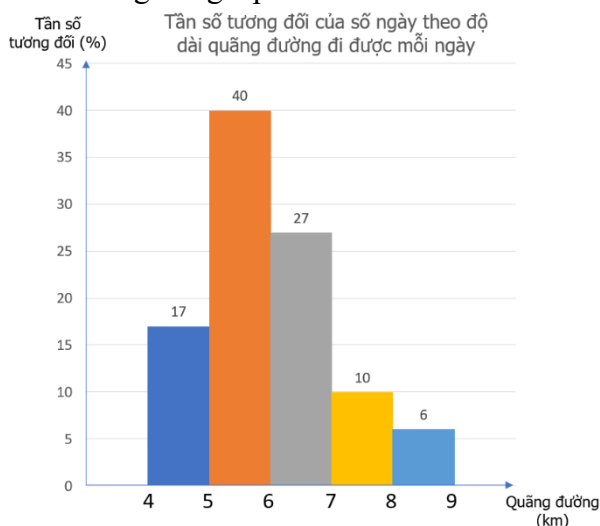
B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 60 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	Cộng
Tần số (n)	7	16	27	10	60

Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[30;40)$.

Câu 2: Nam thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) mình đi bộ mỗi ngày trong tháng 9 và biểu diễn dưới dạng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm sau:



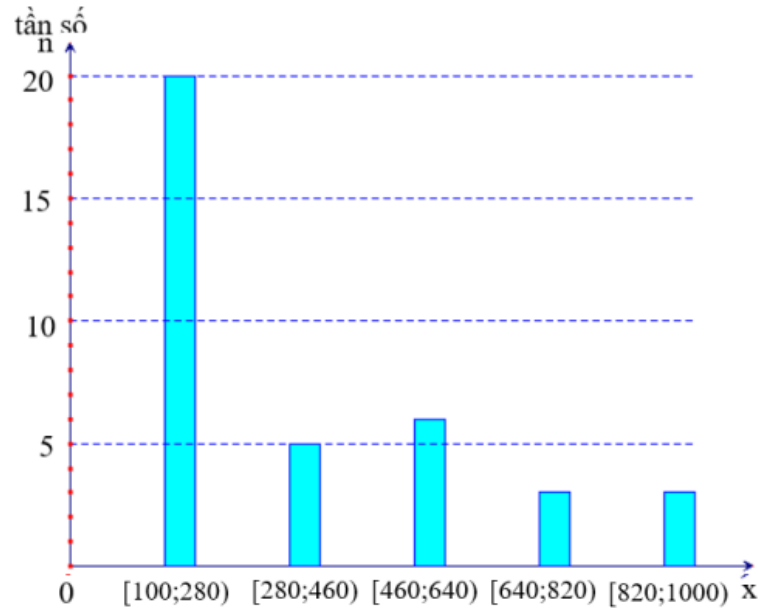
Tìm nhóm có tần số tương đối ghép nhóm lớn nhất. Xác định tần số và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm đó.

Câu 3: Sau khi điều tra về thời gian đi từ nhà đến trường của học sinh lớp 9A có 40 học sinh ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Thời gian từ nhà đến trường (phút)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$
Tần số tương đối	30%	45%	25%

Tìm tần số tương đối ghép nhóm và tần số ghép nhóm của nhóm $[10;20)$?

Câu 4: Sau khi điều tra mật độ dân số (đơn vị: người/km²) của 37 tỉnh, thành phố thuộc các vùng Bắc Trung Bộ và Duyên hải miền Trung, Tây Nguyên, Đông Nam Bộ, Đồng bằng sông Cửu Long (không kể Thành phố Hồ Chí Minh) ở năm 2021, người ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây:



- Tìm tần số ghép nhóm của nhóm [460;640)
- Tính tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [100;280)

Câu 5: Chiều cao (đơn vị: mét) của 35 cây bạch đàn được cho như sau: Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

6,6	7,5	8,2	8,2	7,8	7,9	9,0	8,9	8,2
7,2	7,5	8,3	7,4	8,7	7,7	7,0	9,4	8,7
8,0	7,7	7,8	8,3	8,6	8,1	8,1	9,5	6,9
8,0	7,6	7,9	7,3	8,5	8,4	8,0	8,8	

Câu 6: Đo chiều cao (đơn vị là cm) của học sinh lớp 9A cho kết quả như sau;

156 157 164 166 166 165 157 154 155 158 160 163 163
 161 162 159 159 160 160 160 159 158 160 160 158 163
 162 162 162 161 162 161 163 161 163 161 164 166 165
 165

Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với các nhóm [155; 158), [158; 161), [161; 164), [164;167).
 Tính tần số tương đối của nhóm [161; 164)

Câu 7: Kết quả đo tốc độ của 25 xe ô tô (đơn vị: km/h) khi đi qua một trạm quan sát đã được thống kê dưới bảng sau

46	55	57	50	45
41	44	46	40	58
50	56	52	59	44
52	40	42	47	54
45	48	58	49	40

a) Hãy ghép các số liệu thành bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm ở câu a.

Câu 8: Giáo viên ghi lại thời gian bơi cự ly 50 mét của học sinh lớp 9A cho kết quả trong bảng sau:

Thời gian (giây)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)
Số học sinh	3	7	10	20

Nêu các nhóm số liệu và tần số tương đối?

Câu 9: Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh lớp 9 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0 ; 20)	[20 ; 40)	[40 ; 60)	[60 ; 80)
Số học sinh	8	9	11	8

Tính tần số tương đối của nhóm $[40 ; 60)$? (Làm tròn đến hàng phần mười)

Câu 10: Trong bảng số liệu sau có một số liệu bị điều tra sai. Hãy tìm số liệu đó và sửa cho đúng.

Tần số	24	16	6	4
Tần số tương đối	48%	32%	15%	8%

Câu 12: Cân nặng của các bạn học sinh lớp 9A (đơn vị: ki-lo-gam) có kết quả như sau:

62	59	68	53	50	57	72	65	62	58
69	53	64	67	72	74	63	56	66	66
62	52	65	69	60	52	65	63	74	68
59	68	64	69	56	72	67	58	62	60

Mẫu số liệu thống kê ở trên đã được ghép thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: $[50 ; 55)$, $[55 ; 60)$, $[60 ; 65)$, $[65 ; 70)$, $[70 ; 75)$. Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm ở trên.

Câu 13: Khối lượng (đơn vị: gam) của 30 củ khoai tây thu hoạch được ở gia đình bác Ngọc là:

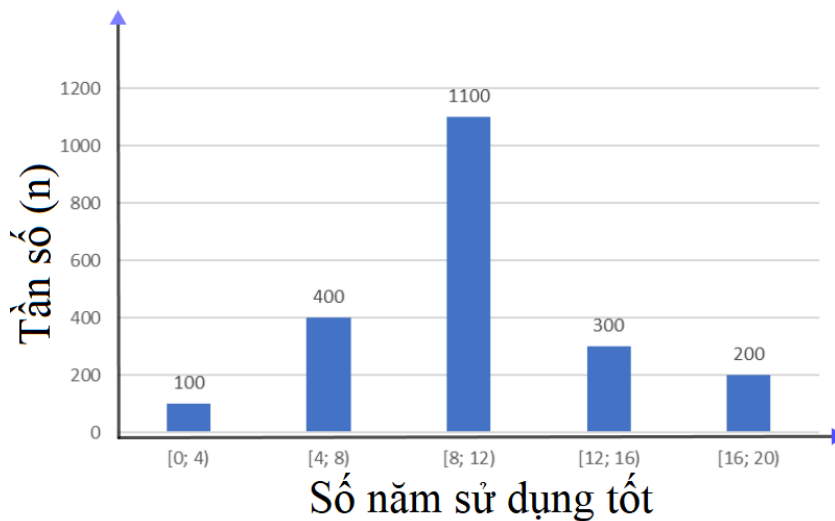
90	73	88	93	101	104	111	95	78	95
81	97	96	92	95	83	90	101	103	117
109	110	112	87	75	90	82	97	86	96

a) Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau

$[70; 80)$, $[80; 90)$, $[90; 100)$, $[100; 110)$, $[110; 120)$. Tìm tần số của mỗi nhóm đó.

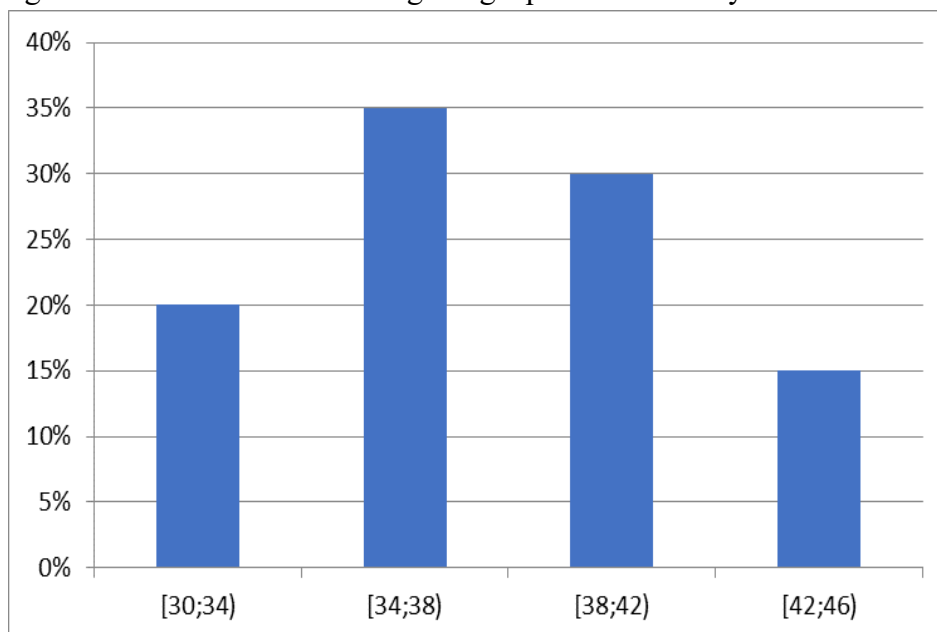
b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Câu 14: Hệ thống đăng kiểm quốc gia ghi nhận 2000 xe ô tô của cùng 1 loại xe tới đăng kiểm. Người ta thu được biểu đồ tần số ghép nhóm về số năm sử dụng tốt mà chưa phải sửa chữa lớn của xe như dưới đây



Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[8; 12)$

Câu 15: Sau khi điều tra cân nặng (đơn vị: kg) của 200 học sinh khối lớp 4 của một trường tiểu học, người ta có biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dưới đây:



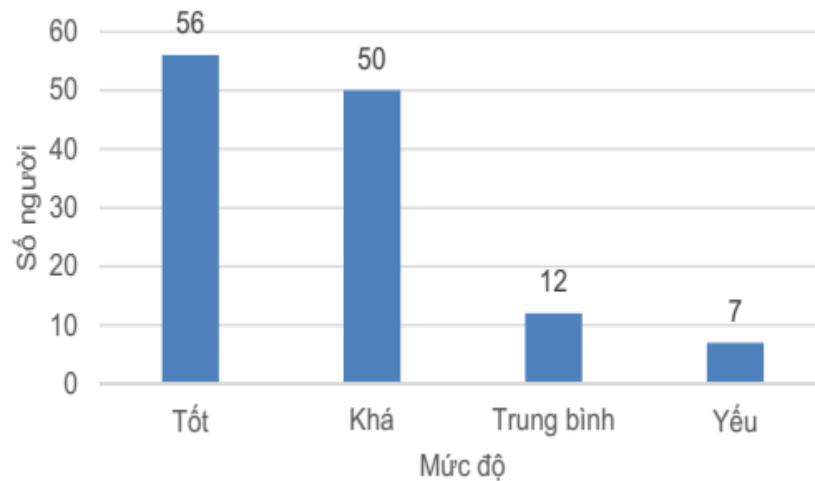
Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ. Tìm tần số ghép nhóm của nhóm $[38;42)$

Câu 17: Công ty điện lực thống kê lượng điện tiêu thụ (đơn vị: kWh) của một số hộ gia đình trong một khu vực trong tháng. Dữ liệu được ghi lại như sau:

150	120	180	200	130	100	160	190	219	210
170	140	110	130	160	180	150	200	210	190

Lập bảng tần số ghép nhóm theo các khoảng lượng điện tiêu thụ sau: $[100;130)$; $[130;160)$; $[160;190)$; $[190;220)$.

Câu 18: Khảo sát đánh giá của khách hàng về chất lượng một loại dịch vụ mới, số liệu được biểu diễn trong biểu đồ sau:



a) Lập bảng tần số tương đối cho mẫu số liệu.

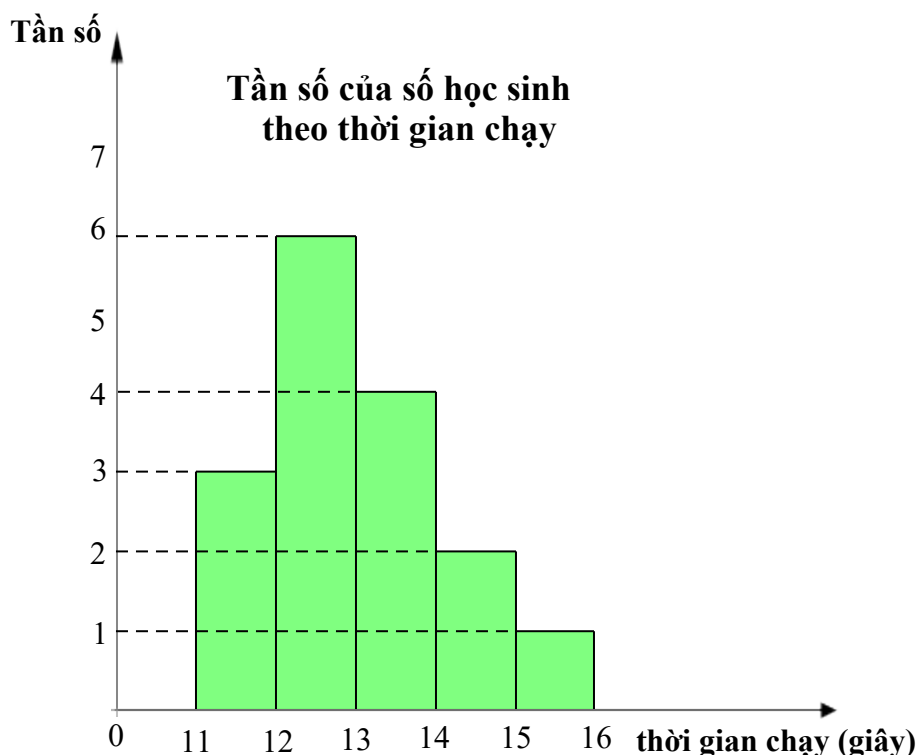
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu.

Câu 20: Cho bảng tần số ghép nhóm sau về tuổi thọ của một số ong mật cái như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Tần số	14	24	22

Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [40; 50).

Câu 21: Biểu đồ dưới đây biểu diễn kết quả khảo sát thành tích chạy 100m của một số học sinh



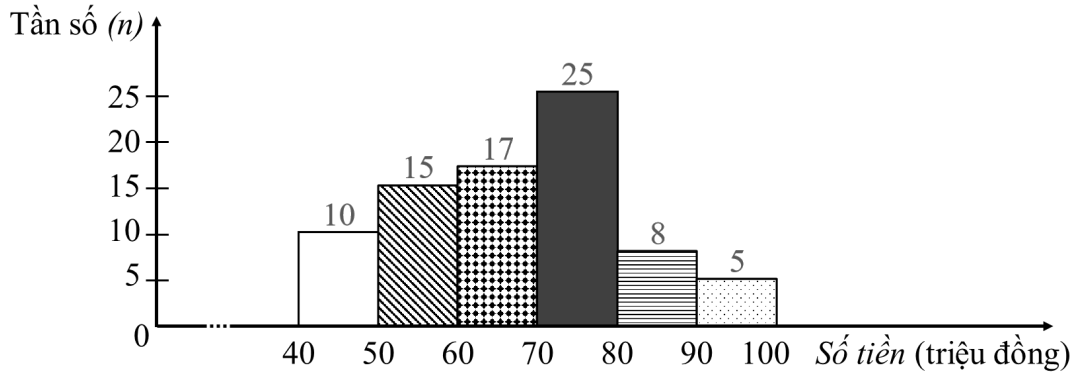
Có bao nhiêu học sinh chạy 100m hết ít hơn 13 giây và tìm tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [13;14).

Câu 22: Cân nặng của các bạn học sinh lớp 9A (đơn vị: ki-lo-gam) có kết quả như sau:

62	59	68	53	50	57	72	65	62	58
69	53	64	67	72	74	63	56	66	66
62	52	65	69	60	52	65	63	74	68
59	68	64	69	56	72	67	58	62	60

Mẫu số liệu thống kê ở trên đã được ghép thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: $[50; 55)$, $[55; 60)$, $[60; 65)$, $[65; 70)$, $[70; 75)$. Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm ở trên.

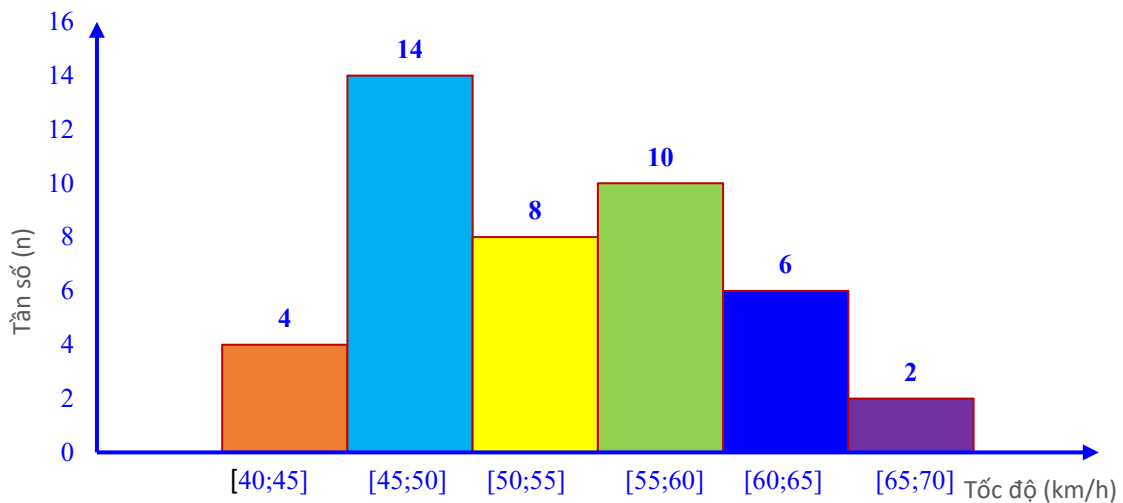
Câu 23: Một ngân hàng thống kê số tiền (đơn vị: triệu đồng) mà 80 hộ gia đình vay để phát triển sản xuất. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm ở Hình 1.



Hình 1

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu được ghép nhóm đó.

Câu 24: Biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây ghi lại tốc độ (đơn vị: km/h) của 44 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ.



Hãy cho biết số lượng ô tô ở nhóm nào nhiều nhất, tính tần số tương đối ghép nhóm của nhóm đó. (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

Câu 25: Ban phụ huynh đặt tặng áo phông cho 40 học sinh của lớp 8A. Ban phụ huynh đo chiều cao (đơn vị: centimet) của cả lớp để quyết định chọn cỡ áo, kết quả cho bởi bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[170; 175)$	Cộng
Tần số (n)	5	11	12	8	4	N=40

Xác định tần số ghép nhóm và tìm tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[160; 165)$.

Câu 26: Chỉ số phát triển con người (HDI) là chỉ tiêu tổng hợp phản ánh các mặt thu nhập, sức khỏe, giáo dục của người dân trong một quốc gia. Các nước và vùng lãnh thổ trên thế giới được chia thành 4 nhóm theo HDI: Nhóm 1(rất cao) có HDI từ 0,8 trở lên; Nhóm 2(cao) có HDI từ 0,7 đến dưới

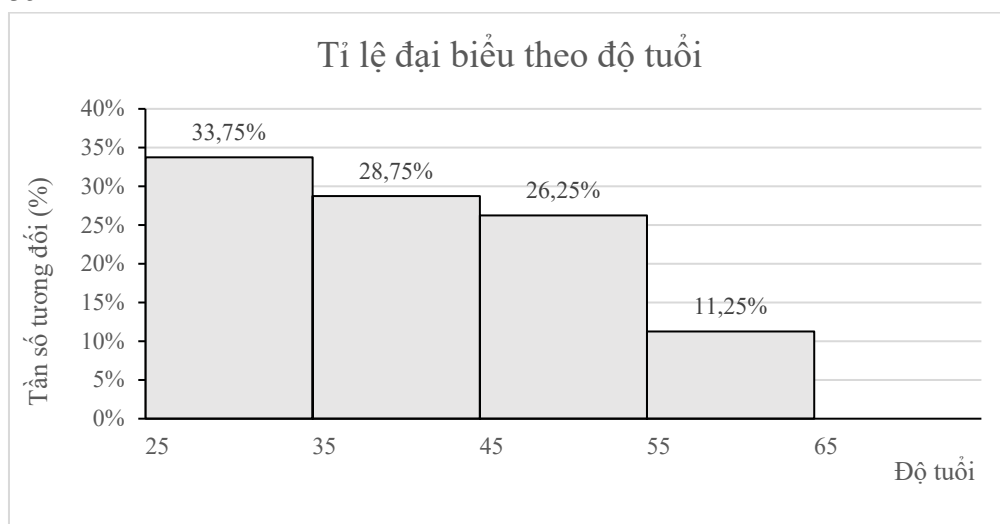
0,8; Nhóm 3(trung bình) có HDI từ 0,55 đến dưới 0,7; Nhóm 4(thấp) có HDI dưới 0,55. Năm 2021, chỉ số HDI của 11 quốc gia Đông Nam Á như sau.

0,939 0,829 0,803 0,8 0,705 0,703 0,699 0,607 0,607 0,593 0,585

Dựa vào dữ liệu trên, hãy hoàn thành bảng tần số ghép nhóm sau:

Chỉ số HDI	[0; 0,55)	[0,55; 0,7)	[0,7; 0,8)	[0,8; 1)	Cộng
Tần số	?	?	?	?	N =

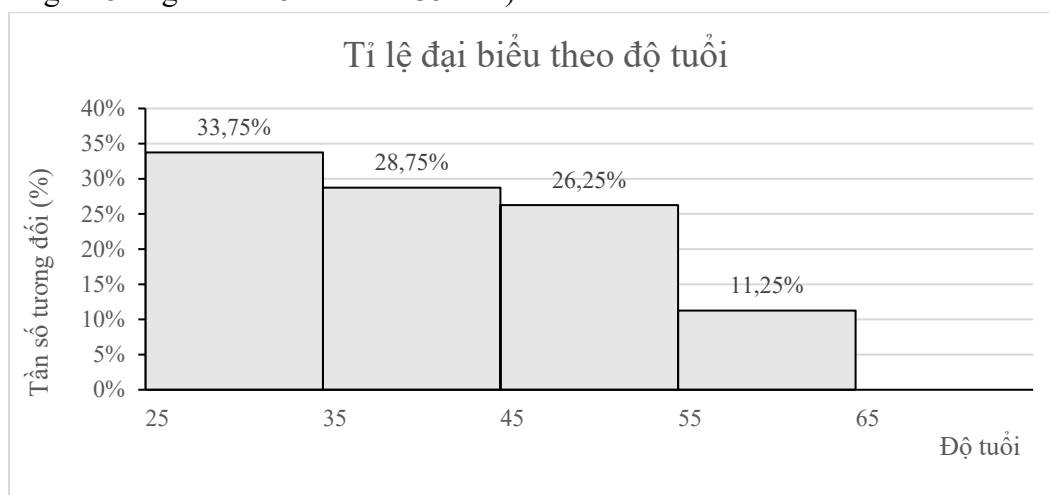
Câu 27: Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 tuổi đến 35 tuổi.



a) Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị?

b) Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?

Câu 28: Để chuẩn bị cho tiết mục kỉ niệm 70 năm Chiến thắng Điện Biên Phủ, phường Mỹ Đình có cử một số lượng người tham gia, được biểu diễn dưới biểu đồ tỉ lệ sau:
(Biết rằng có 54 người từ 25 tuổi đến 35 tuổi)



a) Có bao nhiêu người tham gia biểu diễn?

b) Một người cho rằng có trên 50% số người biểu diễn dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?

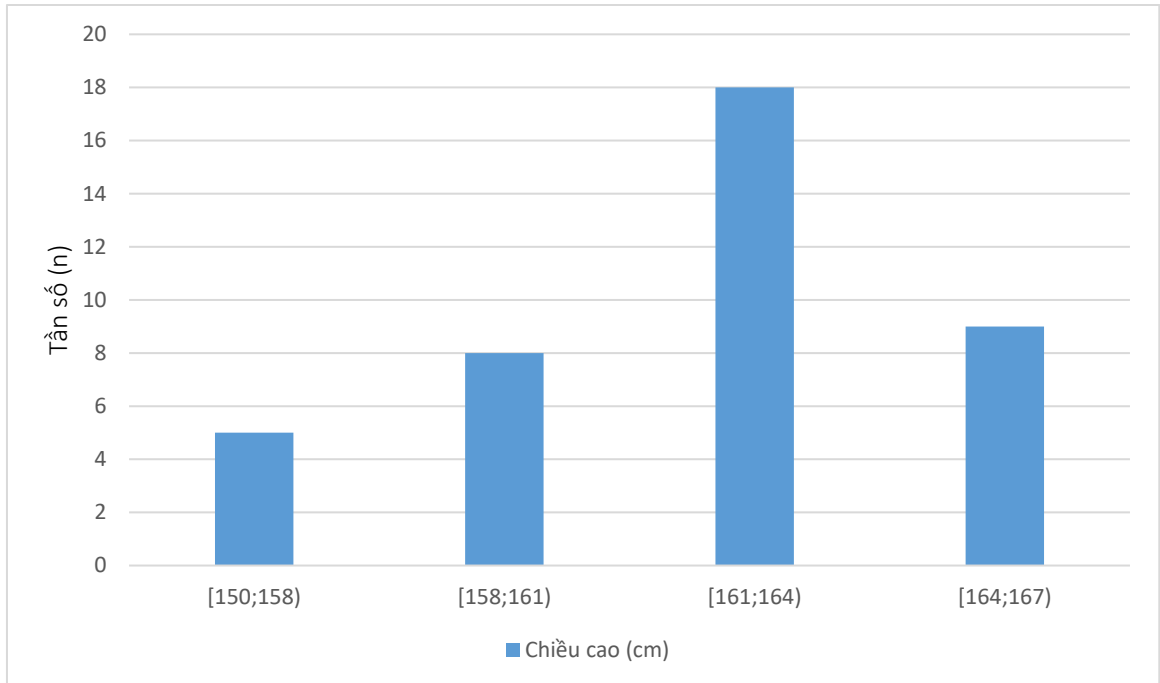
Câu 29: Thống kê tuổi thọ của 30 bóng đèn điện được lắp thử (đơn vị: giờ) được cho trong bảng dưới đây:

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150

1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

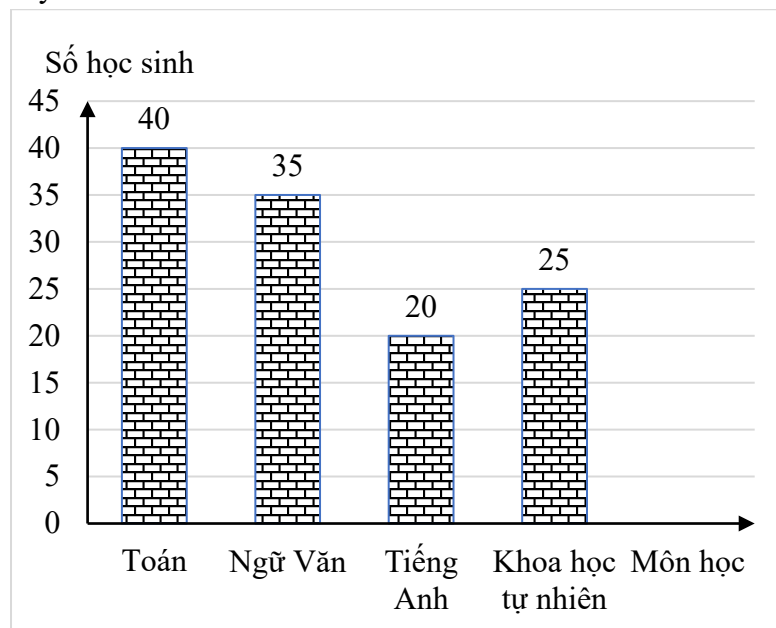
- a) Lập bảng tần số và tần số tương đối của mẫu số liệu trên.
b) Có người nói: “Có trên 75% bóng đèn có tuổi thọ từ 1160 đến 1180”. Theo em nhận định đó đúng hay sai?

Câu 30: Sau khi thống kê chiều cao của 40 học sinh lớp 9A, cô giáo lập biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây:



Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [161;164).

Câu 31: Biểu đồ hình cột sau thống kê về sự yêu thích các môn học của học sinh khối 9. Biết mỗi học sinh chọn một môn yêu thích.



Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối của dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Câu 32: Một cuộc điều tra về thời gian một nhóm học sinh làm một Câu kiểm tra trắc nghiệm cho kết quả như sau:

Thời gian (phút)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)
Tần số	1	5	9	5

Cho biết có bao nhiêu học sinh tham gia điều tra và lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho kết quả điều tra

Câu 33: Một bác thợ đóng giày thống kê lại độ dài bàn chân (đơn vị: cm) của 60 khách hàng ở bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	[27;28)	[28;29)	[29;30)	[30;31)	Cộng
Tần số (n)	8	18	24	10	60

- Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm.
- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột biểu diễn mẫu số liệu trên.

Câu 34: Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 60 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau

Nhóm	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50]	Cộng
Tần số (n)	8	18	24	10	60

- Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm.
- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Câu 35: Bảng thống kê sau cho biết số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990-2021.

Loại thiên tai	Hạn hán	Bệnh dịch	Lũ lụt	Sạt lở đất	Bão
Số lượng	6	9	71	6	94

(Theo Vietnam.opendevlopmentmekong.net)

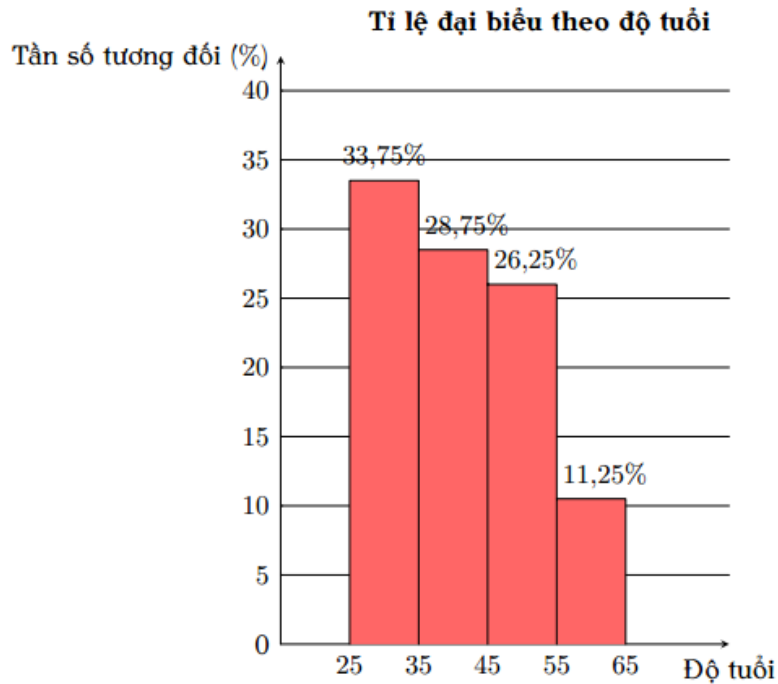
Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu đã cho.

Câu 36: Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	[8,4;8,6)	[8,6;8,8)	[8,8;9,0)	[9,0;9,2)	[9,2;9,4)	Tổng
Số cây	5	12	25	44	14	100

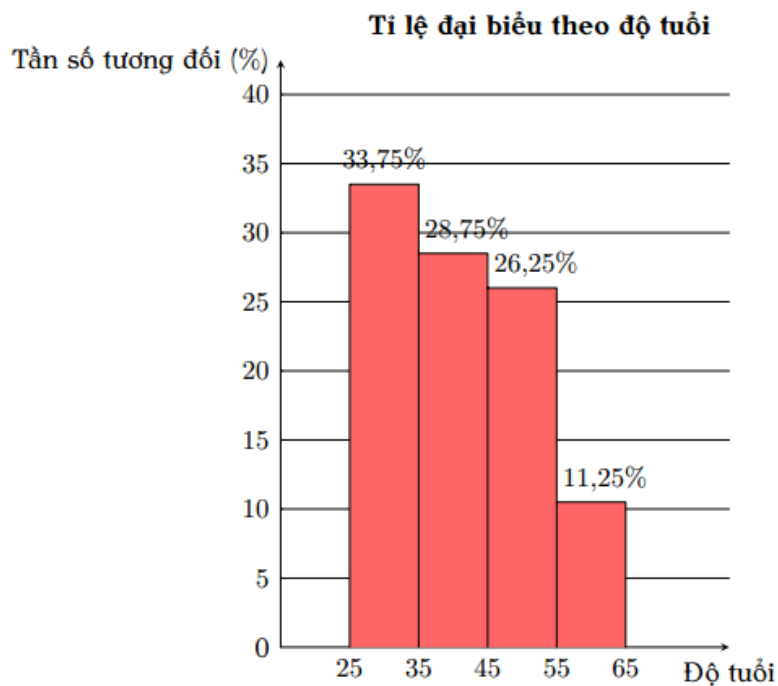
- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê thu được ở câu a.

Câu 37: Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi.



Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị? Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.

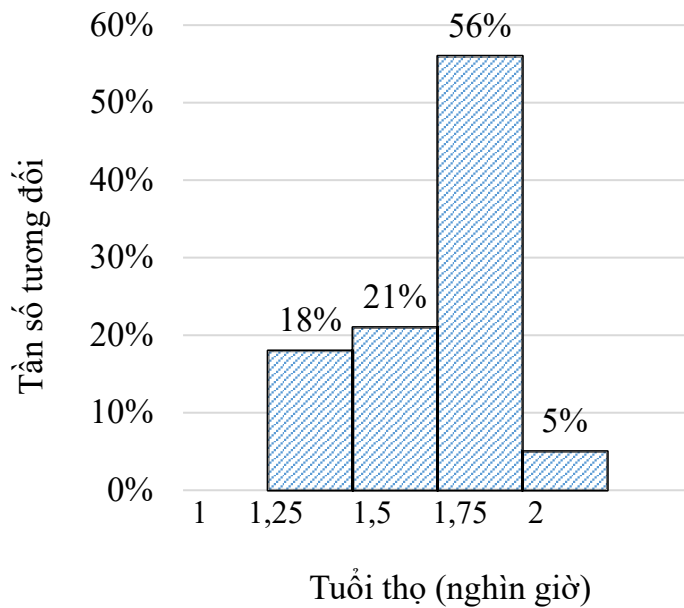
Câu 38: Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi.



Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị? Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.

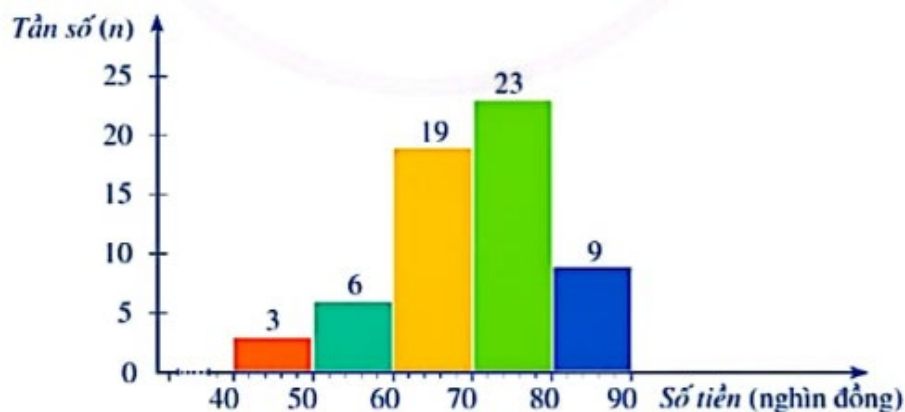
Câu 39: Cho biểu đồ tần số tương đối biểu thị tuổi thọ của bóng đèn tính theo đơn vị nghìn giờ.

Tuổi thọ bóng đèn



Em hãy cho biết: Tần số 5% là tần số tương đối của nhóm ghép dữ liệu nào?

Câu 40: Một cửa hàng sách thống kê số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở cửa hàng đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây.



Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[40;50)$

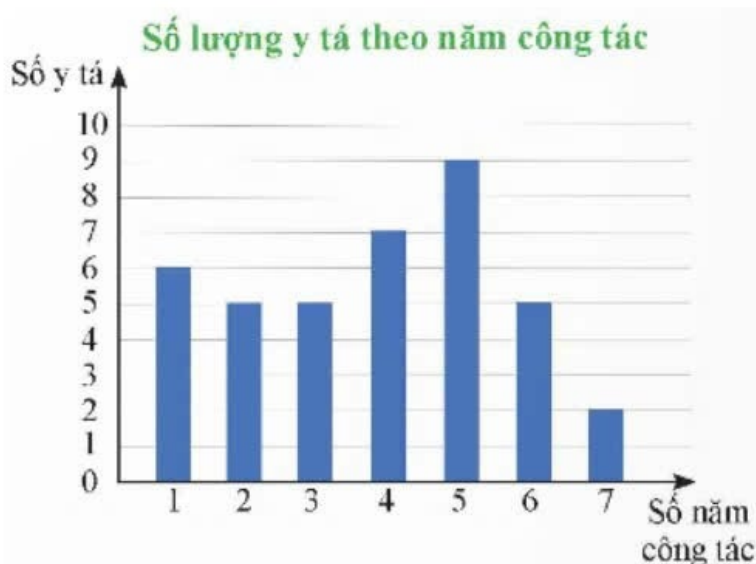
Câu 41: Tỷ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được cho trong bảng sau:

Cầu thủ	Tuấn	Trường	An	Linh
Tỷ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

Hãy lập bảng tần số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

Câu 43: Biểu đồ bên dưới thống kê thời gian công tác (theo năm) của các y tá ở một phòng khám tư nhân ở Hà Nội.



- a) Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận những giá trị nào? Tìm tần số mỗi giá trị đó.
- b) Phòng khám có tổng bao nhiêu y tá?
- c) Có bao nhiêu y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm?

Câu 45: Thời gian đi từ nhà đến trường (đơn vị: phút) của các bạn học sinh lớp 9C được ghi lại ở bảng sau:

9,5	13,9	5,6	13,2	10,3	15,1	19,5	14,1	11,4	19,7	15,1	11,1
16,6	7,2	18	11,6	6,2	6,2	16,7	7,8	17,7	7,7	7,7	5,5
18,2	7,4	19,8	19	5,2	18,3	14,7	14,1	19,6	7,2	7,2	12,5

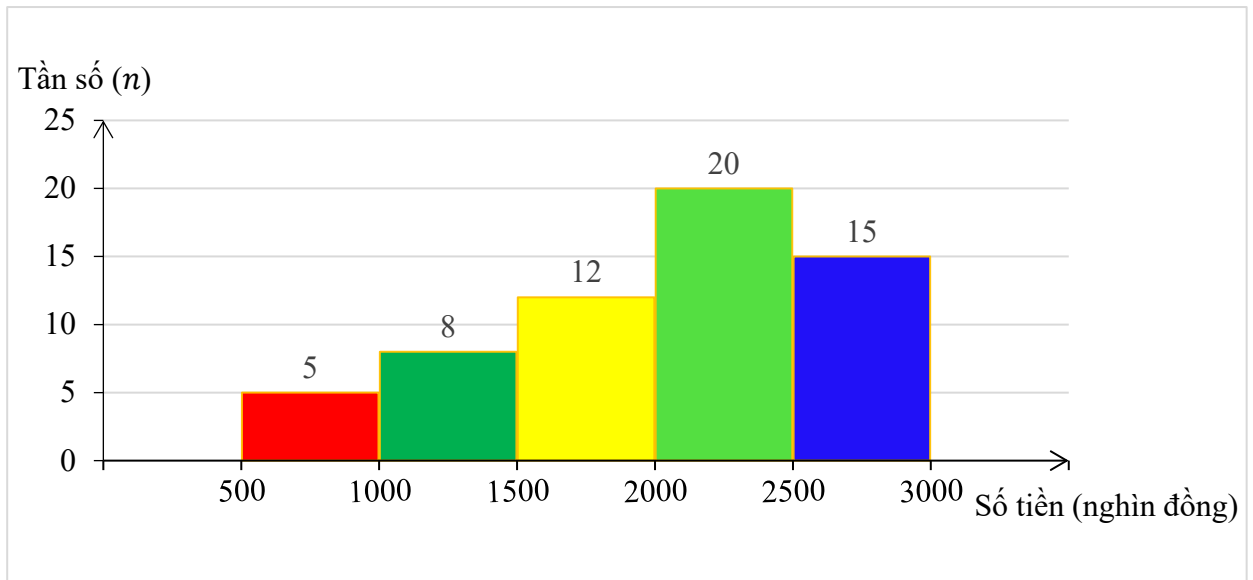
Hãy chia số liệu thành 4 nhóm, với nhóm thứ nhất là khoảng từ 5 phút đến dưới 9 phút và lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm.

Câu 46: Sau khi điều tra về số học sinh trong 100 lớp học (đơn vị: học sinh), người ta có bảng tần số ghép nhóm như ở bảng sau:

Nhóm	Tần số (n)
[36; 38)	20
[38; 40)	15
[40; 42)	25
[42; 44)	30
[44; 46)	10
Cộng	$N = 100$

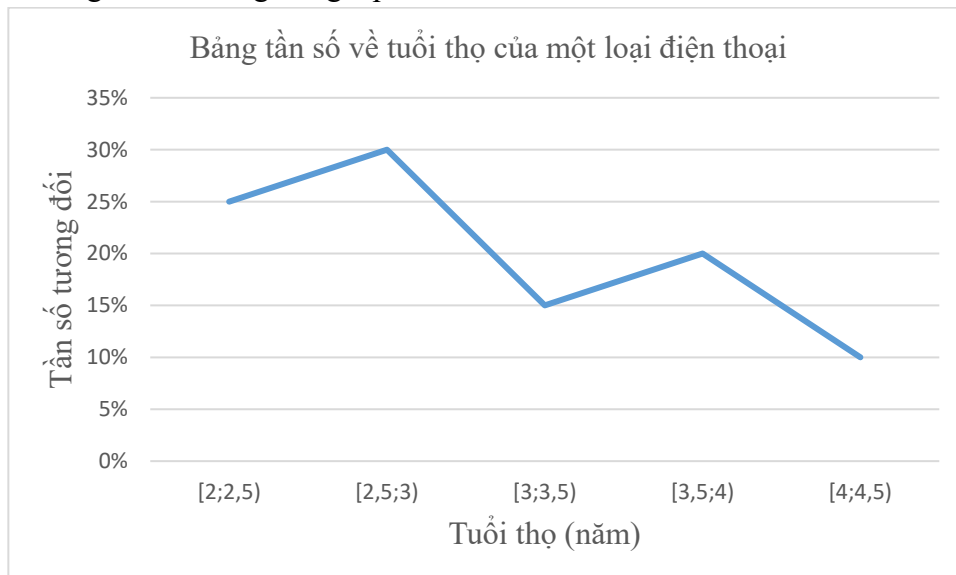
- a) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.
- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó

Câu 47: Một cửa hàng tạp hóa thống kê số tiền lãi (đơn vị: nghìn đồng) trong 60 ngày. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm sau:



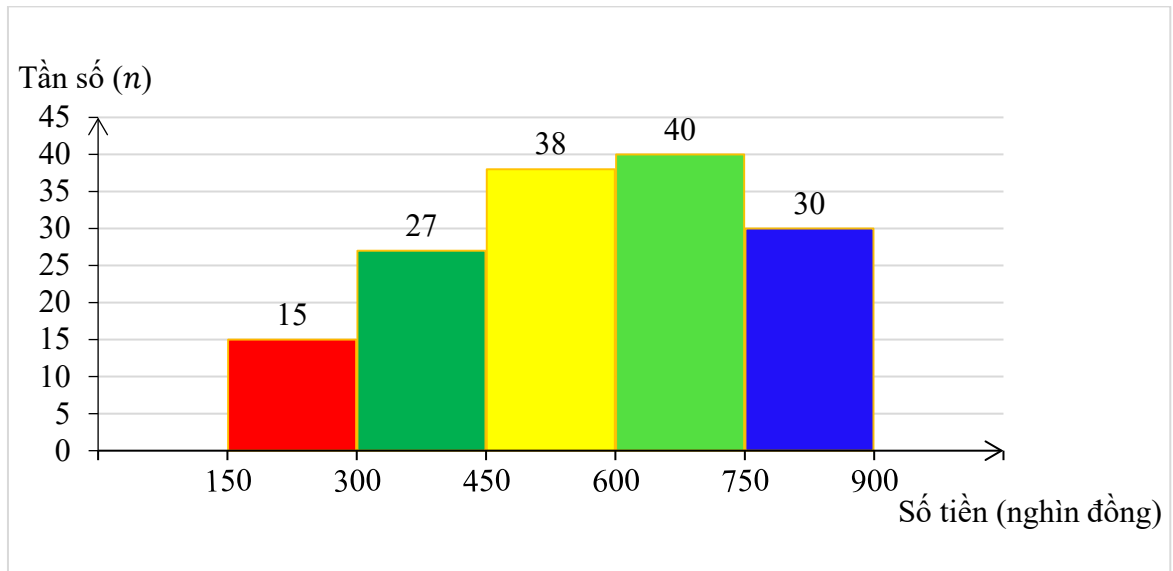
- 1) Tính tần số tương đối của mỗi nhóm?
- 2) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

Câu 48: Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một loại điện thoại.



Tìm giá trị đại diện cho nhóm $[3;3,5)$ và cho biết tần số tương đối của chúng của nhóm $[3;3,5)$.

Câu 50: Một siêu thị thống kê hóa đơn mua hàng (đơn vị: nghìn đồng) của 150 khách hàng đầu tiên trong ngày. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm sau:



Tính tần số tương đối của nhóm có tần số lớn nhất (làm tròn đến số thập phân thứ nhất).

Câu 51: Lượng xuất khẩu gạo và cà phê (đơn vị: nghìn tấn) của Việt Nam ở các tháng 7,8,9,10 năm 2022 lần lượt khoảng là: 580 và 125; 700 và 112,5; 578 và 100; 680 và 79,8.

a) Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

b) Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

Câu 52: Bảng thống kê diện tích bốn cảng biển lớn của Thành phố Hồ Chí Minh như sau :

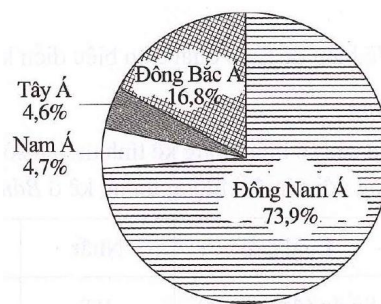
Tên cảng	Cát Lái	SPCT (Sài Gòn Premier Container Terminal)	Bến Nghé	Tân Cảng - Phú Hữu
Diện tích (đơn vị: ha)	160	40	32	24

a) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

c) Phát biểu "'Diện tích cảng Cát Lái gấp 1,8 lần tổng diện tích của ba cảng SPCT, Bến Nghé và Tân Cảng - Phú Hữu" là đúng hay sai? Vì sao?

Câu 53: Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 6 biểu diễn tỉ lệ phần trăm xuất khẩu của Việt Nam sang các khu vực thị trường châu Á năm 2020.



Hình 6

Hãy hoàn thiện Bảng 7 để nhận được bảng thống kê biểu diễn các số liệu của biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 6:

Khu vực	Đông Nam Á	Nam Á	Tây Á	Đông Bắc Á

Tỉ lệ xuất khẩu của Việt Nam (đơn vị: %)	?	?	?	?

Bảng 7

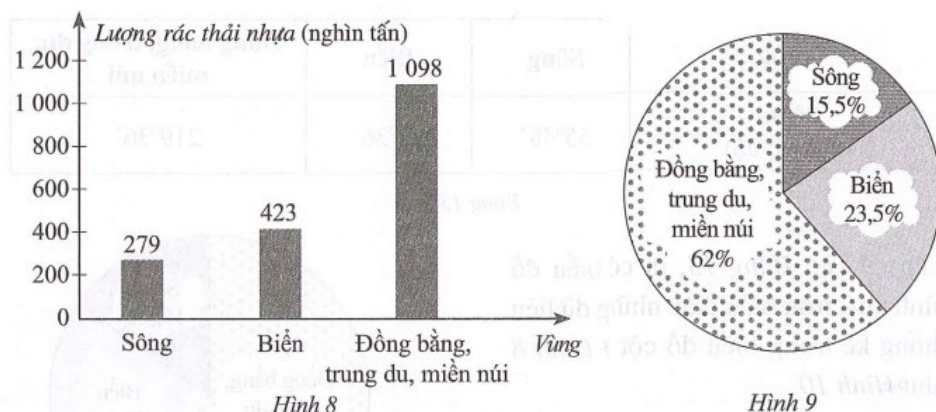
Câu 54: Bảng 9 cho biết tỉ lệ đạt các loại Lời giải Nhất, Nhì, Ba và Không đạt Lời giải trong một cuộc thi viết về biển, đảo Việt Nam của học sinh khối 9 ở một trường trung học cơ sở:

Loại Lời giải	Nhất	Nhì	Ba	Không đạt Lời giải
Tỉ lệ đạt Lời giải (đơn vị: %)	5%	15%	25%	55%

Bảng 9

Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn kết quả thống kê trên.

Câu 55: Theo số liệu thống kê từ Bộ Tài nguyên và Môi trường, mỗi năm Việt Nam có khoảng 1,8 triệu tấn rác thải nhựa thải ra môi trường. Biểu đồ cột ở Hình 8 biểu diễn số liệu về lượng rác thải nhựa mỗi năm của cả nước thải ra sông; biển; đồng bằng, trung du, miền núi.



a) Bạn An đã vẽ biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 9 để biểu diễn các dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở Hình 8. Những số liệu mà bạn An nêu ra trong biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 9 đó đã chính xác chưa? Vì sao?

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn để biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở Hình 8.

Câu 56: Thống kê khối lượng rau thu hoạch một vụ (đơn vị: tạ) của mỗi hộ gia đình trong 38 hộ gia đình tham gia chương trình trồng rau theo tiêu chuẩn VIETGAP như sau:

5 5 6 6 6 7 4 4 5 5 7 8 8

9 4 5 7 4 10 7 7 7 6 6 5 7

8 9 8 8 9 9 9 8 7 5 10 8

a) Trong 38 số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Tìm tần số của mỗi giá trị đó.

c) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Câu 57: Tuổi nghề (đơn vị: năm) của 32 giáo viên ở một trường trung học cơ sở được ghi lại như sau:

7 7 10 3 4 4 9 3 3 7 7 10 9 7 10 4

12 4 3 12 9 12 9 10 7 7 12 9 7 10 10 4

- a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.
b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Câu 58: Một công ty nông sản xuất khẩu 4 mặt hàng chủ lực là Chè (C), Hạt điều (Đ), Hạt tiêu (T), Sắn (S). 40 container hàng xuất khẩu của công ty được thông quan qua cửa khẩu quốc tế Móng Cái vào tháng 5 năm 2023 như sau:

C C C Đ Đ Đ Đ C C C T T S S S C C C Đ T
T T S Đ Đ C S S S C T T Đ D T T T C C T

- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Câu 59: Một trường trung học cơ sở thống kê số giờ (trung bình) chơi thể thao trong một tuần của 420 học sinh. Kết quả mẫu số liệu thống kê đó được cho ở bảng tần số sau (Bảng 23):

Số giờ chơi thể thao (x)	8	9	10	12	Cộng
Tần số (n)	147	126	84	63	$N = 420$

Bảng 23

- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.
c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

Câu 60: Một đội công nhân tham gia hội thi tay nghề giỏi. Mỗi công nhân phải hoàn thành bài thi (lí thuyết và thực hành) trong thời gian 120 phút. Thời gian hoàn thành bài thi của các công nhân trong đội đó được cho ở Bảng 29.

TThời gian (phút)	[90;95)	[95;100)	[100;105)	[105;110)	[110;115)	[115;120)
Số công nllhâm	3	5	6	7	9	10

Bảng 29

- a) Tính số công nhân đã hoàn thành bài thi trước khi hết giờ trên 20 phút.
b) Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở Bảng 29.

Câu 61: Bảng 30 cho biết tần số và tần số tương đối ghép nhóm của một mẫu số liệu ghép nhóm:

Nhóm	Tần số ghép nhóm (n)	Tần số tương đối ghép nhóm (%)
[10;15)	4	f_1
[15;20)	11	27,5
[20;25)	7	17,5
[25;30)	8	20
[30;35)	a	f_5

Cộng	$N = 40$	100

Bảng 30

- a) Tìm các giá trị của a, f_1, f_5 .
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở Bảng 30.

CHUYÊN ĐỀ 8: MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. TẦN SỐ, TẦN SỐ GHEP VÀ BIỂU ĐỒ

1. Bảng tần số và biểu đồ tần số

1.1. Bảng tần số

- ✓ *Mẫu dữ liệu* là tập hợp các dữ liệu thu thập được theo tiêu chí cho trước.
- ✓ *Tần số* của một giá trị là số lần xuất hiện giá trị đó trong mẫu dữ liệu.
- ✓ *Bảng tần số* là bảng thống kê cho biết tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu.
Bảng gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương ứng với mỗi giá trị đó.

☞ Chú ý:

- Khi dữ liệu là các số thì mẫu dữ liệu còn được gọi là *mẫu số liệu*.
- Số các dữ liệu trong mẫu được gọi là *cỡ mẫu*, thường được kí hiệu là N . Cỡ mẫu N cũng bằng tổng các tần số của từng giá trị khác nhau.

☞ Nhận xét:

- Trong bảng tần số ta chỉ liệt kê các giá trị **khác nhau** của mẫu dữ liệu. Các giá trị này có thể không là số
- Bảng tần số giúp chúng ta nhanh chóng quan sát các đặc điểm của mẫu dữ liệu như số lần xuất hiện của mỗi giá trị, giá trị xuất hiện nhiều lần nhất, giá trị xuất hiện ít lần nhất...

1.2. Biểu đồ tần số

- ✓ Biểu đồ biểu diễn bảng tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu gọi là *biểu đồ tần số*.
- ✓ Biểu đồ tần số thường có dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng.

☞ Chú ý:

- Trong biểu đồ tần số dạng cột, mỗi cột tương ứng với một giá trị, chiều cao của cột tương ứng với tần số của giá trị đó.
- Trong biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng, đường gấp khúc đi từ trái qua phải nối các điểm có hoành độ là giá trị số liệu và tung độ là tần số của giá trị đó.

2. Bảng tần số tương đối và biểu đồ tần số tương đối

2.1. Bảng tần số tương đối

- ✓ *Tần số tương đối* của một giá trị x trong mẫu dữ liệu được tính theo công thức:

$$f = \frac{m}{N} \cdot 100\%$$

trong đó: m là tần số của x và N là cỡ mẫu

- ✓ *Bảng tần số tương đối* là bảng thống kê cho biết tần số tương đối của các giá trị trong mẫu dữ liệu. Bảng gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương đối ứng với mỗi giá trị đó.

☞ Chú ý:

- Tần số tương đối còn gọi là **tần suất**.
- Tổng tần số tương đối của tất cả các giá trị luôn bằng 100%
- Có thể ghép bảng tần số và bảng tần số tương đối thành bảng **tần số - tần số tương đối**.

☞ Nhận xét:

- Tần số tương đối của một giá trị là ước lượng cho xác suất xuất hiện giá trị đó.
- Bảng tần số tương đối giúp chúng ta nhanh chóng quan sát được đặc điểm của mẫu dữ liệu cũng như tần số tương đối của mỗi giá trị, giá trị xuất hiện thường xuyên nhất...

2.2. Biểu đồ tần số tương đối

- ✓ Biểu đồ biểu diễn bảng tần số tương đối của các giá trị trong mẫu dữ liệu được gọi là **biểu đồ tần số tương đối**.
- ✓ Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối là biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

☞ Chú ý:

- Trong biểu đồ hình quạt tròn, hình quạt tròn biểu thị tần số tương đối $a\%$ có số đo cung tương ứng là $a\% \cdot 360^\circ = 3,6a^\circ$
- Trong biểu đồ cột, độ cao của mỗi cột tương ứng với tần số tương đối của từng giá trị.

3. Bảng tần số, tần số tương đối ghép nhóm và biểu đồ

3.1. Bảng tần số ghép nhóm

Trong nhiều trường hợp, ta khó biết giá trị chính xác của số liệu mà chỉ biết nó thuộc một nhóm số liệu nào đó. Nhóm số liệu thường gặp là $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

- ✓ Số lượng các giá trị của mẫu số liệu thuộc vào một nhóm được gọi là **tần số** của nhóm đó.
- ✓ **Bảng tần số ghép nhóm** là bảng tần số của các nhóm số liệu.
Bảng gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các nhóm số liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương ứng với mỗi nhóm đó.

☞ Chú ý:

- Hiệu $b - a$ được gọi là **độ rộng** của nhóm $[a; b)$.
- Giá trị $\frac{a+b}{2}$ được gọi là **giá trị đại diện** của nhóm $[a; b)$.
- Nếu $[a; b)$ là nhóm chứa các giá trị x của mẫu số liệu thì $a \leq x < b$.
- Các nhóm số liệu thường được chọn sao cho có độ rộng bằng nhau, thuận tiện cho việc tính toán và phù hợp với mục đích của việc thống kê.
- Khi ghép nhóm số liệu, đầu mút của các nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu.

3.2. Bảng tần số tương đối ghép nhóm

- ✓ **Tần số tương đối của một nhóm** được tính theo công thức:

$$f = \frac{m}{N} \cdot 100\%$$

trong đó: m là tần số của nhóm và N là cỡ mẫu.

- ✓ **Bảng tần số tương đối ghép nhóm** là bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu.

Bảng tần số tương đối ghép nhóm gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các nhóm số liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương đối tương ứng với mỗi nhóm đó.

3. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm

Để trình bày mẫu số liệu ghép nhóm một cách trực quan sinh động, dễ nhớ và gây ấn tượng, người ta sử dụng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.

Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm là biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng.

☞ Chú ý:

- Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột gồm các cột kề nhau, mỗi cột tương ứng với một nhóm. Cột biểu diễn nhóm $[a;b)$ có đầu mút trái là a , đầu mút phải là b và có chiều cao tương ứng với tần số tương đối của nhóm.
- Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng là đường gấp khúc đi từ trái qua phải, nối các điểm trên mặt phẳng, mỗi điểm có hoành độ là giá trị đại diện của nhóm số liệu và có tung độ tương ứng với tần số tương đối của nhóm số liệu đó.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 60 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	Cộng
Tần số (n)	7	16	27	10	60

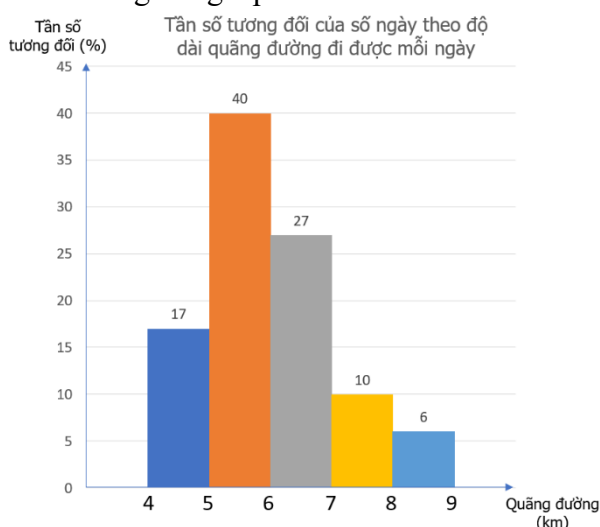
Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[30;40)$.

Lời giải

Tần số ghép nhóm $[30;40)$ là 27

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[30;40)$ là: $\frac{27 \cdot 100}{60} \% = 45\%$

Câu 2: Nam thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) mình đi bộ mỗi ngày trong tháng 9 và biểu diễn dưới dạng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm sau:



Tìm nhóm có tần số tương đối ghép nhóm lớn nhất. Xác định tần số và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm đó.

Lời giải

Nhóm có tần số tương đối ghép nhóm lớn nhất là $[5;6)$ có tần số tương đối $f = 40\%$

và tần số $n = 12$.

Câu 3: Sau khi điều tra về thời gian đi từ nhà đến trường của học sinh lớp 9A có 40 học sinh ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Thời gian từ nhà đến trường (phút)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$
Tần số tương đối	30%	45%	25%

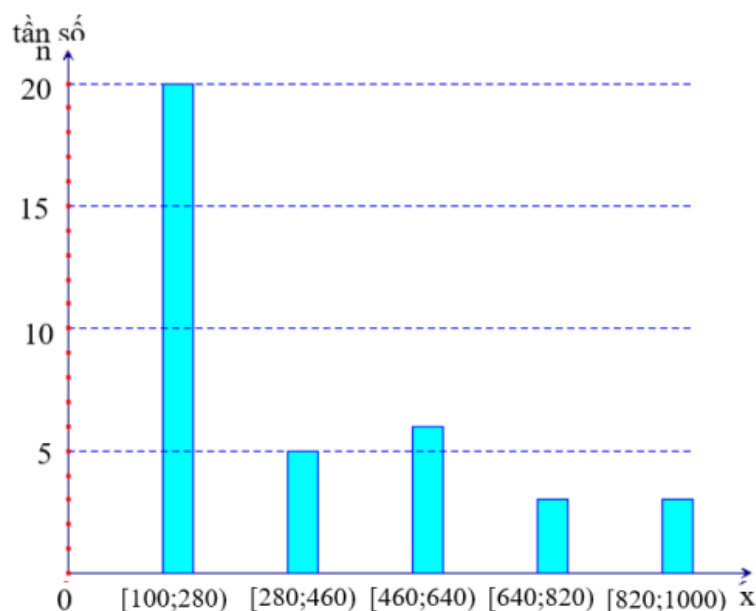
Tìm tần số tương đối ghép nhóm và tần số ghép nhóm của nhóm $[10;20)$?

Lời giải

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[10;20)$ là 45%

Tần số ghép nhóm của nhóm $[10;20)$ là $45\% \cdot 40 = 18$.

Câu 4: Sau khi điều tra mật độ dân số (đơn vị: người/km²) của 37 tỉnh, thành phố thuộc các vùng Bắc Trung Bộ và Duyên hải miền Trung, Tây Nguyên, Đông Nam Bộ, Đồng bằng sông Cửu Long (không kể Thành phố Hồ Chí Minh) ở năm 2021, người ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây:



- Tìm tần số ghép nhóm của nhóm $[460;640)$
- Tính tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[100;280)$

Lời giải

a) Tần số ghép nhóm của nhóm $[460;640)$ là 6.

b) Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[100;280)$ là $f = \frac{20}{37} \cdot 100\% \approx 54\%$.

Câu 5: Chiều cao (đơn vị: mét) của 35 cây bạch đàn được cho như sau: Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

6,6	7,5	8,2	8,2	7,8	7,9	9,0	8,9	8,2
7,2	7,5	8,3	7,4	8,7	7,7	7,0	9,4	8,7
8,0	7,7	7,8	8,3	8,6	8,1	8,1	9,5	6,9

8,0	7,6	7,9	7,3	8,5	8,4	8,0	8,8

Lời giải

Các số liệu trên được ghép thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng có độ dài bằng nhau là: [6,6; 7,2), [7,2; 7,8), [7,8; 8,4), [8,4; 9), [9; 9,6).

Câu 6: Đo chiều cao (đơn vị là cm) của học sinh lớp 9A cho kết quả như sau;

156 157 164 166 166 165 157 154 155 158 160 163 163

161 162 159 159 160 160 160 159 158 160 160 158 163

162 162 162 161 162 161 163 161 163 161 164 166 165

165

Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với các nhóm [155; 158), [158; 161), [161; 164), [164;167).

Tính tần số tương đối của nhóm [161; 164)

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm

Chiều cao (cm)	[155; 158)	[158; 161)	[161; 164)	[164;167)
Số HS	5	12	15	8

Tần số tương đối của nhóm [161; 164) là: $\frac{15}{40} \cdot 100\% = 37,5\%$

Câu 7: Kết quả đo tốc độ của 25 xe ô tô (đơn vị: km/h) khi đi qua một trạm quan sát đã được thống kê dưới bảng sau

46	55	57	50	45
41	44	46	40	58
50	56	52	59	44
52	40	42	47	54
45	48	58	49	40

a) Hãy ghép các số liệu thành bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm ở câu a.

Lời giải

a) Trong mẫu số liệu trên, số liệu có giá trị nhỏ nhất là 41 , số liệu có giá trị lớn nhất là 59 . Vì thế, ta có thể chọn nửa khoảng [40; 60) sao cho giá trị của mỗi số liệu trong mẫu số liệu đều thuộc nửa khoảng [40; 60) . Vì độ dài của nửa khoảng [40; 60) bằng $60 - 40 = 20$ nên ta có thể phân chia nửa khoảng đó thành bốn nửa khoảng có độ dài bằng nhau là: [40; 45) , [45; 50) , [50; 55) [55; 60).

Vậy ta có thể ghép mẫu số liệu đã cho theo bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng đó.

b) Tốc độ của xe đi từ 40 km/h đến dưới 45 km/h là 7 xe;

Tốc độ của xe đi từ 45 km/h đến dưới 50 km/h là 7 xe;

Tốc độ của xe đi từ 50 km/h đến dưới 55 km/h là 5 xe;

Tốc độ của xe đi từ 55 km/h đến dưới 60 km/h là 6 xe.

Do đó ta có bảng tần số ghép nhóm

Tốc độ (km/h)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)
Tần số	7	7	5	6

Câu 8: Giáo viên ghi lại thời gian bơi cự ly 50 mét của học sinh lớp 9A cho kết quả trong bảng sau:

Thời gian (giây)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)
Số học sinh	3	7	10	20

Nêu các nhóm số liệu và tần số tương đối?

Lời giải

Nhóm số liệu	Tần số
Nhóm [40; 45)	$\frac{3}{40}.100\% = 7,5\%$
Nhóm [40; 45)	$\frac{7}{40}.100\% = 17,5\%$
Nhóm [40; 45)	$\frac{10}{40}.100\% = 25\%$
Nhóm [55; 60)	$\frac{20}{40}.100\% = 50\%$

Câu 9: Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh lớp 9 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0 ; 20)	[20 ; 40)	[40 ; 60)	[60 ; 80)
Số học sinh	8	9	11	8

Tính tần số tương đối của nhóm [40 ; 60) ? (Làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Nhóm [40 ; 60) có tần số tương đối là $\frac{11}{36} \approx 30,6\%$

Câu 10: Trong bảng số liệu sau có một số liệu bị điều tra sai. Hãy tìm số liệu đó và sửa cho đúng.

Tần số	24	16	6	4
Tần số tương đối	48%	32%	15%	8%

Lời giải

Số liệu không chính xác ở đây là 15% .

Sửa lại thành 12% vì $\frac{6}{24 + 16 + 6 + 4}.100\% = 12\%$

Câu 12: Cân nặng của các bạn học sinh lớp 9A (đơn vị: ki-lo-gam) có kết quả như sau:

62	59	68	53	50	57	72	65	62	58
69	53	64	67	72	74	63	56	66	66
62	52	65	69	60	52	65	63	74	68
59	68	64	69	56	72	67	58	62	60

Mẫu số liệu thống kê ở trên đã được ghép thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: [50 ; 55), [55 ; 60), [60 ; 65), [65 ; 70), [70 ; 75) . Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm ở trên.

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó như sau:

Nhóm	Tần số (n)
$[50 ; 55)$	4
$[55 ; 60)$	7
$[60 ; 65)$	11
$[65 ; 70)$	13
$[70 ; 75)$	5
Cộng	$N = 40$

Câu 13: Khối lượng (đơn vị: gam) của 30 củ khoai tây thu hoạch được ở gia đình bác Ngọc là:

90	73	88	93	101	104	111	95	78	95
81	97	96	92	95	83	90	101	103	117
109	110	112	87	75	90	82	97	86	96

a) Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau

$[70;80)$, $[80;90)$, $[90;100)$, $[100;110)$, $[110;120)$. Tìm tần số của mỗi nhóm đó.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

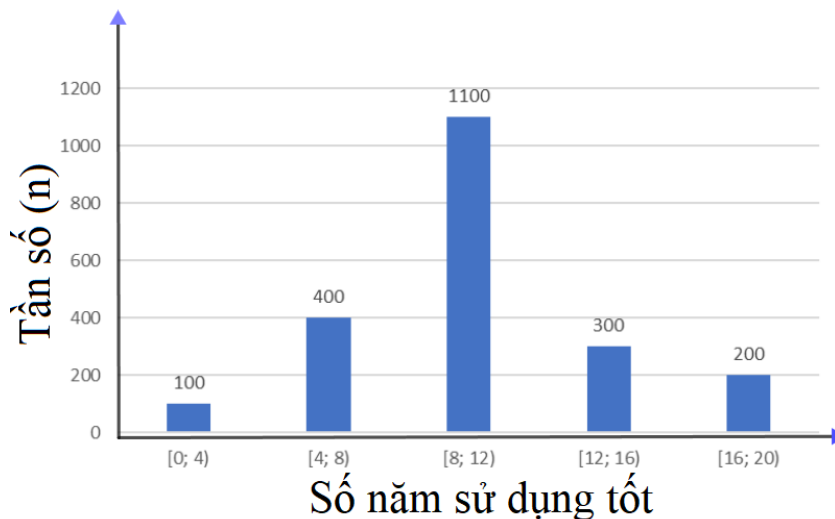
Lời giải

a) Các nhóm $[70;80)$, $[80;90)$, $[90;100)$, $[100;110)$, $[110;120)$. có tần số lần lượt là: $n_1=3$, $n_2=6$, $n_3=12$, $n_4=5$, $n_5=4$.

b)

Nhóm	Tần số (n)
$[70;80)$	3
$[80;90)$	6
$[90;100)$	12
$[100;110)$	5
$[110;120)$	4

Câu 14: Hệ thống đăng kiểm quốc gia ghi nhận 2000 xe ô tô của cùng 1 loại xe tới đăng kiểm. Người ta thu được biểu đồ tần số ghép nhóm về số năm sử dụng tốt mà chưa phải sửa chữa lớn của xe như dưới đây



Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [8; 12)

Lời giải

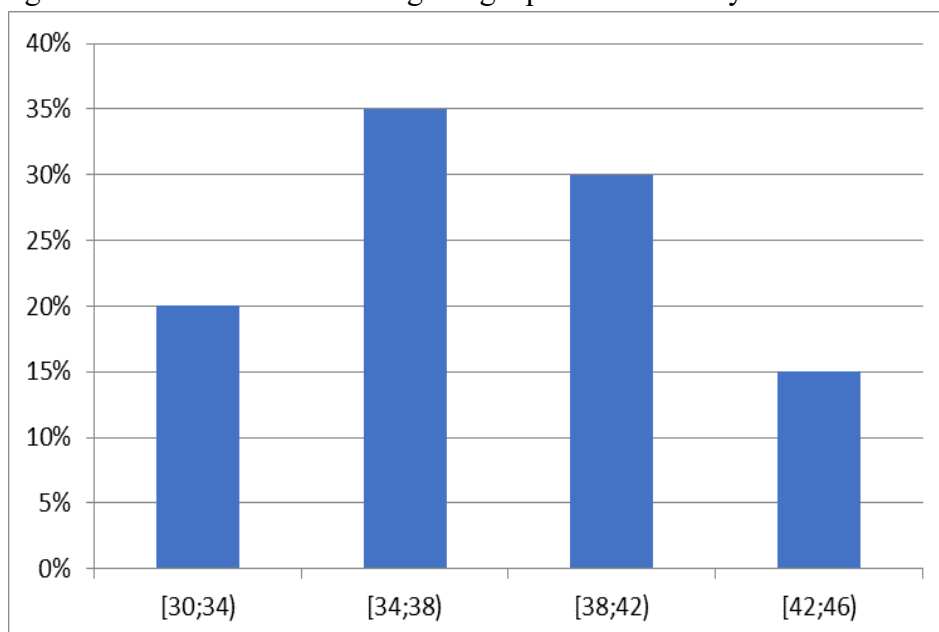
Từ biểu đồ ta có nhóm [8; 12) có tần số ghép nhóm là 1100

(nghĩa là có 1100 xe loại đó được sử dụng tốt từ 8 tới dưới 12 năm mới phải thực hiện đại tu lần đầu trong 4 năm sử dụng tiếp theo)

Tần số tương đối ghép nhóm là $\frac{1100}{2000} \cdot 100\% = 55\%$

(nghĩa là có 55% số xe loại đó sử dụng tốt từ 8 tới 12 năm, sau đó các xe này đều phải đại tu, sửa chữa hoặc thay thế trong 4 năm sử dụng tiếp theo).

Câu 15: Sau khi điều tra cân nặng (đơn vị: kg) của 200 học sinh khối lớp 4 của một trường tiểu học, người ta có biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dưới đây:



Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ. Tìm tần số ghép nhóm của nhóm [38;42)

Lời giải

1) Bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ là:

Cân nặng (kg)	[30;34)	[34;38)	[38;42)	[42;46)
Tần số tương đối	20%	35%	30%	15%

Tần số ghép nhóm của nhóm [38;42) là: $200 \cdot 30\% = 60$

Câu 17: Công ty điện lực thống kê lượng điện tiêu thụ (đơn vị: kWh) của một số hộ gia đình trong một khu vực trong tháng. Dữ liệu được ghi lại như sau:

150	120	180	200	130	100	160	190	219	210
170	140	110	130	160	180	150	200	210	190

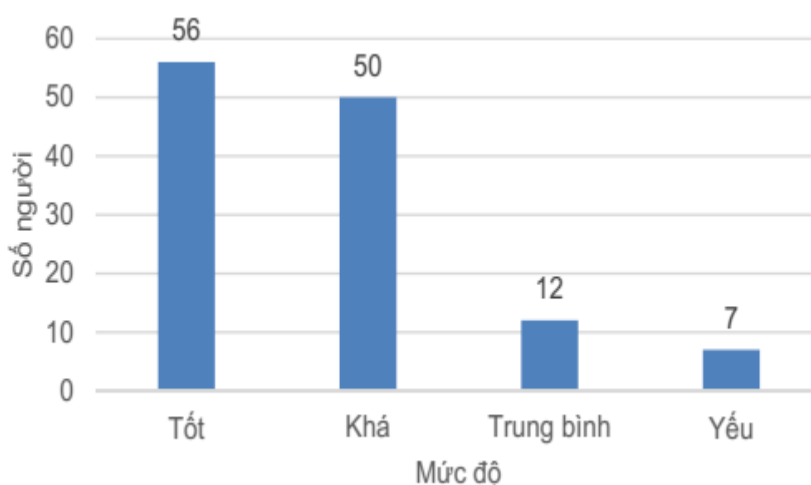
Lập bảng tần số ghép nhóm theo các khoảng lượng điện tiêu thụ sau: $[100;130)$; $[130;160)$; $[160;190)$; $[190;220)$.

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm cho lượng điện tiêu thụ của hộ gia đình (đơn vị: kWh)

Khoảng lượng điện	$[100;130)$	$[130;160)$	$[160;190)$	$[190;220)$
Tần số	3	5	5	7

Câu 18: Khảo sát đánh giá của khách hàng về chất lượng một loại dịch vụ mới, số liệu được biểu diễn trong biểu đồ sau:



a) Lập bảng tần số tương đối cho mẫu số liệu.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu.

Lời giải

Bảng tần số tương đối

Mức đánh giá		Khá	Trung bình	Yếu
Tần số tương đối		40%	9,6%	5,6%

Câu 20: Cho bảng tần số ghép nhóm sau về tuổi thọ của một số ong mật cái như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Tần số	14	24	22

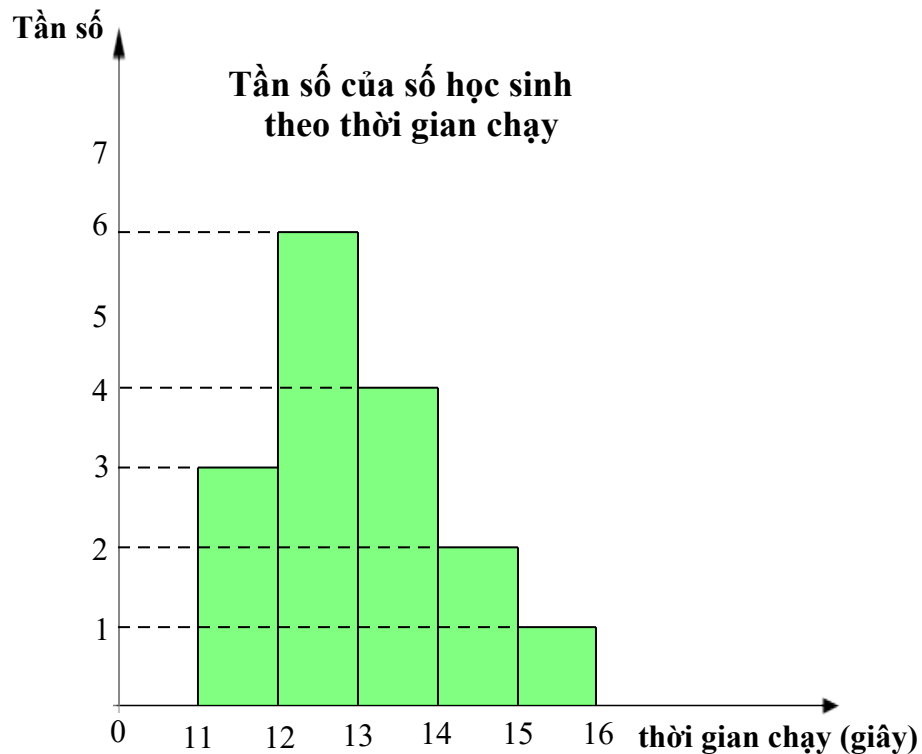
Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [40; 50).

Lời giải

Tần số ghép nhóm của nhóm [40; 50) là 24

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [40;50) là $\frac{24}{14 + 24 + 22} \cdot 100\% = 40\%$

Câu 21: Biểu đồ dưới đây biểu diễn kết quả khảo sát thành tích chạy 100m của một số học sinh



Có bao nhiêu học sinh chạy 100m hết ít hơn 13 giây và tìm tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [13;14).

Lời giải

Có 9 học sinh chạy 100m hết ít hơn 13 giây.

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [13;14) là: $\frac{4}{3 + 6 + 4 + 2 + 1} \cdot 100\% = 25\%$

Câu 22: Cân nặng của các bạn học sinh lớp 9A (đơn vị: ki-lo-gam) có kết quả như sau:

62	59	68	53	50	57	72	65	62	58
69	53	64	67	72	74	63	56	66	66
62	52	65	69	60	52	65	63	74	68
59	68	64	69	56	72	67	58	62	60

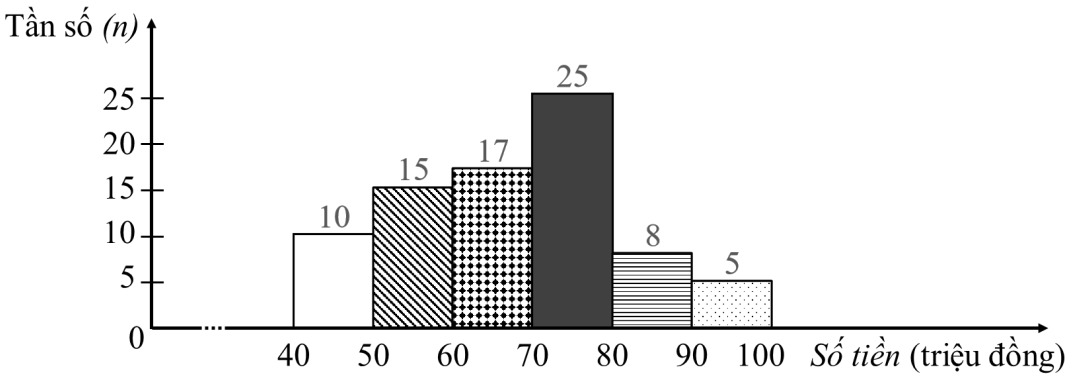
Mẫu số liệu thống kê ở trên đã được ghép thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: $[50 ; 55)$, $[55 ; 60)$, $[60 ; 65)$, $[65 ; 70)$, $[70 ; 75)$. Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm ở trên.

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó như sau:

Nhóm	Tần số (n)
$[50 ; 55)$	4
$[55 ; 60)$	7
$[60 ; 65)$	11
$[65 ; 70)$	13
$[70 ; 75)$	5
Cộng	$N = 40$

Câu 23: Một ngân hàng thống kê số tiền (đơn vị: triệu đồng) mà 80 hộ gia đình vay để phát triển sản xuất. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm ở Hình 1.



Hình 1

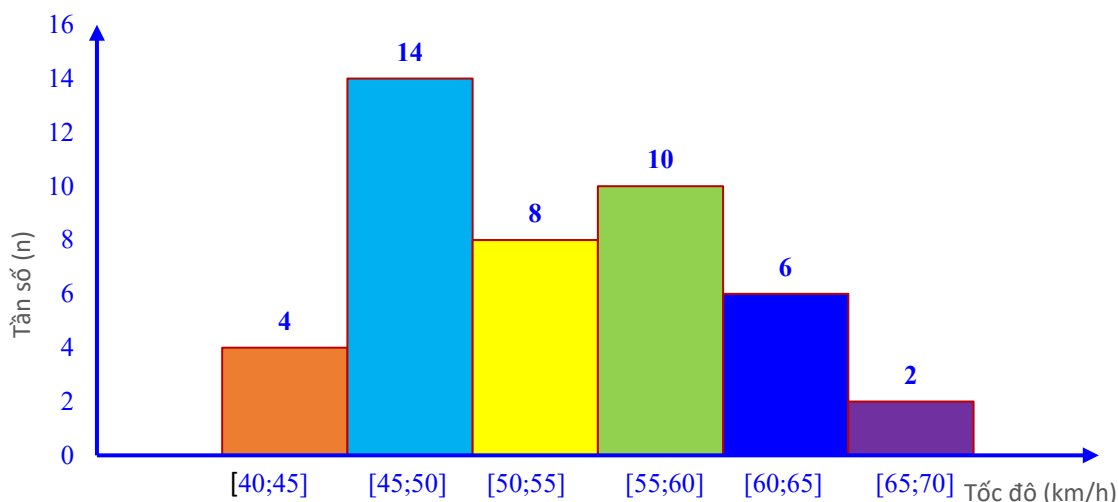
Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu được ghép nhóm đó.

Lời giải

Bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu được ghép nhóm trên là:

Nhóm	Tần số tương đối (%)
$[40;50)$	12,5
$[50;60)$	18,75
$[60;70)$	21,25
$[70;80)$	31,25
$[80;90)$	10
$[90;100)$	6,25
Cộng	100

Câu 24: Biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây ghi lại tốc độ (đơn vị: km/h) của 44 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ.



Hãy cho biết số lượng ô tô ở nhóm nào nhiều nhất, tính tần số tương đối ghép nhóm của nhóm đó. (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Số lượng ô tô ở nhóm [45;50] là nhiều nhất: 14 chiếc

Tần số tương đối của nhóm là $\frac{14 \cdot 100}{44} \% \approx 31,8 \%$

Câu 25: Ban phụ huynh đặt tặng áo phong cho 40 học sinh của lớp 8A. Ban phụ huynh đo chiều cao (đơn vị: centimét) của cả lớp để quyết định chọn các cỡ áo, kết quả cho bởi bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	[150;155)	[155;160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	Cộng
Tần số (n)	5	11	12	8	4	N=40

Xác định tần số ghép nhóm và tìm tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [160; 165) .

Lời giải

Dựa vào bảng tần số ghép nhóm đã cho, tần số ghép nhóm của nhóm [160; 165) là 12 và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [160; 165) là $\frac{12 \cdot 100}{40} \% = 30\%$

Câu 26: Chỉ số phát triển con người (HDI) là chỉ tiêu tổng hợp phản ánh các mặt thu nhập, sức khỏe, giáo dục của người dân trong một quốc gia. Các nước và vùng lãnh thổ trên thế giới được chia thành 4 nhóm theo HDI: Nhóm 1(rất cao) có HDI từ 0,8 trở lên; Nhóm 2(cao) có HDI từ 0,7 đến dưới 0,8; Nhóm 3(trung bình) có HDI từ 0,55 đến dưới 0,7; Nhóm 4(thấp) có HDI dưới 0,55. Năm 2021, chỉ số HDI của 11 quốc gia Đông Nam Á như sau.

0,939 0,829 0,803 0,8 0,705 0,703 0,699 0,607 0,607 0,593 0,585

Dựa vào dữ liệu trên, hãy hoàn thành bảng tần số ghép nhóm sau:

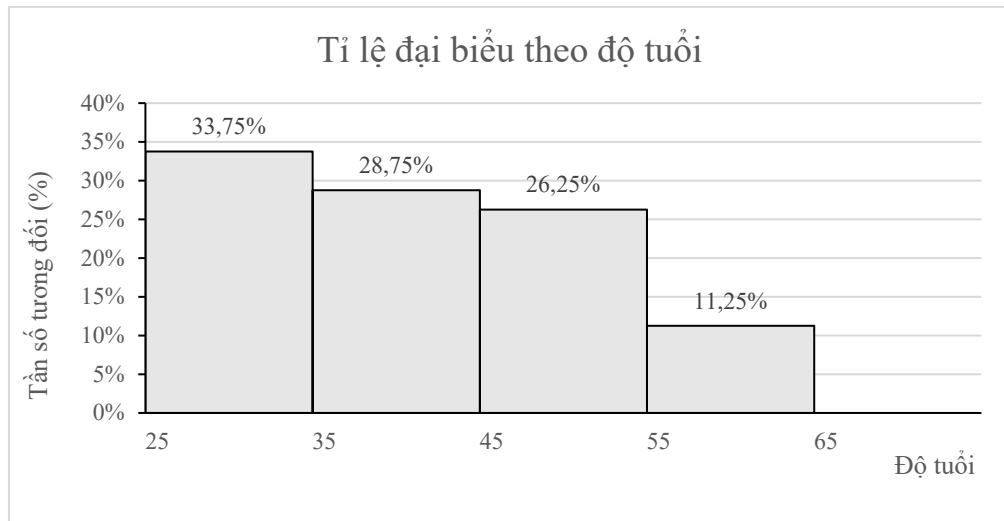
Chỉ số HDI	[0; 0,55)	[0,55; 0,7)	[0,7; 0,8)	[0,8; 1)	Cộng
Tần số	?	?	?	?	N =

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm

Chỉ số HDI	$[0; 0,55)$	$[0,55; 0,7)$	$[0,7; 0,8)$	$[0,8; 1)$	Cộng
Tần số	0	5	2	4	$N = 11$

Câu 27: Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 tuổi đến 35 tuổi.



- Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị?
- Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?

Lời giải

- Nhóm $[25; 35)$ chiếm 33,75% so với tổng số đại biểu và có 54 người.

Nên: $54 : 33,75\% = 160$ (người)

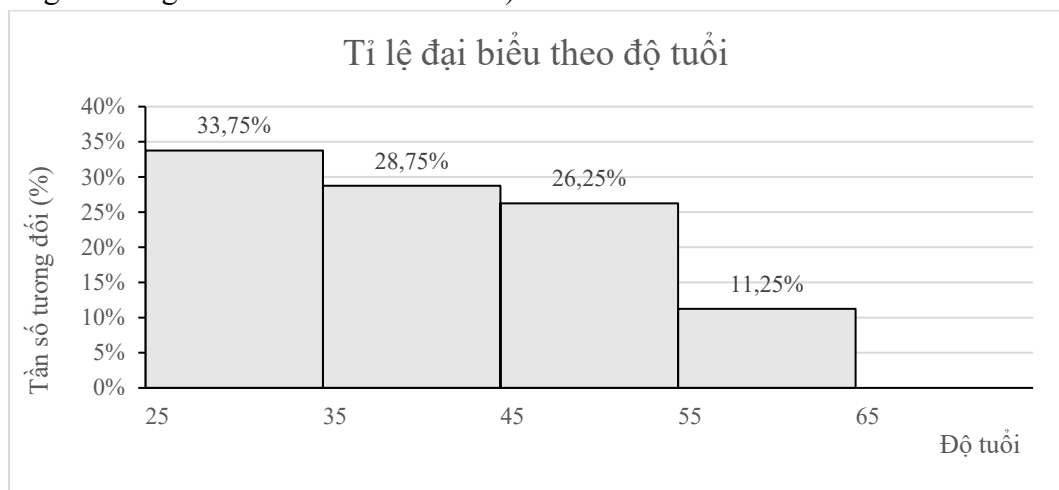
Tổng số đại biểu tham dự hội nghị là 160 người.

- Tổng số % số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi là:

$$33,75\% + 28,75\% = 62,5\% > 50\%.$$

Nhận định trên là đúng.

Câu 28: Để chuẩn bị cho tiết mục kỉ niệm 70 năm Chiến thắng Điện Biên Phủ, phường Mỹ Đình có cử một số lượng người tham gia, được biểu diễn dưới biểu đồ tỉ lệ sau:
(Biết rằng có 54 người từ 25 tuổi đến 35 tuổi)



- Có bao nhiêu người tham gia biểu diễn?

b) Một người cho rằng có trên 50% số người biểu diễn dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?

Lời giải

a) Nhóm [25; 35) chiếm 33,75% so với tổng số người và có 54 người.

Nên: $54: 33,75\% = 160$ (người)

Tổng số người tham gia biểu diễn là 160 người.

b) Tổng số % số người tham gia biểu diễn dưới 45 tuổi là:

$$33,75\% + 28,75\% = 62,5\% > 50\%.$$

Nhận định trên là đúng.

Câu 29: Thống kê tuổi thọ của 30 bóng đèn điện được lắp thử (đơn vị: giờ) được cho trong bảng dưới đây:

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

a) Lập bảng tần số và tần số tương đối của mẫu số liệu trên.

b) Có người nói: “Có trên 75% bóng đèn có tuổi thọ từ 1160 đến 1180”. Theo em nhận định đó đúng hay sai?

Lời giải

a) Liệt kê các giá trị khác nhau ta được: 1150; 1160; 1170; 1180; 1190

Với mỗi giá trị khác nhau, ta đếm xem giá trị đó xuất hiện bao nhiêu lần trong bảng.

Bảng phân bố tần số:

Tuổi thọ (giờ)	1150	1160	1170	1180	1190	Tổng
Tần số (n)	3	6	12	6	3	$N = 30$

Tần số tương đối của các giá trị lần lượt là:

$$f_1 = \frac{3.100}{30} = 10\%; f_2 = \frac{6.100}{30} = 20\%; f_3 = \frac{12.100}{30} = 40\%;$$

$$f_4 = \frac{6.100}{30} = 20\%; f_5 = \frac{3.100}{30} = 10\%$$

Vì vậy, bảng tần số tương đối của mẫu số liệu đã cho được nêu trong Bảng sau.

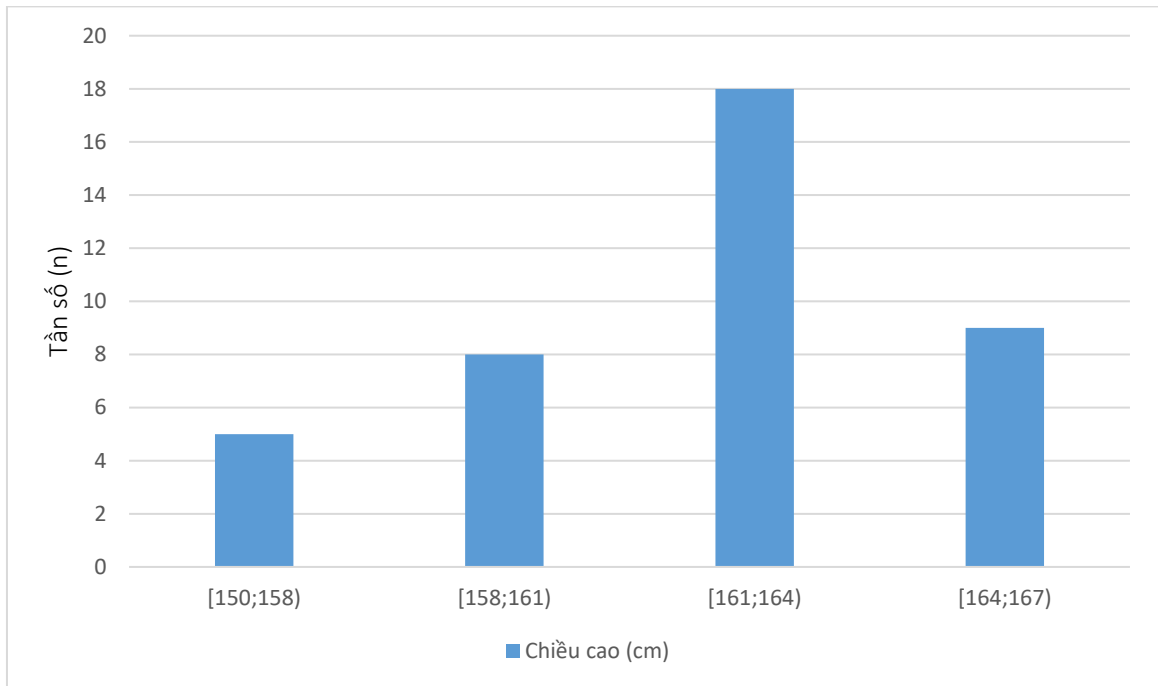
Tuổi thọ (giờ)	1150	1160	1170	1180	1190	Tổng
Tần số tương đối (%)	10	20	40	20	10	100

b) Số bóng đèn có tuổi thọ từ 1160 đến 1180 chiếm số phần trăm là:

$$20\% + 40\% + 20\% = 80\%$$

Vậy nhận định “Có trên 75% bóng đèn có tuổi thọ từ 1160 đến 1180” là đúng.

Câu 30: Sau khi thống kê chiều cao của 40 học sinh lớp 9A, cô giáo lập biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây:



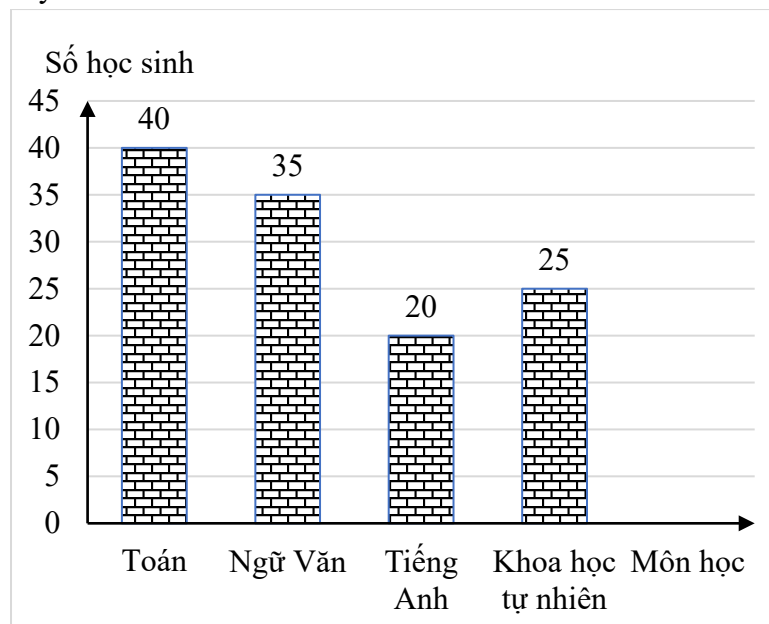
Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [161;164).

Lời giải

Tần số ghép nhóm của nhóm [161;164) là $n = 18$.

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [161;164) là: $f = \frac{18 \cdot 100}{40} \% = 45\%$

Câu 31: Biểu đồ hình cột sau thống kê về sự yêu thích các môn học của học sinh khối 9. Biết mỗi học sinh chọn một môn yêu thích.



Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối của dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Lời giải

Quan sát biểu đồ, ta có:

Tổng số học sinh khối 9 là: $40 + 35 + 20 + 25 = 120$ học sinh. Vậy $N = 120$.

Bảng tần số:

Môn học (x)	Toán	Ngữ Văn	Tiếng Anh	Khoa học tự nhiên	Cộng
Tần số (n)	40	35	20	25	$N = 120$

Tần số tương đối của số học sinh yêu thích các môn Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Khoa học tự nhiên lần lượt là:

$$f_1 = \frac{40}{120} \cdot 100\% \approx 33,33\%; f_2 = \frac{35}{120} \cdot 100\% \approx 29,17\%;$$

$$f_3 = \frac{20}{120} \cdot 100\% \approx 16,67\%; f_4 = \frac{25}{120} \cdot 100\% \approx 20,83\%.$$

Bảng tần số tương đối:

Môn học (x)	Toán	Ngữ Văn	Tiếng Anh	Khoa học tự nhiên	Cộng
Tần số tương đối (%)	33,33	29,17	16,67	20,83	100

Câu 32: Một cuộc điều tra về thời gian một nhóm học sinh làm một Câu kiểm tra trắc nghiệm cho kết quả như sau:

Thời gian (phút)	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$
Tần số	1	5	9	5

Cho biết có bao nhiêu học sinh tham gia điều tra và lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho kết quả điều tra

Lời giải

Có tất cả: $1 + 5 + 9 + 5 = 20$ học sinh tham gia

Bảng tần số tương đối ghép nhóm cho kết quả trên là:

Thời gian (phút)	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$
Tần số tương đối	5%	25%	45%	25%

Câu 33: Một bác thợ đóng giày thống kê lại độ dài bàn chân (đơn vị: cm) của 60 khách hàng ở bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	$[27;28)$	$[28;29)$	$[29;30)$	$[30;31)$	Cộng
Tần số (n)	8	18	24	10	60

- Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm.
- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột biểu diễn mẫu số liệu trên.

Lời giải

- Tần số tương đối của các nhóm lần lượt là:

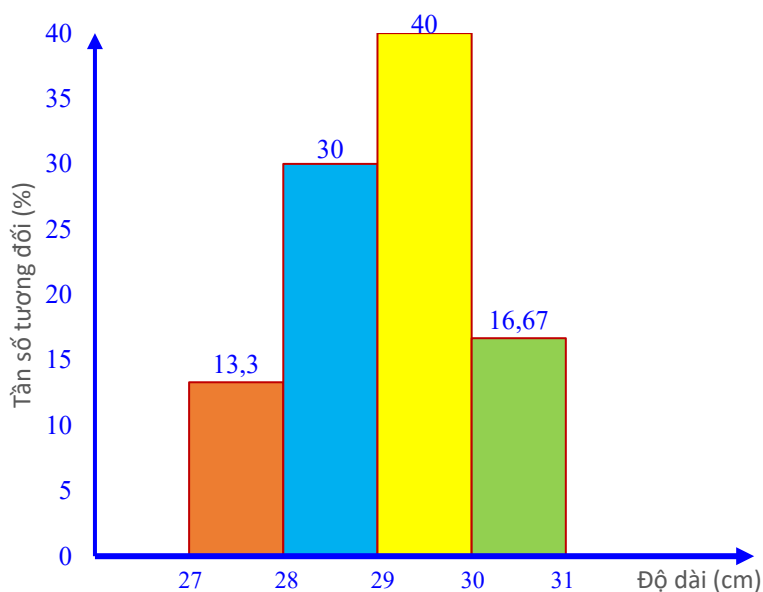
$$f_1 = \frac{8.100}{60} \% = 13,33\%; f_2 = \frac{18.100}{60} \% = 30\%$$

$$f_3 = \frac{24.100}{60} \% = 40\%; f_4 = \frac{10.100}{60} \% = 16,67\%$$

2) Bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó

Nhóm	[27;28)	[28;29)	[29;30)	[30;31)	Cộng
Tần số tương đối (%)	13,33	30	40	16,67	100

3)



Câu 34: Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 60 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau

Nhóm	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50]	Cộng
Tần số (n)	8	18	24	10	60

a) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Lời giải

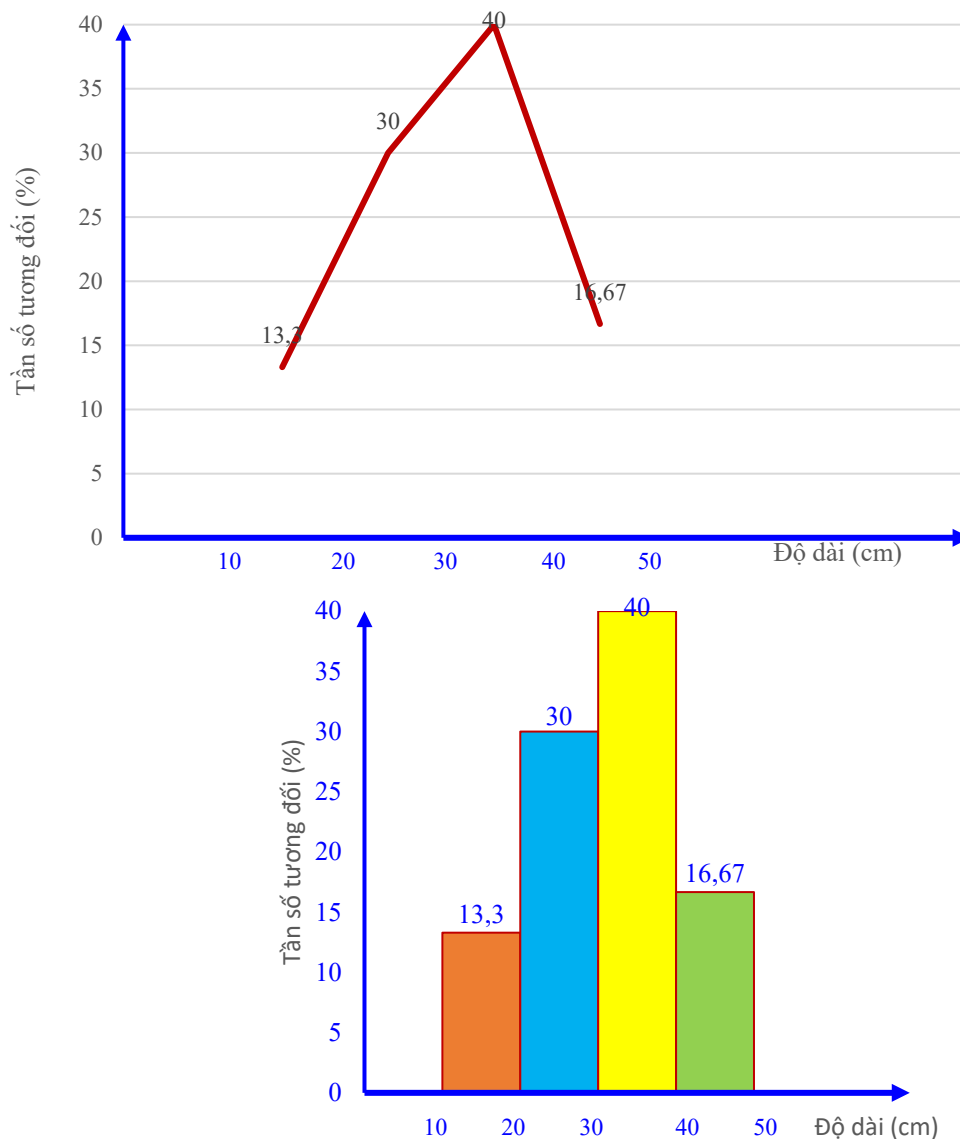
a) Tần số tương đối của các nhóm lần lượt là: $f_1 = \frac{8.100}{60} \% = 13,33\%; f_2 = \frac{18.100}{60} \% = 30\%$

$$f_3 = \frac{24.100}{60} \% = 40\%; f_4 = \frac{10.100}{60} \% = 16,67\%$$

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó

Nhóm	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50]	Cộng
Tần số tương đối (%)	13,33	30	40	16,67	100

c)



Câu 35: Bảng thống kê sau cho biết số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990-2021.

Loại thiên tai	Hạn hán	Bệnh dịch	Lũ lụt	Sạt lở đất	Bão
Số lượng	6	9	71	6	94

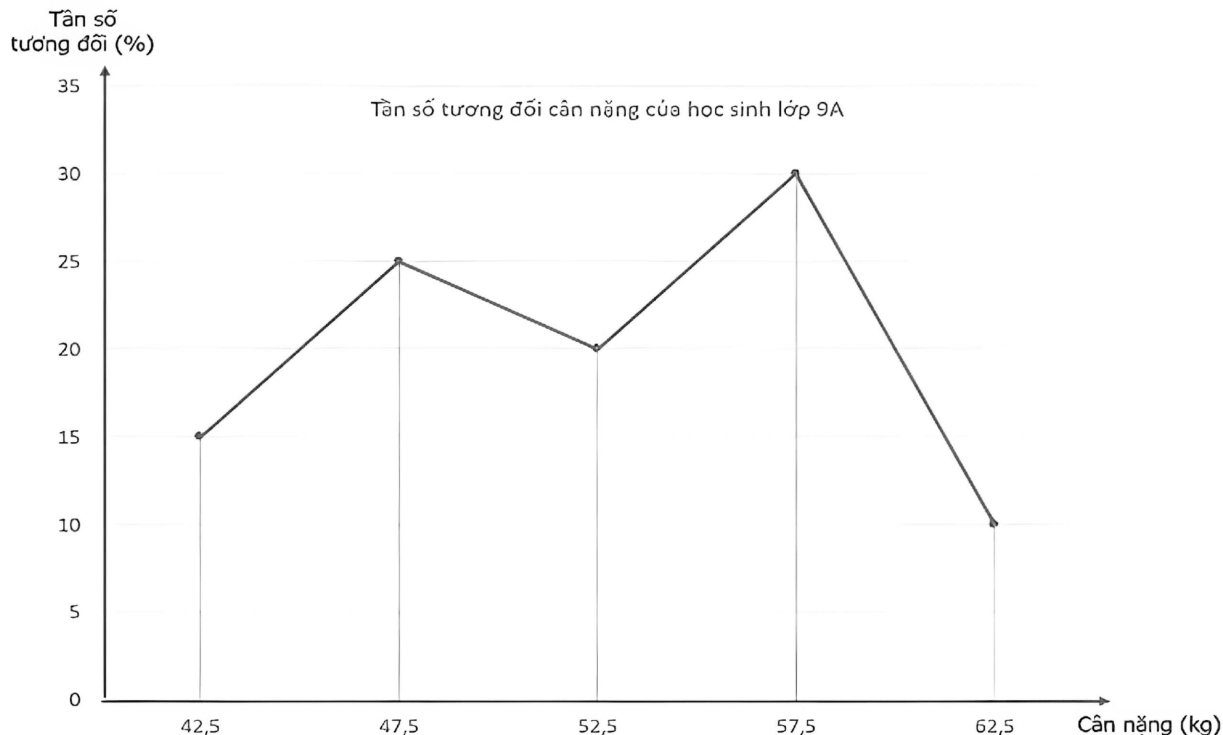
(Theo Vietnam.opendevlopmentmekong.net)

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu đã cho.

Lời giải

Giá trị đại diện của các nhóm dữ liệu lần lượt là 42,5 47,5; 52,5; 57,5; 62,5.

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu đã cho:



Câu 36: Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	[8,4;8,6)	[8,6;8,8)	[8,8;9,0)	[9,0;9,2)	[9,2;9,4)	Tổng
Số cây	5	12	25	44	14	100

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê thu được ở câu a.

Lời giải

a) Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[8,4;8,6)$ là: $f = \frac{n}{N} \cdot 100\% = \frac{5 \cdot 100}{100}\% = 5\%;$

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[8,6;8,8)$ là: $f = \frac{n}{N} \cdot 100\% = \frac{12 \cdot 100}{100}\% = 12\%;$

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[8,8;9,0)$ là: $f = \frac{n}{N} \cdot 100\% = \frac{25 \cdot 100}{100}\% = 25\%;$

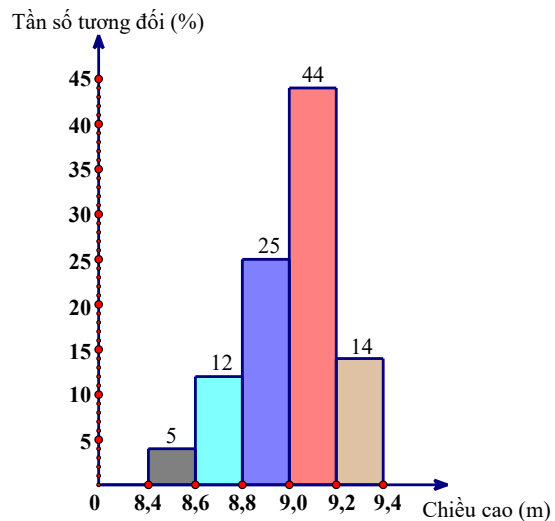
Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[9,0;9,2)$ là: $f = \frac{n}{N} \cdot 100\% = \frac{44 \cdot 100}{100}\% = 44\%;$

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[9,2;9,4)$ là: $f = \frac{n}{N} \cdot 100\% = \frac{14 \cdot 100}{100}\% = 14\%;$

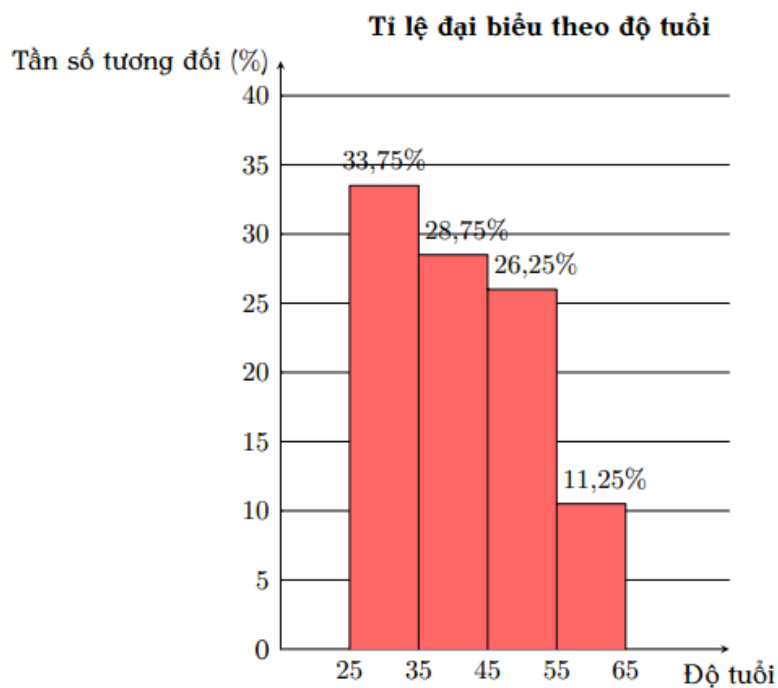
Vì vậy, bảng tần ghép nhóm của mẫu số liệu đã cho được nêu trong bảng dưới đây.

Chiều cao (m)	[8,4;8,6)	[8,6;8,8)	[8,8;9,0)	[9,0;9,2)	[9,2;9,4)	Tổng
Tần số tương đối (%)	5	12	25	44	14	100

a) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê thu được ở câu a



Câu 37: Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi.



Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị? Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.

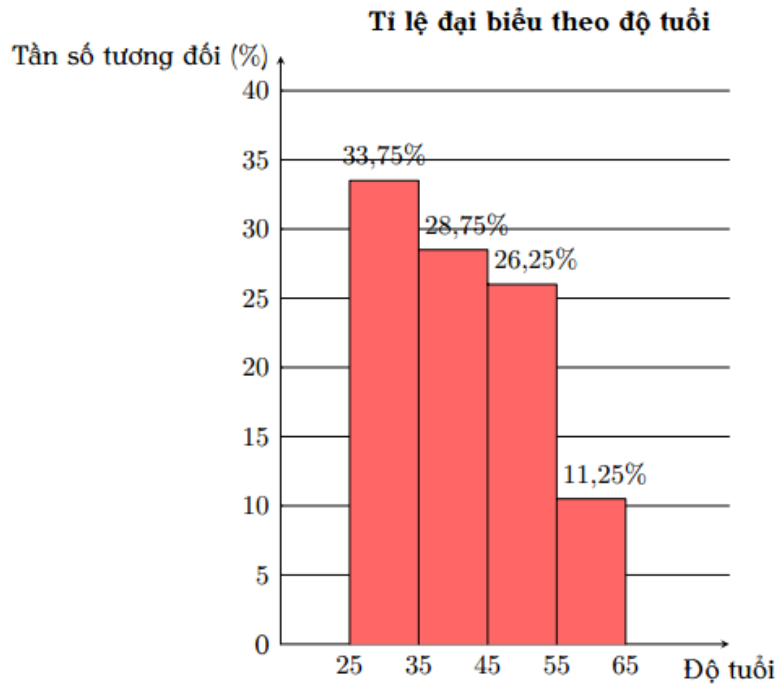
Lời giải

- Số đại biểu tham dự hội nghị là: $54 : 33,75\% = 160$ (đại biểu)

- Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng:

Độ tuổi	[25;35]	[35;45]	[45;55]	[55;65]
Tần số tương ứng	33,75%	28,75%	26,25%	11,25%

Câu 38: Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi.



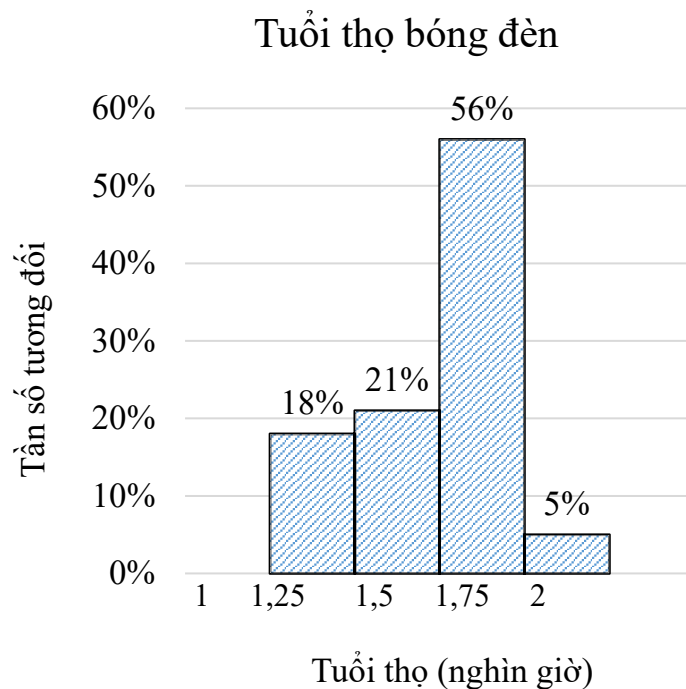
Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị? Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.

Lời giải

- Số đại biểu tham dự hội nghị là: $54 : 33,75\% = 160$ (đại biểu)
- Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng:

Độ tuổi	[25;35]	[35;45]	[45;55]	[55;65]
Tần số tương ứng	33,75%	28,75%	26,25%	11,25%

Câu 39: Cho biểu đồ tần số tương đối biểu thị tuổi thọ của bóng đèn tính theo đơn vị nghìn giờ.

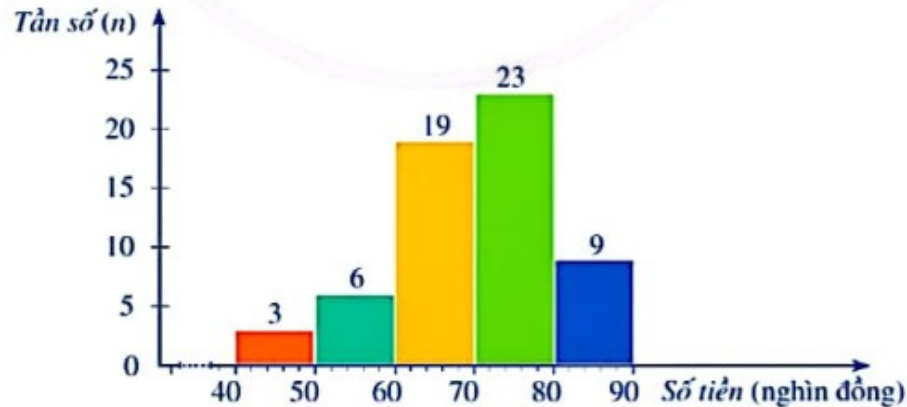


Em hãy cho biết: Tần số 5% là tần số tương đối của nhóm ghép dữ liệu nào?

Lời giải

Tần số 5% là tần số tương đối của nhóm $[1,75;2)$.

Câu 40: Một cửa hàng sách thống kê số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở cửa hàng đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây.



Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[40;50)$

Lời giải

+ Tần số ghép nhóm của nhóm $[40;50)$ là 3.

+ Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[40;50)$ là: $\frac{3}{60} \cdot 100\% = 5\%$

Câu 41: Tỷ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được cho trong bảng sau:

Cầu thủ	Tuấn	Trường	An	Linh
Tỷ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

Hãy lập bảng tần số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

Lời giải

Số học sinh bình chọn cho Tuấn là $\frac{500 \cdot 30\%}{100\%} = 150$ (học sinh)

Số học sinh bình chọn cho Trường là $\frac{500 \cdot 25\%}{100\%} = 125$ (học sinh)

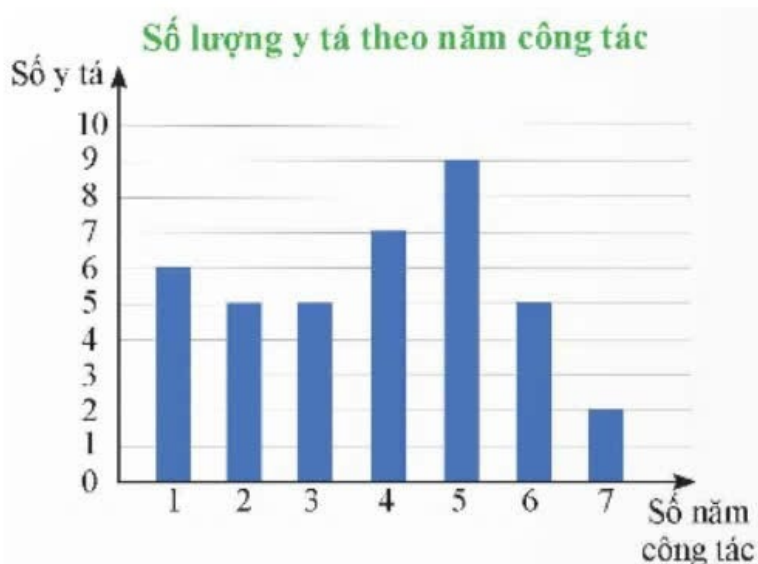
Số học sinh bình chọn cho An là $\frac{500 \cdot 10\%}{100\%} = 50$ (học sinh)

Số học sinh bình chọn cho Linh là $\frac{500 \cdot 35\%}{100\%} = 175$ (học sinh)

Ta có bảng tần số

Cầu thủ	Tuấn	Trường	An	Linh
Số học sinh bình chọn	150	125	50	175

Câu 43: Biểu đồ bên dưới thống kê thời gian công tác (theo năm) của các y tá ở một phòng khám tư nhân ở Hà Nội.



- a) Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận những giá trị nào? Tìm tần số mỗi giá trị đó.
- b) Phòng khám có tổng bao nhiêu y tá?
- c) Có bao nhiêu y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm?

Lời giải

- a) Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận những giá trị sau 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.
Bảng tần số:

Số năm công tác	1	2	3	4	5	6	7
Số y tá	6	5	5	7	9	5	2

- b) Phòng khám có: $6 + 5 + 5 + 7 + 9 + 5 + 2 = 39$ y tá.

- c) Có $5 + 7 + 9 + 5 + 2 = 28$ y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm.

Câu 45: Thời gian đi từ nhà đến trường (đơn vị: phút) của các bạn học sinh lớp 9C được ghi lại ở bảng sau:

9,5	13,9	5,6	13,2	10,3	15,1	19,5	14,1	11,4	19,7	15,1	11,1
16,6	7,2	18	11,6	6,2	6,2	16,7	7,8	17,7	7,7	7,7	5,5
18,2	7,4	19,8	19	5,2	18,3	14,7	14,1	19,6	7,2	7,2	12,5

Hãy chia số liệu thành 4 nhóm, với nhóm thứ nhất là khoảng từ 5 phút đến dưới 9 phút và lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm.

Lời giải

Độ tuổi (phút)	[5;9)	[9;13)	[13;17)	[17;21)
Tần số	54	46	42	18
Tần số tương đối	30,56 %	19,44 %	25 %	25 %

Câu 46: Sau khi điều tra về số học sinh trong 100 lớp học (đơn vị: học sinh), người ta có bảng tần số ghép nhóm như ở bảng sau:

Nhóm	Tần số (n)
[36; 38)	20
[38; 40)	15
[40; 42)	25
[42; 44)	30
[44; 46)	10
Cộng	$N = 100$

- a) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.
- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó

Lời giải

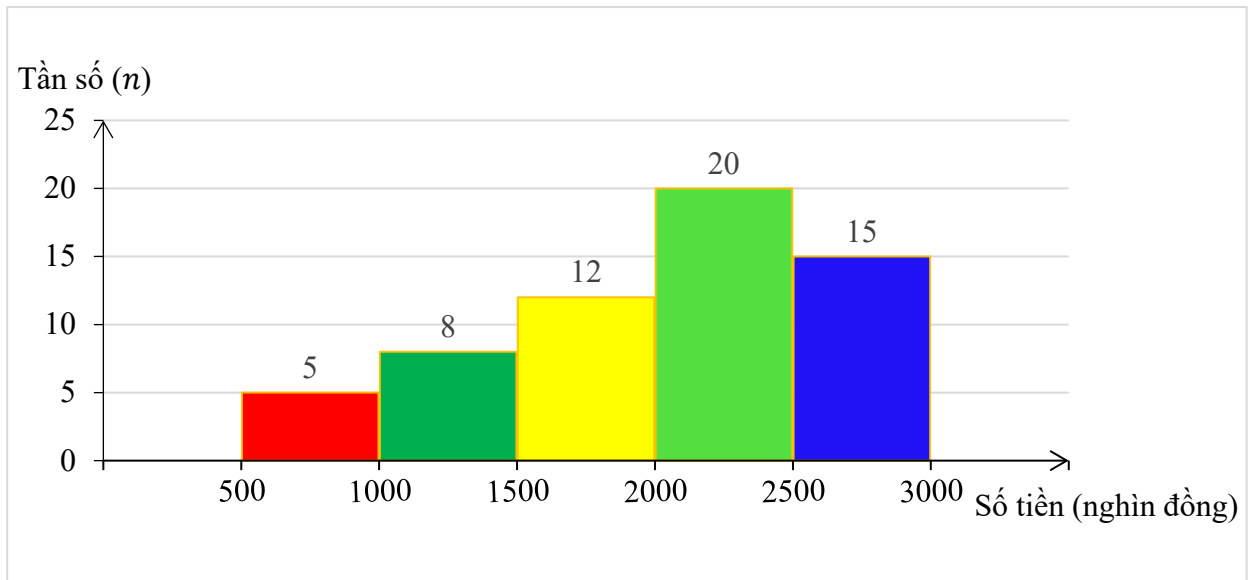
a) Tần số tương đối của mỗi nhóm là:

- Nhóm [36; 38) : $\left(\frac{20}{100}\right).100\% = 20\%$
- Nhóm [38; 40) : $\left(\frac{15}{100}\right).100\% = 15\%$
- Nhóm [40; 42) : $\left(\frac{25}{100}\right).100\% = 25\%$
- Nhóm [42; 44) : $\left(\frac{30}{100}\right).100\% = 30\%$
- Nhóm [44; 46) : $\left(\frac{10}{100}\right).100\% = 10\%$

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó

Nhóm	Tần số (n)	Tần số tương đối (%)
[36; 38)	20	20%
[38; 40)	15	15%
[40; 42)	25	25%
[42; 44)	30	30%
[44; 46)	10	10%
Cộng	$N = 100$	100%

Câu 47: Một cửa hàng tạp hóa thống kê số tiền lãi (đơn vị: nghìn đồng) trong 60 ngày. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm sau:



- 1) Tính tần số tương đối của mỗi nhóm?
- 2) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

Lời giải

- 1) Tần số tương đối của mỗi nhóm là:

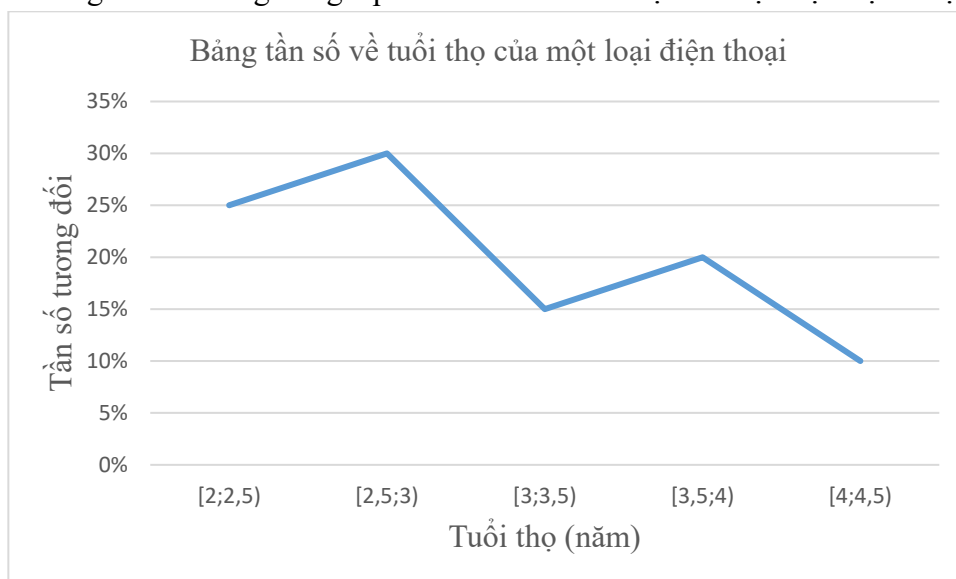
$$f_1 = \frac{5 \cdot 100}{60} \% = 8,3\%; f_2 = \frac{8 \cdot 100}{60} \% = 13,4\%; f_3 = \frac{12 \cdot 100}{60} \% = 20\%; f_4 = \frac{20 \cdot 100}{60} \% = 33,3\%;$$

$$f_5 = \frac{15 \cdot 100}{60} \% = 25\%$$

- 2) Bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu đã cho là:

Số tiền (nghìn đồng)	[500; 1000)	[1000; 1500)	[1500 ; 2000)	[2000 ; 2500)	[2500 ; 3000)
Tần số tương đối	8,3%	13,4%	20%	33,3%	25%

Câu 48: Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một loại điện thoại.



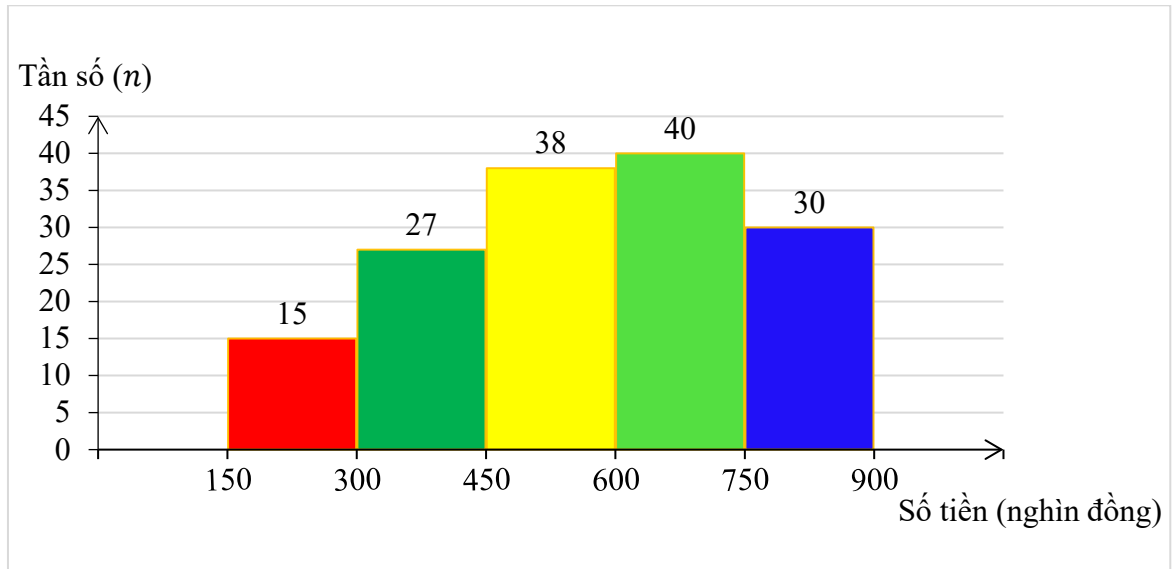
Tìm giá trị đại diện cho nhóm [3;3,5) và cho biết tần số tương đối của chúng của nhóm [3;3,5).

Lời giải

Giá trị đại diện cho nhóm $[3; 3,5)$ là $\frac{3 + 3,5}{2} = 3,25$

Tần số tương ứng của nhóm $[3; 3,5)$ là 15%

Câu 50: Một siêu thị thống kê hóa đơn mua hàng (đơn vị: nghìn đồng) của 150 khách hàng đầu tiên trong ngày. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm sau:



Tính tần số tương đối của nhóm có tần số lớn nhất (làm tròn đến số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Nhóm có tần số lớn nhất là nhóm $[600; 750)$ với tần số 40.

Tần số tương đối của nhóm có tần số lớn nhất là $\frac{40 \cdot 100}{150} \% = 26,7\%$.

Câu 51: Lượng xuất khẩu gạo và cà phê (đơn vị: nghìn tấn) của Việt Nam ở các tháng 7, 8, 9, 10 năm 2022 lần lượt khoảng là: 580 và 125; 700 và 112,5; 578 và 100; 680 và 79,8.

a) Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

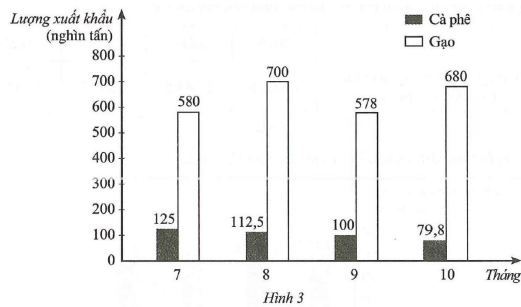
b) Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

Lời giải

a) Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau :

Tháng	7	8	9	10
Gạo (đơn vị: nghìn tấn)	580	700	578	680
Cà phê (đơn vị: nghìn tấn)	125	112,5	100	79,8

b) Biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó như sau (Hình 3):



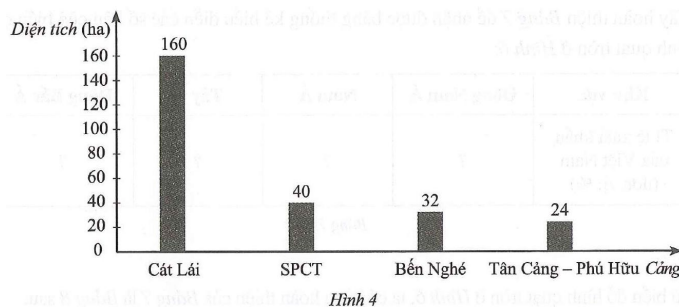
Câu 52: Bảng thống kê diện tích bốn cảng biển lớn của Thành phố Hồ Chí Minh như sau :

Tên cảng	Cát Lái	SPCT (Sài Gòn Premier Container Terminal)	Bến Nghé	Tân Cảng - Phú Hữu
Diện tích (đơn vị: ha)	160	40	32	24

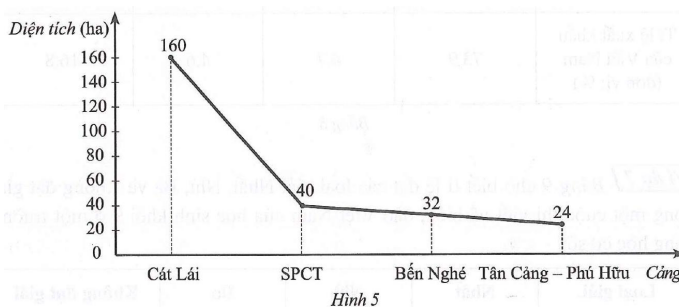
- Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.
- Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.
- Phát biểu "Diện tích cảng Cát Lái gấp 1,8 lần tổng diện tích của ba cảng SPCT, Bến Nghé và Tân Cảng - Phú Hữu" là đúng hay sai? Vì sao?

Lời giải

- Biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó như sau (Hình 4):



- Biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó như sau (Hình 5):



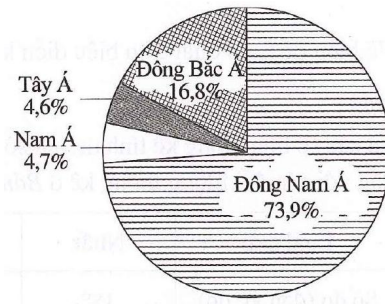
- Tổng diện tích của ba cảng SPCT, Bến Nghé và Tân Cảng - Phú Hữu là:

$$40 + 32 + 24 = 96 \text{ (ha)}.$$

Ta có: $96 \cdot 1,8 = 172,8 > 160$.

Vậy phát biểu "Diện tích cảng Cát Lái gấp 1,8 lần tổng diện tích của ba cảng SPCT, Bến Nghé và Tân Cảng - Phú Hữu" là không đúng.

Câu 53: Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 6 biểu diễn tỉ lệ phần trăm xuất khẩu của Việt Nam sang các khu vực thị trường châu Á năm 2020.



Hình 6

Hãy hoàn thiện Bảng 7 để nhận được bảng thống kê biểu diễn các số liệu của biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 6:

Khu vực	Đông Nam Á	Nam Á	Tây Á	Đông Bắc Á
Tỉ lệ xuất khẩu của Việt Nam (đơn vị: %)	?	?	?	?

Bảng 7

Lời giải

Từ biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 6, ta có bảng hoàn thiện của Bảng 7 là Bảng 8 sau:

Khu vực	Đông Nam Á	Nam Á	Tây Á	Đông Bắc Á
Tỉ lệ xuất khẩu của Việt Nam (đơn vị: %)	73,9	4,7	4,6	16,8

Câu 54: Bảng 9 cho biết tỉ lệ đạt các loại Lời giải Nhất, Nhì, Ba và Không đạt Lời giải trong một cuộc thi viết về biển, đảo Việt Nam của học sinh khối 9 ở một trường trung học cơ sở:

Loại Lời giải	Nhất	Nhì	Ba	Không đạt Lời giải
Tỉ lệ đạt Lời giải (đơn vị: %)	5%	15%	25%	55%

Bảng 9

Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn kết quả thống kê trên.

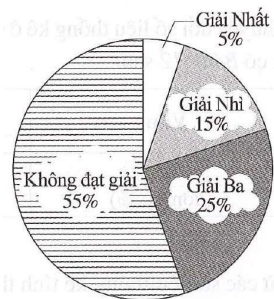
Lời giải

Từ các số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm ở Bảng 9, ta có các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê ở Bảng 10 sau:

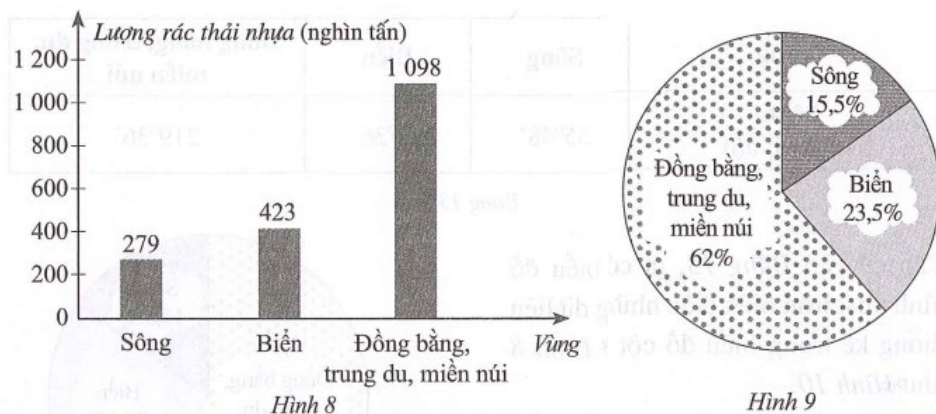
Loại Lời giải	Nhất	Nhì	Ba	Không đạt Lời giải
Số đo (đơn vị: độ)	18°	54°	90°	198°

Bảng 10

Căn cứ vào Bảng 10, ta có biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê được cho ở Hình 7.



Câu 55: Theo số liệu thống kê từ Bộ Tài nguyên và Môi trường, mỗi năm Việt Nam có khoảng 1,8 triệu tấn rác thải nhựa thải ra môi trường. Biểu đồ cột ở Hình 8 biểu diễn số liệu về lượng rác thải nhựa mỗi năm của cả nước thải ra sông; biển; đồng bằng, trung du, miền núi.



- a) Bạn An đã vẽ biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 9 để biểu diễn các dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở Hình 8. Những số liệu mà bạn An nêu ra trong biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 9 đó đã chính xác chưa? Vì sao?
- b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn để biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở Hình 8.

Lời giải

- a) Trong biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 9, ta có: $15,5\% + 23,5\% + 62\% > 100\%$. Vì vậy, những số liệu mà bạn An nêu ra trong biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 9 là chưa chính xác.
- b) Từ biểu đồ cột ở Hình 8, ta có bảng thống kê lượng rác thải nhựa mỗi năm của Việt Nam thải ra sông; biển; đồng bằng, trung du, miền núi như Bảng 11 sau:

Vùng	Sông	Biển	Đồng bằng, trung du, miền núi
Lượng rác thải nhựa (đơn vị: nghìn tấn)	279	423	1098

Chuyển đổi số liệu thống kê Bảng 11 về số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm, ta có Bảng 12 sau:

Vùng	Sông	Biển	Đồng bằng, trung du, miền núi
Tỉ lệ (đơn vị: %)	15,5	23,5	61

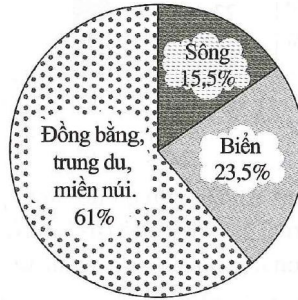
Bảng 12

Từ các số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm ở Bảng 12, ta có các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê ở Bảng 13 sau:

Vùng	Sông	Biển	Đồng bằng, trung du, miền núi
Số đo (đơn vị: độ)	55°48'	84°36'	219°36'

Bảng 13

Căn cứ vào Bảng 13, ta có biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở Hình 8 như Hình 10.



Câu 56: Thống kê khối lượng rau thu hoạch một vụ (đơn vị: tạ) của mỗi hộ gia đình trong 38 hộ gia đình tham gia chương trình trồng rau theo tiêu chuẩn VIETGAP như sau:

5 5 6 6 6 7 4 4 5 5 7 8 8
 9 4 5 7 4 10 7 7 7 6 6 5 7
 8 9 8 8 9 9 9 8 7 5 10 8

- Trong 38 số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?
- Tìm tần số của mỗi giá trị đó.
- Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Lời giải

- Trong 38 số liệu thống kê ở trên có 7 giá trị khác nhau là:

$$x_1 = 4; x_2 = 5; x_3 = 6; x_4 = 7; x_5 = 8; x_6 = 9; x_7 = 10$$

- Tần số của giá trị $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ lần lượt là:

$$n_1 = 4; n_2 = 7; n_3 = 5; n_4 = 8; n_5 = 7; n_6 = 5; n_7 = 2$$

- Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên như Bảng 19 sau:

Số tạ (x)	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	4	7	5	8	7	5	2	$N = 38$

Bảng 19

Câu 57: Tuổi nghề (đơn vị: năm) của 32 giáo viên ở một trường trung học cơ sở được ghi lại như sau:

7 7 10 3 4 4 9 3 3 7 7 10 9 7 10 4
 12 4 3 12 9 12 9 10 7 7 12 9 7 10 10 4

- Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.
- Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

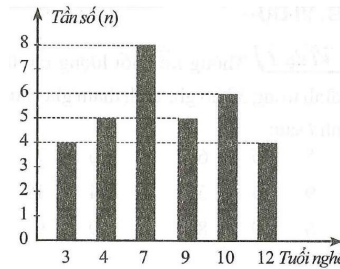
Lời giải

a) Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó như Bảng 20 sau:

Tuổi nghề (x)	3	4	7	9	10	12	Cộng
Tần số (n)	4	5	8	5	6	4	$N = 32$

Bảng 20

b) Biểu đồ tần số của mẫu số liệu thống kê đó như Hình 12.



Hình 12

Câu 58: Một công ty nông sản xuất khẩu 4 mặt hàng chủ lực là Chè (C), Hạt điều (Đ), Hạt tiêu (T), Sắn (S). 40 container hàng xuất khẩu của công ty được thông quan qua cửa khẩu quốc tế Móng Cái vào tháng 5 năm 2023 như sau:

C C C Đ Đ Đ Đ C C C T T S S S C C C Đ T
T T S Đ Đ C S S S C T T Đ D T T T C C T

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Lời giải

a) Mẫu dữ liệu thống kê đó có 40 dữ liệu ($N = 40$) và có 4 giá trị khác nhau là C, D, T, S.

Các giá trị C, D, T, S lần lượt có tần số, tần số tương đối là:

$$n_1 = 13; n_2 = 9; n_3 = 11; n_4 = 7$$

$$f_1 = \frac{13 \cdot 100}{40} \% = 32,5\%; f_2 = \frac{9 \cdot 100}{40} \% = 22,5\%$$

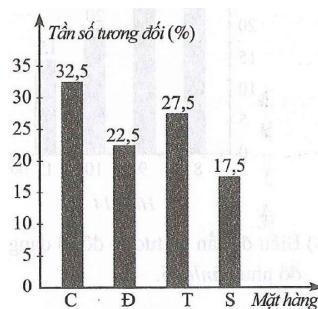
$$f_3 = \frac{11 \cdot 100}{40} \% = 27,5\%; f_4 = \frac{7 \cdot 100}{40} \% = 17,5\%$$

Bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó như Bảng 22 sau:

Mặt hàng (x)	C	D	T	S	Cộng
Tần số tương đối (%)	32,5	22,5	27,5	17,5	100

Bảng 22

b) Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó như Hình 13.



Hình 13

Câu 59: Một trường trung học cơ sở thống kê số giờ (trung bình) chơi thể thao trong một tuần của 420 học sinh. Kết quả mẫu số liệu thống kê đó được cho ở bảng tần số sau (Bảng 23):

Số giờ chơi thể thao (x)	8	9	10	12	Cộng
Tần số (n)	147	126	84	63	$N = 420$

Bảng 23

- Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

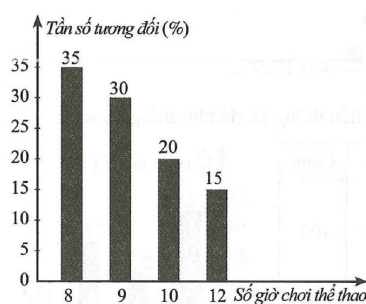
Lời giải

- Bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó như Bảng 24 sau:

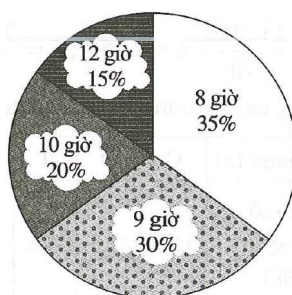
Số giờ chơi thể thao (x)	8	9	10	12	Cộng
Tần số tương đối (%)	35	30	20	15	100

Bảng 24

- Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó như Hình 14.



Hình 14



Hình 15

c) Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó như Hình 15.

Câu 60: Một đội công nhân tham gia hội thi tay nghề giỏi. Mỗi công nhân phải hoàn thành bài thi (lí thuyết và thực hành) trong thời gian 120 phút. Thời gian hoàn thành bài thi của các công nhân trong đội đó được cho ở Bảng 29.

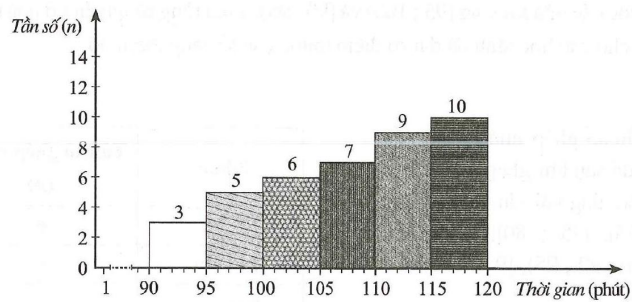
TThời gian (phút)	[90;95)	[95;100)	[100;105)	[105;110)	[110;115)	[115;120)
Số công nllhâm	3	5	6	7	9	10

Bảng 29

- a) Tính số công nhân đã hoàn thành bài thi trước khi hết giờ trên 20 phút.
b) Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở Bảng 29.

Lời giải

- a) Dựa vào Bảng 29, ta có số công nhân đã hoàn thành bài thi trước khi hết giờ trên 20 phút là: $3 + 5 = 8$ (người).
b) Hình 16 cho biết biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu được ghép nhóm nêu ở Bảng 29.



Hình 16

Câu 61: Bảng 30 cho biết tần số và tần số tương đối ghép nhóm của một mẫu số liệu ghép nhóm:

Nhóm	Tầm số ghép nhóm (n)	Tần số tương đối ghép nhóm (%)
[10;15)	4	f_1
[15;20)	11	27,5
[20;25)	7	17,5
[25;30)	8	20
[30;35)	a	f_5
Cộng	$N = 40$	100

Bảng 30

- a) Tìm các giá trị của a, f_1, f_5 .

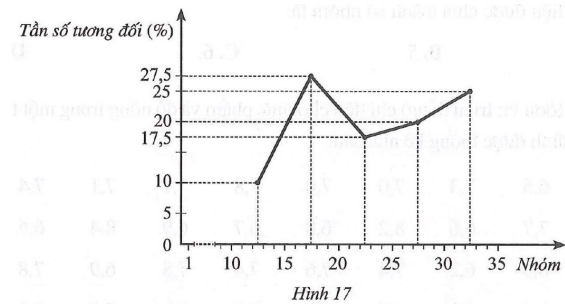
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở Bảng 30.

Lời giải

a) Ta có $4 + 11 + 7 + 8 + a = 40$. Do đó:

$$a = 10; f_1 = \frac{4 \cdot 100}{40} \% = 10\%; f_5 = \frac{10 \cdot 100}{40} \% = 25\%$$

b) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu được ghép nhóm nêu ở Bảng 30 được cho ở Hình 17.



CHUYÊN ĐỀ 9: MỘT SỐ YẾU TỐ XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

- ✓ Có những phép thử mà tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó hoàn toàn xác định. Tuy nhiên, các kết quả xảy ra có tính ngẫu nhiên, ta không thể đoán trước được những phép thử như thế gọi là phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) và tập hợp Ω gọi là không gian mẫu của phép thử.

☞ Chú ý:

- Ω : đọc là ômega
- Các kết quả có thể xảy ra của phép thử có thể xuất hiện như nhau được gọi là đồng khả năng.
- Kết quả thuận lợi cho biến cố A là 1 kết quả có thể của phép thử làm cho biến cố A xảy ra.

2. Xác suất của biến cố.

- Giả thiết rằng các kết quả có thể xảy ra của một phép thử là đồng khả năng. Khi đó, xác suất của biến cố A, kí hiệu: $P(A)$, bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố A và tổng số kết quả có thể xảy ra.

$$P(A) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho A}}{\text{Tổng số kết quả có thể xảy ra}}.$$

Nhận xét: để tính xác suất của biến cố A, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra tính đồng khả năng đối với các kết quả có thể xảy ra của phép thử

Bước 2: đếm số kết quả có thể xảy ra, tức là đếm số phần tử của không gian mẫu Ω

Bước 3: Đếm số kết quả thuận lợi cho biến cố A

Bước 4: Lập tỉ số giữa kết quả thuận lợi cho biến cố A và tổng số kết quả có thể xảy ra.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Trên mặt phẳng cho năm điểm phân biệt A, B, C, D, E trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hai điểm A, B được tô màu đỏ; ba điểm C, D, E được tô màu xanh. Bạn Châu chọn ra ngẫu nhiên một điểm tô màu đỏ, sau đó chọn ngẫu nhiên một điểm tô màu xanh để nối thành một đoạn thẳng. Tính xác suất của mỗi biến cố X : “Trong hai điểm được chọn ra có điểm A”.

Câu 2: Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1, 2, 3, ..., 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau. Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”. Tính xác suất biến cố: “Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1”.

Câu 3: Một túi đựng 5 viên bi có cùng khối lượng và kích thước như nhau, được đánh số 1; 2; 3; 4; 5. Xét phép thử: “Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ trong túi” và biến cố A: “Tích của hai số ghi trên hai viên bi lớn hơn 10” Tính xác suất của biến cố A?

Câu 4: Hình vẽ dưới đây mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia thành 12 phần bằng nhau và ghi các số 1; 2; 3; ..., 12. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.



Xét phép thử: “Quay đĩa tròn một lần” và biến cố A : “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số là số nguyên tố”. Tính xác suất của biến cố A .

Câu 5: Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1, 2, 3, ..., 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau.

Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”. Tính xác suất biến cố: “Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1”.

Câu 6: Trong túi có 6 quả bóng bàn kích thước và chất liệu như nhau gồm 2 quả màu đỏ, 2 quả màu trắng, 2 quả màu xanh. Không nhìn vào túi mà lấy ra 2 quả bóng. Tính xác suất của biến cố A lấy được ít nhất một quả bóng màu đỏ.

Câu 7: Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lẻ có 2 chữ số. Xét biến cố A : “Số tự nhiên viết ra là bình phương của một số tự nhiên”.



Tính xác suất của biến cố A .

Câu 8: Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất và có 6 mặt. Tính xác suất của biến cố gieo được mặt có số chấm là bội của 3.



Câu 9: Hình dưới đây mô tả một đĩa tròn, cân đối bằng bìa cứng được chia làm tám phần bằng nhau và ghi các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Quay đĩa tròn một lần.



Tính xác suất của các biến cố sau: “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số là ước của 8”.

Câu 10: Hình bên dưới mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm 12 phần bằng nhau và ghi các số 1,2,3,...,12; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.



Xét phép thử “Quay đĩa tròn một lần”. Tính xác suất của biến cố D:

- a) Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố.
- b) Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia cho 3 dư 1.

Câu 11: Một đội văn nghệ có bốn bạn, trong đó có hai bạn nữ là Dung và Ánh, hai bạn nam là Minh và Quân. Cô tổng phụ trách chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca. Xác định số kết quả thuận lợi của biến cố B : “Trong hai bạn được chọn có một bạn là Minh”

Câu 12: Một bình đựng 12 quả cầu được đánh số từ 1 đến 12 có kích thước và khối lượng như nhau. Chọn ngẫu nhiên một quả cầu. Tính xác suất biến cố A : “Chọn được quả cầu có số chia hết cho 3” là bao nhiêu?

Câu 13: Một bó hoa gồm 3 bông hoa màu đỏ và 1 bông hoa màu vàng. Bạn Trúc Linh chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Trúc Linh thực hiện.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

R : “Trong 2 bông hoa được chọn, có đúng 1 bông hoa màu đỏ”;

T : “Trong 2 bông hoa được chọn, có ít nhất 1 bông hoa màu đỏ”.

Câu 14: Bạn An là một thành viên của câu lạc bộ nhảy hiện đại khối 9 trong trường THCS. Để chọn học sinh trong CLB đó tham gia hoạt động văn nghệ chào mừng “Ngày nhà giáo Việt Nam” của trường, các học sinh trong CLB sử dụng hình thức bốc thăm với 20 lá thăm giống hệt nhau lần lượt ghi các số tự nhiên từ 1 tới 20 và được để trong hộp kín. Học sinh lấy được lá thăm ghi số chia hết cho 6 sẽ được tham gia. Bạn An là người được bốc thăm đầu tiên. Xét phép thử “Bạn An bốc ngẫu nhiên 1 lá thăm” và biến cố B : “Bạn An được tham gia hoạt động văn nghệ chào mừng Ngày nhà giáo Việt Nam của trường”. Tính xác suất của biến cố B .

Câu 15: Hình vẽ bên mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm 6 phần bằng nhau và ghi các số 1,2,3,4,5,6; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Xét phép thử “Quay đĩa tròn một lần” và biến cố A : “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia cho 2 dư 1”.

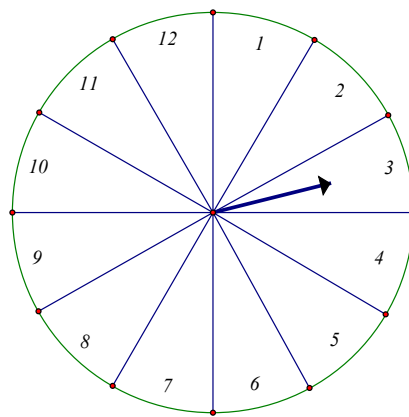


Tính xác suất của biến cố A .

- Câu 16:** Chọn ngẫu nhiên 1 tháng trong 6 tháng đầu năm 2022. Tính xác suất các biến cố sau:
 A: "Tháng được chọn có mức độ chênh lệch không quá 15 triệu".
 B: "Tháng được chọn có mức độ chênh lệch lớn hơn 16 triệu".
- Câu 17:** Một hộp chứa 4 tấm thẻ cùng loại được đánh số 2; 3; 5; 8. Bạn Phi và bạn Thanh lần lượt mỗi người lấy ra 1 tấm thẻ từ hộp (Biết trong mỗi đợt lấy thì bạn Phi lấy tấm thẻ trước và không bỏ tấm thẻ lại vào hộp). Tính xác suất của biến cố sau: M : "Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ là số lẻ".
- Câu 18:** Một hộp có 20 thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5; ...; 20, hai thẻ khác nhau thì ghi số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có một chữ số".
- Câu 19:** Một hộp đựng 10 viên bi được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp. Xét biến cố N : "Viên bi lấy ra có số ghi trên đó là số nguyên tố". Tính xác suất của biến cố N .
- Câu 20:** Trong một hộp đựng 15 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 15 và không có hai tấm thẻ nào đánh số trùng nhau. An rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: "An rút được tấm thẻ đánh số chia hết cho 3 và không vượt quá 10".
- Câu 21:** Bạn Long có n tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến n . Bạn Long rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được tấm thẻ ghi số có một chữ số" là 0,25. Hỏi bạn Long có bao nhiêu tấm thẻ?
- Câu 22:** Một hộp đựng 20 tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố A : "Số ghi trên tấm thẻ là bội của 4".
- Câu 23:** Một hộp có chứa ba viên bi vàng lần lượt ghi các số 1; 2; 3 và hai viên bi nâu lần lượt ghi các số 4; 5. Các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố: "Hai viên bi được lấy ra khác màu".
- Câu 24:** Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1; 2; 3; ...; 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau.
 Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp".
- Viết không gian mẫu phép thử đó.
 - Tính xác suất biến cố: "Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1".
- Câu 25:** Hình bên mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm tám phần bằng nhau và ghi các số 1; 2; 3; ...; 8. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Quay đĩa tròn một lần. Tính xác suất của biến cố A: "Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số lớn hơn 3".



- Câu 26:** Một hộp có chứa 5 quả bóng có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên cùng một lúc 2 quả bóng từ hộp.
- Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử.
 - Liệt kê các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:
 D : “Trong 2 quả bóng lấy ra có ít nhất 1 quả bóng ghi số chẵn”.
 - Tính xác suất của biến cố D : “Trong 2 quả bóng lấy ra có ít nhất 1 quả bóng ghi số chẵn”.
- Câu 27:** Hình vẽ dưới đây mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia thành 12 phần bằng nhau và ghi các số 1; 2; 3; ...; 12. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.

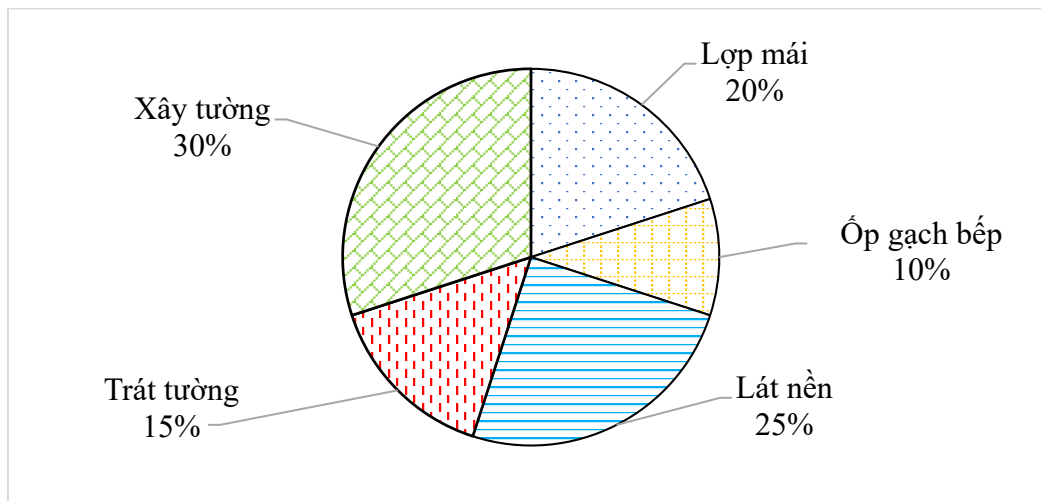


Xét phép thử: “Quay đĩa tròn một lần” và biến cố P : “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số là số nguyên tố”. Tính xác suất của biến cố P .

- Câu 29:** Bình tung một đồng tiền xu có hai mặt sấp (S) và ngửa (N) liên tiếp ba lần, sau mỗi lần tung Bình đều ghi lại mặt xuất hiện. Tính xác suất của các biến cố A : “Mặt sấp xuất hiện đúng một lần”.
- Câu 30:** Một hộp chứa 9 quả bóng màu cam và một số quả bóng màu trắng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp. Biết xác suất của biến cố “Lấy được quả bóng màu trắng” là $\frac{2}{5}$. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu trắng?



- Câu 31:** Mỗi công nhân của một đội xây dựng làm việc ở một trong năm bộ phận của đội đó là: Lợp mái, ốp gạch bếp, lát nền, trát tường, xây tường. Biểu đồ hình quạt tròn ở dưới đây thống kê tỷ lệ công nhân thuộc mỗi bộ phận. Chọn ngẫu nhiên một công nhân của đội. Tính xác suất của mỗi biến cố A : “Công nhân được chọn không thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái”.



Câu 32: Một toà nhà chung cư có 30 tầng, được đánh số lần lượt từ 1 đến 30. Bạn Bình vào thang máy ở tầng 1, bấm chọn ngẫu nhiên số một tầng để đi lên. Tính xác suất của các biến cố
 A: “Bình đi lên tầng có số là một số nguyên tố”.

Câu 33: Một túi đựng 10 tấm thẻ Câu có kích thước giống nhau và được ghi số 1; 2; 3; ...; 10. Hoa rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất của các biến cố:
 A : “Rút được tấm thẻ có ghi số chia hết cho 2”;

Câu 34: Có năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2; 4; 6; 8; 10 (cm). Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Tính xác suất của biến cố E : “Ba đoạn thẳng được lấy ra lập thành ba cạnh của một tam giác”

Câu 35: Một hộp có 20 thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5; ...; 20, hai thẻ khác nhau thì ghi số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) Biến cố A: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có chữ số tận cùng là 2”.

b) Biến cố B: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nguyên tố”.

c) Biến cố C: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có hai chữ số với tích các chữ số bằng 4”.

Câu 36: Xét phép thử quay bánh xe và quan sát xem khi nó dừng thì mũi kim (được gắn cố định) chỉ vào ô số mấy. Tính xác suất của các biến cố A: “Kim chỉ vào ô có số là bội của 3”

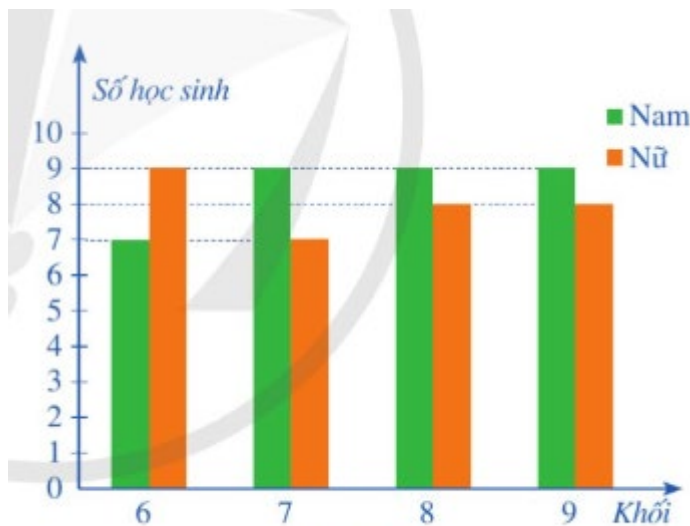


Câu 38: Một túi đựng 4 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số 1; 2; 3; 4. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi từ túi đó, viên bi lấy ra lần đầu không trả lại vào túi. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất để lấy được 2 viên bi mà tổng hai số trên hai viên bi đó là số lẻ.

Câu 39: Một hộp có 12 tấm thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1; 2; 3; \dots; 12$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Xét phép thử “Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp” và biến cố M : “Thẻ được rút ra ghi số chia hết cho 3”. Tính xác suất của biến cố M ?

Câu 40: Hãy tính xác suất cầu thủ được chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường có tên bắt đầu bởi chữ cái “T”.

Câu 41: 1) Biểu đồ cột kép ở Hình 30 biểu diễn số lượng học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của một trường trung học cơ sở.



Hình 30

Chọn ngẫu nhiên một học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của trường đó. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: “Học sinh được chọn là nam”;

B: “Học sinh được chọn thuộc khối 6”;

C: “Học sinh được chọn là nữ và không thuộc khối 9”.

2) Một hộp đựng 5 tấm thẻ ghi các số $1; 2; 3; 4; 5$. Rút ngẫu nhiên lần lượt hai tấm thẻ từ hộp, tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Câu 42: Nhóm học sinh tình nguyện khối 9 của một trường trung học cơ sở có 6 bạn, trong đó có 3 bạn nam là: Trung (lớp 9A); Quý (lớp 9A); Việt (lớp 9C); và 3 bạn nữ là: An (lớp 9A); Châu (lớp 9B); Hương (lớp 9D). Chọn ngẫu nhiên một bạn trong nhóm đó để tham gia hoạt động tình nguyện bên trường

a) Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra trong phép thử trên. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: “Bạn được chọn là bạn nữ”;

B: “Bạn được chọn thuộc lớp 9A”.

Câu 43: Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số $1, 2, 3, \dots, 20$; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau. Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”.

a) Liệt kê các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên viên bi được lấy ra.

b) Viết không gian mẫu phép thử đó.

c) Tính xác suất biến cố: “Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1”.

Câu 44: Một túi đựng 4 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số 1;2;3;4. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi từ túi đó, viên bi lấy ra lần đầu không trả lại vào túi. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất để lấy được 2 viên bi mà tổng hai số trên hai viên bi đó là số lẻ.

Câu 45: Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 52; hai thẻ khác nhau thì ghi số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất các biến cố sau:

a) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nhỏ hơn 27”.

b) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số lớn hơn 19 và nhỏ hơn 51”.

Câu 46: Bạn Bình gieo một đồng xu cân đối và bạn Cường rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp chứa 7 tấm thẻ ghi các số 1;2;3;4;5;6;7. Tính xác suất của biến cố A sau:

“Rút được tấm thẻ ghi số 6 hoặc đồng xu xuất hiện mặt N ”.

Câu 47: Bạn Bình gieo một đồng xu cân đối và bạn Cường rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp chứa 7 tấm thẻ ghi các số 1;2;3;4;5;6;7. Tính xác suất của biến cố A sau:

“Rút được tấm thẻ ghi số 6 hoặc đồng xu xuất hiện mặt N ”.

Câu 48: Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số.

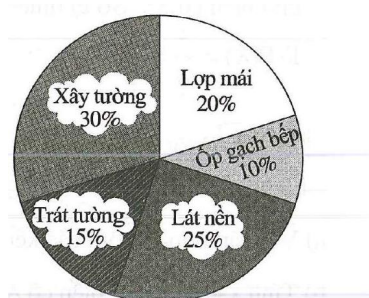
a) Viết tập hợp Ω tất cả các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Xác định kết quả thuận lợi cho biến cố B : “Số tự nhiên được viết ra chia hết cho 11”.

c) Xác định kết quả thuận lợi cho biến cố C : “Số tự nhiên được viết ra chia cho 10 dư 6”.

Câu 49: Cho tập hợp $A = \{4;5;6\}$. Từ các chữ số của tập hợp A viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có 2 chữ số. Tính xác suất để số được viết có hai chữ số khác nhau.

Câu 50: Mỗi công nhân của một đội xây dựng làm việc ở một trong năm bộ phận của đội đó là: Lợp mái, Ốp gạch bếp, Lát nền, Trát tường, Xây tường. Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 19 thống kê tỉ lệ công nhân thuộc mỗi bộ phận. Chọn ngẫu nhiên một công nhân của đội. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:



a) A : “Công nhân được chọn thuộc bộ phận Trát tường”;

b) B : “Công nhân được chọn không thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái”.

Câu 51: Một đội học sinh gồm 7 bạn tham gia cuộc thi “An toàn giao thông cho học sinh trung học cơ sở” do nhà trường tổ chức. Trong đó có 5 bạn học sinh lớp 9 là: An (lớp 9A), Bình (lớp 9A), Bảo (lớp 9B), Bách (lớp 9D), Lâm (lớp 9E) và 4 bạn học sinh lớp 8 là: Minh (lớp 8A), Hà (lớp 8B),

Ngọc (lớp 8C), Lan (lớp 8E). Chọn ngẫu nhiên một thí sinh trong đội học sinh tham gia cuộc thi đó.

a) Liệt kê các cách chọn có thể thực hiện được. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Thí sinh được chọn là học sinh lớp 8";

B: "Thí sinh được chọn là học sinh lớp 9 A".

Câu 52: Một trường trung học cơ sở có 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ đạt giải cuộc thi viết thư quốc tế UPU. Bốn bạn học sinh đó được xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để nhận phần thưởng. Tính xác suất của biến cố I : "2 học sinh nữ được xếp không đứng cạnh nhau".

Câu 53: Một hộp có chứa ba viên bi vàng lần lượt ghi các số 1; 2; 3 và hai viên bi nâu lần lượt ghi các số 4; 5. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Hai viên bi được lấy ra cùng màu vàng";

B: "Hai viên bi được lấy ra khác màu".

Câu 54: Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có bốn chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất của biến cố N : "Lấy được vé xổ số không có chữ số 3".

Câu 55: Trên mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $OABC$ sao cho $A(0;3), B(4;3), C(4;0)$. Gọi Ω là tập hợp tất cả các điểm $(x;y)$ với x, y là các số nguyên và nằm bên trong (không kể trên cạnh) của hình chữ nhật $OABC$. Lấy ngẫu nhiên một điểm của tập hợp Ω . Tính xác suất của biến cố M : "Điểm $(x;y)$ của tập hợp Ω được lấy ra có $x+y < 5$ ".

Câu 56: Một hộp có chứa 10 quả cầu màu đen được đánh số từ 1 đến 10 và 20 quả cầu màu vàng được đánh số từ 11 đến 30. Lấy ngẫu nhiên một quả trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) A: "Quả cầu được lấy ra có màu đen và ghi số chia cho 3 dư 1";

b) B: "Quả cầu được lấy ra có màu vàng hoặc ghi số lẻ lớn hơn 3".

Câu 57: Có năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm và 10 cm. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Tính xác suất của biến cố E : "Ba đoạn thẳng được lấy ra lập thành ba cạnh của một tam giác".

Câu 58: Hai túi A và B chứa các tấm thẻ được đánh số. Túi A chứa 5 tấm thẻ màu đỏ được đánh số 1; 2; 3; 4; 5 và túi B chứa 4 tấm thẻ màu xanh được đánh số 1; 2; 3; 4. Trong mỗi túi A, B, hai tấm thẻ khác nhau được đánh số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên hai tấm thẻ, mỗi túi một tấm. Tính xác suất của biến cố N : "Tổng hai số trên hai tấm thẻ được lấy ra lớn hơn 6".

CHUYÊN ĐỀ 9: MỘT SỐ YẾU TỐ XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

- ✓ Có những phép thử mà tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó hoàn toàn xác định. Tuy nhiên, các kết quả xảy ra có tính ngẫu nhiên, ta không thể đoán trước được những phép thử như thế gọi là phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) và tập hợp Ω gọi là không gian mẫu của phép thử.

📌 **Chú ý:**

- Ω : đọc là ômega
- Các kết quả có thể xảy ra của phép thử có thể xuất hiện như nhau được gọi là đồng khả năng.
- Kết quả thuận lợi cho biến cố A là 1 kết quả có thể của phép thử làm cho biến cố A xảy ra.

2. Xác suất của biến cố.

- Giả thiết rằng các kết quả có thể xảy ra của một phép thử là đồng khả năng. Khi đó, xác suất của biến cố A, kí hiệu: $P(A)$, bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố A và tổng số kết quả có thể xảy ra.

$$P(A) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho A}}{\text{Tổng số kết quả có thể xảy ra}}.$$

Nhận xét: để tính xác suất của biến cố A, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra tính đồng khả năng đối với các kết quả có thể xảy ra của phép thử

Bước 2: đếm số kết quả có thể xảy ra, tức là đếm số phần tử của không gian mẫu Ω

Bước 3: Đếm số kết quả thuận lợi cho biến cố A

Bước 4: Lập tỉ số giữa kết quả thuận lợi cho biến cố A và tổng số kết quả có thể xảy ra.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Trên mặt phẳng cho năm điểm phân biệt A, B, C, D, E trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hai điểm A, B được tô màu đỏ; ba điểm C, D, E được tô màu xanh. Bạn Châu chọn ra ngẫu nhiên một điểm tô màu đỏ, sau đó chọn ngẫu nhiên một điểm tô màu xanh để nối thành một đoạn thẳng. Tính xác suất của mỗi biến cố X : “Trong hai điểm được chọn ra có điểm A ”.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là: $\Omega = \{AC; AD; AE; BC; BD; BE\}$

Không gian mẫu có 6 phần tử.

Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

+ Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố X là $AC; AD; AE$. Xác suất của biến cố X là

$$P(X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Câu 2: Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1, 2, 3,..., 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau. Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”. Tính xác suất biến cố: “Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1”.

Lời giải

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra là:

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}.$$

Gọi T: “Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1”.

Có 3 kết quả thuận lợi là: 1, 8, 15

Câu 3: Một túi đựng 5 viên bi có cùng khối lượng và kích thước như nhau, được đánh số 1; 2; 3; 4; 5. Xét phép thử: “Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ trong túi” và biến cố A: “Tích của hai số ghi trên hai viên bi lớn hơn 10” Tính xác suất của biến cố A?

Lời giải

1) Vậy xác suất của T là $P(T) = \frac{3}{20}$.

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[10; 20)$ là 45%

Tần số ghép nhóm của nhóm $[10; 20)$ là $45\% \cdot 40 = 18$.

2) Không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$$

Không gian mẫu có 11 phần tử.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A là $(3; 4); (3; 5); (4; 5)$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{3}{11}.$$

Câu 4: Hình vẽ dưới đây mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia thành 12 phần bằng nhau và ghi các số 1; 2; 3; ...; 12. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.



Xét phép thử: “Quay đĩa tròn một lần” và biến cố A: “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số là số nguyên tố”. Tính xác suất của biến cố A.

Lời giải

Ta có: không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$$

Nên số kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = 12$.

Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 2; 3; 5; 7; 11.

Nên $n(A) = 5$

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{12}$

Câu 5: Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1, 2, 3, ..., 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau. Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”. Tính xác suất biến cố: “Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1”.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Có 3 kết quả thuận lợi là: 1, 8, 15

$$\text{Vậy } P(T) = \frac{3}{20}.$$

Câu 6: Trong túi có 6 quả bóng bàn kích thước và chất liệu như nhau gồm 2 quả màu đỏ, 2 quả màu trắng, 2 quả màu xanh. Không nhìn vào túi mà lấy ra 2 quả bóng. Tính xác suất của biến cố A lấy được ít nhất một quả bóng màu đỏ.

Lời giải

Kí hiệu các quả bóng đỏ trắng xanh là $\text{Đ}_1, \text{Đ}_2, \text{X}_1, \text{X}_2, \text{T}_1, \text{T}_2$

Không gian mẫu:

$$\Omega = \{ \text{Đ}_1\text{Đ}_2, \text{X}_1\text{X}_2, \text{T}_1\text{T}_2, \text{Đ}_1\text{X}_1, \text{Đ}_1\text{X}_2, \text{Đ}_2\text{X}_1, \text{Đ}_2\text{X}_2, \text{Đ}_1\text{T}_1, \text{Đ}_1\text{T}_2, \text{Đ}_2\text{T}_1, \text{Đ}_2\text{T}_2, \text{X}_1\text{T}_1, \text{X}_1\text{T}_2, \text{X}_2\text{T}_1, \text{X}_2\text{T}_2 \}$$

Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố A là : $\text{Đ}_1\text{Đ}_2, \text{Đ}_1\text{X}_1, \text{Đ}_1\text{X}_2, \text{Đ}_2\text{X}_1, \text{Đ}_2\text{X}_2, \text{Đ}_1\text{T}_1, \text{Đ}_1\text{T}_2, \text{Đ}_2\text{T}_1, \text{Đ}_2\text{T}_2$

$$P(A) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Câu 7: Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lẻ có 2 chữ số. Xét biến cố A : “Số tự nhiên viết ra là bình phương của một số tự nhiên”.



Tính xác suất của biến cố A .

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử “Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lẻ có 2 chữ số” là:
 $\Omega = \{11; 13; 15; \dots; 97; 99\}$

Số phần tử của tập hợp Ω là: $\frac{99-11}{2} + 1 = 45$ (phần tử)

Các kết quả thuận lợi của biến cố A : “Số tự nhiên viết ra là bình phương của 1 số tự nhiên” là:
 $\{25; 49; 81\}$. Biến cố này gồm 3 phần tử.

Xác suất của biến cố A là: $3 : 45 = \frac{1}{15}$

Câu 8: Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất và có 6 mặt. Tính xác suất của biến cố gieo được mặt có số chấm là bội của 3.



Lời giải

Các kết quả có thể xảy ra khi gieo con xúc xắc là: 1; 2; 3; 4; 5; 6.
Có 2 kết quả có thể xảy ra mặt số là bội của 3 là: 3 và 6.

Xác suất của biến cố là: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Câu 9: Hình dưới đây mô tả một đĩa tròn, cân đối bằng bìa cứng được chia làm tám phần bằng nhau và ghi các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Quay đĩa tròn một lần.



Tính xác suất của các biến cố sau: “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số là ước của 8”.

Lời giải

Ta có $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, có 8 phần tử.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố: “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số là ước của 8”

là: 1; 2; 4; 8

⇒ Xác suất của biến cố: “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số là ước của 8” là: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Câu 10: Hình bên dưới mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm 12 phần bằng nhau và ghi các số 1, 2, 3, ..., 12; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.



Xét phép thử “Quay đĩa tròn một lần”. Tính xác suất của biến cố D:

- Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố.
- Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia cho 3 dư 1.

Lời giải

a) Tính xác suất của biến cố D: Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố”

Có 12 kết quả có thể của phép thử “Quay đĩa tròn 1 lần” là 1, 2, 3, ..., 12.

Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố D: “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố”

Vậy xác suất của biến cố D là $\frac{5}{12}$.

b) Tính xác suất của biến cố D: Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia cho 3 dư 1.

Có 12 kết quả có thể của phép thử “Quay đĩa tròn 1 lần” là 1, 2, 3, ..., 12.

Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố D: “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố”

Vậy xác suất của biến cố D là $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Câu 11: Một đội văn nghệ có bốn bạn, trong đó có hai bạn nữ là Dung và Ánh, hai bạn nam là Minh và Quân. Cô tổng phụ trách chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca. Xác định số kết quả thuận lợi của biến cố B: “Trong hai bạn được chọn có một bạn là Minh”

Lời giải

- Có 6 cách chọn ra hai bạn để hát song ca là: (Dung, Minh); (Dung, Quân); (Dung, Ánh); (Ánh, Minh); (Ánh, Quân); (Minh, Quân).

→ Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 6$

- Các kết quả có thể xảy ra của phép thử là đồng khả năng.

- Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: (Dung, Minh); (Ánh, Minh); (Minh, Quân).

Câu 12: Một bình đựng 12 quả cầu được đánh số từ 1 đến 12 có kích thước và khối lượng như nhau. Chọn ngẫu nhiên một quả cầu. Tính xác suất biến cố A : “Chọn được quả cầu có số chia hết cho 3” là bao nhiêu?

Lời giải

Kí hiệu: Quả cầu được đánh số từ 1 đến 12.

Không gian mẫu là $\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 11; 12\}$ suy ra $n(\Omega) = 12$

Kết quả thuận lợi của biến cố A : “Chọn được quả cầu có số chia hết cho 3” là $\{3; 6; 9; 12\}$

suy ra $n(A) = 4$

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Câu 13: Một bó hoa gồm 3 bông hoa màu đỏ và 1 bông hoa màu vàng. Bạn Trúc Linh chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Trúc Linh thực hiện.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

R : “Trong 2 bông hoa được chọn, có đúng 1 bông hoa màu đỏ”;

T : “Trong 2 bông hoa được chọn, có ít nhất 1 bông hoa màu đỏ”.

Lời giải

a) Các cách chọn có thể có là: đỏ 1 và vàng, đỏ 2 và vàng, đỏ 3 và vàng, đỏ 1 và đỏ 2, đỏ 2 và đỏ 3, đỏ 1 và đỏ 3.

b) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố R là: đỏ 1 và vàng, đỏ 2 và vàng, đỏ 3 và vàng.

Vậy $P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Có tất cả 4 kết quả thuận lợi cho biến cố T .

Vậy $P(T) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Câu 14: Bạn An là một thành viên của câu lạc bộ nhảy hiện đại khối 9 trong trường THCS. Để chọn học sinh trong CLB đó tham gia hoạt động văn nghệ chào mừng “Ngày nhà giáo Việt Nam” của trường, các học sinh trong CLB sử dụng hình thức bốc thăm với 20 lá thăm giống hệt nhau lần lượt ghi các số tự nhiên từ 1 tới 20 và được để trong hộp kín. Học sinh lấy được lá thăm ghi số chia hết cho 6 sẽ được tham gia. Bạn An là người được bốc thăm đầu tiên. Xét phép thử “Bạn An bốc ngẫu nhiên 1 lá thăm” và biến cố B : “Bạn An được tham gia hoạt động văn nghệ chào mừng Ngày nhà giáo Việt Nam của trường”. Tính xác suất của biến cố B .

Lời giải

Xét phép thử “Bạn An bốc ngẫu nhiên 1 lá thăm”.

Kết quả của phép thử là An rút được 1 lá thăm có ghi 1 số tự nhiên (trong khoảng từ 1 tới 20) từ trong hộp. Do các lá thăm giống nhau nên ***có 20 kết quả có thể đồng khả năng.***

Biến cố B: "Bạn An được tham gia hoạt động văn nghệ chào mừng Ngày nhà giáo Việt Nam của trường" tương ứng với việc An bốc được lá thăm có ghi số 6, hoặc số 12 hoặc số 18.

Do đó, ***có 3 kết quả thuận lợi của biến cố B.***

Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{3}{20} = 15\%$

Câu 15: Hình vẽ bên mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm 6 phần bằng nhau và ghi các số 1,2,3,4,5,6 ; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Xét phép thử "***Quay đĩa tròn một lần***" và biến cố A: "***Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia cho 2 dư 1***".



Tính xác suất của biến cố A.

Lời giải

Có 6 kết quả có thể của phép thử " Quay đĩa tròn một lần" là: 1,2,3,4,5,6.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A " Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia cho 2 dư 1" là 1,3,5

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Câu 16: Chọn ngẫu nhiên 1 tháng trong 6 tháng đầu năm 2022. Tính xác suất các biến cố sau:
A: " Tháng được chọn có mức độ chênh lệch không quá 15 triệu".
B: " Tháng được chọn có mức độ chênh lệch lớn hơn 16 triệu".

Lời giải

Xác suất tháng được chọn có mức độ chênh lệch không quá 15 triệu là: $\frac{1}{2}$

Xác suất tháng được chọn có mức độ chênh lệch lớn hơn 16 triệu là: $\frac{1}{3}$.

Câu 17: Một hộp chứa 4 tấm thẻ cùng loại được đánh số 2; 3; 5; 8. Bạn Phi và bạn Thanh lần lượt mỗi người lấy ra 1 tấm thẻ từ hộp (Biết trong mỗi đợt lấy thì bạn Phi lấy tấm thẻ trước và không bỏ tấm thẻ lại vào hộp). Tính xác suất của biến cố sau: M: "Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ là số lẻ".

Lời giải

Không gian mẫu: $\Omega = \{(2;3); (2;5); (2;8); (3;2); (3;5); (3;8); (5;2); (5;3); (5;8); (8;2); (8;3); (8;5)\}$. Có 12 phần tử.

Tích của các số ghi trên 2 tấm thẻ là số lẻ có 2 trường hợp là $(3;5); (5;3)$

$$\text{Vậy } P(M) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Câu 18: Một hộp có 20 thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5; ...; 20, hai thẻ khác nhau thì ghi số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có một chữ số”.

Lời giải

Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có một chữ số” là: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Vì thế xác suất của biến cố trên là: $\frac{9}{20} = 0,45$.

Câu 19: Một hộp đựng 10 viên bi được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp. Xét biến cố N : “Viên bi lấy ra có số ghi trên đó là số nguyên tố”. Tính xác suất của biến cố N .

Lời giải

Bước 1: Xác định không gian mẫu (S)

Không gian mẫu S là tất cả các kết quả có thể xảy ra khi lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp. Vì hộp có 10 viên bi được đánh số từ 1 đến 10, nên:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Số phần tử của không gian mẫu là $|S| = 10$.

Bước 2: Xác định biến cố A

Biến cố A là việc viên bi lấy ra có số ghi trên đó là số nguyên tố. Các số nguyên tố trong khoảng từ 1 đến 10 là: $\{2, 3, 5, 7\}$

Vậy biến cố A là tập hợp: $A = \{2, 3, 5, 7\}$

Số phần tử của biến cố A là $|A| = 4$.

Bước 3: Tính xác suất của biến cố A

Xác suất của biến cố A được tính bằng tỉ số giữa số phần tử của biến cố A và số phần tử của không gian mẫu S :

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Kết luận: Xác suất để lấy được một viên bi có số ghi trên đó là số nguyên tố là $\frac{2}{5}$.

Câu 20: Trong một hộp đựng 15 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 15 và không có hai tấm thẻ nào đánh số trùng nhau. An rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: “An rút được tấm thẻ đánh số chia hết cho 3 và không vượt quá 10”.

Lời giải

Số kết quả có thể xảy ra là 15

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 3 (rút được thẻ ghi số 3 hoặc 6 hoặc 9)

Xác suất của biến cố A là $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

Câu 21: Bạn Long có n tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến n . Bạn Long rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ. Biết rằng xác suất của biến cố “Lấy được tấm thẻ ghi số có một chữ số” là 0,25. Hỏi bạn Long có bao nhiêu tấm thẻ?

Lời giải

Do n tấm thẻ cùng loại nên các thẻ có cùng khả năng được chọn. Có n kết quả có thể xảy ra. Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố “Lấy được tấm thẻ ghi số có một chữ số”.

Vậy xác suất của biến cố “Lấy được tấm thẻ ghi số có một chữ số” là $\frac{9}{n}$.

Ta có: $\frac{9}{n} = 0,25$. Suy ra $n = 36$.

Vậy bạn Long có 36 tấm thẻ.

Câu 22: Một hộp đựng 20 tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: “Số ghi trên tấm thẻ là bội của 4”.

Lời giải

Kí hiệu: Tấm thẻ ghi số tương ứng từ 1 đến 20.

Không gian mẫu là:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$$

$$\text{suy ra } n(\Omega) = 20$$

Do các tấm thẻ là như nhau và được rút ngẫu nhiên nên các kết quả trên là đồng khả năng.

Kết quả thuận lợi của biến cố “Số ghi trên tấm thẻ là bội của 4” là: $\{4; 8; 12; 16; 20\}$. suy ra $n(A) = 5$

$$\text{Xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Câu 23: Một hộp có chứa ba viên bi vàng lần lượt ghi các số 1; 2; 3 và hai viên bi nâu lần lượt ghi các số 4; 5. Các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố: “Hai viên bi được lấy ra khác màu”.

Lời giải

Không gian mẫu là: $\Omega = \{\{1;2\};\{1;3\};\{1;4\};\{1;5\};\{2;3\};\{2;4\};\{2;5\};\{3;4\};\{3;5\};\{4;5\}\}$.

Do đó, tập hợp Ω có 10 phần tử.

Do các viên bi có kích thước, khối lượng như nhau và được lấy ngẫu nhiên nên các kết quả trên là đồng khả năng.

Gọi A là biến cố: “Hai viên bi được lấy ra khác màu”.

Có 6 khả năng thuận lợi của biến cố A là $\{1;4\};\{1;5\};\{2;4\};\{2;5\};\{3;4\};\{3;5\}$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Câu 24: Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1; 2; 3; ...; 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau.

Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”.

a) Viết không gian mẫu phép thử đó.

b) Tính xác suất biến cố: “Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1”.

Lời giải

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

có 20 phần tử.

b) Có 3 kết quả thuận lợi là: 1, 8, 15. Vậy: $P = \frac{3}{20}$

Câu 25: Hình bên mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm tám phần bằng nhau và ghi các số 1; 2; 3; ...; 8. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Quay đĩa tròn một lần. Tính xác suất của biến cố A: “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số lớn hơn 3”.



Lời giải

Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A: “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số lớn hơn 3” là 4; 5; 6; 7; 8.

Xác suất của biến cố A: “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số lớn hơn 3” là: $\frac{5}{8} = 0,625$

Câu 26: Một hộp có chứa 5 quả bóng có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên cùng một lúc 2 quả bóng từ hộp.

a) Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

D : “Trong 2 quả bóng lấy ra có ít nhất 1 quả bóng ghi số chẵn”.

c) Tính xác suất của biến cố D : “Trong 2 quả bóng lấy ra có ít nhất 1 quả bóng ghi số chẵn”.

Lời giải

a) Các phần tử của không gian mẫu của phép thử là:

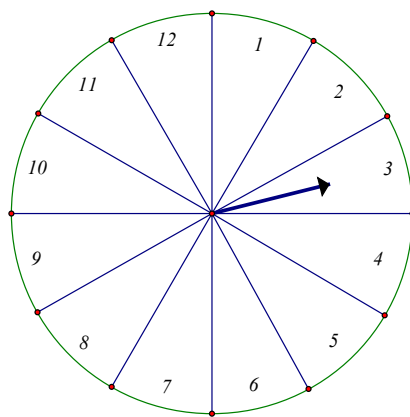
$$\{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$$

b) Các kết quả thuận lợi cho biến cố D là:

$$\{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 4); (4; 5)\}$$

c) Xác suất của biến cố D : “Trong 2 quả bóng lấy ra có ít nhất 1 quả bóng ghi số chẵn” là $\frac{7}{10}$

Câu 27: Hình vẽ dưới đây mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia thành 12 phần bằng nhau và ghi các số $1; 2; 3; \dots; 12$. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.



Xét phép thử: “Quay đĩa tròn một lần” và biến cố P : “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số là số nguyên tố”. Tính xác suất của biến cố P .

Lời giải

Có 12 kết quả có thể xảy ra khi quay ngẫu nhiên tấm bìa một lần.

$$A = \{1; 2; 3; \dots; 12\}$$

Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 2; 3; 5; 7; 11.

Tính được xác suất của biến P có là: $\frac{5}{12}$

Câu 29: Bình tung một đồng tiền xu có hai mặt sấp (S) và ngửa (N) liên tiếp ba lần, sau mỗi lần tung Bình đều ghi lại mặt xuất hiện. Tính xác suất của các biến cố A : “Mặt sấp xuất hiện đúng một lần”.

Lời giải

Xét phép thử “Tung một đồng tiền xu liên tiếp ba lần”. Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

Có 8 khả năng có thể xảy ra là: SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS; NNN.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: SNN; NSN; NNS.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{3}{8}.$$

Câu 30: Một hộp chứa 9 quả bóng màu cam và một số quả bóng màu trắng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp. Biết xác suất của biến cố “Lấy được quả bóng màu trắng” là $\frac{2}{5}$. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu trắng?



Lời giải

Gọi số quả bóng trắng trong hộp là x (đơn vị: quả bóng) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Tổng số quả bóng trong hộp là $9 + x$ (quả bóng)

Xác suất để lấy được một quả bóng màu trắng là: $P = \frac{x}{x+9}$

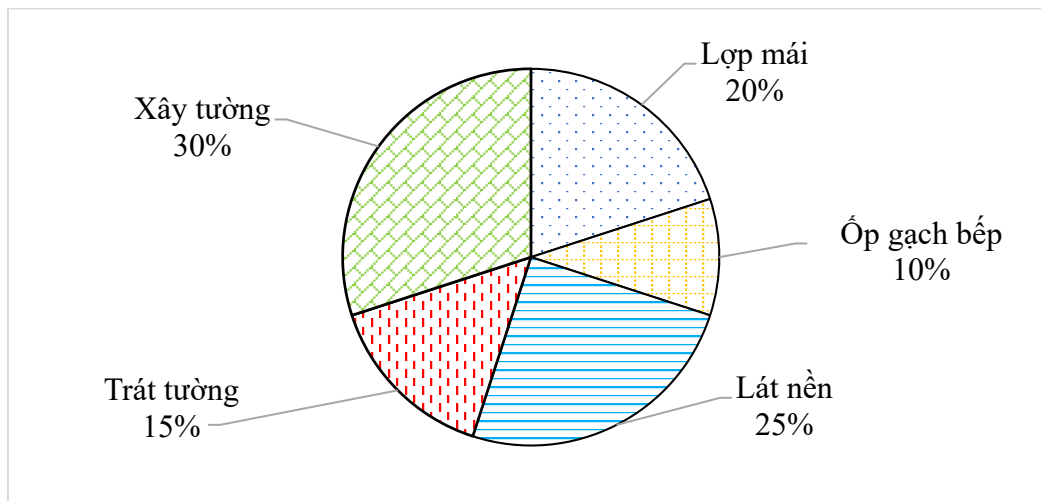
Theo đề Câu, ta có phương trình: $\frac{x}{x+9} = \frac{2}{5}$

$$5x = 2(x+9)$$

$$x = 6 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy trong hộp có 6 quả bóng màu trắng.

Câu 31: Mỗi công nhân của một đội xây dựng làm việc ở một trong năm bộ phận của đội đó là: Lợp mái, ốp gạch bếp, lát nền, trát tường, xây tường. Biểu đồ hình quạt tròn ở dưới đây thống kê tỷ lệ công nhân thuộc mỗi bộ phận. Chọn ngẫu nhiên một công nhân của đội. Tính xác suất của mỗi biến cố A : “Công nhân được chọn không thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái”.



Lời giải

Ta có số công nhân thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái chiếm: $25\% + 20\% = 45\%$ tổng số công nhân của toàn đội nên số công nhân được chọn không thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái chiếm $100\% - 45\% = 55\%$ tổng số công nhân của toàn đội. Vậy $P(A) = \frac{55}{100} = 0,55$

Câu 32: Một toà nhà chung cư có 30 tầng, được đánh số lần lượt từ 1 đến 30. Bạn Bình vào thang máy ở tầng 1, bấm chọn ngẫu nhiên số một tầng để đi lên. Tính xác suất của các biến cố A : “Bình đi lên tầng có số là một số nguyên tố”.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{2; 3; \dots; 29; 30\}$. Ω có 29 phần tử.

Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

+ Có 10 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{10}{29}$.

Câu 33: Một túi đựng 10 tấm thẻ Câu có kích thước giống nhau và được ghi số 1; 2; 3; ...; 10.

Hoa rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất của các biến cố:

A : “Rút được tấm thẻ có ghi số chia hết cho 2”;

Lời giải

Gọi E là tập tất cả các kết quả có thể xảy ra $E = \{1; 2; 3; \dots; 10\}$.

A : “Rút được tấm thẻ có ghi số chia hết cho 2”

$A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

Vậy xác suất của A là: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Câu 34: Có năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2; 4; 6; 8; 10 (cm). Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Tính xác suất của biến cố E : “Ba đoạn thẳng được lấy ra lập thành ba cạnh của một tam giác”

Lời giải

Có 5 cách chọn đoạn thẳng thứ nhất

Có 4 cách chọn đoạn thẳng thứ hai

Có 3 cách chọn đoạn thẳng thứ ba

Vậy có $5.4.3 = 60$ cách lấy ra ba đoạn thẳng từ năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2; 4; 6; 8; 10 (cm) nên số phần tử của không gian mẫu là 60

Trong 10 bộ ba đoạn thẳng đó có ba bộ ba các đoạn thẳng lập thành ba cạnh của một tam giác là $\{4\text{ cm}; 6\text{ cm}; 8\text{ cm}\}$; $\{4\text{ cm}; 8\text{ cm}; 10\text{ cm}\}$; $\{6\text{ cm}; 8\text{ cm}; 10\text{ cm}\}$

Mỗi bộ có 6 kết quả thuận lợi

Số kết quả thuận lợi cho biến cố E là $3.6 = 18$

Xác suất của biến cố E là $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$

Câu 35: Một hộp có 20 thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5; ... ; 20, hai thẻ khác nhau thì ghi số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) Biến cố A: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có chữ số tận cùng là 2”.

b) Biến cố B: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nguyên tố”.

c) Biến cố C: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có hai chữ số với tích các chữ số bằng 4”.

Lời giải

- Có 20 kết quả có thể xảy ra của phép thử “Số xuất hiện trên thẻ được lấy ra” là: 1; 2; 3; ... ; 19; 20.

a) Những kết quả thuận lợi của biến cố A: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có chữ số tận cùng là 2” là: 2; 12. Có 2 kết quả thuận lợi

Vậy xác suất của biến cố A là: $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

b) Những kết quả thuận lợi của biến cố B: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nguyên tố” là: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19. Có 8 kết quả thuận lợi

Vậy xác suất của biến cố B là: $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

b) Những kết quả thuận lợi của biến cố C: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có hai chữ số với tích các chữ số bằng 4” là: 14. Có 1 kết quả thuận lợi

Vậy xác suất của biến cố C là: $\frac{1}{20}$

Câu 36: Xét phép thử quay bánh xe và quan sát xem khi nó dừng thì mũi kim (được gắn cố định) chỉ vào ô số mấy. Tính xác suất của các biến cố A: “Kim chỉ vào ô có số là bội của 3”



Lời giải

Không gian mẫu thử có 20 phần tử

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A: “kim chỉ vào ô có số là bội của 3” là 6.

Xác suất của biến cố A là: $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Câu 38: Một túi đựng 4 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số 1;2;3;4. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi từ túi đó, viên bi lấy ra lần đầu không trả lại vào túi. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất để lấy được 2 viên bi mà tổng hai số trên hai viên bi đó là số lẻ.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là:

$\{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}.$

Số các kết quả có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là.

Gọi A là biến cố “Lấy được 2 viên bi mà tổng hai số trên hai viên bi đó là số lẻ”.

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n(A) = 8$

Xác suất của biến cố A là $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$

Câu 39: Một hộp có 12 tấm thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1;2;3;...;12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Xét phép thử “Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp” và biến cố M: “Thẻ được rút ra ghi số chia hết cho 3”. Tính xác suất của biến cố M?

Lời giải

+ Tập hợp các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử “Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp” là: $\{1;2;3;...;12\}$; có 12 kết quả

+ Các kết quả thuận lợi cho biến cố M: “thẻ được rút ra ghi số chia hết cho 3” là: $\{3;6;9;12\}$

+ Xác suất của biến cố M là: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Câu 40: Hãy tính xác suất cầu thủ được chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường có tên bắt đầu bởi chữ cái “T”.

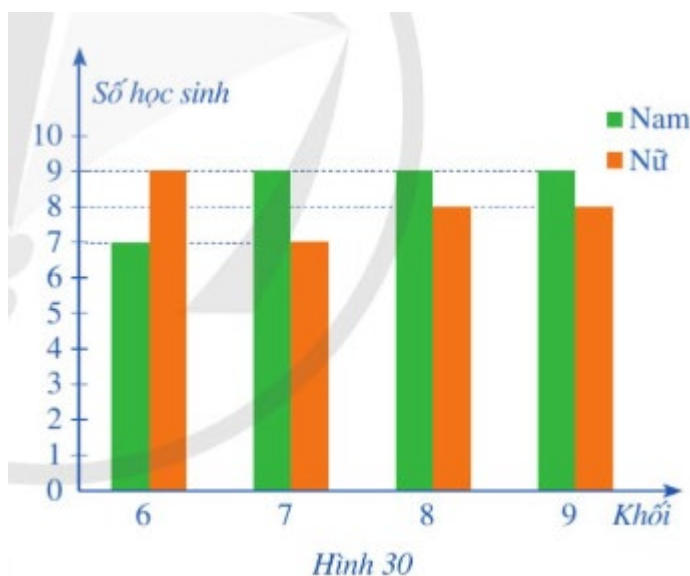
Lời giải

Tổng số học sinh bình chọn cho Tuấn và Trường là $150 + 125 = 275$

Xác suất cầu thủ được chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường có tên bắt đầu bởi chữ cái “T” là $\frac{275}{500} = 0,55$.

Vậy xác suất tìm được là 0,55

Câu 41: 1) Biểu đồ cột kép ở Hình 30 biểu diễn số lượng học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của một trường trung học cơ sở.



Chọn ngẫu nhiên một học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của trường đó. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: “Học sinh được chọn là nam”;

B: “Học sinh được chọn thuộc khối 6”;

C: “Học sinh được là nữ và không thuộc khối 9”.

2) Một hộp đựng 5 tấm thẻ ghi các số 1; 2; 3; 4; 5 Rút ngẫu nhiên lần lượt hai tấm thẻ từ hộp, tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

1. Nhìn vào biểu đồ ta thấy:

- Lớp 6 có tất cả: 7 nam + 9 nữ = 16 học sinh

- Lớp 7 có tất cả: 9 nam + 7 nữ = 16 học sinh

- Lớp 8 có tất cả: 9 nam + 8 nữ = 17 học sinh

- Lớp 9 có tất cả: 9 nam + 8 nữ = 17 học sinh

Như vậy, không gian mẫu trong Câu này có tất cả $16 + 16 + 17 + 17 = 66$ học sinh.

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $7 + 9 + 9 + 9 = 34$ học sinh

Xác suất để biến cố A xảy ra là: $P(A) = \frac{34}{66} = \frac{17}{33}$

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 16 học sinh

Xác suất để biến cố B xảy ra là: $P(B) = \frac{16}{66} = \frac{8}{33}$

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố C là: $9 + 7 + 8 = 24$ học sinh

Xác suất để biến cố C xảy ra là: $P(C) = \frac{24}{66} = \frac{12}{33}$.

2. a) Phép thử: Rút ngẫu nhiên lần lượt hai tấm thẻ từ hộp, tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

Kết quả của phép thử:

- Lần rút thứ nhất: 5 kết quả có thể xảy ra (1; 2; 3; 4; 5)

- Lần rút thứ hai: 4 kết quả có thể xảy ra (vì sau lần rút thứ nhất, chỉ còn lại 4 thẻ trong hộp).

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử:

Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử. Sử dụng cặp số (x, y) để mô tả kết quả với:

- x là số trên thẻ rút ra lần thứ nhất.

- y là số trên thẻ rút ra lần thứ hai.

	1	2	3	4	5
Lần n 2 Lần n 1					
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)
4	(4;1)	(4;2)	(4; 3)	(4;4)	(4;5)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)

Vì tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

Không gian mẫu:

$$\Omega = \left\{ (1;2); (1;3); (1;4); (1;5); (2;1); (2;3); (2;4); (2;5); (3;1); (3;2); (3;4); (3;5); (4;1); (4;2); \right. \\ \left. (4;3); (4;5); (5;1); (5;2); (5;3); (5;4) \right\}$$

Vậy không gian mẫu có 20 phần tử.

Câu 42: Nhóm học sinh tình nguyện khối 9 của một trường trung học cơ sở có 6 bạn, trong đó có 3 bạn nam là: Trung (lớp 9A); Quý (lớp 9A); Việt (lớp 9C); và 3 bạn nữ là: An (lớp 9A); Châu (lớp 9B); Hương (lớp 9D). Chọn ngẫu nhiên một bạn trong nhóm đó để tham gia hoạt động tình nguyện bên trường

a) Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra trong phép thử trên. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: “Bạn được chọn là bạn nữ”;

B: “Bạn được chọn thuộc lớp 9A”.

Lời giải

a) Các kết quả có thể xảy ra là: Trung, Quý, Việt, An, Châu, Hương.

b) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: An, Châu, Hương.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: Trung, Quý, An.

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Câu 43: Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số $1, 2, 3, \dots, 20$; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau. Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”.

a) Liệt kê các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên viên bi được lấy ra.

b) Viết không gian mẫu phép thử đó.

c) Tính xác suất biến cố: “Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1”.

Lời giải

a) Các kết quả có thể xảy ra là:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

c) Có 3 kết quả thuận lợi là 1, 8, 15

$$\text{Vậy } P(T) = \frac{3}{20}.$$

Câu 44: Một túi đựng 4 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số 1; 2; 3; 4. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi từ túi đó, viên bi lấy ra lần đầu không trả lại vào túi. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất để lấy được 2 viên bi mà tổng hai số trên hai viên bi đó là số lẻ.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là:

$$1. \Omega = \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3)\}$$

2. Số các kết quả có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là $n(\Omega) = 12$.

Gọi A là biến cố “Lấy được 2 viên bi mà tổng hai số trên hai viên bi đó là số lẻ”.

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n(A) = 8$.

Xác suất của biến cố A là $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Câu 45: Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 52; hai thẻ khác nhau thì ghi số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất các biến cố sau:

- a) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nhỏ hơn 27”.
- b) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số lớn hơn 19 và nhỏ hơn 51”.

Lời giải

a) Kết quả thuận lợi cho biến cố là những số từ 1 đến 26.

Có 26 kết quả thuận lợi cho biến cố.

Vậy $P = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

b) Kết quả thuận lợi cho biến cố là những số từ 20 đến 50.

Có $(50 - 20) : 1 + 1 = 31$ kết quả thuận lợi cho biến cố.

Vậy $P = \frac{31}{52}$.

Câu 46: Bạn Bình gieo một đồng xu cân đối và bạn Cường rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp chứa 7 tấm thẻ ghi các số 1;2;3;4;5;6;7. Tính xác suất của biến cố A sau:

“Rút được tấm thẻ ghi số 6 hoặc đồng xu xuất hiện mặt N”.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{(S;1);(S;2);(S;3);(S;4);(S;5);(S;6);(S;7)$$

$$(N;1);(N;2);(N;3);(N;4);(N;5);(N;6);(N;7)\}.$$

Không gian mẫu có 14 phần tử.

Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

+ Có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố A là

$$(S;6);(N;1);(N;2);(N;3);(N;4);(N;5);(N;6);(N;7).$$

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$.

Câu 47: Bạn Bình gieo một đồng xu cân đối và bạn Cường rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp chứa 7 tấm thẻ ghi các số 1;2;3;4;5;6;7. Tính xác suất của biến cố A sau:

“Rút được tấm thẻ ghi số 6 hoặc đồng xu xuất hiện mặt N”.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{(S;1);(S;2);(S;3);(S;4);(S;5);(S;6);(S;7) \\ (N;1);(N;2);(N;3);(N;4);(N;5);(N;6);(N;7)\}.$$

Không gian mẫu có 14 phần tử.

Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

+ Có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố A là

$$(S;6);(N;1);(N;2);(N;3);(N;4);(N;5);(N;6);(N;7).$$

$$\text{Xác suất của biến cố A là } P(A) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

Câu 48: Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số.

- Viết tập hợp Ω tất cả các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.
- Xác định kết quả thuận lợi cho biến cố B : “Số tự nhiên được viết ra chia hết cho 11”.
- Xác định kết quả thuận lợi cho biến cố C : “Số tự nhiên được viết ra chia cho 10 dư 6”.

Lời giải

$$\text{a) } \Omega = \{10; 11; 12; 13; \dots; 98; 99\}$$

b) Kết quả thuận lợi cho biến cố B : “Số tự nhiên được viết ra chia hết cho 11” là:

$$11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99$$

c) Kết quả thuận lợi cho biến cố C : “Số tự nhiên được viết ra chia cho 10 dư 6” là:

$$16; 26; 36; 46; 56; 76; 86; 96$$

Câu 49: Cho tập hợp $A = \{4; 5; 6\}$. Từ các chữ số của tập hợp A viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có 2 chữ số. Tính xác suất để số được viết có hai chữ số khác nhau.

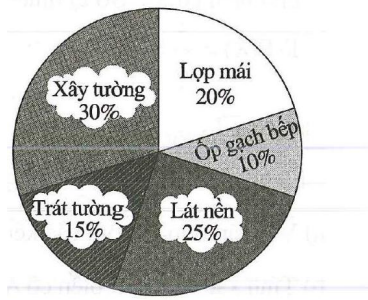
Lời giải

Không gian mẫu là $\Omega = \{44; 45; 46; 54; 55; 56; 64; 65; 66\}$, suy ra $n(\Omega) = 9$

Có 6 kết quả thuận lợi của biến cố “Số được viết có hai chữ số khác nhau” là

$$\{45; 46; 54; 56; 64; 65\}. \text{ Vậy } P = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Câu 50: Mỗi công nhân của một đội xây dựng làm việc ở một trong năm bộ phận của đội đó là: Lợp mái, Ốp gạch bếp, Lát nền, Trát tường, Xây tường. Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 19 thống kê tỉ lệ công nhân thuộc mỗi bộ phận. Chọn ngẫu nhiên một công nhân của đội. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:



- a) A: "Công nhân được chọn thuộc bộ phận Trát tường";
 b) B: "Công nhân được chọn không thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái".

Giải

a) Số công nhân thuộc bộ phận Trát tường chiếm 15% tổng số công nhân của toàn đội. Vậy

$$P(A) = \frac{15}{100} = 0,15.$$

b) Ta có số công nhân thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái chiếm: $25\% + 20\% = 45\%$ tổng số công nhân của toàn đội. Suy ra số công nhân không thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái chiếm:

$$100\% - 45\% = 55\% \text{ tổng số công nhân của toàn đội. Vậy } P(B) = \frac{55}{100} = 0,55.$$

Câu 51: Một đội học sinh gồm 7 bạn tham gia cuộc thi "An toàn giao thông cho học sinh trung học cơ sở" do nhà trường tổ chức. Trong đó có 5 bạn học sinh lớp 9 là: An (lớp 9A), Bình (lớp 9A), Bảo (lớp 9B), Bách (lớp 9D), Lâm (lớp 9E) và 4 bạn học sinh lớp 8 là: Minh (lớp 8A), Hà (lớp 8B), Ngọc (lớp 8C), Lan (lớp 8E). Chọn ngẫu nhiên một thí sinh trong đội học sinh tham gia cuộc thi đó.

- a) Liệt kê các cách chọn có thể thực hiện được. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?
 b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:
 A: "Thí sinh được chọn là học sinh lớp 8";
 B: "Thí sinh được chọn là học sinh lớp 9 A".

Lời giải

a) Các cách chọn một thí sinh có thể thực hiện được là: An (lớp 9 A); Bình (lớp 9A); Bảo (lớp 9B); Bách (lớp 9D); Lâm (lớp 9E); Minh (lớp 8A); Hà (lớp 8B); Ngọc (lớp 8C); Lan (Lớp 8E). Do đó có tất cả 9 kết quả có thể xảy ra.

b)-Các thí sinh lớp 8 có thể được chọn ra là: Minh (lớp 8 A); Hà (lớp 8 B); Ngọc (lớp 8C); Lan (lớp 8E). Vậy $P(A) = \frac{4}{9}$.

Các thí sinh lớp 9 A có thể được chọn ra là An (lớp 9A); Bình (lớp 9 A). Vậy $P(B) = \frac{2}{9}$.

Câu 52: Một trường trung học cơ sở có 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ đạt giải cuộc thi viết thư quốc tế UPU. Bốn bạn học sinh đó được xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để nhận phần thưởng. Tính xác suất của biến cố I : " 2 học sinh nữ được xếp không đứng cạnh nhau".

Lời giải

Có 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ xếp thành hàng ngang; do đó có 24 cách sắp xếp (1). Gọi hai học sinh nam là A;B và 2 học sinh nữ là C;D. Ta có 12 cách xếp để hai học sinh nữ C ; D đứng cạnh nhau đó là: ACDB; ADCB ; BCDA ; BDCA; ABCD; ABDC; BACD; BADC; CDAB; CDBA; DCAB; DCBA (2). Từ (1) và (2) ta có số cách xếp sao cho 2 học sinh nữ không đứng

cạnh nhau là: $24 - 12 = 12$ (cách). Do đó có 12 kết quả thuận lợi cho biến cố I . Vậy xác suất của biến cố I : "2 học sinh nữ được xếp không đứng cạnh nhau" là: $P(I) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Câu 53: Một hộp có chứa ba viên bi vàng lần lượt ghi các số 1; 2; 3 và hai viên bi nâu lần lượt ghi các số 4; 5. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Hai viên bi được lấy ra cùng màu vàng";

B: "Hai viên bi được lấy ra khác màu".

Lời giải

$\Omega = \{ \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{1; 4\}; \{1; 5\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{2; 5\}; \{3; 4\}; \{3; 5\}; \{4; 5\} \}$. Do đó, tập hợp Ω có 10 phần tử.

□ Các khả năng để hai viên bi được lấy ra cùng màu vàng là: $\{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}$. Vậy $P(A) = \frac{3}{10}$.

□ Các khả năng để hai viên bi được lấy ra khác màu là: $\{1; 4\}; \{1; 5\}; \{2; 4\}; \{2; 5\}; \{3; 4\}; \{3; 5\}$. Vậy $P(B) = \frac{6}{10}$.

Câu 54: Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có bốn chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất của biến cố N : "Lấy được vé xổ số không có chữ số 3".

Lời giải

Số các vé xổ số có bốn chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9 là 10^4 . Số các vé xổ số không có chữ số 3 là 9^4 . Do đó có 9^4 kết quả thuận lợi cho biến cố N . Vậy $P(N) = \frac{9^4}{10^4} = \left(\frac{9}{10}\right)^4 = (0,9)^4 = 0,6561$.

Câu 55: Trên mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $OABC$ sao cho $A(0; 3), B(4; 3), C(4; 0)$. Gọi Ω là tập hợp tất cả các điểm $(x; y)$ với x, y là các số nguyên và nằm bên trong (không kể trên cạnh) của hình chữ nhật $OABC$. Lấy ngẫu nhiên một điểm của tập hợp Ω . Tính xác suất của biến cố M : "Điểm $(x; y)$ của tập hợp Ω được lấy ra có $x + y < 5$ ".

Lời giải

Ta có $\Omega = \{A_1(1; 1); A_2(2; 1); A_3(3; 1); A_4(1; 2); A_5(2; 2); A_6(3; 2)\}$. Dễ thấy tập Ω có 6 phần tử. Trong tất cả các điểm của tập Ω , các điểm $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ mỗi điểm có hoành độ x và tung độ y thỏa mãn $x + y < 5$. Do đó có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố M . Vậy $P(M) = \frac{5}{6}$.

Câu 56: Một hộp có chứa 10 quả cầu màu đen được đánh số từ 1 đến 10 và 20 quả cầu màu vàng được đánh số từ 11 đến 30. Lấy ngẫu nhiên một quả trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) A: "Quả cầu được lấy ra có màu đen và ghi số chia cho 3 dư 1";

b) B: "Quả cầu được lấy ra có màu vàng hoặc ghi số lẻ lớn hơn 3".

Lời giải

Ta có tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với quả cầu được lấy ra từ hộp đó là: $\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 30\}$. Do đó, tập hợp Ω có 30 phần tử.

a) Các trường hợp quả cầu được lấy ra có màu đen và ghi số chia cho 3 dư 1 là: 1; 4; 7; 10. Do đó có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố A : "Quả cầu được lấy ra có màu đen và ghi số chia cho 3 dư 1". Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

b) Các trường hợp quả cầu được lấy ra có màu vàng hoặc ghi số lẻ lớn hơn 3 là: 5; 7; 9; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 29; 30. Do đó có 23 kết quả thuận lợi cho biến cố B : "Quả cầu được lấy ra có màu vàng hoặc ghi số lẻ lớn hơn 3". Vậy xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{23}{30}$.

Câu 57: Có năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm và 10 cm. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Tính xác suất của biến cố E : "Ba đoạn thẳng được lấy ra lập thành ba cạnh của một tam giác".

Lời giải

Có 10 cách lấy ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2 cm; 4 cm; 6 cm; 8 cm và 10 cm. Các cách lấy như sau: $\{2 \text{ cm}; 4 \text{ cm}; 6 \text{ cm}\}; \{2 \text{ cm}; 4 \text{ cm}; 8 \text{ cm}\}; \{2 \text{ cm}; 4 \text{ cm}; 10 \text{ cm}\}; \{2 \text{ cm}; 6 \text{ cm}; 8 \text{ cm}\}; \{2 \text{ cm}; 6 \text{ cm}; 10 \text{ cm}\}; \{2 \text{ cm}; 8 \text{ cm}; 10 \text{ cm}\}; \{4 \text{ cm}; 6 \text{ cm}; 8 \text{ cm}\}; \{4 \text{ cm}; 6 \text{ cm}; 10 \text{ cm}\}; \{4 \text{ cm}; 8 \text{ cm}; 10 \text{ cm}\}; \{6 \text{ cm}; 8 \text{ cm}; 10 \text{ cm}\}$. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là 10. Trong 10 bộ ba đoạn thẳng đó có 3 bộ ba các đoạn thẳng lập thành ba cạnh của một tam giác là: $\{4 \text{ cm}; 6 \text{ cm}; 8 \text{ cm}\}; \{4 \text{ cm}; 8 \text{ cm}; 10 \text{ cm}\}; \{6 \text{ cm}; 8 \text{ cm}; 10 \text{ cm}\}$. Do đó có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố E . Vậy $P(E) = \frac{3}{10}$.

Câu 58: Hai túi A và B chứa các tấm thẻ được đánh số. Túi A chứa 5 tấm thẻ màu đỏ được đánh số 1; 2; 3; 4; 5 và túi B chứa 4 tấm thẻ màu xanh được đánh số 1; 2; 3; 4. Trong mỗi túi A, B, hai tấm thẻ khác nhau được đánh số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên hai tấm thẻ, mỗi túi một tấm. Tính xác suất của biến cố N : "Tổng hai số trên hai tấm thẻ được lấy ra lớn hơn 6".

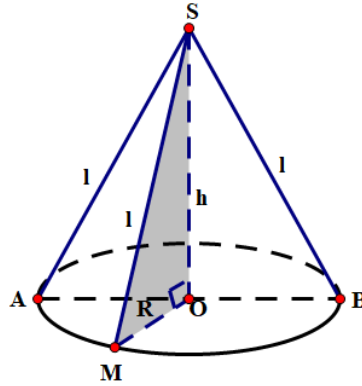
Lời giải

Ta có $\Omega = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 4); (5; 1); (5; 2); (5; 3); (5; 4)\}$. Tập Ω có 20 phần tử. Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố N là: $(3; 4); (4; 3); (4; 4); (5; 2); (5; 3); (5; 4)$. Vậy $P(N) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

CHUYÊN ĐỀ 8. NÓN – TRỤ - CẦU VÀ HÌNH KHỐI
BÀI TOÁN 1: HÌNH NÓN

1. CÔNG THỨC

Hình nón



Đường cao: $h = SO$. (SO cũng được gọi là trục của hình nón).

Bán kính đáy: $R = OA = OB = OM$.

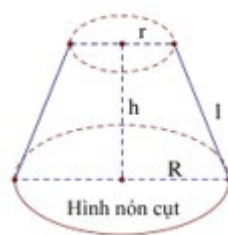
Đường sinh: $l = SA = SB = SM$.

Thể tích: $V = \frac{1}{3}h \cdot S_d = \frac{1}{3}h \cdot \pi R^2$. (liên tưởng đến thể tích khối chóp).

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi R l$.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi R l + \pi R^2$.

Hình nón cụt



Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi (R + r) l$

Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{2day} = \pi [R^2 + r^2 + (R + r)l]$$

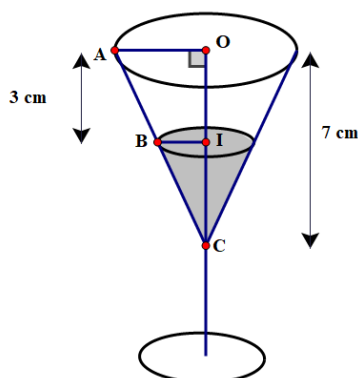
$$\text{Thể tích: } V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + rR)$$

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

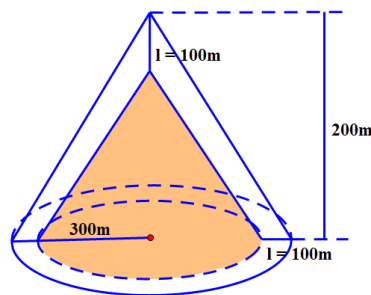
Câu 1: Một cái ly thủy tinh (như hình vẽ), phần phía trên là hình nón có chiều cao 7 cm, có đáy đường tròn bán kính 4 cm. Biết thể tích hình nón được tính theo công thức $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ với r là bán kính đường tròn đáy của hình nón; h là chiều cao của hình nón.

a) Tính thể tích của cái ly (bề dày của ly không đáng kể).

b) Biết trong ly đang chứa rượu với mức rượu đang cách miệng ly là 3 cm. Hỏi thể tích còn lại của ly rượu chiếm bao nhiêu phần của thể tích ly. (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai; lấy $\pi \approx 3,14$.)



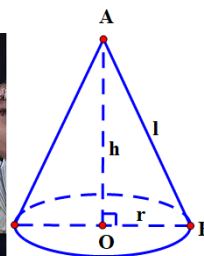
Câu 2: Vừa qua trên mạng xã hội, nhiều người dùng truyền tai nhau hình ảnh về một hiện tượng tự nhiên vô cùng kỳ lạ, xuất hiện vào sáng ngày 24/11/2022. Được biết, bức ảnh này được chụp lại núi Bà Đen, một địa điểm du lịch vô cùng nổi tiếng của Tây Ninh.



Trong hình ảnh, đỉnh núi được bao phủ bởi một lớp mây trắng xóa. Không chỉ có vậy, những đám mây còn tạo thành một lớp “vỏ” có phần kỳ bí. Nhiều người gọi đây là hiện tượng “mây vờn”, có người nhận xét trông đám mây như một chiếc nón. Ước tính chiều cao của nón là 200 m, bán kính đáy của nón là 300 m, độ dày đám mây là $l = 100\text{ m}$. Tính thể tích đám mây?

Biết thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (trong đó R là bán kính đường tròn đáy; h là chiều cao hình nón, lấy $\pi \approx 3,14$, các kết quả làm tròn chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 3: Nón lá Câu thơ là một đặc trưng của xứ Huế. Nón thường được đan bằng các loại lá khác nhau như lá cọ, lá buông, rơm, tre, lá cối, lá hồ, lá du quy điệp chuyên làm nón,. Để làm ra một chiếc nón lá người thợ thủ công lấy từng chiếc lá, làm cho phẳng rồi lấy kéo cắt chéo đầu trên, rồi lấy kim khâu chúng lại với nhau một lượt, sau đó xếp đều trên khuôn nón. Lá nón mỏng và cũng dễ hư khi gặp trời mưa nhiều nên các thợ thủ công đã tận dụng bẹ tre khô để làm lớp giữa hai lớp lá nón làm cho nón vừa cứng lại vừa bền. Đường kính của vòng tròn lớn nhất của chiếc nón khoảng 40 cm; chiều cao của chiếc nón là khoảng 19 cm. Hỏi cần bao nhiêu chiếc lá đã làm phẳng để làm thành 1 chiếc nón lá, biết rằng diện tích 1 chiếc lá làm phẳng là 72 cm^2 , diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl$ ($\pi = 3,14$; làm tròn đến hàng đơn vị)

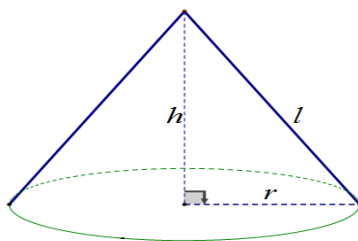


- Câu 4:** Một hình nón có bán kính đáy bằng 5cm và diện tích xung quanh là $65\pi\text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình nón đó.
- Câu 5:** Nón Huế là một hình nón có đường kính đáy bằng 40cm , độ dài đường sinh là 30cm . Người ta lát mặt xung quanh hình nón bằng ba lớp lá khô. Tính diện tích lá cần dùng để tạo nên một chiếc nón Huế như vậy (làm tròn cm^2)
- Câu 6:** Chiếc nón do làng Chuông (Thanh Oai – Hà Nội) sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30cm , đường kính bằng 40cm . Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón.
- Câu 7:** Nhân ngày 8/3, Hoa định mua một chiếc nón lá để tặng cô Anna - cô giáo dạy tiếng Anh. Chiếc nón có dạng hình nón với đường kính của đáy là 40cm , chiều cao của nón là 20cm . Hãy tính được diện tích lá cần dùng để phủ kín một lớp lên bề mặt của chiếc nón?
- Câu 8:** Nhà hát Cao Văn Lầu, Trung tâm triển lãm văn hóa nghệ thuật tỉnh Bạc Liêu có hình dáng 3 chiếc nón lá lớn nhất Việt Nam, mái nhà hình nón làm bằng vật liệu composite và được đặt hướng vào nhau. Em hãy tính thể tích của một mái nhà hình nón biết đường kính là 45m và chiều cao là 24m (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, ba hình nón có bán kính bằng nhau).



- Câu 9:** Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh là $65\pi\text{ cm}^2$. Tính thể tích của khối nón đó.
- Câu 10:** Nón lá là biểu tượng cho sự dịu dàng, bình dị, thân thiện của người Phụ nữ Việt Nam từ ngàn đời nay; nón lá Câu thơ là một đặc trưng của xứ Huế. Một chiếc nón lá hoàn thiện cần qua nhiều công đoạn từ lên rừng hái lá, rồi sấy lá, mở, ủi, chọn lá, xây độn vànhchằm, cắt lá, nức vành, cắt chỉ,... Nhằm làm đẹp và tôn vinh thêm cho chiếc nón lá xứ Huế, các nghệ nhân còn ép tranh và vài dòng thơ vào giữa hai lớp lá:

*“Ai ra xứ Huế mộng mơ
Mua về chiếc nón Câu thơ làm quà”.*



Khung của nón lá có dạng hình nón được làm bởi các thanh gỗ nối từ đỉnh tới đáy như các đường sinh (l), 16 vành nón được làm từ những thanh tre mảnh nhỏ, dẻo dai uốn thành những vòng tròn có đường kính to, nhỏ khác nhau, cái nhỏ nhất to bằng đồng xu.

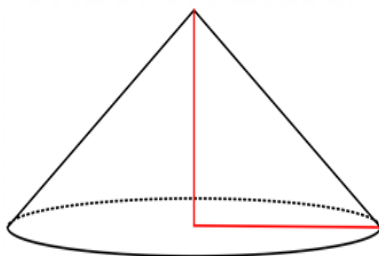
– Đường kính ($d = 2r$) của chiếc nón lá khoảng 40 (cm);

– Chiều cao (h) của chiếc nón lá khoảng 19 (cm).

a) Tính độ dài của thanh tre uốn thành vòng tròn lớn nhất của vành chiếc nón lá. (không kể phần chắp nối, tính gần đúng đến 2 chữ số thập phân, biết $\pi \approx 3,14$).

b) Tính diện tích phần lá phủ xung quanh của chiếc nón lá. (không kể phần chắp nối, tính gần đúng đến 2 chữ số thập phân). Biết diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi.R.l$.

Câu 11: Một đồng cát có dạng hình nón có chu vi đáy là 25,12 m và độ cao là 1,5 m.



a) Tính thể tích của đồng cát trên? Biết công thức tính chu vi đường tròn là $C = 2\pi R$ và công thức tính thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (trong đó R là bán kính đường tròn đáy; h là chiều cao hình nón, lấy $\pi = 3,14$)

b) Người ta dùng xe cải tiến để vận chuyển đồng cát đó đến khu xây dựng. Biết thùng chứa của xe cải tiến có dạng hình hộp chữ nhật có kích thước dài 1 m, rộng 6 dm và cao 3 dm. Trong mỗi chuyến xe, thùng xe có thể chứa nhiều hơn thể tích thực của nó là 10% để vận chuyển được nhiều cát hơn. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chuyến xe cải tiến để chuyển hết đồng cát trên?

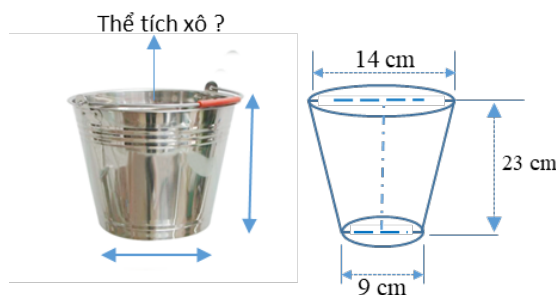
Câu 12: Bạn Nam dự định tổ chức buổi tiệc sinh nhật và chọn loại ly có phần chứa nước dạng hình nón với bán kính đáy $R = 4$ cm và độ dài đường sinh $l = 10$ cm để khách uống nước trái cây.



a) Tính thể tích phần chứa nước của ly (ghi kết quả làm tròn đến hàng đơn vị). Biết công thức thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ (với R là bán kính đáy hình nón; h là chiều cao hình nón).

b) Bạn Nam cần chuẩn bị một số hộp nước trái cây có lượng nước trong mỗi hộp là 1,2 lít. Biết rằng buổi tiệc sinh nhật có 14 người (đã bao gồm Nam). Nếu mỗi người trung bình uống 3 ly nước trái cây và lượng nước rót bằng 90% thể tích ly thì bạn Nam cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu hộp nước trái cây? Biết $1 \text{ lít} = 1000 \text{ cm}^3$.

Câu 13: Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là 14 (cm) và 9 (cm), chiều cao là 23 (cm). Tính dung tích của xô.

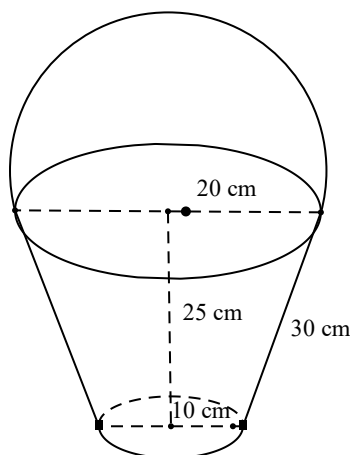


Câu 14: Một chiếc xô bằng tôn dạng hình nón cụt. Các bán kính đáy là 12 cm và 8 cm, chiều cao là 24 cm. Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép và xô không có nắp).

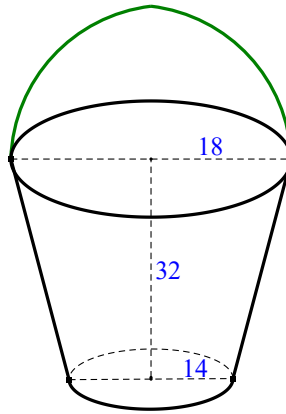
Câu 15: Người ta muốn làm một xô nước dạng chóp cụt như hình bên

a) Hãy tính diện tích tôn cần thiết để gò nên xô nước theo các kích thước đã cho (xem phần ghép mí không đáng kể)

b) Hỏi xô nước đã làm có thể chứa được tối đa bao nhiêu lít nước?

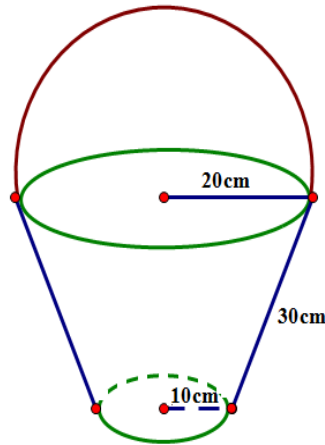


Câu 16: Một xô đựng nước có dạng hình nón cụt. Đáy xô có đường kính là 28 cm, miệng xô là đáy lớn của hình nón cụt có đường kính là 36 cm. Hỏi xô có thể chứa bao nhiêu lít nước nếu chiều cao của xô là 32 cm?



Câu 17:

- a) Người ta muốn làm một xô nước dạng hình nón cụt như hình bên, hãy tính diện tích tôn cần thiết để gò nên xô nước theo các kích thước đã cho (kể cả đáy). Cho biết phần ghép mí không đáng kể.
- b) Hỏi xô nước đã làm có thể chứa được 25 lít nước không?



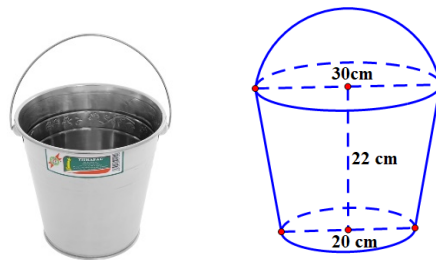
Cho biết:

- Diện tích xung quanh hình nón cụt: $S_{xq} = \pi.l.(r_1 + r_2)$

- Thể tích hình nón cụt: $V = \frac{1}{3} \pi.h.(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

Với: r_1, r_2 là các bán kính đáy; l là độ dài đường sinh; h là chiều cao.

- Câu 18:** Một xô đựng nước có dạng hình nón cụt (có các kích thước như hình). Đáy xô có đường kính là 20 cm, miệng xô là đáy lớn của hình nón cụt có đường kính 30 cm và chiều cao của xô là 22 cm.

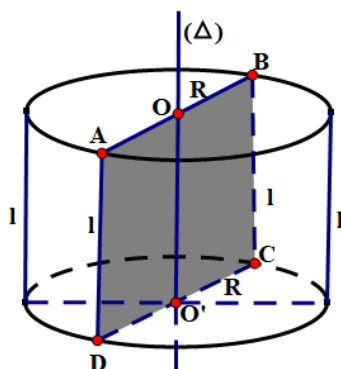


- a) Xô có thể chứa tối đa bao nhiêu lít nước? Biết rằng thể tích của hình nón cụt có R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao là: $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

b) Bác Năm dùng hai xô nước để lấy nước từ một hồ để sử dụng trong sinh hoạt và trồng trọt. Gia đình bác sử dụng trung bình mỗi ngày 150 lít nước. Hỏi bác Năm cần phải lấy ít nhất bao nhiêu lần mỗi ngày (mỗi lần xách 2 xô) để phục vụ cho sinh hoạt và trồng trọt, biết rằng mỗi lần xách nước về thì lượng nước bị hao hụt khoảng 5%.

BÀI TOÁN 2: HÌNH TRỤ

1. CÔNG THỨC



Đường cao: $h = OO'$.

Đường sinh: $l = AD = BC$. Ta có: $l = h$.

Bán kính đáy: $R = OA = OB = O'C = O'D$.

Trục (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'

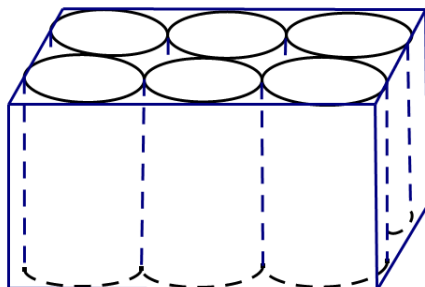
Thể tích khối trụ: $V = h.S_d = h \cdot \pi R^2$.

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi R.h$.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi R.h + 2\pi R^2$.

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

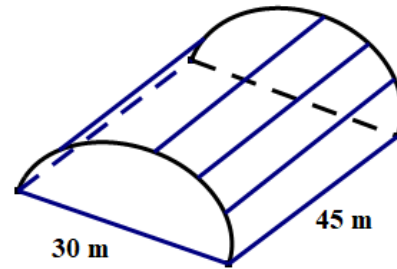
Câu 1: Trong hình vẽ, 6 lon nước có dạng hình trụ được đặt sát nhau trong một thùng các-tông (carton) để bán. Đường kính và chiều cao của mỗi lon nước lần lượt là $7cm$ và $11cm$.



a) Tìm thể tích của 6 lon nước.

b) Tính thể tích phần trống trong thùng các-tông khi đựng 6 lon nước (làm tròn đến đơn vị cm^3). Biết thể tích hình trụ được tính theo công thức: $V = R^2\pi \cdot h$ với R là bán kính đáy và h là đường cao của hình trụ)

Câu 2: Một nhà kính trồng rau sạch có dạng nửa hình trụ đường kính đáy là 30 m, chiều dài là 45 m. Người ta dùng màng nhà kính Politiv - Israel để bao quanh phần diện tích xung quanh nửa hình trụ và hai nửa đáy hình trụ. Khi thi công hao phí khoảng 10% diện tích nhà kính.

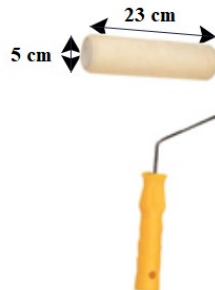


a) Tính diện tích phần màng cần cho nhà trồng rau trên (làm tròn đến hàng đơn vị). Biết $S_{xq} = 2\pi Rh$; $S_d = \pi R^2$, trong đó S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ S_d là diện tích đáy của hình trụ, h là chiều cao hình trụ, R là bán kính hình trụ.

b) Tính chi phí cần có để mua màng làm kính trên biết rằng màng có khổ rộng 2,2 m và dài 100 m có giá 13000

đồng / m^2 (chỉ bán theo cuộn).

Câu 3: Bạn An đi mua giúp bố cây lăn sơn ở cửa hàng nhà bác Toàn. Một cây lăn sơn tường có dạng một khối trụ với bán kính đáy là 5cm và chiều cao là 23cm (hình vẽ bên). Nhà sản xuất cho biết sau khi lăn 1000 vòng thì cây sơn tường có thể bị hỏng. Hỏi bạn An cần mua ít nhất mấy cây lăn sơn tường biết diện tích tường mà bố bạn An cần sơn là $100m^2$?



Câu 4: Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao 4,2 m. Trong đó, 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính 40 cm và 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính 26 cm. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là 380000 đồng / m^2 (gồm cả tiền thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột đó? (Số tiền làm tròn đến hàng nghìn).



Câu 5:

a) Một bồn nước inox hình trụ nằm ngang có kích thước đường kính là 1900mm , chiều dài 6300mm chứa được 15000 lít nước. Hỏi thể tích nước bằng bao nhiêu phần trăm thể tích bồn (làm tròn tới hàng đơn vị).



b) Hệ thống chữa cháy tự động Sprinkler (xem hình) khi nhiệt độ cháy sẽ làm những Sprinkler tự động phun nước chữa cháy, một Sprinkler bảo vệ cho phần diện tích tối đa là 12m^2 , lưu lượng tối thiểu cho một Sprinkler là 3456 lít/giờ. Theo tiêu chuẩn phòng cháy chữa cháy của Việt Nam thì 1 Sprinkler hoạt động tối thiểu trong 0,5 giờ. Giả sử tầng hầm tòa nhà chung cư Carina Plaza rộng 1200m^2 thì chung cư cần bao nhiêu bồn inox ở câu a để trữ nước cho hệ thống chữa cháy?



Câu 6: Hộp phô mai hình trụ có đường kính đáy $12,2\text{cm}$, chiều cao $2,4\text{cm}$.



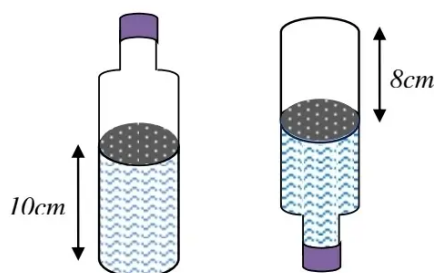
a) Biết rằng 8 miếng phô mai được xếp nằm sát nhau vừa khít trong hộp. Hỏi thể tích một miếng phô mai là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

b) Người ta gói từng miếng phô mai bằng một loại giấy đặc biệt. Giả sử phần giấy gói vừa khít miếng phô mai. Hãy tính diện tích phần giấy gói mỗi miếng phô mai. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

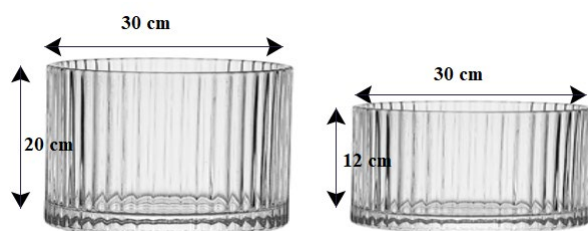
Câu 7: Các ống hút nhựa thường khó phân hủy và gây hại cho môi trường. Mỗi ngày có 60 triệu ống hút thải ra môi trường gây hậu quả nghiêm trọng. Ngày nay người ta chủ động sản xuất các loại ống hút dễ phân hủy. Tại tỉnh Đồng Tháp có cơ sở chuyên sản xuất ống hút "thân thiện với môi trường" xuất khẩu ra thị trường thế giới và được nhiều nước ưa chuộng. Ống hút được làm từ bột gạo, các màu chiết xuất từ củ dền, lá dứa, bông sen, bông diên điển,.
Một ống hút hình trụ, đường kính 12mm , bề dày ống 2mm , chiều dài ống 180mm . Em hãy tính xem để sản xuất mỗi ống thì thể tích bột gạo được sử dụng là bao nhiêu. (Biết thể tích hình trụ: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$ với R là bán kính đáy và h là chiều cao; kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2 với $\pi \approx 3,14$).



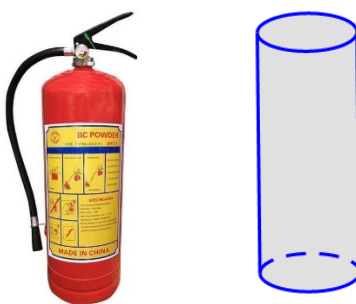
Câu 8: Một cái chai có chứa một lượng nước, phần chứa nước là hình trụ có chiều cao 10 cm, khi lật ngược chai lại thì phần không chứa nước cũng là một hình trụ có chiều cao 8 cm (như hình vẽ bên). Biết thể tích của chai là 1413 cm^3 . Tính bán kính của đáy chai (giả sử độ dày của thành chai và đáy chai không đáng kể).



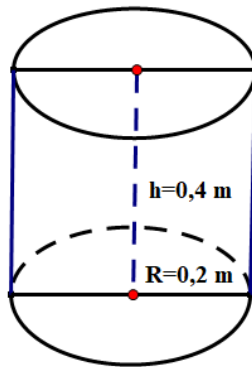
Câu 9: Có hai cốc thủy tinh hình trụ, cốc thứ nhất (hình A) có đường kính đáy là 30 cm, chiều cao 20 cm đựng đầy nước. Cốc thứ hai (hình B) có đường kính đáy là 40 cm, chiều cao là 12 cm. Hỏi nếu đổ hết nước từ cốc thứ nhất sang cốc thứ hai nước có bị tràn ra ngoài hay không? Giải thích tại sao? (xem như bề dày của đáy cốc không đáng kể).



Câu 10: Hãy tính thể tích của bình chứa cháy bột 4 kg có dạng hình trụ, biết chiều cao 49 (cm) và diện tích toàn phần là $784\pi (\text{cm}^2)$?



Câu 11: Anh Minh vừa mới xây một cái hồ trữ nước cạnh nhà có hình hộp chữ nhật kích thước $2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 1\text{ m}$. Hiện hồ chưa có nước nên anh Minh phải ra sông lấy nước. Mỗi lần ra sông anh gánh được 1 đôi nước đầy gồm hai thùng hình trụ bằng nhau có kích thước đáy 0,2 m, chiều cao 0,4 m.



a) Tính lượng nước (m^3) anh Minh đổ vào hồ sau mỗi lần gánh (ghi kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân). Biết trong quá trình gánh nước về hao hụt khoảng 10% và công thức tính thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h$.

b) Hỏi anh Minh phải gánh ít nhất bao nhiêu lần để đầy hồ? Bỏ qua thể tích thành hồ.

Câu 12: Có hai lọ thủy tinh hình trụ, lọ thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30cm , chiều cao 20cm , đựng đầy nước. Lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40cm , chiều cao 12cm . Hỏi nếu đổ hết nước từ trong lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước có bị tràn ra ngoài không? Tại sao? (Lấy $\pi \approx 3,14$)

Câu 13: Có hai lọ thủy tinh hình trụ, lọ thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30 cm , chiều cao 20 cm , đựng đầy nước. Lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40 cm , chiều cao 12 cm . Hỏi nếu đổ hết nước từ trong lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước có bị tràn ra ngoài không? Tại sao? (Lấy $\pi \approx 3,14$).

Câu 14: Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao là $1,65 \text{ m}$ và diện tích đáy là $0,42 \text{ m}^2$. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

Câu 15: Tính diện tích tôn cần thiết để làm một cái thùng hình trụ có chiều cao là 80 (cm) và đáy có diện tích là $5024 \text{ (cm}^2\text{)}$ (không tính diện tích các chỗ mối ghép và nắp thùng). Lấy $\pi = 3,14$.

Câu 16: Bạn Toán đi mua giúp bố cây lăn sơn ở cửa hàng nhà bác Học. Một cây lăn sơn tường có dạng một khối trụ với bán kính đáy là 5 cm và chiều cao là 23 cm (hình vẽ bên). Nhà sản xuất cho biết sau khi lăn 1000 vòng thì cây sơn tường có thể bị hỏng. Hỏi bạn Toán cần mua ít nhất mấy cây lăn sơn tường biết diện tích tường mà bố bạn Toán cần sơn là 100 m^2 . (Cho $\pi = 3,14$)

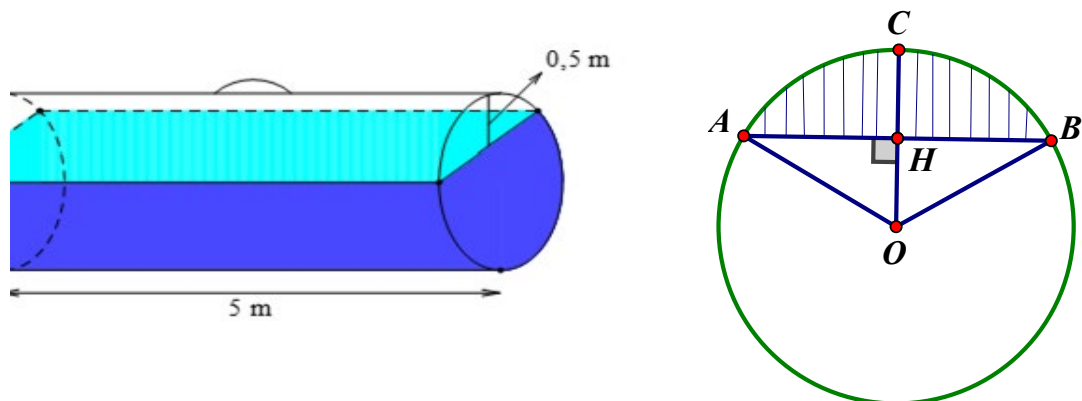


Câu 17: Tính diện tích tôn cần thiết để làm một cái thùng hình trụ có chiều cao là 80 (cm) và đáy có diện tích là $5024 \text{ (cm}^2\text{)}$ (không tính diện tích các chỗ mối ghép và nắp thùng). Lấy $\pi = 3,14$.

Câu 18: Một chai dung dịch rửa tay khô hình trụ cao 12 cm , đường kính đáy bằng 5 cm . Tính thể tích chai dung dịch đó.

- Câu 19:** Một lon coca chiều cao là $11,7\text{ cm}$; bán kính đáy bằng 3 cm . Hỏi 3 lon coca như vậy có đủ đầy một chai 1 lít không? (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)
- Câu 20:** Một tàu đánh cá khi ra khơi cần mang theo 50 thùng dầu, mỗi thùng dầu coi là hình trụ có chiều cao là 90 cm , đường kính đáy thùng là 60 cm . Hãy tính xem lượng dầu tàu phải mang theo khi ra khơi là bao nhiêu lít (lấy $\pi = 3,14$ kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?
- Câu 21:** Người ta làm một thùng chứa nước dạng hình trụ không có nắp bằng tôn. Diện tích tôn tối thiểu cần để làm thùng đó bằng $5\pi\text{ m}^2$ với $\pi \approx 3,14$. Tính thể tích của thùng đó biết chiều cao của thùng bằng đường kính đáy (làm tròn đến hai chữ số thập phân).
- Câu 22:** Lon nước ngọt hình trụ có đường kính đáy là 5 cm , chiều cao là 12 cm . Tính thể tích lon nước ngọt? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2 và lấy $\pi \approx 3,14$)
- Câu 23:** Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy là 10 cm , chiều cao bằng $\frac{6}{5}$ đường kính đáy. Tính thể tích của chiếc cốc đó.
- Câu 24:** Một téc nước hình trụ mà phía trong có đường kính đáy là $0,6\text{ m}$ chiều cao 1 m . Tính thể tích nước chứa đầy trong 45 téc như vậy.
- Câu 25:** Một lon nước ngọt hình trụ có đường kính đáy là 5 cm , độ dài trục là 12 cm . Tính diện tích toàn phần của lon nước hình trụ đó.
- Câu 26:** Một chiếc cốc thủy tinh hình trụ có đường kính đáy là 6 cm , chiều cao 12 cm . Tính lượng nước chứa được khi rót nước đầy cốc.
- Câu 27:** Một hộp sữa hình trụ có bán kính đáy là 4 cm , chiều cao là 10 cm . Tính diện tích vật liệu dùng để tạo nên một vỏ hộp sữa đó nếu tỉ lệ hao hụt là 5% ?
- Câu 28:** Một hộp sữa hình trụ có đường kính đáy là 12 cm , chiều cao là 10 cm . Tính diện tích vật liệu dùng để tạo nên vỏ hộp như vậy. (Không tính phần mép nối).
- Câu 29:** Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là $21,6\text{ cm}^2$. Nước trong lọ dâng lên $9,5\text{ mm}$. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu?
- Câu 30:** Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m , có bán kính đáy 1 m , với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5\text{ m}$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, theo đơn vị m^3)

lặt đáy được minh họa như hình vẽ sau:



Câu 31: Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 6 cm, chiều cao 9 cm. Hãy tính diện tích xung quanh của hình trụ.

Câu 32: Một bể nước hình trụ có chiều cao 2,5 m và diện tích đáy là $4,8 \text{ m}^2$. Nếu một vòi nước được đặt phía trên miệng bể và chảy được 4800 lít nước mỗi giờ thì sau bao lâu bể đầy? (Biết ban đầu bể cạn nước và bỏ qua bề dày của thành bể).

Câu 33: Một cây lăn sơn tường có dạng là một khối trụ với bán kính đáy là 5cm và chiều cao (chiều dài lăn) là 30 cm. Nhà sản xuất cho biết sau khi lăn 500 vòng thì cây sơn tường có thể sẽ bị hỏng. Tính diện tích mà cây sơn tường sơn được trước khi hỏng.

Câu 34: Một chiếc cốc có dạng hình trụ với chiều cao 8cm, bán kính đáy là 3cm. Hỏi chiếc cốc này có đựng được 180 ml sữa không? (Bỏ qua bề dày của chiếc cốc).

Câu 35: Một hộp phomai con bò cười gồm có 8 miếng, độ dày mỗi miếng là 20 mm , nếu xếp chúng lại trên một đĩa thì thành hình trụ có đường kính 100 mm .

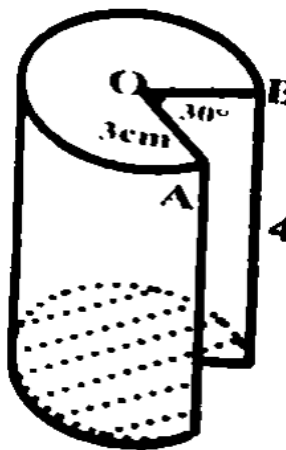
a) Tính thể tích của miếng phomai.

b) Biết khối lượng của mỗi miếng phomai là 15 g, hãy tính trọng lượng riêng của nó? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

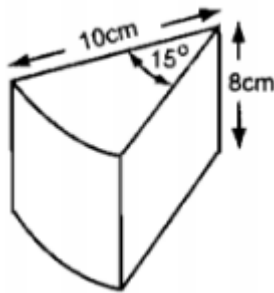
(Biết trọng lượng riêng của vật cho bởi công thức $d = \frac{P}{V}$. Trong đó trọng lượng của vật là

$P = 9,8 \cdot m$, đơn vị N , với m là khối lượng vật đơn vị kg ; V là thể tích vật, đơn vị m^3 ; d có đơn vị N / m^3).

Câu 36: Một cái bánh hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 3cm, chiều cao 4cm được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Một phần của cái bánh bị cắt rời ra theo các bán kính OA, OB và theo chiều thẳng đứng từ trên xuống dưới với $\widehat{AOB} = 30^\circ$. Tính thể tích phần còn lại của cái bánh sau khi cắt.



Câu 37: Một mẫu pho mát được cắt ra từ một khối pho mát dạng hình trụ (có các kích thước như trên hình vẽ). Tính theo gam khối lượng của mẫu pho mát biết khối lượng riêng của pho mát là $3 \text{ g} / \text{cm}^3$.



Câu 38: Một hộp thực phẩm có hình trụ. Biết diện tích của đáy là $60,24 \text{ cm}^2$.

a) Hãy tính bán kính của đường tròn đáy của hình trụ. Biết $\pi \approx 3,14$.

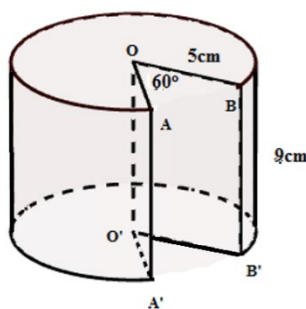
b) Biết chiều cao của hình trụ là 5cm. Hãy tính thể tích của hộp thực phẩm.

Câu 39: Một cốc nước hình trụ cao 15cm, đường kính đáy là 6cm. Lượng nước ban đầu cao 10cm. Thả vào cốc 5 viên bi hình cầu cùng đường kính 2cm. Hỏi sau khi thả 5 viên bi mực nước cách miệng cốc bao nhiêu cm? (Làm tròn lấy 2 chữ số thập phân).

Câu 40: Khi thả chìm hoàn toàn tượng một con ngựa nhỏ bằng đá vào một ly nước có dạng hình trụ thì người ta thấy nước trong ly dâng lên 1,5 cm và không tràn ra ngoài. Biết diện tích đáy của ly nước bằng 80 cm^2 . Hỏi thể tích của tượng ngựa đá bằng bao nhiêu?

Câu 41: Các ống hút nhựa thường khó phân hủy và gây hại cho môi trường. Mỗi ngày có 60 triệu ống hút thải ra môi trường gây hậu quả nghiêm trọng. Ngày nay người ta chủ động sản xuất các loại ống hút dễ phân hủy. Tại tỉnh Đồng Tháp có cơ sở chuyên sản xuất ống hút “thân thiện với môi trường” xuất khẩu ra thị trường thế giới và được nhiều nước ưa chuộng. Ống hút được làm từ bột gạo, các màu chiết xuất từ củ dền, lá dứa, bông sen, bông điên điển,... Một ống hút hình trụ, đường kính 12mm, bề dày ống 2mm, chiều dài ống 180mm. Em hãy tính xem để sản xuất mỗi ống thì thể tích bột gạo được sử dụng là bao nhiêu (Biết $\pi \approx 3,14$)

Câu 42: Một cái bánh hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 5cm, chiều cao 9cm, được đặt thẳng đứng trên một mặt bàn. Một phần của cái bánh đã bị cắt rời ra theo các bán kính OA , OB và theo chiều thẳng đứng từ trên xuống với góc AOB bằng 60° như hình vẽ. Tính thể tích phần còn lại của cái bánh sau khi bị cắt.



Câu 43: Nước giải khát thường đựng trong lon nhôm và cỡ lon phổ biến chứa được khoảng 330ml chất lỏng, được thiết kế hình trụ với chiều cao khoảng 10,2cm (phần chứa chất lỏng), đường kính đáy khoảng 6,42cm.

Nhưng hiện nay các nhà sản xuất có xu hướng tạo ra những lon nhôm với kiểu dáng cao thon hơn. Tuy chi phí sản xuất những chiếc lon cao này tốn kém hơn, nhưng nó lại dễ đánh lừa thị giác và được người tiêu dùng ưa chuộng hơn.

a/ Một lon nước ngọt cao $13,41\text{ cm}$ (phần chứa chất lỏng), đường kính đáy là $5,6\text{ cm}$. Hỏi lon nước ngọt cao này có thể chứa được hết lượng nước ngọt của một lon có cỡ phổ biến không? Vì sao? (Biết thể tích hình trụ: $V = \pi r^2 h$, với $\pi \approx 3,14$).

b/ Vì sao chi phí sản xuất chiếc lon cao tốn kém hơn chiếc lon cỡ phổ biến?

Biết diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình trụ được tính theo công thức:

$$S_{xq} = 2\pi rh \text{ và } S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}.$$

Câu 44: Thùng phuy (hay thùng phi) là một vận dụng hình ống dùng để chứa và chuyên chở chất lỏng với dung tích lớn. Mỗi thùng phuy có đường kính nắp và đáy là 584 mm , chiều cao là 876 mm . Hãy tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của một thùng phuy? (Biết công thức tính diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi rh$, diện tích toàn phần là $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$ và thể tích hình trụ là $V = \pi r^2 h$, với $\pi \approx 3,14$).



Câu 45: Có hai lọ thủy tinh hình trụ, lọ thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30 cm , chiều cao 20 cm đựng đầy nước, lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40 cm chiều cao là 12 cm . Hỏi nếu đổ hết nước từ lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước có bị tràn ra ngoài hay không? Tại sao?



Câu 46: Khi thả chìm hoàn toàn một viên xúc xắc nhỏ hình lập phương vào một ly nước có dạng hình trụ thì người ta thấy nước trong ly dâng lên $0,5\text{ cm}$ và không tràn ra ngoài. Biết diện tích đáy của ly nước bằng 250 cm^2 . Hỏi cạnh của viên xúc xắc dài bao nhiêu cm?



Câu 47: Nước giải khát thường đựng trong lon nhôm và cỡ lon phổ biến chứa được khoảng 330 ml chất lỏng, được thiết kế hình trụ với chiều cao khoảng $10,2\text{ cm}$; đường kính đáy khoảng $6,42\text{ cm}$. Nhưng hiện nay các nhà sản xuất có xu hướng tạo ra những lon nhôm với kiểu dáng cao thon hơn. Tuy chi phí sản xuất những chiếc lon cao này tốn kém hơn, nhưng nó lại dễ đánh lừa thị giác và được người tiêu dùng ưa chuộng hơn.

a) Một lon nước ngọt cao $13,41\text{ cm}$, đường kính đáy là $5,6\text{ cm}$. Hỏi lon nước ngọt cao này có thể chứa được hết lượng nước ngọt của một lon có cỡ phổ biến không? Vì sao?

Biết thể tích hình trụ: $V = \pi r^2 h$, với $\pi \approx 3,14$.

b) Biết chi phí sản xuất một chiếc lon tỉ lệ thuận với diện tích toàn phần của lon. Hỏi chi phí sản xuất chiếc lon cao tăng bao nhiêu phần trăm so với chi phí sản xuất chiếc lon cỡ phổ biến? (làm tròn 1 chữ số thập phân). Biết diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình trụ được tính theo công thức: $S_{xq} = 2\pi rh$ và $S_{\phi} = S_{xq} + 2S_d$.

Câu 48: Bún bò Huế là một đặc sản của ẩm thực Huế, tuy là bún bò nhưng ngoài thịt bò còn có thịt heo. Hương vị đặc biệt của món ăn này chủ yếu là ở vị cay nồng, mùi sả đặc trưng của nước lèo. Vốn là một hương vị Huế không lẫn vào đâu được và chính điều đó khiến người ăn cứ nhớ mãi về món ăn này. Quán nhà bạn An dùng 2 chiếc nồi hình trụ có bán kính đáy nồi là $0,3m$, chiều cao nồi là $0,8m$ để nấu nước lèo bún bò Huế. Sau khi vớt xương và các gia vị thì lượng nước lèo trong nồi chiếm 90% thể tích nồi.

a) Tính thể tích mỗi nồi nước lèo nhà bạn An nấu, biết lượng nước lèo ở mỗi nồi là như nhau (ghi kết quả đến cm^3).

b) Để bán bún bò, mỗi lần bán 1 tô bún mẹ bạn An dùng cái vá có dạng nửa hình cầu bán kính $6,5cm$ và mức đúng 1 vá cho mỗi tô. Hỏi sau khi bán hết bún bò thì quán nhà bạn An thu được bao nhiêu tiền? Biết giá 1 tô bún bò là 35000 đồng. Biết công thức tính thể tích hình trụ là

$$V = 3,14.r^2 h \text{ và công thức tính thể tích hình cầu là } V = \frac{4}{3}.3,14.R^3.$$

Câu 49: Một xe chở xăng dầu, bên trên có một bồn chứa hình trụ dài $2,6m$ và đường kính đáy là $1,4m$. Theo tiêu chuẩn an toàn thì bồn chỉ chứa được tối đa 80% thể tích khi xe di chuyển trên đường.

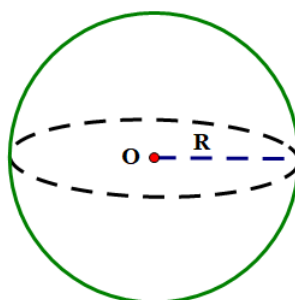


a) Mỗi chuyến xe có thể chở nhiều nhất bao nhiêu lít nhiên liệu? (cho $\pi = 3,14$).

b) Trên đường vận chuyển, xe chở xăng dầu trên phải đi qua 1 cây cầu có tải trọng 5 tấn. Biết xe khi chưa chở hàng nặng 3 tấn. Hỏi nếu muốn đi qua cây cầu đó thì xe chở tối đa bao nhiêu lít xăng? Biết khối lượng riêng của xăng là $0,713kg / \text{lít}$ (Các kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

BÀI TOÁN 3: HÌNH CẦU

1. CÔNG THỨC



Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

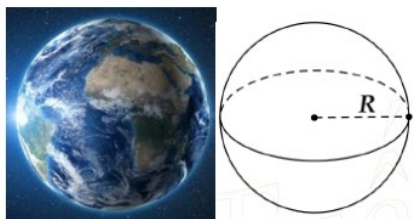
- Câu 1:** Một tháp nước có bể chứa là một hình cầu, đường kính bên trong của bể đo được là 6 mét. Người ta dự tính lượng nước đựng đầy trong bể đủ dùng cho một khu dân cư trong 5 ngày. Cho biết khu dân cư đó có 1304 người. Hỏi người ta đã dự tính mức bình quân mỗi người dùng bao nhiêu lít nước trong một ngày? (Lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)
- Câu 2:** Một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng 5cm, tính thể tích của viên bi đó. (Kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân) (Lấy $\pi \approx 3,14$).
- Câu 3:** Cần phải có ít nhất bao nhiêu lít nước để thay nước cho một chậu thủy tinh nuôi cá cảnh? (Chậu nước được xem như một phần mặt cầu đường kính 3 dm). Biết lượng nước đổ vào chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích hình cầu và 1 lít = 1 dm³.



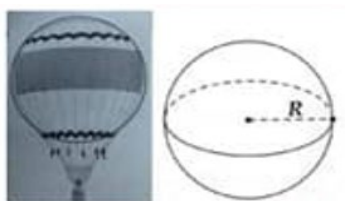
- Câu 4:** Tính diện tích da dùng để làm quả bóng hình cầu nếu không tính đến tỉ lệ hao hụt. Biết khi bơm căng thì quả bóng có đường kính là 14 cm.
- Câu 5:** Tính thể tích không khí (km³) trong tầng đối lưu của trái đất biết rằng bán kính trái đất là khoảng 6371 km và tầng đối lưu được tính từ mặt đất cho đến khoảng 10 km so với mặt đất. (làm tròn đến km³)?
- Câu 6:** Một lọ nước hoa có hình dạng bên ngoài là hình cầu làm bằng thủy tinh có đường kính 8 cm. Lòng bên trong của lọ cũng là một hình cầu nhỏ cùng tâm với hình cầu bên ngoài để chứa nước hoa. Hỏi phải làm lọ nước hoa có độ dày thành lọ là bao nhiêu cm để chứa được lượng nước hoa bên trong là 120 ml? (làm tròn đến hàng phần mười). Biết rằng lượng nước hoa được chứa trong lọ chiếm 80% thể tích của phần có thể chứa nước hoa.



- Câu 7:** Một quả bóng bàn dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi \approx 3,14$).
- Câu 8:** Một quả bóng bằng da có đường kính 22cm. Tính diện tích da cần dùng để làm quả bóng nếu không tính tỉ lệ hao hụt (lấy $\pi = 3,14$).
- Câu 9:** Trái Đất, hành tinh chúng ta đang sống, dạng hình cầu có bán kính là 6370 km. Biết rằng 29% diện tích bề mặt Trái Đất không bị bao phủ bởi nước bao gồm núi, sa mạc, cao nguyên, đồng bằng và các địa hình khác. Tính diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước. (Lấy $\pi = 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



Câu 10: Ngày 4-6-1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát ra khinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính 1 m và được làm bằng vải dù để là khinh khí cầu đó (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Diện tích mặt cầu: $S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2$

Câu 11: Một tháp nước có bể chứa hình cầu, đường kính bên trong của bể đo được là 6 m



a) Tính thể tích của tháp nước đó?

b) Người ta dự tính lượng nước đựng đầy trong bể đủ dùng cho một khu dân cư trong 5 ngày. Cho biết khu dân cư đó có 1304 người. Hỏi người ta đã dự tính mức bình quân mỗi người dùng bao nhiêu lít nước trong một ngày? (Lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 12: Một quả pha lê hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $144\pi\text{ cm}^2$. Tính thể tích quả pha lê đó.



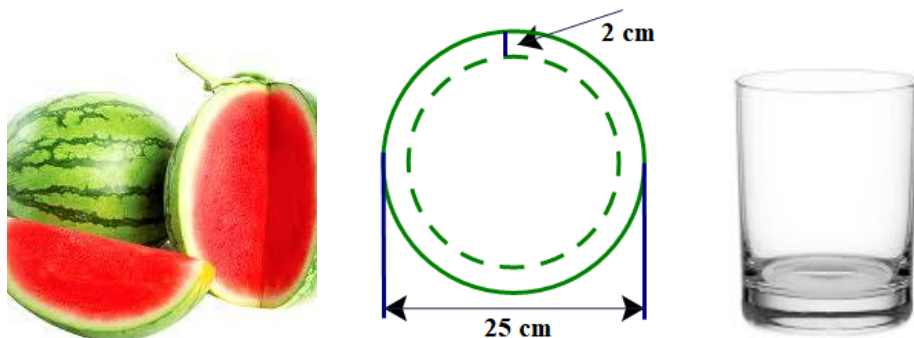
BÀI TOÁN 4: CÂU TOÁN TỔNG HỢP CÁC KHỐI LIÊN KẾT

Câu 1: Giả sử một quả dưa hấu không hạt ruột đỏ dạng hình cầu có đường kính 25 cm và phần vỏ dày 2 cm .

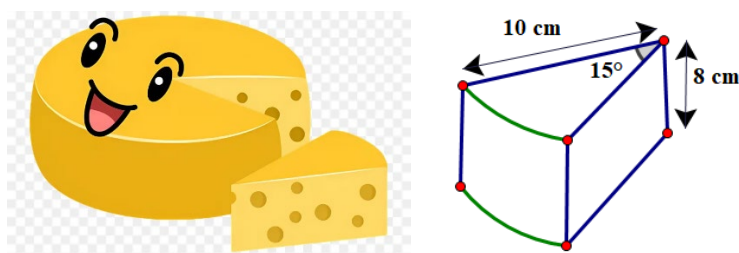
a) Coi phần ruột màu đỏ cũng có dạng hình cầu và đặc. Thể tích phần ruột màu đỏ chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích quả dưa hấu? (Kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).

Cho biết công thức tính thể tích hình cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, với R là bán kính hình cầu, $\pi = 3,14$.

b) Người ta ép phần ruột màu đỏ của quả dưa hấu trên thì thể tích nước ép thu được bằng 80% thể tích phần ruột. Nước ép dưa hấu được đựng trong một ly thủy tinh, phần lòng trong dạng hình trụ có chiều cao 10 cm và đường kính đáy lòng trong là 5 cm. Mỗi ly chỉ chứa 70% nước ép dưa hấu. Hỏi dùng nước ép của một quả dưa hấu nói trên thì làm ra bao nhiêu ly nước ép dưa hấu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 2: Hình bên là một mẫu pho mát được cắt ra từ một khối pho mát dạng hình trụ (có các kích thước như hình vẽ). Biết khối lượng riêng của pho mát là 3 g/cm^3 và công thức khối lượng riêng là $D = \frac{m}{V}$ (Trong đó $D(\text{g/cm}^3)$ là khối lượng riêng, $m(\text{g})$ là khối lượng, $V(\text{cm}^3)$ là thể tích).

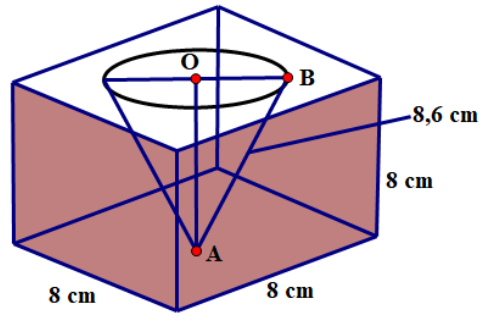


a) Hãy tính diện tích 1 mặt đáy và khối lượng của mẫu pho mát trên. Biết thể tích hình trụ $V_{\text{trụ}} = S \cdot h$. Trong đó S là diện tích 1 đáy và h là chiều cao của hình trụ.

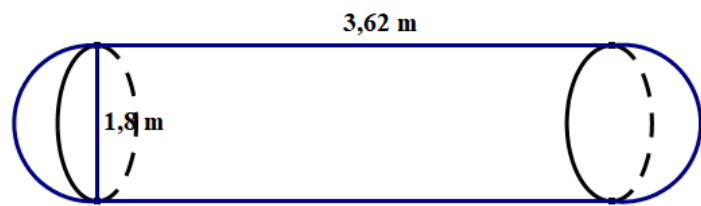
b) Chiếc hộp thực phẩm hình hộp chữ nhật có kích thước lần lượt là 189 mm, 103 mm, 101 mm (xem hình bên) có thể chứa hết phần còn lại của khối pho mát không?



Câu 3: Một khối gỗ hình lập phương cạnh 8 cm, được khoét bởi một hình nón, đường sinh $AB = 8,6 \text{ cm}$ và đỉnh chạm mặt đáy của khối gỗ (xem hình bên). Hãy tính bán kính đáy của hình nón và thể tích của khối gỗ còn lại. Biết $V_{\text{lập phương}} = a^3$ (a là cạnh hình lập phương); $V_{\text{hình nón}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ ($R = OB$ là bán kính mặt đáy, $h = OA$ là chiều cao của hình nón); $\pi \approx 3,14$.



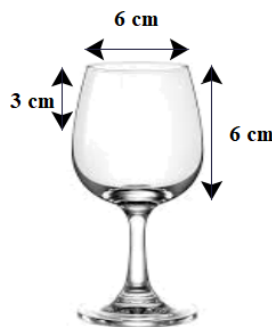
Câu 4: Một xe bồn chở nước sạch cho một khu dân cư có 200 hộ dân. Bồn xe có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên dưới, mỗi đầu của bồn xe là nửa hình cầu. Xe chở đầy nước và lượng nước chia đều cho từng hộ dân. Tính xem mỗi hộ dân được nhận bao nhiêu lít nước sạch.



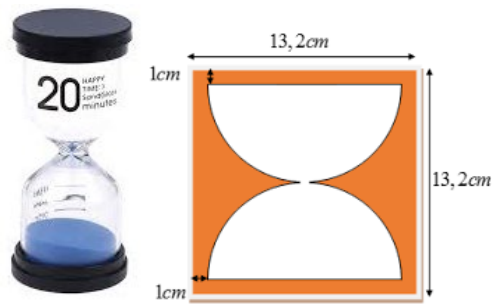
Câu 5: Một hãng sản xuất rượu vang đã đặt hàng một công ty sản xuất thủy tinh một kiểu ly có phần đựng rượu cao 6 cm, đường kính miệng ly là 6 cm. Biết rằng để tạo thành một cái ly là sự kết hợp gồm thành ly là một hình trụ cao 3 cm, phần đáy ly là một nửa khối cầu có đường kính bằng với đường kính của miệng ly.

a) Hãy tính thể tích rượu được chứa tối đa khi đổ vào ly? Cho biết: $V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h$ với r là bán kính đáy; h là chiều cao hình trụ. $V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3} \pi R^3$ với R là bán kính hình cầu.

b) Ông A cần chuẩn bị một số chai rượu vang, lượng rượu trong mỗi chai là 0,85 lít. Biết rằng trong bữa tiệc có 12 người (bao gồm luôn ông A), mỗi người uống 4 ly rượu, lượng rượu được rót bằng 60% thể tích của ly. Ông A cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu chai rượu vang?



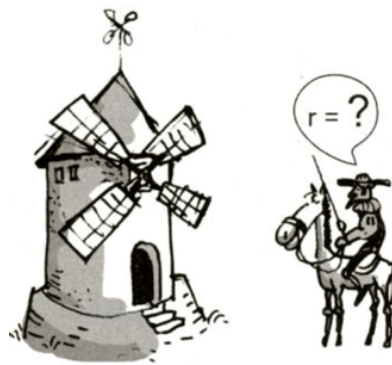
Câu 6: Một chiếc đồng hồ cát bằng thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau (Hình vẽ bên với các kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này, giả sử phần thông nhau không đáng kể). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Câu 7: Cối xay gió của Đôn-ki-hô-tê có dạng một hình nón. Chiều cao của hình nón là 42 cm và thể tích của nó là 17600 cm^3 . Em hãy giúp chàng Đôn-ki-hô-tê tính:

a) Bán kính của hình nón.

b) Diện tích gạch cần để xây ngôi nhà hình trụ bên dưới, biết nhà có chiều cao 250 cm. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất với đơn vị đề-xi-mét.



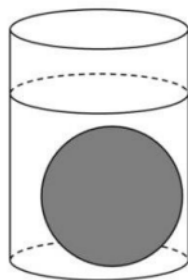
Câu 8: Một bình nước hình hộp chữ nhật có chiều rộng, chiều dài đáy bình và chiều cao lần lượt tỉ lệ với 2; 3 và 5. Biết chiều cao của bình là 20 cm.

a) Tính thể tích nước tối đa mà bình chứa được.

b) Bình nước được rót ra các ly hình trụ có đường kính đáy là 5 cm, chiều cao 12 cm. Biết bình đựng đầy nước và rót vào ly 90% thể tích của ly. Tính số ly nước chứa hết số nước từ bình.



Câu 9: Một cốc thủy tinh hình trụ đựng đầy nước có chiều cao bằng 10 cm và thể tích bằng $90\pi \text{ cm}^3$. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính lượng nước bị tràn ra khỏi cốc? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



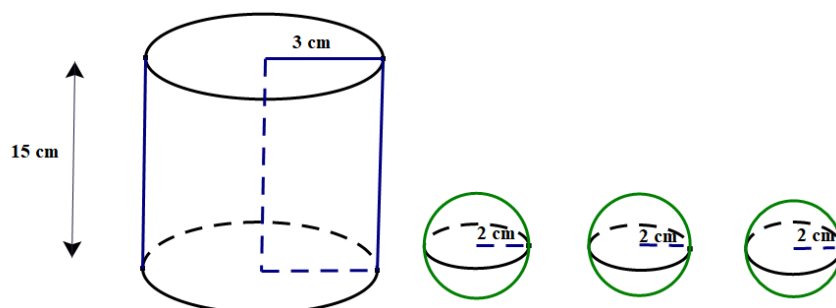
Câu 10: Một cốc nước hình trụ có chiều cao 15cm , bán kính đáy là 3cm và lượng nước ban đầu trong cốc cao 12cm . Thả chìm hoàn toàn vào cốc nước 3 viên bi thủy tinh hình cầu có cùng bán kính là 2cm . (Giả sử độ dày của thành cốc và đáy cốc không đáng kể - mô phỏng bằng hình vẽ)

a) Tính thể tích của nước trong cốc.

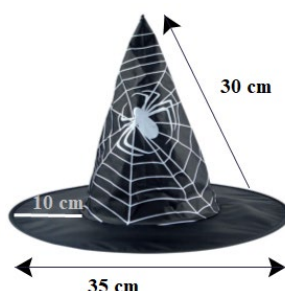
b) Khi thả 3 viên bi hình cầu vào cốc thì nước trong cốc có bị tràn ra ngoài không? Nếu có hãy tính thể tích nước bị tràn ra ngoài?

(Biết công thức tính thể tích của hình trụ là $V = \pi r^2 h$, thể tích hình cầu là $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, lấy

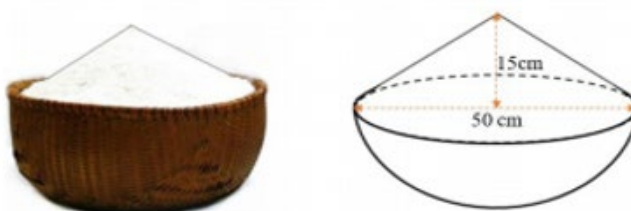
$\pi = 3,14$ các kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)



Câu 11: Một cái mũ như hình bên, gồm một hình nón và một hình vành khăn. Tính diện tích vải cần dùng để tạo ra bề mặt bên ngoài của cái mũ. Biết công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi r l$ (r là bán kính đáy hình nón, l là độ dài đường sinh hình nón), công thức tính diện tích hình vành khăn là $S = \pi (R^2 - r^2)$ (R là bán kính đường tròn lớn, r là bán kính đường tròn nhỏ) và diện tích vải bị hao hụt khi may nón là 17% (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 12: Cho hình bên là một thúng gạo vun đầy. Thúng có dạng nửa hình cầu với đường kính 50 cm, phần gạo vun lên có dạng hình nón cao 15 cm.



a) Tính thể tích phần gạo trong thúng (làm tròn đến dạng 0,1).

Biết thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, hình trụ là $V = \pi R^2 h$ và hình cầu là $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

b) Nhà Danh dùng lon sữa bò cũ có dạng hình trụ (bán kính đáy bằng 5 cm, chiều cao 15 cm) để đựng gạo mỗi ngày. Biết mỗi ngày nhà Danh ăn 5 lon gạo và mỗi lần đựng thì lượng gạo chiếm 90% thể tích lon. Hỏi với lượng gạo ở thúng trên thì nhà Danh có thể ăn nhiều nhất là bao nhiêu ngày.

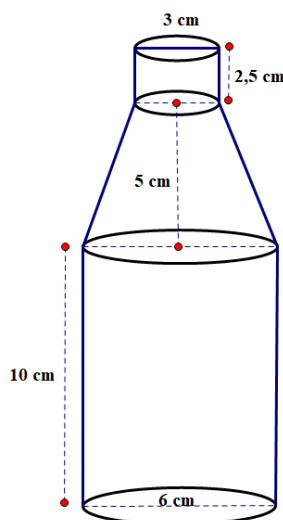


Câu 13: Một chai nước suối của hãng A được thiết kế gồm ba phần: phần miệng chai có dạng hình trụ với chiều cao 2,5 cm và đường kính đường tròn đáy là 3 cm, phần cổ chai có dạng hình nón cụt với chiều cao 5 cm, phần thân chai có dạng hình trụ với chiều cao 10 cm và đường kính đường tròn đáy là 6 cm (như hình vẽ).

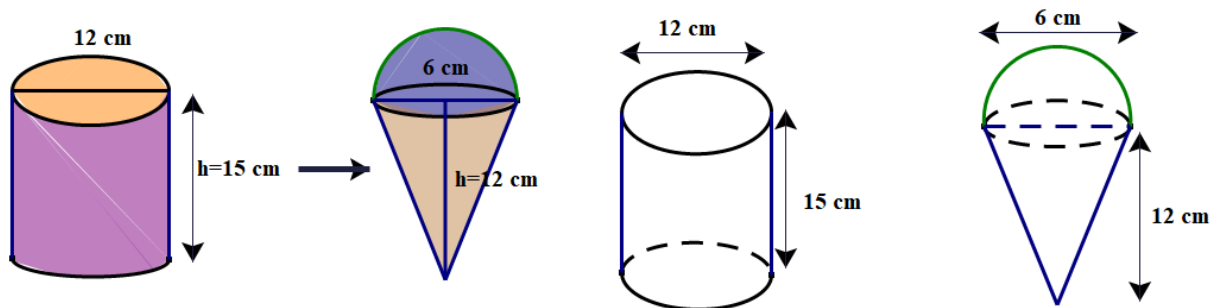
a) Tính thể tích của chai nước (làm tròn đến hàng đơn vị). Biết thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h$ với R là bán kính đường tròn đáy, h là chiều cao hình trụ, thể tích hình nón cụt là

$V = \frac{1}{3} \pi h' (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$ với r_1, r_2 là hai bán kính đường tròn đáy của hình nón cụt, h' là chiều cao của hình nón cụt.

b) Người ta đóng nước vào chai và để tránh tình trạng dẫn nổ vì nhiệt, nhà sản xuất chỉ đóng vào chai một lượng nước bằng 90% so với thể tích của chai nước. Đồng thời Viện y tế quốc gia Hoa Kỳ (NIH) khuyến nghị mỗi người nên uống đủ 2 lít nước mỗi ngày. Hỏi cần mua tối thiểu bao nhiêu chai nước suối của hãng A để đảm bảo theo khuyến nghị của NIH?



Câu 14: Một hộp kem hình trụ có đường kính 12 cm và chiều cao 15 cm đựng đầy kem. Kem sẽ được người bán hàng chia vào các bánh ốc quế hình nón có chiều cao 12 cm và đường kính 6 cm, có hình bán cầu trên đỉnh như hình vẽ.



a) Tính thể tích hộp kem hình trụ?

b) Tính số que kem có thể chia được? Biết rằng người bán hàng đã chia kem vào bánh ốc quế ít hơn 5% so với

thể tích thực của chiếc bánh như hình vẽ trên tính luôn phần bán cầu. Cho biết công thức tính thể tích:

Hình trụ là: $V = S \cdot h$ trong đó S là diện tích đáy hình trụ, h là chiều cao hình trụ

Hình nón: $V = \frac{1}{3}S \cdot h$ trong đó S là diện tích đáy hình nón, h là chiều cao hình nón

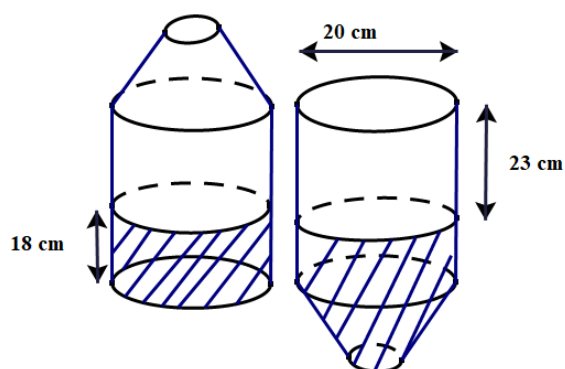
Hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ trong đó $\pi \approx 3,14$; R là bán kính hình cầu.

Câu 15: Hình bên miêu tả một chiếc bình đựng nước trong hai trường hợp: khi được đặt thẳng đứng và khi úp ngược lại. Biết phần gạch chéo trong hình là phần chứa nước và các số đo như trong hình vẽ. Biết rằng công thức tính thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 \cdot h$ với R là bán kính đáy và h là chiều cao hình trụ.

a) Hãy tính thể tích nước trong bình.

b) Hãy tính thể tích của bình?

(Các kết quả trong Câu làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



Câu 16: Một bình nước có dạng hình trụ, phần lòng bên trong của bình nước cũng có dạng hình trụ có chiều cao là 20 cm và chu vi mặt đáy là 10π cm.



a) Tính thể tích nước có thể chứa trong bình khi đổ đầy. (Kết quả chính xác hai chữ số thập phân)

b) Hiện tại mực nước có trong bình cao 10 cm, một con quạ muốn uống nước trong bình thì cần phải thả vào bình những viên sỏi có thể tích tương đương một khối cầu đường kính là 4 cm. Hỏi con quạ phải thả tối thiểu vào trong bình bao nhiêu viên sỏi như nhau để có thể uống nước trong bình, biết tầm với của mỏ con quạ là 6 cm.

Câu 17: Một người nông dân gánh một quang gánh gồm 2 thúng gạo có kích thước và chứa lượng gạo hai bên như nhau. Một thúng gạo là nửa hình cầu có đường kính là 40 cm và để có thể đem được nhiều gạo hơn, người dân mới đổ đầy gạo vào thúng và vun gạo lên trên thành một hình nón có chiều cao 15 cm.

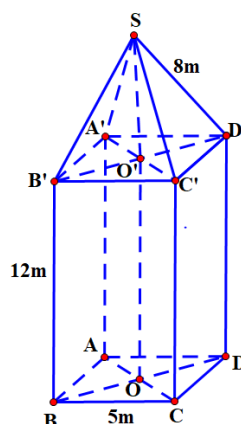
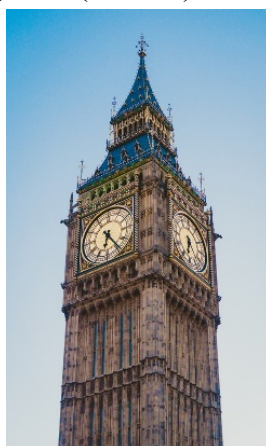


a) Tính lượng gạo trong 1 thúng của quang gánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

b) Người nông dân dùng lon sữa bò có dạng hình trụ có bán kính đáy 4 cm, chiều cao bằng 10 cm để đựng gạo vào thúng. Mỗi lần đựng được lượng gạo bằng 95% thể tích lon. Hỏi người nông dân cần đựng ít nhất bao nhiêu lon gạo để đủ gạo cho quang gánh như trên. Biết thể tích hình nón $V = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot R^2 \cdot h$; thể tích hình cầu

$$V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot R^3; \text{ thể tích hình } V = 3,14 \cdot R^2 \cdot h.$$

Câu 18: Một tháp đồng hồ có phần dưới có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh dài 5 m, chiều cao của hình hộp chữ nhật là 12 m. Phần trên của tháp có dạng hình chóp đều, các mặt bên là các tam giác cân chung đỉnh (hình vẽ). Mỗi cạnh bên của hình chóp dài 8 m.

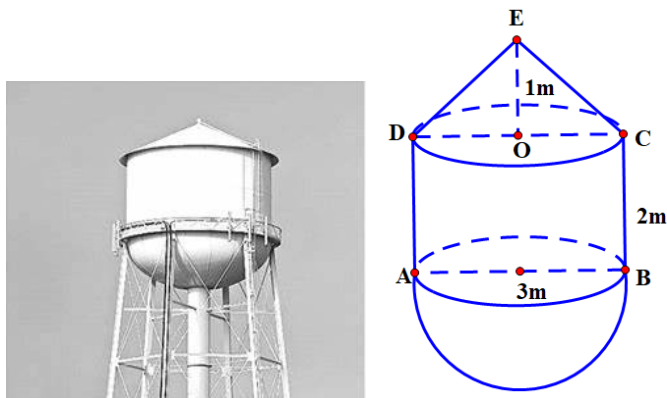


a) Tính theo mét chiều cao của tháp đồng hồ? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

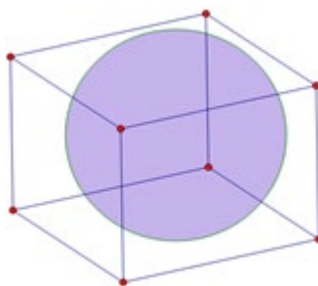
b) Cho biết thể tích của hình hộp chữ nhật được tính theo công thức $V = S \cdot h$, trong đó S là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của hình hộp chữ nhật. Thể tích của hình chóp được tính theo

công thức $V = \frac{1}{3} S.h$, trong đó S là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của hình chóp. Tính thể tích của tháp đồng hồ này? (Làm tròn đến hàng đơn vị).

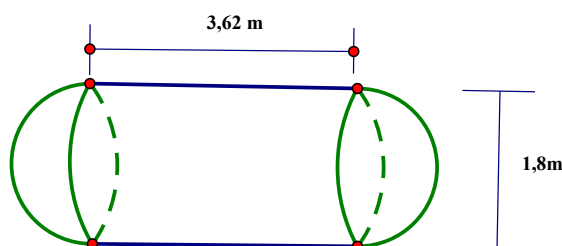
Câu 19: Cho tháp nước như hình dưới đây, tháp được thiết kế gồm thân tháp có dạng khối trụ, phần mái phía trên có dạng khối nón và đáy là nửa khối cầu. Không gian bên trong toàn bộ tháp được minh họa theo hình vẽ với đường kính đáy hình trụ, hình cầu và của hình nón đều bằng 3 m, chiều cao hình trụ là 2 m, chiều cao hình nón là 1 m. Tính thể tích của toàn bộ không gian bên trong tháp nước.



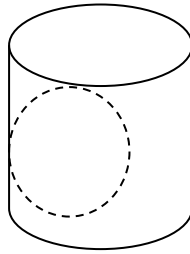
Câu 20: Đặt quả bóng vào trong một hộp hình lập phương sao cho quả bóng tiếp xúc với các mặt của hình lập phương đó. Hãy tính đường kính d của quả bóng, biết thể tích hình khối lập phương $V = 4096 \text{ cm}^3$



Câu 21: Một xe bồn chở nước sạch cho một khu chung cư có 200 hộ dân. Mỗi đầu của bồn chứa nước là 2 nửa hình cầu (có kích thước như hình vẽ). Bồn chứa đầy nước và lượng nước chia đều cho từng hộ dân. Tính xem mỗi hộ dân nhận được bao nhiêu lít nước sạch? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, lấy $\pi = 3,14$).



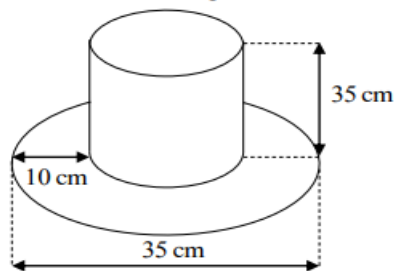
Câu 22: Một bình hình trụ có đường kính đáy 1dm, chiều cao 2dm bên trong có chứa viên bi hình cầu có bán kính 4cm. Hỏi phải đổ vào bình bao nhiêu lít nước để nước đầy bình (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Cho biết: $V_{Tru} = \pi.r^2.h$ với r là bán kính đáy; h là chiều cao hình trụ.

$$V_{Cầu} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ với } R \text{ là bán kính hình cầu}$$

Câu 23: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ.



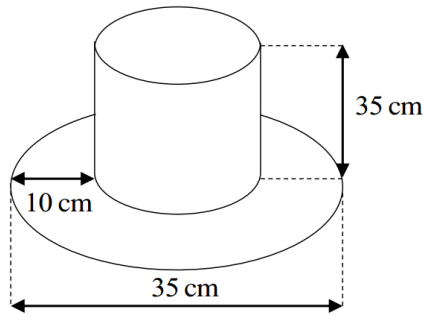
Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm cái mũ đó biết rằng vành mũ hình tròn và ống mũ hình trụ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 24: Ở hai quầy hàng A và B trong hội hoa xuân, người ta bán hai loại bắp rang bơ lần lượt được



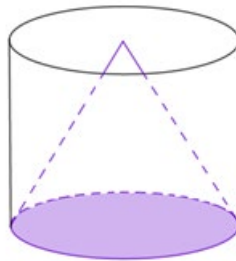
đựng trong hai loại hộp hình nón và hình trụ với thông tin về giá cả và định lượng như trong hình dưới đây. Vỏ hộp được làm bằng giấy, phần này nhận được tài trợ của công ty giấy, nên cả hai quầy không tốn chi phí làm vỏ hộp. Hỏi bạn H nên mua bắp rang bơ ở quầy A hay quầy B để bạn có lợi hơn? Tại sao?

Câu 25: Bạn đang tìm kiếm 1 món đồ mà mọi người nhìn vào biết ngay bạn là một Ảo thuật gia thực sự? Đó là một chiếc nón bằng vải nỉ được may theo phong cách cao bồi. Chiếc mũ ảo thuật này chính là sản phẩm mà bất kỳ các nhà ảo thuật gia nào cũng đều đội khi biểu diễn. Ảo thuật gia gỡ chiếc nón xuống và bắt đầu tạo nên phép màu. Đầu tiên chiếc nón huyền bí bắn ra một loạt bông tuyết với một tiếng nổ lớn. Sau tiếng nổ là một ngọn lửa bốc cháy dữ dội từ bên trong chiếc mũ, và điều đặc biệt nhất chính là từ trong ngọn lửa, chú chim bồ câu xuất hiện một cách thật là thần kỳ. Không chỉ thế bạn còn có thể lấy ra thỏ, chim hoặc 1 số vật dụng bạn yêu thích. Đặc biệt chiếc mũ này còn là một đạo cụ thích hợp cho những ai diễn sân khấu.

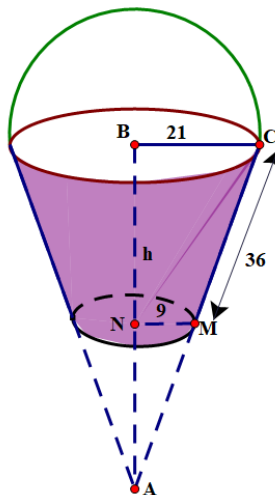


Một chiếc mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm cái mũ đó. Biết rằng vành mũ hình tròn và ống mũ hình trụ.

Câu 26: Từ một khúc gỗ hình trụ cao 15 cm , người ta tiện thành một hình nón có đáy là hình tròn bằng với đáy hình trụ, chiều cao của hình nón bằng chiều cao của hình trụ. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là 3610π (cho biết $\pi \approx 3,14$). Công thức tính thể tích hình trụ: $V = \pi R^2 h$, thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ (với R là bán kính đáy, h là chiều cao khúc gỗ). Tính thể tích khúc gỗ hình trụ, (làm tròn tới hàng đơn vị).



Câu 27: Một xô đựng nước có dạng hình nón cụt (như hình vẽ). Đáy xô có bán kính $MN = 9\text{ cm}$, miệng xô là đáy lớn của hình nón cụt có $BC = 21\text{ cm}$, chiều cao của xô là $BN = h$, $MC = 36\text{ cm}$. Biết $\widehat{ANM} = \widehat{ABC} = 90^\circ$.

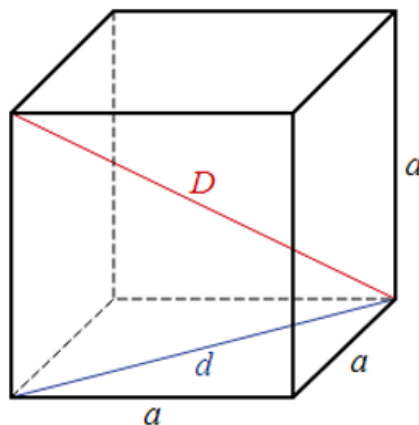


a) Hỏi xô có thể chứa bao nhiêu lít nước? (Ghi kết quả làm tròn 1 chữ số thập phân). Biết công thức tính thể tích hình nón cụt là $V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$ với h là chiều cao của hình nón cụt; r_1, r_2 lần lượt là bán kính 2 đáy của hình nón cụt.

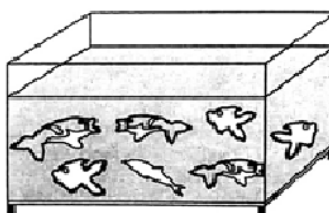
b) Bạn Nam dùng xô trên để lấy nước cho vào bể chứa hình hộp chữ nhật có kích thước $120\text{cm} \times 100\text{cm} \times 90\text{cm}$. Biết trong mỗi lần lấy nước cho vào bể chứa thì lượng nước hao hụt là 20%. Hỏi bạn Nam cần lấy ít nhất bao nhiêu lần để đầy bể chứa? Bỏ qua thể tích thành bể.

BÀI TOÁN 5. HÌNH LĂNG TRỤ- HÌNH HỘP VÀ HÌNH CHÓP

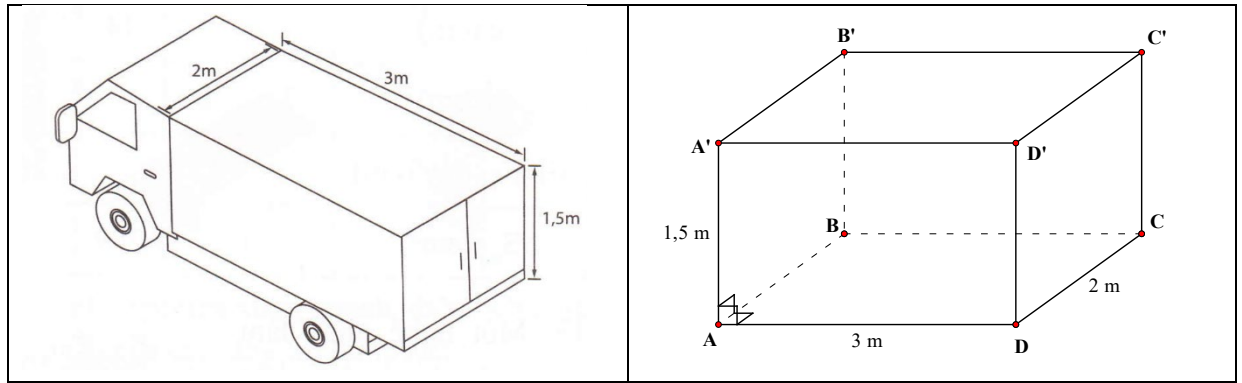
- Câu 1:** Một bồn nước inox có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 1,5 m, chiều rộng 1,2 m, chiều cao 1,4 m. Hỏi bồn nước đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).
- Câu 2:** Một thùng hình hộp chữ nhật có chiều dài là 0,5 m; chiều rộng là 0,4 m; chiều cao là 3 dm. Hỏi cần phải mua bao nhiêu lít dầu để đổ đầy thùng?
- Câu 3:** Một trường THCS ở thành phố chuẩn bị xây dựng một hồ bơi cho học sinh với kích thước như sau: chiều rộng là 6 m, chiều dài 12,5 m, chiều sâu 2 m. Sức chứa trung bình $0,5\text{ m}^3$ / người (Tính theo diện tích mặt đáy). Thiết kế như hình vẽ sau
- Hồ bơi có sức chứa tối đa bao nhiêu người?
 - Tính thể tích của hồ bơi? Lúc này người ta đổ vào trong đó 120000 lít nước. Tính khoảng cách của mực nước so với mặt hồ? ($1\text{ m}^3 = 1000\text{ lít}$)
- Câu 4:** Hình lập phương có thể tích là 125 m^3 .
- Tính độ dài d là độ dài đường chéo một mặt của hình lập phương.
 - Tính độ dài D là độ dài đường chéo của hình lập phương.



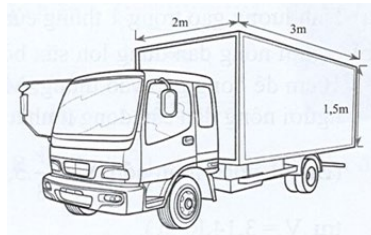
- Câu 5:** Một bình chứa nước hình hộp chữ nhật có diện tích đáy là 20 dm^2 và chiều cao 3 dm. Người ta rót hết nước trong bình ra những chai nhỏ mỗi chai có thể tích là $0,35\text{ dm}^3$ được tất cả 72 chai. Hỏi lượng nước có trong bình chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích bình?
- Câu 6:** Một bể kính nuôi cá có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 100 cm, chiều rộng 50 cm, chiều cao 60 cm. Mực nước trong bể cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao bể. Tính thể tích nước trong bể đó. (độ dày kính không đáng kể). Công thức tính thể tích nước trong bể là $V = S.h$ với S là diện tích mặt đáy bể và h là chiều cao mực nước trong bể.



Câu 7: Một xe tải đông lạnh chở hàng có thùng xe dạng hình hộp chữ nhật với kích thước như hình bên. Bạn hãy tính giúp thể tích của thùng xe và diện tích phần Inox đóng thùng xe (tính luôn sàn).



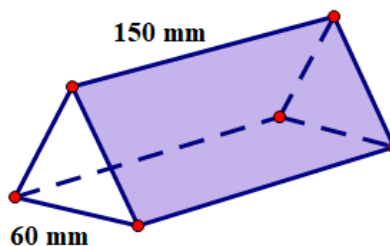
Câu 8: Một xe tải chở hàng có thùng xe dạng hình hộp chữ nhật với kích thước như hình bên.



- Hãy tính thể tích của thùng xe. (Độ dày của thùng xe xem như không đáng kể)
- Người ta xếp vào thùng xe tải trên các thùng hàng loại A có dạng hình lập phương độ dài cạnh 40 cm để vận chuyển. Hỏi mỗi lần vận chuyển xe có thể chở được nhiều nhất bao nhiêu thùng hàng loại A?

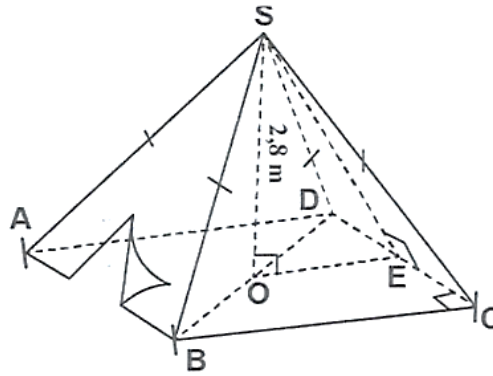
Câu 9: Một vật chặn giấy bằng nhựa đặc có dạng hình lăng trụ đứng, hai đáy là các tam giác đều cạnh 60 mm, chiều cao lăng trụ là 150 mm.

- Tính diện tích toàn phần khối lăng trụ.
- Tính thể tích khối lăng trụ (làm tròn đến mm^3), cho biết công thức tính diện tích tam giác đều là $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, trong đó a là độ dài cạnh tam giác đều.

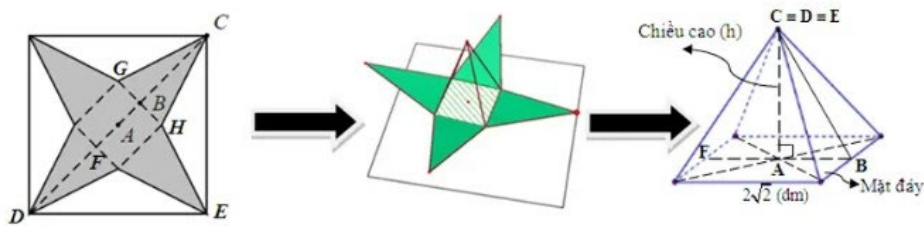


Câu 10: Một chiếc lều ở trại hè của học sinh có dạng hình chóp tứ giác đều: chiều cao SO là 2,8 mét và cạnh đáy hình vuông $ABCD$ là 3 mét. SE là chiều cao đại diện cho một mặt bên.

- Tính thể tích không khí trong chiếc lều.
- Tính diện tích vải dùng may lều (không tính các phần mép may liên kết) biết lều này không có đáy. Biết thể tích hình chóp đều cho bởi công thức $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$; trong đó, S là diện tích đáy và h là chiều cao của hình chóp đều, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.



Câu 11: Bạn An làm một mô hình kim tự tháp để giới thiệu về lịch sử Ai Cập cổ đại. Vì kích thước của khu trưng bày, An quyết định làm mô hình kim tự tháp từ một tấm bìa hình vuông có cạnh là 5 dm. Nhờ sự giúp đỡ của thầy, An đã tạo một mô hình kim tự tháp bằng cách cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có đáy là cạnh của hình vuông rồi gấp lên sau đó ghép lại để thành một hình chóp tứ giác đều như hình vẽ. An đã cắt miếng bìa trên sao cho cạnh đáy của khối chóp tứ giác đều là $2\sqrt{2}dm$. Em hãy tính thể tích của khối chóp tứ giác đều đó (theo đơn vị dm^3), biết thể tích của hình chóp được tính theo công thức: $V = \frac{1}{3}S.h$, trong đó S là diện tích mặt đáy, h là chiều cao hình chóp, các mặt bên của hình chóp tứ giác đều là các tam giác cân bằng nhau, $CB \perp GH$ và A là tâm hình vuông.



Câu 12: Người ta thiết kế chậu trồng cây có dạng hình chóp tam giác đều (như hình vẽ bên) biết cạnh đáy khoảng 20 cm, chiều cao khoảng 35 cm, độ dài trung đoạn khoảng 21 cm.

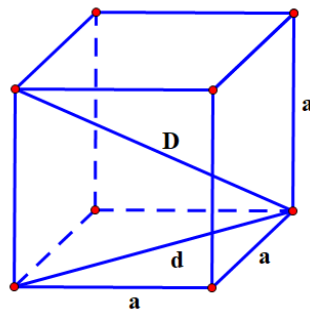


- Người ta muốn sơn các bề mặt xung quanh chậu. Hỏi diện tích bề mặt cần sơn là bao nhiêu?
- Tính thể tích của chậu trồng cây đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Biết đường cao của mặt đáy hình chóp là 17 cm.

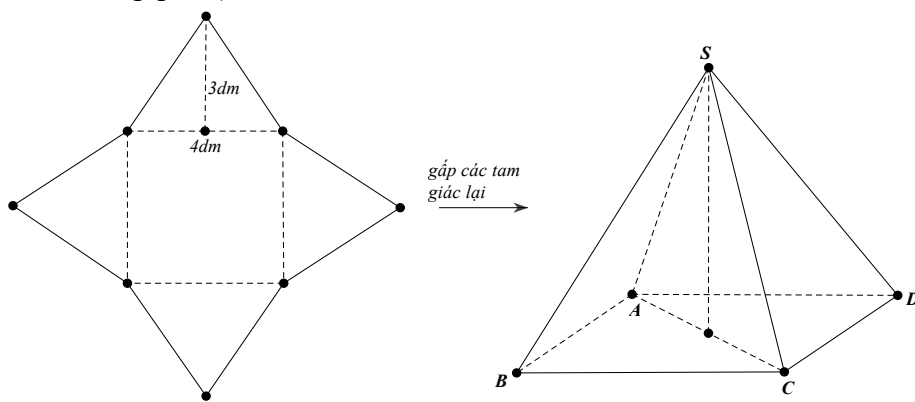
Câu 13: Một số khu vực vùng núi tỉnh Hà Giang nước ta vào mùa khô rất thiếu nước. Để có nước dùng các hộ dân ở đây đều xây dựng các hồ chứa nước mưa. Một hộ dân xây một hồ chứa nước mưa hình lập phương có thể tích là $64m^3$.

- Tính độ dài D là độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Nếu dùng 2 vòi nước cùng chảy vào bể thì mất bao nhiêu phút mới đầy bể? (làm tròn đến phút). Biết vòi 1 sau 2 giây chảy được 17 lít nước, vòi 2 sau 3 giây chảy được 35 lít nước.

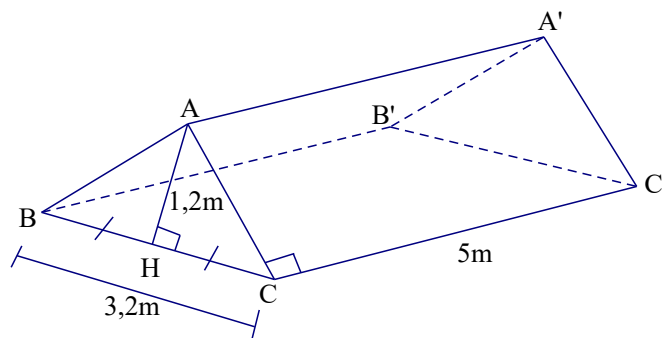


Câu 14: Để tạo một mô hình kim tự tháp (hình chóp tứ giác đều) từ tấm bìa, bạn Hạ cắt theo hình bên (ở giữa là hình vuông cạnh 4 dm, các tam giác bên ngoài là tam giác cân có chiều cao 3 dm) rồi gấp 4 tam giác lại chung đỉnh. Hãy tính thể tích của mô hình được tạo thành ở trên (làm tròn đến 1 chữ số thập phân)

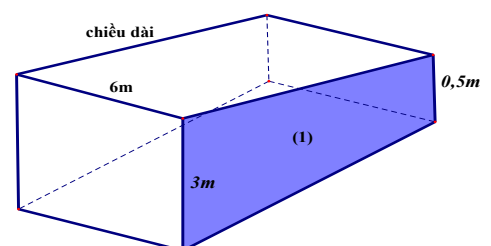


Câu 15: Một cái lều ở trại hè có dạng lăng trụ đứng tam giác (với các kích thước trên hình: $AH = 1,2 m$; $BC = 3,2 m$; $CC' = 5 m$).

- Tính thể tích khoảng không ở bên trong lều.
- Cần phải có ít nhất bao nhiêu m^2 vải bạt để dựng lều đó? (Không tính các mép và nếp gấp của lều)



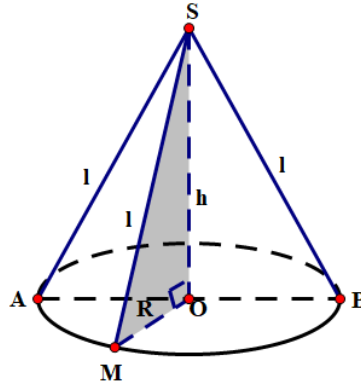
Câu 16: Một hồ bơi có dạng là một lăng trụ đứng tứ giác với đáy là hình thang vuông (mặt bên (1) của hồ bơi là 1 đáy của lăng trụ) và các kích thước như đã cho (xem hình 2). Biết rằng người ta dùng một máy bơm với lưu lượng là $42 m^3/\text{phút}$ và sẽ bơm đầy hồ mất 25 phút. Tính chiều dài của hồ.



CHUYÊN ĐỀ 8. NÓN – TRỤ - CẦU VÀ HÌNH KHỐI
BÀI TOÁN 1: HÌNH NÓN

1. CÔNG THỨC

Hình nón



Đường cao: $h = SO$. (SO cũng được gọi là trục của hình nón).

Bán kính đáy: $R = OA = OB = OM$.

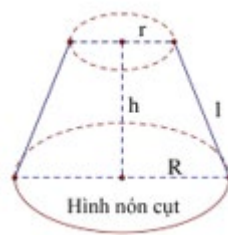
Đường sinh: $l = SA = SB = SM$.

Thể tích: $V = \frac{1}{3}h \cdot S_d = \frac{1}{3}h \cdot \pi R^2$. (liên tưởng đến thể tích khối chóp).

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi R l$.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi R l + \pi R^2$.

Hình nón cụt



Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi (R + r) l$

Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{2day} = \pi [R^2 + r^2 + (R + r)l]$$

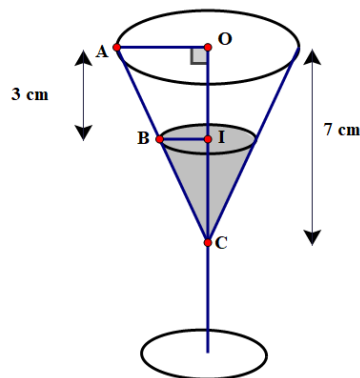
$$\text{Thể tích: } V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + rR)$$

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một cái ly thủy tinh (như hình vẽ), phần phía trên là hình nón có chiều cao 7 cm, có đáy đường tròn bán kính 4 cm. Biết thể tích hình nón được tính theo công thức $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ với r là bán kính đường tròn đáy của hình nón; h là chiều cao của hình nón.

a) Tính thể tích của cái ly (bề dày của ly không đáng kể).

b) Biết trong ly đang chứa rượu với mức rượu đang cách miệng ly là 3 cm. Hỏi thể tích còn lại của ly rượu chiếm bao nhiêu phần của thể tích ly. (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai; lấy $\pi \approx 3,14$.)



Lời giải

a) Thể tích của cái ly: $V_1 = \frac{1}{3} \pi OA^2 \cdot OC = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 7 = \frac{112}{3} \pi \approx 117,23 (\text{cm}^3)$

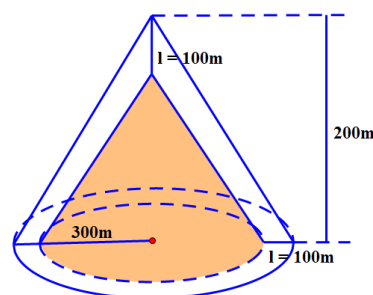
b) Ta có: $IB \parallel OA \Rightarrow \frac{CI}{CO} = \frac{IB}{OA}$ (hệ quả của định lý Thales) $\Rightarrow IB = \frac{CI \cdot OA}{CO} = \frac{(7-3) \cdot 4}{7} = \frac{16}{7}$

Thể tích rượu có trong ly: $V_2 = \frac{1}{3} \pi IB^2 \cdot CI = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{16}{7}\right)^2 \cdot 4 = \frac{1024}{147} \pi (\text{cm}^3)$

Thể tích còn lại trong ly (phần không chứa rượu): $V_3 = V_1 - V_2 = \frac{112}{3} \pi - \frac{1024}{147} \pi = \frac{1488}{49} \pi$

Vậy thể tích còn lại của ly rượu chiếm $\frac{V_3}{V_1} \cdot 100\% \approx 81,34\%$ thể tích ly.

Câu 2: Vừa qua trên mạng xã hội, nhiều người dùng truyền tai nhau hình ảnh về một hiện tượng tự nhiên vô cùng kỳ lạ, xuất hiện vào sáng ngày 24/11/2022. Được biết, bức ảnh này được chụp lại núi Bà Đen, một địa điểm du lịch vô cùng nổi tiếng của Tây Ninh.



Trong hình ảnh, đỉnh núi được bao phủ bởi một lớp mây trắng xóa. Không chỉ có vậy, những đám mây còn tạo thành một lớp “vỏ” có phần kỳ bí. Nhiều người gọi đây là hiện tượng “mây vờn”, có người nhận xét trông đám mây như một chiếc nón. Ước tính chiều cao của nón là 200 m, bán kính đáy của nón là 300 m, độ dày đám mây là $l = 100 \text{ m}$. Tính thể tích đám mây?

Biết thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (trong đó R là bán kính đường tròn đáy; h là chiều cao hình nón, lấy $\pi \approx 3,14$, các kết quả làm tròn chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

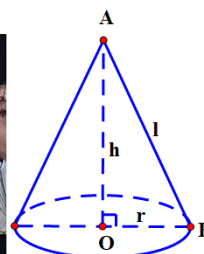
$$\text{Thể tích hình nón lớn: } V_{\text{lon}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 300^2 \cdot 200 = 18840000 \text{ (m}^3\text{)}$$

Thể tích hình nón nhỏ:

$$V_{\text{nhỏ}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot (300-100)^2 \cdot (200-100) = \frac{12560000}{3} \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\text{Thể tích đám mây là: } V_{\text{mây}} = 18840000 - \frac{12560000}{3} = \frac{43960000}{3} \approx 14653333,3 \text{ (m}^3\text{)}$$

Câu 3: Nón lá Câu thơ là một đặc trưng của xứ Huế. Nón thường được đan bằng các loại lá khác nhau như lá cọ, lá buông, rợ, tre, lá cối, lá hồ, lá du quy điệp chuyên làm nón,. Để làm ra một chiếc nón lá người thợ thủ công lấy từng chiếc lá, làm cho phẳng rồi lấy kéo cắt chéo đầu trên, rồi lấy kim khâu chúng lại với nhau một lượt, sau đó xếp đều trên khuôn nón. Lá nón mỏng và cũng dễ hư khi gặp trời mưa nhiều nên các thợ thủ công đã tận dụng bẹ tre khô để làm lớp giữa hai lớp lá nón làm cho nón vừa cứng lại vừa bền. Đường kính của vòng tròn lớn nhất của chiếc nón khoảng 40 cm; chiều cao của chiếc nón là khoảng 19 cm. Hỏi cần bao nhiêu chiếc lá đã làm phẳng để làm thành 1 chiếc nón lá, biết rằng diện tích 1 chiếc lá làm phẳng là 72 cm^2 , diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl$ ($\pi = 3,14$; làm tròn đến hàng đơn vị)



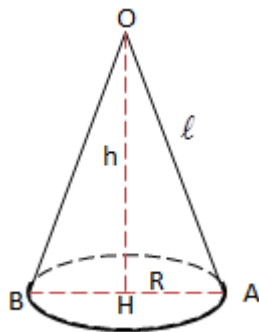
Lời giải

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón là: } S_{xq} = \pi rl = 3,14 \cdot \frac{40}{2} \cdot 19 \approx 1193 \text{ cm}^2$$

Số lượng chiếc lá phẳng cần là: $1193 : 72 \approx 17$ (chiếc)

Câu 4: Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh là $65\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

Lời giải



Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi Rl = \pi 5l$

Theo đề Câu, ta có $S_{xq} = 65\pi \Rightarrow 65\pi = \pi \cdot 5 \cdot l \Leftrightarrow l = 13 \text{ cm}$

Gọi H là tâm của đường tròn đáy, AB là đường kính của (H), O là đỉnh của hình nón.

Xét $\triangle OHA$ vuông tại H, có:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow OH = 12 \text{ cm}$$

Thể tích của hình nón là: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 5: Nón Huế là một hình nón có đường kính đáy bằng 40cm , độ dài đường sinh là 30cm . Người ta lát mặt xung quanh hình nón bằng ba lớp lá khô. Tính diện tích lá cần dùng để tạo nên một chiếc nón Huế như vậy (làm tròn cm^2)

Lời giải

Chiếc nón Huế là một hình nón có đường kính đáy $d = 40(\text{cm})$, nên bán kính đáy

$$R = \frac{d}{2} = \frac{40}{2} = 20(\text{cm})$$

Độ dài đường sinh: $l = 30(\text{cm})$

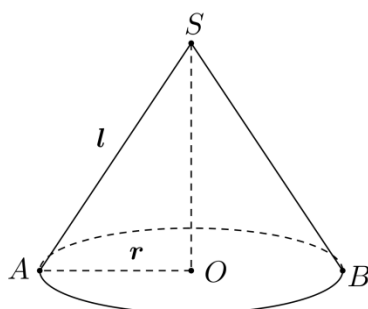
Vậy diện tích xung quanh của hình nón này là: $S = \pi Rl = 3,14 \cdot 20 \cdot 30 = 1884(\text{cm}^2)$

Vì người ta lợp nón bằng 3 lớp lá, nên diện tích lá cần dùng để tạo nên một chiếc nón Huế sẽ là: $1884 \cdot 3 = 5652(\text{cm}^2)$.

Câu 6: Chiến nón do làng Chuông (Thanh Oai – Hà Nội) sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30cm , đường kính bằng 40cm . Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón.

Lời giải

Minh họa hình nón như hình vẽ dưới đây.



Trong đó, đường sinh $l = SA = 30\text{ cm}$

Đường kính $2r = AB = 40\text{ cm} \Rightarrow r = 40 : 2 = 20\text{ cm}$.

Lớp lá phủ lên bề mặt xung quanh của chiếc nón chính là diện tích xung quanh của hình nón (S_{xq}).

$$S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 20 \cdot 30 = 600\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vì người ta dùng 2 lớp lá để phủ lên mặt xung quanh của nón nên diện tích lá cần dùng để làm một chiếc nón là:

$$2 \cdot S_{xq} = 2 \cdot 600\pi = 1200\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích lá cần dùng để làm một chiếc nón là $1200\pi \text{ cm}^2$.

Câu 7: Nhân ngày 8/3, Hoa định mua một chiếc nón lá để tặng cô Anna - cô giáo dạy tiếng Anh. Chiếc nón có dạng hình nón với đường kính của đáy là 40cm, chiều cao của nón là 20cm. Hãy tính được diện tích lá cần dùng để phủ kín một lớp lên bề mặt của chiếc nón?

Lời giải

$$\text{Độ dài đường sinh của hình nón là: } l = \sqrt{20^2 + \left(\frac{40}{2}\right)^2} = 20\sqrt{2}\text{ cm}$$

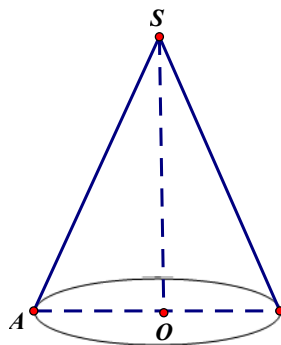
Diện tích lá cần sử dụng chính là diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi Rl = 20 \cdot 20\sqrt{2}\pi = 400\sqrt{2}\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Câu 8: Nhà hát Cao Văn Lầu, Trung tâm triển lãm văn hóa nghệ thuật tỉnh Bạc Liêu có hình dáng 3 chiếc nón lá lớn nhất Việt Nam, mái nhà hình nón làm bằng vật liệu composite và được đặt hướng vào nhau. Em hãy tính thể tích của một mái nhà hình nón biết đường kính là 45m và chiều cao là 24m (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, ba hình nón có bán kính bằng nhau).



Lời giải

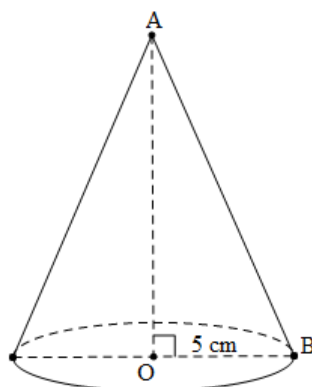


Mái nhà hình nón đường kính là $45m$ suy ra bán kính $R = \frac{45}{2} m$.

Thể tích của một mái nhà hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3,24 \cdot \left(\frac{45}{2}\right)^2 \cdot 24 = 12717 m^3$.

Câu 9: Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh là $65\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của khối nón đó.

Lời giải



Ta có: $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 5 \cdot AB = 65\pi \Rightarrow AB = 13 \text{ cm}$.

Áp dụng định lý Pytago cho $\triangle OAB$ vuông tại O có:

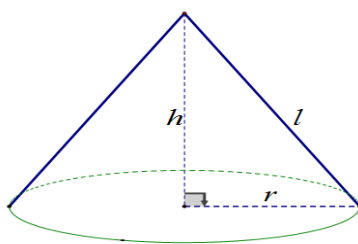
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow 13^2 = OA^2 + 5^2 \Rightarrow OA^2 = 144 \Rightarrow OA = 12 \text{ cm}$$

Vậy thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot OB^2 \cdot OA \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi (\text{cm}^3)$

Câu 10: Nón lá là biểu tượng cho sự dịu dàng, bình dị, thân thiện của người Phụ nữ Việt Nam từ ngàn đời nay; nón lá Câu thơ là một đặc trưng của xứ Huế. Một chiếc nón lá hoàn thiện cần qua nhiều công đoạn từ lên rừng hái lá, rồi sấy lá, mở, ủi, chọn lá, xây độn vànhchằm, cắt lá, nức vành, cắt chỉ,... Nhằm làm đẹp và tôn vinh thêm cho chiếc nón lá xứ Huế, các nghệ nhân còn ép tranh và vài dòng thơ vào giữa hai lớp lá:

“Ai ra xứ Huế mộng mơ
Mua về chiếc nón Câu thơ làm quà”.





Khung của nón lá có dạng hình nón được làm bởi các thanh gỗ nối từ đỉnh tới đáy như các đường sinh (l), 16 vành nón được làm từ những thanh tre mảnh nhỏ, dẻo dai uốn thành những vòng tròn có đường kính to, nhỏ khác nhau, cái nhỏ nhất to bằng đồng xu.

– Đường kính ($d = 2r$) của chiếc nón lá khoảng 40 (cm);

– Chiều cao (h) của chiếc nón lá khoảng 19 (cm).

a) Tính độ dài của thanh tre uốn thành vòng tròn lớn nhất của vành chiếc nón lá. (không kể phần chắp nối, tính gần đúng đến 2 chữ số thập phân, biết $\pi \approx 3,14$).

b) Tính diện tích phần lá phủ xung quanh của chiếc nón lá. (không kể phần chắp nối, tính gần đúng đến 2 chữ số thập phân). Biết diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi.R.l$.

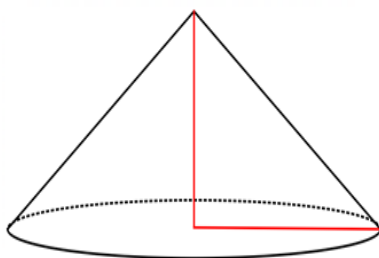
Lời giải

a) $C = \pi d$ thay số vào $\Rightarrow C \approx 125,6$ cm.

b) $l = \sqrt{20^2 + 19^2} = \sqrt{761}$ (cm).

$S = \pi.R.l$ thay số $\Rightarrow S = 1732,42$ cm².

Câu 11: Một đồng cát có dạng hình nón có chu vi đáy là 25,12 m và độ cao là 1,5 m.



a) Tính thể tích của đồng cát trên? Biết công thức tính chu vi đường tròn là $C = 2\pi R$ và công thức tính thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (trong đó R là bán kính đường tròn đáy; h là chiều cao hình nón, lấy $\pi = 3,14$)

b) Người ta dùng xe cải tiến để vận chuyển đồng cát đó đến khu xây dựng. Biết thùng chứa của xe cải tiến có dạng hình hộp chữ nhật có kích thước dài 1 m, rộng 6 dm và cao 3 dm. Trong mỗi chuyến xe, thùng xe có thể chứa nhiều hơn thể tích thực của nó là 10% để vận chuyển được nhiều cát hơn. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chuyến xe cải tiến để chuyển hết đồng cát trên?

Lời giải

a) Hình nón có chu vi đáy là 25,12 m nên ta có: $C = 2\pi R = 25,12 \Leftrightarrow R = \frac{25,12}{2.3,14} = 4$ (m)

Thể tích của đồng cát trên: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 1,5 = 25,12 \text{ (m}^3\text{)}$

Vậy thể tích của đồng cát là $25,12 \text{ m}^3$.

b) $6 \text{ dm} = 0,6 \text{ m}; 3 \text{ dm} = 0,3 \text{ m}$.

Thể tích của thùng chứa là $1 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,18 \text{ (m}^3\text{)}$

Trong mỗi chuyến xe, thùng xe có thể chứa: $0,18 + 0,18 \cdot 10\% = 0,198 \text{ (m}^3\text{)}$

Số chuyến xe để có thể chuyển hết đồng cát

Khi đó $n = \frac{25,12}{0,198} \approx 126,87 \approx 127$ chuyến.

Vậy cần ít nhất 127 chuyến xe để chuyển hết đồng cát.

Câu 12: Bạn Nam dự định tổ chức buổi tiệc sinh nhật và chọn loại ly có phần chứa nước dạng hình nón với bán kính đáy $R = 4 \text{ cm}$ và độ dài đường sinh $l = 10 \text{ cm}$ để khách uống nước trái cây.



a) Tính thể tích phần chứa nước của ly (ghi kết quả làm tròn đến hàng đơn vị). Biết công thức thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ (với R là bán kính đáy hình nón; h là chiều cao hình nón).

b) Bạn Nam cần chuẩn bị một số hộp nước trái cây có lượng nước trong mỗi hộp là 1,2 lít. Biết rằng buổi tiệc sinh nhật có 14 người (đã bao gồm Nam). Nếu mỗi người trung bình uống 3 ly nước trái cây và lượng nước rót bằng 90% thể tích ly thì bạn Nam cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu hộp nước trái cây? Biết $1 \text{ lít} = 1000 \text{ cm}^3$.

Lời giải

a) Chiều cao phần chứa nước của ly là: $h = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \text{ (cm)}$.

Thể tích phần chứa nước của ly là: $V_{\text{ly}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{21} \approx 154 \text{ (cm}^3\text{)}$.

b) Đổi $154 \text{ cm}^3 = 0,154 \text{ lít}$

Lượng nước rót ra của một ly là: $90\% \cdot 0,154 = 0,1386 \text{ (lít)}$.

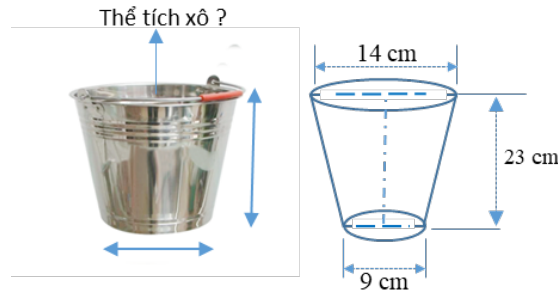
Lượng nước mỗi bạn uống là: $0,1386 \cdot 3 = 0,4158 \text{ (lít)}$.

Lượng nước 14 bạn uống là: $0,4158 \cdot 14 = 5,8212 \text{ (lít)}$.

Số hộp nước trái cây bạn Nam cần chuẩn bị là: $5,8212 : 1,2 = 4,851 \approx 5 \text{ (hộp)}$.

Vậy bạn Nam cần chuẩn bị ít nhất 5 hộp nước trái cây.

Câu 13: Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là 14 (cm) và 9 (cm), chiều cao là 23 (cm). Tính dung tích của xô.



Lời giải

$$\text{Dung tích của xô là: } V = \frac{\pi \cdot 23}{3} (14^2 + 9^2 + 14 \cdot 9) = \frac{9269\pi}{3} (\text{cm}^3).$$

Câu 14: Một chiếc xô bằng tôn dạng hình nón cụt. Các bán kính đáy là 12 cm và 8 cm, chiều cao là 24 cm. Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép và xô không có nắp).

Lời giải

$$\text{Độ dài đường sinh của xô là: } l = \sqrt{24^2 + (12 - 8)^2} = 4\sqrt{37} (\text{cm}).$$

$$\text{Diện tích xung quanh của xô là: } S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l = \pi(12 + 8) \cdot 4\sqrt{37} = 80\sqrt{37}\pi (\text{cm}^2).$$

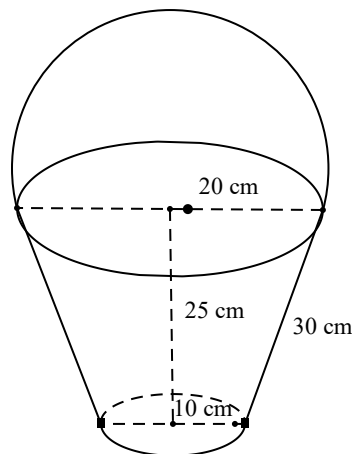
$$\text{Diện tích đáy xô là: } S_d = \pi r_1^2 = 64\pi (\text{cm}^2).$$

$$\text{Diện tích tôn để làm xô là: } S = S_{xq} + S_d = 80\sqrt{37}\pi + 64\pi (\text{cm}^2).$$

Câu 15: Người ta muốn làm một xô nước dạng chóp cụt như hình bên

a) Hãy tính diện tích tôn cần thiết để gò nên xô nước theo các kích thước đã cho (xem phần ghép mí không đáng kể)

b) Hỏi xô nước đã làm có thể chứa được tối đa bao nhiêu lít nước?



Lời giải

a) Diện tích tôn cần để gò nên cái xô:

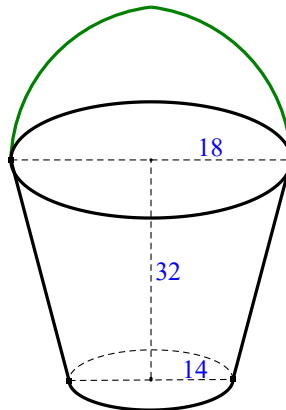
$$S_{xq} = p(R + r)l \approx 3,14.(20 + 10).30 = 2826 \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Thể tích của cái xô là:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2) \approx \frac{1}{3}.3,14.25.(20^2 + 20.10 + 10^2) \approx 18316 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vậy xô đã làm có thể chứa được tối đa 18,316 lít nước.

Câu 16: Một xô đựng nước có dạng hình nón cụt. Đáy xô có đường kính là 28cm, miệng xô là đáy lớn của hình nón cụt có đường kính là 36cm. Hỏi xô có thể chứa bao nhiêu lít nước nếu chiều cao của xô là 32cm?



Lời giải

Bán kính hai đáy lần lượt là 14cm và 18cm, chiều cao $h = 32 \text{ cm}$.

Thể tích xô là thể tích hình nón cụt

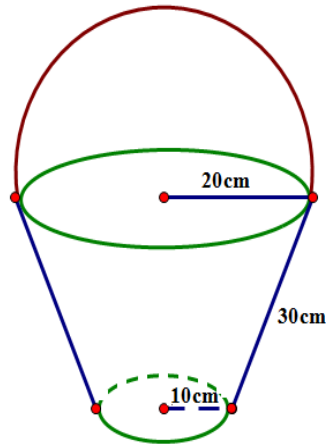
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2) \\ &= \frac{1}{3}\pi.32.(18^2 + 14^2 + 18.14) \\ &= \frac{1}{3}\pi.32.772 \approx 25870 \approx 26000 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Vậy xô nước chứa được khoảng 26 lít nước

Câu 17:

a) Người ta muốn làm một xô nước dạng hình nón cụt như hình bên, hãy tính diện tích tôn cần thiết để gò nên xô nước theo các kích thước đã cho (kể cả đáy). Cho biết phần ghép mí không đáng kể.

b) Hỏi xô nước đã làm có thể chứa được 25 lít nước không?



Cho biết:

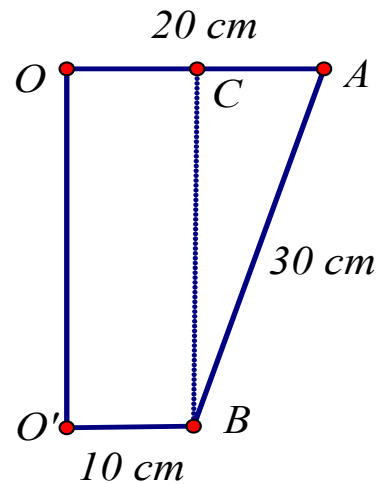
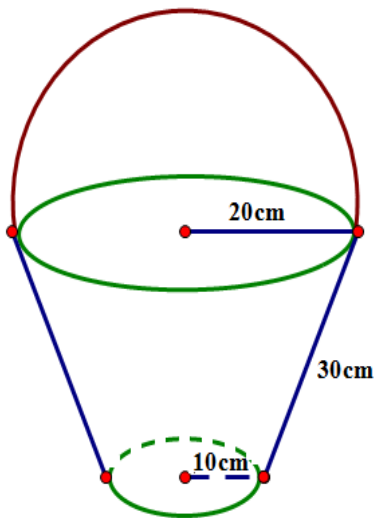
- Diện tích xung quanh hình nón cụt: $S_{xq} = \pi.l.(r_1 + r_2)$

- Thể tích hình nón cụt: $V = \frac{1}{3} \pi.h.(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

Với: r_1, r_2 là các bán kính đáy; l là độ dài đường sinh; h là chiều cao.

Lời giải

Ta có hình minh họa



a) Diện tích tôn cần dùng chính là diện tích xung quanh và diện tích đáy xô:

$$S = S_{xq} + S_{(O)} = \pi(20 + 10).30 + \pi.10^2 = 1000\pi \approx 3141,6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Vẽ $BC \perp OA$ tại C .

Chiều cao chiếc xô:

$$OO' = BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{30^2 - (20 - 10)^2} = 20\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

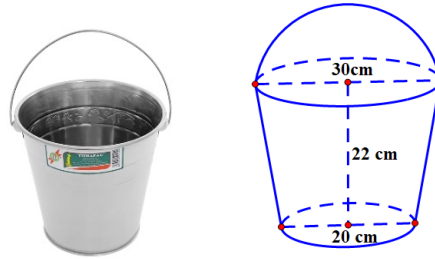
Thể tích xô là

$$V = \frac{1}{3} \pi (20^2 + 10^2 + 20.10).20\sqrt{2} = \frac{14000\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$\approx 20\,733,5 \text{ (cm}^3\text{)} \approx 20,7 \text{ (dm}^3\text{)} = 20,7 \text{ (l)} < 25 \text{ (l)}$$

Vậy xô nước không chứa được 25 lít nước Cho

Câu 18: Một xô đựng nước có dạng hình nón cụt (có các kích thước như hình). Đáy xô có đường kính là 20 cm, miệng xô là đáy lớn của hình nón cụt có đường kính 30 cm và chiều cao của xô là 22 cm.



a) Xô có thể chứa tối đa bao nhiêu lít nước? Biết rằng thể tích của hình nón cụt có R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao là: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

b) Bác Năm dùng hai xô nước để lấy nước từ một hồ để sử dụng trong sinh hoạt và trồng trọt. Gia đình bác sử dụng trung bình mỗi ngày 150 lít nước. Hỏi bác Năm cần phải lấy ít nhất bao nhiêu lần mỗi ngày (mỗi lần xách 2 xô) để phục vụ cho sinh hoạt và trồng trọt, biết rằng mỗi lần xách nước về thì lượng nước bị hao hụt khoảng 5%.

Lời giải

a) Bán kính miệng xô là: $R = \frac{30}{2} = 15(\text{cm})$

Bán kính đáy xô là: $r = \frac{20}{2} = 10(\text{cm})$

Thay $h = 22, R = 15, r = 10$ vào $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$, ta có:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 22 \cdot (15^2 + 15 \cdot 10 + 10^2) \Rightarrow V = \frac{10450}{3}\pi (\text{cm}^3) \Leftrightarrow V = \frac{209}{60}\pi (\text{lít}) \Leftrightarrow V \approx 11 (\text{lít}).$$

Vậy xô có thể chứa tối đa 11 lít nước.

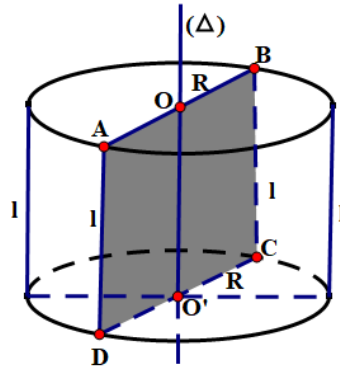
b) Lượng nước mỗi lần xách là: $2 \cdot \frac{209}{60}\pi \cdot (100\% - 5\%) = \frac{3971}{600}\pi (\text{lít})$

Bác Năm cần phải lấy ít nhất số lần là: $150 : \frac{3971}{600}\pi \approx 8$ lần.

Vậy bác Năm cần phải lấy ít nhất 8 lần.

BÀI TOÁN 2: HÌNH TRỤ

1. CÔNG THỨC



Đường cao: $h = OO'$.

Đường sinh: $l = AD = BC$. Ta có: $l = h$.

Bán kính đáy: $R = OA = OB = O'C = O'D$.

Trục (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'

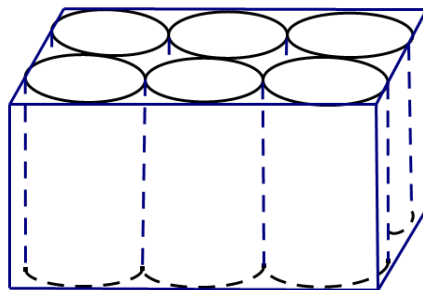
Thể tích khối trụ: $V = h.S_d = h \cdot \pi R^2$.

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi R.h$.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi R.h + 2\pi R^2$.

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Trong hình vẽ, 6 lon nước có dạng hình trụ được đặt sát nhau trong một thùng các-tông (carton) để bán. Đường kính và chiều cao của mỗi lon nước lần lượt là $7cm$ và $11cm$.



a) Tìm thể tích của 6 lon nước.

b) Tính thể tích phần trống trong thùng các-tông khi đựng 6 lon nước (làm tròn đến đơn vị cm^3 . Biết thể tích hình trụ được tính theo công thức: $V = R^2\pi \cdot h$ với R là bán kính đáy và h là đường cao của hình trụ)

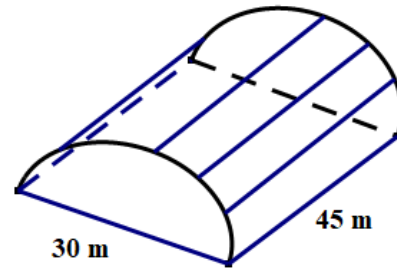
Lời giải

a) Thể tích 6 lon nước $V = 6 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \pi \cdot 11 = 2540cm^3$

b) Thể tích phần trống trong thùng các-tông khi đựng 6 lon nước là:

$$3.7.2.7.11 - 6 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot (11) = 694cm^3$$

Câu 2: Một nhà kính trồng rau sạch có dạng nửa hình trụ đường kính đáy là 30 m, chiều dài là 45 m. Người ta dùng màng nhà kính Politiv - Israel để bao quanh phần diện tích xung quanh nửa hình trụ và hai nửa đáy hình trụ. Khi thi công hao phí khoảng 10% diện tích nhà kính.



- a) Tính diện tích phần màng cần cho nhà trồng rau trên (làm tròn đến hàng đơn vị). Biết $S_{xq} = 2\pi Rh$; $S_d = \pi R^2$, trong đó S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ, S_d là diện tích đáy của hình trụ, h là chiều cao hình trụ, R là bán kính hình trụ.
- b) Tính chi phí cần có để mua màng làm kính trên biết rằng màng có khổ rộng 2,2 m và dài 100 m có giá 13000 đồng /m² (chỉ bán theo cuộn).

Lời giải

a) Bán kính đáy hình trụ là: $30 : 2 = 15(\text{m})$

Diện tích xung quanh hình trụ là: $2\pi \cdot 15 \cdot 45 = 1350\pi (\text{m}^2)$

Diện tích 1 đáy hình trụ là: $\pi \cdot 15^2 = 225\pi (\text{m}^2)$

Diện tích toàn phần hình trụ là: $1350\pi + 2 \cdot 225\pi = 1800\pi (\text{m}^2)$

Diện tích phần màng cần là: $\frac{1}{2} \cdot 1800\pi \cdot (1 + 10\%) = 990\pi \approx 3110 (\text{m}^2)$

b) Diện tích màng của một cuộn là: $2,2 \cdot 100 = 220 (\text{m}^2)$

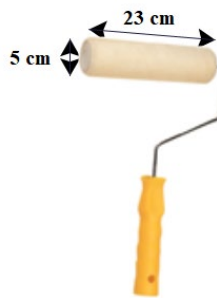
Số tiền mua 1 cuộn màng là: $220 \cdot 13000 = 2860000$ (đồng)

Số cuộn cần mua làm màng là: $3110 : 220 \approx 14,1$ (cuộn)

Vì chỉ bán theo cuộn nên để làm màng kính cần mua 15 cuộn.

Tổng chi phí cần có để mua màng làm kính là: $15 \cdot 2860000 = 42900000$ (đồng).

Câu 3: Bạn An đi mua giúp bố cây lăn sơn ở cửa hàng nhà bác Toàn. Một cây lăn sơn tường có dạng một khối trụ với bán kính đáy là 5cm và chiều cao là 23cm (hình vẽ bên). Nhà sản xuất cho biết sau khi lăn 1000 vòng thì cây sơn tường có thể bị hỏng. Hỏi bạn An cần mua ít nhất mấy cây lăn sơn tường biết diện tích tường mà bố bạn An cần sơn là 100m²?



Lời giải

Diện tích xung quanh của cây lăn sơn: $S_{xq} = 2\pi R \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot 23 = 115\pi \text{ cm}^2 = 115\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

Số cây lăn sơn cần mua để sơn được 100 m^2 : $\frac{100}{115 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \cdot 1000} \approx 2,77 = 3 \text{ cây.}$

Câu 4: Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao 4,2 m. Trong đó, 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính 40 cm và 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính 26 cm. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là 380000 đồng / m^2 (gồm cả tiền thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột đó? (Số tiền làm tròn đến hàng nghìn).



Lời giải

Đổi $40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$, $26 \text{ cm} = 0,26 \text{ m}$.

Diện tích cần sơn chính là tổng diện tích xung quanh của các hình trụ.

Tổng diện tích xung quanh của 4 cây cột đường kính 40 cm là:

$$S_1 = 4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 = 4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,2 \cdot 4,2 = 6,72\pi (\text{m}^2)$$

Tổng diện tích xung quanh của 6 cây cột đường kính 26 cm là:

$$S_2 = 6 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot l = 6 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,13 \cdot 4,2 = 6,552\pi (\text{m}^2)$$

Tổng diện tích xung quanh của 10 cây cột là: $S = S_1 + S_2 = 6,72\pi + 6,552\pi = 13,272\pi (\text{m}^2)$

Số tiền cần dùng là: $13,272\pi \cdot 380000 \approx 15844000$ (đồng).

Câu 5:

a) Một bồn nước inox hình trụ nằm ngang có kích thước đường kính là 1900 mm , chiều dài 6300 mm chứa được 15000 lít nước. Hỏi thể tích nước bằng bao nhiêu phần trăm thể tích bồn (làm tròn tới hàng đơn vị).



b) Hệ thống chữa cháy tự động Sprinkler (xem hình) khi nhiệt độ cháy sẽ làm những Sprinkler tự động phun nước chữa cháy, một Sprinkler bảo vệ cho phần diện tích tối đa là 12 m^2 , lưu lượng tối thiểu cho một Sprinkler là 3456 lít/giờ. Theo tiêu chuẩn phòng cháy chữa cháy của Việt Nam thì 1 Sprinkler hoạt động tối thiểu trong 0,5 giờ. Giả sử tầng hầm tòa nhà chung cư Carina Plaza rộng 1200 m^2 thì chung cư cần bao nhiêu bồn inox ở câu a để trữ nước cho hệ thống chữa cháy?



Lời giải

a) Thể tích bồn nước là: $\left(\frac{1900}{2}\right)^2 \cdot 6300\pi = 1,8 \cdot 10^{10} (\text{mm}^3) = 18000 (\text{lít})$

Phần trăm thể tích nước là: $\frac{15000}{18000} \cdot 100 \approx 83(\%)$

b) Số Sprinkler cho 1200 m^2 là $\frac{1200}{12} = 100$ (Sprinkler)

Số lít nước tối thiểu cho 1 Sprinkler hoạt động trong 1 giờ: $3456 \cdot 0,5 = 1728$ (lít)

Số lít nước tối thiểu cho 100 Sprinkler: $1728 \cdot 100 = 172800$ (lít)

Số bồn inox là: $\frac{172800}{15000} \approx 12$ (bồn)

Vậy chung cư cần khoảng 12 bồn inox.

Câu 6: Hộp phô mai hình trụ có đường kính đáy $12,2\text{ cm}$, chiều cao $2,4\text{ cm}$.



a) Biết rằng 8 miếng phô mai được xếp nằm sát nhau vừa khít trong hộp. Hỏi thể tích một miếng phô mai là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

b) Người ta gói từng miếng phô mai bằng một loại giấy đặc biệt. Giả sử phần giấy gói vừa khít miếng phô mai. Hãy tính diện tích phần giấy gói mỗi miếng phô mai. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Thể tích hộp phô mai là: $V = S_{\text{dayy}} \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{12,2}{2}\right)^2 \cdot 2,4 = 89,3\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Thể tích của một miếng phô mai là: $\frac{89,3\pi}{8} \approx 35,1 \text{ cm}^3.$

b) Diện tích giấy gói mặt trên và dưới của miếng phô mai:

$$2S_{\text{quat}} = 2 \cdot \frac{\pi R^2 n}{360} = 2 \cdot \frac{\pi (12,2 : 2)^2 (360 : 8)}{360} = \frac{3721}{400} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích giấy gói hai mặt bên của miếng phô mai: $2S_1 = 2(12,2 : 2) \cdot 2,4 = 29,28 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Diện tích giấy gói mặt trước của miếng phô mai: $S_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{12,2}{2}}{8} \cdot 2,4 = 3,66\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

Diện tích giấy gói miếng phô mai là: $\frac{3721}{400} \pi + 29,28 + 3,66\pi \approx 70 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Câu 7: Các ống hút nhựa thường khó phân hủy và gây hại cho môi trường. Mỗi ngày có 60 triệu ống hút thải ra môi trường gây hậu quả nghiêm trọng. Ngày nay người ta chủ động sản xuất các loại ống hút dễ phân hủy. Tại tỉnh Đồng Tháp có cơ sở chuyên sản xuất ống hút "thân thiện với môi trường" xuất khẩu ra thị trường thế giới và được nhiều nước ưa chuộng. Ống hút được làm từ bột gạo, các màu chiết xuất từ củ dền, lá dứa, bông sen, bông điên điển.
Một ống hút hình trụ, đường kính 12 mm, bề dày ống 2 mm, chiều dài ống 180 mm. Em hãy tính xem để sản xuất mỗi ống thì thể tích bột gạo được sử dụng là bao nhiêu. (Biết thể tích hình trụ: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$ với R là bán kính đáy và h là chiều cao; kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2 với $\pi \approx 3,14$).



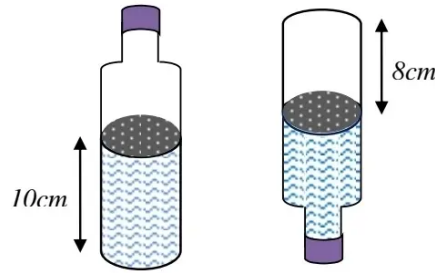
Lời giải

Thể tích của ống hút là: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 3,14 \cdot 6^2 \cdot 180 = 20347,2 \text{ (mm}^3\text{)}.$

Thể tích phần rỗng của ống hút là: $V = \pi \cdot R_1^2 \cdot h = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 180 = 9043,2 \text{ (mm}^3\text{)}.$

Thể tích phần bột gạo để làm 1 ống hút là: $20347,2 - 9043,2 = 11304 \text{ (mm}^3\text{)}.$

Câu 8: Một cái chai có chứa một lượng nước, phần chứa nước là hình trụ có chiều cao 10 cm, khi lật ngược chai lại thì phần không chứa nước cũng là một hình trụ có chiều cao 8 cm (như hình vẽ bên). Biết thể tích của chai là 1413cm^3 . Tính bán kính của đáy chai (giả sử độ dày của thành chai và đáy chai không đáng kể).



Lời giải

Gọi $R(\text{cm})$ là bán kính đáy chai. ($R > 0$)

Thể tích nước trong chai (hình trụ có chiều cao 10 cm) là: $V_1 = \pi R^2 \cdot h_1 = 10\pi R^2 (\text{cm}^3)$

Thể tích không chứa nước trong chai khi lật ngược chai (hình trụ có chiều cao 8 cm) là:

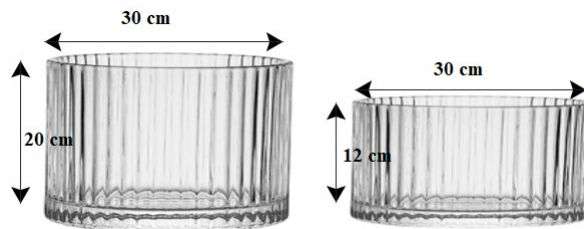
$$V_2 = \pi R^2 h_2 = 8\pi R^2 (\text{cm}^3)$$

Thể tích của chai (450cm^3) là tổng thể tích của nước và phần không chứa nước trong chai khi lật ngược chai lại, nên ta có: $V_1 + V_2 = 450\pi$

$$10\pi R^2 + 8\pi R^2 = 1413 \Leftrightarrow 18\pi R^2 = 450\pi \Leftrightarrow R^2 = 25 \Leftrightarrow R = 5$$

Vậy bán kính của đáy chai là 5 cm.

Câu 9: Có hai cốc thủy tinh hình trụ, cốc thứ nhất (hình A) có đường kính đáy là 30 cm, chiều cao 20 cm đựng đầy nước. Cốc thứ hai (hình B) có đường kính đáy là 40 cm, chiều cao là 12 cm. Hỏi nếu đổ hết nước từ cốc thứ nhất sang cốc thứ hai nước có bị tràn ra ngoài hay không? Giải thích tại sao? (xem như bề dày của đáy cốc không đáng kể).



Lời giải

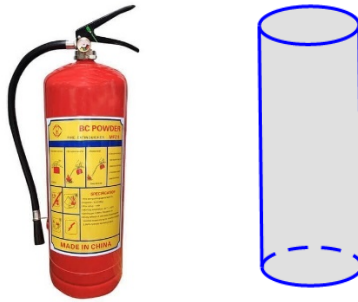
$$\text{Thể tích của cốc A là } V_1 = S \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{30}{2}\right)^2 \cdot 20 \approx 14137,17 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Thể tích của cốc B là } V_2 = S \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{30}{2}\right)^2 \cdot 12 \approx 15079,64 \text{ cm}^3.$$

Vì $14137,17 < 15079,64$.

Vậy cốc B có thể chứa được nước hơn cốc A nên sẽ không bị tràn.

Câu 10: Hãy tính thể tích của bình chữa cháy bột 4 kg có dạng hình trụ, biết chiều cao 49(cm) và diện tích toàn phần là $784\pi\text{(cm}^2\text{)}$?



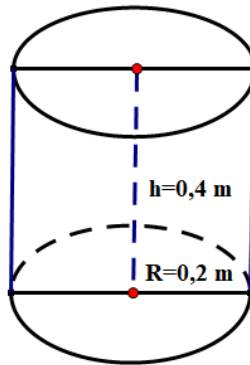
Lời giải

Ta có:

$$S_{\text{tp}} = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h \Rightarrow 784\pi = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 49 \Rightarrow 2r^2 + 98r - 784 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -56 & (\text{loại}) \\ r_2 = 7 & (\text{nhận}) \end{cases}$$

Thể tích bình chữa cháy là: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 7^2 \cdot 49 = 2401\pi$.

Câu 11: Anh Minh vừa mới xây một cái hồ trữ nước cạnh nhà có hình hộp chữ nhật kích thước $2\text{m} \times 2\text{m} \times 1\text{m}$. Hiện hồ chưa có nước nên anh Minh phải ra sông lấy nước. Mỗi lần ra sông anh gánh được 1 đôi nước đầy gồm hai thùng hình trụ bằng nhau có kích thước đáy $0,2\text{m}$, chiều cao $0,4\text{m}$.



a) Tính lượng nước (m^3) anh Minh đổ vào hồ sau mỗi lần gánh (ghi kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân). Biết trong quá trình gánh nước về hao hụt khoảng 10% và công thức tính thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h$.

b) Hỏi anh Minh phải gánh ít nhất bao nhiêu lần để đầy hồ? Bỏ qua thể tích thành hồ.

Lời giải

a) Thể tích hình trụ: $V_{\text{tru}} = \pi R^2 h = \pi \cdot 0,2^2 \cdot 0,4 = 0,05\text{(m}^3\text{)}$.

Lượng nước anh Minh đổ vào hồ trong mỗi lần gánh là: $V = 2 V_{\text{tru}} \times 90\% = 0,09\text{(m}^3\text{)}$.

b) Thể tích cái hồ là: $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.

Số lần gánh của anh Minh để đầy hồ là: $\frac{4}{0,09} = 44,4$.

Vậy anh Minh cần gánh ít nhất 45 lần.

Câu 12: Có hai lọ thủy tinh hình trụ, lọ thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30cm , chiều cao 20cm , đựng đầy nước. Lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40cm , chiều cao 12cm . Hỏi nếu đổ hết nước từ trong lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước có bị tràn ra ngoài không? Tại sao? (Lấy $\pi \approx 3,14$)

Lời giải

Gọi thể tích lọ thủy tinh có đường kính đáy là 30cm , chiều cao 20cm là V_1

$$\Rightarrow V_1 = \pi \cdot \left(\frac{30}{2}\right)^2 \cdot 20 \approx 3,14 \cdot 4500$$

Gọi thể tích lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40cm , chiều cao 12cm là V_2

$$\Rightarrow V_2 = \pi \cdot \left(\frac{40}{2}\right)^2 \cdot 12 \approx 3,14 \cdot 4800$$

Vậy $V_1 < V_2$, do đó nếu đổ hết nước từ lọ thứ nhất sang lọ thứ 2 sẽ không bị tràn.

Câu 13: Có hai lọ thủy tinh hình trụ, lọ thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30 cm , chiều cao 20 cm , đựng đầy nước. Lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40 cm , chiều cao 12 cm . Hỏi nếu đổ hết nước từ trong lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước có bị tràn ra ngoài không? Tại sao? (Lấy $\pi \approx 3,14$).

Lời giải

$$V_{\text{hình trụ 1}} = \pi r_1^2 h_1 = 3,14 \cdot 15^2 \cdot 20 \approx 14130 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$V_{\text{hình trụ 2}} = \pi r_2^2 h_2 = 3,14 \cdot 20^2 \cdot 12 \approx 15072 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vậy khi đổ nước từ lọ thứ nhất sang lọ thứ hai thì nước không bị tràn vì thể tích của lọ thứ hai lớn hơn thể tích của lọ thứ nhất.

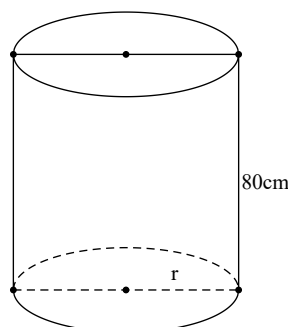
Câu 14: Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao là $1,65\text{ m}$ và diện tích đáy là $0,42\text{ m}^2$. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

Lời giải

Bồn nước đựng được số mét khối nước là: $1,65 \cdot 0,42 = 0,693 \text{ (m}^3\text{)}$.

Câu 15: Tính diện tích tôn cần thiết để làm một cái thùng hình trụ có chiều cao là 80 (cm) và đáy có diện tích là $5024 \text{ (cm}^2\text{)}$ (không tính diện tích các chỗ mối ghép và nắp thùng). Lấy $\pi = 3,14$.

Lời giải



Gọi bán kính đáy, chiều cao, diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng hình trụ lần lượt là r (cm), h (cm), S_{xq} (cm²), S_d (cm²).

Vì $S_d = \pi r^2$ nên bán kính đáy là : $r = \sqrt{\frac{S_d}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{5024}{3,14}} = \sqrt{1600} = 40$ (cm).

Diện tích xung quanh của hình trụ là : $S_{xq} = 2\pi R.h \approx 2.3,14.40.80 = 20096$ (cm²).

Vậy diện tích tôn cần thiết để làm thùng là : $S_{xq} + S_d \approx 20096 + 5024 = 25120$ (cm²).

Câu 16: Bạn Toán đi mua giúp bố cây lăn sơn ở cửa hàng nhà bác Học. Một cây lăn sơn tường có dạng một khối trụ với bán kính đáy là 5 cm và chiều cao là 23 cm (hình vẽ bên). Nhà sản xuất cho biết sau khi lăn 1000 vòng thì cây sơn tường có thể bị hỏng. Hỏi bạn Toán cần mua ít nhất mấy cây lăn sơn tường biết diện tích tường mà bố bạn Toán cần sơn là 100 m². (Cho $\pi = 3,14$)



Lời giải

Đổi 5 cm = 0,05 m, 23 cm = 0,23 m.

Diện tích tường được sơn khi lăn cây lăn sơn 1 vòng bằng diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính 0,05 m và chiều cao 0,23 m.

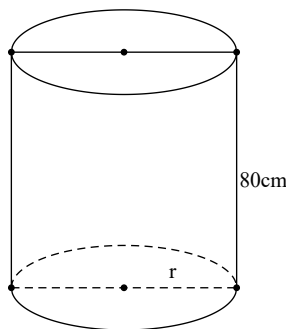
Diện tích xung quanh của hình trụ bằng: $S_{xq} = 2\pi rh = 2 \times 3,14 \times 0,05 \times 0,23 = 0,023\pi$ (m²)

Diện tích mỗi cây sơn có thể sơn được là $1000 \times S_{xq} = 23\pi$ (m²).

Vì $\frac{100}{23\pi} \approx 1,38$ nên số cây lăn sơn tối thiểu cần phải mua là 2 cây.

Câu 17: Tính diện tích tôn cần thiết để làm một cái thùng hình trụ có chiều cao là 80 (cm) và đáy có diện tích là 5024 (cm²) (không tính diện tích các chỗ mối ghép và nắp thùng). Lấy $\pi = 3,14$.

Lời giải



Gọi bán kính đáy, chiều cao, diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng hình trụ lần lượt là r (cm), h (cm), S_{xq} (cm²), S_d (cm²).

Vì $S_d = \pi r^2$ nên bán kính đáy là : $r = \sqrt{\frac{S_d}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{5024}{3,14}} = \sqrt{1600} = 40$ (cm).

Diện tích xung quanh của hình trụ là : $S_{xq} = 2\pi R.h \approx 2.3,14.40.80 = 20096 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Vậy diện tích tôn cần thiết để làm thùng là : $S_{xq} + S_d \approx 20096 + 5024 = 25120 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Câu 18: Một chai dung dịch rửa tay khô hình trụ cao 12 cm, đường kính đáy bằng 5 cm. Tính thể tích chai dung dịch đó.

Lời giải

Gọi d , r thứ tự là đường kính và bán kính mặt đáy của chai dung dịch.

$$d = 5 \text{ cm} \Rightarrow r = 2,5 \text{ cm}.$$

$$\text{Thể tích chai dung dịch đó là: } V = \pi r^2 h = (2,5)^2 \cdot 12\pi = 75\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 19: Một lon coca chiều cao là 11,7 cm ; bán kính đáy bằng 3 cm . Hỏi 3 lon coca như vậy có đổ đầy một chai 1 lít không? (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Lon coca có dạng là một hình trụ cao 11,7 cm và bán kính đáy 3 cm . Thể tích của một lon coca là: $V = Sh = \pi R^2 h \approx 3,14.3^2.11,7 \approx 330,6 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích của 3 lon coca là $330,6.3 = 991,8 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Vì $991,8 \text{ cm}^3 < 1(l) = 1000 \text{ cm}^3$ nên 3 lon coca như vậy không thể đổ đầy một chai 1 lít.

Câu 20: Một tàu đánh cá khi ra khơi cần mang theo 50 thùng dầu, mỗi thùng dầu coi là hình trụ có chiều cao là 90 cm, đường kính đáy thùng là 60 cm. Hãy tính xem lượng dầu tàu phải mang theo khi ra khơi là bao nhiêu lít (lấy $\pi = 3,14$ kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Bán kính của đáy thùng dầu là $R = 60 : 2 = 30 \text{ (cm)}$

Thể tích của mỗi thùng dầu là $V = \pi R^2 h = 3,14.30^2.90 = 254340 \text{ (cm}^3\text{)}$ hay $V = 254,34 \text{ (dm}^3\text{)}$

$\Rightarrow$ Thể tích của 50 thùng dầu là $254,34.50 = 12717 \text{ (dm}^3\text{)}$ hay 12717 (lít).

Vậy khi ra khơi tàu phải mang theo 12717 lít dầu.

Câu 21: Người ta làm một thùng chứa nước dạng hình trụ không có nắp bằng tôn. Diện tích tôn tối thiểu cần để làm thùng đó bằng $5\pi \text{ m}^2$ với $\pi \approx 3,14$. Tính thể tích của thùng đó biết chiều cao của thùng bằng đường kính đáy (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

Lời giải

Gọi bán kính hình tròn đáy của thùng chứa nước hình trụ là $r \text{ (m)}$ (Điều kiện: $r > 0$)

$\Rightarrow$ Chiều cao của thùng chứa nước là $h = 2r \text{ (m)}$

$\Rightarrow$ Diện tích xung quanh và một đáy của thùng chứa nước là: $S = 2\pi r h + \pi r^2 = 5\pi r^2 \text{ (m}^2\text{)}$

Vì diện tích tôn tối thiểu cần để làm thùng đó bằng $5\pi \text{ m}^2$ nên ta có phương trình:

$$5\pi r^2 = 5\pi \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1 \text{ (vì } r > 0 \text{)}$$

Vậy thể tích thùng chứa nước là: $V = \pi r^2 h = 3,14.1^2.2 = 6,28 \text{ m}^3$

Câu 22: Lon nước ngọt hình trụ có đường kính đáy là 5 cm, chiều cao là 12 cm. Tính thể tích lon nước ngọt? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2 và lấy $\pi \approx 3,14$)

Lời giải

Lon nước ngọt đó có bán kính đáy $r = 2,5$ cm; chiều cao $h = 12$ cm. Thể tích của lon nước đó là: $V = \pi r^2 h = 3,14 \cdot (2,5)^2 \cdot 12 = 235,5 \text{ (cm}^2\text{)}$

Câu 23: Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy là 10 cm, chiều cao bằng $\frac{6}{5}$ đường kính đáy. Tính thể tích của chiếc cốc đó.

Lời giải

Chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy là 10cm thì bán kính đáy $r = \frac{10}{2} = 5\text{cm}$

Chiều cao của chiếc cốc hình trụ là: $\frac{6}{5} \cdot 10 = 12\text{cm}$

Suy ra thể tích của chiếc cốc đó là $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \approx 3,14 \cdot 5^2 \cdot 12 = 942 \text{ (cm}^2\text{)}$

Câu 24: Một téc nước hình trụ mà phía trong có đường kính đáy là 0,6m chiều cao 1m. Tính thể tích nước chứa đầy trong 45 téc như vậy.

Lời giải

Thể tích của téc nước hình trụ là: $V = \pi R^2 h$.

Theo đề ta có: $d = 0,6 \text{ (m)} \Rightarrow R = 0,3 \text{ (m)}$.

Vậy thể tích của 1 téc đầy nước là: $V = \pi \cdot 0,3^2 \cdot 1 = 0,09\pi \approx 0,2827 \text{ (m}^3\text{)}$.

Vậy thể tích nước được chứa đầy trong 45 téc nước như trên là:

$$\frac{81\pi}{20} \approx 45 \cdot 0,2827 = 12,723 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Câu 25: Một lon nước ngọt hình trụ có đường kính đáy là 5 cm, độ dài trục là 12 cm. Tính diện tích toàn phần của lon nước hình trụ đó.

Lời giải

Chiều cao của lon nước là $h = 12 \text{ (cm)}$

Bán kính đáy của lon nước hình trụ là $R = 5 : 2 = 2,5 \text{ (cm)}$

Diện tích toàn phần của lon nước hình trụ là :

$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 2,5 \cdot 12 + 2\pi \cdot 2,5^2 = 72,5\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Câu 26: Một chiếc cốc thủy tinh hình trụ có đường kính đáy là 6 cm, chiều cao 12 cm. Tính lượng nước chứa được khi rót nước đầy cốc.

Lời giải

Bán kính đáy: $r = 6 : 2 = 3 \text{ cm}$.

Thể tích của cốc nước: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 108\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 27: Một hộp sữa hình trụ có bán kính đáy là 4cm, chiều cao là 10cm. Tính diện tích vật liệu dùng để tạo nên một vỏ hộp sữa đó nếu tỉ lệ hao hụt là 5%?

Lời giải

Diện tích toàn phần của hộp sữa là :

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 + 2\pi \cdot 4^2 = 112\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vì tỉ lệ hao hụt là 5% nên diện tích vật liệu dùng để tạo nên vỏ hộp sữa là:

$$112\pi \cdot 105\% \approx 369,26 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Câu 28: Một hộp sữa hình trụ có đường kính đáy là 12 cm, chiều cao là 10 cm. Tính diện tích vật liệu dùng để tạo nên vỏ hộp như vậy. (Không tính phần mép nối).

Lời giải

Bán kính đáy hộp sữa: $R = \frac{d}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$

Diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 10 = 120\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích hai đáy là $2S_{day} = 2\pi R^2 = 72\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Tổng diện tích vật liệu cần dùng là $120\pi + 72\pi = 192\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Câu 29: Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là $21,6 \text{ cm}^2$. Nước trong lọ dâng lên 9,5 mm. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu?

Lời giải

Khi nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có dạng hình trụ, nước trong lọ dâng lên chính là thể tích của tượng đá.

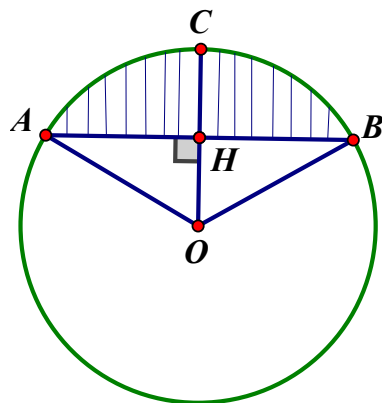
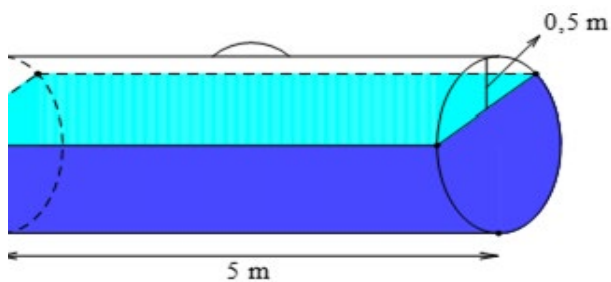
Đổi: $9,5 \text{ mm} = 0,95 \text{ cm}$.

Thể tích khối nước hình trụ dâng lên là: $V = S \cdot h = 21,6 \cdot 0,95 = 20,52 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Vậy thể tích tượng đá là $20,52 \text{ cm}^3$.

Câu 30: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m, có bán kính đáy 1 m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5 m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, theo đơn vị m^3)

lặt đáy được minh họa như hình vẽ sau:



Lời giải

Ta có: $HO = OC - CH = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (m)}$

Ta có: $HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2HB = \sqrt{3} \text{ (m)}$

Ta có: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (m}^2\text{)}$

Tam giác OHB có $\sin \widehat{HOB} = \frac{HB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{HOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{HOB} = 120^\circ$.

Gọi S_1 là diện tích hình quạt tròn $OACB$, ta có:

$$S_1 = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Gọi S_2 là diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ $\widehat{AB}$, ta có:

$$S_2 = S_1 - S_{\Delta OAB} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} \text{ (m}^2\text{)}$$

Thể tích phần dầu đã hút đi là: $V_1 = \frac{1}{3} S_2 \cdot 5 = \frac{5(4\pi - 3\sqrt{3})}{36} \text{ (m}^3\text{)}$

Thể tích của thùng dầu là: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 5 = \frac{5\pi}{3} \text{ (m}^3\text{)}$

Thể tích dầu còn lại trong thùng là: $V_2 = V - V_1 = \frac{5\pi}{3} - \frac{5(4\pi - 3\sqrt{3})}{36} \approx 4,21 \text{ (m}^3\text{)}$

Câu 31: Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 6 cm, chiều cao 9 cm. Hãy tính diện tích xung quanh của hình trụ.

Lời giải:

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rh$

$$S_{xq} \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 9 \approx 339,12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Câu 32: Một bể nước hình trụ có chiều cao 2,5 m và diện tích đáy là 4,8 m². Nếu một vòi nước được đặt phía trên miệng bể và chảy được 4800 lít nước mỗi giờ thì sau bao lâu bể đầy? (Biết ban đầu bể cạn nước và bỏ qua bề dày của thành bể).

Lời giải

Thể tích bể $V = Sh = 12 \text{ (m}^3\text{)}$

Vận tốc vòi 4800 lít/ giờ = 4,8 m³/ giờ

Vậy thời gian chảy đầy bể của vòi nước là: $12 : 4,8 = 2,5 \text{ (giờ)}$

Vậy thời gian để vòi nước chảy đầy bể lúc bể cạn nước là 2 giờ 30 phút.

Câu 33: Một cây lăn sơn tường có dạng là một khối trụ với bán kính đáy là 5cm và chiều cao (chiều dài lăn) là 30 cm. Nhà sản xuất cho biết sau khi lăn 500 vòng thì cây sơn tường có thể sẽ bị hỏng. Tính diện tích mà cây sơn tường sơn được trước khi hỏng.

Lời giải

Diện tích xung quanh của cây lăn sơn tường là: $S_{xq} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 30 = 300\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

1 vòng cây sơn tường sẽ quét được số diện tích là: $300\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy 500 thì cây sơn tường quét được số diện tích là: $300\pi \cdot 500 = 150000\pi (\text{cm}^2)$

Câu 34: Một chiếc cốc có dạng hình trụ với chiều cao 8cm, bán kính đáy là 3cm. Hỏi chiếc cốc này có đựng được 180ml sữa không? (Bỏ qua bề dày của chiếc cốc).

Lời giải

Thể tích của chiếc cốc là: $\pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 226 (\text{cm}^3)$

Vì $226 \text{ cm}^3 = 226 \text{ ml} > 180 \text{ ml}$.

Nên chiếc cốc này có thể đựng được 180 ml sữa.

Câu 35: Một hộp phomai con bò cười gồm có 8 miếng, độ dày mỗi miếng là 20mm, nếu xếp chúng lại trên một đĩa thì thành hình trụ có đường kính 100mm.

a) Tính thể tích của miếng phomai.

b) Biết khối lượng của mỗi miếng phomai là 15g, hãy tính trọng lượng riêng của nó? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

(Biết trọng lượng riêng của vật cho bởi công thức $d = \frac{P}{V}$. Trong đó trọng lượng của vật là

$P = 9,8 \cdot m$, đơn vị N, với m là khối lượng vật đơn vị kg; V là thể tích vật, đơn vị m^3 ; d có đơn vị N / m^3).

Lời giải

2) a) Thể tích của 8 miếng phomai là:

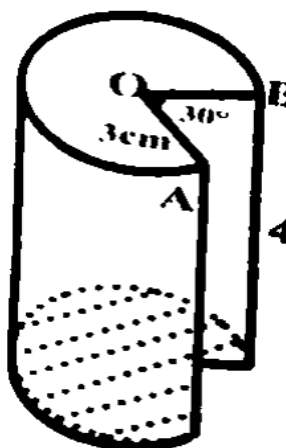
$$V = S \cdot h = \pi R^2 h \approx 3,14 \cdot 50^2 \cdot 20 = 157000 (\text{mm}^3) = 0,000157 (\text{m}^3)$$

b) Đổi $15 \text{ g} = 0,015 \text{ kg}$

Trọng lượng riêng của miếng phomai là:

$$d = \frac{P}{V} = \frac{9,8 \cdot 0,015}{0,000157} \approx 7490 (\text{N} / \text{m}^3).$$

Câu 36: Một cái bánh hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 3cm, chiều cao 4cm được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Một phần của cái bánh bị cắt rời ra theo các bán kính OA, OB và theo chiều thẳng đứng từ trên xuống dưới với $\widehat{AOB} = 30^\circ$. Tính thể tích phần còn lại của cái bánh sau khi cắt.



Lời giải

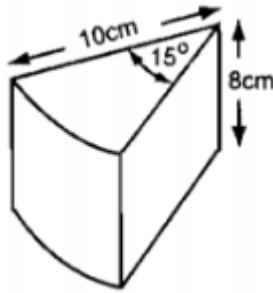
Phần cái bánh bị cắt đi là: $\frac{30^0}{360^0} = \frac{1}{12}$ (cái bánh)

Phần cái bánh còn lại: $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (cái bánh)

Thể tích phần còn lại của cái bánh: $\pi \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot \frac{11}{12} = 33\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 103,62 \text{ (cm}^3\text{)}$

Vậy thể tích phần còn lại của cái bánh là $103,62 \text{ cm}^3$.

Câu 37: Một mẫu pho mát được cắt ra từ một khối pho mát dạng hình trụ (có các kích thước như trên hình vẽ). Tính theo gam khối lượng của mẫu pho mát biết khối lượng riêng của pho mát là 3 g/cm^3 .



Lời giải

Thể tích khối trụ bán kính đáy 10 cm, chiều cao 8 cm là: $3,14 \cdot 10^2 \cdot 8 = 2512 \text{ cm}^3$.

Thể tích miếng pho mát là: $\frac{2512 \cdot 15}{360} = \frac{314}{3} \text{ cm}^3$.

Khối lượng của mẫu pho mát $\frac{314}{3} \cdot 3 = 314 = 314 \text{ g}$.

Câu 38: Một hộp thực phẩm có hình trụ. Biết diện tích của đáy là $60,24 \text{ cm}^2$.

a) Hãy tính bán kính của đường tròn đáy của hình trụ. Biết $\pi \approx 3,14$.

b) Biết chiều cao của hình trụ là 5cm. Hãy tính thể tích của hộp thực phẩm.

Lời giải

a) Bán kính của đường tròn đáy của hình trụ là: $3,14 \cdot R^2 = 60,24 \Leftrightarrow R \approx 4,38 \text{ (cm)}$

b) Thể tích của hộp thực phẩm là: $V = S \cdot h = 6,24 \cdot 5 = 301,2 \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 39: Một cốc nước hình trụ cao 15cm, đường kính đáy là 6cm. Lượng nước ban đầu cao 10cm. Thả vào cốc 5 viên bi hình cầu cùng đường kính 2cm. Hỏi sau khi thả 5 viên bi mực nước cách miệng cốc bao nhiêu cm? (Làm tròn lấy 2 chữ số thập phân).

Lời giải

Thể tích của 5 viên bi:

$$5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^3 = \frac{20}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Chiều cao mực nước dâng lên thêm sau khi thả 5 viên bi là

$$\frac{20}{3} \pi : \left[\pi \left(\frac{6}{2}\right)^2 \right] = \frac{20}{27} \text{ (cm)}$$

Mực nước cách miệng cốc 1 khoảng là:

$$15 - 10 - \frac{20}{27} \approx 4,26(\text{cm})$$

Câu 40: Khi thả chìm hoàn toàn tượng một con ngựa nhỏ bằng đá vào một ly nước có dạng hình trụ thì người ta thấy nước trong ly dâng lên 1,5cm và không tràn ra ngoài. Biết diện tích đáy của ly nước bằng 80 cm^2 . Hỏi thể tích của tượng ngựa đá bằng bao nhiêu?

Lời giải

Thể tích phần nước trong ly dâng lên chính là thể tích của tượng ngựa đá.

$$\text{Diện tích đáy ly nước hình trụ là } S = \pi r^2 = 80(\text{cm}^2) \Rightarrow r^2 = \frac{80}{\pi}(\text{cm}).$$

$$\text{Chiều cao mực nước dâng lên } h = 1,5(\text{cm}).$$

$$\text{Thể tích cần tìm là } V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{80}{\pi} \cdot 1,5 = 120(\text{cm}^3).$$

Câu 41: Các ống hút nhựa thường khó phân hủy và gây hại cho môi trường. Mỗi ngày có 60 triệu ống hút thải ra môi trường gây hậu quả nghiêm trọng. Ngày nay người ta chủ động sản xuất các loại ống hút dễ phân hủy. Tại tỉnh Đồng Tháp có cơ sở chuyên sản xuất ống hút “thân thiện với môi trường” xuất khẩu ra thị trường thế giới và được nhiều nước ưa chuộng. Ống hút được làm từ bột gạo, các màu chiết xuất từ củ dền, lá dứa, bông sen, bông điên điển,... Một ống hút hình trụ, đường kính 12mm, bề dày ống 2mm, chiều dài ống 180mm. Em hãy tính xem để sản xuất mỗi ống thì thể tích bột gạo được sử dụng là bao nhiêu (Biết $\pi \approx 3,14$)

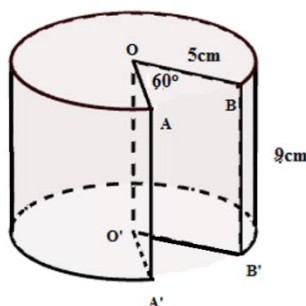
Lời giải

$$\text{Thể tích ống hút: } V = \pi R^2 \cdot h = \pi 6^2 \cdot 180 = 6480\pi (\text{mm}^3)$$

$$\text{Thể tích phần lõi rỗng bên trong ống hút: } v = \pi r^2 \cdot h = \pi (6-2)^2 \cdot 180 = 2880\pi (\text{mm}^3)$$

$$\text{Thể tích bột gạo được sử dụng: } V - v = 6480\pi - 2880\pi = 3600\pi \approx 11304 (\text{mm}^3)$$

Câu 42: Một cái bánh hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 5cm, chiều cao 9cm, được đặt thẳng đứng trên một mặt bàn. Một phần của cái bánh đã bị cắt rời ra theo các bán kính OA, OB và theo chiều thẳng đứng từ trên xuống với góc AOB bằng 60° như hình vẽ. Tính thể tích phần còn lại của cái bánh sau khi bị cắt.



Lời giải

$$\text{Phần bánh bị cắt đi chiếm } \frac{60}{360} = \frac{1}{6} \text{ (cái bánh)}$$

$$\text{Phần bánh còn lại chiếm } 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{ (cái bánh)}$$

$$\text{Thể tích phần bánh còn lại là } \frac{5}{6} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{5}{6} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 9 \approx 589 \text{ cm}^3$$

Câu 43: Nước giải khát thường đựng trong lon nhôm và cỡ lon phổ biến chứa được khoảng 330 ml chất lỏng, được thiết kế hình trụ với chiều cao khoảng $10,2\text{ cm}$ (phần chứa chất lỏng), đường kính đáy khoảng $6,42\text{ cm}$.

Nhưng hiện nay các nhà sản xuất có xu hướng tạo ra những lon nhôm với kiểu dáng cao thon hơn. Tuy chi phí sản xuất những chiếc lon cao này tốn kém hơn, nhưng nó lại dễ đánh lừa thị giác và được người tiêu dùng ưa chuộng hơn.

a/ Một lon nước ngọt cao $13,41\text{ cm}$ (phần chứa chất lỏng), đường kính đáy là $5,6\text{ cm}$. Hỏi lon nước ngọt cao này có thể chứa được hết lượng nước ngọt của một lon có cỡ phổ biến không? Vì sao? (Biết thể tích hình trụ: $V = \pi r^2 h$, với $\pi \approx 3,14$).

b/ Vì sao chi phí sản xuất chiếc lon cao tốn kém hơn chiếc lon cỡ phổ biến?

Biết diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình trụ được tính theo công thức:

$$S_{xq} = 2\pi rh \text{ và } S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}.$$

Lời giải

a/ Thể tích lon nước ngọt cao là: $\pi \cdot \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 \cdot 13,41 \approx 330,1\text{ cm}^3 = 330,1\text{ ml}$.

Vậy lon nước ngọt cao này có thể chứa được hết lượng nước ngọt của một lon có cỡ phổ biến.

b/ Diện tích vỏ nhôm của lon cao: $S = \pi \cdot 5,6 \cdot 13,41 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 \approx 285\text{ cm}^2$

Diện tích vỏ nhôm của lon cũ: $S = \pi \cdot 6,42 \cdot 10,32 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{6,42}{2}\right)^2 \approx 272,7\text{ cm}^2$.

Vậy giá thành lon cao mắc hơn.

Câu 44: Thùng phuy (hay thùng phi) là một vận dụng hình ống dùng để chứa và chuyên chở chất lỏng với dung tích lớn. Mỗi thùng phuy có đường kính nắp và đáy là 584 mm , chiều cao là 876 mm . Hãy tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của một thùng phuy? (Biết công thức tính diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi rh$, diện tích toàn phần là $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$ và thể tích hình trụ là $V = \pi r^2 h$, với $\pi \approx 3,14$).



Lời giải

Diện tích xung quanh của thùng phuy là:

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \frac{584}{2} \cdot 876 = 511584\pi (\text{mm}^2).$$

Diện tích toàn phần của thùng phuy là:

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \frac{584}{2} \cdot 876 + 2\pi \left(\frac{584}{2}\right)^2 = 682112\pi (\text{mm}^2).$$

Thể tích của thùng phuy là:

$$V = 2\pi R^2 h = 2\pi \left(\frac{584}{2}\right)^2 \cdot 876 = 74691264\pi (\text{mm}^3).$$

Câu 45: Có hai lọ thủy tinh hình trụ, lọ thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30 cm , chiều cao 20 cm đựng đầy nước, lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40 cm chiều cao là 12 cm . Hỏi nếu đổ hết nước từ lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước có bị tràn ra ngoài hay không? Tại sao?



Lời giải

Thể tích hình trụ lọ thứ nhất, thứ hai là:

$$V_1 = S_1 \cdot h_1 \approx 14130 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = S_2 \cdot h_2 \approx 15072 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V_1 < V_2$$

Vậy khi đổ nước từ lọ 1 qua lọ 2 nước không tràn ra ngoài.

Câu 46: Khi thả chìm hoàn toàn một viên xúc xắc nhỏ hình lập phương vào một ly nước có dạng hình trụ thì người ta thấy nước trong ly dâng lên $0,5 \text{ cm}$ và không tràn ra ngoài. Biết diện tích đáy của ly nước bằng 250 cm^2 . Hỏi cạnh của viên xúc xắc dài bao nhiêu cm ?



Lời giải

Thể tích phần nước trong ly dâng lên chính là thể tích của viên xúc xắc.

Diện tích đáy ly nước hình trụ là $S = 250 \text{ cm}^2$

Chiều cao mực nước dâng lên $h = 0,5 \text{ cm}$

Thể tích của viên xúc xắc là: $V = S \cdot h = 250 \cdot 0,5 = 125 \text{ cm}^3$

Cạnh của viên xúc xắc dài $a(\text{cm})$: $a^3 = 125 \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$.

Câu 47: Nước giải khát thường đựng trong lon nhôm và cỡ lon phổ biến chứa được khoảng 330 ml chất lỏng, được thiết kế hình trụ với chiều cao khoảng $10,2 \text{ cm}$; đường kính đáy khoảng $6,42 \text{ cm}$. Nhưng hiện nay các nhà sản xuất có xu hướng tạo ra những lon nhôm với kiểu dáng cao thon hơn. Tuy chi phí sản xuất những chiếc lon cao này tốn kém hơn, nhưng nó lại dễ đánh lừa thị giác và được người tiêu dùng ưa chuộng hơn.

a) Một lon nước ngọt cao $13,41 \text{ cm}$, đường kính đáy là $5,6 \text{ cm}$. Hỏi lon nước ngọt cao này có thể chứa được hết lượng nước ngọt của một lon có cỡ phổ biến không? Vì sao?

Biết thể tích hình trụ: $V = \pi r^2 h$, với $\pi \approx 3,14$.

b) Biết chi phí sản xuất một chiếc lon tỉ lệ thuận với diện tích toàn phần của lon. Hỏi chi phí sản xuất chiếc lon cao tăng bao nhiêu phần trăm so với chi phí sản xuất chiếc lon cỡ phổ biến? (làm tròn 1 chữ số thập phân). Biết diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình trụ được tính theo công thức: $S_{xq} = 2\pi rh$ và $S_{\phi} = S_{xq} + 2S_d$.

Lời giải

a) Thể tích lon nước ngọt cao là: $\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 \cdot 13,41 \approx 330,1 \text{ cm}^3 = 330,1 \text{ ml}$.

Vậy lon nước ngọt cao này có thể chứa được hết lượng nước ngọt của một lon cỡ phổ biến.

b) Diện tích vỏ nhôm của lon cao: $S = \pi \cdot 5,6 \cdot 13,41 + 2\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 = 90,776\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích vỏ nhôm của lon cỡ: $S = \pi \cdot 6,42 \cdot 10,32 + 2\pi \left(\frac{6,42}{2}\right)^2 = 86,8626\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Số phần trăm tăng thêm: $\frac{90,776\pi - 86,8626\pi}{86,8626\pi} = 4,5\%$.

Vậy chi phí sản xuất chiếc lon cao tăng thêm khoảng 4,5% so với chi phí sản xuất chiếc lon cỡ phổ biến.

Câu 48: Bún bò Huế là một đặc sản của ẩm thực Huế, tuy là bún bò nhưng ngoài thịt bò còn có thịt heo. Hương vị đặc biệt của món ăn này chủ yếu là ở vị cay nồng, mùi sả đặc trưng của nước lèo. Vốn là một hương vị Huế không lẫn vào đâu được và chính điều đó khiến người ăn cứ nhớ mãi về món ăn này. Quán nhà bạn An dùng 2 chiếc nồi hình trụ có bán kính đáy nồi là 0,3m, chiều cao nồi là 0,8m để nấu nước lèo bún bò Huế. Sau khi vớt xương và các gia vị thì lượng nước lèo trong nồi chiếm 90% thể tích nồi.

a) Tính thể tích mỗi nồi nước lèo nhà bạn An nấu, biết lượng nước lèo ở mỗi nồi là như nhau (ghi kết quả đến cm^3).

b) Để bán bún bò, mỗi lần bán 1 tô bún mẹ bạn An dùng cái vá có dạng nửa hình cầu bán kính 6,5cm và mức đúng 1 vá cho mỗi tô. Hỏi sau khi bán hết bún bò thì quán nhà bạn An thu được bao nhiêu tiền? Biết giá 1 tô bún bò là 35000 đồng. Biết công thức tính thể tích hình trụ là

$V = 3,14 \cdot r^2 \cdot h$ và công thức tính thể tích hình cầu là $V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot R^3$.

Lời giải

a) Đổi $0,3\text{m} = 30\text{cm}$, $0,8\text{m} = 80\text{cm}$

Thể tích mỗi nồi nước lèo nhà bạn An nấu: $2 \cdot 3,14 \cdot 30^2 \cdot 80 \cdot 90\% = 406944 \text{ (cm}^3\text{)}$

b) Thể tích 1 vá nước lèo là: $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 6,5^3 \approx 574,88 \text{ (cm}^3\text{)}$

Sau khi bán hết bún bò thì quán nhà bạn An thu được số tiền là: $707 \cdot 35000 = 24745000$ (đồng).

Câu 49: Một xe chở xăng dầu, bên trên có một bồn chứa hình trụ dài $2,6m$ và đường kính đáy là $1,4m$. Theo tiêu chuẩn an toàn thì bồn chỉ chứa được tối đa 80% thể tích khi xe di chuyển trên đường.



- a) Mỗi chuyến xe có thể chở nhiều nhất bao nhiêu lít nhiên liệu? (cho $\pi = 3,14$).
- b) Trên đường vận chuyển, xe chở xăng dầu trên phải đi qua 1 cây cầu có tải trọng 5 tấn. Biết xe khi chưa chở hàng nặng 3 tấn. Hỏi nếu muốn đi qua cây cầu đó thì xe chở tối đa bao nhiêu lít xăng? Biết khối lượng riêng của xăng là $0,713\text{ kg / lít}$ (Các kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

- a) Bán kính đáy: $1,4 : 2 = 0,7(m)$

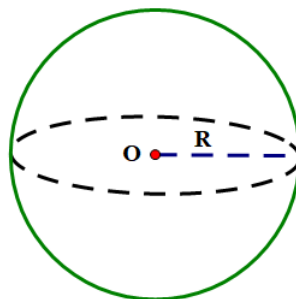
Số lít nhiên liệu xe có thể chở nhiều nhất: $3,14 \cdot 2,6 \cdot 0,7^2 \cdot 80\% \approx 3,2(m^3) = 3200$ (lít)

- b) Khối lượng xăng xe có thể chở tối đa để qua cầu: $5 - 3 = 2$ (tấn) $= 2000(kg)$

Số lít xăng xe chở tối đa để qua cầu: $2000 : 0,713 \approx 2805$ (lít).

BÀI TOÁN 3: HÌNH CẦU

1. CÔNG THỨC



Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một tháp nước có bể chứa là một hình cầu, đường kính bên trong của bể đo được là 6 mét. Người ta dự tính lượng nước đựng đầy trong bể đủ dùng cho một khu dân cư trong 5 ngày. Cho biết khu dân cư đó có 1304 người. Hỏi người ta đã dự tính mức bình quân mỗi người dùng bao nhiêu lít nước trong một ngày? (Lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Bán kính hình cầu của bể nước là: $R = 6 : 2 = 3(m)$

Thể tích của bể nước hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^3 = 113,04(m^3) = 113040$ (lít)

Lượng nước chứa đầy bể xấp xỉ 113040 lít nước

Lượng nước trung bình mỗi người dùng trong một ngày là: $113040 : 1304 \approx 86,9$ (lít).

Câu 2: Một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng 5cm, tính thể tích của viên bi đó. (Kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân) (Lấy $\pi \approx 3,14$).

Lời giải

Thể tích viên bi là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3 \approx 523,33$ (cm³).

Câu 3: Cần phải có ít nhất bao nhiêu lít nước để thay nước cho một chậu thủy tinh nuôi cá cảnh? (Chậu nước được xem như một phần mặt cầu đường kính 3 dm). Biết lượng nước đổ vào chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích hình cầu và 1 lít = 1 dm³.



Lời giải

Bán kính hình cầu là $R = \frac{d}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$ (dm).

Thể tích hình cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (1,5)^3 = 4,5\pi$ (dm³).

Lượng nước ít nhất cần thay cho bể cá là $\frac{2}{3} \cdot 4,5\pi = 3\pi \approx 9,42$ dm³ = 9,42 (lít).

Câu 4: Tính diện tích da dùng để làm quả bóng hình cầu nếu không tính đến tỉ lệ hao hụt. Biết khi bơm căng thì quả bóng có đường kính là 14 cm.

Lời giải

Diện tích da cần dùng để làm quả bóng là $\pi \cdot 14^2 = 196\pi$ (cm²).

Câu 5: Tính thể tích không khí (km³) trong tầng đối lưu của trái đất biết rằng bán kính trái đất là khoảng 6371 km và tầng đối lưu được tính từ mặt đất cho đến khoảng 10 km so với mặt đất. (làm tròn đến km³)?

Lời giải

Thể tích trái đất: $V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6371^3$ (km³).

Thể tích tính đến hết tầng đối lưu: $V_2 = \frac{4}{3}\pi (6371 + 10)^3$ (km³).

Do đó thể tích không khí tầng đối lưu:

$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot (6381^3 - 6371^3) \approx 5\,108\,654\,963$ (km³).

Câu 6: Một lọ nước hoa có hình dạng bên ngoài là hình cầu làm bằng thủy tinh có đường kính 8 cm. Lòng bên trong của lọ cũng là một hình cầu nhỏ cùng tâm với hình cầu bên ngoài để chứa nước hoa. Hỏi phải làm lọ nước hoa có độ dày thành lọ là bao nhiêu cm để chứa được lượng nước hoa bên trong là 120 ml? (làm tròn đến hàng phần mười). Biết rằng lượng nước hoa được chứa trong lọ chiếm 80% thể tích của phần có thể chứa nước hoa.



Lời giải

Thể tích lượng nước hoa: $V = 120(\text{ml}) = 120(\text{cm}^3)$

Thể tích của hình cầu chứa nước hoa: $V = 120 : 80\% = 150(\text{cm}^3)$

Bán kính của hình cầu chứa nước hoa:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow 150 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R^3 = \frac{225}{2\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}}(\text{cm})$$

$$\text{Độ dày thành lọ nước hoa: } \frac{8}{2} - \sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}} \approx 0,7(\text{cm}).$$

Câu 7: Một quả bóng bàn dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

Lời giải

Vì quả bóng bàn hình cầu có bán kính $R = 2\text{cm}$ nên diện tích bề mặt quả bóng là:

$$S_{\text{cầu}} = 4\pi R^2 = 4.3,14.2^2 = 50,24(\text{cm}^2)$$

Vậy diện tích bề mặt quả bóng bàn là **50,24 cm²**.

Câu 8: Một quả bóng bằng da có đường kính 22cm. Tính diện tích da cần dùng để làm quả bóng nếu không tính tỉ lệ hao hụt (lấy $\pi = 3,14$).

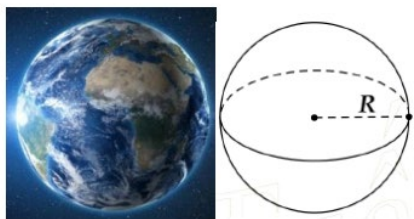
Lời giải

Vì quả bóng da hình cầu có bán kính $R = \frac{22}{2} = 11(\text{cm})$ nên diện tích bề mặt của quả bóng là:

$$S = 4\pi R^2 = 4.3,14.11^2 = 1519,8(\text{cm}^2).$$

Vậy diện tích da cần dùng để làm quả bóng là **1519,8 (cm²)**.

Câu 9: Trái Đất, hành tinh chúng ta đang sống, dạng hình cầu có bán kính là 6370 km. Biết rằng 29% diện tích bề mặt Trái Đất không bị bao phủ bởi nước bao gồm núi, sa mạc, cao nguyên, đồng bằng và các địa hình khác. Tính diện tích bề mặt mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước. (Lấy $\pi = 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



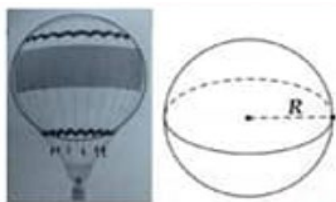
Lời giải

Vì Trái Đất hình cầu có bán kính $R = 6370 \text{ (km)}$ nên diện tích bề mặt Trái Đất là:

$$S = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 6370^2 = 509645864 \text{ (km}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước là
 $(100\% - 29\%) \cdot 509645864 = 361848563 \text{ (km}^2\text{)}.$

Câu 10: Ngày 4-6-1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát ra khinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính $11m$ và được làm bằng vải dù để là khinh khí cầu đó (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Diện tích mặt cầu: $S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2$

Lời giải

Vì khinh khí cầu có bán kính $R = 11 : 2 = 5,5m$

$$\text{Nên } S = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot (5,5)^2 = 379,94m^2$$

Vậy diện tích bằng vải dù để là khinh khí cầu là $379,94m^2$

Câu 11: Một tháp nước có bể chứa hình cầu, đường kính bên trong của bể đo được là $6m$



a) Tính thể tích của tháp nước đó?

b) Người ta dự tính lượng nước đựng đầy trong bể đủ dùng cho một khu dân cư trong 5 ngày. Cho biết khu dân cư đó có 1304 người. Hỏi người ta đã dự tính mức bình quân mỗi người dùng bao nhiêu lít nước trong một ngày? (Lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

a) Vì tháp nước hình cầu có $R = \frac{6}{2} = 3m$ nên thể tích của tháp nước là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^3 = 113,04(m^3) = 113040(l)$$

b) Một ngày khu dân cư dùng hết số nước là: $113040 : 5 = 22608 (l)$

Vậy trong một ngày mức bình quân mỗi người dùng: $22608 : 1304 = 17,34l$

Câu 12: Một quả pha lê hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $144\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích quả pha lê đó.



Lời giải

Vì quả pha lê hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $144\pi \text{ cm}^2$ nên:

$$S = 4\pi R^2$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \sqrt{\frac{144\pi}{4\pi}} = 6 \text{ cm}$$

Vậy thể tích của quả cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$

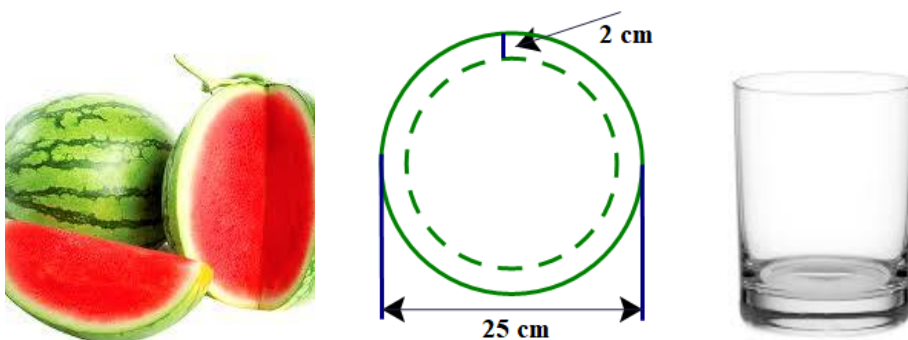
BÀI TOÁN 4: CÂU TOÁN TỔNG HỢP CÁC KHỐI LIÊN KẾT

Câu 1: Giả sử một quả dưa hấu không hạt ruột đỏ dạng hình cầu có đường kính 25 cm và phần vỏ dày 2 cm .

a) Coi phần ruột màu đỏ cũng có dạng hình cầu và đặc. Thể tích phần ruột màu đỏ chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích quả dưa hấu? (Kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).

Cho biết công thức tính thể tích hình cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, với R là bán kính hình cầu, $\pi = 3,14$.

b) Người ta ép phần ruột màu đỏ của quả dưa hấu trên thì thể tích nước ép thu được bằng 80% thể tích phần ruột. Nước ép dưa hấu được đựng trong một ly thủy tinh, phần lòng trong dạng hình trụ có chiều cao 10 cm và đường kính đáy lòng trong là 5 cm . Mỗi ly chỉ chứa 70% nước ép dưa hấu. Hỏi dùng nước ép của một quả dưa hấu nói trên thì làm ra bao nhiêu ly nước ép dưa hấu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

a) Thể tích phần ruột quả dưa hấu là: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{25-4}{2}\right)^3 = 4846,59 (\text{cm}^3)$.

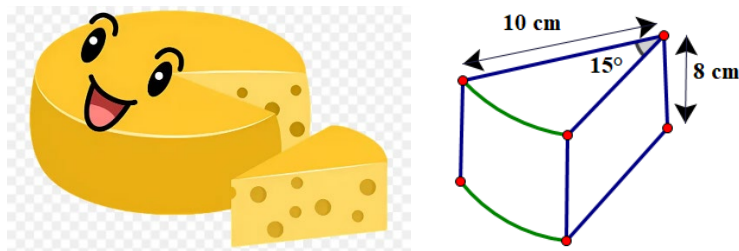
Phần trăm thể tích phần ruột so với quả dưa là:
$$\frac{\frac{4}{3} \cdot 3,14 \left(\frac{25-4}{2} \right)^3}{\frac{4}{3} \cdot 3,14 \left(\frac{25}{2} \right)^3} = \frac{9261}{15625} \approx 59,27\%$$

b) Thể tích lòng trong ly thủy tinh là: $\pi r^2 h = 3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 10 = 196,25 (\text{cm}^3)$.

Số ly nước ép dưa hấu là $\frac{4846,59.80\%}{196,25.70\%} \approx 28,2$ (ly).

Câu 2: Hình bên là một mẫu pho mát được cắt ra từ một khối pho mát dạng hình trụ (có các kích thước như hình vẽ). Biết khối lượng riêng của pho mát là 3 g/cm^3 và công thức khối lượng riêng là

$$D = \frac{m}{V} \quad (\text{Trong đó } D (\text{g/cm}^3) \text{ là khối lượng riêng, } m(\text{g}) \text{ là khối lượng, } V(\text{cm}^3) \text{ là thể tích}).$$



a) Hãy tính diện tích 1 mặt đáy và khối lượng của mẫu pho mát trên. Biết thể tích hình trụ $V_{\text{trụ}} = S \cdot h$. Trong đó S là diện tích 1 đáy và h là chiều cao của hình trụ.

b) Chiếc hộp thực phẩm hình hộp chữ nhật có kích thước lần lượt là 189 mm, 103 mm, 101 mm (xem hình bên) có thể chứa hết phần còn lại của khối pho mát không?



Lời giải

a) Diện tích 1 mặt đáy là: $S_{\text{quat}} = \frac{n^\circ \pi R^2}{360^\circ} = \frac{15^\circ \cdot \pi \cdot 10^2}{360^\circ} = \frac{25}{6} \pi (\text{cm}^2)$

Khối lượng của mẫu pho mát trên là: $\frac{25}{6} \pi \cdot 8 \cdot 3 = 100\pi \approx 314,2 (\text{g})$

b) Thể tích hình hộp là: $V_{\text{hộp}} = \frac{189}{10} \cdot \frac{103}{10} \cdot \frac{101}{10} \approx 1966,2 (\text{cm}^3)$

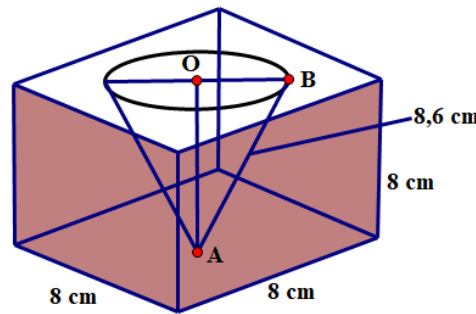
Thể tích phần còn lại của pho mát là:

$$V_{\text{pho mát}} = \pi \cdot R^2 \cdot h - \frac{25}{6} \pi \cdot 8 = \pi \cdot 10^2 \cdot 8 - \frac{25}{6} \pi \cdot 8 = \frac{2300}{3} \pi \approx 2408,6 (\text{cm}^3)$$

Vì $V_{\text{hộp}} < V_{\text{pho mát}}$ nên chiếc hộp thực phẩm hình hộp chữ nhật không thể chứa hết phần còn lại của khối pho mát.

Vậy dùng nước ép của một quả dưa hấu nói trên thì đủ nguyên liệu làm ra 28 ly.

Câu 3: Một khối gỗ hình lập phương cạnh 8 cm, được khoét bởi một hình nón, đường sinh $AB = 8,6$ cm . và đỉnh chạm mặt đáy của khối gỗ (xem hình bên). Hãy tính bán kính đáy của hình nón và thể tích của khối gỗ còn lại. Biết $V_{\text{lập phương}} = a^3$ (a là cạnh hình lập phương); $V_{\text{hình nón}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ ($R = OB$ là bán kính mặt đáy, $h = OA$ là chiều cao của hình nón); $\pi \approx 3,14$.



Lời giải

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O , ta có: $OA^2 + OB^2 = AB^2$ (Định lý Pythagore)

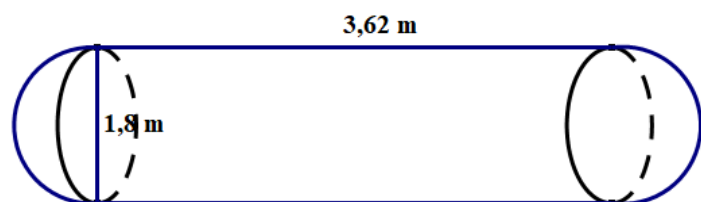
$$OB^2 = AB^2 - OA^2 = 8,6^2 - 8^2 = 9,96 \Leftrightarrow OB \approx 3,16 \text{ cm}$$

$$V_{\text{lập phương}} = 8^3 = 512 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{hình nón}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 3,16^2 \cdot 8 = 83,61 \text{ cm}^3$$

$$\text{Thể tích của khối gỗ còn lại: } V_{\text{lập phương}} - V_{\text{hình nón}} = 512 - 83,61 = 428,39 \text{ cm}^3$$

Câu 4: Một xe bồn chở nước sạch cho một khu dân cư có 200 hộ dân. Bồn xe có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên dưới, mỗi đầu của bồn xe là nửa hình cầu. Xe chở đầy nước và lượng nước chia đều cho từng hộ dân. Tính xem mỗi hộ dân được nhận bao nhiêu lít nước sạch.



Lời giải

Bán kính mặt cầu là $R = 1,8 : 2 = 0,9 \text{ m}$

$$\text{Thể tích của bồn chở nước sạch là: } \frac{4}{3}\pi \cdot 0,9^3 + \pi \cdot 0,9^2 \cdot 3,62 = 12,265 \text{ (m}^3\text{)}$$

Đổi $12,265 \text{ m}^3 = 12265$ lít nước.

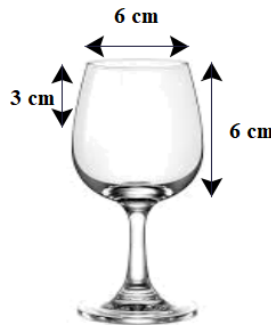
Số lít nước sạch mỗi hộ dân nhận được là: $12265 : 200 \approx 61,3$ lít nước.

Câu 5: Một hãng sản xuất rượu vang đã đặt hàng một công ty sản xuất thủy tinh một kiểu ly có phần đựng rượu cao 6 cm, đường kính miệng ly là 6 cm. Biết rằng để tạo thành một cái ly là sự kết hợp gồm thành ly là một hình trụ cao 3 cm, phần đáy ly là một nửa khối cầu có đường kính bằng với đường kính của miệng ly.

a) Hãy tính thể tích rượu được chứa tối đa khi đổ vào ly? Cho biết: $V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h$ với r là bán

kính đáy; h là chiều cao hình trụ. $V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3} \pi R^3$ với R là bán kính hình cầu.

b) Ông A cần chuẩn bị một số chai rượu vang, lượng rượu trong mỗi chai là 0,85 lít. Biết rằng trong bữa tiệc có 12 người (bao gồm luôn ông A), mỗi người uống 4 ly rượu, lượng rượu được rót bằng 60% thể tích của ly. Ông A cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu chai rượu vang?



Lời giải

a) Thể tích rượu được chứa tối đa khi đổ vào ly là:

$$V_{\text{trụ}} + \frac{1}{2} V_{\text{cầu}} = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \right) = 45\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

b) Lượng rượu khi được rót vào một ly là: $60\% \cdot 45\pi = 27\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Số ly rượu được uống trong bữa tiệc có 12 người là: $12 \cdot 4 = 48$ (Ly).

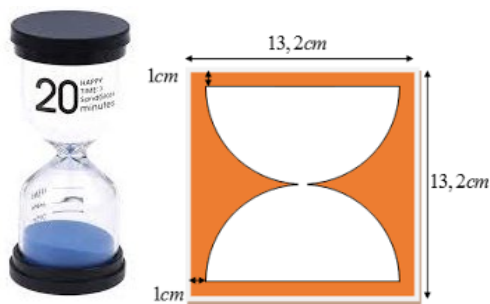
Tổng số lượng rượu được sử dụng trong bữa tiệc là: $48 \cdot 27\pi = 1296\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

$$0,85 \text{ lít} = 0,85 \text{ dm}^3 = 850 \text{ cm}^3$$

Ta có: $1296\pi : 850 = 4,79$ (chai).

Vậy ông A cần chuẩn bị ít nhất 5 chai rượu.

Câu 6: Một chiếc đồng hồ cát bằng thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau (Hình vẽ bên với các kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này, giả sử phần thông nhau không đáng kể). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

Bán kính của phần hình cầu là: $r = (13,2 - 2 \cdot 1) : 2 = 5,6 \text{ cm}$.

Bán kính đáy hình trụ là: $R = 13,2 : 2 = 6,6 \text{ cm}$.

Thể tích hình trụ là: $S_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 6,6^2 \cdot 13,2 = 574992\pi (\text{cm}^3)$

Thể tích hai nửa hình cầu là: $S_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{87808}{375} \pi (\text{cm}^3)$

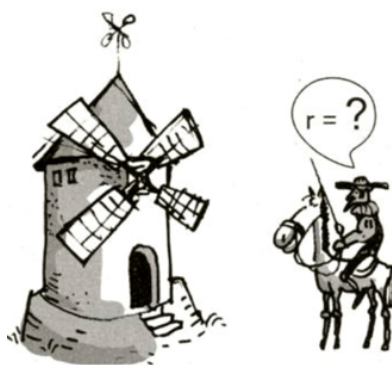
Thể tích thủy tinh cần để làm đồng hồ là: $S = S_1 - S_2 = 574992\pi - \frac{87808}{375} \pi \approx 1805655,02 (\text{cm}^3)$

Vậy thể tích cần tính khoảng $1805655,02 (\text{cm}^3)$.

Câu 7: Cối xay gió của Đôn-ki-hô-tê có dạng một hình nón. Chiều cao của hình nón là 42 cm và thể tích của nó là 17600 cm^3 . Em hãy giúp chàng Đôn-ki-hô-tê tính:

a) Bán kính của hình nón.

b) Diện tích gạch cần để xây ngôi nhà hình trụ bên dưới, biết nhà có chiều cao 250 cm. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất với đơn vị đề-xi-mét.



Lời giải

a) $V = 17600 \text{ cm}^3 = 17,6 \text{ dm}^3$; $42 \text{ cm} = 4,2 \text{ dm}$.

Thay $V = 17,6 \text{ dm}^3$ vào công thức ta được: $17,6 = \frac{1}{3} \cdot 4,2 \pi R^2$

$R \approx 2,0 \text{ dm}$

b) Đổi: $250 \text{ cm} = 2,5 \text{ dm}$.

Diện tích xung quanh hình trụ bên dưới:

$$S = 2\pi Rh \approx 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{17,6 \cdot 3 : (4,2 \cdot 3,14)} \cdot 25 = 314,1 (\text{dm}^2)$$

Câu 8: Một bình nước hình hộp chữ nhật có chiều rộng, chiều dài đáy bình và chiều cao lần lượt tỉ lệ với 2;3 và 5. Biết chiều cao của bình là 20 cm.

a) Tính thể tích nước tối đa mà bình chứa được.

b) Bình nước được rót ra các ly hình trụ có đường kính đáy là 5 cm, chiều cao 12 cm. Biết bình đựng đầy nước và rót vào ly 90% thể tích của ly. Tính số ly nước chứa hết số nước từ bình.



Lời giải

a) Gọi $x, y(\text{cm})$ lần lượt là chiều rộng và chiều dài của bình nước ($x, y > 0$)

Theo đề Câu ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{20}{5} = 4$

Chiều rộng đáy bình: $4 \cdot 2 = 8(\text{cm})$; Chiều dài đáy bình: $4 \cdot 3 = 12(\text{cm})$

Thể tích nước tối đa bình nước chứa được: $8 \cdot 12 \cdot 20 = 1920 (\text{cm}^3)$

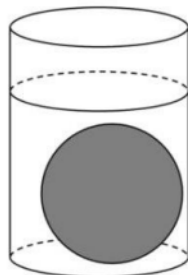
b) Thể tích ly nước: $\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 12 = 75\pi (\text{cm}^3)$

Thể tích nước đổ vào 1 ly: $90\% \cdot 75\pi = 67,5 \cdot \pi (\text{cm}^3)$

Số ly nước có thể đổ lượng nước cần từ bình nước trên: $\frac{1920}{67,5 \cdot \pi} \approx 9,1$ ly.

Vậy số ly nước cần dùng là 10 ly.

Câu 9: Một cốc thủy tinh hình trụ đựng đầy nước có chiều cao bằng 10 cm và thể tích bằng $90\pi \text{cm}^3$. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính lượng nước bị tràn ra khỏi cốc? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

Bán kính của cốc nước là: $R = \sqrt{\frac{90\pi}{\pi \cdot 10}} = 3(\text{cm})$.

Vì viên bi sắt có bán kính bằng bán kính đáy cốc nên bán kính viên bi cũng là 3 cm.

Thể tích nước tràn ra ngoài là: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi (\text{cm}^3) \approx 113,1 (\text{cm}^3)$.

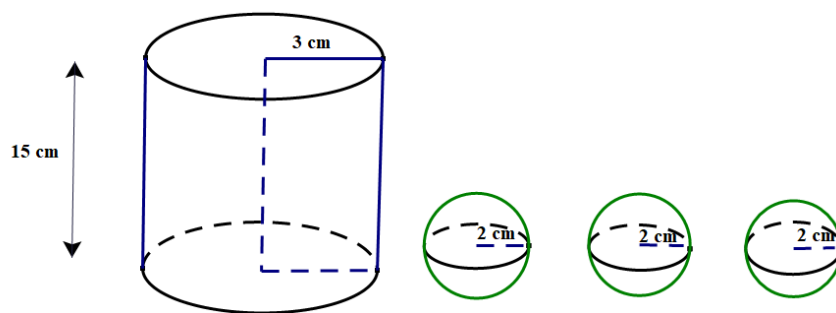
Câu 10: Một cốc nước hình trụ có chiều cao 15cm, bán kính đáy là 3cm và lượng nước ban đầu trong cốc cao 12cm. Thả chìm hoàn toàn vào cốc nước 3 viên bi thủy tinh hình cầu có cùng bán kính là 2cm. (Giả sử độ dày của thành cốc và đáy cốc không đáng kể - mô phỏng bằng hình vẽ)

a) Tính thể tích của nước trong cốc.

b) Khi thả 3 viên bi hình cầu vào cốc thì nước trong cốc có bị tràn ra ngoài không? Nếu có hãy tính thể tích nước bị tràn ra ngoài?

(Biết công thức tính thể tích của hình trụ là $V = \pi r^2 h$, thể tích hình cầu là $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, lấy

$\pi = 3,14$ các kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)



Lời giải

a) Thể tích của nước trong cốc: $V = \pi r^2 h = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 12 = 339,12 (\text{cm}^3)$

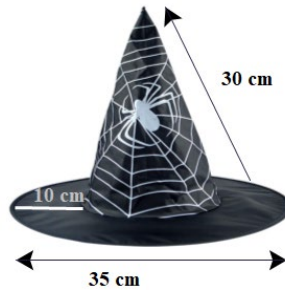
b) Thể tích của cốc hình trụ: $V = \pi r^2 h = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 15 = 423,9 (\text{cm}^3)$

Thể tích của nước trong cốc và thể tích của 3 viên bi hình cầu:

$$339,12 + 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 2^3 = 439,6 (\text{cm}^3)$$

Tổng thể tích của nước và bi lớn hơn thể tích của cốc nên nước bị tràn ra ngoài, thể tích bị tràn là: $439,6 - 423,9 = 15,7 (\text{cm}^3)$

Câu 11: Một cái mũ như hình bên, gồm một hình nón và một hình vành khăn. Tính diện tích vải cần dùng để tạo ra bề mặt bên ngoài của cái mũ. Biết công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi r l$ (r là bán kính đáy hình nón, l là độ dài đường sinh hình nón), công thức tính diện tích hình vành khăn là $S = \pi (R^2 - r^2)$ (R là bán kính đường tròn lớn, r là bán kính đường tròn nhỏ) và diện tích vải bị hao hụt khi may nón là 17% (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Bán kính đường tròn lớn là $R = \frac{35}{2} = 17,5(\text{cm})$.

Bán kính đường tròn nhỏ là $r = \frac{35 - 2 \cdot 10}{2} = 7,5(\text{cm})$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_1 = \pi r l = \pi \cdot 7,5 \cdot 30 = 225\pi (\text{cm}^2)$.

Diện tích hình vành khăn là $S_2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi (17,5^2 - 7,5^2) = 250\pi (\text{cm}^2)$.

Diện tích vải cần dùng để tạo ra mặt ngoài của mũ là:

$$S = (S_1 + S_2)(1 + 17\%) = (225\pi + 250\pi)(1 + 17\%) \approx 1746 (\text{cm}^2)$$

Câu 12: Cho hình bên là một thúng gạo vun đầy. Thúng có dạng nửa hình cầu với đường kính 50 cm, phần gạo vun lên có dạng hình nón cao 15 cm.



a) Tính thể tích phần gạo trong thúng (làm tròn đến dạng 0,1).

Biết thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, hình trụ là $V = \pi R^2 h$ và hình cầu là $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

b) Nhà Danh dùng lon sữa bò cũ có dạng hình trụ (bán kính đáy bằng 5 cm, chiều cao 15 cm) để đựng gạo mỗi ngày. Biết mỗi ngày nhà Danh ăn 5 lon gạo và mỗi lần đựng thì lượng gạo chiếm 90% thể tích lon. Hỏi với lượng gạo ở thúng trên thì nhà Danh có thể ăn nhiều nhất là bao nhiêu ngày.



Lời giải

a) Bán kính hình cầu là: $50:2 = 25(\text{cm})$

$$\begin{aligned} \text{Thể tích gạo trong thúng là: } V_{\text{gao}} &= V_{\text{nón}} + \frac{1}{2} V_{\text{h.cầu}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \\ &= \frac{1}{3} \pi 25^2 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 25^3 = \frac{40625}{3} \pi \approx 42542,4 (\text{cm}^3). \end{aligned}$$

b) Thể tích gạo 1 lần đong là: $90\% \pi R^2 h = 0,9 \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = \frac{675}{2} \pi (\text{cm}^3).$

Thể tích gạo 1 ngày nhà Danh ăn là: $5 \cdot \frac{675}{2} \pi = \frac{3375}{2} \pi (\text{cm}^3).$

Với lượng gạo trong thúng số ngày nhiều nhất nhà Danh có thể ăn được là:

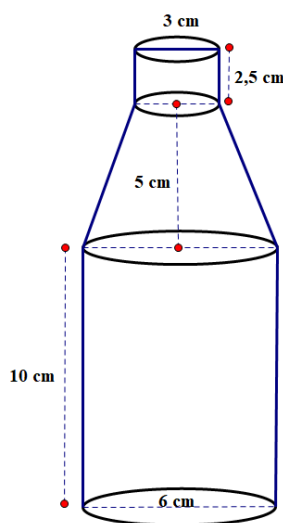
$$\frac{40625}{3} \pi : \left(\frac{3375}{2} \pi \right) \approx 8 \text{ ngày}$$

Câu 13: Một chai nước suối của hãng A được thiết kế gồm ba phần: phần miệng chai có dạng hình trụ với chiều cao 2,5 cm và đường kính đường tròn đáy là 3 cm, phần cổ chai có dạng hình nón cụt với chiều cao 5 cm, phần thân chai có dạng hình trụ với chiều cao 10 cm và đường kính đường tròn đáy là 6 cm (như hình vẽ).

a) Tính thể tích của chai nước (làm tròn đến hàng đơn vị). Biết thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h$ với R là bán kính đường tròn đáy, h là chiều cao hình trụ, thể tích hình nón cụt là

$V = \frac{1}{3} \pi h' (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$ với r_1, r_2 là hai bán kính đường tròn đáy của hình nón cụt, h' là chiều cao của hình nón cụt.

b) Người ta đóng nước vào chai và để tránh tình trạng dẫn nổ vì nhiệt, nhà sản xuất chỉ đóng vào chai một lượng nước bằng 90% so với thể tích của chai nước. Đồng thời Viện y tế quốc gia Hoa Kỳ (NIH) khuyến nghị mỗi người nên uống đủ 2 lít nước mỗi ngày. Hỏi cần mua tối thiểu bao nhiêu chai nước suối của hãng A để đảm bảo theo khuyến nghị của NIH?



Lời giải

a) Thể tích của hình trụ nhỏ là: $V_1 = \pi R_1^2 h_1 = \pi \left(\frac{3}{2} \right)^2 2,5 \approx 18 (\text{cm}^3).$

Thể tích của hình trụ lớn là: $V_2 = \pi R_2^2 h_2 = \pi \left(\frac{6}{2}\right)^2 10 \approx 283 (\text{cm}^3)$.

Thể tích của hình nón cụt là:

$$V_3 = \frac{1}{3} \pi \cdot h_3 (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) = \frac{1}{3} \pi \cdot 5 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{2} \right] \approx 82 (\text{cm}^3)$$

Thể tích của chai nước là: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 18 + 283 + 82 = 383 (\text{cm}^3)$.

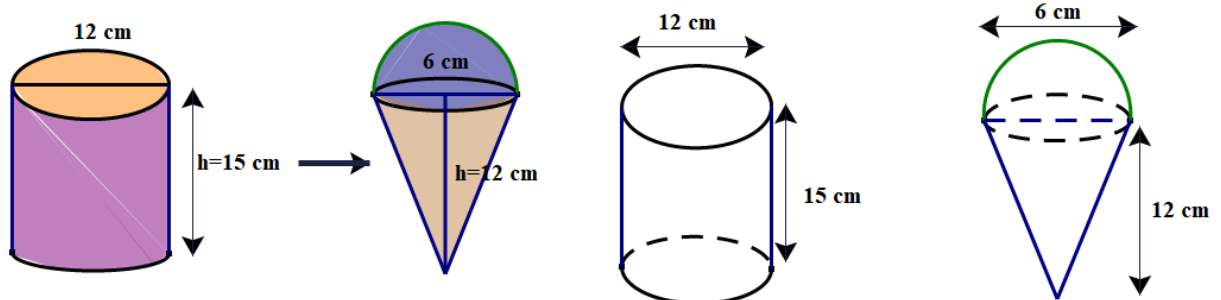
b) Đồi 2 lít = 2000cm^3

Thể tích nước được đóng trong chai là: $V_n = 90\% \cdot 383 \approx 345 (\text{cm}^3)$.

Số chai nước suối tối thiểu cần mua để đảm bảo theo khuyến nghị NIH là: $\frac{2000}{345} \approx 6$ (chai).

Vậy cần mua tối thiểu 6 chai để đảm bảo theo khuyến nghị NIH.

Câu 14: Một hộp kem hình trụ có đường kính 12 cm và chiều cao 15 cm đựng đầy kem. Kem sẽ được người bán hàng chia vào các bánh ốc quế hình nón có chiều cao 12 cm và đường kính 6 cm, có hình bán cầu trên đỉnh như hình vẽ.



a) Tính thể tích hộp kem hình trụ?

b) Tính số que kem có thể chia được? Biết rằng người bán hàng đã chia kem vào bánh ốc quế ít hơn 5% so với

thể tích thực của chiếc bánh như hình vẽ trên tính luôn phần bán cầu. Cho biết công thức tính thể tích:

Hình trụ là: $V = S \cdot h$ trong đó S là diện tích đáy hình trụ, h là chiều cao hình trụ

Hình nón: $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ trong đó S là diện tích đáy hình nón, h là chiều cao hình nón

Hình cầu: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ trong đó $\pi \approx 3,14$; R là bán kính hình cầu.

Lời giải

a) Thể tích hộp kem hình trụ: $V = S \cdot h = \pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 15 \approx 1695,6 (\text{cm}^3)$.

b) Thể tích que kem hình bánh ốc quế là: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \approx 131,88 (\text{cm}^3)$.

Lượng kem mà người bán bỏ vào bánh là: $V = 131,88.95\% = 125,29(\text{cm}^3)$.

Số que kem có thể chia được là: $1695,6 : 125,29 \approx 13,58 \approx 16$ (que).

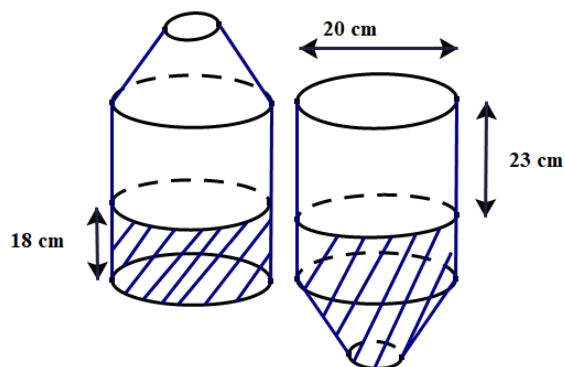
Vậy ta có thể chia được 16 que kem.

Câu 15: Hình bên miêu tả một chiếc bình đựng nước trong hai trường hợp: khi được đặt thẳng đứng và khi úp ngược lại. Biết phần gạch chéo trong hình là phần chứa nước và các số đo như trong hình vẽ. Biết rằng công thức tính thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 \cdot h$ với R là bán kính đáy và h là chiều cao hình trụ.

a) Hãy tính thể tích nước trong bình.

b) Hãy tính thể tích của bình?

(Các kết quả trong Câu làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



Lời giải

a) Thể tích của lượng nước trong chai là: $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot 18 \approx 5654,9(\text{cm}^3)$

b) Thể tích của chai là: $V = 5654,9 + \pi \cdot 10^2 \cdot 23 \approx 12880,6(\text{cm}^3)$.

Câu 16: Một bình nước có dạng hình trụ, phần lòng bên trong của bình nước cũng có dạng hình trụ có chiều cao là 20 cm và chu vi mặt đáy là $10\pi\text{cm}$.



a) Tính thể tích nước có thể chứa trong bình khi đổ đầy. (Kết quả chính xác hai chữ số thập phân)

b) Hiện tại mực nước có trong bình cao 10 cm, một con quạ muốn uống nước trong bình thì cần phải thả vào bình những viên sỏi có thể tích tương đương một khối cầu đường kính là 4 cm. Hỏi con quạ phải thả tối thiểu vào trong bình bao nhiêu viên sỏi như nhau để có thể uống nước trong bình, biết tầm với của mỏ con quạ là 6 cm.

Lời giải

a) $C = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{C}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5(\text{cm})$

Thể tích nước có thể chứa trong bình khi đổ đầy:

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = 1570,796327 \approx 1570,80 (\text{cm}^3).$$

b) Tầm với của mỏ quạ là 6 cm nên chiều cao của nước tối thiểu trong bình để con quạ có thể uống được là: $20 - 6 = 14 \text{ cm}$.

Chiều cao nước cần dâng lên tối thiểu là: $14 - 10 = 4 \text{ cm}$.

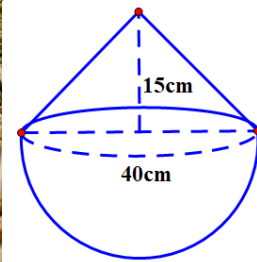
Thể tích của đá bỏ vào (hay thể tích nước dâng lên) là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 = 100\pi (\text{cm}^3)$.

$$\text{Thể tích một viên đá: } V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (4:2)^3 = \frac{32\pi}{3} (\text{cm}^3)$$

$$\text{Số viên đá bỏ vào là: } 100 : \frac{32\pi}{3} = 2,9841551 \approx 3$$

Con quạ phải thả tối thiểu vào trong bình 3 viên sỏi như nhau để có thể uống nước trong bình.

Câu 17: Một người nông dân gánh một quang gánh gồm 2 thúng gạo có kích thước và chứa lượng gạo hai bên như nhau. Một thúng gạo là nửa hình cầu có đường kính là 40 cm và để có thể đem được nhiều gạo hơn, người dân mới đổ đầy gạo vào thúng và vun gạo lên trên thành một hình nón có chiều cao 15 cm.



a) Tính lượng gạo trong 1 thúng của quang gánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

b) Người nông dân dùng lon sữa bò có dạng hình trụ có bán kính đáy 4 cm, chiều cao bằng 10 cm để đong gạo vào thúng. Mỗi lần đong được lượng gạo bằng 95% thể tích lon. Hỏi người nông dân cần đong ít nhất bao nhiêu lon gạo để đủ gạo cho quang gánh như trên. Biết thể tích hình nón $V = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot R^2 \cdot h$; thể tích hình cầu

$$V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot R^3; \text{ thể tích hình } V = 3,14 \cdot R^2 \cdot h.$$

Lời giải

a) Lượng gạo trong 1 thúng gạo là:

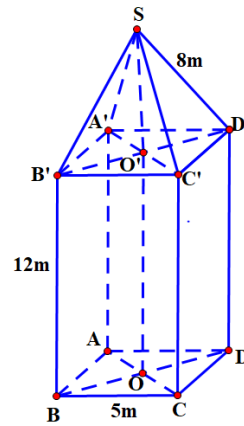
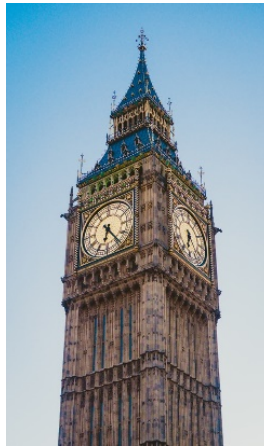
$$\frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 20^2 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 20^3 = \frac{69080}{3} \text{ cm}^3 \approx 23026,7 \text{ cm}^3$$

b) Lượng gạo 1 lon đong được vào thúng: $95\% \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10 = 477,28 \text{ cm}^3$.

Số lon gạo cần đong để đủ gạo cho quang gánh là: $(2 \cdot 23026,7) : 477,28 = 96,5$ lần.

Vậy cần đong ít nhất 97 lần sẽ đầy gạo vào quang gánh.

Câu 18: Một tháp đồng hồ có phần dưới có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh dài 5 m, chiều cao của hình hộp chữ nhật là 12 m. Phần trên của tháp có dạng hình chóp đều, các mặt bên là các tam giác cân chung đỉnh (hình vẽ). Mỗi cạnh bên của hình chóp dài 8 m.



- a) Tính theo mét chiều cao của tháp đồng hồ? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).
- b) Cho biết thể tích của hình hộp chữ nhật được tính theo công thức $V = S.h$, trong đó S là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của hình hộp chữ nhật. Thể tích của hình chóp được tính theo công thức $V = \frac{1}{3}S.h$, trong đó S là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của hình chóp. Tính thể tích của tháp đồng hồ này? (Làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

- a) Độ dài đường chéo $A'C'$ của hình vuông $A'B'C'D'$ là: $A'C' = 5\sqrt{2}$ m.

$$\text{Suy ra } O'C' = \frac{A'C'}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ m.}$$

Áp dụng định lí Pythagore cho $\triangle SO'C'$ vuông tại O' ta có:

$$SC'^2 = SO'^2 + O'C'^2 \Rightarrow 8^2 = SO'^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow SO'^2 = \frac{103}{2} \Rightarrow SO' \approx 7,2$$

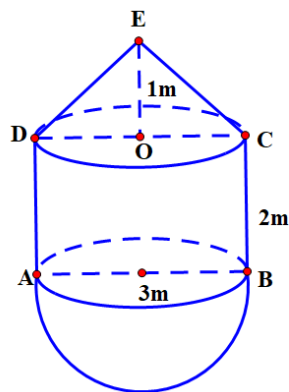
Vậy chiều cao của tháp khoảng 19,2 m.

- b) Thể tích của hình hộp chữ nhật: $V_1 = S \cdot h = 5 \cdot 5 \cdot 12 = 300 \text{ m}^3$.

$$\text{Thể tích của hình chóp: } V_2 = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}5 \cdot 5 \cdot 7,2 = 60 \text{ m}^3.$$

$$\text{Thể tích của tháp đồng hồ: } V = V_1 + V_2 = 300 + 60 = 360 \text{ m}^3.$$

Câu 19: Cho tháp nước như hình dưới đây, tháp được thiết kế gồm thân tháp có dạng khối trụ, phần mái phía trên có dạng khối nón và đáy là nửa khối cầu. Không gian bên trong toàn bộ tháp được minh hoạ theo hình vẽ với đường kính đáy hình trụ, hình cầu và của hình nón đều bằng 3 m, chiều cao hình trụ là 2 m, chiều cao hình nón là 1 m. Tính thể tích của toàn bộ không gian bên trong tháp nước.



Lời giải

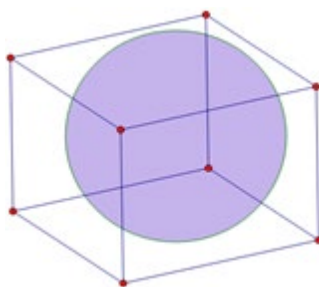
Thể tích của phần không gian bên trong của khối nón là $V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{3\pi}{4} (\text{m}^3)$.

Thể tích của phần không gian bên trong của khối trụ là $V_2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{9\pi}{2} (\text{m}^3)$.

Thể tích của phần không gian bên trong của nửa khối cầu là $V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9\pi}{4} (\text{m}^3)$.

Thể tích của toàn bộ không gian bên trong tháp nước là $V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{15}{2} \pi (\text{m}^3)$.

Câu 20: Đặt quả bóng vào trong một hộp hình lập phương sao cho quả bóng tiếp xúc với các mặt của hình lập phương đó. Hãy tính đường kính d của quả bóng, biết thể tích hình khối lập phương $V = 4096 \text{ cm}^3$



Lời giải

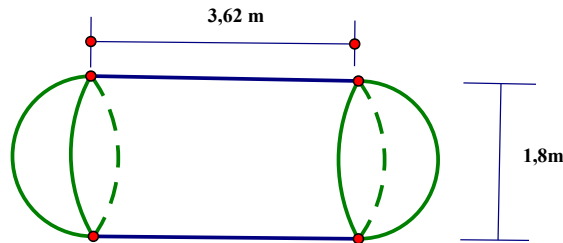
Độ dài một cạnh của hình lập phương là:

$$\sqrt[3]{4096} = 16 (\text{cm})$$

Đường kính của quả bóng chính bằng độ dài cạnh của hình lập phương.

Vậy quả bóng có đường kính là: 16 cm.

Câu 21: Một xe bồn chở nước sạch cho một khu chung cư có 200 hộ dân. Mỗi đầu của bồn chứa nước là 2 nửa hình cầu (có kích thước như hình vẽ). Bồn chứa đầy nước và lượng nước chia đều cho từng hộ dân. Tính xem mỗi hộ dân nhận được bao nhiêu lít nước sạch? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, lấy $\pi = 3,14$).



Lời giải

Hình trụ có bán kính đáy bằng bán kính hình cầu $R = 0,9$ (m) và có chiều cao $h = 3,62$ (m).

Thể tích phần hình trụ của bồn nước là: $V_1 = \pi R^2 \cdot h = 3,14 \cdot (0,9)^2 \cdot 3,62$ (m^3)

Hai đầu của bồn nước có thể tích bằng thể tích của một hình cầu có bán kính chính là bán kính của đáy hình trụ nên thể tích hai đầu của bồn nước là:

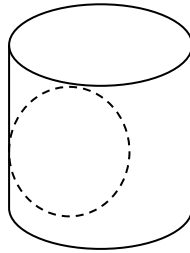
$$V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (0,9)^3$$
 (m^3)

Thể tích bồn nước là:

$$V = V_1 + V_2 = 3,14 \cdot (0,9)^2 \cdot 3,62 + \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (0,9)^3 \approx 12,26$$
 (m^3)

Lượng nước sạch mỗi hộ dân nhận được là: $12\,260:200 = 61,3$ (lít).

Câu 22: Một bình hình trụ có đường kính đáy 1dm, chiều cao 2dm bên trong có chứa viên bi hình cầu có bán kính 4cm. Hỏi phải đổ vào bình bao nhiêu lít nước để nước đầy bình (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Cho biết: $V_{\text{Trụ}} = \pi \cdot r^2 h$ với r là bán kính đáy; h là chiều cao hình trụ.

$$V_{\text{Cầu}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$
 với R là bán kính hình cầu

Lời giải

Đổi đơn vị: $4 \text{ cm} = 0,4 \text{ dm}$.

$$\text{Thể tích của viên bi là: } V_C = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot (0,4)^3 = \frac{32}{375} \pi$$
 (dm^3)

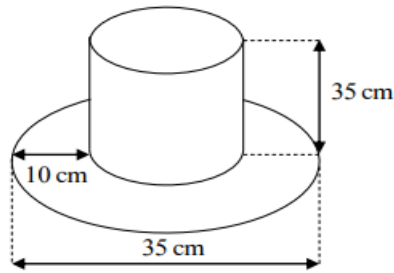
Hình trụ có bán kính đáy bằng $r = 0,5 \text{ dm}$ và có chiều cao $h = 2 \text{ dm}$.

$$\text{Thể tích của hình trụ là } V_T = \pi \cdot r^2 h = \pi \cdot (0,5)^2 \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$$
 (dm^3).

$$\text{Số nước cần phải đổ để nước đầy bình là: } \frac{\pi}{2} - \frac{32\pi}{375} = \frac{311\pi}{750} \approx 1,3$$
 (dm^3)

Vậy số nước cần phải đổ để nước đầy bình là: 1,3 lít.

Câu 23: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ.



Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm cái mũ đó biết rằng vành mũ hình tròn và ống mũ hình trụ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

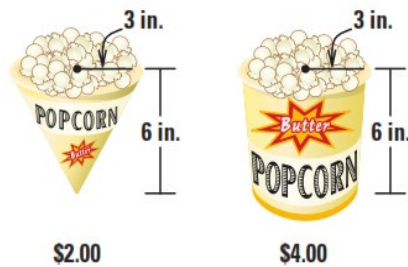
Ống mũ là hình trụ với chiều cao 35 cm, bán kính đáy $R = \frac{35 - 2 \cdot 10}{2} = 7,5 \text{ cm}$

Diện tích vải để làm ống mũ là: $S_1 = 2\pi Rh + \pi R^2 = 2\pi \cdot 7,5 \cdot 35 + \pi \cdot 7,5^2 = 506,25\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích vải để làm vành mũ là: $S_2 = \pi \cdot 35^2 - \pi \cdot 7,5^2 = 250\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy tổng diện tích vải cần để làm cái mũ là: $506,25\pi + 250\pi = 756,25\pi \text{ (cm}^2\text{)} \approx 2376 \text{ (cm}^2\text{)}$

Câu 24: Ở hai quầy hàng A và B trong hội hoa xuân, người ta bán hai loại bắp rang bơ lần lượt được



đựng trong hai loại hộp hình nón và hình trụ với thông tin về giá cả và định lượng như trong hình dưới đây. Vỏ hộp được làm bằng giấy, phần này nhận được tài trợ của công ty giấy, nên cả hai quầy không tốn chi phí làm vỏ hộp. Hỏi bạn H nên mua bắp rang bơ ở quầy A hay quầy B để bạn có lợi hơn? Tại sao?

Lời giải

Ta có: $V_A = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 18\pi$

$V_B = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi$

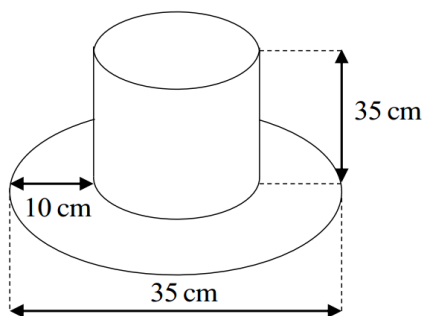
$\Rightarrow V_B = 3V_A$

Mà giá quầy hàng B gấp 2 lần giá quầy hàng A

Vậy bạn H nên mua bắp rang bơ ở quầy B thì có lợi hơn

Câu 25: Bạn đang tìm kiếm 1 món đồ mà mọi người nhìn vào biết ngay bạn là một Ảo thuật gia thực sự? Đó là một chiếc nón bằng vải nỉ được may theo phong cách cao bồi. Chiếc mũ ảo thuật này chính là sản phẩm mà bất kỳ các nhà ảo thuật gia nào cũng đều đội khi biểu diễn. Ảo thuật gia gỡ chiếc nón xuống và bắt đầu tạo nên phép màu. Đầu tiên chiếc nón huyền bí bắn ra một loạt bông tuyết với một tiếng nổ lớn. Sau tiếng nổ là một ngọn lửa bốc cháy dữ dội từ bên trong chiếc mũ, và điều đặc biệt nhất chính là từ trong ngọn lửa, chú chim bồ câu xuất hiện một cách thật là thần kỳ.

Không chỉ thế bạn còn có thể lấy ra thỏ, chim hoặc 1 số vật dụng bạn yêu thích. Đặc biệt chiếc mũ này còn là một đạo cụ thích hợp cho những ai diễn sân khấu.



Một chiếc mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm cái mũ đó. Biết rằng vành mũ hình tròn và ống mũ hình trụ.

Lời giải

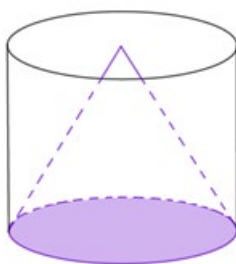
Ống mũ là hình trụ với chiều cao $h = 35$ cm và có bán kính đáy $R = \frac{35 - 2 \cdot 10}{2} = 7,5$ (cm).

Diện tích vải để làm ống mũ là: $S_1 = 2R\pi h + R^2\pi = 2 \cdot (7,5) \cdot \pi \cdot 35 + (7,5)^2 \cdot \pi = 581,25\pi$ (cm²).

Diện tích vải để làm vành mũ là: $S_2 = R_1^2\pi - R_2^2\pi = (17,5)^2 \cdot \pi - (7,5)^2 \cdot \pi = 250\pi$ (cm²).

Tổng diện tích vải cần để làm cái mũ là: $581,25\pi + 250\pi = 831,25\pi$ (cm²).

Câu 26: Từ một khúc gỗ hình trụ cao 15 cm, người ta tiện thành một hình nón có đáy là hình tròn bằng với đáy hình trụ, chiều cao của hình nón bằng chiều cao của hình trụ. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là 3610π (cho biết $\pi \approx 3,14$). Công thức tính thể tích hình trụ: $V = \pi R^2 h$, thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (với R là bán kính đáy, h là chiều cao khúc gỗ). Tính thể tích khúc gỗ hình trụ, (làm tròn tới hàng đơn vị).



Lời giải

$$\text{Ta có } \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2 h = 3640\pi \Leftrightarrow R^2 \left(15 - \frac{1}{3} \cdot 15\right) = 3610$$

$$\Leftrightarrow R^2 = 361 \Leftrightarrow R = 19(\text{cm})$$

$$\text{Thể tích khúc gỗ: } V = \pi R^2 h = 3,14 \cdot 19^2 \cdot 15 \approx 17003(\text{cm}^3)$$

Làm lại:

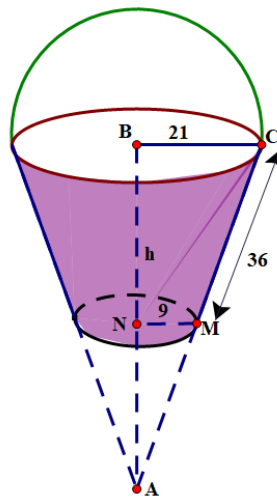
Ta có, thể tích của phần gỗ bỏ đi là: $\pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi R^2 h = 3640\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

$$\Leftrightarrow R^2 \left(15 - \frac{1}{3} \cdot 15 \right) = 3610 \Leftrightarrow R^2 = 361 \Leftrightarrow R = 19 \text{ cm}$$

Thể tích khúc gỗ hình trụ ban đầu là:

$$V = \pi R^2 h \approx 3,14 \cdot 19^2 \cdot 15 \approx 17003 \text{ (cm}^3\text{)}$$

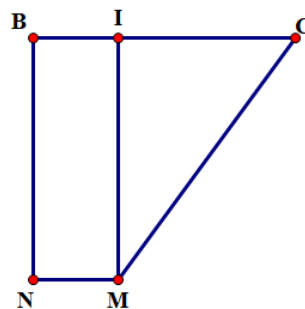
Câu 27: Một xô đựng nước có dạng hình nón cụt (như hình vẽ). Đáy xô có bán kính $MN = 9 \text{ cm}$, miệng xô là đáy lớn của hình nón cụt có $BC = 21 \text{ cm}$, chiều cao của xô là $BN = h$, $MC = 36 \text{ cm}$. Biết $\widehat{ANM} = \widehat{ABC} = 90^\circ$.



a) Hỏi xô có thể chứa bao nhiêu lít nước? (Ghi kết quả làm tròn 1 chữ số thập phân). Biết công thức tính thể tích hình nón cụt là $V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$ với h là chiều cao của hình nón cụt; r_1, r_2 lần lượt là bán kính 2 đáy của hình nón cụt.

b) Bạn Nam dùng xô trên để lấy nước cho vào bể chứa hình hộp chữ nhật có kích thước $120 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$. Biết trong mỗi lần lấy nước cho vào bể chứa thì lượng nước hao hụt là 20%. Hỏi bạn Nam cần lấy ít nhất bao nhiêu lần để đầy bể chứa? Bỏ qua thể tích thành bể.

Lời giải



a) Ta có: $IC = 21 - 9 = 12 \text{ cm}$. $IM = \sqrt{36^2 - 12^2} = 33,94 \text{ cm} = h$

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

$$V = \frac{1}{3} 3,14.33,94(9^2 + 21^2 + 9.21)$$

$$V = 25257 \text{ cm}^3 = 25,3 \text{ lít (vẽ } MI \perp BC \text{ tại } I; MN = BI)$$

Vậy xô có thể chứa khoảng 25,3 lít nước.

$$\text{b) Thể tích bể hình hộp chữ nhật: } 120.100.90 = 1080000 \text{ cm}^3$$

$$\text{Số xô cần (hao hụt } 20\% / \text{ lần): } 1080000 : (25257.80\%) = 34,2 \text{ xô}$$

Vậy anh cần khoảng 35 xô để đổ đầy bể.

BÀI TOÁN 5. HÌNH LĂNG TRỤ- HÌNH HỘP VÀ HÌNH CHÓP

Câu 1: Một bồn nước inox có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 1,5 m, chiều rộng 1,2 m, chiều cao 1,4 m. Hỏi bồn nước đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

Lời giải

$$\text{Thể tích của bồn nước hình hộp chữ nhật là: } 1,5.1,2.1,4 = 2,52 \text{ (m}^3\text{)}$$

Vậy bồn nước đựng được 2,52 m³ nước

Câu 2: Một thùng hình hộp chữ nhật có chiều dài là 0,5 m; chiều rộng là 0,4 m; chiều cao là 3 dm. Hỏi cần phải mua bao nhiêu lít dầu để đổ đầy thùng?

Lời giải

$$0,5 \text{ m} = 5 \text{ dm}$$

$$0,4 \text{ m} = 4 \text{ dm}$$

$$\text{Thể tích thùng là: } V = 5.4.3 = 60 \text{ dm}^3$$

⇒ Cần phải mua 60 lít dầu để đổ đầy thùng

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Câu 3: Một trường THCS ở thành phố chuẩn bị xây dựng một hồ bơi cho học sinh với kích thước như sau: chiều rộng là 6 m, chiều dài 12,5 m, chiều sâu 2 m. Sức chứa trung bình 0,5 m³/ người (Tính theo diện tích mặt đáy). Thiết kế như hình vẽ sau

a) Hồ bơi có sức chứa tối đa bao nhiêu người?

b) Tính thể tích của hồ bơi? Lúc này người ta đổ vào trong đó 120000 lít nước. Tính khoảng cách của mực nước so với mặt hồ? (1 m³ = 1000 lít)

Lời giải

$$\text{a) Diện tích mặt đáy của hồ bơi là: } 6.12,5 = 75 \text{ m}^2$$

$$\text{Sức chứa tối đa của hồ bơi là: } 75 : 0,5 = 150 \text{ (người)}$$

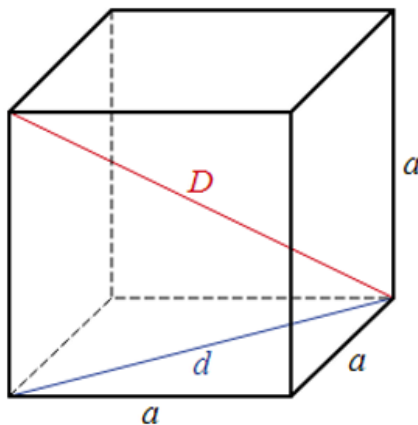
$$\text{b) Chiều cao của mực nước so với đáy: } 120 : 75 = 1,6 \text{ (m)}$$

$$\text{Chiều cao của mực nước so với mặt hồ: } 2 - 1,6 = 0,4 \text{ (m).}$$

Câu 4: Hình lập phương có thể tích là 125 m³.

a) Tính độ dài d là độ dài đường chéo một mặt của hình lập phương.

b) Tính độ dài D là độ dài đường chéo của hình lập phương.



Lời giải

a) Tính độ dài d là độ dài đường chéo một mặt của hình lập phương.

Ta có thể tích của hình lập phương là $V = a^3 = 125 \text{ (m}^3\text{)}$, do đó ta có độ dài cạnh của hình lập phương là $a = 5 \text{ (m)}$.

Do các mặt của hình lập phương là hình vuông nên đường chéo d của một mặt hình lập phương là cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông có độ dài là a .

Áp dụng định lý Pytago, ta được: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ (m)}$.

b) Tính độ dài D là độ dài đường chéo của hình lập phương.

Hình lập phương có các mặt vuông góc với nhau nên đường chéo D của hình lập phương là cạnh huyền của tam giác vuông có độ dài cạnh góc vuông lần lượt là a và d .

Áp dụng định lý Pytago ta được $D = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ (m)}$.

Vậy $d = 5\sqrt{2} \text{ m}$, $D = 5\sqrt{3} \text{ m}$.

Câu 5: Một bình chứa nước hình hộp chữ nhật có diện tích đáy là 20 dm^2 và chiều cao 3 dm . Người ta rót hết nước trong bình ra những chai nhỏ mỗi chai có thể tích là $0,35 \text{ dm}^3$ được tất cả 72 chai. Hỏi lượng nước có trong bình chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích bình?

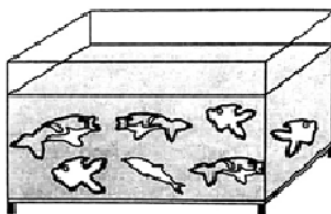
Lời giải

Thể tích của lượng nước trong 72 chai nhỏ: $0,35 \cdot 72 = 25,2 \text{ (dm}^3\text{)}$.

Thể tích của bình: $20 \cdot 3 = 60 \text{ (dm}^3\text{)}$.

Thể tích nước trong bình chiếm: $25,2 : 60 = 42\%$ thể tích bình.

Câu 6: Một bể kính nuôi cá có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 100 cm , chiều rộng 50 cm , chiều cao 60 cm . Mực nước trong bể cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao bể. Tính thể tích nước trong bể đó. (độ dày kính không đáng kể). Công thức tính thể tích nước trong bể là $V = S \cdot h$ với S là diện tích mặt đáy bể và h là chiều cao mực nước trong bể.

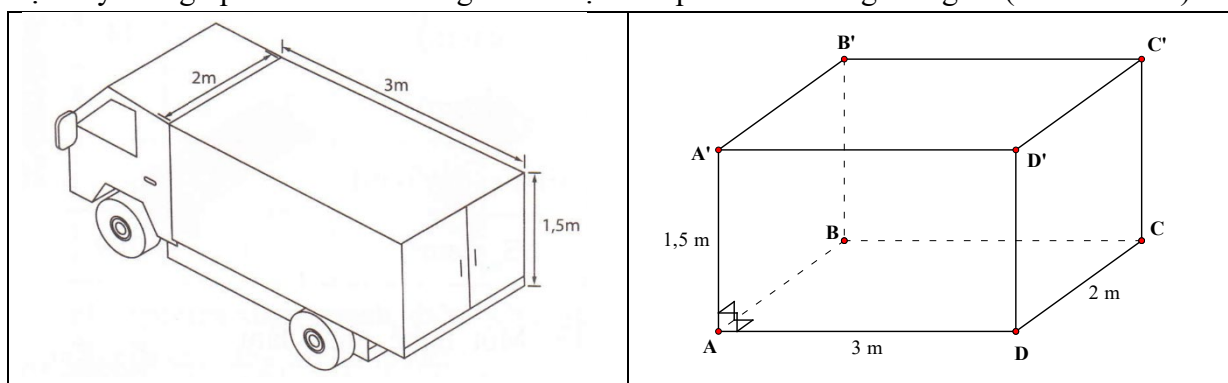


Lời giải

Chiều cao mực nước trong bể: $h = \frac{3}{4} \cdot 60 = 45 \text{ (cm)}$

Thể tích nước trong bể là: $V = 100.50.45 = 225000 \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 7: Một xe tải đông lạnh chở hàng có thùng xe dạng hình hộp chữ nhật với kích thước như hình bên. Bạn hãy tính giúp thể tích của thùng xe và diện tích phần Inox đóng thùng xe (tính luôn sàn).



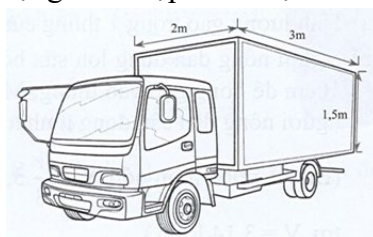
Lời giải

Tính đúng thể tích thùng xe : $2 \cdot 1,5 \cdot 3 = 9 \text{ (m}^3\text{)}$

Tính đúng diện tích toàn phần :

$$2 \cdot (2 \cdot 1,5 + 3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 3) = 27 \text{ (m}^2\text{)}$$

Câu 8: Một xe tải chở hàng có thùng xe dạng hình hộp chữ nhật với kích thước như hình bên.



a) Hãy tính thể tích của thùng xe. (Độ dày của thùng xe xem như không đáng kể)

b) Người ta xếp vào thùng xe tải trên các thùng hàng loại A có dạng hình lập phương độ dài cạnh 40 cm để vận chuyển. Hỏi mỗi lần vận chuyển xe có thể chở được nhiều nhất bao nhiêu thùng hàng loại A?

Lời giải

a) Thể tích thùng xe: $2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 9 \text{ (m}^3\text{)}$

b) $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}; 3 \text{ m} = 300 \text{ cm}; 1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

Số thùng hàng nhiều nhất có thể xếp được theo chiều cao của xe là 3 thùng vì $150 : 40 = 3,75$

Số thùng hàng nhiều nhất có thể xếp được theo chiều rộng của xe là 5 thùng vì $200 : 40 = 5$

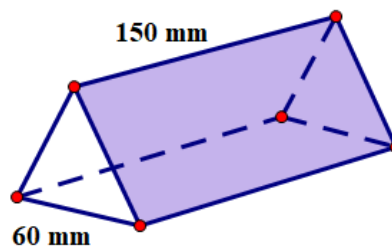
Số thùng hàng nhiều nhất có thể xếp được theo chiều dài của xe là 7 thùng vì $300 : 40 = 7,5$

Số thùng hàng nhiều nhất mỗi lần vận chuyển xe có thể chở được: $3.5.7 = 105$ (thùng)

Câu 9: Một vật chặn giấy bằng nhựa đặc có dạng hình lăng trụ đứng, hai đáy là các tam giác đều cạnh 60 mm, chiều cao lăng trụ là 150 mm.

a) Tính diện tích toàn phần khối lăng trụ.

b) Tính thể tích khối lăng trụ (làm tròn đến mm^3), cho biết công thức tính diện tích tam giác đều là $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, trong đó a là độ dài cạnh tam giác đều.



Lời giải

a) Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng: $S_{xq} = 3.60.150 = 27000 (\text{mm}^2)$.

Diện tích đáy hình lăng trụ đứng: $S = \frac{60^2 \sqrt{3}}{4} \approx 1559 (\text{mm}^2)$.

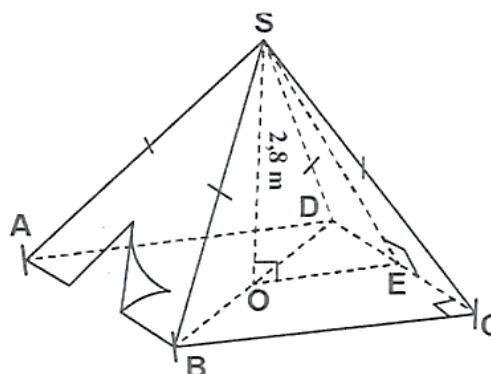
Diện tích toàn phần hình lăng trụ đứng: $S_{tp} = S_{xq} + 2S \approx 27000 + 2.1559 \approx 30118 (\text{mm}^2)$.

b) Thể tích khối lăng trụ đứng: $V = S \cdot h = 1559.150 = 233850 (\text{mm}^3)$.

Câu 10: Một chiếc lều ở trại hè của học sinh có dạng hình chóp tứ giác đều: chiều cao SO là 2,8 mét và cạnh đáy hình vuông $ABCD$ là 3 mét. SE là chiều cao đại diện cho một mặt bên.

a) Tính thể tích không khí trong chiếc lều.

b) Tính diện tích vải dùng may lều (không tính các phần mép may liên kết) biết lều này không có đáy. Biết thể tích hình chóp đều cho bởi công thức $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$; trong đó, S là diện tích đáy và h là chiều cao của hình chóp đều, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.



Lời giải

a) Diện tích đáy là $3^2 = 9 \text{ (m}^2\text{)}$

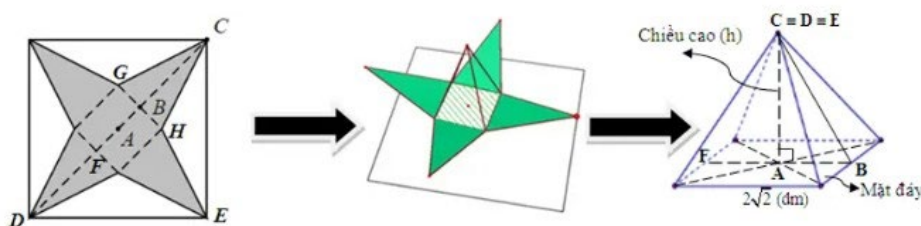
Thể tích không khí trong lều là $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2,8 = 8,4 \text{ (m}^3\text{)}$.

b) $OE = 3 : 2 = 1,5 \text{ m}$. Xét tam giác SOE vuông tại O có $SE^2 = SO^2 + OE^2$ (Pythagore)

$$SE = \sqrt{2,8^2 + 1,5^2} \approx 3,2 \text{ (m)}$$

Vậy tổng diện tích vải cần cho chiếc lều là: $4 \cdot S_{\Delta SDC} = 4 \cdot \frac{1}{2} DC \cdot SE = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 3 = 19,2 \text{ (m}^2\text{)}$.

Câu 11: Bạn An làm một mô hình kim tự tháp để giới thiệu về lịch sử Ai Cập cổ đại. Vì kích thước của khu trưng bày, An quyết định làm mô hình kim tự tháp từ một tấm bìa hình vuông có cạnh là 5 dm. Nhờ sự giúp đỡ của thầy, An đã tạo một mô hình kim tự tháp bằng cách cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có đáy là cạnh của hình vuông rồi gấp lên sau đó ghép lại để thành một hình chóp tứ giác đều như hình vẽ. An đã cắt miếng bìa trên sao cho cạnh đáy của khối chóp tứ giác đều là $2\sqrt{2} \text{ dm}$. Em hãy tính thể tích của khối chóp tứ giác đều đó (theo đơn vị dm^3), biết thể tích của hình chóp được tính theo công thức: $V = \frac{1}{3} S \cdot h$, trong đó S là diện tích mặt đáy, h là chiều cao hình chóp, các mặt bên của hình chóp tứ giác đều là các tam giác cân bằng nhau, $CB \perp GH$ và A là tâm hình vuông.



Lời giải

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác $\triangle CDE$ vuông cân tại E , ta có: $CD = 5\sqrt{2} \text{ (dm)}$.

$$DF + FB + BC = CD \Leftrightarrow 2BC = CD - BF = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (dm)}$$

(Vì $BC = DF$, tính chất hình chóp tứ giác đều)

Áp dụng định lý Pythagore, ta có: $CA^2 + AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow CA^2 = BC^2 - AB^2$

$$\Leftrightarrow h^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ (dm)}$$

Thể tích của khối chóp tứ giác đều là: $V = \frac{1}{3} \cdot BF^2 \cdot CA = \frac{1}{3} \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = 4,22 \text{ dm}^3$.

Câu 12: Người ta thiết kế chậu trồng cây có dạng hình chóp tam giác đều (như hình vẽ bên) biết cạnh đáy khoảng 20 cm, chiều cao khoảng 35 cm, độ dài trung đoạn khoảng 21 cm.



- a) Người ta muốn sơn các bề mặt xung quanh chậu. Hỏi diện tích bề mặt cần sơn là bao nhiêu?
- b) Tính thể tích của chậu trồng cây đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Biết đường cao của mặt đáy hình chóp là 17 cm.

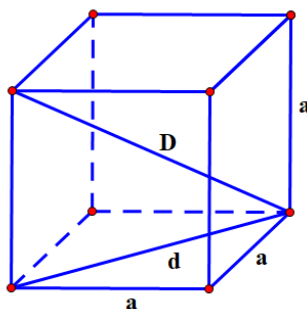
Lời giải

a) Diện tích bề mặt cần sơn là: $S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 20) \cdot 21 = 630 (\text{cm}^2)$

b) Thể tích của chậu trồng cây đó là: $V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 17 \right) \cdot 35 = 1983,33 \text{ cm}^3$.

Câu 13: Một số khu vực vùng núi tỉnh Hà Giang nước ta vào mùa khô rất thiếu nước. Để có nước dùng các hộ dân ở đây đều xây dựng các hồ chứa nước mưa. Một hộ dân xây một hồ chứa nước mưa hình lập phương có thể tích là 64 m^3 .

- a) Tính độ dài D là độ dài đường chéo của hình lập phương.
- b) Nếu dùng 2 vòi nước cùng chảy vào bể thì mất bao nhiêu phút mới đầy bể? (làm tròn đến phút). Biết vòi 1 sau 2 giây chảy được 17 lít nước, vòi 2 sau 3 giây chảy được 35 lít nước.



Lời giải

- a) Tính độ dài D là độ dài đường chéo của hình lập phương.

Độ dài cạnh a của hình lập phương là 4 m.

Độ dài đường chéo một mặt của hình lập phương là: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} (\text{m})$

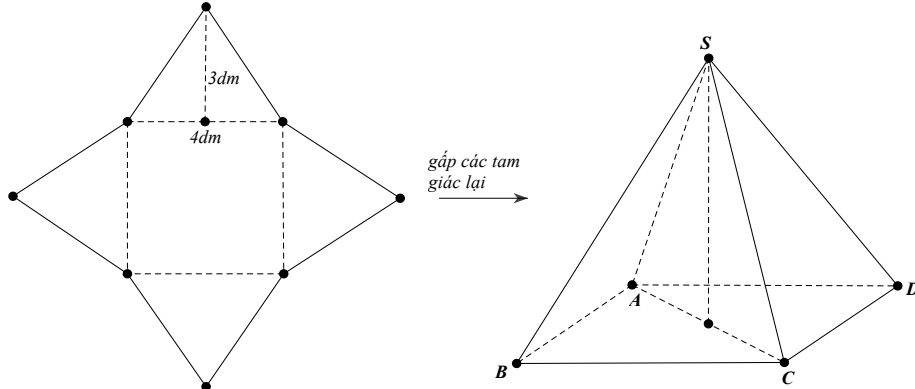
Độ dài đường chéo của hình lập phương là: $D = \sqrt{a^2 + d^2} = 4\sqrt{3} (\text{m})$.

- b) Vòi 1 trong 1 giây chảy được $\frac{17}{2} = 8,5$ (lít); Vòi 2 trong 1 giây chảy được $\frac{35}{3}$ (lít)

Trong 1 giây cả 2 vòi chảy được: $\frac{35}{3} + 8,5 = \frac{121}{6}$ (lít).

Đòi $64\text{m}^3 = 64000$ (lít). Chảy đầy bể cần: $64000 : \frac{121}{6} = 3173,55(s) \approx 53$ phút.

Câu 14: Để tạo một mô hình kim tự tháp (hình chóp tứ giác đều) từ tấm bìa, bạn Hạ cắt theo hình bên (ở giữa là hình vuông cạnh 4 dm, các tam giác bên ngoài là tam giác cân có chiều cao 3 dm) rồi gấp 4 tam giác lại chung đỉnh. Hãy tính thể tích của mô hình được tạo thành ở trên (làm tròn đến 1 chữ số thập phân)



Lời giải

Cạnh bên của hình chóp là: $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ (dm)

Độ dài đường chéo của mặt đáy là: $\sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (dm)

Chiều cao của hình chóp là $h = \sqrt{13-8} = \sqrt{5}$ (dm)

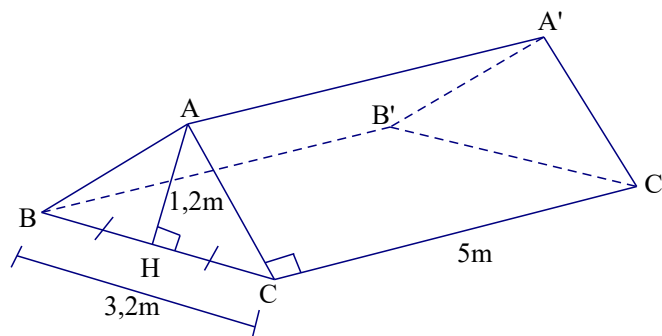
Diện tích đáy của hình chóp là $S = 4.4 = 16$ (dm²)

Vậy thể tích của hình chóp là: $V = \frac{1}{3}S.h \Rightarrow V = \frac{16\sqrt{5}}{3} \approx 11,9$ (dm³)

Câu 15: Một cái lều ở trại hè có dạng lăng trụ đứng tam giác (với các kích thước trên hình: $AH = 1,2\text{m}$; $BC = 3,2\text{m}$; $CC' = 5\text{m}$).

a) Tính thể tích khoảng không ở bên trong lều.

b) Cần phải có ít nhất bao nhiêu m² vải bạt để dựng lều đó? (Không tính các mép và nếp gấp của lều)



Lời giải

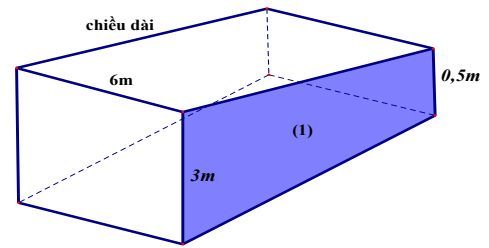
a) Diện tích đáy (tam giác): $S = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 1,2 = 1,92$ (m²)

Thể tích khoảng không ở bên trong lều $V = S.h = 1,92.5 = 9,6(m^3)$

b) Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông AHC , ta tính được $AC = 2m$

Số m^2 vải bạt ít nhất cần có: $2.(1,92 + 2.5) = 23,84m^2$

Câu 16: Một hồ bơi có dạng là một lăng trụ đứng tứ giác với đáy là hình thang vuông (mặt bên (1) của hồ bơi là 1 đáy của lăng trụ) và các kích thước như đã cho (xem hình 2). Biết rằng người ta dùng một máy bơm với lưu lượng là $42 m^3/phút$ và sẽ bơm đầy hồ mất 25 phút. Tính chiều dài của hồ.



Lời giải

Một máy bơm với lưu lượng là $42 m^3/phút$ và sẽ bơm đầy hồ mất 25 phút, nên thể tích của hồ bơi là: $42 \times 25 = 1050 m^3$

Gọi $x (m)$ là chiều dài của hồ bơi ($x > 0$)

Một hồ bơi có dạng là một lăng trụ đứng tứ giác với đáy là hình thang vuông (mặt bên (1) của hồ bơi là 1 đáy của lăng trụ) nên diện tích mặt đáy là:

$$1050 : 6 = 175 m^2$$

Do mặt bên là hình thang cân nên: $\frac{1}{2} \cdot x(0,5 + 3) = 175 \Leftrightarrow x = 100$ (nhận)

Vậy chiều dài hồ bơi là 100m.

CHUYÊN ĐỀ 11_CÁC MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP VÀ CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

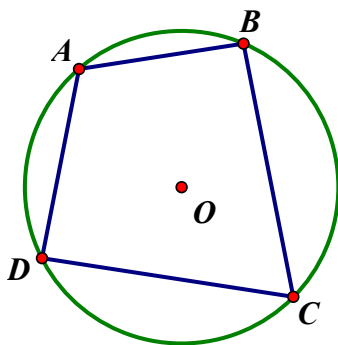
I. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

2. Tính chất của tứ giác nội tiếp :

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180^0



Trong hình vẽ, tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) nên ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^0$$

3. Chứng minh tứ giác nội tiếp

- Ta chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cách đều một điểm cho trước

VD : Để chứng minh tứ giác $ABCD$ (hình trên) nội tiếp $(O; R)$ ta cần chứng minh :

$$OA = OB = OC = OD = R$$

II. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

Để chứng minh đẳng thức hình học ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1** : Chứng minh tam giác đồng dạng
2. **Phương pháp 2** : Dùng định lí Thales
3. **Phương pháp 3** : Dùng tính chất đường phân giác trong tam giác
4. **Phương pháp 4** : Sử dụng kết hợp các phương pháp trên.

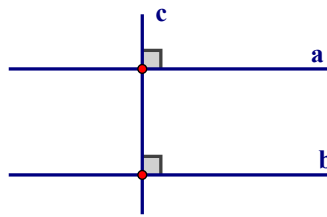
III. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1** : Sử dụng dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song
 - Chứng minh các góc so le trong bằng nhau
 - Chứng minh các góc đồng vị bằng nhau

2. **Phương pháp 2** : Sử dụng mối quan hệ từ vuông góc đến song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 thì chúng song song với nhau.



Trên hình vẽ, $a \perp c$; $b \perp c$ nên $a \parallel b$

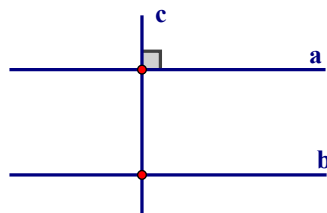
3. **Phương pháp 3** : Sử dụng tính chất của các tứ giác đặc biệt.

VD : Sử dụng tính chất về cạnh của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, ...

IV. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

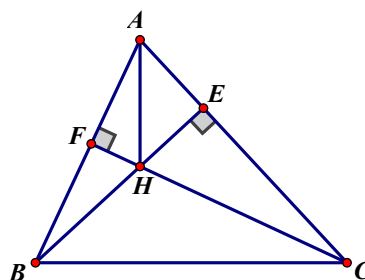
Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1** : Sử dụng mối quan hệ từ vuông góc đến song song



Trong hình vẽ, $a \perp c$; $a \parallel b$ nên $b \perp c$

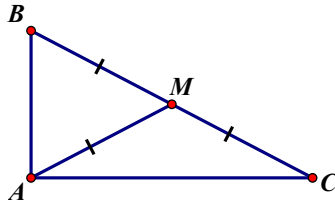
2. **Phương pháp 2** : Sử dụng tính chất ba đường cao trong tam giác



Trong hình vẽ, chứng minh được H là giao điểm của hai đường cao BE ; CF nên H là trực tâm của tam giác ABC . Do đó, $AH \perp BC$

3. **Phương pháp 3** : Sử dụng tính chất đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông.

Định lý : Trong một tam giác, nếu đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác là tam giác vuông.



Trong hình vẽ, Xét tam giác ABC có :

$$AM = BM = MC = \frac{BC}{2}$$

Thì tam giác ABC vuông tại A.

4. Phương pháp 4 : Sử dụng tính chất về góc của các tứ giác đặc biệt như hình chữ nhật, hình vuông hoặc tính chất đường chéo của hình thoi, hình vuông.

IV. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG.

Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc ta có thể sử dụng các phương pháp như sau:

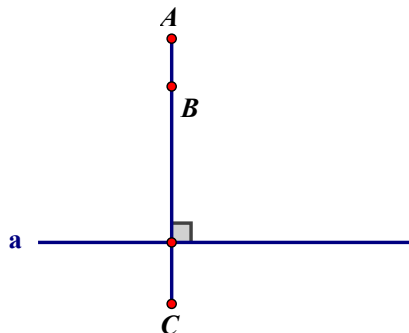
1. **Phương pháp 1 :** Chứng minh dựa vào Tiên đề Ôclid : Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



a —————

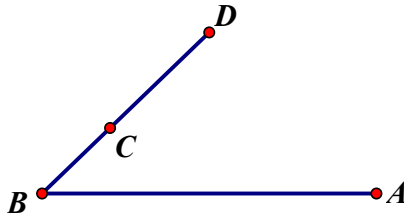
Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $AB \parallel a$; $AC \parallel a$. Từ đó, theo Tiên đề Ôclid thì đường thẳng AB và AC là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm A, B, C thẳng hàng.

2. **Phương pháp 2 :** Chứng minh dựa vào tính chất : Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho.



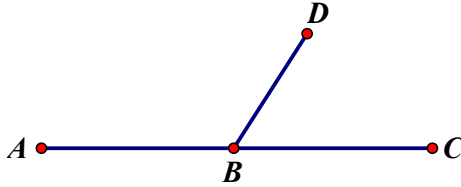
Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $AB \perp a$; $AC \perp a$. Từ đó, đường thẳng AB và AC là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm A, B, C thẳng hàng.

3. **Phương pháp 3 :** Chứng minh hai cạnh của góc trùng nhau



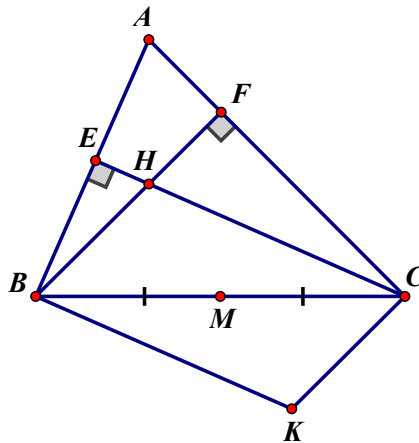
Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$. Từ đó, đường thẳng BC và BD là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm B, C, D thẳng hàng.

4. **Phương pháp 4 :** Sử dụng tính chất góc bẹt.



Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 180^\circ$. Từ đó, ta có BA, BC là hai tia đối nhau. Do đó, ba điểm B, C, A thẳng hàng.

5. **Phương pháp 5 :** Sử dụng tính đường chéo của các tứ giác đặc biệt.



Ví dụ : Trong bài toán trên, với dữ kiện H là trực tâm tam giác ABC . Các đường thẳng BK và CK lần lượt vuông góc với AB, AC . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh : Ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Để chứng minh bài toán trên, ta chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành nên hai đường chéo BC, HK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HK . Do đó, ba điểm H, M, K thẳng hàng.

V. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC.

Trong bài toán liên quan đến Bất đẳng thức và cực trị hình học ta thường sử dụng tính chất:

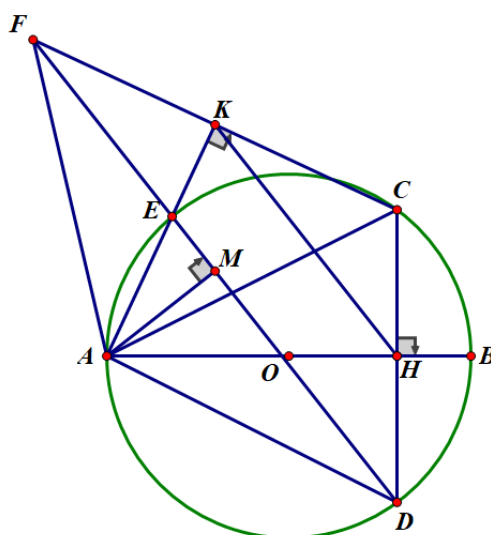
1. Với hai số dương x, y ta có: $(x - y)^2 \geq 0$. Từ đó chứng minh được: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi $x = y$

2. Bất đẳng thức Cauchy: Với hai số dương a, b ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi $x = y$

Ví dụ: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi H là điểm nằm giữa O và B . Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H . Trên cung nhỏ AC lấy điểm E bất kì (E khác A và C). Kẻ CK vuông góc với đường thẳng AE tại K . Đường thẳng DE cắt CK tại F .

- C/m: Tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
- C/m: tam giác ACF là tam giác cân.
- Khi CD, AB cố định. Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác ADF lớn nhất

Giải:



- C/m: Tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
 - + Có $CK \perp AK$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AKC} = 90^\circ$
 - + Có $CD \perp AB$ tại H (gt) $\Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$
 - + Xét tứ giác và c/m nội tiếp
- C/m: tam giác ACF là tam giác cân.
 - + C/m: $KH \parallel EF$
 - + Vận dụng tính chất đường trung bình của tam giác CDF c/m: K là trung điểm của EC
 - + Xét tam giác lập luận AK là đường cao đồng thời là đường trung tuyến để suy ra tam giác cân
- Khi CD, AB cố định. Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác ADF lớn nhất
 - + AB là đường trung trực của CD nên $AC = AD$ mà $AC = AF$ do tam giác ACF cân

Suy ra $AD = AF$. Từ đó, ta có $\triangle ADF$ cân tại A

 - + Kẻ AM vuông góc với DF tại M

C/m: $\triangle AMF = \triangle AMD$ suy ra $S_{AFD} = 2S_{AMD}$ (1)

 - + Áp dụng BĐT Cauchy cho AM^2 và MD^2 có:

$$AM^2 + MD^2 \geq 2\sqrt{AM^2 \cdot MD^2}$$

$$AM \cdot MD \leq \frac{AM^2 + MD^2}{2}$$

$$\text{Mà } AM^2 + MD^2 = AD^2 \text{ (PTG } \triangle AMD)$$

$$\Rightarrow AM \cdot MD \leq \frac{AD^2}{2} \text{ (2)}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $AM = MD$

+) Từ (1), (2) $\Rightarrow S_{AFD}$ max khi $AM = MD$ hay tam giác AMD cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{ADM} = 45^\circ \text{ hay } \widehat{ADE} = 45^\circ$$

Vậy diện tích tam giác AFD lớn nhất khi E nằm trên cung AC sao cho góc $\widehat{ADE} = 45^\circ$

NHỮNG MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ TUYỂN SINH 9 LÊN 10

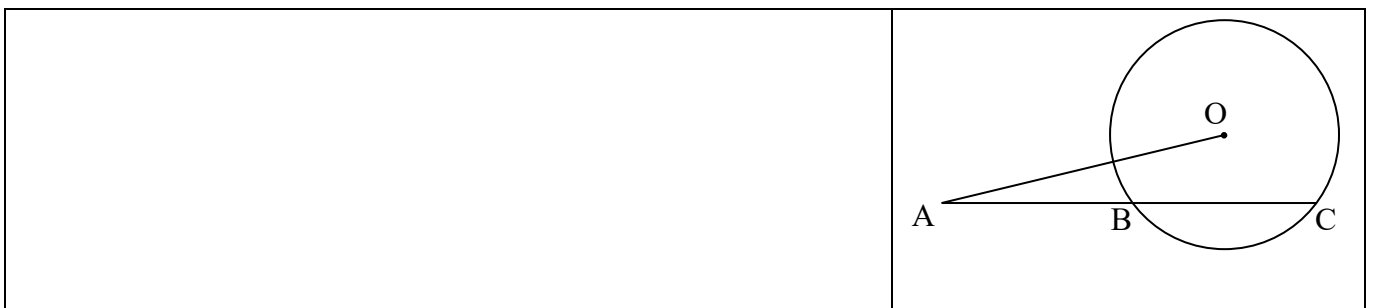
Bài toán 1: Biết ABC, ADE là hai cát tuyến của (O) . Chứng minh: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



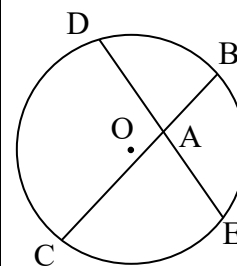
Bài toán 2: ABC là cát tuyến của (O) , AT là tiếp tuyến. Chứng minh: $AT^2 = AB \cdot AC$



Bài toán 3: Cho $(O; R)$, ABC là cát tuyến, $OA = d$. Chứng minh $AB \cdot AC = d^2 - R^2$

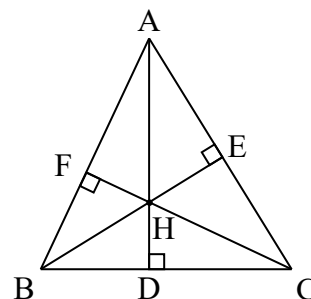


Bài toán 4: Biết BC, DE là hai dây cung cắt nhau tại A . Chứng minh: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



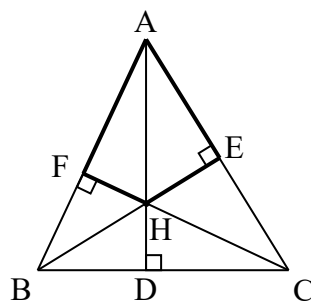
Bài toán 5: Cho $\triangle ABC$ nhọn; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H .

- 1) $DB \cdot DC = DH \cdot DA$
- 2) $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$
- 3) $AF \cdot AB = AH \cdot AD = AE \cdot AC$

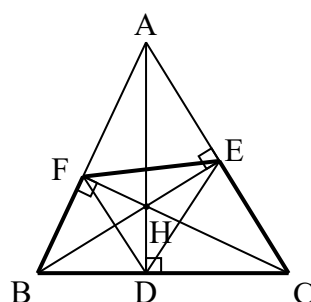


Bài toán 6: Cho $\triangle ABC$ nhọn; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H .

- 1) Chứng minh: $AEHF$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính.

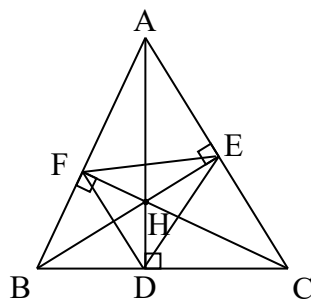


- 2) Chứng minh: $BCEF$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính.

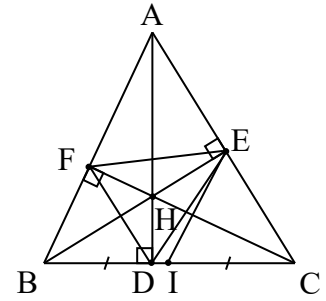


Bài toán 7: Cho $\triangle ABC$ nhọn; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H , I là trung điểm BC .

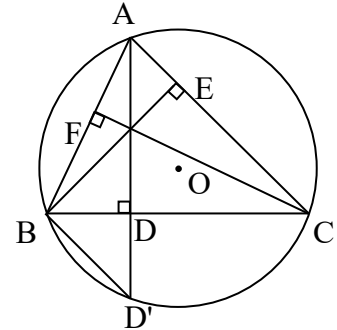
Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$



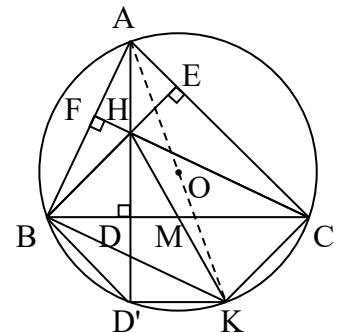
Chứng minh: $D, F, E, I \in$ đường tròn



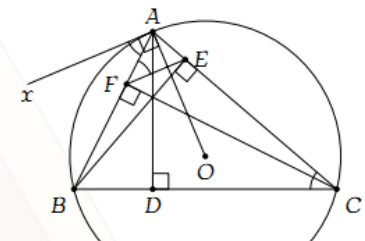
Bài toán 8: $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) ; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H , AH cắt (O) tại D' . Chứng minh: D' đối xứng với H qua BC .



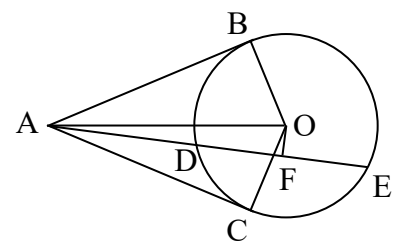
Bài toán 9: $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) ; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H . AH cắt (O) tại D' . Chứng minh: $BD'KC$ là hình thang cân



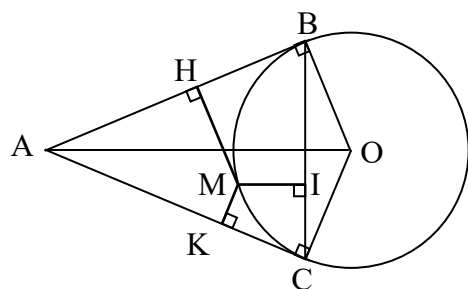
Bài toán 10: $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) ; AD, BE, CF là 3 đường cao. Chứng minh: $OA \perp EF$



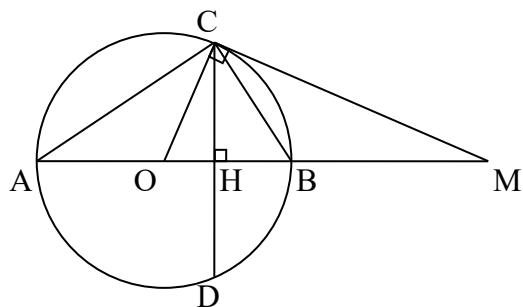
Bài toán 11: AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A, ADE là cát tuyến. F là trung điểm dây DE . Chứng minh: $A, B, O, C, F \in$ đường tròn.



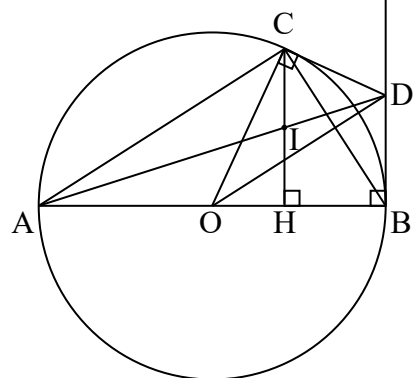
Bài toán 12. AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A. $M \in \widehat{BC}$ nhỏ. H, I, K là hình chiếu của M trên AB, BC, CA . Chứng minh: $MI^2 = MH.MK$



Bài toán 13: Cho (O) , đường kính AB , dây $CD \perp AB$ tại H . Tiếp tuyến tại C cắt AB tại M . Chứng minh: $BM.AH = BH.AM$



Bài toán 14: Cho $(O; R)$, đường kính AB , $C \in (O)$, $CH \perp AB$ tại H . Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại D . Chứng minh: AD qua trung điểm I của CH .



Bài toán 15: $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) ; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H , gọi M là trung điểm BC . Vẽ đường kính AK .

a) Chứng minh: $BHCK$ là hình bình hành

b) M, H, K thẳng hàng. suy ra M là trung điểm Hk .

c) OM là đường trung bình của $\triangle AHK$. suy ra $AH = 2OM$

d) Nếu O' đối xứng với O qua BC thì $AHO'O$ là hình bình hành $\Rightarrow O'H = OA = R$. Trong trường hợp khi $(BC = R\sqrt{3} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ)$ thì $AHO'O$ là hình thoi



B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Gọi K là trung điểm BC .

a) Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$.

b) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .

c) Đường phân giác góc FHB cắt AB và AC lần lượt tại M và N . Gọi I là trung điểm của MN , J là trung điểm của AH . Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Câu 2: Cho đường tròn (O) , dây CD cố định. Gọi B là điểm chính giữa cung nhỏ CD , kẻ đường kính AB cắt CD tại I . Lấy điểm H bất kỳ trên cung lớn CD , HB cắt CD tại E . Đường thẳng AH cắt đường thẳng CD tại P .

a). Chứng minh: Tứ giác $PHIB$ nội tiếp.

b). Chứng minh: $AH \cdot AP = AI \cdot AB$.

c). Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và BP . Kẻ $KM \perp AB$ cắt AB tại M , cắt đường tròn (O) tại N . Chứng minh N, I, H thẳng hàng.

Câu 3: Cho đường tròn tâm (O) và dây BC cố định không đi qua O . Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB < AC$. Kẻ đường kính AK , E là hình chiếu của C trên AK . M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh bốn C, E, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ $AD \perp BC$ tại D . Chứng minh $AD \cdot AK = AB \cdot AC$ và $\triangle MDE$ cân.

c) Gọi F là hình chiếu của B trên AK . Chứng minh khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DEF$ là 1 điểm cố định.

- Câu 4:** Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD . Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E . Từ E kẻ EF vuông góc với AD ($F \in AD$). Đường thẳng CF cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M . Giao điểm của BD và CF là N . Chứng minh:
- $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.
 - FA là tia phân giác của $\widehat{BFM}$.
 - $BE \cdot DN = EN \cdot BD$.
- Câu 5:** Trên nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC , lấy điểm A sao cho $BA = R$.
- Chứng minh tam giác ABC vuông tại A và tính số đo các góc B, C của tam giác vuông ABC
 - Qua B kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) , nó cắt tia CA tại D . Qua D kẻ tiếp tuyến DE với nửa đường tròn (O) (E là tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OD và BE . Chứng minh rằng $OD \perp BE$ và $DI \cdot DO = DA \cdot DC$
 - Kẻ EH vuông góc với BC tại H . EH cắt CD tại G . Chứng minh IG song song với BC .
- Câu 6:** Cho đường tròn (O) cố định. Từ một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của dây BC .
- Chứng minh rằng: $AMON$ là tứ giác nội tiếp.
 - Gọi K là giao điểm của MN và BC . Chứng minh rằng: $AK \cdot AI = AB \cdot AC$
 - Xác định vị trí của cát tuyến ABC để $IM = 2IN$.
- Câu 7:** Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB vuông góc với dây CD tại điểm I (I nằm giữa A và O). Lấy điểm E bất kì trên cung nhỏ BC (E khác B và C). AE cắt CD tại K .
- Chứng minh bốn điểm K, E, B, I cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh $AK \cdot AE = AI \cdot AB$.
 - Gọi P là giao điểm của tia BE và tia DC , Q là giao điểm của AP và BK . Chứng minh IK là phân giác của $\widehat{EQP}$. Chứng minh OQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE .
- Câu 8:** Cho đường tròn (O) đường kính AB . Dây cung MN vuông góc với AB , ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB .
- Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.
 - Chứng minh rằng $NB \cdot HK = AN \cdot HB$.
 - Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Câu 9:** Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính BC , đường thẳng qua O vuông góc với BC cắt AC tại D .
- Chứng minh rằng tứ giác $ABOD$ nội tiếp.

b) Tiếp tuyến tại điểm A với đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm P , sao cho $PB = BO = 2cm$. Tính độ dài đoạn PA và số đo góc APC .

c) Chứng minh rằng $\frac{PB}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Câu 10: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BD, CE cắt nhau ở điểm H .

a) Chứng minh: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G . Chứng minh: $\triangle BHG$ cân ở B .

c) Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng CH và CG . Đường thẳng NO cắt cạnh AC tại điểm P . Chứng minh: $CD.CP = CM.CG$ và $MB \perp MP$.

Câu 11: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AD và đường phân giác trong AO (D, O thuộc cạnh BC). Kẻ OM vuông góc với AB tại M , ON vuông góc với AC tại N .

a) Chứng minh: Tứ giác $AMON$ nội tiếp

b) Chứng minh $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$

c) $\sin \frac{\angle BAC}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}$

Câu 12: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O; R)$ (A, B là các tiếp điểm). Đoạn thẳng OM cắt đường thẳng AB tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm I .

a) Chứng minh bốn điểm M, A, B, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AD của $(O; R)$. Đoạn thẳng MD cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm C khác D . Chứng minh $MA^2 = MH.MO = MC.MD$.

c) Chứng minh $IH.IO = IM.OH$.

Câu 13: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . AD, BE, CF là ba đường cao của tam giác ABC cắt nhau tại H .

a) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AM của đường tròn (O) . Chứng minh $AD.AM = AB.AC$

c) Gọi P là giao điểm của AH và EF . I là giao điểm của AM và BC . K là trung điểm của BC . Chứng minh: H, K, M thẳng hàng và $PI \parallel HK$.

Câu 14: Cho đường tròn (O, R) và dây AB cố định (AB không là đường kính). Gọi N là trung điểm của AB . Qua N , kẻ đường kính CD của đường tròn (O) (C thuộc cung nhỏ AB). Lấy điểm M bất kỳ trên cung lớn AB ($M \neq A, M \neq B$), MC cắt AB tại F . Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại E .

a) Chứng minh bốn điểm M, N, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Hai đường thẳng DF và CE cắt nhau tại I . Chứng minh $KI.KM = KC.KD$ và NE là tia phân giác của $\widehat{MNI}$

c) Chứng minh rằng: $\frac{KC}{KD} = \frac{CN}{DN}$

Câu 15: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BE, CF cắt nhau ở H .

a) Chứng minh bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tia EF cắt tia CB tại M . Chứng minh: $MF.ME = MB.MC$

c) Tia AH cắt BC tại D . Đường thẳng qua B và song song với AC , cắt tia AD tại P , cắt đoạn thẳng AM tại Q . Chứng minh FC là tia phân giác của góc EFD và $BP = BQ$.

Câu 16: Cho tam giác ABC ba góc nhọn nội tiếp $(O;R)$, hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $BFCE$ nội tiếp và $AO \perp EF$

b) Chứng minh: $\sin^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{BAC} = 1$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos \widehat{BAC}$

c) Gọi S là diện tích tam giác ABC , chứng minh: $S = \frac{1}{2} AB.AC.\sin \widehat{BAC}$. Cho

$AB = 6; AC = 8; BC = 2\sqrt{13}$ tính diện tích tam giác ABC

Câu 17: Cho $(O;R)$ đường kính AB cố định. Dây CD vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O . Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại I ; AF cắt tia DC tại K .

a) Chứng minh rằng tứ giác $AHIF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $HA.HB = HI.HK$.

c) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle KIF$ cắt AI tại E . Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OA thì E thuộc một đường tròn cố định.

Câu 18: Cho đường tròn (O) đường kính BC . Điểm A thuộc đường tròn thỏa mãn $AB < AC$ (A khác B , A khác C). Lấy điểm D trên cạnh AC sao cho $AD = AB$. Vẽ hình vuông $BADE$. Tia AE cắt (O) tại F .

a) Tam giác FBC là tam giác gì? Tại sao?

b) Chứng minh: $\widehat{FDC} = \widehat{FCD}$.

c) Vẽ tia Bx là tiếp tuyến của (O) tại B , Bx cắt CF tại I . Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Câu 19: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax , lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O) .

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM \parallel OP$. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N . Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

c) Giả sử AN cắt OP tại K ; PM cắt ON tại I ; PN cắt OM tại J . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

- Câu 20:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Điểm M nằm trên nửa đường tròn ($M \neq A; B$). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D
- Chứng minh rằng: tứ giác ACOM nội tiếp.
 - Gọi P là giao điểm CD và AB . Chứng minh: $PA \cdot PO = PC \cdot PM$
 - Gọi E là giao điểm của AM và BD; F là giao điểm của AC và BM. Chứng minh: Ba điểm E; F; P thẳng hàng.
- Câu 21:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S. Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng BC.
- Chứng minh tứ giác SAOI là tứ giác nội tiếp.
 - Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.
 - Vẽ đường cao CE của tam giác ABC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE. Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K. Chứng minh $BQ \cdot BA = BD \cdot BI$
- Câu 22:** Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 4 cm. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AD; kẻ BM là tiếp tuyến của đường tròn tâm O (M là tiếp điểm, $M \neq A$), BM cắt CD tại K.
- Chứng minh 4 điểm A, B, M, O cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh $OB \perp OK$ và $BM \cdot MK = \frac{AB^2}{4}$.
 - Đường thẳng AM cắt CD tại E. Chứng minh K là trung điểm của đoạn thẳng ED và tính chu vi của tứ giác ABKD.
- Câu 23:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), kẻ đường cao BE của $\triangle ABC$. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ E đến AB và BC.
- Chứng minh tứ giác BHEK là tứ giác nội tiếp.
 - Chứng minh: $BH \cdot BA = BK \cdot BC$.
 - Kẻ đường cao CF của tam giác ABC ($F \in AB$) và I là trung điểm của EF. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.
- Câu 24:** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ đường kính AQ của đường tròn (O) cắt cạnh BC tại I.
- Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAQ}$.
 - Gọi P là giao điểm của AH và EF. Chứng minh $\triangle AEP$ đồng dạng với $\triangle ABI$ và $PI \parallel HQ$.
- Câu 25:** Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MPQ ($MP < MQ$). Gọi I là trung điểm của dây PQ.
- Chứng minh bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn.
 - Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh: $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE \parallel PQ$.
 - Gọi K là trung điểm của EA. Chứng minh ba điểm O; I; K thẳng hàng.

- Câu 26:** Cho đường tròn tâm (O) , đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm C bất kì (C không trùng với A và B). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BC ở điểm D . Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng DO . Tia AH cắt đường tròn (O) tại điểm F (không trùng với A).
- Chứng minh tứ giác $AHCD$ nội tiếp được một đường tròn.
 - Chứng minh $\triangle CFH$ là tam giác vuông.
 - Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{BH \cdot BC}{BF}$.
- Câu 27:** Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của (O) . Đoạn thẳng MC cắt AB tại K và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D . Gọi I, H lần lượt là các giao điểm của MO với BD, AB .
- Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh MO song song với BC và $IM^2 = ID \cdot IB$.
 - Gọi L là giao điểm của IK, HC . Chứng minh ba điểm M, B, L thẳng hàng.
- Câu 28:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R, C$ là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho C khác A và C khác B . Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho: $\widehat{COD} = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của EF .
- Chứng minh: $CEDF$ là tứ giác nội tiếp
 - Chứng minh: $FC \cdot FA = FD \cdot FB$
 - Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O)
 - Hỏi khi C thay đổi thỏa mãn điều kiện Câu toán, E thuộc đường tròn cố định nào?
- Câu 29:** Cho đường tròn $(O; R)$ và dây MN cố định ($MN < 2R$). Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E (điểm A thuộc cung nhỏ MN). Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E). Đường thẳng BC cắt $(O; R)$ tại điểm K (K khác B).
- Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp.
 - Chứng minh $BM^2 = BK \cdot BC$.
 - Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AK và MN ; D là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI . Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của $\triangle DEK$.
- Câu 30:** Cho nửa đường tròn tâm O , bán kính $AB = 2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E ; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D ($D \neq B$).
- Chứng minh rằng bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.
 - Tính diện tích hình quạt OCB theo R , trong trường hợp $\widehat{AMC} = 60^\circ$ và chứng minh $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$.
 - Gọi H là hình chiếu của C trên AB . Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của CH .

Câu 31: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ các tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn $(O; R)$, (P và Q là các tiếp điểm). Kẻ đường kính PA . Tiếp tuyến tại A với đường tròn $(O; R)$ cắt PQ tại B .

a) Chứng minh: AQ song song với OM .

b) Chứng minh: $PQ \cdot PB = 4R^2$.

c) Gọi K là trung điểm của MO . Tia PK cắt AQ tại I . Chứng minh tứ giác $MAIO$ là hình bình hành.

Câu 32: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Từ điểm M bất kì trên tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến thứ hai MC (C là tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OM và AC .

a). Chứng minh bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.

b). Chứng minh $OI \cdot OM = OA^2$ và $OM \parallel BC$.

c). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB , MB cắt đường tròn (O) tại D và cắt CH tại K . Chứng minh K là trung điểm của CH .

Câu 33: Cho tứ giác $ABCD$ có AB nhỏ hơn AD ; BC nhỏ hơn CD nội tiếp đường tròn đường kính BD , AB cắt DC tại E ; CB cắt DA tại F , DB cắt EF tại G .

a. Chứng minh rằng $BD \perp EF$ tại G

b. Chứng minh bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn.

c. Chứng minh rằng $BA \cdot BE = BC \cdot BF = BD \cdot BG$

d. Chứng minh rằng B là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ACG$

Câu 34: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

a) Chứng minh bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $DB \cdot DC = DH \cdot DA$.

c) Đường thẳng AO cắt đường tròn tâm O tại điểm K khác điểm A . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK và BC . Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng BC .

d) Tính $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

Câu 35: Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của đoạn AH , N là trung điểm của đoạn BC .

a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK \cdot CB$.

Câu 36: Cho đường tròn (O) và dây cung AB . Trên tia đối của tia AB lấy điểm C . Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ của đường tròn (O) cắt dây AB tại D . Tia CP cắt đường tròn (O) tại điểm I (điểm I khác điểm P). Các dây AB và QI cắt nhau tại K

a) Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng $CI.CP = CK.CD$ và IC là phân giác góc ngoài tại đỉnh I của tam giác AIB .

c) Giả sử ba điểm $A; B; C$ cố định. Chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua hai điểm A và B thì đường thẳng QI luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 37: Cho đường tròn (O) , từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm), OA cắt BC tại E .

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA.BE = AE.BO$.

c) Gọi I thuộc đoạn thẳng BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh F là trung điểm của AC .

Câu 38: Cho đường tròn (O) , từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm), OA cắt BC tại E .

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA.BE = AE.BO$.

c) Gọi I thuộc đoạn thẳng BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh F là trung điểm của AC .

Câu 39: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và AH là đường cao của tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB và AC .

a) Chứng minh bốn điểm A, M, H, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{ANM}$ và OA vuông góc với MN .

c) Cho biết $AH = R\sqrt{2}$. Chứng minh M, O, N thẳng hàng.

Câu 40: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Gọi A là một điểm bất kì trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Kẻ các đường cao AD, BE của tam giác ABC .

a) Chứng minh: Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AK của đường tròn tâm O . Gọi F là hình chiếu của điểm B trên AK . Chứng minh rằng: $AB.AC = AK.AD$ và $DF \perp AC$

c) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh: ba điểm $E; F; M$ thẳng hàng.

Câu 41: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc tại O . Gọi I là trung điểm của OB . Tia CI cắt đường tròn (O) tại E . Gọi H là giao điểm của AE và CD .

a) Chứng minh bốn điểm O, I, E, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AH.AE = 2R^2$ và $OA = 3.OH$.

c) Gọi K là hình chiếu của O trên BD , Q là giao điểm của AD và BE . Chứng minh: Q, K, I thẳng hàng.

- Câu 42:** Cho (O) đường kính AB . Kẻ đường kính CD vuông góc với AB . Lấy M thuộc cung nhỏ BC , AM cắt CD tại E . Qua D kẻ tiếp tuyến với (O) cắt đường thẳng BM tại N . Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên DN
- Chứng minh các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh $EN \parallel CB$.
 - Chứng minh $AM \cdot BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.
- Câu 43:** Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H
- Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.
 - Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn (O)
 - Vẽ CI cắt đường tròn (O) tại M (M khác C), EF cắt AD tại K . Chứng minh ba điểm B, K, M thẳng hàng.
- Câu 44:** Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Gọi K là trung điểm BC .
- Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$.
 - Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .
 - Đường phân giác góc FHB cắt AB và AC lần lượt tại M và N . Gọi I là trung điểm của MN , J là trung điểm của AH . Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm I, J, K thẳng hàng.
- Câu 45:** Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn và đường cao BE . Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ điểm E đến AB, AC .
- Chứng minh tứ giác $BHEK$ nội tiếp;
 - Chứng minh: $BH \cdot BA = BK \cdot BC$;
 - Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AB , I là trung điểm của đoạn thẳng EF . Chứng minh rằng H, I, K thẳng hàng.
- Câu 46:** Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AD và đường phân giác trong AO (D, O thuộc cạnh BC). Kẻ $OM \perp AB$ tại M , $ON \perp AC$ tại N .
- Chứng minh bốn điểm O, M, D, N cùng nằm trên một đường tròn. (dấu cách của dấu phẩy, dấu chấm viết không đúng)
 - Chứng minh: $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$.
 - Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt MN tại I , AI cắt BC tại K . Chứng minh K là trung điểm của BC .
- Câu 47:** Cho $(O; R)$ đường kính AB . Bán kính CO vuông góc với AB , M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C), MB cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu của H trên AB .
- Chứng minh bốn điểm C, B, H, K cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh CA là phân giác $\widehat{MCK}$.

c) Kẻ Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A . Lấy $P \in Ax$ sao cho $\frac{AP.MB}{MA} = R$.

Chứng minh PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK .

Câu 48: Từ điểm A nằm ngoài (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

Kẻ đường kính CD của (O) .

a) Chứng minh $BD \parallel AO$.

b) AD cắt (O) tại E (A, E, D theo thứ tự). Chứng minh rằng $AB^2 = AE.AD$.

c) Vẽ $BH \perp DC$ tại H . Gọi I là trung điểm của BH . Chứng minh ba điểm A, I, D thẳng hàng.

Câu 49: Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H .

a/ Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b/ Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh DA phân giác của $\widehat{MDN}$

c/ Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J . Chứng minh D là trung điểm IJ

Câu 50: Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D ; BD cắt CE tại H , AH cắt BC tại I . Từ A kẻ tiếp tuyến AM, AN của đường tròn (O) (M, N là tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AB.BE = BI.BC$, từ đó suy ra $AB.BE + AC.CD = BC^2$

c) Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

CHUYÊN ĐỀ 11_CÁC MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP VÀ CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

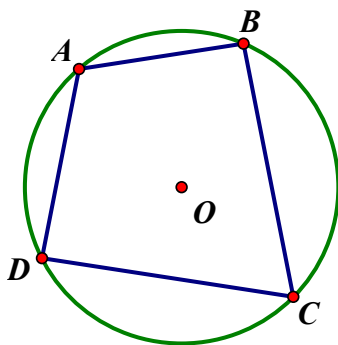
I. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

2. Tính chất của tứ giác nội tiếp :

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180^0



Trong hình vẽ, tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) nên ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^0$$

3. Chứng minh tứ giác nội tiếp

- Ta chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cách đều một điểm cho trước

VD : Để chứng minh tứ giác $ABCD$ (hình trên) nội tiếp $(O; R)$ ta cần chứng minh :

$$OA = OB = OC = OD = R$$

II. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

Để chứng minh đẳng thức hình học ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1** : Chứng minh tam giác đồng dạng
2. **Phương pháp 2** : Dùng định lí Thales
3. **Phương pháp 3** : Dùng tính chất đường phân giác trong tam giác
4. **Phương pháp 4** : Sử dụng kết hợp các phương pháp trên.

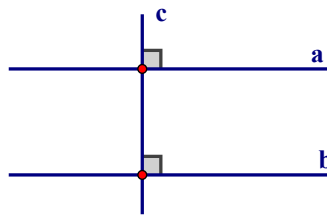
III. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1** : Sử dụng dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song
 - Chứng minh các góc so le trong bằng nhau
 - Chứng minh các góc đồng vị bằng nhau

2. **Phương pháp 2 :** Sử dụng mối quan hệ từ vuông góc đến song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 thì chúng song song với nhau.



Trên hình vẽ, $a \perp c$; $b \perp c$ nên $a \parallel b$

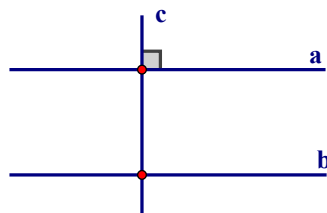
3. **Phương pháp 3 :** Sử dụng tính chất của các tứ giác đặc biệt.

VD : Sử dụng tính chất về cạnh của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, ...

IV. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

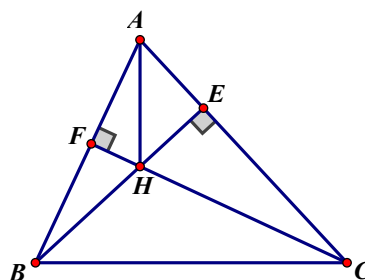
Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1 :** Sử dụng mối quan hệ từ vuông góc đến song song



Trong hình vẽ, $a \perp c$; $a \parallel b$ nên $b \perp c$

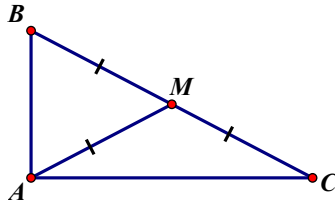
2. **Phương pháp 2 :** Sử dụng tính chất ba đường cao trong tam giác



Trong hình vẽ, chứng minh được H là giao điểm của hai đường cao BE ; CF nên H là trực tâm của tam giác ABC . Do đó, $AH \perp BC$

3. **Phương pháp 3 :** Sử dụng tính chất đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông.

Định lý : Trong một tam giác, nếu đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác là tam giác vuông.



Trong hình vẽ, Xét tam giác ABC có :

$$AM = BM = MC = \frac{BC}{2}$$

Thì tam giác ABC vuông tại A.

4. Phương pháp 4 : Sử dụng tính chất về góc của các tứ giác đặc biệt như hình chữ nhật, hình vuông hoặc tính chất đường chéo của hình thoi, hình vuông.

IV. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG.

Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc ta có thể sử dụng các phương pháp như sau:

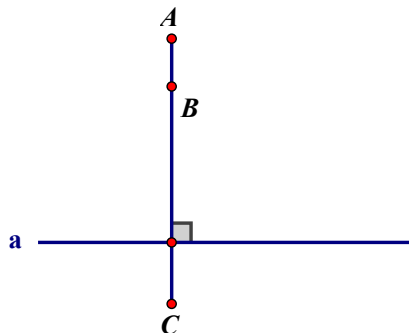
1. **Phương pháp 1 :** Chứng minh dựa vào Tiên đề Ôclid : Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



a —————

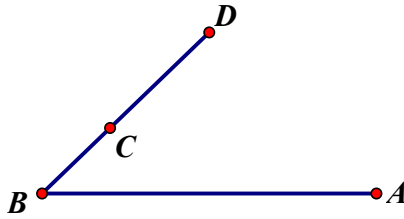
Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $AB \parallel a$; $AC \parallel a$. Từ đó, theo Tiên đề Ôclid thì đường thẳng AB và AC là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm A, B, C thẳng hàng.

2. **Phương pháp 2 :** Chứng minh dựa vào tính chất : Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho.



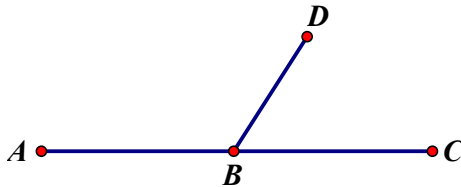
Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $AB \perp a$; $AC \perp a$. Từ đó, đường thẳng AB và AC là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm A, B, C thẳng hàng.

3. **Phương pháp 3 :** Chứng minh hai cạnh của góc trùng nhau



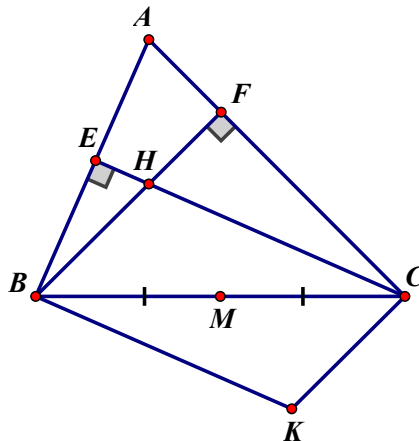
Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$. Từ đó, đường thẳng BC và BD là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm B, C, D thẳng hàng.

4. **Phương pháp 4 :** Sử dụng tính chất góc bẹt.



Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 180^\circ$. Từ đó, ta có BA, BC là hai tia đối nhau. Do đó, ba điểm B, C, A thẳng hàng.

5. **Phương pháp 5 :** Sử dụng tính đường chéo của các tứ giác đặc biệt.



Ví dụ : Trong bài toán trên, với dữ kiện H là trực tâm tam giác ABC . Các đường thẳng BK và CK lần lượt vuông góc với AB, AC . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh : Ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Để chứng minh bài toán trên, ta chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành nên hai đường chéo BC, HK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HK . Do đó, ba điểm H, M, K thẳng hàng.

V. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC.

Trong bài toán liên quan đến Bất đẳng thức và cực trị hình học ta thường sử dụng tính chất:

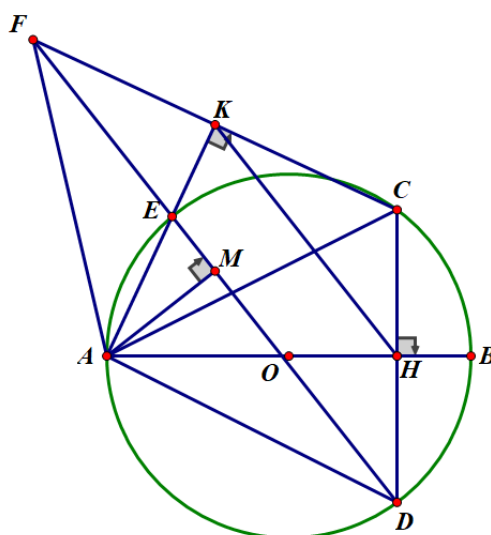
1. Với hai số dương x, y ta có: $(x - y)^2 \geq 0$. Từ đó chứng minh được: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi $x = y$

2. Bất đẳng thức Cauchy: Với hai số dương a, b ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi $x = y$

Ví dụ: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi H là điểm nằm giữa O và B . Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H . Trên cung nhỏ AC lấy điểm E bất kì (E khác A và C). Kẻ CK vuông góc với đường thẳng AE tại K . Đường thẳng DE cắt CK tại F .

- C/m: Tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
- C/m: tam giác ACF là tam giác cân.
- Khi CD, AB cố định. Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác ADF lớn nhất

Giải:



- C/m: Tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
 - +) Có $CK \perp AK$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AKC} = 90^\circ$
 - +) Có $CD \perp AB$ tại H (gt) $\Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$
 - +) Xét tứ giác và c/m nội tiếp
- C/m: tam giác ACF là tam giác cân.
 - +) C/m: $KH \parallel EF$
 - +) Vận dụng tính chất đường trung bình của tam giác CDF c/m: K là trung điểm của EC
 - +) Xét tam giác lập luận AK là đường cao đồng thời là đường trung tuyến để suy ra tam giác cân
- Khi CD, AB cố định. Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác ADF lớn nhất
 - +) AB là đường trung trực của CD nên $AC = AD$ mà $AC = AF$ do tam giác ACF cân

Suy ra $AD = AF$. Từ đó, ta có $\triangle ADF$ cân tại A

 - +) Kẻ AM vuông góc với DF tại M

C/m: $\triangle AMF = \triangle AMD$ suy ra $S_{AFD} = 2S_{AMD}$ (1)

 - +) Áp dụng BĐT Cauchy cho AM^2 và MD^2 có:

$$AM^2 + MD^2 \geq 2\sqrt{AM^2 \cdot MD^2}$$

$$AM \cdot MD \leq \frac{AM^2 + MD^2}{2}$$

$$\text{Mà } AM^2 + MD^2 = AD^2 \text{ (PTG } \triangle AMD)$$

$$\Rightarrow AM \cdot MD \leq \frac{AD^2}{2} \text{ (2)}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $AM = MD$

+) Từ (1), (2) $\Rightarrow S_{AFD}$ max khi $AM = MD$ hay tam giác AMD cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{ADM} = 45^\circ \text{ hay } \widehat{ADE} = 45^\circ$$

Vậy diện tích tam giác AFD lớn nhất khi E nằm trên cung AC sao cho góc $\widehat{ADE} = 45^\circ$

NHỮNG MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ TUYỂN SINH 9 LÊN 10

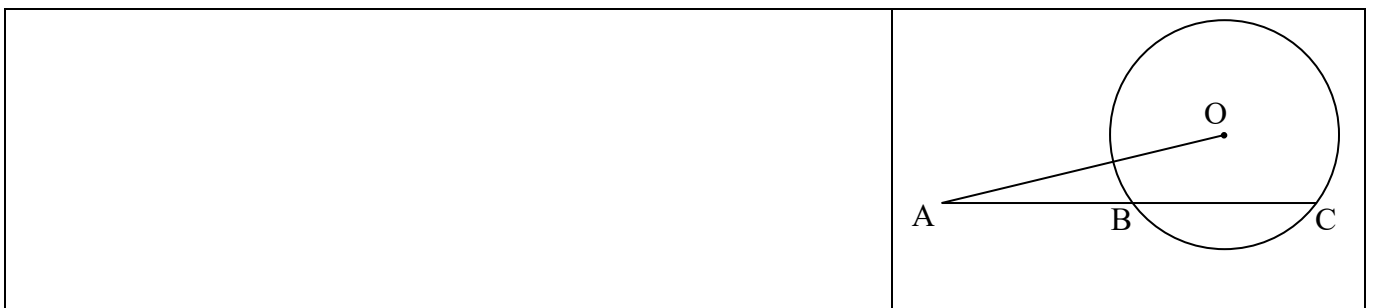
Bài toán 1: Biết ABC, ADE là hai cát tuyến của (O) . Chứng minh: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



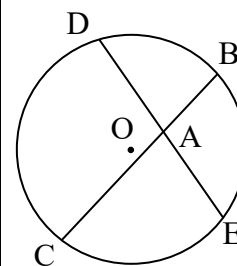
Bài toán 2: ABC là cát tuyến của (O) , AT là tiếp tuyến. Chứng minh: $AT^2 = AB \cdot AC$



Bài toán 3: Cho $(O; R)$, ABC là cát tuyến, $OA = d$. Chứng minh $AB \cdot AC = d^2 - R^2$

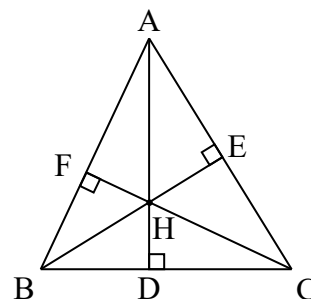


Bài toán 4: Biết BC, DE là hai dây cung cắt nhau tại A . Chứng minh: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



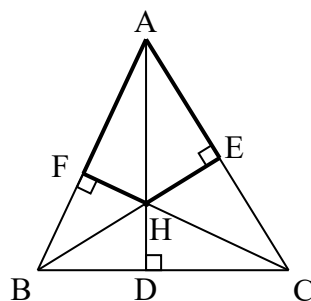
Bài toán 5: Cho $\triangle ABC$ nhọn; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H .

- 1) $DB \cdot DC = DH \cdot DA$
- 2) $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$
- 3) $AF \cdot AB = AH \cdot AD = AE \cdot AC$

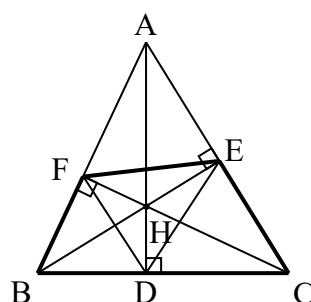


Bài toán 6: Cho $\triangle ABC$ nhọn; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H .

- 1) Chứng minh: $AEHF$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính.

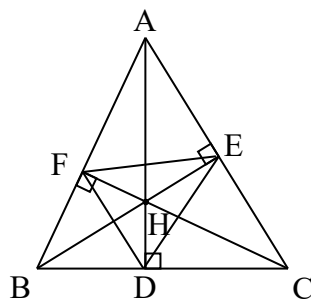


- 2) Chứng minh: $BCEF$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính.

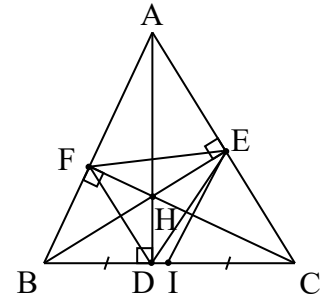


Bài toán 7: Cho $\triangle ABC$ nhọn; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H , I là trung điểm BC .

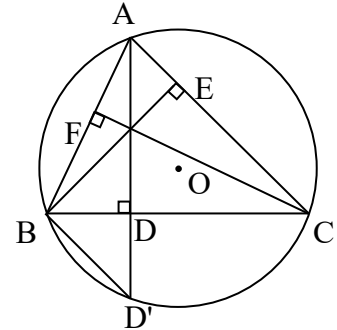
Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$



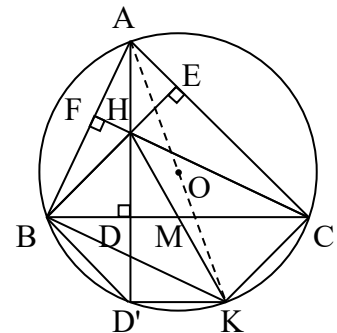
Chứng minh: $D, F, E, I \in$ đường tròn



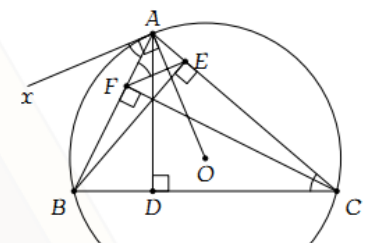
Bài toán 8: $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) ; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H , AH cắt (O) tại D' . Chứng minh: D' đối xứng với H qua BC .



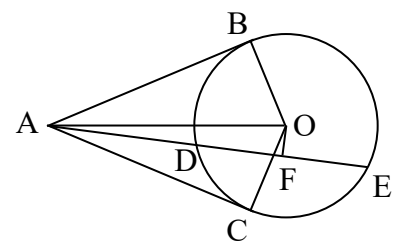
Bài toán 9: $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) ; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H . AH cắt (O) tại D' . Chứng minh: $BD'KC$ là hình thang cân



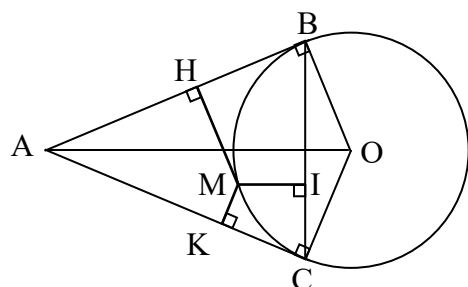
Bài toán 10: $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) ; AD, BE, CF là 3 đường cao. Chứng minh: $OA \perp EF$



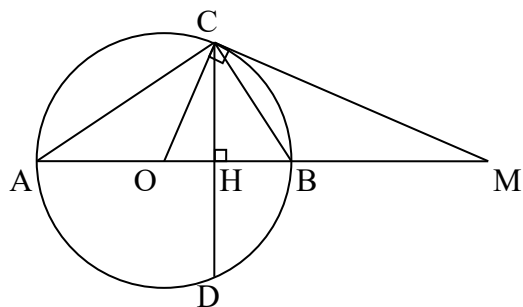
Bài toán 11: AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A, ADE là cát tuyến. F là trung điểm dây DE . Chứng minh: $A, B, O, C, F \in$ đường tròn.



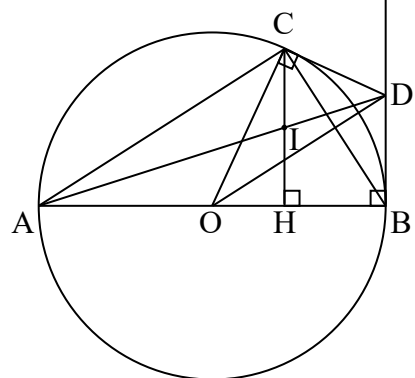
Bài toán 12. AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A. $M \in \widehat{BC}$ nhỏ. H, I, K là hình chiếu của M trên AB, BC, CA . Chứng minh: $MI^2 = MH.MK$



Bài toán 13: Cho (O) , đường kính AB , dây $CD \perp AB$ tại H . Tiếp tuyến tại C cắt AB tại M . Chứng minh: $BM.AH = BH.AM$



Bài toán 14: Cho $(O; R)$, đường kính AB , $C \in (O)$, $CH \perp AB$ tại H . Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại D . Chứng minh: AD qua trung điểm I của CH .



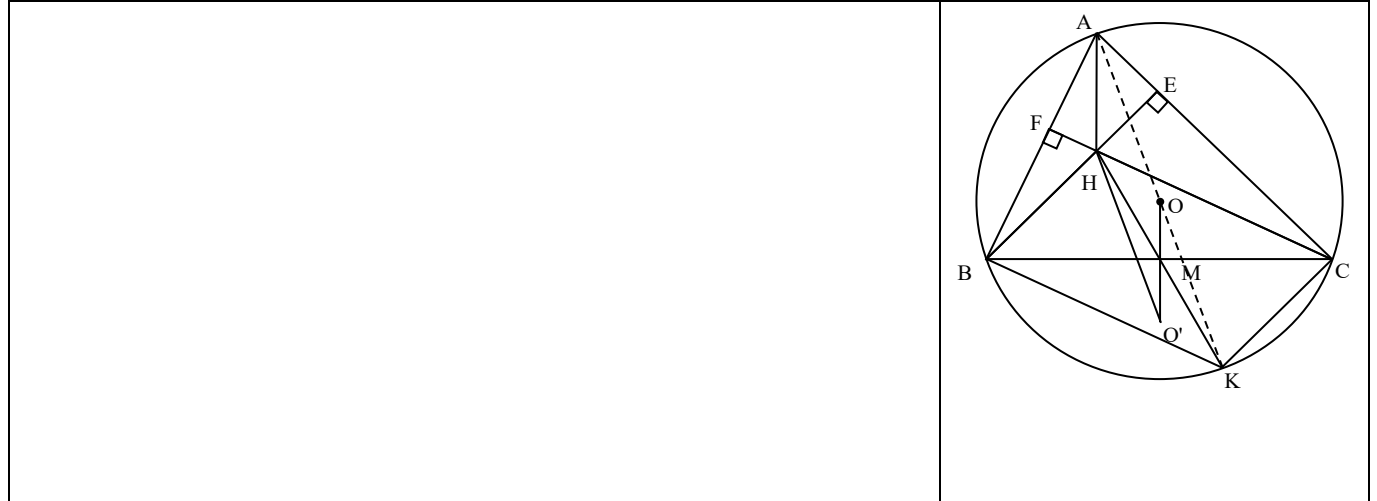
Bài toán 15: $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) ; AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H , gọi M là trung điểm BC . Vẽ đường kính AK .

a) Chứng minh: $BHCK$ là hình bình hành

b) M, H, K thẳng hàng. suy ra M là trung điểm HK.

c) OM là đường trung bình của ΔAHK . suy ra $AH = 2OM$

d) Nếu O' đối xứng với O qua BC thì $AHO'O$ là hình bình hành $\Rightarrow O'H = OA = R$. Trong trường hợp khi $(BC = R\sqrt{3} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ)$ thì $AHO'O$ là hình thoi



B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Gọi K là trung điểm BC .

a) Chứng minh ΔAEF đồng dạng ΔABC .

b) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .

c) Đường phân giác góc FHB cắt AB và AC lần lượt tại M và N . Gọi I là trung điểm của MN , J là trung điểm của AH . Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải

a) **Vẽ đúng hình đến ý 1)**

$$BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$$

$$CF \perp AB \Rightarrow \widehat{CFB} = 90^\circ$$

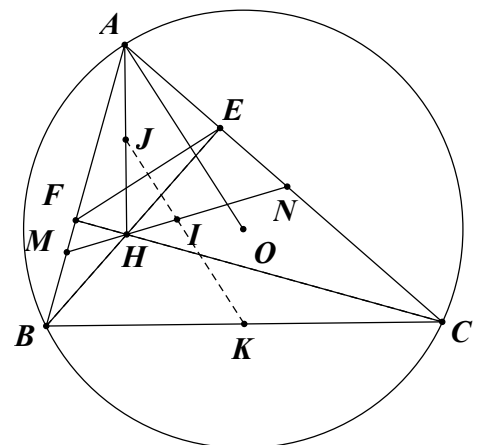
$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \Delta AEF$ đồng dạng ΔABC .

b) **Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng**

$$\text{Tứ giác } BCEF \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$$

$$\Delta OAC \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{EAO} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2}$$



$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} \Rightarrow \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow \widehat{AEF} + \widehat{EAO} = 90^\circ \Rightarrow AO \perp EF$$

c) **Chứng minh tứ giác AFHI nội tiếp và I, J, K thẳng hàng.**

Chứng minh $\triangle AMN$ cân tại A vì $\widehat{AMN} = \widehat{MBH} + \widehat{MHB} = \widehat{NCH} + \widehat{NHC} = \widehat{ANM} \Rightarrow AI \perp MN$

$\widehat{AFH} = \widehat{AIH} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác AFHI là tứ giác nội tiếp.

Có $\widehat{MAH} = \widehat{NAO} \Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{IAO} \Rightarrow IJ \parallel AO$ suy ra IJ trung trực EF

Có $JE = JF, KE = KF \Rightarrow KI$ trung trực EF $\Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

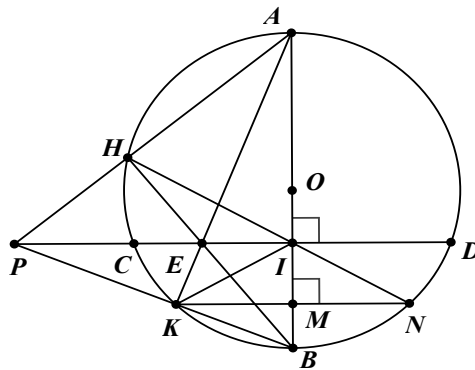
Câu 2: Cho đường tròn (O), dây CD cố định. Gọi B là điểm chính giữa cung nhỏ CD, kẻ đường kính AB cắt CD tại I. Lấy điểm H bất kỳ trên cung lớn CD, HB cắt CD tại E. Đường thẳng AH cắt đường thẳng CD tại P.

a). Chứng minh: Tứ giác PHIB nội tiếp.

b). Chứng minh: $AH \cdot AP = AI \cdot AB$.

c). Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và BP. Kẻ $KM \perp AB$ cắt AB tại M, cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh N, I, H thẳng hàng.

Lời giải



a). Chứng minh: Tứ giác PHIB nội tiếp.

Ta có $\widehat{AHB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{PHB} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AHB} = 90^\circ$);
 $\widehat{PIB} = 90^\circ$ (GT) $\Rightarrow H, I$ cùng thuộc đường tròn đường kính PB $\Rightarrow$ tứ giác PHIB nội tiếp đường tròn đường kính PB.

b). Chứng minh: $AH \cdot AP = AI \cdot AB$.

Xét $\triangle AHI$ và $\triangle ABP$ có:

$\widehat{HAI}$ chung;

$\widehat{AHI} = \widehat{ABP}$ (cùng bù với $\widehat{PHI}$ do tứ giác PHIB nội tiếp)

$$\Rightarrow \Delta AHI \sim \Delta ABP (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AB}{AP} \Leftrightarrow AH \cdot AP = AI \cdot AB.$$

c). Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và BP . Kẻ $KM \perp AB$ cắt AB tại M , cắt đường tròn (O) tại N . Chứng minh N, I, H thẳng hàng.

Tứ giác $PHIB$ nội tiếp nên $\widehat{HIP} = \widehat{HBP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{HP}$) (1);

Tam giác ABP có hai đường cao PI, BH cắt nhau tại $E \Rightarrow E$ là trực tâm của

$\Delta ABP \Rightarrow AE \perp BP$ hay $AK \perp BP \Rightarrow \widehat{EKB} = 90^\circ$, mà $\widehat{EIB} = 90^\circ$ (GT) $\Rightarrow$ tứ giác $BKEI$ nội tiếp đường tròn đường kính $BE \Rightarrow \widehat{EIK} = \widehat{HBP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EK}$) (2);

Mà $\widehat{EKB} = 90^\circ \Rightarrow K \in (O)$, lại có $AB \perp KN$ tại $M \Rightarrow MK = MN$ (quan hệ vuông góc đường kính và dây) $\Rightarrow \Delta IMK = \Delta IMN (c.g.c) \Rightarrow \widehat{MIK} = \widehat{MIN} \Rightarrow 90^\circ - \widehat{MIK} = 90^\circ - \widehat{MIN} \Rightarrow \widehat{EIK} = \widehat{DIN}$ (3);

Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{HIP} = \widehat{DIN} (= \widehat{HBP} = \widehat{EIK}) \Rightarrow \widehat{HIP} + \widehat{PIN} = \widehat{DIN} + \widehat{PIN} = \widehat{PID} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HIN} = 180^\circ \Rightarrow H, I, N$ thẳng hàng.

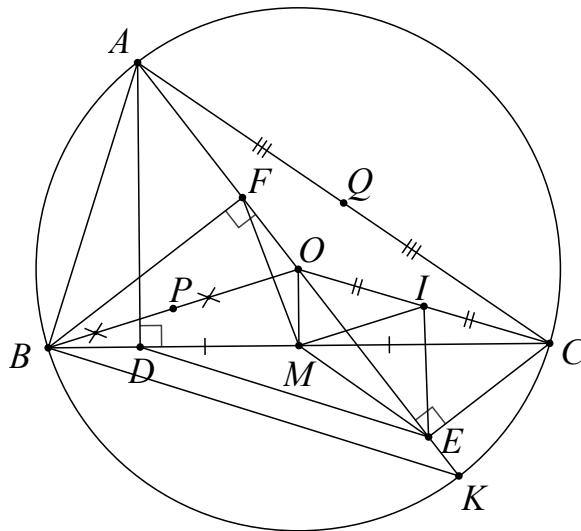
Câu 3: Cho đường tròn tâm (O) và dây BC cố định không đi qua O . Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB < AC$. Kẻ đường kính AK, E là hình chiếu của C trên AK . M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh bốn C, E, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ $AD \perp BC$ tại D . Chứng minh $AD \cdot AK = AB \cdot AC$ và ΔMDE cân.

c) Gọi F là hình chiếu của B trên AK . Chứng minh khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là 1 điểm cố định.

Lời giải



a) Chứng minh bốn C, E, M, O cùng thuộc một đường tròn.

ΔOBC cân tại O , M là trung điểm của BC nên OM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao. Suy ra $OM \perp BC \Rightarrow \widehat{OMC} = 90^\circ$

Theo Câu ra, E là hình chiếu của C trên AK nên $CE \perp AK \Rightarrow CE \perp EO \Rightarrow \widehat{OEC} = 90^\circ$.

Gọi I là trung điểm của OC

Dễ dàng chứng minh $IO = IE = IM = IC$

Do đó C, E, M, O cùng thuộc một đường tròn (I) .

b) ***Chứng minh** $AD.AK = AB.AC$

Xét $\triangle DBA$ và $\triangle CKA$ có

$$+) \widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90^\circ$$

$$+) \widehat{ABD} = \widehat{ACK} \text{ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AC \text{)}$$

Nên $\triangle DBA \sim \triangle CKA$

$$\text{Do đó ta có: } \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AK} \text{ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)}$$

Hay $AD.AK = AB.AC$ (đpcm).

***Chứng minh** $\triangle MDE$ cân.

$$\text{Theo Câu ra } \begin{cases} AD \perp BC \\ AE \perp EC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ADC} = 90^\circ \\ \widehat{AEC} = 90^\circ \end{cases}$$

Gọi Q là trung điểm của AC

Dễ dàng chứng minh $QA = QC = QD = QE$

Suy ra bốn điểm A, C, D, E cùng thuộc đường tròn (Q)

Suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE) (1)

Xét (O) ta có: $\widehat{CBK} = \widehat{CAE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CK) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBK} = \widehat{CDE}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị (3)

Suy ra $DE \parallel BK$

Xét đường tròn (I) có: $\widehat{EMC} = \widehat{EOC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EC}$). (4)

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{KBC} = \frac{1}{2} \widehat{KOC}$ (Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{KC}$). (5)

Từ (3); (4) và (5) suy ra: $\widehat{EMC} = 2\widehat{CDE}$.

$\triangle MDE$ có $\widehat{EMC} = \widehat{MDE} + \widehat{MED}$ (góc ngoài của tam giác) mà $\widehat{EMC} = 2\widehat{MDE}$

Nên $\widehat{MDE} = \widehat{MED}$. Do đó, $\triangle MDE$ cân tại M .

c) Chứng minh khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DEF$ là 1 điểm cố định.

Gọi P là trung điểm của BO

Dễ dàng chứng minh được $PB = PO = PF = PM$

Suy ra bốn điểm O, M, B, F cùng thuộc đường tròn (P)

Nên $\widehat{OBM} = \widehat{MFO}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MO}$).

Xét đường tròn (I) có: $\widehat{MEO} = \widehat{MCO}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MO}$).

Mà $\widehat{OBM} = \widehat{OCM}$ ($\triangle OCB$ cân tại O).

Do đó $\widehat{MFO} = \widehat{MEO} \Rightarrow \triangle EMF$ cân tại $M \Rightarrow ME = MF$

Mà $ME = MD$ (Tam giác MDE cân tại M).

Suy ra: $MD = ME = ME$.

Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF .

Mà M là trung điểm của BC nên M là điểm cố định.

Vậy khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

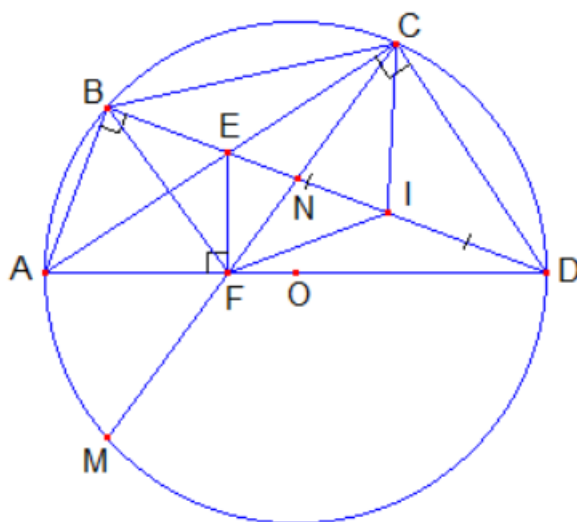
Câu 4: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD . Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E . Từ E kẻ EF vuông góc với AD ($F \in AD$). Đường thẳng CF cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M . Giao điểm của BD và CF là N . Chứng minh:

a) $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

b) FA là tia phân giác của $\widehat{BFM}$.

c) $BE \cdot DN = EN \cdot BD$.

Lời giải



a) $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $\triangle ECD$ vuông tại C

Gọi I là trung điểm của ED

Ta có CI là đường trung tuyến hạ xuống cạnh huyền ED

$$\text{Nên } CI = IE = ID = \frac{1}{2}ED \quad (1)$$

Tương tự trong tam giác EFD vuông tại F , ta có

$$FI = IE = ID = \frac{1}{2}ED \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CI = FI = IE = ID$

Hay tứ giác $CEFD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I đường kính ED

b) FA là tia phân giác của $\widehat{BFM}$

Ta có $CEFD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CFD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CD}$)

Chứng minh tương tự câu a) ta có $ABEF$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{BFA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AB}$)

Mà $\widehat{BEA} = \widehat{CED}$ (đối đỉnh)

$\widehat{AFM} = \widehat{CFD}$ (đối đỉnh)

Do đó $\widehat{BFA} = \widehat{AFM}$

Hay FA là tia phân giác $\widehat{BFM}$

c) $BE.DN = EN.BD$.

Ta có $\widehat{EFC} = \widehat{EDC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EC}$)

$\widehat{EFB} = \widehat{BAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EB}$)

Mà $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \widehat{EDC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BC}$)

Suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{EFB}$ hay FE là tia phân giác của $\widehat{BFC}$

Trong $\triangle BFN$ có FE là phân giác trong tại đỉnh $F \Rightarrow \frac{BE}{EN} = \frac{FB}{FN}$

Mà $EF \perp FD \Rightarrow FD$ là phân giác ngoài tại đỉnh $F \Rightarrow \frac{BD}{DN} = \frac{FB}{FN}$

Suy ra $\frac{BE}{EN} = \frac{BD}{DN} \Rightarrow BE.DN = EN.BD$

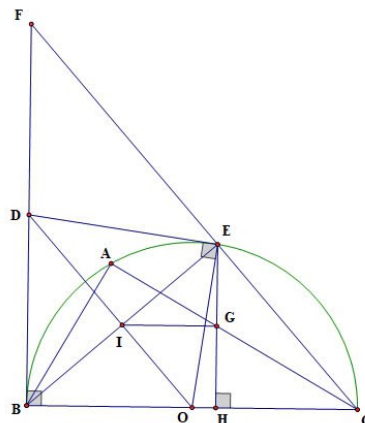
Câu 5: Trên nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC , lấy điểm A sao cho $BA = R$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A và tính số đo các góc B, C của tam giác vuông ABC

b) Qua B kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) , nó cắt tia CA tại D . Qua D kẻ tiếp tuyến DE với nửa đường tròn (O) (E là tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OD và BE . Chứng minh rằng $OD \perp BE$ và $DI.DO = DA.DC$

c) Kẻ EH vuông góc với BC tại H . EH cắt CD tại G . Chứng minh IG song song với BC .

Lời giải



a) Ta có $OA = R, BC = 2R$

$$\Rightarrow OA = OB = OC = \frac{BC}{2} = R$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A

$$\text{Ta có } \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ$$

$$\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

b) Vì DB, DE là 2 tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow DB = DE$ và DI là phân giác $\widehat{BDE}$

$$\Rightarrow \triangle BDI = \triangle EDI \Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DIE} \text{ mà 2 góc này ở vị trí kề bù}$$

$$\Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DIE} = 90^\circ$$

OD là đường trung trực BE $\Rightarrow OD \perp BE$

$\triangle DBO$ vuông tại B, BI là đường cao

$$\sin \widehat{DBI} = \frac{DI}{BD}; \sin \widehat{DOB} = \frac{DB}{OD} \text{ mà } \widehat{DBI} = \widehat{DOB} \text{ (cùng cộng } \widehat{IBO} \text{ 1 góc } 90^\circ)$$

$$\Rightarrow DI \cdot DO = DB^2 \quad (1)$$

$\triangle DBC$ vuông tại B, BA là đường cao. CMTT ta có

$$DB^2 = DA \cdot DC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow DI \cdot DO = DA \cdot DC$$

c) Kéo dài CE cắt BD tại F. Vì $\widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEF} = 90^\circ$ (tính chất kề bù)

mà $DB = DE$ (chứng minh trên)

suy ra ED là đường trung tuyến $\triangle FEB$ vuông tại E $\Rightarrow BD = DF$

$$\text{Vì } GH // BD \text{ (cùng } \perp BC) \Rightarrow \frac{GH}{BD} = \frac{GC}{DC} \text{ (Ta-let)} \quad (3)$$

$$\text{Vì } GE // DF \text{ (cùng } \perp BC) \Rightarrow \frac{GE}{DF} = \frac{GC}{DC} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{GH}{BD} = \frac{GE}{DF} \text{ do } BD = DF \text{ (cmt)} \Rightarrow GH = GE$$

Mà $IB = IC$ (OD trung trực BE)

Do đó IG là đường trung bình tam giác EHB

$$\Rightarrow IG // BH \Rightarrow IG // BC \text{ (dpcm)}$$

Câu 6: Cho đường tròn (O) cố định. Từ một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M; N là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của dây BC.

a). Chứng minh rằng: AMON là tứ giác nội tiếp.

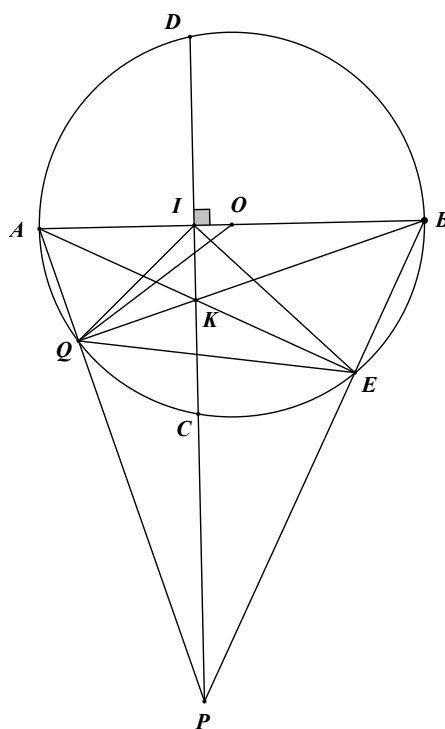
b). Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh rằng: $AK \cdot AI = AB \cdot AC$

c). Xác định vị trí của cát tuyến ABC để $IM = 2IN$.

Lời giải

c) Gọi P là giao điểm của tia BE và tia DC , Q là giao điểm của AP và BK . Chứng minh IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$. Chứng minh OQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE .

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm K, E, B, I cùng thuộc một đường tròn.

Xét $(O; R)$ có: $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{KEB} = 90^\circ$

đường kính AB vuông góc với dây CD tại điểm $I \Rightarrow \widehat{KIB} = 90^\circ$

Xét $\triangle KEB$ vuông tại E có cạnh huyền KB suy ra K, E, B thuộc đường tròn đường kính KB
(1)

Xét $\triangle KIB$ vuông tại I có cạnh huyền KB suy ra K, I, B thuộc đường tròn đường kính KB
(2)

Hay bốn điểm K, E, B, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AK.AE = AI.AB$.

Xét $\triangle AKI$ và $\triangle ABE$, ta có: $\hat{A}$ là góc chung và $\widehat{AIK} = \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle AKI \sim \triangle ABE$ ($g - g$)

$$\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AI}{AE} \Rightarrow AK.AE = AI.AB \text{ (đpcm)}$$

c) Gọi P là giao điểm của tia BE và tia DC , Q là giao điểm của AP và BK . Chứng minh IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$. Chứng minh OQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE .

*** Chứng minh IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$.**

Xét $\triangle APB$ có: $PI \perp AB (I \in AB)$; $AE \perp PB (E \in PB)$; $PI \cap AE \equiv \{K\}$

$\Rightarrow K$ là trọng tâm của $\triangle APB \Rightarrow PQ \perp AP (Q \in AP) \Rightarrow \widehat{AQB} = 90^\circ$ hay $\widehat{AQK} = 90^\circ$

Đường kính AB vuông góc với dây CD tại điểm $I \Rightarrow \widehat{AIK} = 90^\circ$

Chứng minh được bốn điểm A, I, Q, K cùng thuộc đường tròn đường kính AK suy ra $AIKQ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{QAK} = \widehat{QIK}$ (hai góc nt cùng chắn $\widehat{QK}$)

Ta có: $KEBI$ là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{KIE} = \widehat{KBE}$ (hai góc nt cùng chắn $\widehat{EK}$)

Lại có: $\widehat{QAK} = \widehat{KBE}$ (hai góc nt cùng chắn cung $\widehat{QE}$)

$\Rightarrow \widehat{KIE} = \widehat{KIQ}$ hay IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$ (đpcm)

*** Chứng minh OQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE .**

Ta có: $\widehat{AQB} = 90^\circ \Rightarrow Q \in (O; R)$

Xét $\triangle OQB$, ta có:

$$OQ = OB = R$$

$\Rightarrow \triangle OQB$ là tam giác cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{OQB} = \widehat{OBQ} \text{ hay } \widehat{OQK} = \widehat{OBQ} \quad (1)$$

Xét $\triangle IBK$ và $\triangle QPK$, ta có:

$$\widehat{IKB} = \widehat{QKP} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\widehat{KQP} = \widehat{KIB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle IBK \sim \triangle QPK \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{QPK} \text{ (hai góc tương ứng) hay } \widehat{OBK} = \widehat{QPK} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{OQK} = \widehat{QPK} \quad (*)$

Ta có: $\widehat{BQE} = \widehat{BAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BE}$) hay $\widehat{KQE} = \widehat{IAK} \quad (3)$

Xét $\triangle IAK$ và $\triangle EPK$, ta có:

$$\widehat{IKA} = \widehat{EKP} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\widehat{KEP} = \widehat{KIA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta IAK \sim \Delta EPK \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{EPK} \text{ (hai góc tương ứng) (4)}$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } \widehat{KQE} = \widehat{EPK} \text{ (**)}$$

$$\text{Từ (*) và (**) ta có: } \widehat{OQK} + \widehat{KQE} = \widehat{QPK} + \widehat{EPK} \Rightarrow \widehat{OQE} = \widehat{QPE}$$

$$\text{Lại có: } \Delta QEP \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{QPE} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{QE} \text{ (tc góc nội tiếp)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OQE} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{QE}$$

$$\Rightarrow OQ \text{ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác } PQE \text{ (đpcm).}$$

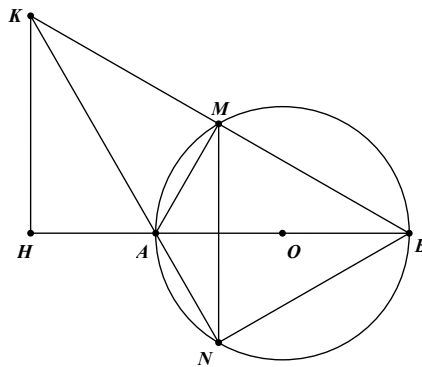
Câu 8: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Dây cung MN vuông góc với AB , $(AM < BM)$. Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB .

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB \cdot HK = AN \cdot HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

$$+) \text{ Có: } \widehat{AHK} = 90^\circ \text{ (vì } KH \perp AB)$$

$$\Rightarrow \Delta AHK \text{ vuông tại } H \Rightarrow 3 \text{ điểm } A; H; K \text{ nằm trên đường tròn đường kính } AK$$

$+) \text{ Xét } (O) \text{ có:}$

$$\widehat{AMB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMK} = 90^\circ \text{ (kề bù với } \widehat{AMB})$$

$$\Rightarrow \Delta AMK \text{ vuông tại } M \Rightarrow 3 \text{ điểm } A; M; K \text{ nằm trên đường tròn đường kính } AK$$

Suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp đường tròn đường kính AK .

- Câu 9:** Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính BC , đường thẳng qua O vuông góc với BC cắt AC tại D .
- a) Chứng minh rằng tứ giác $ABOD$ nội tiếp.
- b) Tiếp tuyến tại điểm A với đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm P , sao cho $PB = BO = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn PA và số đo góc APC .
- c) Chứng minh rằng $\frac{PB}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABOD$ nội tiếp.

Xét đường tròn (O) có BC là đường kính (gt)

Suy ra $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Gọi M là trung điểm của BD .

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến

$$\text{Suy ra } AM = \frac{1}{2}BD. (1)$$

Xét $\triangle OBD$ vuông tại O ($OD \perp BC$) có OM là đường trung tuyến

$$\text{Suy ra } OM = \frac{1}{2}BD. (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } MA = MO = MB = MD = \frac{1}{2}BD$$

Do đó tứ giác $ABOD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD .

b) Tiếp tuyến tại điểm A với đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm P , sao cho $PB = BO = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn PA và số đo góc APC .

Ta có: $OA = OB = BP = 2\text{cm}$ suy ra $OP = 4\text{cm}$.

Ta có: $\triangle PAO$ vuông tại A (PA là tiếp tuyến)

Suy ra $PA^2 + OA^2 = OP^2$ (định lý Pythagore)

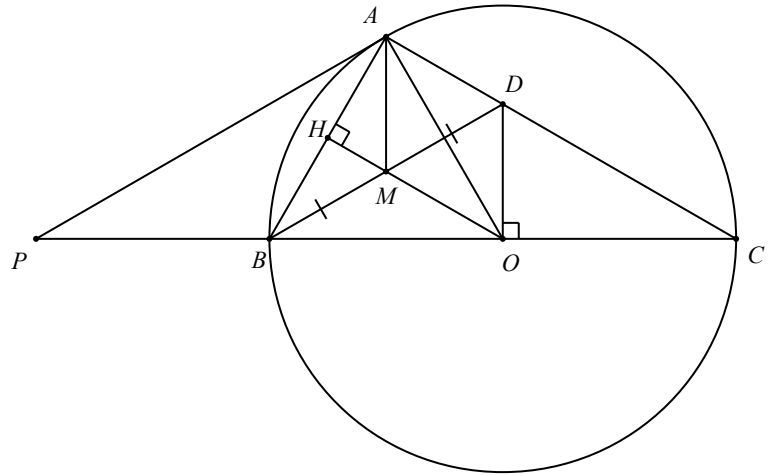
$$\text{Do đó } PA^2 + 2^2 = 4^2 \text{ hay } PA^2 = 12 \text{ hay } PA = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Ta có: } \sin \widehat{APO} = \frac{OA}{OP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{APO} = 30^\circ \text{ hay } \widehat{APC} = 30^\circ.$$

$$\text{c) Chứng minh rằng } \frac{PB}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Kẻ $OH \perp AB$ ($H \in AB$).



Xét $\triangle OAB$ cân tại O ($OA=OB$) có OH là đường cao

Suy ra OH đồng thời là đường phân giác

$$\text{Do đó } \widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

Ta lại có: $\widehat{PAB} + \widehat{BAO} = 90^\circ$ (PA là tiếp tuyến)

mà $\widehat{AOH} + \widehat{BAO} = 90^\circ$ ($\triangle OHA$ vuông tại H)

$$\text{Suy ra } \widehat{PAB} = \widehat{AOH} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$

Mặt khác, $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

$$\text{Suy ra } \widehat{PAB} = \widehat{ACB} \text{ hay } \widehat{PAB} = \widehat{PCA}.$$

Xét $\triangle PAB$ và $\triangle PCA$ có:

$\hat{P}$ là góc chung

$$\widehat{PAB} = \widehat{PCA} \text{ (cmt)}$$

Suy ra $\triangle PAB \sim \triangle PCA$ (g.g)

$$\text{Do đó } \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Suy ra } PA^2 = PB \cdot PC \text{ và } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{PA^2}{PC^2}$$

$$\text{Từ đó } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{PB \cdot PC}{PC^2} = \frac{PB}{PC}.$$

Câu 10: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BD, CE cắt nhau ở điểm H .

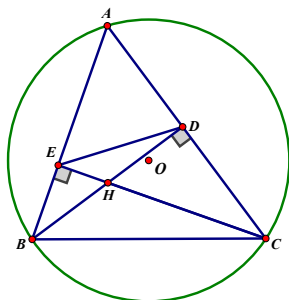
a) Chứng minh: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G . Chứng minh: $\triangle BHG$ cân ở B .

c) Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng CH và CG . Đường thẳng NO cắt cạnh AC tại điểm P . Chứng minh: $CD \cdot CP = CM \cdot CG$ và $MB \perp MP$.

Lời giải

a) **Chứng minh: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.**

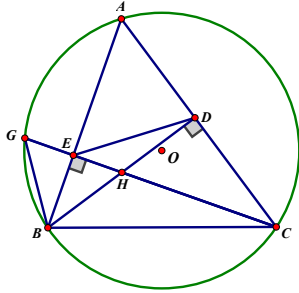


Chứng minh: $\widehat{BEC} = 90^\circ$

Chứng minh: $\widehat{BDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BDC}$

Suy ra: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $\triangle BHG$ cân ở B .



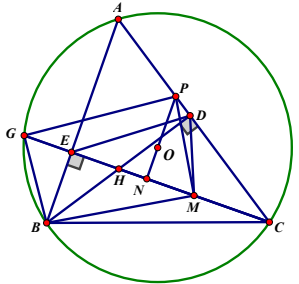
Chứng minh: $\widehat{EBD} = \widehat{ECD}$ (do $BCDE$ là tứ giác nội tiếp).

Chứng minh: $\widehat{GBE} = \widehat{ECD}$ (góc nội tiếp (O) chắn cung AG)

Suy ra: $\widehat{EBD} = \widehat{GBE}$ nên BE là phân giác góc GBH

Mà BE là đường cao của $\triangle BGH$ nên $\triangle BGH$ cân ở B

c) Chứng minh: $CD.CP = CM.CG$ và $MB \perp MP$.



Chứng minh: $PN \perp GC$

Suy ra: $\triangle CDH$ và $\triangle CNP$ đồng dạng (g – g) nên $\frac{CD}{CN} = \frac{CH}{CP}$

Suy ra: $CD.CP = CN.CH = \frac{1}{2}CG.2CM = CM.CG$

$\triangle CDM$ và $\triangle CGP$ đồng dạng (c–g–c)

Suy ra: $GPDM$ là tứ giác nội tiếp (1)

Do $\widehat{PGM} = \widehat{MDC} = \widehat{MCD}$ nên chứng minh được $\widehat{BGP} = 90^\circ$

Suy ra: $GPDB$ là tứ giác nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra $GPMB$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{BMP} = 90^\circ$ nên $MB \perp MP$

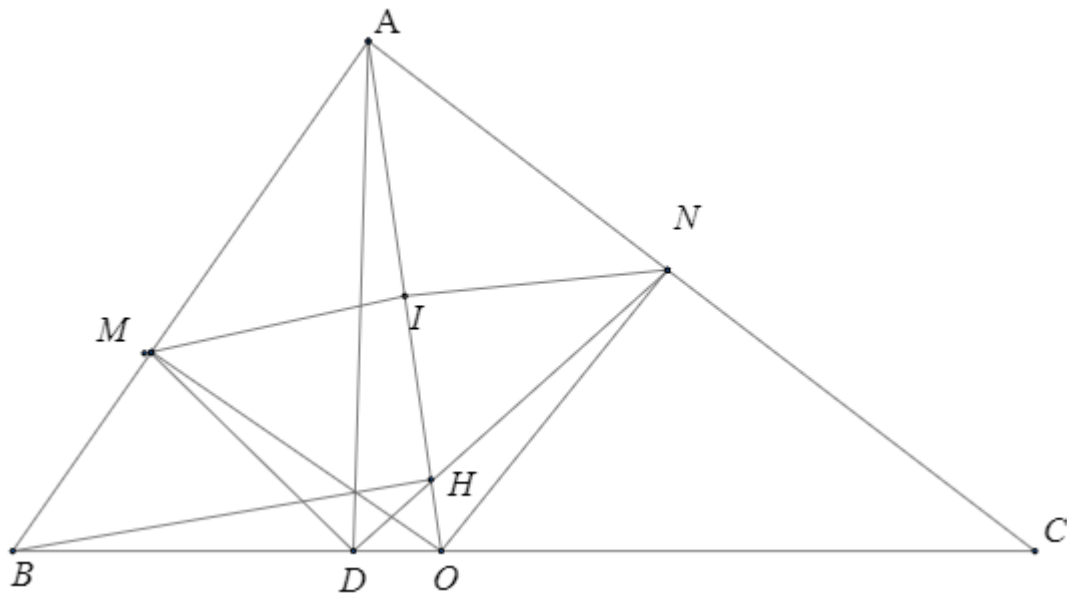
Câu 11: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AD và đường phân giác trong AO (D, O thuộc cạnh BC). Kẻ OM vuông góc với AB tại M , ON vuông góc với AC tại N .

a) Chứng minh: Tứ giác $AMON$ nội tiếp

b) Chứng minh $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$

c) $\sin \frac{\widehat{BAC}}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}$

Lời giải



2. a. $\triangle AOM$ vuông tại M

Gọi I là trung điểm của AO

Suy ra MI là trung tuyến

Nên $MI = IA = IO$

Xét $\triangle AON$ vuông tại N

Có I là trung điểm của AO

Nên NI là trung tuyến

Do đó $NI = IA = IO$

Suy ra $MI = IA = IO = IN$ nên tứ giác $AMON$ nội tiếp

b. Xét $\triangle BMO$ và $\triangle BDA$ có

$\widehat{B}$ chung

$\widehat{BMO} = \widehat{BDA} = 90^\circ$ ($AD \perp BC$ tại D ; $OM \perp AB$ tại M)

Suy ra $\triangle BMO \sim \triangle BDA$ (g – g)

Nên $\frac{BM}{BD} = \frac{BO}{BA}$ (tỉ số đồng dạng)

Do đó $\frac{BM}{BO} = \frac{BD}{BA}$ (tính chất tỉ lệ thức)

Xét $\triangle BMD$ và $\triangle BOA$ có

$\widehat{B}$ chung

$$\frac{BM}{BO} = \frac{BD}{BA} \text{ (c/mt)}$$

Suy ra $\triangle BMD \sim \triangle BOA$ (c – g – c)

Nên $\widehat{BDM} = \widehat{BAO}$ (hai góc tương ứng)

Chứng minh tương tự $\triangle CNO \sim \triangle CDA$ (g – g)

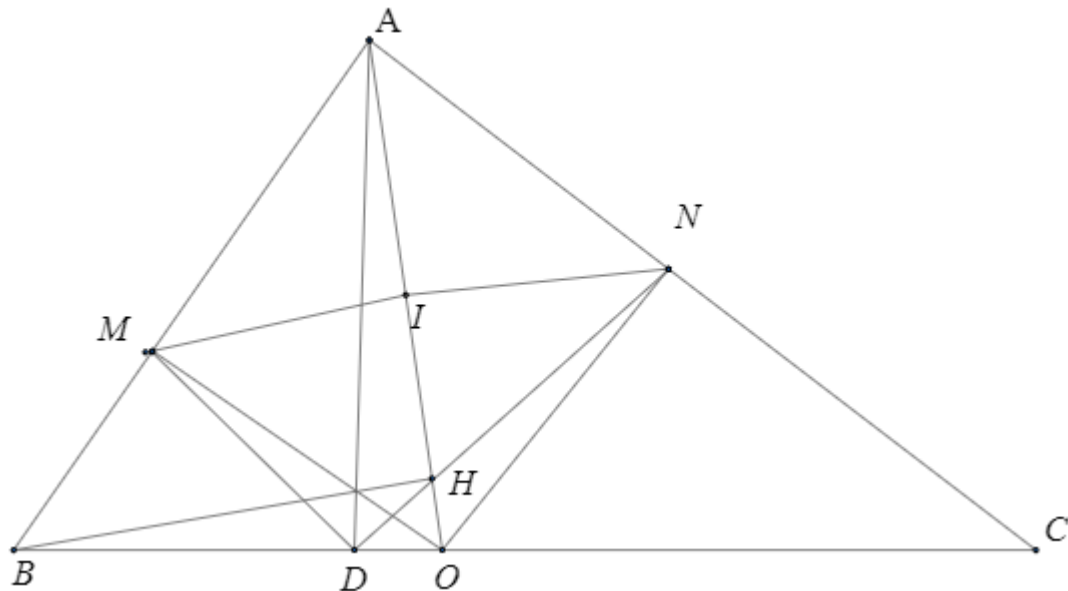
$$\text{suy ra } \frac{CN}{CO} = \frac{CO}{CA} \text{ nên } \frac{CN}{CO} = \frac{CD}{CA}$$

Suy ra $\triangle CND \sim \triangle COA$ (c – g – c)

Nên $\widehat{CDN} = \widehat{CAO}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{BDM} = \widehat{BAO}$ (c/mt) và $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ (vì AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$)

Suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$ (đpcm)



$$c. \sin \frac{\widehat{BAC}}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}$$

Từ B kẻ BH vuông góc AO tại H

Xét $\triangle BAH$ vuông tại H có

$$\sin \widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} \text{ (tỉ số lượng giác)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \text{ (Vì } AO \text{ là tia phân giác } \widehat{BAC} \text{)}$$

Nên $\sin BAH = \sin \frac{BAC}{2}$. Do đó $\sin \frac{BAC}{2} = \frac{HB}{AB}$

Mà $BH \leq BO$ (quan hệ đường vuông góc và đường xiên) nên $\frac{HB}{AB} \leq \frac{BO}{AB}$

Suy ra $\sin \frac{BAC}{2} \leq \frac{BO}{AB}$ (1)

Xét $\triangle BAC$ có AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$ nên

Suy ra $\frac{BO}{BA} = \frac{CO}{CA}$ (Tính chất tia phân giác)

Nên $\frac{BO}{BA} = \frac{CO}{CA} = \frac{BO+OC}{BA+CA} = \frac{BC}{AB+AC}$ (Tính chất tỉ lệ thức) (2)

Từ (1) và (2) có $\sin \frac{BAC}{2} \leq \frac{BC}{AB+AC}$ (đpcm)

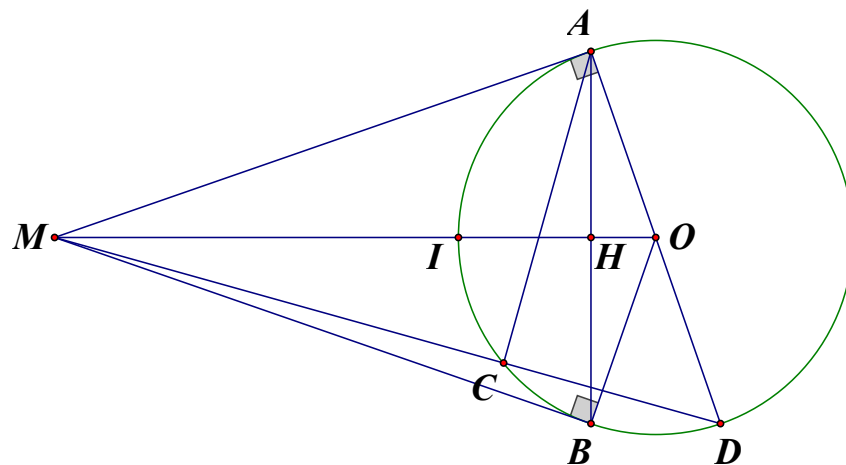
Câu 12: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O; R)$ (A, B là các tiếp điểm). Đoạn thẳng OM cắt đường thẳng AB tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm I .

a) Chứng minh bốn điểm M, A, B, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AD của $(O; R)$. Đoạn thẳng MD cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm C khác D . Chứng minh $MA^2 = MH.MO = MC.MD$.

c) Chứng minh $IH.IO = IM.OH$.

Lời giải



a) Vì MA là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại A nên $\widehat{MAO} = 90^\circ$

$\Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính OM (1)

Vì MB là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại B nên $\widehat{MBO} = 90^\circ$

$\Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính OM (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm $M ; A ; O ; B$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM .

b) Vì $MA ; MB$ là tiếp tuyến của (O) tại A , B nên $MA = MB$

Mà $OA = OB = R$

Nên OM là đường trung trực của AB .

$\Rightarrow OM \perp AB$ tại H

$\Rightarrow \widehat{AHM} = 90^\circ$

Xét $\triangle MAH$ và $\triangle MOA$ có :

$\widehat{OAM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$

$\widehat{AMO}$ chung

$\Rightarrow \triangle MAH \sim \triangle MOA$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{MA}{MO} = \frac{MH}{MA}$ (tính chất tam giác đồng dạng)

$\Leftrightarrow MA^2 = MO.MH$ (3)

Vì AD là đường kính của (O) nên $\widehat{ACD} = 90^\circ$

Xét $\triangle MAD$ và $\triangle MCA$ có :

$\widehat{DAM} = \widehat{ACD} = 90^\circ$

$\widehat{AMD}$ chung

$\Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MCA$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA}$ (tính chất tam giác đồng dạng)

$\Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $MA^2 = MH.MO = MC.MD$.

c) Xét $\triangle OAH$ và $\triangle OMA$ có :

$\widehat{OAM} = \widehat{AHO} = 90^\circ$

$\widehat{AOM}$ chung

$\Rightarrow \triangle OAH \sim \triangle OMA$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{OA}{MO} = \frac{OH}{OA}$ (tính chất tam giác đồng dạng)

$\Leftrightarrow OA^2 = MO.OH$

$$\Leftrightarrow OI^2 = OM.OH \text{ (do } OA = OI = R \text{)}$$

$$\Leftrightarrow OI.OH + OI^2 = OM.OH + OI.OH$$

$$\Leftrightarrow OI.(OH + OI) = OH.(OM + OI)$$

$$\Leftrightarrow OI.IH = OH.MI \text{ (đpcm).}$$

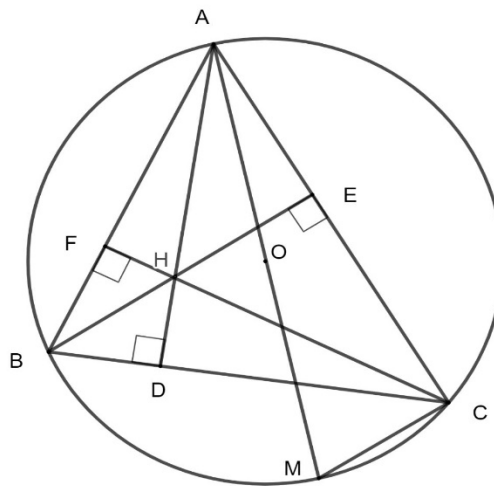
Câu 13: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . AD, BE, CF là ba đường cao của tam giác ABC cắt nhau tại H .

a) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AM của đường tròn (O) . Chứng minh $AD.AM = AB.AC$

c) Gọi P là giao điểm của AH và EF . I là giao điểm của AM và BC . K là trung điểm của BC . Chứng minh: H, K, M thẳng hàng và $PI \parallel HK$.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

$\widehat{AFH} = 90^\circ$ (Vì CF là đường cao $\triangle ABC$) $\Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AH

$\widehat{AEH} = 90^\circ$ (Vì BE là đường cao $\triangle ABC$) $\Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow 4$ điểm A, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH

b) Chứng minh $AD.AM = AB.AC$?

Ta có $\widehat{ACM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ADB} = 90^\circ$ (Vì AD là đường cao $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$

Vậy $PI // HK$

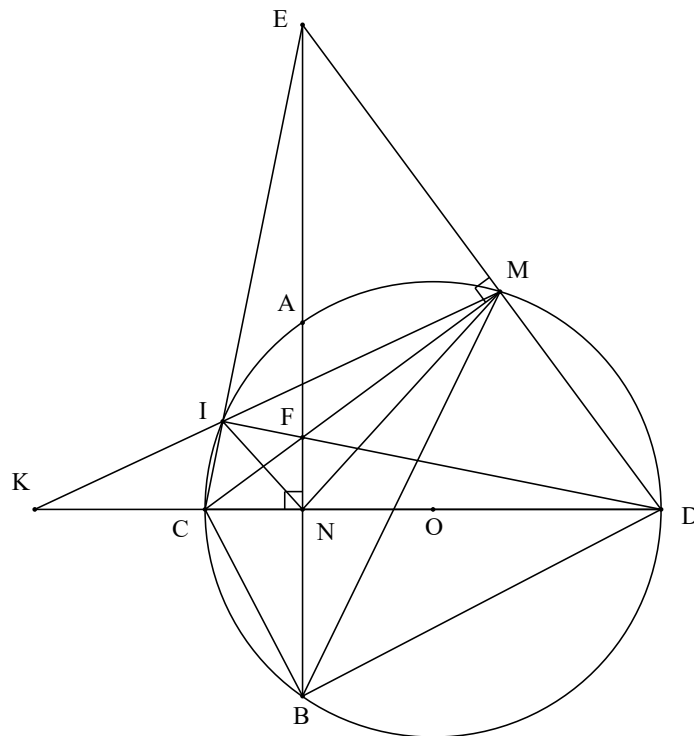
Câu 14: Cho đường tròn (O, R) và dây AB cố định (AB không là đường kính). Gọi N là trung điểm của AB . Qua N , kẻ đường kính CD của đường tròn (O) (C thuộc cung nhỏ AB). Lấy điểm M bất kỳ trên cung lớn AB ($M \neq A, M \neq B$), MC cắt AB tại F . Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại E .

a) Chứng minh bốn điểm M, N, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Hai đường thẳng DF và CE cắt nhau tại I . Chứng minh $KI.KM = KC.KD$ và NE là tia phân giác của $\widehat{MNI}$

c) Chứng minh rằng: $\frac{KC}{KD} = \frac{CN}{DN}$

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm M, N, C, E cùng thuộc một đường tròn

Lập luận $\widehat{ENC} = 90^\circ$

Lập luận $\widehat{EMC} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{ENC} = \widehat{EMC} = 90^\circ$

Suy ra M, N cùng thuộc đường tròn đường kính CE hay 4 điểm M, N, C, E cùng thuộc một đường tròn đường kính CE .

b) Chứng minh $KI.KM = KC.KD$ và NE là tia phân giác của góc MNI .

Có $\widehat{KIC} = 180^\circ - \widehat{CIM} = \widehat{CDM}$ (vì tổng các góc đối nhau của tứ giác nội tiếp CIMD bằng 180°)

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle KDM$ có:

$\widehat{K}$ chung; $\widehat{KIC} = \widehat{KDM}$ (cmt)

$$\Rightarrow \Delta KIC \square \Delta KDM (g.g) \Rightarrow \frac{KI}{KD} = \frac{KC}{KM} \Rightarrow KI.KM = KC.KD$$

Chứng minh: NE là tia phân giác của $\widehat{MNI}$.

Xét ΔCDE có: $CM \perp DE$; $EN \perp CD$ và CM giao EN tại F

$\Rightarrow F$ là trực tâm ΔCDE

$\Rightarrow DF \perp CE$ tại I (DF cắt CE tại I) hay $DI \perp CE$ tại I .

$$\Rightarrow \widehat{DIC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow I$ thuộc đường tròn tâm O , đường kính CD

Xét tứ giác $CIFN$ có:

$$\widehat{CIF} + \widehat{CNF} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà hai góc đối nhau trong tứ giác

Nên tứ giác $CIFN$ nội tiếp đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{INF} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{IF} \text{)}$$

Chứng minh được tứ giác $FMDN$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{FNM} = \widehat{FDM} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{FM} \text{)}$$

Mà $\widehat{ICM} = \widehat{IDM}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{IM}$ của đường tròn (O))

$$\text{Hay } \widehat{ICF} = \widehat{FDM}$$

$$\Rightarrow \widehat{INF} = \widehat{FNM}$$

$\Rightarrow NF$ là tia phân giác của $\widehat{MNI} \Rightarrow NE$ là tia phân giác của $\widehat{MNI}$

c) Chứng minh rằng: $\frac{KC}{KD} = \frac{CN}{DN}$

$$\text{Chứng minh được } \Rightarrow \Delta KMC \square \Delta KDI (g.g) \Rightarrow \frac{KM}{KD} = \frac{CM}{DI}$$

$$\text{Mà } \frac{KC}{KM} = \frac{CI}{DM} \text{ (Vi } \Rightarrow \Delta KIC \square \Delta KDM \text{)}$$

$$\text{nên } \frac{KC}{KD} = \frac{KC}{KM} \cdot \frac{KM}{KD} = \frac{CI}{DM} \cdot \frac{CM}{DI} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } \frac{CN}{CE} = \frac{CI}{CD} \text{ và } \frac{DN}{DE} = \frac{DM}{CD}$$

Do đó, $\frac{CN}{DN} = \frac{CI}{DM} \cdot \frac{CE}{DE}$ (2)

Chứng minh được $\frac{EC}{ED} = \frac{CM}{DI}$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra $\frac{KC}{KD} = \frac{CN}{DN}$

Câu 15: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE, CF cắt nhau ở H .

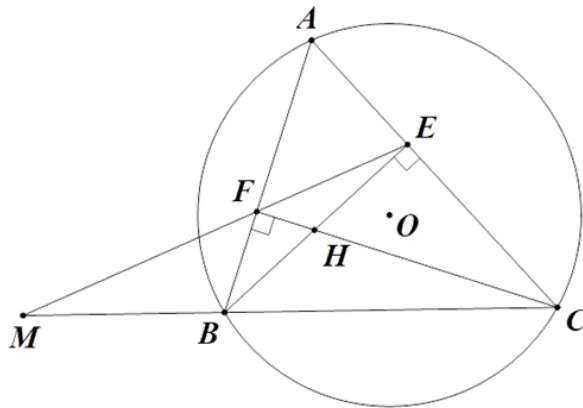
a) Chứng minh bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tia EF cắt tia CB tại M . Chứng minh: $MF \cdot ME = MB \cdot MC$

c) Tia AH cắt BC tại D . Đường thẳng qua B và song song với AC , cắt tia AD tại P , cắt đoạn thẳng AM tại Q . Chứng minh FC là tia phân giác của góc EFD và $BP = BQ$.

Lời giải

a)



Vẽ hình đúng đến ý 1

Chứng minh được $\widehat{BEC} = 90^\circ$

suy ra B, E, C thuộc đường tròn đường kính BC

Chứng minh được $\widehat{BFC} = 90^\circ$

Suy ra B, F, C thuộc đường tròn đường kính BC

Vậy bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC

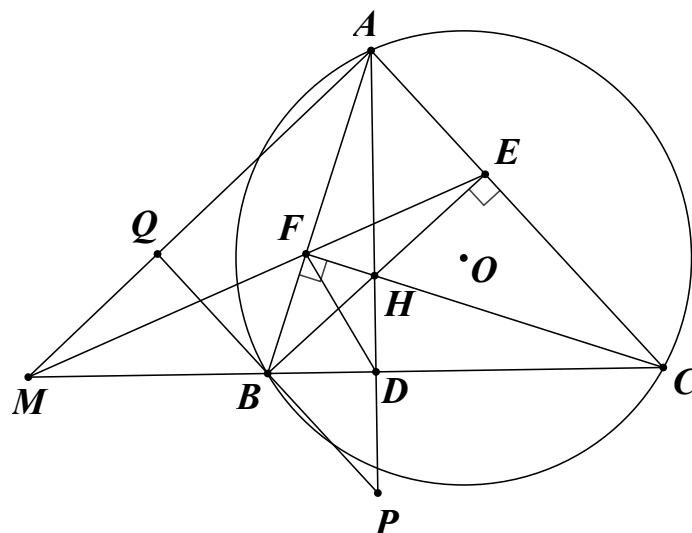
b) Chứng minh $MF \cdot ME = MB \cdot MC$

Xét đường tròn đường kính BC ta có $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FB)

Từ đó suy ra $\triangle MBE$ đồng dạng $\triangle MCF$ (g – g)

Từ đó suy ra $MF \cdot ME = MB \cdot MC$

c) Chứng minh FC là tia phân giác của góc EFD .



Chứng minh được H là trực tâm ΔABC

Từ đó suy ra bốn điểm B, F, D, H cùng thuộc đường tròn đường kính BH

Suy ra $\widehat{HFD} = \widehat{HBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

Xét đường tròn đường kính BC có $\widehat{EFC} = \widehat{EBC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

Suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{CFD}$ khi đó FC là tia phân giác $\widehat{EFD}$ (đpcm)

Chứng minh BP=BQ.

Chứng minh được FB là phân giác trong tại đỉnh F của tam giác FMD

Mà FC là phân giác ngoài tại đỉnh F tam giác FMD

$$\text{Suy ra } \frac{CD}{CM} = \frac{BD}{BM} \left(= \frac{FD}{FM} \right)$$

Từ đó suy ra $\frac{AC}{QB} = \frac{CM}{BM} = \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{BP}$ Suy ra $BP = BQ$

Câu 16: Cho tam giác ABC ba góc nhọn nội tiếp (O;R), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

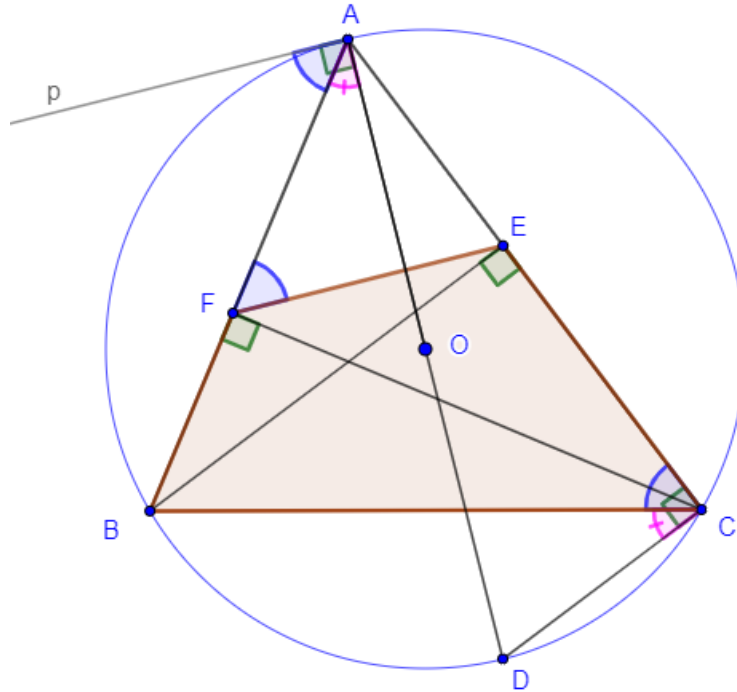
a) Chứng minh tứ giác BFCE nội tiếp và $AO \perp EF$

b) Chứng minh: $\sin^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{BAC} = 1$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$

c) Gọi S là diện tích tam giác ABC, chứng minh: $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}$. Cho

$AB = 6; AC = 8; BC = 2\sqrt{13}$ tính diện tích tam giác ABC

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác BFCE nội tiếp

Xét tam giác BEC ta có:

$BE \perp AC$ (BE là đường cao trong tam giác ABC)

Nên tam giác BEC vuông tại E. Do đó B,E,C cùng thuộc đường tròn đường kính BC (1)

Xét tam giác CFB ta có:

$CF \perp AB$ (CF là đường cao trong tam giác ABC)

Nên tam giác CFB vuông tại F. Do đó C,F,B cùng thuộc đường tròn đường kính BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra B,F,E,C cùng thuộc đường tròn đường kính BC.

Hay tứ giác BFEC nội tiếp.

Chứng minh: $AO \perp EF$

Kẻ tiếp tuyến tại A của (O), suy ra $\widehat{pAO} = 90^\circ$

Kẻ tia AO cắt (O) tại D, khi đó AD là đường kính, suy ra $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có: $\widehat{pAB} + \widehat{BAD} = \widehat{pAO} = 90^\circ$

$\widehat{ACB} + \widehat{BCD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BD}$ trong (O))

Do đó: $\widehat{pAB} = \widehat{ACB}$ (3)

Ta lại có: $\widehat{ACB} + \widehat{BFE} = 180^\circ$ (tứ giác BFEC nội tiếp)

Và $\widehat{AFE} + \widehat{BFE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (4)

Từ (3),(4) suy ra $\widehat{pAB} = \widehat{AFE}$

Mà $\widehat{pAB}; \widehat{AFE}$ ở vị trí so le trong nên $Ap \parallel EF$

Kết hợp $AO \perp Ap$ (vì Ap là tiếp tuyến).

Vậy $AO \perp EF$

b) Chứng minh: $\sin^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{BAC} = 1$

Xét tam giác AEB vuông tại E, ta có:

$$\sin \widehat{BAE} = \frac{BE}{AB} \text{ suy ra } \sin^2 \widehat{BAE} = \frac{BE^2}{AB^2}$$

$$\cos \widehat{BAE} = \frac{AE}{AB} \text{ suy ra } \cos^2 \widehat{BAE} = \frac{AE^2}{AB^2}$$

$$\text{Nên } \sin^2 \widehat{BAE} + \cos^2 \widehat{BAE} = \frac{BE^2}{AB^2} + \frac{AE^2}{AB^2} = \frac{BE^2 + AE^2}{AB^2}$$

Mà $BE^2 + AE^2 = AB^2$ (Định lý Pythagore trong tam giác ABE vuông tại E)

$$\text{Do đó: } \sin^2 \widehat{BAE} + \cos^2 \widehat{BAE} = \frac{BE^2}{AB^2} + \frac{AE^2}{AB^2} = \frac{BE^2 + AE^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

Hay $\sin^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{BAC} = 1$ (góc $\widehat{BAE}$ cũng là $\widehat{BAC}$)

Chứng minh: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác BEC vuông tại E ta có:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2$$

$$\text{Mà } CE^2 = (AC - AE)^2 = AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AE + AE^2$$

$$\text{Nên } BC^2 = BE^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AE + AE^2$$

Ta lại có:

$$BE^2 + AE^2 = AB^2 \text{ (cmt)}$$

$$\cos \widehat{BAE} = \frac{AE}{AB} \text{ (cmt) suy ra } AE = AB \cdot \cos \widehat{BAE} = AB \cdot \cos \widehat{BAC}$$

$$\text{Vậy: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$$

c) Gọi S là diện tích tam giác ABC, chứng minh: $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}$. Cho

$$AB = 6; AC = 8; BC = 2\sqrt{13} \text{ tính diện tích tam giác ABC}$$

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2} BE \cdot AC$$

Mà $BE = AB \cdot \sin \widehat{BAC}$ (hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác ABE vuông tại E)

$$\text{Vậy: } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}$$

$$\text{Ta có: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \text{ (cmt)}$$

$$(2\sqrt{13})^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \widehat{BAC} \text{ suy ra } \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mà } \sin^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{BAC} = 1 \text{ (cmt) suy ra } \sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

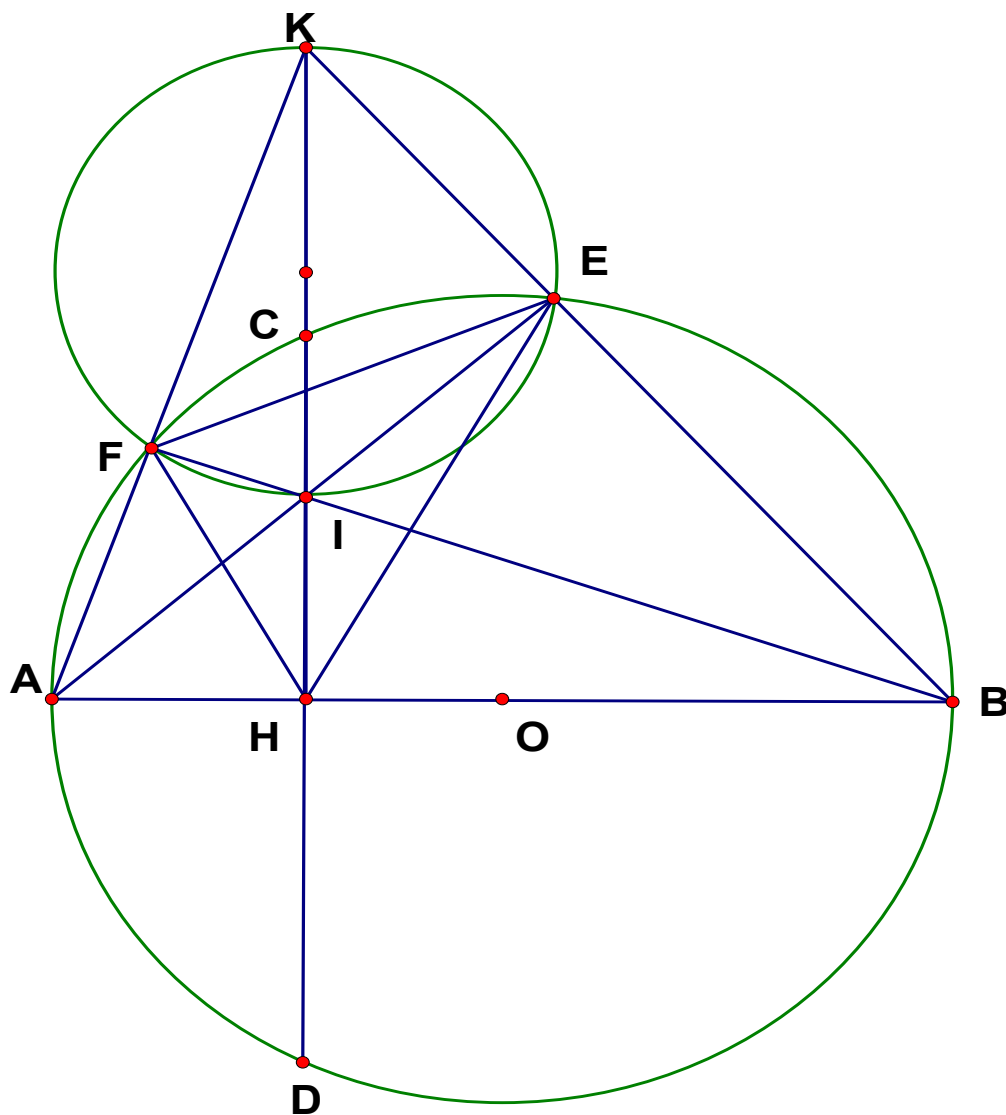
Câu 17: Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại I; AF cắt tia DC tại K.

a) Chứng minh rằng tứ giác AHIF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $HA \cdot HB = HI \cdot HK$.

c) Đường tròn ngoại tiếp ΔKIF cắt AI tại E . Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OA thì E thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải



A

a) Chứng minh tứ giác AHIF nội tiếp.

Ta có: $\widehat{AFI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).

$$CD \perp AH \text{ tại } H \text{ (giả thiết) và } I \in CD \Rightarrow \widehat{AHI} = 90^\circ.$$

Xét tam giác AFI có $\widehat{AFI} = 90^\circ$ nên đường tròn đường kính AI ngoại tiếp tam giác AFI hay 3 điểm A, F, I cùng thuộc 1 đường tròn đường kính AI (1)

Xét tam giác AHI có $\widehat{AHI} = 90^\circ$ nên đường tròn đường kính AI ngoại tiếp tam giác AHI hay 3 điểm A, H, I cùng thuộc 1 đường tròn đường kính AI(2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm A, F, I, H cùng thuộc đường tròn đường kính AI

Hay tứ giác AHIF nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $HA.HB = HI.HK$.

Tứ giác AHIF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{FAH} + \widehat{FIH} = 180^\circ$ (Định lý)

Mà $\widehat{BIH} + \widehat{FIH} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

$$\Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{BIH} \text{ hay } \widehat{KAH} = \widehat{BIH}.$$

Xét ΔHAK và ΔHIB có

$$\widehat{AHK} = \widehat{IHB} \text{ (cùng bằng } 90^\circ)$$

$$\widehat{KAH} = \widehat{BIH} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta HAK \sim \Delta HIB (g - g)$$

$$\Rightarrow \frac{HA}{HI} = \frac{HK}{HB} \Rightarrow HA.HB = HI.HK \text{ (đpcm)}$$

c) Chứng minh E luôn thuộc đường tròn cố định:

Ta có: $\widehat{AFB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow AF \perp BF \Rightarrow AK \perp BF$ tại F

$KH \perp AB$ tại H (vì $CD \perp AH$ tại H)

KH cắt BF tại I.

$$\Rightarrow I \text{ là trực tâm của } \Delta AKB \Rightarrow AI \perp KB \text{ (1)}$$

ΔKIF vuông tại F, nên đường tròn ngoại tiếp ΔKIF có đường kính là KI.

$$\Rightarrow \widehat{AEK} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính KI).}$$

$$\Rightarrow AI \perp KE \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow K, E, B$ thẳng hàng, khi đó $AI \perp KB$ tại E

$$\Rightarrow \widehat{IEB} = 90^\circ \text{ hoặc } \widehat{AEB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow E \text{ luôn thuộc đường tròn } \left(O; \frac{AB}{2}\right) \text{ (đpcm)}$$

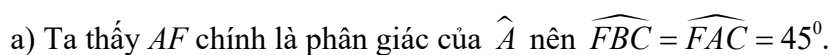
Câu 18: Cho đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc đường tròn thỏa mãn $AB < AC$ (A khác B, A khác C). Lấy điểm D trên cạnh AC sao cho $AD = AB$. Vẽ hình vuông BADE. Tia AE cắt (O) tại F.

a) Tam giác FBC là tam giác gì? Tại sao?

b) Chứng minh: $\widehat{FDC} = \widehat{FCD}$.

c) Vẽ tia Bx là tiếp tuyến của (O) tại B, Bx cắt CF tại I. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Lời giải



b) Vì tam giác BFC cân tại F nên $FC = FB$.

do đó $\widehat{FDC} = \widehat{FCD}$ (đpcm).

Nối I với D , tam giác IDC có DI là trung tuyến và bằng nửa cạnh IC nên tam giác IDC vuông tại D . Mặt khác $ED \perp AC$ nên I, E, D thẳng hàng.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM \parallel OP$. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N . Chứng minh tứ giác $OBPN$ là hình bình hành.

c) Giả sử AN cắt OP tại K ; PM cắt ON tại I ; PN cắt OM tại J . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

a) A, P, M, O cùng nằm trên đường tròn đường kính PO

b) Ta có: $OP \perp AM; BM \perp AM \Rightarrow BM // OP$

c) $\Delta AOP = \Delta OBN \Rightarrow OP = BN$, ta lại có $BN \parallel OP$ nên $OPNB$ là hình bình hành

d) Ta có: $ON \perp PJ$; $PM \perp OJ$, mà $PM \perp ON = I \Rightarrow I$ là trực tâm $\Delta POJ \Rightarrow IJ \perp OP$ (1)

Chứng minh được $PAON$ là hình chữ nhật $\Rightarrow K$ là trung điểm OP

Lại có: $APO = OPI = IOP \Rightarrow AIPO$ cân tại $I \Rightarrow IK \perp OP$ (2)

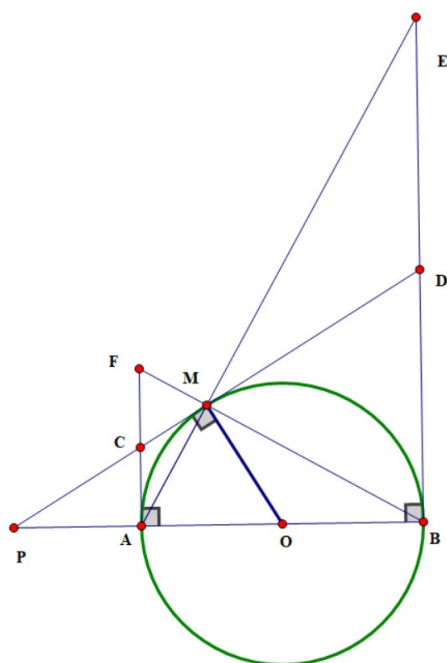
Từ (1)(2) $\Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Câu 20: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Điểm M nằm trên nửa đường tròn ($M \neq A; B$). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D.
a) Chứng minh rằng: tứ giác ACMO nội tiếp.

b) Gọi P là giao điểm CD và AB . Chứng minh: $PA \cdot PO = PC \cdot PM$

c) Gọi E là giao điểm của AM và BD; F là giao điểm của AC và BM. Chứng minh: Ba điểm E; F; P thẳng hàng.

Lời giải



a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng CO. Xét tam giác CMO vuông tại M và tam giác CAO vuông tại A, ta có: $HC = HO = HM$ và $HC = HO = HA$

Do đó $HC = HO = HA = HM$. Vậy bốn điểm O, A, C, M cùng thuộc một đường tròn
Hay tứ giác OACM nội tiếp.

b) Xét tam giác PAC và tam giác PMO, có: $\widehat{MPO}$ chung và $\widehat{PAC} = \widehat{PMO} = 90^\circ$

Nên ΔPAC và ΔPMO đồng dạng

Nên $\frac{PA}{PC} = \frac{PM}{PO}$ Suy ra $PA \cdot PO = PC \cdot PM$

c) Chứng minh được $CA = CM = CF$; $DB = DM = DE$

Gọi G là giao điểm của PF và BD, cần chứng minh G trùng E.

Dựa vào $AC \parallel BD$ chứng minh được $\frac{FC}{DG} = \frac{PC}{PD}$; $\frac{PC}{PD} = \frac{AC}{BD}$; $\frac{AC}{BD} = \frac{CF}{DE}$

Suy ra $DE = DG$ mà G và E đều thuộc tia đối của tia DB

Do đó G trùng với E.

Vậy ba điểm E; F; P thẳng hàng.

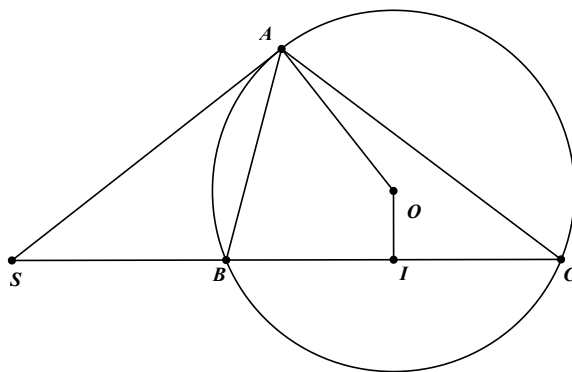
Câu 21: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S . Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng BC .

a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC . Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

c) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC . Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE . Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K . Chứng minh $BQ.BA = BD.BI$

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi M là trung điểm của SO , suy ra $SM = MO = \frac{SO}{2}$ (1)

Xét $\triangle SAO$ vuông tại A có M là trung điểm của SO

$\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền SO

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}SO \quad (2)$$

Xét $\triangle SIO$ vuông tại I có M là trung điểm SO

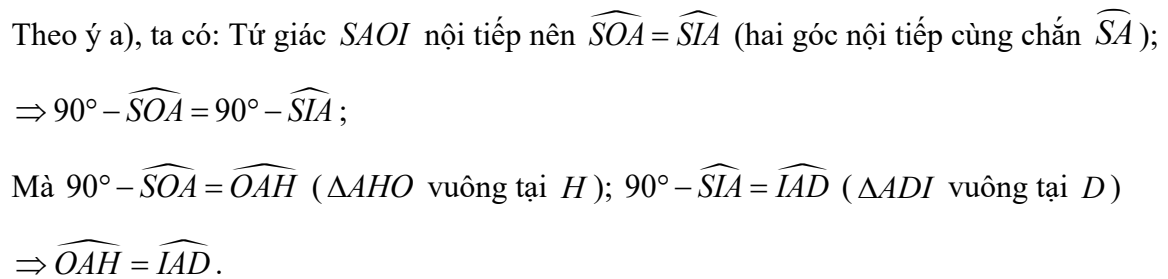
$\Rightarrow IM$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền SO

$$IM = \frac{1}{2}SO \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $AM = IM = SM = MO = \frac{SO}{2}$

Suy ra bốn điểm S, A, O, I cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác $SAOI$ nội tiếp đường tròn đường kính SO .

b) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC . Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.



$\Rightarrow OI$ là đường cao

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BC .

$\Rightarrow IQ$ là đường trung bình của $\triangle BEC$

$$\Rightarrow IQ \parallel CE \text{ mà } CE \perp AB$$
$$\Rightarrow IQ \perp AB, \text{ lại có } \widehat{IDA} = 90^\circ (AD \perp SC)$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AQDI$ nội tiếp đường tròn đường kính AI

$$\Rightarrow \widehat{QAI} + \widehat{QDI} = 180^\circ \text{ mà } \widehat{BDQ} + \widehat{QDI} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BDQ} = \widehat{QAI} (= 180^\circ - \widehat{QDI}).$$

Xét $\triangle BDQ$ và $\triangle BAI$ có:

$$\widehat{B} \text{ chung; } \widehat{BDQ} = \widehat{BAI} \text{ (chứng minh trên);}$$

$$\Rightarrow \triangle BDQ \sim \triangle BAI (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BQ} = \frac{BA}{BI} \Rightarrow BQ \cdot BA = BD \cdot BI.$$

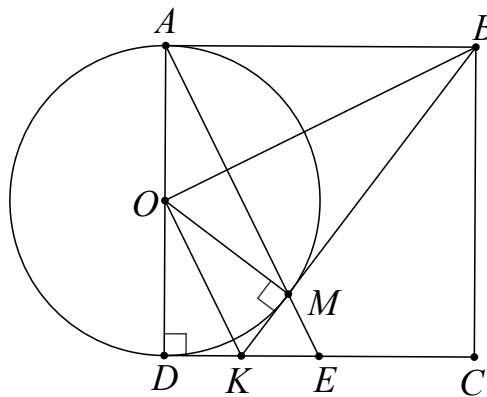
Câu 22: Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 4 cm. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AD ; kẻ BM là tiếp tuyến của đường tròn tâm O (M là tiếp điểm, $M \neq A$), BM cắt CD tại K .

a) Chứng minh 4 điểm A, B, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OB \perp OK$ và $BM \cdot MK = \frac{AB^2}{4}$.

c) Đường thẳng AM cắt CD tại E . Chứng minh K là trung điểm của đoạn thẳng ED và tính chu vi của tứ giác $ABKD$.

Lời giải



a) Ta có $\triangle ABO$ vuông tại A , do đó A thuộc đường tròn đường kính BO .

Ta có BM là tiếp tuyến tại M của đường tròn (O), suy ra $BM \perp OM$ nên ta có $\triangle MBO$ vuông tại M , do đó M thuộc đường tròn đường kính BO .

Suy ra 4 điểm A, B, M, O cùng thuộc một đường tròn đường kính BO .

b) Ta có $BA \perp OA$ (A thuộc đường tròn tâm O)

nên BA là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Tương tự ta có KD là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Ta có BA và BM là hai tiếp tuyến cắt nhau

Suy ra OB là đường phân giác của $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Ta có KD và KM là hai tiếp tuyến cắt nhau

Suy ra OK là đường phân giác của $\widehat{DOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

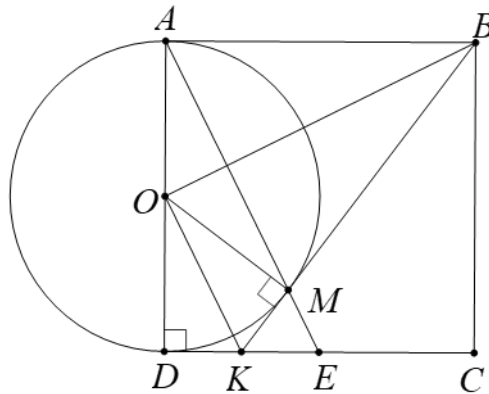
Do đó OB và OK là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\widehat{AOM}$ và $\widehat{DOM}$.

Suy ra $OB \perp OK$ hay $\widehat{BOK} = 90^\circ$

Xét $\triangle OBK$ vuông tại O , $OM \perp BK$, dễ dàng chứng minh được $\triangle MBO \sim \triangle MOK$ (g.g) nên suy

ra $\frac{BM}{MO} = \frac{MO}{MK}$ (cạnh tương ứng).

suy ra $BM \cdot KM = OM^2 = OA^2 = \frac{AB^2}{4}$



c) Ta có $\triangle BAM$ cân tại B ($BA = BM$)

nên $\widehat{BAM} = \widehat{BMA}$

Lại có $\widehat{KEM} = \widehat{BAM}$ (hai góc so le trong)

$\widehat{BMA} = \widehat{KME}$ (hai góc đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{KEM} = \widehat{KME}$

Nên $\triangle KEM$ cân tại K

Do đó $KE = KM$

Mặt khác $KD = KM$

Do đó $KE = KD$ hay K là trung điểm của ED .

Ta có $BM \cdot KM = OA^2 = OM^2 = 2^2 = 4(\text{cm})$

$$KM = \frac{4}{BM} = \frac{4}{4} = 1(\text{cm})$$

$$KD = 1(\text{cm})$$

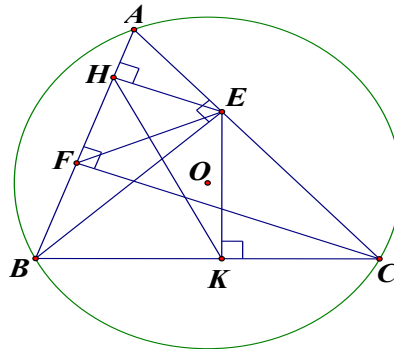
Ta có chu vi tứ giác $ABKD$ là

$$P_{ABKD} = AB + AD + KB + KD$$

$$\begin{aligned}
&= AB + AD + (AB + KD) + KD \\
&= 3AB + 2KD = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14 \text{ (cm)}
\end{aligned}$$

- Câu 23:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , kẻ đường cao BE của $\triangle ABC$. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ E đến AB và BC .
- Chứng minh tứ giác $BHEK$ là tứ giác nội tiếp.
 - Chứng minh: $BH \cdot BA = BK \cdot BC$.
 - Kẻ đường cao CF của tam giác ABC ($F \in AB$) và I là trung điểm của EF . Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ nội tiếp

Xét tứ giác $BHEK$, có: $\widehat{BHE} = 90^\circ$ ($EH \perp AB$) và $\widehat{EKB} = 90^\circ$ ($EK \perp BC$)

nên $\widehat{BHE} + \widehat{EKB} = 180^\circ$ mà $\widehat{BHE}$ và $\widehat{EKB}$ là hai góc đối

Do đó tứ giác $BHEK$ nội tiếp

b) Chứng minh $BH \cdot BA = BK \cdot BC$

Xét $\triangle BEC$ và $\triangle BKE$ có: $\widehat{BEC} = \widehat{BKE} = 90^\circ$; $\widehat{EBC}$: góc chung

Do đó $\triangle BEC \sim \triangle BKE$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{BE}{BK} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow BE^2 = BK \cdot BC \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } BE^2 = BH \cdot BA \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $BH \cdot BA = BK \cdot BC$.

c) Kẻ đường cao CF của tam giác ABC ($F \in AB$) và I là trung điểm của EF . Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Theo câu a) ta có tứ giác $BHEK$ nội tiếp nên $\widehat{BHK} = \widehat{BEK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BK}$) (3)

Xét $\triangle BEC$ vuông tại E có $EK \perp BC$ nên $\widehat{BEK} = \widehat{ECB}$ (cùng phụ $\widehat{KEC}$) (4)

Xét $\triangle BFC$ có $\widehat{BFC} = 90^\circ$ ($CF \perp AB$) nên B, F, C thuộc đường tròn đường kính BC

Lại có $\triangle BEC$ có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ ($BE \perp AC$) nên B, E, C thuộc đường tròn đường kính BC

Suy ra bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC

hay tứ giác $BFEC$ nội tiếp

Do đó $\widehat{ECB} = \widehat{HFE}$ (cùng bù với $\widehat{BFE}$) (5)

Xét $\triangle FHE$ vuông tại H ($EH \perp AB$) có HI là đường trung tuyến ứng với cạnh EF (I là trung điểm của EF) nên $HI = IF = \frac{EF}{2}$

hay $\triangle HIF$ cân tại I do đó $\widehat{IFH} = \widehat{FHI}$ (6)

Từ (3), (4), (5) và (6) suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{FHI}$

Do đó H, I, K thẳng hàng.

Câu 24: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

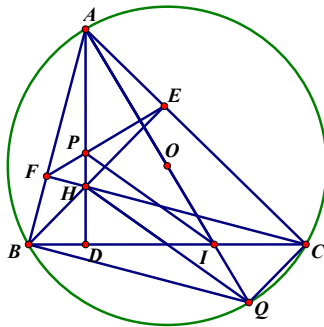
Kẻ đường kính AQ của đường tròn (O) cắt cạnh BC tại I .

a) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAQ}$.

c) Gọi P là giao điểm của AH và EF . Chứng minh $\triangle AEP$ đồng dạng với $\triangle ABI$ và $PI \parallel HQ$.

Lời giải



a) Ta có: $BE \perp AC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$ nên $\triangle AEH$ vuông tại E , cạnh huyền AH

Suy ra A, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH (1)

Ta có: $CF \perp AB$ (gt) $\Rightarrow \widehat{HFA} = 90^\circ$ nên $\triangle AFH$ vuông tại F , cạnh huyền AH

Suy ra A, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH (2)

Từ (1), (2) suy ra bốn điểm A, H, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH

b) Xét đường tròn (O) có:

$$\widehat{ABC} = \widehat{AQC} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AC \text{)}$$

$$\widehat{ACQ} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\text{Xét } \triangle ADB \text{ và } \triangle ACQ \text{ có: } \widehat{ABC} = \widehat{AQC}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACQ} = 90^\circ$$

Suy ra $\triangle ADB \sim \triangle ACQ$ suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAQ}$.

$$\text{c) Vì } \widehat{BAD} = \widehat{CAQ} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{DAQ} = \widehat{DAQ} + \widehat{QAC}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BAI} = \widehat{PAE}$$

Hoặc chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{AEP}$

Chứng minh $\triangle AEP$ đồng dạng với $\triangle ABI$ (gg)

Vì $\triangle AEP$ đồng dạng với $\triangle ABI \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AP}{AI}$ (1)

Chứng minh $\triangle AEH$ đồng dạng với $\triangle ABQ \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AQ}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AQ} \Rightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AI}{AQ}$

$PI \parallel HQ$ (định lý Talet đảo)

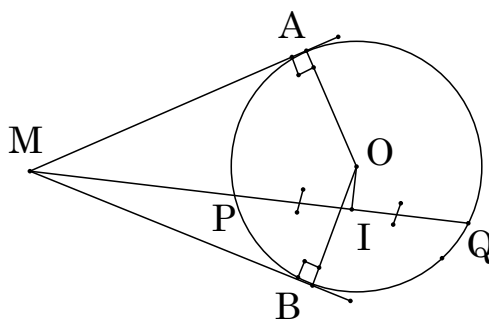
Câu 25: Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MPQ (MP < MQ). Gọi I là trung điểm của dây PQ.

a. Chứng minh bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh: $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE \parallel PQ$.

c. Gọi K là trung điểm của EA. Chứng minh ba điểm O; I; K thẳng hàng.

Lời giải



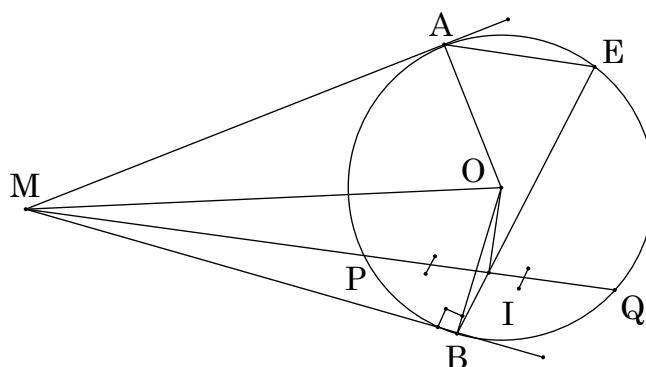
+) Có MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MB \perp OB$ tại B suy ra B thuộc đường tròn đường kính MO (1)

+) Có I là trung điểm của dây PQ của đường tròn (O) nên $OI \perp PQ$ tại I suy ra $OI \perp MI$ tại I, suy ra I thuộc đường tròn đường kính MO (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn đường kính MO.

Vậy bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh: $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE \parallel PQ$.



+) Xét (O) có các tiếp tuyến MA, MB suy ra tia OM là phân giác của $\widehat{AOB}$

$$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2} \widehat{BOA}$$

Lại có $\widehat{BEA} = \frac{1}{2} \widehat{BOA}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

Suy ra $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ (3)

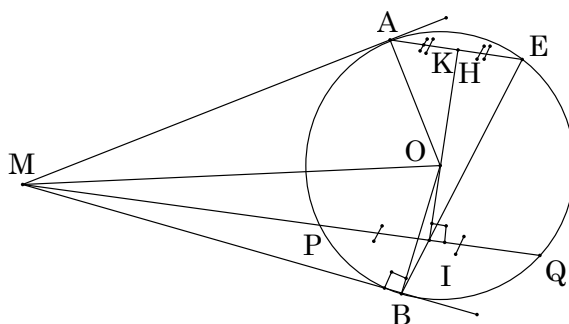
+) Có bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn đường kính MO (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{BIM}$$
 (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung MB) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BEA} = \widehat{BIM}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $AE \parallel IM$ hay $AE \parallel PQ$.

Vậy $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE \parallel PQ$.

c. Gọi K là trung điểm của EA. Chứng minh ba điểm O; I; K thẳng hàng.



Kéo dài IO cắt AE tại H. Do $OI \perp PQ$ và $AE \parallel PQ$ (cmt) nên $OI \perp AE$ tại H hay $OH \perp AE$ tại H, suy ra H là trung điểm của AE.

Mà K là trung điểm của AE nên K và H trùng nhau. Suy ra K thuộc đường thẳng OI.

Vậy ba điểm O; I; K thẳng hàng.

Câu 26: Cho đường tròn tâm (O), đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm C bất kì (C không trùng với A và B). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BC ở điểm D. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng DO. Tia AH cắt đường tròn (O) tại điểm F (không trùng với A).

a) Chứng minh tứ giác AHCD nội tiếp được một đường tròn.

b) Chứng minh $\triangle CFH$ là tam giác vuông.

c) Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{BH \cdot BC}{BF}$.

Lời giải

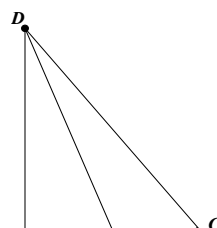
a) Do $AH \perp DH \Rightarrow \widehat{AHD} = 90^\circ$ nên A, H, D thuộc đường tròn đường kính AD (1)

Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{ACD} = 90^\circ$ nên A, C, D thuộc đường tròn đường kính AD (1)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ A, H, C, D thuộc đường tròn đường kính AD

hay tứ giác AHCD nội tiếp được một đường tròn.



b) Tứ giác $AHCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HCB} = \widehat{DAH}$

Ta có $\widehat{BCF}; \widehat{BAF}$ nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{BF} \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{BAF}$

$$\Rightarrow \widehat{HCF} = \widehat{HCB} + \widehat{BCF} = \widehat{DAH} + \widehat{BAF} = \widehat{DAB} = 90^\circ$$

Vậy $\triangle CFH$ là tam giác vuông tại **C**.

c) Ta có: $\widehat{FCB} = \widehat{HAB}$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{FB}$).

Tam giác OAD vuông tại

A. Khi đó $OA^2 = OH \cdot OD$

$$\text{Mà } OA = OB \text{ nên } OB^2 = OH \cdot OD \Rightarrow \frac{OH}{OB} = \frac{OB}{OD}$$

Suy ra hai tam giác OHB và OBD đồng dạng

$$\text{Suy ra } \widehat{OBH} = \widehat{ODB} \quad (4)$$

Ta lại có tứ giác $AHCD$ nội tiếp nên $\widehat{ODB} = \widehat{CAH}$ (5)

Tứ giác $ABFC$ nội tiếp nên $\widehat{CAH} = \widehat{CBF}$ (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $\widehat{OBH} = \widehat{CBF}$ (7)

Từ (3) và (7) suy ra hai tam giác HAB và FCB đồng dạng

$$\text{Khi đó, ta có: } \frac{BC}{BA} = \frac{BF}{BH} \Rightarrow \frac{BC \cdot BH}{BF} = BA \Rightarrow \frac{BC \cdot BH}{BF} = 2R.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{BC \cdot BH}{BF} = 2R.$$

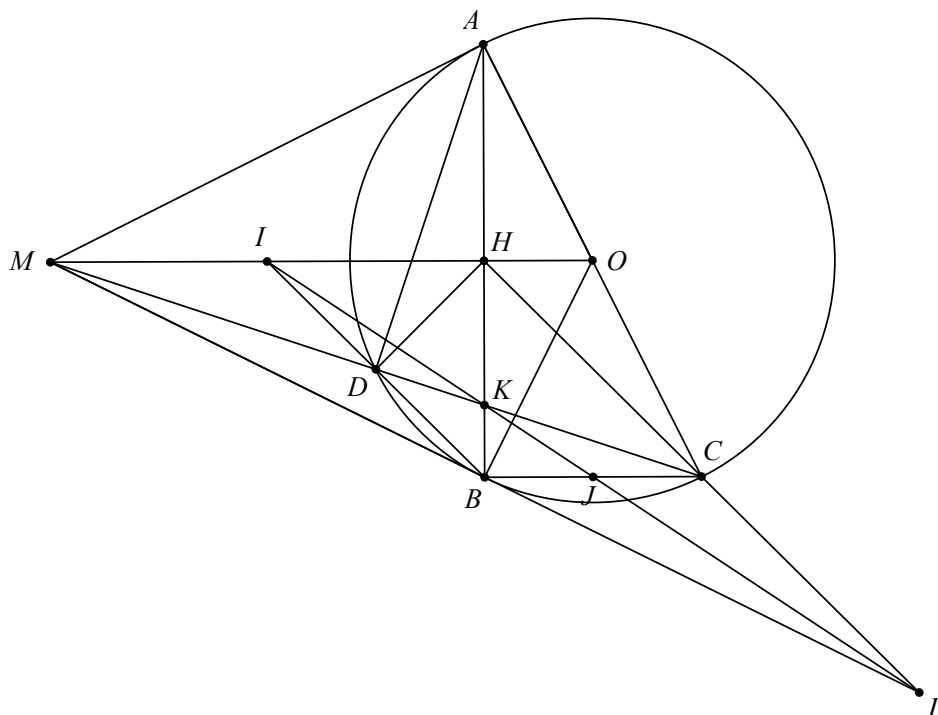
Câu 27: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của (O) . Đoạn thẳng MC cắt AB tại K và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D . Gọi I, H lần lượt là các giao điểm của MO với BD, AB .

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MO song song với BC và $IM^2 = ID \cdot IB$.

c) Gọi L là giao điểm của IK, HC . Chứng minh ba điểm M, B, L thẳng hàng.

Lời giải



a) MA, MB là hai tiếp tuyến của (O) nên : $MA \perp OA; MB \perp OB$

- Xét $\triangle MAO$ có $\widehat{MAO} = 90^\circ$ nên 3 điểm A, M, O cùng thuộc đường tròn đường kính OM

- Xét $\triangle MBO$ có $\widehat{MBO} = 90^\circ$ nên 3 điểm B, M, O cùng thuộc đường tròn đường kính OM

Vậy bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn. (ĐPCM)

b) Ta có: $MA = MB$ (MA, MB là hai tiếp tuyến của (O))

$$OA = OB = R$$

Nên OM là trung trực của AB hay $OM \perp AB$ tại H

Mà B thuộc đường tròn đường kính AC nên $\widehat{ABC} = 90^\circ$ hay $BC \perp AB$

Suy ra: $MO \parallel BC$

$$\widehat{IMD} = \widehat{BCD} \text{ (2 góc so le trong)}$$

$$\text{Lại có: } \widehat{MBI} = \widehat{BCD} \text{ nên } \widehat{IMD} = \widehat{IBM} = \widehat{BCD}$$

Xét $\triangle IMD$ và $\triangle IBM$ có :

$$\widehat{MIB} \text{ chung}$$

$$\widehat{IMD} = \widehat{IBM}$$

Nên: $\triangle IMD \sim \triangle IBM$ (g.g)

Suy ra: $\frac{IM}{IB} = \frac{ID}{IM}$ hay $IM^2 = IB.ID$ (ĐPCM)

c) Ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ nên $\widehat{ADM} = 90^\circ$

Suy ra 3 điểm A, D, M cùng thuộc đường tròn đường kính AM .

Mà $\widehat{AHM} = 90^\circ$ nên 3 điểm A, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính AM

Suy ra bốn điểm A, D, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính AM .

Hay $AMDH$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IHD} = \widehat{MAD}$

Mà $\widehat{MAD} = \widehat{ABD}$ nên $\widehat{IBH} = \widehat{IHD}$

Xét $\triangle IHD$ và $\triangle IBH$ có:

$$\widehat{IHD} = \widehat{IBH} \text{ (cmt)}$$

$\widehat{HIB}$ chung

Nên: $\triangle IHD \sim \triangle IBH$, suy ra $IH^2 = IB.ID$

Mà $IM^2 = IB.ID$ nên $IM = IH$

Gọi J là giao điểm của IL và BC

Xét $\triangle MKI$ có $IM \parallel CJ$ nên $\frac{JC}{IM} = \frac{KI}{KI}$

Xét $\triangle IKH$ có $BJ \parallel IH$ nên $\frac{BJ}{IH} = \frac{KI}{KI}$

Suy ra: $JC = JB$

Hay J là trung điểm của BC

Xét $\triangle ILH$ có $CJ \parallel LH$ nên $\frac{LC}{LH} = \frac{CJ}{HI} = \frac{2CI}{2HJ} = \frac{CB}{MH}$

Lại có $\widehat{MHL} = \widehat{BCL}$ (đồng vị)

Suy ra $\triangle MHL \sim \triangle BCL$ (c.g.c)

Từ đó ta có: $\widehat{HLB} = \widehat{HLM}$

Vậy M, B, L thẳng hàng.

Câu 28: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, C là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho C khác A và $AC < CB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho: $\widehat{COD} = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AD và BC , F là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của EF .

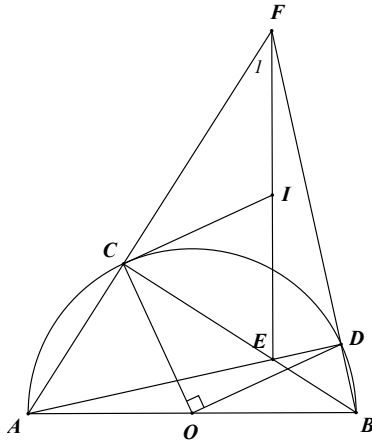
a) Chứng minh: $CEDF$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $FC.FA = FD.FB$

c) Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O)

d) Hỏi khi C thay đổi thỏa mãn điều kiện Câu toán, E thuộc đường tròn cố định nào?

Lời giải



a) Giả sử I là trung điểm của EF

Xét (O) có:

$\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $BC \perp AF$

Nên $\triangle BCF$ hay $\triangle ECF$ vuông tại C , có CI là đường trung tuyến nên $CI = IE = IF = \frac{EF}{2}$

$\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AD \perp BF$

Nên $\triangle ADF$ hay $\triangle EDF$ vuông tại D , có DI là đường trung tuyến nên $DI = IE = IF = \frac{EF}{2}$

Khi đó $CI = DI = IE = IF$ suy ra tứ giác $FCED$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính EF

b) Tam giác vuông FDA đồng dạng với tam giác vuông FCB (gg)

$$\frac{FA}{FB} = \frac{FD}{FC} \text{ (2 cặp cạnh tương ứng)}$$

nên $FC.FA = FD.FB$ (đpcm)

c) Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCED$ nên $CI = IF$

khi đó $\triangle ICF$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{FCI}$ (1)

Xét $\triangle OAC$ cân tại O nên $\widehat{CAO} = \widehat{OCA}$ (2)

Xét $\triangle ABF$ có BC, AD là hai đường cao cắt nhau tại E .

Nên E là trực tâm của $\triangle ABF$

$$\text{Nên } EF \perp AB \Rightarrow \widehat{F_1} + \widehat{CAO} = 90^\circ \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3) nên } \widehat{ICF} + \widehat{OCA} = 90^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{OCI} = 90^\circ \text{ hay } OC \perp CI$$

Vậy CI là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Ta có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 180^\circ \\ \widehat{O_2} = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ nên } \widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 90^\circ$$

Xét (O) ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{O_1} \\ \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{O_3} \end{array} \right\} \text{ nên } \widehat{DAB} + \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle AEB \text{ ta có } \widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 45^\circ \text{ nên } \widehat{AEB} = 135^\circ$$

Qua A kẻ $Ax \perp AE$.

Qua B kẻ $By \perp BE$. $By \cap Ax = K$

Xét tứ giác $EAKB$ ta có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{KAE} = 90^\circ (Ax \perp AE) \\ \widehat{KBE} = 90^\circ (By \perp BE) \end{array} \right\} \text{ nên } \widehat{KAE} + \widehat{KBE} = 180^\circ$$

Mà hai góc nằm tại hai đỉnh đối nhau nên tứ giác $EAKB$ nội tiếp.

$$\widehat{AKB} + \widehat{AEB} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{AKB} = 45^\circ$$

Gọi H là trung điểm của EK .

nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác

$$\text{Xét (H): } \widehat{AKB} = \frac{1}{2} \widehat{AHB} \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ.$$

Xét $\triangle AHB$ ($\widehat{AHB} = 90^\circ$) có: $HA = HB$ (bán kính đường tròn tâm H)

nên $\triangle AHB$ vuông cân tại H. Mà AB không đổi nên H cố định.

Áp dụng định lý Pytago vào $\triangle AHB$ ta có:

$$HA^2 + HB^2 = AB^2$$

$$\text{ nên } 2HA^2 = 4R^2$$

$$HA^2 = 2R^2$$

$$HA = \sqrt{2}R$$

Vậy khi C thay đổi E chạy trên đường tròn $(H; \sqrt{2}R)$ cố định.

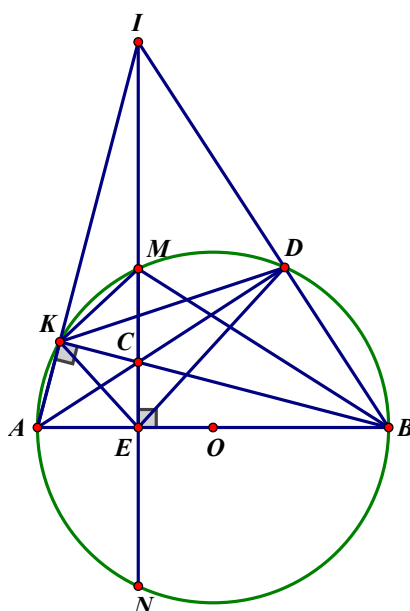
Câu 29: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây MN cố định $(MN < 2R)$. Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E (điểm A thuộc cung nhỏ MN). Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E). Đường thẳng BC cắt $(O; R)$ tại điểm K (K khác B).

a. Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh $BM^2 = BK \cdot BC$.

c. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AK và MN ; D là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI . Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của $\triangle DEK$.

Lời giải



a. Ta có: $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

nên $\triangle AKC$ vuông tại K

Do đó, ba điểm A, K, C thuộc đường tròn đường kính AC (1)

+) Ta có $\widehat{AEC} = 90^\circ$ (vì đường kính AB vuông góc với dây MN tại E theo giả thiết)

Nên $\triangle AEC$ vuông tại E

Do đó, ba điểm A, E, C thuộc đường tròn đường kính AC (2)

Từ (1) và (2), ta có bốn điểm A, K, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính AC

Vậy tứ giác $AKCE$ nội tiếp.

b. + Ta có tứ giác $AKCE$ nội tiếp (cmt)

nên $\widehat{KAE} + \widehat{KCE} = 180^\circ$ (tính chất)

Do đó, $\widehat{KCE} = 180^\circ - \widehat{KAE}$ (1)

+) Ta có bốn điểm $AKMB$ thuộc đường tròn (O) nên tứ giác $AKMB$ nội tiếp

Do đó, $\widehat{KAB} + \widehat{KMB} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{KMB} = 180^\circ - \widehat{KAB}$ (2)

+) Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{KCE} = \widehat{KMB}$ mà $\widehat{KCE} = \widehat{MCB}$ (đối đỉnh)

Nên $\widehat{MCB} = \widehat{KMB}$

+) Xét $\triangle BMC$ và $\triangle BKM$ có:

$\widehat{MBK}$ chung; $\widehat{MCB} = \widehat{KMB}$ (cmt)

Nên $\triangle BMC \sim \triangle BKM$ (góc-góc)

Do đó $\frac{BM}{BK} = \frac{BC}{BM}$. Suy ra $BM^2 = BK \cdot BC$.

c. Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AECK$, ta có:

$\widehat{EKC} = \widehat{EAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC) (3)

+) Xét tam giác BAI có BK, IE là hai đường cao, mà chúng cắt nhau tại C .

Suy ra C trực tâm tam giác BAI nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$. Suy ra D thuộc đường tròn (O)

+) Ta có $\widehat{CKD} = \widehat{EAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD của đường tròn (O)). (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{EKC} = \widehat{CKD}$

Do đó, KC là tia phân giác của góc EKD

+) Chứng minh tương tự câu a ta được tứ giác $BECD$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{CDE} = \widehat{CBE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CE)

Mặt khác $\widehat{KDC} = \widehat{CBE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AK của (O))

Suy ra $\widehat{CDE} = \widehat{KDC}$, suy ra DC là tia phân giác của góc KDE

Tam giác KDE có C là giao điểm của hai đường phân giác góc K và D

Suy ra C cách đều 3 cạnh của tam giác KDE

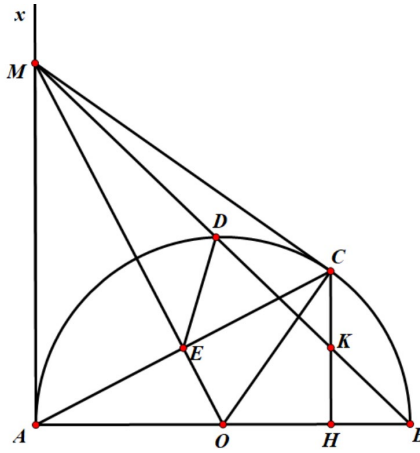
Câu 30: Cho nửa đường tròn tâm O , bán kính $AB = 2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E ; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D ($D \neq B$).

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính diện tích hình quạt OCB theo R , trong trường hợp $\widehat{AMC} = 60^\circ$ và chứng minh $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$.

c) Gọi H là hình chiếu của C trên AB . Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của CH .

Lời giải



a) Do MA, MB là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) nên ta có $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^\circ$

Suy ra $\triangle MAO$ là tam giác vuông tại A và $\triangle MCO$ là tam giác vuông tại C

Suy ra M, A, O cùng thuộc đường tròn đường kính MO và M, C, O cùng thuộc đường tròn đường kính MO

Do đó bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có $\widehat{AMC} = \widehat{COB} = 60^\circ$ (hai góc cùng bù với $\widehat{AOC}$)

Diện tích hình quạt COB là $\frac{60}{360} \pi \cdot R^2 = \frac{\pi R^2}{6}$

Do MA, MC là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) nên $MA = MC$ và $OA = OC$

Từ đó suy ra M thuộc đường trung trực của AC , O thuộc đường trung trực của AC

Nên MO vuông góc AC tại trung điểm E của AC , suy ra $\widehat{AEM} = 90^\circ$

Suy ra $\triangle AEM$ vuông tại E , nên $\triangle AEM$ nội đường tròn đường kính MA

Có $\widehat{ADM} = 180 - \widehat{ADB} = 90^\circ$ (do $\widehat{ADB}$ chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$).

Suy ra $\triangle ADM$ vuông tại D , nên $\triangle ADM$ nội đường tròn đường kính MA

Do đó tứ giác $AMDE$ nội tiếp đường tròn đường kính MA .

Xét tứ giác $AMDE$ nội tiếp có : $\widehat{ADE} = \widehat{AMO}$ (cùng chắn $\widehat{AE}$)

Xét tứ giác $AMCO$ nội tiếp có : $\widehat{AMO} = \widehat{ACO}$ (cùng chắn $\widehat{AO}$)

Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$.

c) Gọi K là giao điểm của MB và CH .

Do $CH \parallel AM$ nên theo định lý Thales thì $\frac{HK}{AM} = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{2R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{HB}{R}$

Ta có $OM \parallel BC$ (cùng vuông góc với AC) suy ra $\widehat{MOA} = \widehat{CBH}$ (hai góc đồng vị)

Xét $\triangle HCB$ và $\triangle AMO$ có $\widehat{MAO} = \widehat{CHB} = 90^\circ$; $\widehat{MOA} = \widehat{CBH}$

Suy ra $\triangle HCB \sim \triangle AMO$, nên $\frac{HB}{OA} = \frac{CH}{AM} = \frac{HB}{R}$

Do đó $\frac{HK}{AM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CH}{AM}$ hay $HK = \frac{1}{2} CH$

Suy ra MB đi qua trung điểm của CH (đpcm).

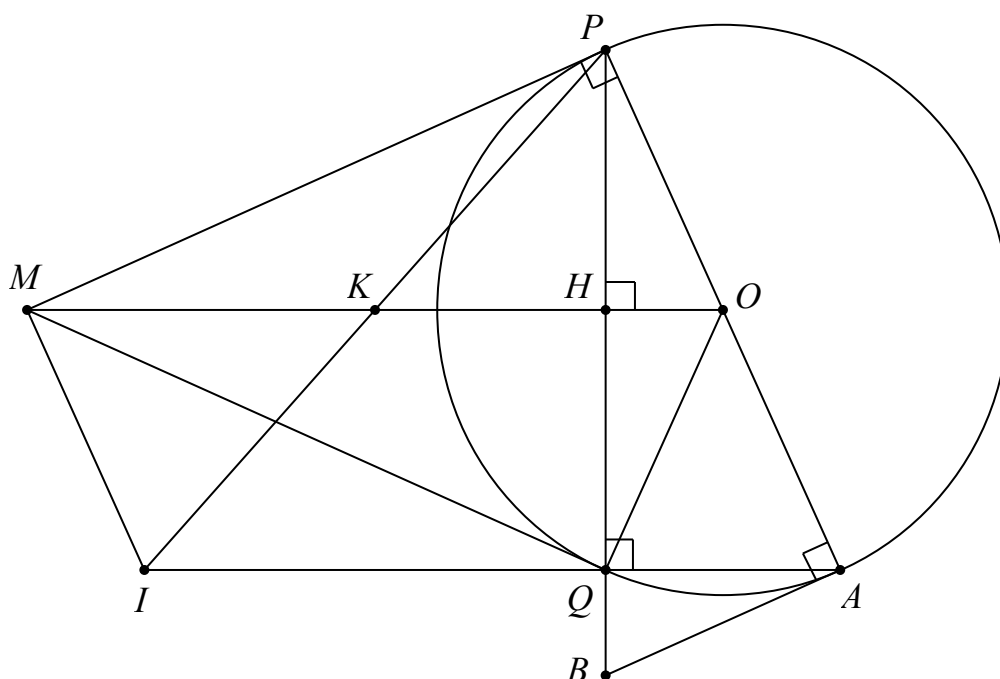
Câu 31: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ các tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn $(O; R)$, (P và Q là các tiếp điểm). Kẻ đường kính PA . Tiếp tuyến tại A với đường tròn $(O; R)$ cắt PQ tại B .

a) Chứng minh: AQ song song với OM .

b) Chứng minh: $PQ.PB = 4R^2$.

c) Gọi K là trung điểm của MO . Tia PK cắt AQ tại I . Chứng minh tứ giác $MAIO$ là hình bình hành.

Lời giải



a) Chứng minh: AQ song song với OM .

Xét (O) ta có: $\widehat{AQP} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $AQ \perp PQ$. (1)

Mặt khác, MP và MQ là hai tiếp tuyến của (O) , cắt nhau tại M . Theo chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $MP = MQ$ và MO là phân giác của $\widehat{POQ}$.

Suy ra: $\triangle MPQ$ cân tại M , đường phân giác MO đồng thời là đường cao, hay $OM \perp PQ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AQ \parallel OM$.

b) Chứng minh: $PQ.PB = 4R^2$.

Vì AB là tiếp tuyến của (O) tại A nên $AB \perp OA$.

Xét $\triangle AQP$ và $\triangle BAP$ có: $\widehat{AQP} = \widehat{BAP}$ (góc vuông), $\widehat{BPA}$ chung.

Suy ra $\Delta AQP \simeq \Delta BAP$ (g-g).

$$\text{Suy ra: } \frac{PQ}{PA} = \frac{PA}{PB}. \text{ Suy ra: } PQ \cdot PB = PA^2 = (2R)^2 = 4R^2.$$

c) Gọi K là trung điểm của MO . Tia PK cắt AQ tại I . Chứng minh tứ giác $MOAI$ là hình bình hành.

Xét ΔAIP có:

+ O là trung điểm của AP (vì O là tâm đường tròn đường kính AP)

+ $OK \parallel AI$ (vì $AQ \parallel OM$ - chứng minh trên).

Suy ra K là trung điểm của IP (định lý).

Suy ra OK là đường trung bình của $\triangle AIP$.

Suy ra: $OK = \frac{1}{2}AI$ (tính chất đường trung bình của tam giác).

Lại có: $OK = \frac{1}{2}OM$ (vì K là trung điểm của OM) nên $AI = OM$.

Xét tứ giác $MIAO$ có: $AI \parallel OM$ và $AI = OM$ (chứng minh trên).

Suy ra $MIAO$ là hình bình hành.

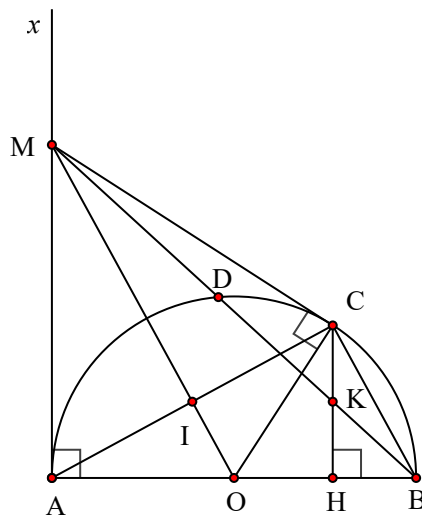
Câu 32: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Từ điểm M bất kì trên tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến thứ hai MC (C là tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OM và AC .

a). Chứng minh bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.

b). Chứng minh $OI \cdot OM = OA^2$ và $OM \parallel BC$.

c). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB , MB cắt đường tròn (O) tại D và cắt CH tại K . Chứng minh K là trung điểm của CH .

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.

Xét đường tròn (O) ,

+ Do AM là tiếp tuyến của (O) :

$$MA \perp OA$$

$$\widehat{MAO} = 90^\circ$$

Suy ra A thuộc đường tròn đường kính MO (1)

+ Do MC là tiếp tuyến của (O) :

$$MC \perp OC$$

$$\widehat{MCO} = 90^\circ$$

Suy ra C thuộc đường tròn đường kính MO (2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn (đpcm)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{HCA}$

$\Rightarrow AC$ là tia phân giác $\widehat{MCH}$

Mà $AC \perp CB(cmt)$

$\Rightarrow CB$ là phân giác ngoài tại C của $\Delta KCM \Rightarrow \frac{BK}{BM} = \frac{CK}{CM} (7)$

Xét ΔABM có

$KH \parallel AM$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \frac{BK}{BM} = \frac{KH}{AM} (8)$

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \frac{CK}{CM} = \frac{KH}{AM}$

Mà $CM = AM(cmt)$

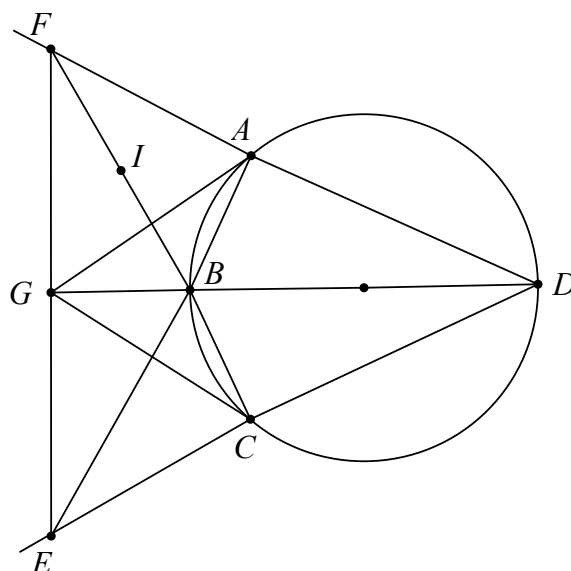
$\Rightarrow CK = KH$

Vậy K là trung điểm của CH (đpcm)

Câu 33: Cho tứ giác ABCD có AB nhỏ hơn AD; BC nhỏ hơn CD nội tiếp đường tròn đường kính BD, AB cắt DC tại E; CB cắt DA tại F, DB cắt EF tại G.

- Chứng minh rằng $BD \perp EF$ tại G
- Chứng minh bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh rằng $BA \cdot BE = BC \cdot BF = BD \cdot BG$
- Chứng minh rằng B là tâm đường tròn nội tiếp ΔACG

Lời giải



- Chứng minh rằng $BD \perp EF$ tại G

Có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BD)

Suy ra $AE \perp DF$ và $FC \perp DE$

Mà AE cắt FC tại B

Suy ra B là trực tâm của $\triangle DEF$

Suy ra $BD \perp EF$ tại G

b. Chứng minh bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn.

Gọi I là trung điểm của FB

Ta có $BD \perp EF$ tại G (cmt)

Suy ra $\triangle FGB$ vuông tại G suy ra $GI = IF = IB$ (1)

$AE \perp DF$ (cmt) suy ra $\rightarrow \triangle FBA$ vuông tại A suy ra $AI = IF = IB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $GI = AI = IF = IB$

Suy ra bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn. (đpcm)

c. Chứng minh rằng $BA \cdot BE = BC \cdot BF = BD \cdot BG$

+ c/m $\triangle BFA \sim \triangle BEC$ (g.g)

Suy ra $\frac{BA}{BC} = \frac{BF}{BE}$ suy ra $BA \cdot BE = BF \cdot BC$ (1)

+ c/m $\triangle BGF \sim \triangle BCD$ (g.g) suy ra $\frac{BF}{BD} = \frac{BG}{BC}$ suy ra $BF \cdot BC = BD \cdot BG$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BA \cdot BE = BC \cdot BF = BD \cdot BG$ (đpcm)

d. Chứng minh rằng B là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ACG$

+ Xét tứ giác ABGF có bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn đường kính BF (theo câu b) suy ra tứ giác ABGF nội tiếp đường tròn đường kính BF.

+ Do $\widehat{BCE} = \widehat{BGE} = 90^0$ nên Tứ giác DCEG nội tiếp đường tròn đường kính BE.

+Do $\widehat{EAF} = \widehat{ECF} = 90^0$ nên Tứ giác ACEF nội tiếp đường tròn đường kính EF.

Do đó $\widehat{GAB} = \widehat{GFB}$ ($= \frac{1}{2}$ số cung BG)

$\widehat{CAE} = \widehat{EFA}$ ($= \frac{1}{2}$ số cung CE)

Suy ra $\widehat{BAG} = \widehat{CAE}$ ($= \widehat{EFC}$) suy ra AB là đường phân giác của $\triangle ACG$ (1)

Do đó $\widehat{FCA} = \widehat{FEA}$ ($= \frac{1}{2}$ số cung AF)

$$\widehat{GCF} = \widehat{GEB} \left(= \frac{1}{2} \text{ số cung } BG \right)$$

Suy ra $\widehat{FCA} = \widehat{GCF} (= \widehat{FAE})$ suy ra CB là đường phân giác của ΔACG (2)

Từ (1) và (2) suy ra B là giao hai đường phân giác của ΔACG

Suy ra B là tâm đường tròn nội tiếp ΔACG (đpcm)

Câu 34: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $DB \cdot DC = DH \cdot DA$.

c) Đường thẳng AO cắt đường tròn tâm O tại điểm K khác điểm A. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK và BC. Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng BC.

d) Tính $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

Lời giải

a) (0,75 điểm)

Ta có: $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (vì $AD \perp BC$)

$\widehat{AEB} = 90^\circ$ (vì $BE \perp AC$)

Xét tứ giác ABDE có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$

mà D và E là 2 đỉnh kề nhau cùng cạnh AB

dưới 1 góc vuông

Nên 4 điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) (0,75 điểm) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABDE có

$\widehat{EBD}$ là góc nội tiếp chắn cung DE

$\widehat{EAD}$ là góc nội tiếp chắn cung DE

Nên $\widehat{EBD} = \widehat{EAD}$ (Hệ quả góc nội tiếp) hay

$\widehat{HBD} = \widehat{CAD}$

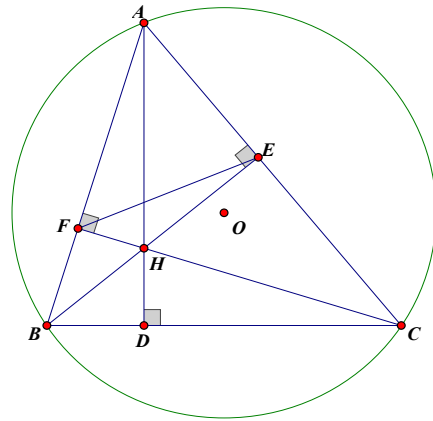
Xét ΔBHD và ΔACD có $\widehat{HDB} = \widehat{CDA} = 90^\circ$

$\widehat{HBD} = \widehat{CAD}$ (cmt)

Do đó ΔBHD đồng dạng với ΔACD (g-g)

Suy ra $\frac{DB}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow DB \cdot DC = DH \cdot DA$

c) (0,75 điểm) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng BC.



Xét đường tròn (O) có:

$\widehat{ABK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $KB \perp AB$.

Mặt khác: $CH \perp AB$ (giả thiết)

Suy ra: $KB \parallel CH$ (quan hệ vuông góc song song) (1)

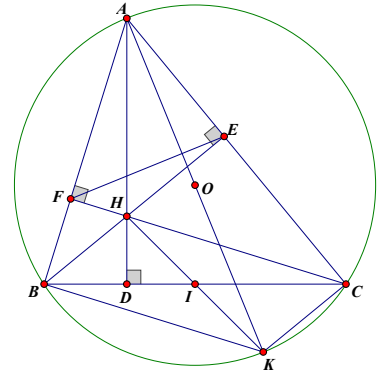
Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ACK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $KC \perp AC$.

Mặt khác: $BH \perp AC$ (giả thiết)

Suy ra: $KC \parallel BH$ (quan hệ vuông góc song song) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BHCK là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết), suy ra hai đường chéo BC và HK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (tính chất).

Mà I là giao điểm của BC và HK nên I là trung điểm của BC.



d) (0,75 điểm) Tính $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

Đặt $P = \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$

Khi đó

$$P = \frac{AD - HD}{AD} + \frac{BE - HE}{BE} + \frac{CF - HF}{CF}$$

$$P = 1 - \frac{HD}{AD} + 1 - \frac{HE}{BE} + 1 - \frac{HF}{CF}$$

$$P = 3 - \left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} \right)$$

Ta có: $\frac{HD}{AD} = \frac{\frac{1}{2} HD \cdot BC}{\frac{1}{2} AD \cdot BC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}$

Chúng minh tương tự ta có:

$$\frac{HE}{BE} = \frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ABC}}; \quad \frac{HF}{CF} = \frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HAC} + S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}} = 1$$

Vậy $P = \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 3 - 1 = 2$

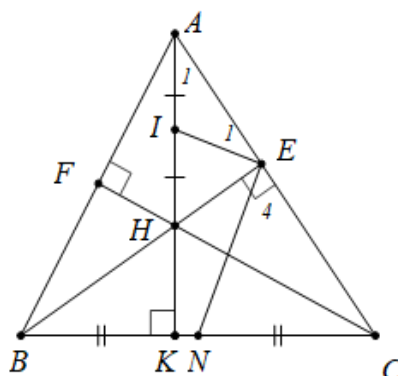
Câu 35: Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK , BE và CF cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của đoạn AH , N là trung điểm của đoạn BC .

a) Chứng minh bốn điểm A , E , H , F nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

Ta có $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (do BE là đường cao của $\triangle ABC$) hay $\widehat{AEH} = 90^\circ$

$\widehat{AFC} = 90^\circ$ (do CF là đường cao của $\triangle ABC$) hay $\widehat{AFH} = 90^\circ$

Suy ra bốn điểm A, E, H, F cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH (đpcm)

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH ;

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AH nên I là tâm đường tròn đường kính AH

Suy ra $IA = IE$

Vì $\triangle IAE$ cân tại I nên $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (1)

$\triangle EBC$ vuông tại E có EN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

Nên $EN = NC \left(= \frac{BC}{2} \right)$

Suy ra $\triangle ENC$ cân tại N nên $\widehat{NCE} = \widehat{E_4}$ (2)

Xét $\triangle AKC$ vuông tại K có $\widehat{KCA} + \widehat{A_1} = 90^\circ$ hay $\widehat{NCE} + \widehat{A_1} = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{E_1} + \widehat{E_4} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{E_1} + \widehat{E_4} + \widehat{IEN} = 180^\circ$ (do A, E, C thẳng hàng)

Suy ra $90^\circ + \widehat{IEN} = 180^\circ$ hay $\widehat{IEN} = 90^\circ$

Suy ra $EN \perp EI$ tại E

Do đó NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH (đpcm)

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Áp dụng định lý Py – Ta – Go $\triangle CIK$ vuông tại K , ta có: $CI^2 = CK^2 + IK^2$

Lại có $IA = IE = IH$ (cùng bán kính đường tròn tâm I)

$$\text{Suy ra } CI^2 - IE^2 = CK^2 + IK^2 - IE^2$$

$$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IE)$$

$$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IH) = CK^2 + AK \cdot KH \quad (4)$$

$$\text{Ta lại có } CK \cdot CB = CK(CK + KB) = CK^2 + CK \cdot KB \quad (5)$$

Xét $\triangle KBH$ và $\triangle KAC$ có

$$\widehat{KBH} = \widehat{KAC} (= 90^\circ - \widehat{ACB}); \widehat{BKH} = \widehat{AKC} = 90^\circ$$

Do đó $\triangle AHK \sim \triangle ACB$ ($g - g$)

$$\text{Nên } \frac{KB}{KA} = \frac{KH}{KC} \text{ suy ra } KA \cdot KH = KB \cdot KC \text{ hay } AK \cdot KH = CK \cdot KB \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra $CI^2 - IE^2 = CK \cdot CB$ (đpcm)

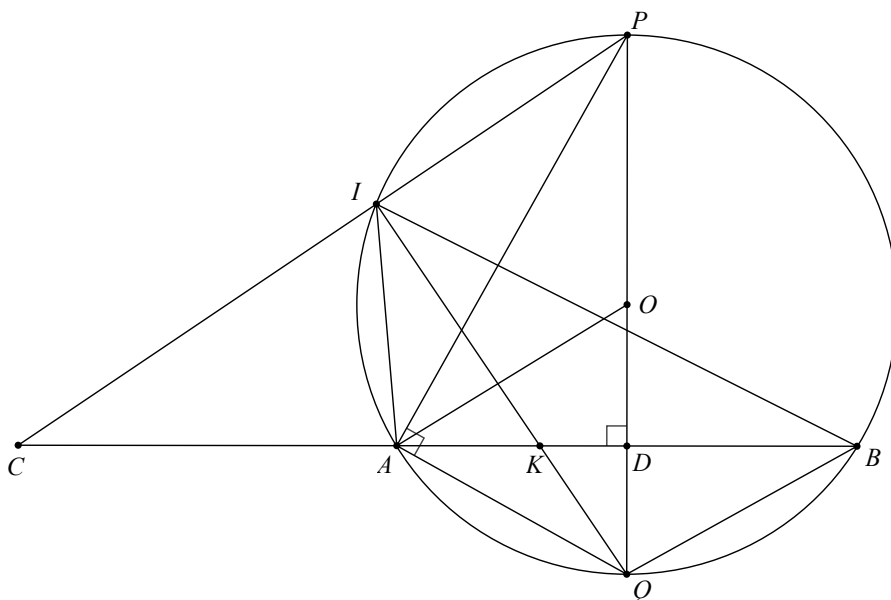
Câu 36: Cho đường tròn (O) và dây cung AB . Trên tia đối của tia AB lấy điểm C . Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ của đường tròn (O) cắt dây AB tại D . Tia CP cắt đường tròn (O) tại điểm I (điểm I khác điểm P). Các dây AB và QI cắt nhau tại K

a) Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng $CI \cdot CP = CK \cdot CD$ và IC là phân giác góc ngoài tại đỉnh I của tam giác AIB .

c) Giả sử ba điểm $A; B; C$ cố định. Chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua hai điểm A và B thì đường thẳng QI luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Chứng minh: Tứ giác $PDKI$ nội tiếp

Ta có PQ là đường kính của đường tròn (O) . Suy ra $\widehat{PIQ} = 90^\circ$ suy ra $CI \cdot CP = CD \cdot CK$

Do P là điểm chính giữa của cung lớn AB. Suy ra $PA = PB$

Mà $OA = OB$ (cùng là bán kính của (O))

Suy ra PO là đường trung trực của AB suy ra $OP \perp AB$ tại D

Suy ra $PQ \perp AB$

$$\widehat{PDK} = 90^\circ$$

$$\text{Nên } \widehat{PDK} + \widehat{PIK} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Tứ giác PDKI nội tiếp (hai góc đối bù nhau)

b) Xét tam giác CIK và tam giác CDP ta có:

$\hat{C}$ chung

$$\widehat{CIK} = \widehat{CDP} = 90^\circ$$

$$\Delta CIK \square \Delta CDP (g.g)$$

$$\frac{CI}{CD} = \frac{CK}{CP} \text{ suy ra } CI.CP = CD.CK$$

$$CI.CP = CD.CK$$

Ta có PO là đường trung trực của AB, hay PQ là đường trung trực của AB

$$QA = QB \text{ hay điểm } Q \text{ là điểm chính giữa cung nhỏ } \widehat{AB} \text{ nên } \widehat{AQ} = \widehat{BQ}$$

Do đó $\widehat{AIQ} = \widehat{BIQ}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau)

Hay IK là đường phân giác trong của tam giác AIB ; và lại có $IK \perp IC$ ($\widehat{PIQ} = 90^\circ$)

nên IC là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh I của tam giác AIB

c) Ta đi chứng minh K là điểm cố định

Ta có điểm D là trung điểm AB ($OD \perp AB$)

Do ABPI là tứ giác nội tiếp

$$\widehat{CAI} = \widehat{CPB}$$

$$\Delta CAI \square \Delta CPB (g.g)$$

$$\frac{CA}{CP} = \frac{CI}{CB}$$

$$CA.CB = CI.CP$$

Vậy nên $CA.CB = CK.CD (= CI.CP)$

$$CK.CD = (CD - DA)(CD + DB)$$

$$CK.CD = \left(CD - \frac{AB}{2} \right) \left(CD + \frac{AB}{2} \right)$$

$$CK.CD = CD^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$CD^2 - CK.CD = \frac{AB^2}{4}$$

$$CD.KD = \frac{AB^2}{4}$$

$$KD = \frac{AB^2}{4CD}$$

Vì $A; B; C; D$ là bốn điểm cố định nên K điểm cố định.

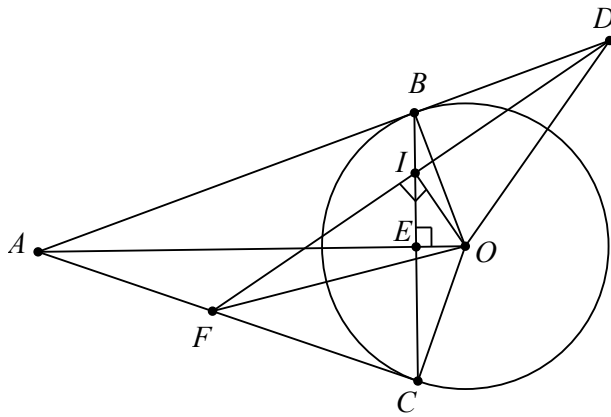
Câu 37: Cho đường tròn (O) , từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm), OA cắt BC tại E .

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA.BE = AE.BO$.

c) Gọi I thuộc đoạn thẳng BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh F là trung điểm của AC .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

Xét (O) có: AB là tiếp tuyến tại B (GT) nên $AB \perp OB \Rightarrow \widehat{ABO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABO$ vuông tại B nên điểm B thuộc đường tròn đường kính AO (1)

Mặt khác: AC là tiếp tuyến tại C (GT) nên $AC \perp OC \Rightarrow \widehat{ACO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ACO$ vuông tại C nên điểm C thuộc đường tròn đường kính AO (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính AO

Do đó, tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO

b) Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA.BE = AE.BO$.

* Chứng minh BC vuông góc với OA

Xét (O) có: AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau ở A (GT)

$\Rightarrow AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $OB = OC$ (B, C thuộc đường tròn (O))

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC nên $BC \perp OA$

* Chứng minh $BA.BE = AE.BO$

Xét $\triangle ABO$ và $\triangle AEB$ có:

$$\widehat{ABO} = \widehat{AEB} = 90^\circ (\text{cmt})$$

$\widehat{BAO}$: góc chung

Suy ra: $\triangle ABO \sim \triangle AEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BO}{EB} \Rightarrow AB.EB = AE.BO$$

c) Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh F là trung điểm của AC .

Vì $AB \perp OB \Rightarrow \widehat{DBO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle DBO$ vuông tại B nên điểm B thuộc đường tròn đường kính DO (1)

Vì $OI \perp DF \Rightarrow \widehat{DIO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle DIO$ vuông tại I nên điểm I thuộc đường tròn đường kính DO (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 4 điểm D, B, I, O cùng thuộc đường tròn đường kính DO

Do đó, tứ giác $DBIO$ nội tiếp đường tròn đường kính DO

$$\Rightarrow \widehat{IDO} = \widehat{IBO} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IO)}$$

CMTT ta có: $\widehat{IFO} = \widehat{ICO}$

Mặt khác: $OB = OC \Rightarrow \triangle OBC$ cân ở $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ hay $\widehat{IBO} = \widehat{ICO}$

Do đó: $\widehat{IDO} = \widehat{IFO} \Rightarrow \triangle ODF$ cân ở O mà $OI \perp DF$ (GT)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của DF

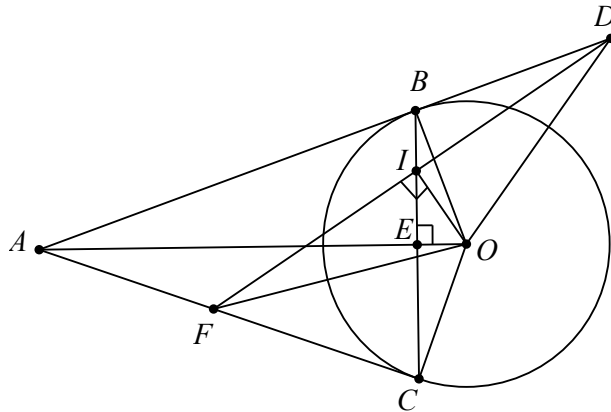
Câu 38: Cho đường tròn (O) , từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm), OA cắt BC tại E .

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA.BE = AE.BO$.

c) Gọi I thuộc đoạn thẳng BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh F là trung điểm của AC .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

Xét (O) có: AB là tiếp tuyến tại B (GT) nên $AB \perp OB \Rightarrow \widehat{ABO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABO$ vuông tại B nên điểm B thuộc đường tròn đường kính AO (1)

Mặt khác: AC là tiếp tuyến tại C (GT) nên $AC \perp OC \Rightarrow \widehat{ACO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ACO$ vuông tại C nên điểm C thuộc đường tròn đường kính AO (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính AO

Do đó, tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO

b) Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA \cdot BE = AE \cdot BO$.

* Chứng minh BC vuông góc với OA

Xét (O) có: AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau ở A (GT)

$\Rightarrow AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $OB = OC$ (B, C thuộc đường tròn (O))

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC nên $BC \perp OA$

* Chứng minh $BA \cdot BE = AE \cdot BO$

Xét ΔABO và ΔAEB có:

$$\widehat{ABO} = \widehat{AEB} = 90^\circ (\text{cmt})$$

$\widehat{BAO}$: góc chung

Suy ra: $\Delta ABO \sim \Delta AEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BO}{EB} \Rightarrow AB \cdot EB = AE \cdot BO$$

c) Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh F là trung điểm của AC .

$$\text{Vì } AB \perp OB \Rightarrow \widehat{DBO} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle DBO$ vuông tại B nên điểm B thuộc đường tròn đường kính DO (1)

$$\text{Vì } OI \perp DF \Rightarrow \widehat{DIO} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle DIO$ vuông tại I nên điểm I thuộc đường tròn đường kính DO (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 4 điểm D, B, I, O cùng thuộc đường tròn đường kính DO

Do đó, tứ giác $DBIO$ nội tiếp đường tròn đường kính DO

$$\Rightarrow \widehat{IDO} = \widehat{IBO} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IO)}$$

$$\text{CMTT ta có: } \widehat{IFO} = \widehat{ICO}$$

$$\text{Mặt khác: } OB = OC \Rightarrow \triangle OBC \text{ cân ở } O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \text{ hay } \widehat{IBO} = \widehat{ICO}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{IDO} = \widehat{IFO} \Rightarrow \triangle ODF \text{ cân ở } O \text{ mà } OI \perp DF \text{ (GT)}$$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của DF

Câu 39: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và AH là đường cao của tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB và AC .

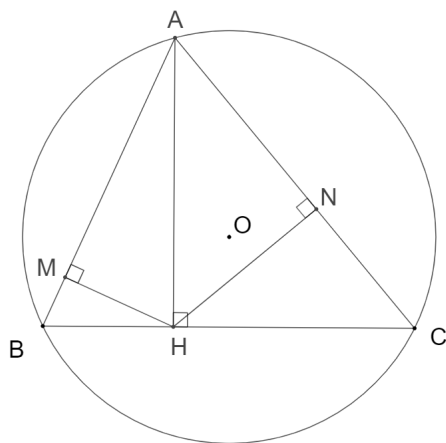
a) Chứng minh bốn điểm A, M, H, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{ANM}$ và OA vuông góc với MN .

c) Cho biết $AH = R\sqrt{2}$. Chứng minh M, O, N thẳng hàng.

Lời giải

a)

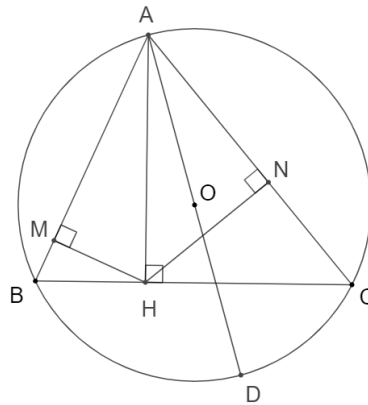


Ta có $HM \perp AB$ tại M nên $\triangle AMH$ vuông tại M , suy ra A, M, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

Ta có $HN \perp AC$ tại N nên $\triangle ANH$ vuông tại N , suy ra A, N, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

Do đó 4 điểm A, M, H, N cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

b)



Xét $\triangle AMH$ và $\triangle AHB$ có $\widehat{AMH} = \widehat{AHB} = 90^\circ$, $\hat{A}$ chung

$$\Rightarrow \triangle AMH \sim \triangle AHB (g.g) \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AH}{AB}$$

$$\Rightarrow AH^2 = AM \cdot AB (1)$$

Chứng minh tương tự có $AH^2 = AN \cdot AC (2)$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } AM \cdot AB = AN \cdot AC \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$$

$$\text{Xét } \triangle AMN \text{ và } \triangle ACB: \begin{cases} \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$$

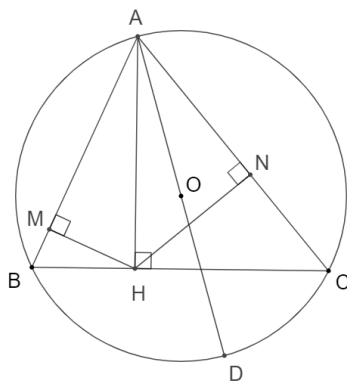
$$\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ACB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ABC} \text{ (hai góc tương ứng) } (3)$$

Kẻ đường kính AD ta có $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DC) (4)

$$\text{Từ (3); (4) suy ra } \widehat{ANM} + \widehat{DAC} = \widehat{ABC} + \widehat{DBC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AO \perp MN$$

c)



Theo chứng minh trên có $AN \cdot AC = AH^2 = 2R^2 = AO \cdot AD$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AO}{AC}$$

$$\text{Xét } \triangle ANO \text{ và } \triangle ADC: \begin{cases} \frac{AN}{AD} = \frac{AO}{AC} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ANO \sim \triangle ADC (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{ACD} = 90^\circ$$

$$\text{Chứng minh tương tự } \widehat{AOM} = \widehat{ABD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{AON} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\text{Hay } \widehat{AMN} = 180^\circ \Rightarrow A, M, N \text{ thẳng hàng.}$$

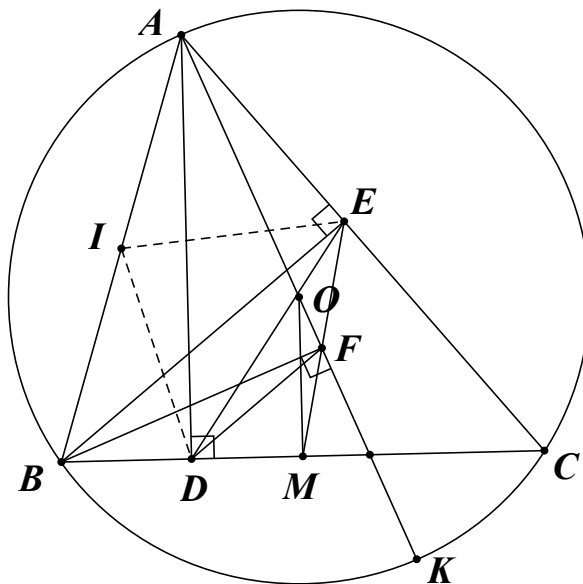
Câu 40: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Gọi A là một điểm bất kì trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Kẻ các đường cao AD, BE của tam giác ABC .

a) Chứng minh: Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AK của đường tròn tâm O . Gọi F là hình chiếu của điểm B trên AK . Chứng minh rằng: $AB \cdot AC = AK \cdot AD$ và $DF \perp AC$

c) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh: ba điểm E, F, M thẳng hàng.

Lời giải



a)

+ Có AD là đường cao của tam giác ABC

$$\text{nên } AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ$$

+ Có BE là đường cao của tam giác ABC

$$\text{nên } BE \perp AC \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^\circ$$

+ Gọi I là trung điểm của AB

$$\triangle ABD \text{ vuông tại } D \Rightarrow IA = IB = ID = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

$$\triangle ABE \text{ vuông tại } E \Rightarrow IA = IB = IE = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1); (2) suy ra } IA = IB = IE = ID \left(= \frac{AB}{2} \right)$$

Nên bốn điểm A, B, E, D cùng nằm trên một đường tròn.

$$\text{b) Chứng minh: } \widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90^\circ$$

$$+ \text{ Chỉ ra: } \widehat{ABD} = \widehat{AKC}$$

Chứng minh $\triangle ABD$ đồng dạng $\triangle AKC$ (g.g)

$$\text{và } AB.AC = AK.AD$$

+ Chứng minh tứ giác AFDB nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{BAD} \quad (1)$$

+ Vì $\triangle ABD$ đồng dạng $\triangle AKC$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{KAC} \quad (2)$$

+ Chứng minh tứ giác AEFB nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{EBF}$$

$$\text{Hay } \widehat{CAK} = \widehat{EBF} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3) suy ra: } \widehat{EBF} = \widehat{BFD}$$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $BE \parallel DF$

Lại có $BE \perp AC$ (GT)

Vậy $DF \perp AC$

c) Gọi M là trung điểm của BC

Suy ra M cố định và OM vuông góc BC (quan hệ giữa đường kính và dây)

+ Chứng minh tứ giác OMBF nội tiếp

$$\text{Suy ra } \widehat{OFM} = \widehat{OBM}$$

$$+ \text{ Chứng minh } \widehat{OBM} = \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{ABE}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABE} = \widehat{AFE}$$

$$\text{nên } \widehat{AFE} = \widehat{OFM}$$

Từ đó chứng minh $\widehat{EFM} = 180^\circ$. Suy ra ba điểm E, F, M thẳng hàng

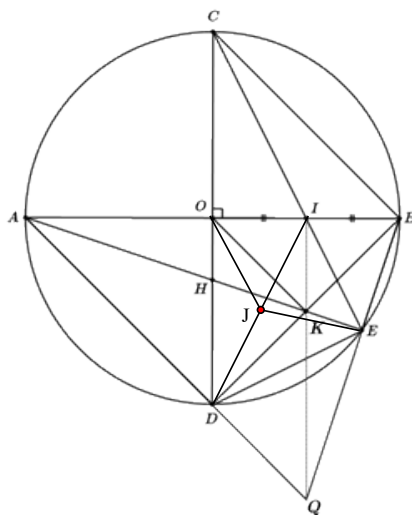
Câu 41: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc tại O . Gọi I là trung điểm của OB . Tia CI cắt đường tròn (O) tại E . Gọi H là giao điểm của AE và CD .

a) Chứng minh bốn điểm O, I, E, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AH \cdot AE = 2R^2$ và $OA = 3 \cdot OH$.

c) Gọi K là hình chiếu của O trên BD , Q là giao điểm của AD và BE . Chứng minh: Q, K, I thẳng hàng.

Lời giải



Gọi J là trung điểm của ID

+) $AB \perp CD$ tại O , mà $I \in OB$

Suy ra $\widehat{IOD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle IOD$ vuông tại O , từ đó suy ra $JO = JI = JD$ (1)

+) Chứng minh: $\widehat{IED} = 90^\circ \Rightarrow \triangle IED$ vuông tại E ,

từ đó suy ra $JI = JE = JD$ (2)

+) Từ (1) và (2) suy ra O, I, E, D cùng thuộc một đường tròn

b) +) Chứng minh: $\triangle AHO \sim \triangle ABE$ (g.g)

+) Suy ra: $AH \cdot AE = AO \cdot AB = R \cdot 2R = 2R^2$

+) Suy ra: $\frac{OA}{OH} = \frac{AE}{BE}$

+) Mà EI là tia phân giác của góc AEB nên suy ra:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AI}{IB} = \frac{\frac{3}{2}R}{\frac{1}{2}R} = 3$$

+) Suy ra: $\frac{OA}{OH} = 3$, do đó $OA = 3.OH$

c) +) Chứng minh được: $OD = 3.OH$ suy ra $HD = \frac{2}{3}OD$

+) Suy ra: H là trọng tâm $\triangle ABD$

+) Chứng minh K là trung điểm của BD

Suy ra: A, H, K, E thẳng hàng

+) Suy ra: K là trực tâm của $\triangle ABQ$

+) Suy ra: KQ vuông góc AB

+) Chứng minh được: KI vuông góc AB

+) Suy ra: Q, K, I thẳng hàng

Câu 42: Cho (O) đường kính AB . Kẻ đường kính CD vuông góc với AB . Lấy M thuộc cung nhỏ BC , AM cắt CD tại E . Qua D kẻ tiếp tuyến với (O) cắt đường thẳng BM tại N . Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên DN

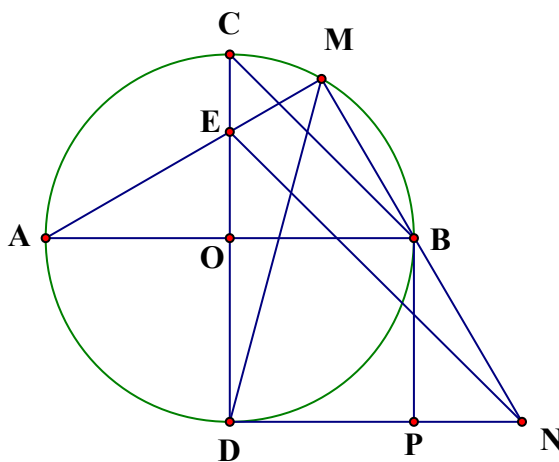
a) Chứng minh các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $EN \parallel CB$.

c) Chứng minh $AM.BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Chứng minh các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.



Xét tứ giác $MNDE$:

Có $DN \perp CD$ (vì DN là tiếp tuyến của (O))

$$\Rightarrow \widehat{CDN} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EDN} = 90^\circ$$

$\triangle EDN$ vuông tại D

Suy ra 3 điểm E, D, N thuộc đường tròn đường kính EN (1)

Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$$\Rightarrow \widehat{EMN} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle EMN$ vuông tại M

Suy ra 3 điểm E, M, N thuộc đường tròn đường kính EN (2)

Từ (1) và (2) Suy ra các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $EN \parallel CB$.

Xét (O) có $\widehat{CDM} = \widehat{CBM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM)

$$\Rightarrow \widehat{EDM} = \widehat{CBM}$$

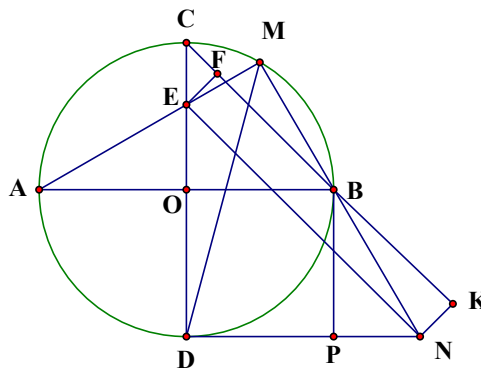
Vì tứ giác $MNDE$ nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{EDM} = \widehat{ENM} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } EM \text{)}$$

Suy ra $\widehat{CBM} = \widehat{ENM} (= \widehat{EDM})$ mà hai góc này ở vị trí so le trong

$$\Rightarrow EN \parallel CB.$$

3) Chứng minh $AM \cdot BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.



Xét $\triangle AMB$ và $\triangle BPN$:

$$\text{Có } BP \perp DN \Rightarrow \widehat{BPN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BPN} = 90^\circ \text{ (1)}$$

Có $DN \perp CD$ (DN kẻ tiếp tuyến với (O))

$$\Rightarrow BA \parallel DN$$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{DNB} \text{ (hai góc đồng vị) (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có $\triangle AMB \sim \triangle BPN$ (g - g)

Xét tứ giác $OBPD$ có :

$$\widehat{DOB} = \widehat{BPD} = \widehat{ODP} = 90^0$$

$$OD = OB = R$$

$\Rightarrow OBPD$ là hình vuông (DHNB) nên $OD = OB = BP = R$

$$\text{Có } \triangle AMB \sim \triangle BPN \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AM}{BP} = \frac{AB}{BN}$$

$$\Rightarrow AM \cdot BN = BP \cdot AB = R \cdot 2R = 2R^2$$

* Kẻ $EF \perp BC, NK \perp BC$

$$S_{NBC} = \frac{1}{2} NK \cdot BC. \text{ Do } BC \text{ không đổi nên } S_{NBC} \text{ max khi và chỉ khi } NK \text{ max.}$$

Do $EF \perp BC, NK \perp BC \Rightarrow EF \parallel NK$.

Có tứ giác $EFKN$ là hình bình hành (DHNB)

Có $EF \perp BC \Rightarrow \widehat{EFK} = 90^0$ nên tứ giác $EFKN$ là hình chữ nhật (DHNB)

$$\Rightarrow EF = NK.$$

Ta có NK max khi EF max

khi $E \equiv O$ khi $M \equiv B$

Câu 43: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

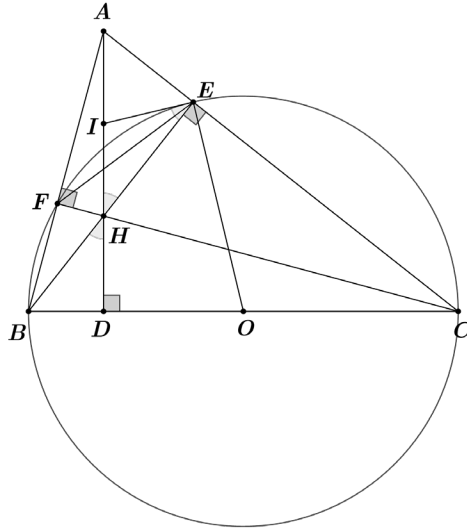
a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

b) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

c) Vẽ CI cắt đường tròn (O) tại M (M khác C), EF cắt AD tại K . Chứng minh ba điểm B, K, M thẳng hàng.

Lời giải

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$



Vì $CF \perp AB$ nên $\widehat{CFB} = 90^\circ$ suy ra tam giác BFC vuông tại F

Vì $BE \perp AC$ nên $\widehat{BEC} = 90^\circ$ suy ra tam giác BEC vuông tại E

Gọi O' là trung điểm đoạn BC .

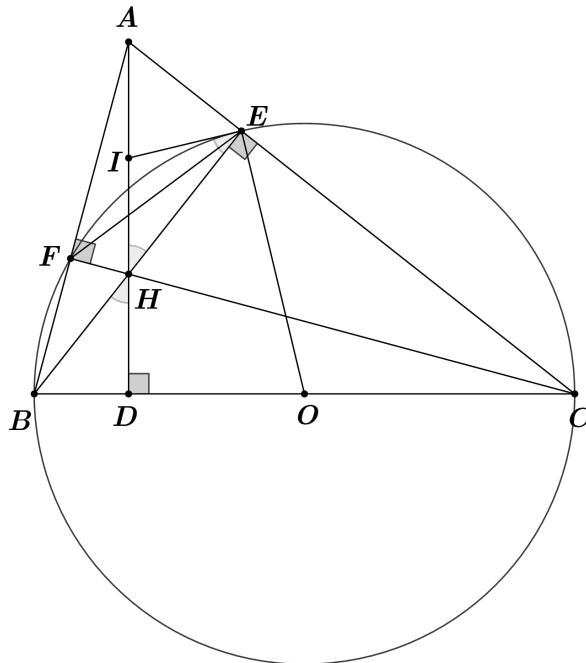
Xét tam giác BEC vuông tại E , O' là trung điểm đoạn BC .. Suy ra $O'E = O'B = O'C$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông.) (1)

Xét tam giác BFC vuông tại F , O' là trung điểm đoạn BC .. Suy ra $O'F = O'B = O'C$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông.) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $O'E = O'B = O'C = O'F$ mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$, suy ra O trùng O'

Suy ra O là trung điểm đoạn BC ..

b) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Xét $\triangle AEH$ vuông tại H , có EI là đường trung tuyến ứng với cạnh AH nên

$$EI = \frac{1}{2} AH = IH$$

Suy ra: $\triangle IEH$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IHE}$

Mà $\widehat{IHE} = \widehat{BHD}$ (Hai góc đối đỉnh)

Suy ra: $\widehat{IEH} = \widehat{BHD}$ (1)

Ta lại có: $OB = OE = R \Rightarrow \triangle OEB$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OBE} = \widehat{OEB}$ (2)

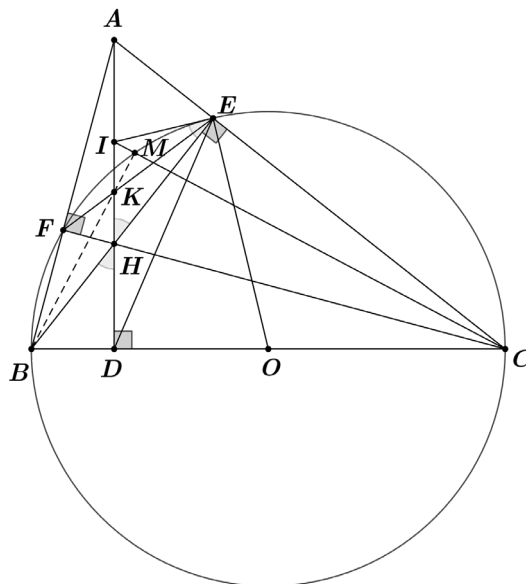
Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{IEH} + \widehat{OEB} = \widehat{BHD} + \widehat{OBE}$

Mặt khác: $\widehat{BHD} + \widehat{OBE} = 90^\circ$ (vì $\triangle BHD$ vuông tại D)

Suy ra: $\widehat{IEH} + \widehat{OEB} = \widehat{BHD} + \widehat{OBE} = 90^\circ$ hay $\widehat{OEI} = 90^\circ$

$\Rightarrow OE \perp EI$ và $E \in (O)$ Do đó: IE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c) Vẽ CI cắt đường tròn (O) tại M (M khác C), EF cắt AD tại K . Chứng minh ba điểm B, K, M thẳng hàng.



Ta có: góc BMC là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên góc BMC = 90 độ

$\Rightarrow BM \perp IC$

Xét $\triangle IEK$ và $\triangle IDE$ có:

$\widehat{EIK}$ là góc chung

$\widehat{IDE} = \widehat{IEK} (= \widehat{ECF})$

Do đó: $\triangle IEK \sim \triangle IDE$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{IK}{IE} \Rightarrow ID \cdot IK = IE^2$

Mặt khác: $IM \cdot IC = IE^2$ (Bạn đọc tự chứng minh)

$$\Rightarrow ID.IK = IM.IC$$

$$\Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{IK}{IC}$$

Xét tam giác IMK và tam giác IDC có:

Góc MIK là góc chung

$$\frac{IM}{ID} = \frac{IK}{IC}$$

$$\Rightarrow \triangle IMK \sim \triangle IDC$$

$$\Rightarrow \widehat{KMI} = \widehat{CDI} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow KM \perp IC$$

$$\left. \begin{array}{l} BM \perp IC \\ KM \perp IC \end{array} \right\} \Rightarrow B, M, K \text{ thẳng hàng}$$

Câu 44: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Gọi K là trung điểm BC .

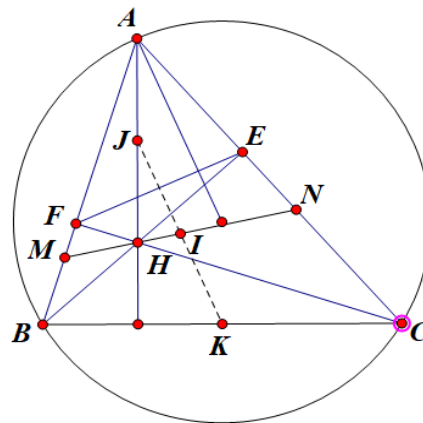
a) Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$.

b) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .

c) Đường phân giác góc FHB cắt AB và AC lần lượt tại M và N . Gọi I là trung điểm của MN , J là trung điểm của AH . Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải

a) Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$.



Vẽ đúng hình đến ý 1)

$$BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ \text{ (TGV)}$$

$$CF \perp AB \Rightarrow \widehat{CFB} = 90^\circ \text{ (TGV)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$.

b) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

$$\Delta OAC \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{EAO} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2}$$

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} \Rightarrow \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow \widehat{AEF} + \widehat{EAO} = 90^\circ \Rightarrow AO \perp EF$$

c) Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và I, J, K thẳng hàng.

Chứng minh ΔAMN cân tại A vì $\widehat{AMN} = \widehat{MBH} + \widehat{MHB} = \widehat{NCH} + \widehat{NHC} = \widehat{ANM} \Rightarrow AI \perp MN$

$\widehat{AFH} = \widehat{AIH} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AFHI$ là tứ giác nội tiếp.

Có $\widehat{MAH} = \widehat{NAO} \Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{IAO} \Rightarrow IJ \parallel AO$ suy ra IJ trung trực EF

Có $JE = JF, KE = KF \Rightarrow KI$ trung trực $EF \Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

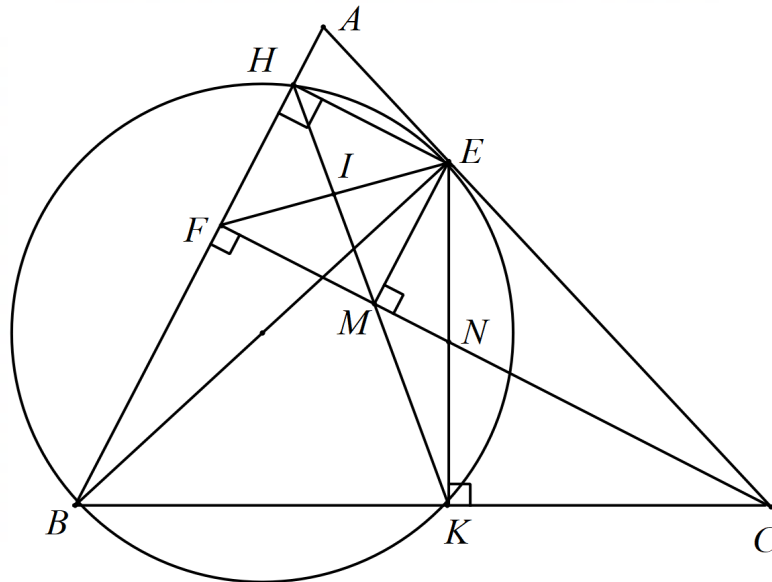
Câu 45: Cho ΔABC có 3 góc nhọn và đường cao BE . Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ điểm E đến AB, AC .

a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ nội tiếp;

b) Chứng minh: $BH \cdot BA = BK \cdot BC$;

c) Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AB , I là trung điểm của đoạn thẳng EF . Chứng minh rằng H, I, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BHE} = 90^\circ$ nên 3 điểm B, H, E nằm trên đường tròn đường kính BE

$\widehat{BKE} = 90^\circ$ nên 3 điểm B, K, E nằm trên đường tròn đường kính BE

Nên 4 điểm B, H, K, E nằm trên đường tròn đường kính BE

Suy ra $BHEK$ là tứ giác nội tiếp

b) Vì $BHEK$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BHK} = \widehat{BEK}$ (góc nội tiếp

cùng chắn $\widehat{BK}$) mà $\widehat{BEK} = \widehat{BCE}$ (cùng phụ $\widehat{KEC}$)

$$\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{BCE}$$

+) Xét $\triangle BHK$ và $\triangle BCA$ có $\hat{B}$ chung; $\widehat{BHK} = \widehat{BCA}$

$$\triangle BHK \text{ đồng dạng } \triangle BCA (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BK}{BA} \Rightarrow BH.BA = BK.BC;$$

c) Giả sử HK cắt CF tại M . Ta chỉ việc chứng minh HM đi qua trung điểm I của EF

- Vì $BHEK$ nội tiếp $\widehat{HBE} = \widehat{HKE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{HE}$)

- $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ (cùng phụ với $\hat{A}$) $\Rightarrow \widehat{MKE} = \widehat{MCE}$

Giả sử CM cắt KE tại N

$$\text{Ta có } \triangle MNK \text{ đồng dạng } \triangle ENC (g-g) \text{ suy ra } \frac{NM}{NC} = \frac{NK}{NE}$$

Xét $\triangle MNE$ và $\triangle KNC$ có

$$\frac{NM}{NC} = \frac{NK}{NE}; \widehat{MNE} = \widehat{KNC} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\text{Suy } \widehat{ENC} = \widehat{EKC} \text{ mà } \widehat{EKC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EMC} = 90^\circ$$

$$\text{Hay } \widehat{EHF} = \widehat{HFM} = \widehat{FME} = 90^\circ$$

$\Rightarrow EHF M$ là hình chữ nhật mà I là trung điểm của đường chéo $EF \Rightarrow I$ là trung điểm của HM

$\Rightarrow H, I, M, K$ thẳng hàng.

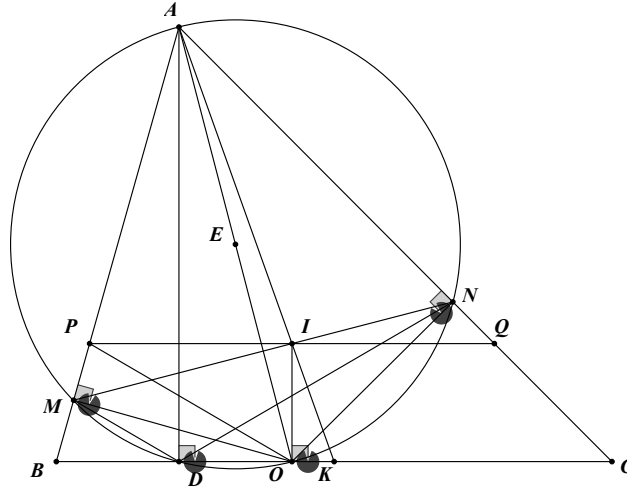
Câu 46: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AD và đường phân giác trong AO (D, O thuộc cạnh BC). Kẻ $OM \perp AB$ tại M , $ON \perp AC$ tại N .

a) Chứng minh bốn điểm O, M, D, N cùng nằm trên một đường tròn. (dấu cách của dấu phẩy, dấu chấm viết không đúng)

b) Chứng minh: $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$.

c) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt MN tại I , AI cắt BC tại K . Chứng minh K là trung điểm của BC .

Lời giải



a) Gọi E là trung điểm AO .

Vì $\triangle AMO$ vuông tại M (gt)

$$\Rightarrow EA = EM = EO = \frac{1}{2} AO \text{ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)} (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có: $EO = EA = ED = \frac{1}{2} AO$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ADO) (2)

Chứng minh tương tự, ta có: $EA = EO = EN = \frac{1}{2} AO$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ANO) (3)

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow OE = DE = ME = AE = NE = \frac{1}{2} AO$$

Suy ra O, M, A, D, N thuộc đường tròn tâm E đường kính AO

Suy ra O, M, D, N thuộc đường tròn tâm E đường kính AO .

b) Chứng minh $\triangle AON = \triangle AOM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $\widehat{AON} = \widehat{AOM}$ (hai góc tương ứng)

Ta có: $\widehat{BDM} + \widehat{MDA} = 90^\circ$ (do $AD \perp BC$ tại D)

$\widehat{ODN} + \widehat{ADN} = 90^\circ$ (do $AD \perp BC$ tại D)

$\widehat{ADM} = \widehat{AOM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AM}$ của $\left(E, \frac{AO}{2}\right)$)

$\widehat{ADN} = \widehat{AON}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AN}$ của $\left(E, \frac{AO}{2}\right)$)

Suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$

c) Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại P, Q .

Chứng minh P, I, O, M cùng thuộc đường tròn đường kính PO

Suy ra $\widehat{POI} = \widehat{PMI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{IP}$).

Chứng minh tứ giác $INQO$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{IOQ} = \widehat{INA}$ (cùng bù với $\widehat{INQ}$)

Ta có $\widehat{PMI} = \widehat{INA}$ (cùng bằng $\widehat{AON}, \widehat{AOM}$)

Suy ra $\widehat{POI} = \widehat{QOI}$

Suy ra OI là phân giác của $\widehat{POQ}$

Ta có: $OI \perp PQ$ (do $OI \perp BC$ và $PQ \parallel BC$)

Suy ra $\triangle POQ$ cân tại O

Suy ra OI là đường trung tuyến của $\triangle OPQ$

Suy ra $IP = IQ$

Vì $PQ \parallel BC$

Suy ra $\triangle API \sim \triangle ABK$ (g - g)

Suy ra $\frac{PI}{BK} = \frac{AI}{AK}$

Tương tự, $\triangle AIN \sim \triangle AKC$ (g - g)

Suy ra $\frac{IQ}{KC} = \frac{AI}{AK}$

$\frac{PI}{BK} = \frac{IQ}{KC}$

mà $PI = IQ$ (cmt)

suy ra $KB = KC$

Vậy K là trung điểm BC .

Câu 47: Cho $(O; R)$ đường kính AB . Bán kính CO vuông góc với AB , M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C), MB cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu của H trên AB .

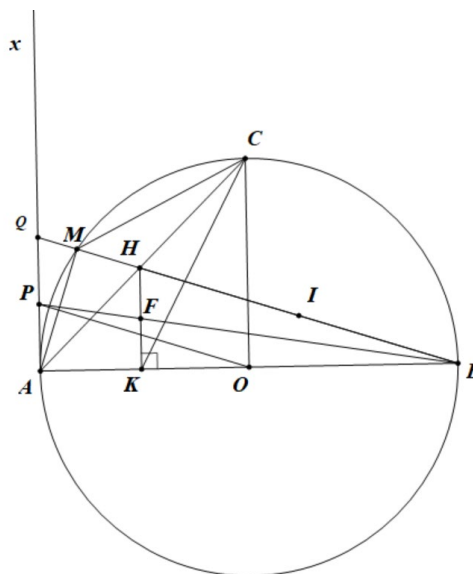
a) Chứng minh bốn điểm C, B, H, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh CA là phân giác $\widehat{MCK}$.

c) Kẻ Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A . Lấy $P \in Ax$ sao cho $\frac{AP \cdot MB}{MA} = R$.

Chứng minh PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK .

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm của $HB \Rightarrow HI = IB = \frac{HB}{2}$

Xét nửa đường tròn (O) , đường kính AB có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\triangle CHB$ vuông, mà CI là đường trung tuyến

Từ đó có $IC = IH = IB = \frac{HB}{2}$ (1)

Xét nửa đường tròn (O) , đường kính AB có: $\widehat{HKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\triangle KHB$ vuông, mà KI là đường trung tuyến.

Từ đó $IK = IH = IB = \frac{HB}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $IC = IK = IH = IB$

Do đó bốn điểm C, B, H, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Có $\widehat{MCA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AM}$); $\widehat{ACK} = \widehat{MBA}$ (tứ giác $CHKB$ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{ACK}$

Do đó CA là phân giác $\widehat{MCK}$.

c) Theo giả thiết: $\frac{AP \cdot MB}{MA} = R \Rightarrow \frac{AP}{MA} = \frac{OA}{MB}$

Xét $\triangle PAO$ và $\triangle AMB$ có: $\frac{AP}{MA} = \frac{OA}{MB}$; $\widehat{PAO} = \widehat{AMB} = 90^\circ$

Do đó $\triangle PAO \sim \triangle AMB$ (c-g-c)

Suy ra $\widehat{POA} = \widehat{MBA}$ (hai góc tương ứng)

Suy ra $OP \parallel BQ$

Xét $\triangle ABQ$ có: $OP \parallel BQ$, O là trung điểm của AB nên P là trung điểm của AQ .

Gọi F là giao điểm của BP và HK .

Xét $\triangle ABP$ có $FK \parallel AP$ nên $\frac{FK}{AP} = \frac{BF}{BP}$

Xét $\triangle QBP$ có $FH \parallel QP$ nên $\frac{FH}{QP} = \frac{BF}{BP}$

Từ đó $HF = FK$ suy ra PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK .

Câu 48: Từ điểm A nằm ngoài (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

Kẻ đường kính CD của (O) .

a) Chứng minh $BD \parallel AO$.

b) AD cắt (O) tại E (A, E, D theo thứ tự). Chứng minh rằng $AB^2 = AE \cdot AD$.

c) Vẽ $BH \perp DC$ tại H . Gọi I là trung điểm của BH . Chứng minh ba điểm A, I, D thẳng hàng.

Lời giải

Từ điểm A nằm ngoài (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm).

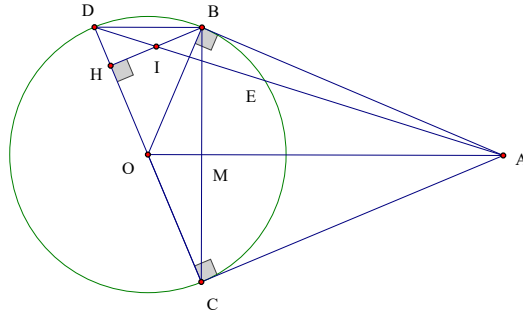
Kẻ đường kính CD của (O) .

a) Chứng minh $BD \parallel AO$.

b) AD cắt (O) tại E (A, E, D theo thứ tự). Chứng minh rằng $AB^2 = AE \cdot AD$.

c) Vẽ $BH \perp DC$ tại H . Gọi I là trung điểm của BH . Chứng minh ba điểm A, I, D thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có B thuộc (O) và có CD là đường kính của (O)

Suy ra $\triangle BCD$ nội tiếp $\left(O; \frac{CD}{2}\right)$

Suy ra $\triangle BCD$ vuông tại B

Suy ra $\widehat{CBD} = 90^\circ$

Suy ra $BD \perp BC$

Vì AB, AC là hai tiếp tuyến của (O) nên $AB = AC$ (tính chất)

Suy ra $\triangle ABC$ cân tại A

Lại có AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Suy ra AO là đường cao của $\triangle ABC$

Suy ra $AO \perp BC$

Ta có $BD \perp BC, AO \perp BC$. Suy ra $BD \parallel AO$

b) Ta có E thuộc (O) và có CD là đường kính của (O)

Suy ra $\triangle CDE$ nội tiếp $\left(O; \frac{CD}{2}\right)$

Suy ra $\triangle CDE$ vuông tại E

Suy ra $\widehat{CED} = 90^\circ$

Suy ra $CE \perp AD$

Xét hai tam giác $\triangle AEC$ và $\triangle ACD$ có:

$\widehat{AEC} = \widehat{ACD} = 90^\circ$

$\widehat{A}$ chung

Vậy $\triangle AEC \sim \triangle ACD$

Suy ra $\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AD}$, suy ra $AC^2 = AE \cdot AD$

Mà $AB = AC$

Suy ra $AB^2 = AE \cdot AD$

c) Xét hai tam giác $\triangle HDB$ và $\triangle COA$ có:

$$\widehat{DHB} = \widehat{OCA} = 90^\circ$$

$$\widehat{HDB} = \widehat{COA} \text{ (đồng vị và } BD \parallel AO \text{)}$$

Vậy $\triangle HDB \square \triangle COA$

$$\text{Suy ra } \frac{HD}{OC} = \frac{BH}{AC} \text{ suy ra } \frac{HD}{2OC} = \frac{BH}{2AC}$$

Mà $CD = 2OC, BH = 2HI$ (vì O, I lần lượt là trung điểm của CD, BH)

$$\text{Suy ra } \frac{HD}{CD} = \frac{HI}{AC}$$

Xét hai tam giác $\triangle HDI$ và $\triangle CDA$ có:

$$\widehat{DHI} = \widehat{DCA} = 90^\circ$$

$$\frac{HD}{CD} = \frac{HI}{AC}$$

Vậy $\triangle HDI \square \triangle CDA$ (c.g.c)

$$\text{Suy ra } \widehat{HDI} = \widehat{CDA}$$

Suy ra hai tia DI, DA trùng nhau

Vậy ba điểm A, I, D thẳng hàng

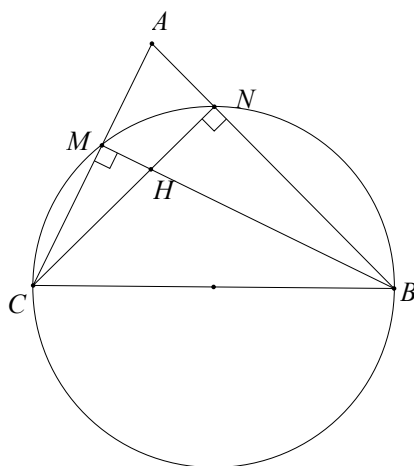
Câu 49: Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H .

a/ Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b/ Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh DA phân giác của $\widehat{MDN}$

c/ Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J . Chứng minh D là trung điểm IJ

Lời giải



a/ Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H nên ta có $\triangle ANH, \triangle AMH$ vuông tại N, M

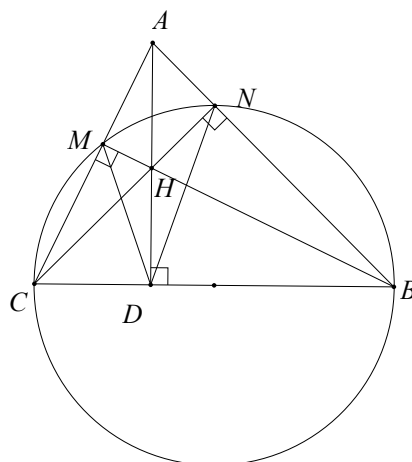
Xét $\triangle ANH$ có $\widehat{ANH} = 90^\circ$ nên ba điểm A, N, H nằm trên đường tròn đường kính AH

Xét $\triangle AMH$ có $\widehat{AMH} = 90^\circ$ nên ba điểm A, M, H nằm trên đường tròn đường kính AH

Khi đó bốn điểm A, M, H, N nằm trên đường tròn đường kính AH

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .

b/ Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh DA phân giác của $\widehat{MDN}$



Có $\widehat{HMC} = \widehat{HDC} = 90^\circ$

Xét $\triangle HMC$ có $\widehat{HMC} = 90^\circ$ nên ba điểm C, M, H nằm trên đường tròn đường kính CH

Xét $\triangle CDH$ có $\widehat{HDC} = 90^\circ$ nên ba điểm C, D, H nằm trên đường tròn đường kính CH

Khi đó bốn điểm D, C, M, H nằm trên đường tròn đường kính CH

Suy ra tứ giác $HDCM$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{HDM} = \widehat{HCM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

Có $\widehat{HDB} = \widehat{HNB} = 90^\circ$

Xét $\triangle HDB$ có $\widehat{HDB} = 90^\circ$ nên ba điểm B, D, H nằm trên đường tròn đường kính BH

Xét $\triangle HNB$ có $\widehat{HNB} = 90^\circ$ nên ba điểm B, N, H nằm trên đường tròn đường kính BH

Khi đó bốn điểm D, B, N, H nằm trên đường tròn đường kính BH

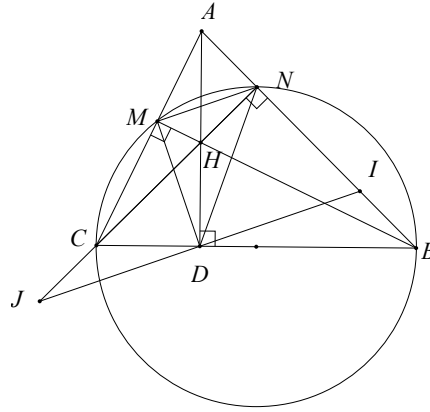
Suy ra tứ giác $HDBN$ nội tiếp

$\widehat{NDH} = \widehat{NBH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HN)

Mà $\widehat{HCM} = \widehat{NBH}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

Suy ra $\widehat{HDM} = \widehat{HDN}$ Suy ra AD là phân giác của góc $\widehat{MDN}$ (đpcm).

c/ Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J . Chứng minh D là trung điểm IJ .



Có $\widehat{BMC} = \widehat{CNB} = 90^\circ$

Xét $\triangle MCB$ có $\widehat{BMC} = 90^\circ$ nên ba điểm B, M, C nằm trên đường tròn đường kính BC

Xét $\triangle BNC$ có $\widehat{BNC} = 90^\circ$ nên ba điểm B, N, C nằm trên đường tròn đường kính BC

Khi đó bốn điểm C, B, N, M nằm trên đường tròn đường kính BC

Suy ra tứ giác $BCMN$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{HNM} = \widehat{HBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung CM)

Tứ giác $HDBN$ nội tiếp nên $\widehat{HBD} = \widehat{HND}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung HD)

Suy ra $\widehat{HNM} = \widehat{HND}$

Ta có $IJ \parallel MN$ (gt) Suy ra $\widehat{HNM} = \widehat{HJI} = \widehat{HJD}$ (Hai góc so le trong bằng nhau)

Suy ra $\widehat{HND} = \widehat{HJD}$

Nên tam giác DNJ cân tại D (tam giác có 2 góc ở đáy bằng nhau)

Suy ra $DN = DJ$ (tính chất tam giác cân) (1)

Vì $\widehat{HND} = \widehat{HJD}$ (chứng minh trên)

Mà $\widehat{HND} + \widehat{DNI} = \widehat{HNI} = 90^\circ$ và $\widehat{HJD} + \widehat{NID} = 90^\circ$ (do $\triangle JNI$ vuông tại N)

Suy ra $\widehat{DNI} = \widehat{NID}$

Tam giác $\triangle NID$ cân tại D (tam giác có 2 góc ở đáy bằng nhau)

Suy ra $DN = DI$ (tính chất tam giác cân) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DI = DJ = DN$

Vậy D là trung điểm IJ

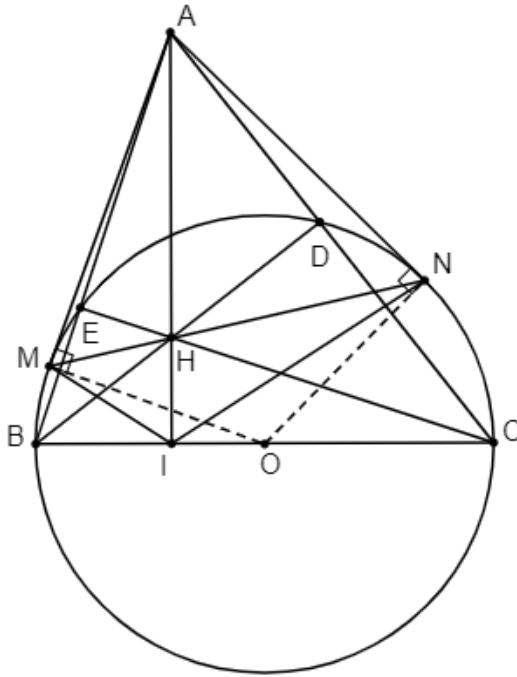
Câu 50: Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D ; BD cắt CE tại H , AH cắt BC tại I . Từ A kẻ tiếp tuyến AM, AN của đường tròn (O) (M, N là tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AB \cdot BE = BI \cdot BC$, từ đó suy ra $AB \cdot BE + AC \cdot CD = BC^2$

c) Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì $\widehat{BEC}$ và $\widehat{BDC}$ là hai góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) nên: $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$

Suy ra hai điểm E và D cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Do đó bốn điểm A, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Vậy tứ giác $AEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

b) Chứng minh H là trực tâm của $\triangle ABC$ suy ra $AI \perp BC$

Chứng minh được $\triangle ABI \sim \triangle CBE$ (g.g)

Suy ra: $\frac{AB}{CB} = \frac{BI}{BE}$ hay $AB \cdot BE = AI \cdot BC$ (1)

Tương tự: $AC \cdot CD = AI \cdot BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB \cdot BE + AC \cdot CD = BI \cdot BC + CI \cdot BC = (BI + CI) \cdot BC = BC^2$

Vậy $AB \cdot BE + AC \cdot CD = BC^2$

c) Chứng minh 5 điểm A, M, I, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO , suy ra tứ giác $AMIN$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AMI} + \widehat{ANI} = 180^\circ$ (*)

Chứng minh $\triangle AEH \sim \triangle AIB$ (g.g), suy ra $\frac{AE}{AI} = \frac{AH}{AB}$ hay $AE \cdot AB = AI \cdot AH$ (3)

Chứng minh $\triangle AME \sim \triangle ABM$ (g.g), suy ra $\frac{AE}{AM} = \frac{AM}{AB}$ hay $AB \cdot AE = AM^2$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra hay $\frac{AM}{AI} = \frac{AH}{AM}$

Chứng minh $\triangle AMI \sim \triangle AHM$ (c.g.c), suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{AHM}$ (**)

Tương tự: $\widehat{ANI} = \widehat{AHN}$ (***)

Từ (*), (**) và (***) suy ra $\widehat{AHM} + \widehat{AHN} = 180^\circ$

Vậy ba điểm M , H , N thẳng hàng. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

CHUYÊN ĐỀ 12_BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC CÂU TOÁN CỰC TRỊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Bất đẳng thức là hai biểu thức nối với nhau bởi một trong các dấu $>$ (lớn hơn), $<$ (nhỏ hơn), $\geq$ (lớn hơn hoặc bằng), $\leq$ (nhỏ hơn hoặc bằng).

Ta có: $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$$

□ Trong bất đẳng thức $A > B$ (hoặc $A < B, A \geq B, A \leq B$), A gọi là vế trái, B gọi là vế phải của bất đẳng thức.

□ Các bất đẳng thức $A > B$ và $C > D$ gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều. Các bất đẳng thức $A > B$ và $E < F$ gọi là hai bất đẳng thức trái chiều.

□ Nếu ta có $A > B \Rightarrow C > D$ ta nói bất đẳng thức $C > D$ là hệ quả của bất đẳng thức $A > B$.

□ Nếu ta có $A > B \Leftrightarrow E > F$ ta nói hai bất đẳng thức $A > B$ và $E > F$ là hai bất đẳng thức tương đương

□ $A > B$ (hoặc $A < B$) là bất đẳng thức ngặt: $A \geq B$ (hoặc $A \leq B$) là bất đẳng thức không ngặt

□ $A \geq B$ là $A > B$ hoặc $A = B$

□ $A \neq B$ cũng là bất đẳng thức

□ Hai bất đẳng thức cùng chiều, hợp thành một dãy không mâu thuẫn gọi là bất đẳng thức kép.

Ví dụ: $A < B < C$

II. TÍNH CHẤT

□ Tính chất 1: (tính chất bắc cầu) $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$

□ Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Hệ quả: $a > b + c \Leftrightarrow a - c > b$

□ Tính chất 3: $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

□ Tính chất 4: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$

□ Tính chất 5: $a > b > 0$ và $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

□ Tính chất 6: $a > b > 0, n$ nguyên dương $\Rightarrow a^n > b^n$

□ Tính chất 7: $a > b > 0, n$ nguyên dương $\Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả: $a, b \geq 0$

$$a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$$

□ Tính chất 8: $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

□ Tính chất 9: $a > 1, m$ và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m > a^n$;

$0 < a < 1, m$ và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m < a^n$.

III. CHỨNG MINH BĐT

Muốn chứng minh một bất đẳng thức, ta phải dựa vào bất đẳng thức đúng đã biết.

Ghi nhớ: $\forall a$

1) $a^2 \geq 0; -a^2 \leq 0$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

2) $|a| \geq a \geq -|a|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

Có hai cách chứng minh bất đẳng thức:

- **Cách 1:** Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh thành một bất đẳng thức tương đương mà ta đã biết là đúng.
- **Cách 2:** Biến đổi tương đương bất đẳng thức đã biết thành bất đẳng thức cần chứng minh.

Sau đây là một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Khi giải một bài toán chứng minh bất đẳng thức, cần phải căn cứ vào đặc thù của bài toán mà chọn phương pháp thích hợp.

Mỗi bài toán có thể được giải bằng các phương pháp khác nhau, cũng có khi phải phối hợp nhiều phương pháp.

Phương pháp 1 (Vận dụng định nghĩa và tính chất của bất đẳng thức): Để chứng minh $A \geq B$, ta cần chứng minh $A - B \geq 0$

Phương pháp 2 (Phương pháp biến đổi tương đương): Để chứng minh $A \geq B$, ta dùng các tính chất của bất đẳng thức, biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh đến một bất đẳng thức đã biết là đúng.

Phương pháp giải 3: (Phương pháp làm trội) Để chứng minh $A \geq B$ nhiều khi ta phải chứng minh $A \geq C$ với C là biểu thức lớn hơn hoặc bằng B .

Từ đó ta có $A \geq B$, hoặc ta chứng minh $D \geq B$ với D là biểu thức nhỏ hơn hay bằng A : $D \leq A$, từ đó ta có $A \geq B$.

Phương pháp giải 4: (Phương pháp chứng minh phản chứng) Để chứng minh $A \geq B$, ta giả sử $A < B$, từ đó lập luận để dẫn đến điều vô lí. Như vậy, ta đã dùng phương pháp chứng minh phản chứng.

Phương pháp giải 5: (Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về phân số) Một số bài toán bất đẳng thức có dạng phân thức thường vận dụng các bài toán cơ bản về phân số.

Ta có hai bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1. Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

b) Nếu $a \geq b$ thì $\frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$

Hướng dẫn giải

a) $a < b \Rightarrow ac < bc \Rightarrow ab + ac < ab + bc \Rightarrow a(b+c) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

b) Chứng minh tương tự.

Bài toán 2. Với $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$; c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Hướng dẫn giải

a) $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-y)^2 + 4xy \geq 4xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$

b) Từ a) ta có $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

c) $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1+1+1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$
 $= 9 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2 \right)$

$$= 9 + \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(x-z)^2}{xz} \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Các bài toán dạng “>,” thường dùng bài toán 1, các bài toán dạng “ $\geq, \leq$ ” thường dùng bài toán 2. Khi dùng đến các bài toán này ta cần phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 6: (*Phương pháp cơ bản về giá trị tuyệt đối*) Đối với một số bài toán bất đẳng thức có chứa giá trị tuyệt đối, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối sau.

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a) $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$

b) $|a - b| \geq |a| - |b|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow b(a - b) \geq 0$

Bài toán 2. Chứng minh rằng nếu $x, y \neq 0$ thì $\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right| \geq 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm y$

Từ đó suy ra, nếu $m, n > 0$, ta có:

1) $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$ 2) $m + \frac{1}{m} \geq 2$.

Dùng biến đổi tương đương, ta dễ dàng chứng minh được các bài toán này.

Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 7: (*Phương pháp vận dụng BĐT liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số*) Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức có thể vận dụng các bất đẳng thức liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số.

Bài toán 1. $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \geq 4xy$

Bài toán 2. $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + yz)$.

Chú ý: Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 8: (*Phương pháp sử dụng các bài toán cơ bản về căn thức*) Khi giải một số bài toán bất đẳng thức có chứa căn thức bậc hai, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về bất đẳng thức chứa căn thức.

Bài toán 1. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. (Bất đẳng thức Cô – si)

Bài toán 2. Chứng minh rằng $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$. (Bất đẳng thức Bu – nhi – a – cop – xki).

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$. (Bất đẳng thức Mìn – cop – xki).

Khi cần dùng đến Bài toán 2 và 3, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Riêng Bài toán 1 (bất đẳng thức Cô – si), chúng ta được phép áp dụng mà không cần phải chứng

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Phương pháp giải 8: (*Phương pháp vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai*) Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức, có khi ta phải vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Cần nhớ: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm

$\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\frac{b}{2a}$

$\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Trường hợp $b = 2b'$ thì $\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' < 0$: phương trình vô nghiệm

$\Delta' = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\frac{b'}{a}$

$\Delta' > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+t} + \frac{z}{t+x} + \frac{t}{x+y} \geq 2$.

Câu 2: Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z) + y(y-z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{x^2+z^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\frac{81}{x^2} - \frac{18}{x}} + 1}$, với $x > 9$.

Câu 4: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5} + \frac{2y}{6y^2+z^2+6} + \frac{4z}{3z^2+4x^2+16} \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 5: Giả sử ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a > 0, b = 3a^2, a+b+c = abc$. Chứng minh rằng: $a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}}$.

Câu 6: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $(a^4+b^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4) = 8$. Chứng minh rằng $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \geq 1$.

Câu 7: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} = 2014$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

Câu 8: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + xz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^3$$

Câu 9: Với x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$.

Câu 10: Cho a, b, c là ba số thực thỏa điều kiện $a+b+c=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = a^2 + b^2 + c^2$.

Câu 11: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$$

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

Câu 13: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3$$

Câu 14: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy+yz+zx} + \frac{386}{x^2+y^2+z^2} > 2015$$

Câu 15: Chứng minh rằng: $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$

Câu 16: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016.$$

Câu 17: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{a^2+1} \geq 2. \text{ Dấu "}" xảy ra khi nào?}$$

Câu 18: Tìm GTNN của $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$ biết $x, y, z > 0, \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Câu 19:

a) Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Câu 20: Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Câu 21: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}} + \frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}} + \frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}} \leq 1$$

Câu 22: Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{z(z+x)} + \frac{y}{x(x+y)} + \frac{z}{y(y+z)}$$

Câu 24: Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$.

Câu 25: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Câu 26: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c}$.

Câu 27: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$.

Câu 28: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Câu 29: Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 30: Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Câu 31: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$

Câu 32: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Câu 33: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

Câu 34: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1}$

Câu 35: Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Câu 36: Cho tam giác ABC có chu vi $2p = a + b + c$ (a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác). Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Câu 37: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Câu 38: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^3}{c+a^2} + \frac{b^3}{a+b^2} + \frac{c^3}{b+c^2}.$$

Câu 39: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$.

Câu 40: Cho a, b, c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca}.$$

Câu 41: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{9a^3 + 3b^2 + c} + \frac{b}{9b^3 + 3c^2 + a} + \frac{c}{9c^3 + 3a^2 + b}$$

Câu 42: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq xyz$$

Câu 43: Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} < 3$.

Câu 44: Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z} = 2$.

Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{64}$.

Câu 45: Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} > 2$, với $a, b, c > 0$

Câu 46: Cho a, b, c là 3 cạnh một tam giác. Chứng minh: $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Câu 47:

a/ Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

b/ Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}$.

Câu 48: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c}$

Câu 49: Cho ba số dương a, b và c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 50: Các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}$$

Câu 51: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện:
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 \end{cases}$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

Câu 52: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P =$

$$\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y}$$

Câu 53: Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = 11\sqrt{9 - x^2} - \sqrt{9x^4 - x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x - y + 2018$.

Câu 54: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:
$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2(a + b + c).$$

Câu 55: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13$.

Câu 56: minh bất đẳng thức
$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \geq 16.$$

Câu 57: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a + c)(b + c) = 4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{a}{b + 3c} + \frac{b}{a + 3c} + \frac{ab}{bc + ca}.$$

Câu 58: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$

Chứng minh rằng $a\sqrt{b^3 + 1} + b\sqrt{c^3 + 1} + c\sqrt{a^3 + 1} \leq 5$

Câu 59: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh
$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Câu 60: Chứng minh rằng:
$$\frac{x}{x^2 - yz + 2019} + \frac{y}{y^2 - zx + 2019} + \frac{z}{z^2 - xy + 2019} \geq \frac{1}{x + y + z}$$

Câu 61: Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh $\sqrt{a} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1 \right) \geq \sqrt{b} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

Câu 62: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$A = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$$

Câu 63: Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

Câu 64: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2+yz} + \frac{y^2}{xz+yz} + \frac{x+2z}{x+z} \geq \frac{5}{2}.$$

Câu 65: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 4(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4)$

Câu 66: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?}$$

Câu 67: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

Câu 68: Cho $x, y, z > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4} + \frac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4} + \frac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4}$$

Câu 69: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2011}$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2011}{2}}.$$

Câu 70: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$$

Câu 71: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = (a+b+c+3) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)$.

Câu 72: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$. Chứng minh rằng:

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

Câu 73: Cho a, b, c là các số thực dương. CMR: $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$

Câu 74: Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n , ta có: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3$.

Câu 75: Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = x^3y + xy^3$.

Câu 76: Chứng minh rằng $(a+b+c) \left[\frac{3a-b}{a^2+ab} + \frac{3b-c}{b^2+bc} + \frac{3c-a}{c^2+ca} \right] \leq 9$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

$$\text{Suy ra } \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2} \leq 18(x+y+z) - 9 \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2} \leq 9$$

Câu 77: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $2\sqrt{y} + \sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 4$

CHUYÊN ĐỀ 12_BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC CÂU TOÁN CỰC TRỊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Bất đẳng thức là hai biểu thức nối với nhau bởi một trong các dấu $>$ (lớn hơn), $<$ (nhỏ hơn), $\geq$ (lớn hơn hoặc bằng), $\leq$ (nhỏ hơn hoặc bằng).

Ta có: $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$$

□ Trong bất đẳng thức $A > B$ (hoặc $A < B, A \geq B, A \leq B$), A gọi là vế trái, B gọi là vế phải của bất đẳng thức.

□ Các bất đẳng thức $A > B$ và $C > D$ gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều. Các bất đẳng thức $A > B$ và $E < F$ gọi là hai bất đẳng thức trái chiều.

□ Nếu ta có $A > B \Rightarrow C > D$ ta nói bất đẳng thức $C > D$ là hệ quả của bất đẳng thức $A > B$.

□ Nếu ta có $A > B \Leftrightarrow E > F$ ta nói hai bất đẳng thức $A > B$ và $E > F$ là hai bất đẳng thức tương đương

□ $A > B$ (hoặc $A < B$) là bất đẳng thức ngặt: $A \geq B$ (hoặc $A \leq B$) là bất đẳng thức không ngặt

□ $A \geq B$ là $A > B$ hoặc $A = B$

□ $A \neq B$ cũng là bất đẳng thức

□ Hai bất đẳng thức cùng chiều, hợp thành một dãy không mâu thuẫn gọi là bất đẳng thức kép.

Ví dụ: $A < B < C$

II. TÍNH CHẤT

□ Tính chất 1: (tính chất bắc cầu) $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$

□ Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Hệ quả: $a > b + c \Leftrightarrow a - c > b$

□ Tính chất 3: $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

□ Tính chất 4: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$

□ Tính chất 5: $a > b > 0$ và $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

□ Tính chất 6: $a > b > 0, n$ nguyên dương $\Rightarrow a^n > b^n$

□ Tính chất 7: $a > b > 0, n$ nguyên dương $\Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả: $a, b \geq 0$

$$a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$$

□ Tính chất 8: $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

□ Tính chất 9: $a > 1, m$ và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m > a^n$;

$0 < a < 1, m$ và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m < a^n$.

III. CHỨNG MINH BĐT

Muốn chứng minh một bất đẳng thức, ta phải dựa vào bất đẳng thức đúng đã biết.

Ghi nhớ: $\forall a$

1) $a^2 \geq 0; -a^2 \leq 0$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

2) $|a| \geq a \geq -|a|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

Có hai cách chứng minh bất đẳng thức:

- *Cách 1:* Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh thành một bất đẳng thức tương đương mà ta đã biết là đúng.
- *Cách 2:* Biến đổi tương đương bất đẳng thức đã biết thành bất đẳng thức cần chứng minh.

Sau đây là một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Khi giải một bài toán chứng minh bất đẳng thức, cần phải căn cứ vào đặc thù của bài toán mà chọn phương pháp thích hợp.

Mỗi bài toán có thể được giải bằng các phương pháp khác nhau, cũng có khi phải phối hợp nhiều phương pháp.

Phương pháp 1 (*Vận dụng định nghĩa và tính chất của bất đẳng thức*): Để chứng minh $A \geq B$, ta cần chứng minh $A - B \geq 0$

Phương pháp 2 (*Phương pháp biến đổi tương đương*): Để chứng minh $A \geq B$, ta dùng các tính chất của bất đẳng thức, biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh đến một bất đẳng thức đã biết là đúng.

Phương pháp giải 3: (*Phương pháp làm trội*) Để chứng minh $A \geq B$ nhiều khi ta phải chứng minh $A \geq C$ với C là biểu thức lớn hơn hoặc bằng B .

Từ đó ta có $A \geq B$, hoặc ta chứng minh $D \geq B$ với D là biểu thức nhỏ hơn hay bằng A : $D \leq A$, từ đó ta có $A \geq B$.

Phương pháp giải 4: (*Phương pháp chứng minh phản chứng*) Để chứng minh $A \geq B$, ta giả sử $A < B$, từ đó lập luận để dẫn đến điều vô lí. Như vậy, ta đã dùng phương pháp chứng minh phản chứng.

Phương pháp giải 5: (*Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về phân số*) Một số bài toán bất đẳng thức có dạng phân thức thường vận dụng các bài toán cơ bản về phân số.

Ta có hai bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1. Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

b) Nếu $a \geq b$ thì $\frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$

Hướng dẫn giải

a) $a < b \Rightarrow ac < bc \Rightarrow ab + ac < ab + bc \Rightarrow a(b+c) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

b) Chứng minh tương tự.

Bài toán 2. Với $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$; c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Hướng dẫn giải

a) $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-y)^2 + 4xy \geq 4xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$

b) Từ a) ta có $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

c) $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1+1+1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$
 $= 9 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2 \right)$

$$= 9 + \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(x-z)^2}{xz} \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Các bài toán dạng “>,” thường dùng bài toán 1, các bài toán dạng “ $\geq, \leq$ ” thường dùng bài toán 2. Khi dùng đến các bài toán này ta cần phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 6: (*Phương pháp cơ bản về giá trị tuyệt đối*) Đối với một số bài toán bất đẳng thức có chứa giá trị tuyệt đối, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối sau.

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a) $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$

b) $|a - b| \geq |a| - |b|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow b(a - b) \geq 0$

Bài toán 2. Chứng minh rằng nếu $x, y \neq 0$ thì $\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right| \geq 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm y$

Từ đó suy ra, nếu $m, n > 0$, ta có:

1) $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$ 2) $m + \frac{1}{m} \geq 2$.

Dùng biến đổi tương đương, ta dễ dàng chứng minh được các bài toán này.

Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 7: (*Phương pháp vận dụng BĐT liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số*) Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức có thể vận dụng các bất đẳng thức liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số.

Bài toán 1. $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \geq 4xy$

Bài toán 2. $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + yz)$.

Chú ý: Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 8: (*Phương pháp sử dụng các bài toán cơ bản về căn thức*) Khi giải một số bài toán bất đẳng thức có chứa căn thức bậc hai, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về bất đẳng thức chứa căn thức.

Bài toán 1. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. (Bất đẳng thức Cô – si)

Bài toán 2. Chứng minh rằng $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$. (Bất đẳng thức Bu – nhi – a – cop – xki).

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$. (Bất đẳng thức Mìn – cop – xki).

Khi cần dùng đến Bài toán 2 và 3, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Riêng Bài toán 1 (bất đẳng thức Cô – si), chúng ta được phép áp dụng mà không cần phải chứng

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Phương pháp giải 8: (*Phương pháp vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai*) Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức, có khi ta phải vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Cần nhớ: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm

$\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\frac{b}{2a}$

$\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Trường hợp $b = 2b'$ thì $\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' < 0$: phương trình vô nghiệm

$\Delta' = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\frac{b'}{a}$

$\Delta' > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+t} + \frac{z}{t+x} + \frac{t}{x+y} \geq 2$.

Lời giải

Đặt:

$$A = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+t} + \frac{z}{t+x} + \frac{t}{x+y}$$

$$M = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+t} + \frac{t}{t+x}$$

$$N = \frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{t}{z+t} + \frac{x}{t+x}$$

$$\Rightarrow M + N = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+t} + \frac{t}{t+x} + \frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{t}{z+t} + \frac{x}{t+x} = 4.$$

Ta có:

$$N + A = \frac{y+t}{x+y} + \frac{x+z}{y+z} + \frac{y+t}{z+t} + \frac{x+z}{t+x}$$

$$= (y+t) \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+t} \right) + (x+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{t+x} \right) \geq \frac{4(y+t)}{x+y+z+t} + \frac{4(x+z)}{x+y+z+t} = 4.$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $A + M \geq 4$.

$$\Rightarrow A + M + A + N \geq 8 \Rightarrow A \geq 2.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t > 0$.

Câu 2: Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z) + y(y-z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{x^3}{x^2+z^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+4}{x+y}.$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi $\frac{x^3}{x^2+z^2} = x - \frac{xz^2}{x^2+z^2} \geq x - \frac{xz^2}{2xz} = x - \frac{z}{2}.$

Tương tự $\frac{y^3}{y^2+z^2} \geq y - \frac{z}{2}$. Suy ra $P \geq x + y - z + \frac{x^2 + y^2 + 4}{x + y}$.

Theo gt $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \Rightarrow P \geq x + y + \frac{4}{x + y} \geq 4$.

Vậy $P_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\frac{81}{x^2} - \frac{18}{x}} + 1}$, với $x > 9$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} = \sqrt{x-9} + 3$; $\sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = |\sqrt{x-9} - 3|$

Và $\sqrt{\frac{81}{x^2} - \frac{18}{x}} + 1 = \left| \frac{9}{x} - 1 \right| = \frac{x-9}{x} \Rightarrow A = x \cdot \frac{\sqrt{x-9} + 3 + |\sqrt{x-9} - 3|}{x-9}$

Khi $x \geq 18$ thì $A = \frac{2x}{\sqrt{x-9}} = 2\sqrt{x-9} + \frac{18}{\sqrt{x-9}} \geq 12$, dấu bằng xảy ra khi $x = 18$ (1).

Khi $9 < x < 18$ thì $A = \frac{6x}{x-9} = 6 + \frac{54}{x-9} > 6 + \frac{54}{9} = 12$ (2)

Suy ra $A_{\min} = 12$.

Câu 4: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh

$$\frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} + \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} + \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$$2x^2 + y^2 + 5 = (x^2 + y^2) + (x^2 + 1) + 4 \geq 2xy + 2x + 4 = 2(xy + x + 2),$$

$$6y^2 + z^2 + 6 = (4y^2 + z^2) + 2(y^2 + 1) + 4 \geq 4yz + 4y + 4 = 4(yz + y + 1),$$

$$3z^2 + 4x^2 + 16 = (z^2 + 4x^2) + 2(z^2 + 4) + 8 \geq 4zx + 8z + 8 = 4(zx + 2z + 2).$$

Suy ra $\frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} \leq \frac{x}{2(xy + x + 2)}$, $\frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} \leq \frac{y}{2(yz + y + 1)}$,

$$\frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{z}{zx + 2z + 2}.$$

Cộng các bất đẳng thức theo vế, ta được

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{x}{2(xy + x + 2)} + \frac{y}{2(yz + y + 1)} + \frac{z}{zx + 2z + 2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{2z}{zx + 2z + 2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{xyz + xy + x} + \frac{2z}{zx + 2z + xyz} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{xy + x + 2} + \frac{2}{x + xy + 2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 5: Giả sử ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a > 0, b = 3a^2, a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}}.$$

Lời giải

$$\text{Ta thấy } 3a^2 = bc \Rightarrow 3a^3 = abc \Rightarrow a^3 = \frac{abc}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$3a^2 = bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{3a^3-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 \leq \frac{(3a^3-a)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 12a^2 \leq (3a^3-a)^2$$

$$\Rightarrow a^2(3a^2-1)^2 \geq 12a^2$$

$$\Rightarrow (3a^2-1)^2 - (2\sqrt{3})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (3a^2-1+2\sqrt{3})(3a^2-1-2\sqrt{3}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^2-1-2\sqrt{3} \geq 0 \\ 3a^2-1+2\sqrt{3} \geq 0 \\ 3a^2-1-2\sqrt{3} \leq 0 \\ 3a^2-1+2\sqrt{3} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq \frac{1-2\sqrt{3}}{3} \\ a^2 \geq \frac{1+2\sqrt{3}}{3} \\ a^2 \leq \frac{1-2\sqrt{3}}{3} \\ a^2 \leq \frac{1+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 \geq \frac{1+2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}} \text{ (Do } a > 0 \text{)}.$$

Câu 6: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $(a^4+b^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4) = 8$. Chứng minh rằng

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \geq 1.$$

Lời giải

$$+ \text{ Ta chứng minh kết quả } 2(a^2-ab+b^2)^2 \geq a^4+b^4 \text{ (1).}$$

$$\text{Thật vậy, (1) } \Leftrightarrow 2(a^4+b^4+a^2b^2+2a^2b^2-2ab(a^2+b^2)) \geq a^4+b^4$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab)^2 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^4 \geq 0, \text{ bất đẳng thức đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = b$$

$$+ \text{ Tương tự có (2): } 2(b^2 - bc + c^2)^2 \geq b^4 + c^4, (3): 2(c^2 - ca + a^2)^2 \geq c^4 + a^4.$$

+ Thấy các vế của (1), (2), (3) đều không âm, nhân theo vế các bất đẳng thức này ta được

$$8(a^2 - ab + b^2)^2 (b^2 - bc + c^2)^2 (c^2 - ca + a^2)^2 \geq (a^4 + b^4)(b^4 + c^4)(c^4 + a^4) = 8$$

$$\text{Hay } (a^2 - ab + b^2)^2 (b^2 - bc + c^2)^2 (c^2 - ca + a^2)^2 \geq 1 (*).$$

Do $a^2 - ab + b^2, b^2 - bc + c^2, c^2 - ca + a^2 \geq 0$ nên từ (*) suy ra

$$(a^2 - ab + b^2)^2 (b^2 - bc + c^2)^2 (c^2 - ca + a^2)^2 \geq 1, \text{ có đpcm.}$$

Câu 7: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2014$. Tìm giá trị nhỏ

$$\text{nhất của biểu thức } T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x^2 + y^2}; b = \sqrt{y^2 + z^2}; c = \sqrt{z^2 + x^2} \quad (a; b; c > 0)$$

$$\Rightarrow a + b + c = 2014$$

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow a^2 = x^2 + y^2$$

$$b = \sqrt{y^2 + z^2} \Rightarrow b^2 = y^2 + z^2$$

$$c = \sqrt{z^2 + x^2} \Rightarrow c^2 = z^2 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}; y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}; z^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)} = b\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{x^2}{b\sqrt{2}}$$

$$z + x \leq \sqrt{2(z^2 + x^2)} = c\sqrt{2} \Rightarrow \frac{y^2}{z+x} \geq \frac{y^2}{c\sqrt{2}}$$

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{z^2}{a\sqrt{2}}$$

$$T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x^2}{b\sqrt{2}} + \frac{y^2}{c\sqrt{2}} + \frac{z^2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{c} + \frac{z^2}{a} \right)$$

$$T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c} + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a} \right)$$

$$T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} - a - b - c \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a; \frac{b^2}{a} + a \geq 2b; \frac{c^2}{a} + a \geq 2c$$

$$\frac{a^2}{c} + c \geq 2a; \frac{b^2}{c} + c \geq 2b; \frac{c^2}{b} + b \geq 2c$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} &\geq 4(a+b+c) - 2(a+b+c) = 2(a+b+c) = 2 \cdot 2014 = 4028 \\ \Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} - a - b - c &\geq 2(a+b+c) - (a+b+c) = a+b+c = 2014 \\ \Rightarrow T &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2014 = \frac{1007}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{2014}{3}$

$$\text{Vậy } \min T = \frac{1007}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2014}{3\sqrt{2}}$$

Câu 8: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + xz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^3$$

Lời giải

$$1+x^2 = xy + yz + xz + x^2 = (x+y)(x+z)$$

$$1+y^2 = xy + yz + xz + y^2 = (x+y)(y+z)$$

$$1+z^2 = xy + yz + xz + z^2 = (z+y)(x+z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} = \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\text{Ta có: } \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^2 \leq (x+y+z) \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \right)$$

$$= (x+y+z) \left[\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} + \frac{z}{(z+y)(x+z)} \right]$$

$$= \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^2$$

Do đó:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^3 = \frac{4(x+y+z)}{3(x+y)(y+z)(z+x)} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right)$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} \right)$$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{x+z} + \frac{z}{y+z} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 9: Với x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$.

Lời giải

Đặt $a = x + y$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{a^2}{4} \text{ hay } \left(\frac{5}{2}a + 1 \right)^2 \geq 2$$

Từ đó, ta có $a \geq \frac{2}{5}(\sqrt{2} - 1)$. Suy ra

$$P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy = 17a^2 - 18xy \geq 17a^2 - \frac{9}{2}a^2 \geq 2(\sqrt{2} - 1)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{\sqrt{2} - 1}{5}$.

Câu 10: Cho a, b, c là ba số thực thỏa điều kiện $a + b + c = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

$$M = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 100 - 2(ab + bc + ca)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}; \quad bc \leq \frac{b^2 + 2bc + c^2}{4}; \quad ca \leq \frac{c^2 + 2ca + a^2}{4}$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow M \geq ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{100 - M}{2}$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{100}{3}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{10}{3}$$

$$\text{Vậy } \min M = \frac{100}{3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{10}{3}$$

Câu 11: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{1+y^2} + \frac{xy^2}{1+y^2} = x$; $\frac{y}{1+z^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} = y$; $\frac{z}{1+x^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} = z$

$$\Rightarrow S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} = (x+y+z) - \left(\frac{xy^2}{1+y^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} \right)$$

$$\Rightarrow S = 3 - \left(\frac{xy^2}{1+y^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} \right)$$

Ta có: $\frac{xy^2}{1+y^2} \leq \frac{xy^2}{2y} = \frac{xy}{2}$; $\frac{yz^2}{1+z^2} \leq \frac{yz^2}{2z} = \frac{yz}{2}$; $\frac{zx^2}{1+x^2} \leq \frac{zx^2}{2x} = \frac{zx}{2}$

$$\Rightarrow \frac{xy^2}{1+y^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} \leq \frac{xy + yz + zx}{2}$$

$$\Rightarrow S \geq 3 - \frac{xy + yz + zx}{2}$$

Do $(x+y+z)^2 \geq 2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx \leq 3$

$$\Rightarrow S \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy $\min S = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

Lời giải

$$y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{1-x} - 2 + \frac{1}{x} - 1 + 3 = \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 3$$

$$\text{Vì } 0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1-x} > 0 \\ \frac{1-x}{x} > 0 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow y \geq 2\sqrt{2} + 3$$

Dấu “=” xảy ra khi: $\frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2} \text{ (nhận) hoặc } x = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại)}$$

Vậy $\min y = 2\sqrt{2} + 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$

Câu 13: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 2 số dương, ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2; \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 6 \\
&\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + 3 \geq 6 + 3 \\
&\Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1\right) \geq 9 \\
&\Rightarrow a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \\
&\Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \geq 9 \\
&\Rightarrow \frac{9}{a + b + c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \\
&\Rightarrow a + b + c \geq 3
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 2 số dương, ta có:

$$1 + b^2 \geq 2b \Rightarrow \frac{a}{1 + b^2} = a - \frac{ab^2}{1 + b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{b}{1 + c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \quad \frac{c}{1 + a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} + \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \geq a + b + c \geq 3$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$

Câu 14: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} > 2015$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 2 số dương, ta có:

$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$$

$$(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P = \frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} = 386\left(\frac{1}{2xy + 2yz + 2zx} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right) + \frac{157}{xy + yz + zx}$$

$$\geq 386 \cdot \frac{4}{2xy + 2yz + 2zx + x^2 + y^2 + z^2} + \frac{157}{xy + yz + zx}$$

$$= \frac{1544}{(x + y + z)^2} + \frac{157}{xy + yz + zx} = 1544 + \frac{157}{xy + yz + zx} \geq 1544 + \frac{157}{\frac{1}{3}} = 2015$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \\ 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ (không xảy ra)}$$

ra)

Vậy $P > 2015$

Câu 15: Chứng minh rằng: $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$

Lời giải

Đặt $S = \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}}$, ta có:

$$2S = \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2014}{2^{2012}} + \frac{2015}{2^{2013}}$$

$$\Rightarrow 2S - S = \frac{3}{2} + \frac{4-3}{2^2} + \frac{5-4}{2^3} + \dots + \frac{2015-2014}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}}$$

$$\Rightarrow S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}}\right) - \frac{2015}{2^{2014}}$$

$$\text{Mà } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2014}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2013}}$$

$$\text{Do đó: } S = 2 - \frac{1}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}} < 2$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$$

Câu 16: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 12 \geq (a+b)^3 + 4ab \geq (2\sqrt{ab})^3 + 4ab$$

Đặt $t = \sqrt{ab}$ ($t > 0$), ta có:

$$12 \geq 8t^3 + 4t^2 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 3t + 3) \leq 0$$

Do $2t^2 + 3t + 3 > 0$ với mọi t

$$\text{Nên } t-1 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < ab \leq 1$$

Chứng minh được: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

$$\text{Thật vậy, BĐT } \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}}\right) \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \leq 0. \text{ Do } 0 < ab \leq 1 \text{ nên BĐT này đúng}$$

Tiếp theo ta sẽ CM $\frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2015ab \leq 2016, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{ab}, 0 < t \leq 1$ ta được $\frac{2}{1+t} + 2015t^2 \leq 2016$

$$2015t^3 + 2015t^2 - 2016t - 2014 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2015t^2 + 4030t + 2014) \leq 0. \text{ BĐT này đúng } \forall t: 0 < t \leq 1$$

Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

Câu 17: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{a^2+1} \geq 2$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

Lời giải

$$a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{a^2+1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow a(b^2+1) + b(c^2+1) + c(a^2+1) + 2ab\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} + 2bc\sqrt{(c^2+1)(a^2+1)} + 2ca\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)} \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} = \sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1} \geq \sqrt{a^2b^2 + 2ab + 1} = ab + 1$$

Đặt

$$S = a(b^2+1) + b(c^2+1) + c(a^2+1) + 2ab\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} + 2bc\sqrt{(c^2+1)(a^2+1)} + 2ca\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab(bc+1) + 2bc(ca+1) + 2ca(ab+1) \\ &= (ab+bc+ca)^2 + (a+b+c)^2 \\ &\geq (ab+bc+ca)^2 + 3(ab+bc+ca) = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = b = c > 0 \\ ab+1 = bc+1 = ca+1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ ab+bc+ca = 1 \end{cases}$$

Câu 18: Tìm GTNN của $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$ biết $x, y, z > 0, \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Lời giải

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}; \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}; \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx} \text{ nên } \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Min } A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Câu 19:

a) Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (1)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a.b.c}} \quad (2)$$

(1) nhân (2) vế theo vế, ta được $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

b) $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$

$$P = 1 - \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{1}{y+1} + 1 - \frac{1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

Ta có: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$ (theo câu a)

$$\text{Nên } \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \frac{9}{x+1+y+1+z+1} = \frac{9}{4}$$

$$P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Vậy GTLN của P là $\frac{3}{4}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Câu 20: Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Lời giải

$$\text{Áp dụng Côsi: } \sqrt{\frac{b+c}{a}} \cdot 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b+c}{a} + 1 \right) = \frac{a+b+c}{2a}$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c} \quad (\text{dấu "=" khi } a=b+c)$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{2b}{a+b+c} \quad (\text{dấu "=" khi } b=c+a)$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c} \quad (\text{dấu "=" khi } c=a+b)$$

$$\text{Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên, ta được: } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" không xảy ra} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Câu 21: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}} + \frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}} + \frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}} \leq 1$$

Lời giải

Từ $(x - \sqrt{yz})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz}$ (*) Dấu “=” $\Leftrightarrow x^2 = yz$

Chỉ ra : $3x + yz = (x + y + z)x + yz = x^2 + yz + x(y + z) \geq 2x\sqrt{yz} + x(y + z)$

Suy ra : $\sqrt{3x + yz} \geq \sqrt{2x\sqrt{yz} + x(y + z)} = \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z})$ (Áp dụng (*))

$$x + \sqrt{3x + yz} \geq \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \Rightarrow \frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} \leq \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} \quad (2); \quad \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow \frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Câu 22: Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra:

$$+) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{x} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{y} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\sqrt{xy} \quad (1)$$

$$+) x\sqrt{x} \leq x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y\sqrt{y} \leq y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \quad (2)$$

Lại có:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} \leq xy + \frac{1}{4} \\ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \end{cases} \quad (3) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có:

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}(x + y) \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 + x + y + xy) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } VT = \frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 + x + y + xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x = y = \frac{1}{2}$

Câu 23: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{z(z+x)} + \frac{y}{x(x+y)} + \frac{z}{y(y+z)}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$\frac{2x^2y}{z+x} + \frac{y(z+x)}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2x^2y}{z+x} \cdot \frac{y(z+x)}{2}} = 2xy(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{2y^2z}{x+y} + \frac{z(x+y)}{2} \geq 2yz(2)$$

$$\frac{2z^2x}{y+z} + \frac{x(y+z)}{2} \geq 2zx(3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3), ta có:

$$\frac{2x^2y}{z+x} + \frac{2y^2z}{x+y} + \frac{2z^2x}{y+z} + xy + yz + zx \geq 2(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2y}{z+x} + \frac{2y^2z}{x+y} + \frac{2z^2x}{y+z} \geq xy + yz + zx$$

Chia cả hai vế của BĐT cho $2xyz$, ta có:

$$P = \frac{x}{z(z+x)} + \frac{y}{x(x+y)} + \frac{z}{y(y+z)} \geq \frac{xy + yz + zx}{2xyz} = 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{3}{2}$

Vậy GTNN của P là 1 khi $x = y = z = \frac{3}{2}$.

Câu 24: Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$a^5 + \frac{1}{a} \geq 2a^2$$

$$b^5 + \frac{1}{b} \geq 2b^2$$

$$c^5 + \frac{1}{c} \geq 2c^2$$

$$\text{Suy ra } a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Mặt khác } a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b; c^2 + 1 \geq 2c$$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a + 2b + 2c - 3 = 3$$

$$\text{Vậy } a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6 \text{ (đpcm).}$$

Câu 25: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Lời giải

Vì $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ ta có:

$$\begin{aligned}
& (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \\
&= x^2 \left(2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(2 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) \\
&= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) (*)
\end{aligned}$$

Giả sử $a \leq b \leq c$ thì $c^2 - a^2 \geq 0; c^2 - b^2 \geq 0$. Với cạnh c lớn nhất, $\angle ACB$ nhọn (gt) do vậy kẻ đường cao BH ta có $c^2 = BH^2 + HA^2 \leq BC^2 + CA^2 = a^2 + b^2$ từ đó suy ra biểu thức (*) là không âm suy ra điều phải chứng minh.

Câu 26: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c}$.

Lời giải

Từ gt: $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$ và $a, b, c > 0$

Chia cả hai vế cho $abc > 0 \Rightarrow \frac{2}{c} + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = 7$

đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2z + 6x + 2y = 7 \end{cases}$

Khi đó $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c} = \frac{4}{2x+y} + \frac{9}{4x+z} + \frac{4}{y+z}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C &= \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - (2x + y + 4x + z + y + z) \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}} - \sqrt{x+2y} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}} - \sqrt{4x+z} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}} - \sqrt{y+z} \right)^2 + 17 \geq 17
\end{aligned}$$

Khi $x = \frac{1}{2}, y = z = 1$ thì $C = 7$

Vậy GTNN của C là 7 khi $a=2; b=1; c=1$

Câu 27: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{1}{(x+y)^3 - 3xy(x+y)} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{1-3xy} + \frac{1}{xy} = \frac{1-2xy}{xy(1-3xy)}$.

Theo Côsi: $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$.

Gọi B_0 là một giá trị của B , khi đó, tồn tại x, y để: $B_0 = \frac{1-2xy}{xy(1-3xy)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3B_0(xy)^2 - (2 + B_0)xy + 1 = 0 \quad (1)$$

Để tồn tại x, y thì (1) phải có nghiệm $xy \Leftrightarrow \Delta = B_0^2 - 8B_0 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B_0 \geq 4 + 2\sqrt{3} \\ B_0 \leq 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$

Đề ý rằng với giả thiết Câu toán thì $B > 0$. Do đó ta có: $B_0 \geq 4 + 2\sqrt{3}$.

$$\text{Với } B_0 = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow xy = \frac{2+B_0}{6B_0} = \frac{3+\sqrt{3}}{6(2+\sqrt{3})} \Rightarrow x(1-x) = \frac{3+\sqrt{3}}{6(2+\sqrt{3})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3+\sqrt{3}}{6(2+\sqrt{3})} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

$$\text{Vậy, } B_{\min} = 4 + 2\sqrt{3}, \text{ đạt được khi } x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2} \text{ hoặc}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

Câu 28: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \text{ ta có } M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a}$$

$$\text{Vì } a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \text{ nên } \frac{3a}{4} \geq \frac{3}{2};$$

$$\text{Ta có } \frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Do đó } M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}; M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi

$$\Rightarrow C = \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - (2x + y + 4x + z + y + z).$$

Câu 29: Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra:

$$+) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{x} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{y} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\sqrt{xy} \quad (1)$$

$$+) x\sqrt{x} \leq x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y\sqrt{y} \leq y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \quad (2)$$

Lại có:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} \leq xy + \frac{1}{4} \\ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(xy + \frac{1}{4}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{xy} \leq \frac{\sqrt{2}}{6} (x+y) \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có:

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}}{3}(1+x+y+xy) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } VT = \frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{1+x+y+xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (đpcm)}$$

Câu 30: Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 &= 0. \\ \Leftrightarrow (x+y)^2 + 7(x+y) + 10 &= -y^2 \\ \Leftrightarrow (x+y+2)(x+y+5) &= -y^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow -4 \leq x+y+1 &\leq -1 \end{aligned}$$

$$* x+y+1 = -4 \text{ khi } x = -5; y = 0$$

$$* x+y+1 = -1 \text{ khi } x = -2; y = 0$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = -4 \text{ khi } x = -5; y = 0$$

$$A_{\max} = -1 \text{ khi } x = -2; y = 0$$

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

Câu 31: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$

Lời giải

$$\text{Vì } a, b, c > 0 \text{ nên } \frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}; \quad \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad (1)$$

$$* \text{ Ta có: } \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$$

Vì $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{a+(b+c)}{2} \geq \sqrt{a(b+c)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} \leq \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2b}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{b}{a+c}}; \quad \frac{2c}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{c}{b+a}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Dấu '=' xảy ra khi $a = b + c$; $b = c + a$; $c = a + b$
tức là $a = b = c$ (vô lý).

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2 \quad (2)$$

Từ (1) (2) ta có đpcm.

Câu 32: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{4x+3}{x^2+1} = -1 + \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$$

$$A = -1 + \frac{(x+2)^2}{x^2+1} \geq -1$$

$$A = \frac{4x+3}{x^2+1} \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

Vậy $A_{\min} = -1$ khi $x = -2$

Câu 33: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cô si

$$\text{Ta có: } \frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1 - \frac{b+ab}{2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b+1}{c^2+1} \geq b+1 - \frac{c+bc}{2} \quad (2)$$

$$\text{và } \frac{c+1}{a^2+1} \geq c+1 - \frac{a+ca}{2} \quad (3)$$

Từ (1); (2) và (3) suy ra:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1} = \frac{(2017x^2 + 2017) - (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1}$$

$$\text{hay } 3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = 9$$

$$= \frac{2017(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} = 2017 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \quad (*)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + 3 - \frac{9}{6} = 3$$

$$\text{Vậy } \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a = b = c = 1$$

Câu 34: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1}$

Lời giải

Ta có:

$$\text{Vì } \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0 \text{ nên từ (*)} \Rightarrow Q \leq 2017.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{Vậy } \max Q = 2017 \Leftrightarrow x=1$$

Câu 35: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương (gt) nên ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{b+c+a} \quad (2)$$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b} \quad (3)$$

$$\text{Cộng từng vế (1), (2) và (3), ta có: } 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Câu 36: Cho tam giác ABC có chu vi $2p = a + b + c$ (a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác). Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Lời giải

$$\text{Chỉ ra được: } p-a = \frac{b+c-a}{2} > 0; p-b > 0; p-c > 0$$

Áp dụng BĐT Cô si ta có:

$$[(p-a) + (p-b)] \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \right) \geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)} \cdot \frac{2}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} = 4$$

$$\text{Suy được: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{4}{c}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}; \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}$$

$$\text{Suy được: } 2 \cdot \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) \geq 4 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Suy được đpcm và

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 37: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+c \\ b=c+a \\ c=a+b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0 \text{ (Trái với giả thiết)}$$

Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.

Câu 38: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^3}{c+a^2} + \frac{b^3}{a+b^2} + \frac{c^3}{b+c^2}.$$

Lời giải

Cách 1: Theo đề : $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

$$\frac{a^3}{c+a^2} = \frac{(a^3+ac)-ac}{c+a^2} = a - \frac{ac}{c+a^2}$$

$$c+a^2 \geq 2a\sqrt{c} \Rightarrow \frac{ac}{c+a^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{c} \leq \frac{c+1}{4}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^3}{c+a^2} \geq a - \frac{c+1}{4}.$$

$$\text{Tương tự : } \frac{b^3}{a+b^2} \geq b - \frac{a+1}{4}, \frac{c^3}{b+c^2} \geq c - \frac{b+1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } A \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - \frac{3}{4}$$

$$\text{Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow (a+b+c)3 \geq 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

$$\text{Suy ra } A \geq \frac{3}{2}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a=b=c=1.$$

$$\text{Vậy min } A = \frac{3}{2} \text{ khi } a=b=c=1.$$

Cách 2 : Ta có: $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, \text{ khi đó: } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z=3 \end{cases}.$$

Biểu thức A được viết lại: $A = \frac{x}{y(x+y^2)} + \frac{y}{z(y+z^2)} + \frac{z}{x(z+x^2)}$

Ta có: $\frac{x}{y(x+y^2)} = \frac{(x+y^2)-y^2}{y(x+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x+y^2}$;

mà $x+y^2 \geq 2y\sqrt{x} \Rightarrow \frac{y}{x+y^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nên $\frac{x}{y(x+y^2)} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

mà $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ nên $\frac{x}{y(x+y^2)} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

(dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$)

Tương tự: $\frac{y}{z(y+z^2)} \geq \frac{1}{z} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{y}\right)$, $\frac{z}{x(z+x^2)} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{z}\right)$

Suy ra $A = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4}$.

Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$.

$\Leftrightarrow 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$ (vì $x+y+z=3$).

Do đó $A \geq \frac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = 1$.

Vậy $\min A = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

Câu 39: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$.

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - b^2 - c^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1 \Rightarrow 1 + a \geq 0$

Tương tự:

$\Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc \geq 0$ (1)

Mặt khác: $(1+a+b+c)^2 = (1+a)^2 + (b+c)^2 + 2(1+a)(b+c)$

$= 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ab + 2bc$

$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ab + 2bc$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + ac + bc)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + ac + bc = \frac{1}{2} (1 + a + b + c)^2 \geq 0$ (2)

Cộng (1) và (2) về theo về ta được:

$abc + a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ab + 2bc \geq 0$

$\Leftrightarrow abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$

Câu 40: Cho a, b, c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca}$.

Lời giải

$$P = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} + \frac{2ab}{c^2+ab} + \frac{2bc}{a^2+bc} + \frac{2ac}{b^2+ac}$$

$$\text{Mà } \frac{a^2}{2bc} = \frac{a^2+bc}{2bc} - \frac{1}{2}; \frac{b^2}{2ac} = \frac{b^2+ac}{2ac} - \frac{1}{2}; \frac{c^2}{2ab} = \frac{c^2+ab}{2ab} - \frac{1}{2} \text{ nên}$$

Với các số dương x, y ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ luôn đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$x = y$.

Áp dụng ta có:

$$P = \left(\frac{c^2+ab}{2ab} + \frac{2ab}{c^2+ab} \right) + \left(\frac{a^2+bc}{2bc} + \frac{2bc}{a^2+bc} \right) + \left(\frac{b^2+ac}{2ac} + \frac{2ac}{b^2+ac} \right) - \frac{3}{2} \geq 2+2+2 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Kết luận: giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ca}$ bằng $\frac{9}{2}$ khi $a = b = c$

Câu 41: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{9a^3+3b^2+c} + \frac{b}{9b^3+3c^2+a} + \frac{c}{9c^3+3a^2+b}$$

Lời giải

Chứng minh:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2, \forall a, b, c, x, y, z \in R. (1)$$

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (a^2z^2 - 2acxz + c^2z^2) + (b^2y^2 - 2bcyz + c^2z^2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (by-cz)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} ay = bx \\ az = cx \\ by = cz \end{cases}$$

Áp dụng BĐT (1) ta có: $(9a^3+3b^2+c)\left(\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c\right) \geq (a+b+c)^2 = 1$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow 9a^3+3b^2+c \geq \frac{1}{\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c} \Rightarrow \frac{a}{9a^3+3b^2+c} \leq a\left(\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c\right)$$

$$\text{Tương tự có: } \frac{b}{9b^3+3c^2+a} \leq b\left(\frac{1}{9b}+\frac{1}{3}+a\right); \frac{c}{9c^3+3a^2+b} \leq c\left(\frac{1}{9c}+\frac{1}{3}+b\right)$$

$$\Rightarrow P \leq 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{a+b+c}{3} + (ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{(a+b+c)^2}{3} = 1. \text{ Do } ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Câu 42: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$$

Lời giải

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$$

Từ Gt suy ra:
$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1.$$

Nên ta có:
$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow y = z$$

Vậy
$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Tương tự ta có
$$\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z}\right); \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}\right)$$

Vậy ta có
$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow x = y = z$$

Ta có
$$(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \dots = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \geq 0$$

Nên
$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow (xyz)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow 3\frac{xy+yz+zx}{xyz} \leq xyz \Rightarrow 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq xyz$$

Vậy
$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz; "=" \Leftrightarrow x = y = z$$

Câu 43: Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{(n-1)}\sqrt{n}}}}} < 3$.

Lời giải

Với mỗi số nguyên dương k ta có $k = \sqrt{k^2} = \sqrt{1+(k^2-1)} = \sqrt{1+(k-1)(k+1)}$.

Sử dụng đẳng thức trên liên tiếp với $k = 3, 4, \dots, n$ ta được

$$3 = \sqrt{1+2.4} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3.5}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4.6}}} = \dots$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots\sqrt{1+(n-1)(n+1)}}}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}} > \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{(n-1)}\sqrt{n}}}}}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 44: Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z} = 2$.

Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{64}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+2x} = 1 - \frac{1}{1+2y} + 1 - \frac{1}{1+2z} = \frac{2y}{1+2y} + \frac{2z}{1+2z} \geq 2\sqrt{\frac{4yz}{(1+2y)(1+2z)}}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{1+2y} \geq 2\sqrt{\frac{4xz}{(1+2x)(1+2z)}}, \frac{1}{1+2z} \geq 2\sqrt{\frac{4xy}{(1+2x)(1+2y)}}$$

$$\frac{1}{1+2x} \cdot \frac{1}{1+2y} \cdot \frac{1}{1+2z} \geq 8 \cdot \sqrt{\frac{64x^2y^2z^2}{(1+2x)^2(1+2y)^2(1+2z)^2}}$$

$$\text{Khi đó: } \Leftrightarrow \frac{1}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)} \geq 8 \cdot \frac{8xyz}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 64xyz$$

$$\Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{64}$$

Câu 45: Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} > 2$, với $a, b, c > 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{b+c+a}{2} \geq \sqrt{(b+c)a} \Leftrightarrow \frac{b+c+a}{2a} \geq \frac{\sqrt{(b+c)a}}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c+a}{2a} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{2b}{a+b+c}, \sqrt{\frac{c}{b+a}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} \geq \frac{2(a+b+c)}{(a+b+c)} = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $b+c=a, c+a=b, a+b=c$ (Điều này không có)

$$\text{Vậy } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} > 2$$

Câu 46: Cho a, b, c là 3 cạnh một tam giác. Chứng minh: $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Lời giải

$$\text{Với } x > 0, y > 0 \text{ ta có } (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \quad (I)$$

a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên $a+b-c > 0, a+c-b > 0, c+b-a > 0$,

Áp dụng bất(I) với các số $x = a+b-c, y = a+c-b$ dương ta có:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} \geq \frac{4}{a+b-c+a+c-b} = \frac{2}{a}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{b+a-c} + \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{c+b-a+a+b-c} = \frac{2}{b}$$

$$\frac{1}{c+b-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{4}{c+b-a+c+a-b} = \frac{2}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ (đpcm)}$$

Câu 47:

a/ Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

b/ Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2y^2 + 1 + 1 + \frac{1}{x^2y^2} = \frac{x^4y^4 + 2x^2y^2 + 1}{x^2y^2} \\ &= \frac{(x^2y^2 + 1)^2}{x^2y^2} = \left(\frac{x^2y^2 + 1}{xy}\right)^2 = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } xy + \frac{1}{xy} = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy}$$

$$* \text{ Ta có: } xy + \frac{1}{16xy} \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{16xy}} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$* \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{16xy} \geq \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{15}{16xy} \geq \frac{15}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy} \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\text{Vậy } M = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 \geq \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{16xy} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{4} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \quad (\text{Vi } x, y > 0)$$

$$\text{Vậy min } M = \frac{289}{16} \text{ tại } x = y = \frac{1}{2}$$

b) Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (với a, b > 0)

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} &= \frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z}\right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)} + \frac{1}{(x+y)+(y+z)}\right] \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right)$$

Tương tự: $\frac{1}{3x+2y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right)$

$$\frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right)$$

cộng vế theo vế, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x+y} + \frac{4}{x+z} + \frac{4}{y+z} \right) \\ &\leq \frac{4}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Câu 48: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c}$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=y+z \\ 2b=z+x \\ 2c=x+y \end{cases}$$

Ta có

$$S = \frac{y+z}{2x} + \frac{9(z+x)}{2y} + \frac{16(x+y)}{2z} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{9x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{16x}{z} + \frac{9z}{y} + \frac{16y}{z} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot (2.3 + 2.4 + 2.3.4) = 19$$

Giá trị nhỏ nhất của S là 19. Đạt được khi và chỉ khi $a = \frac{7}{8}; b = \frac{5}{8}; c = \frac{1}{2}$

Câu 49: Cho ba số dương a, b và c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải

Ta có: $a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2ab + 2b + 2$

Tương tự: $b^2 + 2c^2 + 3 \geq 2bc + 2c + 2, c^2 + 2a^2 + 3 \geq 2ac + 2a + 2$

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ac+a+1} \right)$$

Suy ra: $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{b} + a + 1} \right) = \frac{1}{2}.$

Câu 50: Các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)} + \frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)} + \frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}$$

Lời giải

Ta có $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq (a+b)^2$ (dấu “=” xảy ra khi $a = b$)

Ta có: $\frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)} - \frac{y^4}{(x^2+y^2)(x+y)} = x - y$;

Tương tự: $\frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)} - \frac{z^4}{(y^2+z^2)(y+z)} = y - z$; $\frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)} - \frac{x^4}{(z^2+x^2)(z+x)} = z - x$

Do đó $F = \frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)} + \frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)} + \frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)(x+y)} + \frac{y^4+z^4}{(y^2+z^2)(y+z)} + \frac{z^4+x^4}{(z^2+x^2)(z+x)} \right)$$

$$\geq \frac{1}{4} \left(\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)(x+y)} + \frac{(y^2+z^2)^2}{(y^2+z^2)(y+z)} + \frac{(z^2+x^2)^2}{(z^2+x^2)(z+x)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{(x^2+y^2)}{(x+y)} + \frac{(y^2+z^2)}{(y+z)} + \frac{(z^2+x^2)}{(z+x)} \right)$$

$$\geq \frac{1}{8} \left(\frac{(x+y)^2}{(x+y)} + \frac{(y+z)^2}{(y+z)} + \frac{(z+x)^2}{(z+x)} \right) = \frac{1}{4} (x+y+z) = \frac{1}{4}$$

Do đó F đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Câu 51: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 \end{cases}$.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

Lời giải

+) Nếu $ac \leq 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm.

+) Nếu $ac > 0 \Rightarrow a$ và c cùng dấu, từ $\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 > 0 \Rightarrow b$ và a cùng dấu
 $\Rightarrow a, b, c$ cùng dấu. Vì thế ta chỉ cần xét a, b và c cùng dương là đủ

Với a, b, c cùng dương ta có :

$$\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 \Leftrightarrow b \geq \frac{c+4a}{2} \Leftrightarrow b^2 \geq \frac{c^2+8ac+16a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq \frac{c^2-8ac+16a^2}{4} = \frac{(c-4a)^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Câu 52: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P =$

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

Lời giải

Vì $x, y, z > 0$ ta có:

Áp dụng BĐT Côsi đối với 2 số dương $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$ ta được:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x \quad (1). \text{ Tương tự ta có:}$$

$$\frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} \geq y \quad (2)$$

$$\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z \quad (3)$$

Cộng (1) + (2) + (3) ta được:

$$P \geq \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \right) + \frac{x+y+z}{2}$$

$$\Rightarrow P \geq (x+y+z) - \frac{x+y+z}{2} = 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy min } P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$$

Câu 53: Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = 11\sqrt{9-x^2} - \sqrt{9x^4 - x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x - y + 2018$.

Lời giải

Điều kiện $-3 \leq x \leq 3$.

$$y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = 11\sqrt{9-x^2} - \sqrt{9x^4 - x^6} \Leftrightarrow (y+1)^3 + 2(y+1) = (\sqrt{9-x^2})^3 + 2\sqrt{9-x^2}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 2a = b^3 + 2b, \left(a = y+1; b = \sqrt{9-x^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - b^3) + 2(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0$$

$$\text{Do } a^2 + ab + b^2 + 2 = \left(a + \frac{1}{2}b \right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + 2 > 0.$$

Suy ra

$$a - b = 0 \Leftrightarrow y + 1 - \sqrt{9-x^2} = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{9-x^2} - 1 \Leftrightarrow x - y = x - \sqrt{9-x^2} + 1 = 4 - (3 - x + \sqrt{9-x^2}) \leq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=0 \\ 9-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=-1$. Vậy giá trị lớn nhất của T là 2022 tại $x=3; y=-1$.

Ta lại có

$$x - y \geq 1 - 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x - \sqrt{9-x^2} + 1 \geq 1 - 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x + 3\sqrt{2} \geq \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow x^2 + 6\sqrt{2}x + 18 \geq 9 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x + 3)^2 \geq 0 \text{ (Đúng).}$$

Suy ra $T = x - y + 2018 \geq 1 - 3\sqrt{2} + 2018 = 2019 - 3\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $\sqrt{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn). Suy ra $y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - (1 - 3\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$.

Vậy GTNN T là $2019 - 3\sqrt{2}$ tại $x = \frac{-3\sqrt{2}}{2}; y = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$.

Câu 54: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2(a + b + c)$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right)$
 $= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) + \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) \geq 2(a + b + c)$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 55: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13$.

Lời giải

Đặt $T = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc$. Do vai trò của a, b, c bình đẳng nên không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $0 < a \leq b \leq c$.

Từ $a + b + c = 3$ và $a + b > c$ suy ra $1 \leq c < \frac{3}{2}$

$$T = 3(a^2 + b^2) + 3c^2 + 4abc = 3[(a + b)^2 - 2ab] + 3c^2 + 4abc \\ = 3(3 - c)^2 + 3c^2 - 2ab(3 - 2c)$$

Do $3 - 2c > 0$ và $ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3 - c}{2}\right)^2$, suy ra

$$T \geq 3(3 - c)^2 + 3c^2 - \frac{1}{2}(a + b)^2(3 - 2c) \\ = 3(c^2 - 6c + 9) + 3c^2 - \frac{1}{2}(3 - c)^2(3 - 2c) \\ = c^2 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = c(c - 1)^2 + \frac{1}{2}(c - 1)^2 + 13 \geq 13$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 56: Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1, d > 1$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \geq 16$.

Lời giải

Vì $a > 1, b > 1, c > 1, d > 1$ nên $a - 1 > 0; b - 1 > 0; c - 1 > 0; d - 1 > 0$.

Áp dụng BĐT ta có

$$\frac{a^2}{b-1} + 4(b-1) \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1} \cdot 4(b-1)} = 4a \quad (1)$$

$$\frac{b^2}{c-1} + 4(c-1) \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c-1} \cdot 4(c-1)} = 4b \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{d-1} + 4(d-1) \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{d-1} \cdot 4(d-1)} = 4c \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{a-1} + 4(a-1) \geq 2\sqrt{\frac{d^2}{a-1} \cdot 4(a-1)} = 4d \quad (4)$$

Từ (1); (2); (3); (4) ta có

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} + 4(a+b+c+d) - 16 \geq 4(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \geq 16. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a=b=c=d=2$$

Câu 57: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{a+3c} + \frac{ab}{bc+ca}.$$

Lời giải

Đặt $a = xc; b = yc$ ($x, y > 0$). Từ điều kiện suy ra: $(x+1)(y+1) = 4$

$$\text{Khi đó } P = \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} + \frac{xy}{x+y} = \frac{x^2+y^2+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9} + \frac{xy}{x+y}$$

$$= \frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9} + \frac{xy}{x+y}$$

$$\text{Do } (x+1)(y+1) = 4 \Rightarrow xy = 3 - (x+y)$$

$$\text{Đặt } t = x+y \quad (0 < t < 3) \Rightarrow xy = 3-t$$

$$\text{Và } 3-t = xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow t^2+4t-12 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2 \quad (\text{do } t > 0)$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{t^2+3t-2(3-t)}{3-t+3t+9} + \frac{3-t}{t} = \frac{t}{2} + \frac{3}{t} - \frac{3}{2} \text{ với } 2 \leq t < 3$$

$$\text{Ta có: } P \geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{3}{t}} - \frac{3}{2} = \sqrt{6} - \frac{3}{2}$$

$$\text{Do đó } P_{\min} = \sqrt{6} - \frac{3}{2} \text{ khi } t = \sqrt{6} \text{ hay } (x; y) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x+y = \sqrt{6} \\ xy = 3-\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{Ta lại có } P = \frac{t^2-3t+6}{2t} = \frac{t^2-5t+6+2t}{2t} = \frac{(t-2)(t-3)}{2t} + 1 \leq 1 \quad (\text{do } 2 \leq t < 3)$$

$$\text{Do đó } P_{\max} = 1 \text{ khi } t = 2 \text{ hay } (x; y) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Câu 58: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c = 3$

Chứng minh rằng $a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \leq 5$

Lời giải

$$\text{Đặt } P = a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \text{ suy ra}$$

$$\begin{aligned}
2P &= 2a\sqrt{b^3+1} + 2b\sqrt{c^3+1} + 2c\sqrt{a^3+1} = \\
&= 2a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} + 2b\sqrt{(c+1)(c^2-c+1)} + 2c\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \\
&\leq a(b^2+2) + b(c^2+2) + c(a^2+2) = ab^2 + bc^2 + ca^2 + 6 = Q + 6
\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b \leq c \leq a$ ta có

$$b(a-c)(c-b) \geq 0 \Leftrightarrow abc + b^2c \geq ab^2 + bc^2 \Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq abc + b^2c + ca^2$$

$$\text{Do đó } Q \leq abc + b^2c + ca^2 \leq 2abc + b^2c + ca^2 = c(a+b)^2 = 4c \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$$

$$\leq \frac{4}{27} \left(c + \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} \right)^3 = \frac{4(a+b+c)^2}{27} = \frac{4 \cdot 3^3}{27} = 4$$

Do đó $2P \leq 10 \Leftrightarrow P \leq 5$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a+b+c=3, b \leq c \leq a, 2c=a+b, abc=2abc \Leftrightarrow b=0, c=1, a=2$.

Câu 59: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$.

$$\text{Chứng minh } \frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Lời giải

Dự đoán: với điều kiện ràng buộc của các số thực dương a, b, c có $abc=1$, ta có thể dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a(c+1)+b(a+1)+c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq \frac{3}{4} \quad (1)$$

Nhận thấy rằng:

$$\begin{aligned}
(a+1)(b+1)(c+1) &= (ab+bc+c+1)(c+1) \\
&= abc + ab + ac + a + bc + b + c + 1 = 2 + (ab+bc+ac) + (a+b+c)
\end{aligned}$$

$$\text{Và: } a(c+1)+b(a+1)+c(b+1) = (ac+bc+ab) + (a+b+c)$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow \frac{(ab+bc+ac) + (a+b+c)}{2 + (ab+bc+ac) + (a+b+c)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4[(ab+bc+ac) + (a+b+c)] \geq 6 + 3[(ab+bc+ac) + (a+b+c)]$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ac) + (a+b+c) \geq 6 \quad (*)$$

$$\text{Lại có: } a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$$

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$$

Nên (*) luôn đúng.

$$\text{Vậy } \frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 60: Chứng minh rằng: $\frac{x}{x^2-yz+2019} + \frac{y}{y^2-zx+2019} + \frac{z}{z^2-xy+2019} \geq \frac{1}{x+y+z}$

Lời giải

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} (*) \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } x, y, z > 0.$$

Với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (bx-ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức (**), ta có: } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

$$\text{Vì: } xy + yz + zx = 673 \text{ nên } x(x^2 - yz + 2019) = x(x^2 + xy + zx + 1346) > 0.$$

$$\text{Tương tự: } y(y^2 - zx + 2019) > 0 \text{ và } z(z^2 - xy + 2019) > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x^2 - yz + 2019} + \frac{y}{y^2 - zx + 2019} + \frac{z}{z^2 - xy + 2019} \\ &= \frac{x^2}{x(x^2 - yz + 2019)} + \frac{y^2}{y(y^2 - zx + 2019)} + \frac{z^2}{z(z^2 - xy + 2019)} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2019(x+y+z)} \quad (1) \end{aligned}$$

Biến đổi:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2019(x+y+z) &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx + 3.673) \\ &= (x+y+z) \left[x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx + 3.(xy + yz + zx) \right] \\ &= (x+y+z)(x+y+z)^2 = (x+y+z)^3 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x^2 - yz + 2019} + \frac{y}{y^2 - zx + 2019} + \frac{z}{z^2 - xy + 2019} \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3} = \frac{1}{x+y+z} \text{ (đpcm).} \\ & \geq 2 \sum_{cyc} \sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}} = 2(\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}). \end{aligned}$$

Câu 61: Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh $\sqrt{a} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1 \right) \geq \sqrt{b} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

Lời giải

Với $a > 0; b > 0$ ta có:

$$\text{Phương trình (1) tương đương: } \sqrt{\frac{a}{b}} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1 \right) \geq \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \quad (2)$$

Đặt $\sqrt{\frac{a}{b}} = X$ ($X > 0$). Thay vào phương trình (2) ta có: $X(X-1) \geq \left(1 - \frac{1}{X}\right)$

$$\Leftrightarrow X(X-1) \geq \frac{X-1}{X} \Leftrightarrow \frac{X^2(X-1) - (X-1)}{X} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(X-1)(X^2-1)}{X} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(X-1)(X-1)(X+1)}{X} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(X-1)^2(X+1)}{X} \geq 0$$

Do $X > 0$ nên $X+1 > 0$ mà $(X-1)^2 \geq 0$.

Suy ra với $a > 0$, $b > 0$ thì $\sqrt{a} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1 \right) \geq \sqrt{b} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$.

Vậy dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow a = b$.

Câu 62: Cho x ; y ; z là các số thực dương thỏa mãn: $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức: } A = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$$

Lời giải

Ta có $(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y$

$$\Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy$$

Mà $x, y > 0 \Rightarrow x+y > 0$

Ta có: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 \geq (x+y)xy$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 1 = x^3 + y^3 + xyz \geq (x+y)xy + xyz$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x+y+z) > 0$$

Tương tự: $y^3 + z^3 + 1 \geq yz(x+y+z) > 0$

$$z^3 + x^3 + 1 \geq zx(x+y+z) > 0$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{xy(x+y+z)} + \frac{1}{yz(x+y+z)} + \frac{1}{xz(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{xyz} = 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Câu 63: Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô si cho các số dương x^2 và yz , ta có:

$$x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2 yz} = 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{yz}}$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y\sqrt{xz}} \quad \text{và} \quad \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z\sqrt{xy}}$$

Suy ra: $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \right)$ (1)

Ta có: $\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz}$ (2)

Ta có: $\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy} \leq x + y + z$ (3)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xy} \leq 2x + 2y + 2z$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0$ (BĐT đúng)

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$

Từ (2) và (3) suy ra: $\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \leq \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra: $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$

Câu 64: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2+yz} + \frac{y^2}{xz+yz} + \frac{x+2z}{x+z} \geq \frac{5}{2}.$$

Lời giải

Ta có $P = \frac{xz}{y^2+yz} + \frac{y^2}{xz+yz} + \frac{x+2z}{x+z} = \frac{\frac{xz}{yz}}{\frac{y^2}{yz}+1} + \frac{\frac{y^2}{yz}}{\frac{xz}{yz}+1} + \frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}$

$$= \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}+1} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+1} + \frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}} = \frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} + \frac{1+2c^2}{1+c^2},$$

trong đó $a^2 = \frac{x}{y}, b^2 = \frac{y}{z}, c^2 = \frac{z}{x}$ ($a, b, c > 0$)

Nhận xét rằng $a^2 \cdot b^2 = \frac{x}{z} = \frac{1}{c^2} \geq 1$ (do $x \geq z$).

Xét $\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} - \frac{2ab}{ab+1} = \frac{a^2(a^2+1)(ab+1) + b^2(b^2+1)(ab+1) - 2aba^2(a^2+1)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)}$

$$= \frac{ab(a^2-b^2)^2 + (a-b)(a^3-b^3) + (a-b)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq 0$$

Do đó $\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} \geq \frac{2ab}{ab+1} = \frac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}+1} = \frac{2}{1+c}$ (1). Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Khi đó $\frac{2}{1+c} + \frac{1+2c^2}{c^2+1} - \frac{5}{2} = \frac{2(2(1+c^2) + (1+c)(1+2c^2)) - 5(1+c)(1+c^2)}{2(1+c)(1+c^2)}$

$$= \frac{1-3c+3c^2-c^3}{2(1+c)(1+c^2)} = \frac{(1-c)^3}{2(1+c)(1+c^2)} \geq 0 \quad (\text{do } c \leq 1) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b, c = 1 \Leftrightarrow x = y = z$.

Câu 65: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 4(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4)$

Lời giải

Ta có

$$S = 4(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4) = (4a^3 - a^4) + (4b^3 - b^4) + (4c^3 - c^4)$$

Ta chứng minh: $(4a^3 - a^4) \leq 4a^2$ thật vậy

$$(4a^3 - a^4) \leq 4a^2 \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-2)^2 \geq 0$$

Tương tự ta có $(4b^3 - b^4) \leq 4b^2; (4c^3 - c^4) \leq 4c^2$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} S &= 4(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4) \\ &= (4a^3 - a^4) + (4b^3 - b^4) + (4c^3 - c^4) \leq 4(a^2 + b^2 + c^2) \leq 48 \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất bằng 48 xảy ra khi $(a, b, c) = (2, 2, 2)$

Câu 66: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?}$$

Lời giải

Trường hợp 1: Nếu tồn tại một trong ba số a, b, c thuộc nửa khoảng $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ thì ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 9 = (a + b + c)^2 > a^2 + b^2 + c^2. \text{ Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng.}$$

Trường hợp 2: $a > \frac{1}{3}; b > \frac{1}{3}; c > \frac{1}{3}$ ta có $a + b + c = 3 > a + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow a < \frac{7}{3}$ tương tự $b < \frac{7}{3};$

$c < \frac{7}{3}$. Vậy $a, b, c \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

$$\text{Ta chứng minh } \frac{1}{x^2} - x^2 \geq -4x + 4 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right) \quad (*).$$

Thật vậy

$$(*) \Leftrightarrow 1 - x^4 \geq -4x^3 + 4x^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 2x - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2((x-1)^2 - 2) \leq 0 \text{ luôn đúng với } \forall x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^2} - a^2 \geq -4a + 4; \frac{1}{b^2} - b^2 \geq -4b + 4; \frac{1}{c^2} - c^2 \geq -4c + 4.$$

Từ đó suy ra $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - a^2 - b^2 - c^2 \geq -4(a+b+c) + 12 = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

(đpcm). Dấu “ $\frac{a}{a + \sqrt{2013a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2013b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2013c + ab}} \leq 1$ ” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu 67: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

Lời giải

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+c \\ b = c+a \\ c = a+b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0 \text{ (Trái với giả thiết)}$$

Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.

Câu 68: Cho $x, y, z > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4} + \frac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4} + \frac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4}$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (*) với $x, y, z > 0$, a, b, c bất kì.

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

$$\text{Chứng minh: Trước hết ta chứng minh } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y},$$

Thật vậy quy đồng hai vế lên ta được bất đẳng thức tương đương $(ay - bx)^2 \geq 0$, luôn đúng.

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

$$\text{Áp dụng ta được } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \\ \frac{a+b}{x+y} = \frac{c}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \text{ (đpcm)}$$

Bất đẳng thức (*) được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức cô- si cho hai số không âm 3 và $\sqrt{x+2y-1}$ ta có:

$$3\sqrt{x+2y-1} \leq \frac{9+x+2y-1}{2} = \frac{x}{2} + y + 4$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x+2y-1} - 4 \leq \frac{x}{2} + y$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4} \geq \frac{x}{\frac{x}{2}+y} = \frac{2x}{x+2y} = \frac{2x^2}{x^2+2xy}$$

$$\text{Tương tự } \frac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4} \geq \frac{2y^2}{y^2+2yz}; \frac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4} \geq \frac{2z^2}{z^2+2zx}$$

Cộng vế với vế tương ứng của các bất đẳng thức trên ta được

$$T \geq \frac{2x^2}{x^2+2xy} + \frac{2y^2}{y^2+2yz} + \frac{2z^2}{z^2+2zx}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$\frac{2x^2}{x^2+2xy} + \frac{2y^2}{y^2+2yz} + \frac{2z^2}{z^2+2zx} \geq 2 \left(\frac{(x+y+z)^2}{x^2+2xy+y^2+2yz+z^2+2zx} \right) = 2$$

Do đó $T \geq 2$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1=9 \\ y+2z-1=9 \\ z+2x-1=9 \\ \frac{x}{x^2+2xy} = \frac{y}{y^2+2yz} = \frac{z}{z^2+2zx} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{10}{3} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy Min $T = 2$ khi $x = y = z = \frac{10}{3}$

Câu 69: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2011}{2}}$.

Lời giải

Ta có $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$.

$$\text{Suy ra } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}$$

Đặt $x = \sqrt{b^2+c^2}$, $y = \sqrt{c^2+a^2}$, $z = \sqrt{a^2+b^2}$,

$$\text{suy ra } VT \geq \frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} - x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} - y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} - z \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(2(y+z) - 3x) + (2(z+x) - 3y) + (2(x+y) - 3z) \right] \\
&\text{Suy ra } VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} (x+y+z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2011}{2}}
\end{aligned}$$

Câu 70: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$

Lời giải

Từ Gt suy ra: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$.

Nên ta có: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow y = z$

Vậy $\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

Tương tự ta có $\frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z}\right); \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}\right)$

Vậy ta có $\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \leq 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow x = y = z$

Ta có $(x+y+x)^2 - 3(xy+yz+zx) = \dots = \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \geq 0$

Nên $(x+y+x)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$

$\Rightarrow (xyz)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow 3 \frac{xy+yz+zx}{xyz} \leq xyz \Rightarrow 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq xyz$

Vậy $\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz; "=" \Leftrightarrow x = y = z$

Câu 71: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = (a+b+c+3) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right).$$

Lời giải

Đặt $x=1+c, y=1+b, z=1+a$ do $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow 1 \leq z \leq y \leq x \leq 2$

Khi đó A=

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + 3 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$$

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 - \frac{y}{z}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{x \cdot y}{y \cdot z} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq \frac{x}{z} + 1$$

$$\left(1 - \frac{z}{y}\right)\left(1 - \frac{y}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{z}{y} - \frac{y}{x} + \frac{z \cdot y}{y \cdot x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{z}{x} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + 2 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \leq 2\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + 2$$

Đặt $\frac{x}{z} = t \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} + \frac{5}{2} = \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} + \frac{5}{2}$$

Do $1 \leq t \leq 2 \Rightarrow \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{5}{2}$

$\Rightarrow A \leq 3 + 2 \cdot \frac{5}{2} + 2 = 10$ Ta thấy khi $a=b=0$ và $c=1$ thì $A=10$ nên giá trị lớn nhất của A là 10

Câu 72: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$. Chứng minh rằng:

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

Lời giải

* Ta có:

$$\begin{aligned} 5x^2 + y - 4xy + y^2 &\geq 3 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + y - 3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2x - y)^2 + x^2 + y - 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$* \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{y} = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{2x-1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{2x-1}$$

Vì: $y > 0; x > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1/2$ Thay $y = \frac{2x}{2x-1}$ vào $x^2 + y - 3 \geq 0$

Ta có: $x^2 + y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2x}{2x-1} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3}{2x-1} \geq 0 \quad (1)$

Vì $2x - 1 > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Mà

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 - 4x + 3 &= 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x - 3x + 3 = (x-1)(2x^2 + x - 3) \\ &= (x-1)^2(2x+3) \geq 0 \quad \forall x > 0 \text{ Vậy } (2x-y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0 \quad \forall x > 0; y > 0 \end{aligned}$$

Câu 73: Cho a,b,c là các số thực dương. CMR: $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$

Lời giải

Dự đoán a=b=c tách mẫu để a+c=b+c=2b

Ta có áp dụng BĐT $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

$$\frac{ab}{a+3b+2c} = \frac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2}\right) \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{bc}{2a+b+3c} = \frac{bc}{(a+b)+(a+c)+2c} \leq \frac{bc}{9}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{b}{2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{ac}{3a+2b+c} = \frac{ac}{(a+b)+(b+c)+2a} \leq \frac{ac}{9}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c} + \frac{c}{2}\right) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) suy ra } P \leq \frac{1}{9}\left(\frac{ac+bc}{a+b} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{bc+ab}{a+c} + \frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{a+b+c}{6}$$

Dấu “=” xảy ra khi a=b=c

Câu 74: Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n, ta có: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 1 = n+1-n = \left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{n}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2}\right).$$

$$\text{Mà } \sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2} < 3\sqrt[3]{(n+1)^2} \Rightarrow 1 < 3\sqrt[3]{(n+1)^2} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right).$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < \frac{3\sqrt[3]{(n+1)^2} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)}{(n+1)\sqrt[3]{n}} = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$$

$$\text{Nên } \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) + \dots + 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right) < 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3.$$

Câu 75: Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = x^3y + xy^3$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số không âm ta có:

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy| \geq 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + xy \geq 2xy + xy = 3xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}.$$

Ta có $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ (1).

$P = x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = xy(1 - xy)$ vì $x^2 + xy + y^2 = 1$

Áp dụng BĐT (1) ta có $2P = 2xy \cdot (1 - xy) \leq \frac{(2xy + 1 - xy)^2}{4} = \frac{(1 + xy)^2}{4} \leq \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 : 4 = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow P \leq \frac{2}{9}$. Vậy P có giá trị lớn nhất bằng $\frac{2}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$xy = \frac{1}{3}$ và $|x| = |y| \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 76: Chứng minh rằng $(a+b+c) \left[\frac{3a-b}{a^2+ab} + \frac{3b-c}{b^2+bc} + \frac{3c-a}{c^2+ca} \right] \leq 9$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Giả sử $a+b+c=t$ và đặt $a=tx; b=ty; c=tz \Rightarrow x+y+z=1$.

Ta chứng minh $t(x+y+z) \left[\frac{t(3x-y)}{t^2(x^2+xy)} + \frac{t(3y-z)}{t^2(y^2+yz)} + \frac{t(3z-x)}{t^2(z^2+zx)} \right] \leq 9$

$\Leftrightarrow \frac{3x-y}{x^2+xy} + \frac{3y-z}{y^2+yz} + \frac{3z-x}{z^2+zx} \leq 9$.

$\Leftrightarrow \frac{4x-(x+y)}{x(x+y)} + \frac{4y-(y+z)}{y(y+z)} + \frac{4z-(z+x)}{z(z+x)} \leq 9 \Leftrightarrow \frac{4}{1-z} - \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{1-y} - \frac{1}{z} \leq 9$

$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2} \leq 9$ Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác

nên $a+b > c \Rightarrow x, y, z \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ta có: $\frac{5x-1}{x-x^2} \leq 18x-3 \Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1) \leq 0$ đúng $\forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$\frac{5y-1}{y-y^2} \leq 18y-3 \Leftrightarrow (3y-1)^2(2y-1) \leq 0$ đúng $\forall y \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$\frac{5z-1}{z-z^2} \leq 18z-3 \Leftrightarrow (3z-1)^2(2z-1) \leq 0$ đúng $\forall z \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Suy ra $\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2} \leq 18(x+y+z)-9 \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2} \leq 9$

Câu 77: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $2\sqrt{y} + \sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 4$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

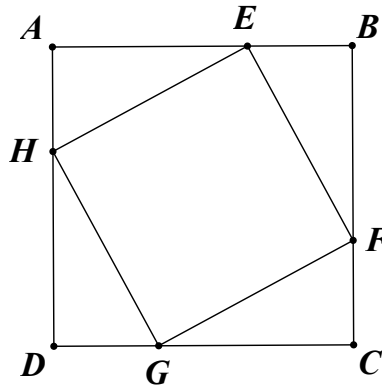
$$\begin{aligned}\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} &= \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) + 2\left(\frac{zy}{x} + \frac{xy}{z}\right) + 3\left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) \geq 2z + 4y + 6x \\ &= 4(x+y) + 2(z+x) \geq 8\sqrt{xy} + 4\sqrt{xz} = 4\sqrt{x}(2\sqrt{y} + \sqrt{z}) = 4\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 4.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

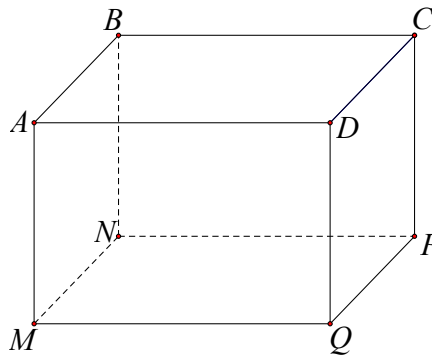
$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

CHUYÊN ĐỀ 13_CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ CÓ LIÊN QUAN CỰC TRỊ

Câu 1: Bác Bình có mảnh vườn hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10m. Ở bốn góc vườn, bác Bình muốn trồng hoa thành các hình tam giác vuông bằng nhau (hình vẽ). Hãy tính khoảng cách từ góc vườn A đến vị trí E sao cho tứ giác $EFGH$ có chu vi nhỏ nhất.



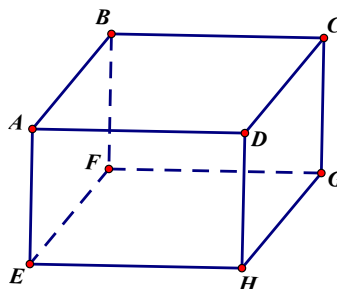
Câu 2: Bác An muốn đặt đóng một chiếc hộp đựng quà lưu niệm có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy $ABCD$ là hình vuông như hình dưới đây.



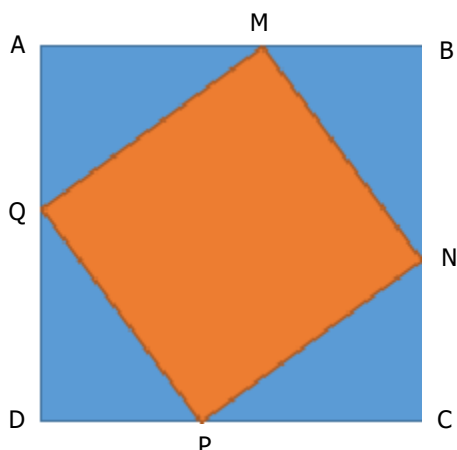
Để món quà trở nên đặc biệt, bác An muốn mạ bốn mặt xung quanh và mặt đáy dưới (mặt $MNPQ$) của chiếc hộp bằng kim loại quý (không mạ nắp hộp). Em hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của hộp quà sao cho tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất biết rằng thể tích của chiếc hộp là $4dm^3$.

Câu 3: Một cửa hàng xăng dầu cần xây một bồn chứa dầu hình trụ bằng thép có thể tích $54\pi (m^3)$ và giá mỗi mét vuông thép là 500 ngàn đồng. Hỏi số tiền thấp nhất mà cửa hàng phải trả ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

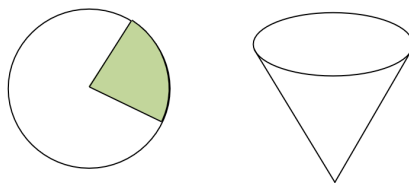
Câu 4: Một trang trại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích $27 m^3$ để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu bằng chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên liệu nhất (không tính đến bề dày của thành hầm).



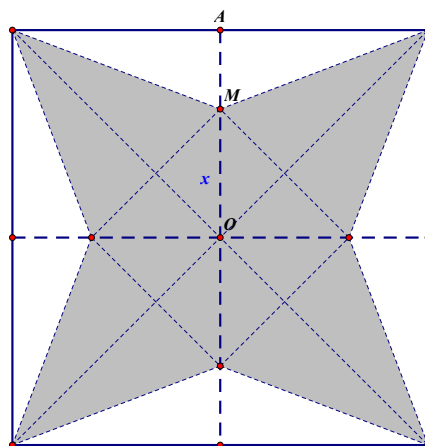
Câu 5: Một cái sân hình vuông $ABCD$ có cạnh là 8 m. Người ta muốn lát gạch màu khác để trang trí lên mảnh sân hình vuông $MNPQ$ nội tiếp trong sân hình vuông $ABCD$. Tìm vị trí của M, N, P, Q để hình vuông $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất



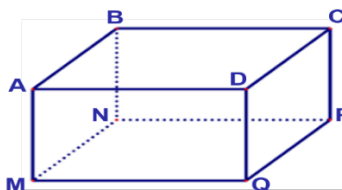
Câu 6: Với một tấm tôn hình tròn có bán kính $R = 6 \text{ cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt một phần (dạng hình quạt) của hình tròn như hình bên dưới. Thể tích lớn nhất của hình nón có được khi người ta cắt cung tròn của hình quạt có chiều dài là bao nhiêu?



Câu 7: Cắt một miếng giấy hình vuông như hình bên và xếp thành hình một hình chóp tứ giác đều. Biết các cạnh hình vuông bằng 20cm, $OM = x(\text{cm})$. Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất.



Câu 8: Bác Minh muốn đặt đóng một chiếc hộp đựng quà lưu niệm có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy $ABCD$ là hình vuông như hình dưới đây.

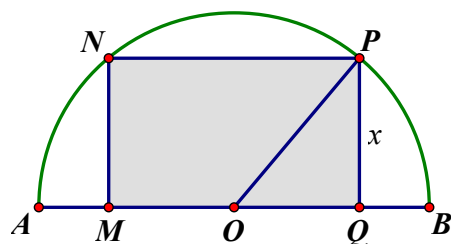


Để món quà trở nên đặc biệt, bác Minh muốn mạ bốn mặt xung quanh và mặt đáy dưới (đáy $MNPQ$) của chiếc hộp bằng kim loại quý (không mạ nắp hộp). Em hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy

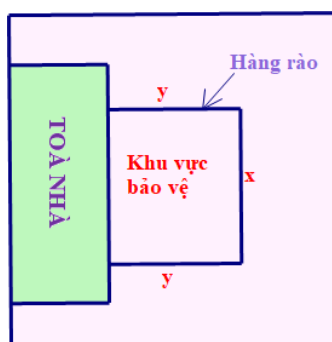
và chiều cao AM của hộp quà sao cho tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất biết rằng thể tích của chiếc hộp là $4dm^3$.

Câu 9: Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa đó là nhỏ nhất.

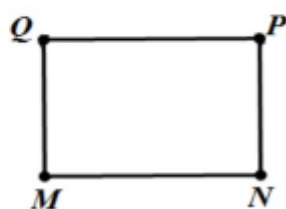
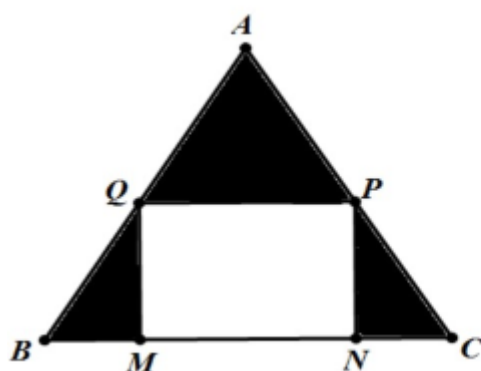
Câu 10: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp trong nửa đường tròn (O) bán kính $10cm$, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn (như hình vẽ).



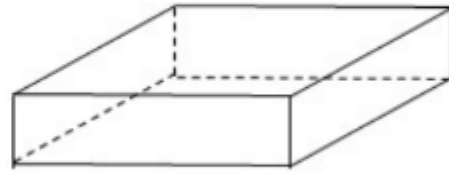
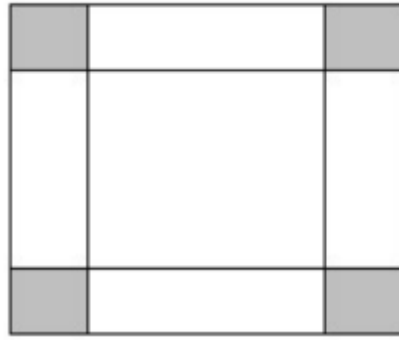
Câu 11: Người ta cần lập hàng rào quanh khu vực bảo vệ có dạng hình chữ nhật cho một toà nhà như hình vẽ bên. Hỏi nếu có 80m hàng rào bao quanh 3 mặt như trên thì diện tích tối đa của khu vực bảo vệ là bao nhiêu?



Câu 12: Cho một tấm nhôm có hình tam giác đều có cạnh bằng $100cm$. Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.



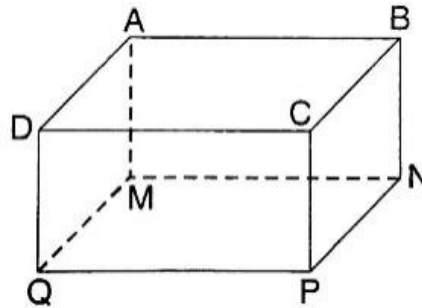
Câu 13: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x (cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để thể tích của hộp là lớn nhất.



Câu 14: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên đều bằng 6 cm , độ dài cạnh đáy là $x\text{ (cm)}$. Tìm x để diện tích xung quanh của hình chóp đều đó là lớn nhất.

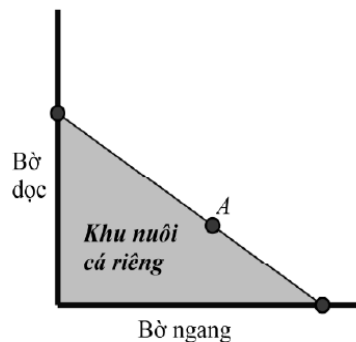
Câu 15: Một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước $a\text{ (cm)}$, người ta muốn cắt đi ở bốn góc bốn hình vuông cạnh bằng $x\text{ (cm)}$ để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

Câu 16: Một gia đình muốn xây một cái bể chứa nước nhỏ ở góc vườn để chủ động tưới rau, bể có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy $MNPQ$ là hình vuông (hình vẽ)

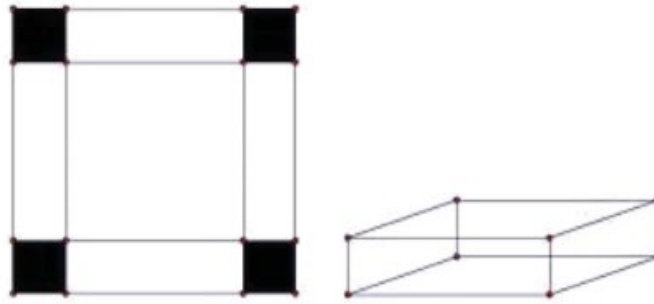


Hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của bể sao cho tổng diện tích các mặt làm bể (bao gồm 4 mặt xung quanh và một mặt đáy) là nhỏ nhất, biết rằng thể tích của bể là 4 m^3 .

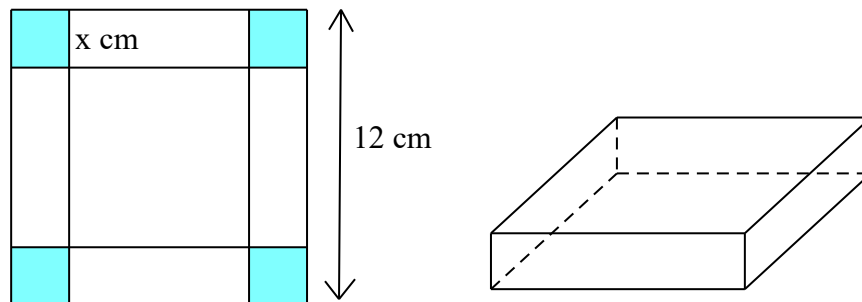
Câu 17: Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A . Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m .



Câu 18: Cho tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\text{ (cm)}$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Câu 19: Cho một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gấp tấm nhôm đó thành hình hộp không có nắp (Hình vẽ). Tìm x để không khí bên trong hộp là nhiều nhất.

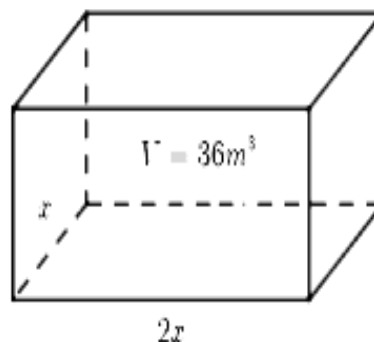


Câu 20:

Một gia đình muốn cải tạo một ao nước nhỏ thành một hồ nước đẹp hơn. Hồ nước có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp hai lần chiều rộng và người ta tính được có thể tích bằng $\frac{62\ 250}{3} \text{ m}^3$. Theo thị trường xây dựng, giá tiền xây dựng bình quân là 350 000 đồng/ m^2 (bao gồm cả đáy và thành hồ). Hỏi chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng hồ nước trên là bao nhiêu tiền

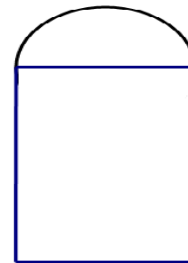


Câu 21: Bác Duy muốn xây một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 36 m^3 . Đáy bể có dạng hình chữ nhật với chiều rộng là $x(\text{m})$, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bác Duy muốn phần diện tích cần xây (bao gồm diện tích xung quanh và đáy bể) là nhỏ nhất để tiết kiệm chi phí thì x phải bằng bao nhiêu?



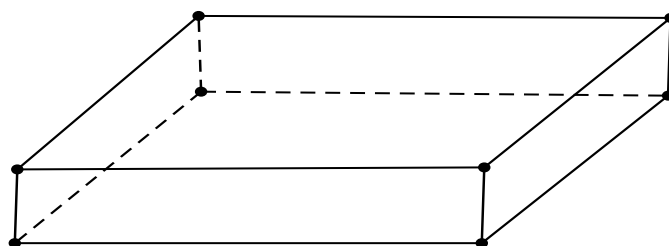
Câu 22:

Bác Nam muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài của khuôn gỗ (các đường in đậm trong hình bên, bỏ qua độ rộng của cạnh khuôn gỗ) là $8m$. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa sổ có diện tích lớn nhất.

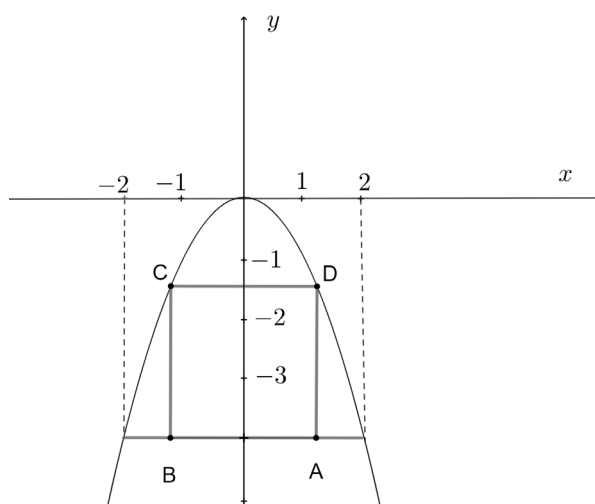


Câu 23: Một gia đình muốn xây một hồ chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $400 m^3$ đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là $500\,000$ đồng/ m^2 (bao gồm cả diện tích tường và đáy bể). Hỏi chi phí thuê nhân công thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây hồ chứa nước là bao nhiêu triệu đồng?

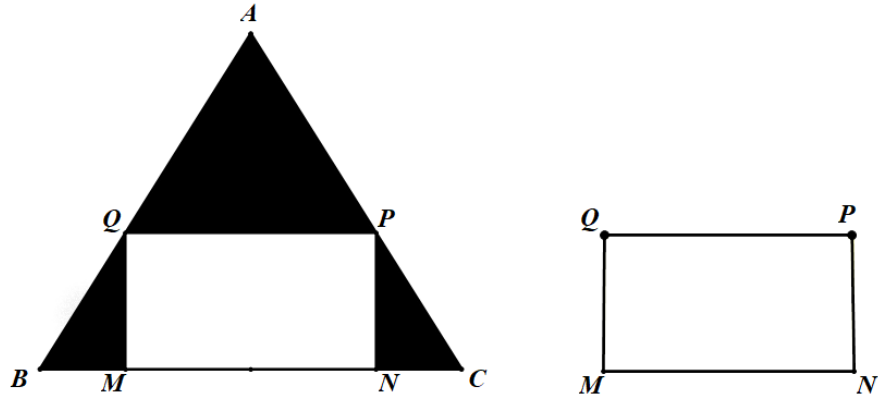
Câu 24: Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp dạng hình hộp chữ nhật thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều bằng $12cm$; tổng của chiều rộng và chiều cao là $24cm$. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị lớn nhất ấy bằng bao nhiêu?



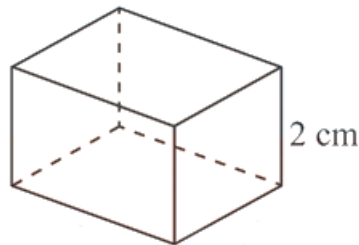
Câu 25: Cửa hầm lò khai thác than có dạng một parabol, khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4 mét, khoảng cách giữa hai chân cửa là 4 mét. Người ta muốn gia cố cho cửa lò bằng một khung thép hình chữ nhật sao cho hai đỉnh dưới của khung thép chạm đất, hai đỉnh trên của khung thép chống vào mái hầm (hình vẽ minh họa). Tìm kích thước của khung thép sao cho diện tích của hình chữ nhật tạo bởi khung thép lớn nhất.



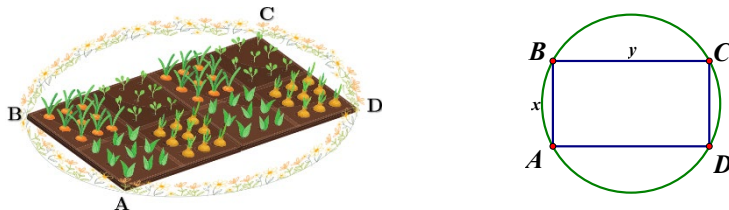
Câu 26: Cho một tấm nhôm hình tam giác đều có cạnh bằng $20(cm)$. Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài đoạn MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất?



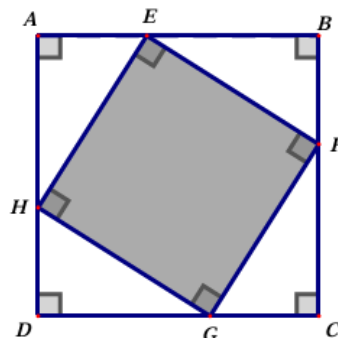
Câu 27: Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 , chiều cao của hộp là 2 cm . Tìm kích thước đáy của hộp sao cho sử dụng ít vật liệu nhất.



Câu 28: Người ta muốn làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 640 m^2 , để tạo thêm cảnh quan xung quanh đẹp hơn, người ta mở rộng thêm bốn phần diện tích để trồng hoa, tạo thành một đường tròn đi như hình vẽ, biết tâm hình tròn trùng với giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật. Khi đó chọn kích thước cạnh $ABCD$ như thế nào để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất?



Câu 29: Một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh 30 m . Người ta xây dựng một vườn hoa dạng hình vuông $EFGH$ có các đỉnh E, F, G, H thuộc các cạnh của hình vuông $ABCD$ (hình vẽ). Xác định vị trí điểm E trên cạnh AB để diện tích vườn hoa nhỏ nhất.

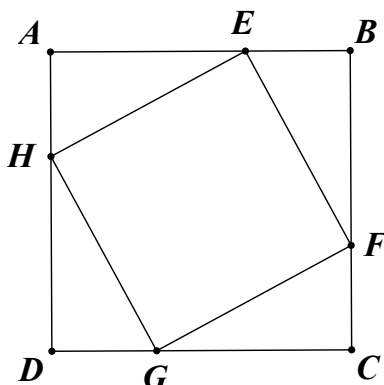


Câu 30: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Biết thể tích của nó là 1280 cm^3 và chiều cao là 20 cm . Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh.

- Câu 31:** Ông An có 2400 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu?
- Câu 32:** Một trang chữ của một tạp chí cần diện tích là 384cm^2 . Lề trên, lề dưới là 3cm ; lề phải, lề trái là 2cm . Hỏi chiều ngang và chiều dọc tối ưu của trang giấy lần lượt là bao nhiêu để diện tích trang giấy là nhỏ nhất?
- Câu 33:** Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt nhân kỉ niệm ngày giải phóng hoàn toàn miền Nam 30 – 4. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 200 người tham gia. Để thu hút nhiều người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá 100 nghìn đồng/1tour thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour còn bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt đó là lớn nhất.
- Câu 34:** Kim cương là một khoáng sản quý, có rất nhiều giá trị và được sử dụng với nhiều mục đích khác nhau. Giá bán của một viên kim cương rất cao và phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố. Giả sử rằng giá bán của viên kim cương tỉ lệ với bình phương khối lượng của nó. Khi đem một viên kim cương cắt thành ba phần và vẫn bán với giá như trên (theo đúng tỉ lệ trên) thì tổng số tiền thu được tăng lên hay giảm đi? Trong trường hợp nào, giá bán của viên kim cương ban đầu giảm nhiều nhất? và giảm bao nhiêu lần?
- Câu 35:** Công ty sản xuất thùng gỗ muốn thiết kế số lượng lớn thùng đựng hàng hóa bên trong, dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp với thể tích là $62,5\text{dm}^3$. Để tiết kiệm vật liệu gỗ làm thùng, người ta cần thiết kế thùng sao cho có tổng S diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất. Hỏi S có giá trị bằng bao nhiêu?
- Câu 36:** Cửa hàng nhà bác Dũng chuyên kinh doanh máy tính tại Hà Nội. Một loại máy tính có giá nhập vào một chiếc là 18 triệu đồng và bán ra với giá 22 triệu đồng. Với giá bán như trên thì một năm số lượng máy tính bán được dự kiến là 500 chiếc. Để tăng thêm lượng tiêu thụ dòng máy tính này, bác Dũng dự định giảm giá bán và ước lượng cứ giảm 200 nghìn đồng một chiếc thì số lượng máy tính bán ra trong một năm sẽ tăng 50 chiếc. Vậy bác Dũng phải bán với giá bao nhiêu để sau khi giảm giá lợi nhuận thu được sẽ cao nhất?
- Câu 37:** Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy móc có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ (người này sẽ giám sát tất cả các máy hoạt động). Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất?
- Câu 38:** Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

CHUYÊN ĐỀ 13_CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ CÓ LIÊN QUAN CỰC TRỊ

Câu 1: Bác Bình có mảnh vườn hình vuông ABCD có cạnh bằng 10m. Ở bốn góc vườn, bác Bình muốn trồng hoa thành các hình tam giác vuông bằng nhau (hình vẽ). Hãy tính khoảng cách từ góc vườn A đến vị trí E sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.



Lời giải

Ta có: $\triangle AEH = \triangle BFE = \triangle CFG = \triangle DHG$ suy ra

$HE = FE = FG = GH$ và $\widehat{AEH} = \widehat{DFE}$ mà

$\widehat{AEH} + \widehat{FED} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{AEH} + \widehat{FED} + \widehat{HDF} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{HDF} = 90^\circ$

Vậy tứ giác EFGH là hình vuông.

Đặt $AE = x(m)$, điều kiện $0 < x < 10$

Suy ra $AH = 10 - x(m)$

Tam giác AHE là tam giác vuông tại A có:

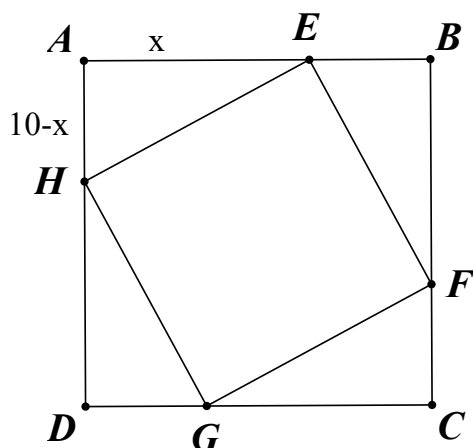
$$HE^2 = AH^2 + AE^2$$

$$\text{hay } HE^2 = x^2 - (10 - x)^2$$

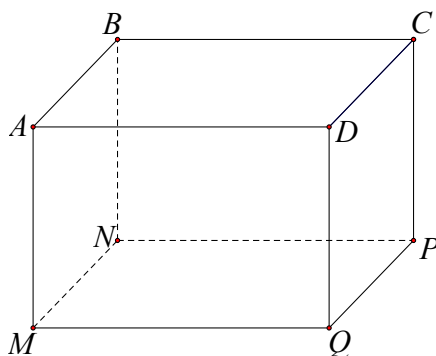
$$HE^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50 \geq 50$$

$$\text{Suy ra } HE \geq \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Chu vi tứ giác EFGH bằng $4HE$. Vậy chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất. HE nhỏ nhất khi $HE = 5\sqrt{2}$ khi $x = 5$.



Câu 2: Bác An muốn đặt đóng một chiếc hộp đựng quà lưu niệm có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy ABCD là hình vuông như hình dưới đây.



Để món quà trở nên đặc biệt, bác An muốn mạ bốn mặt xung quanh và mặt đáy dưới (mặt MNPQ) của chiếc hộp bằng kim loại quý (không mạ nắp hộp). Em hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt

đáy và chiều cao AM của hộp quả sao cho tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất biết rằng thể tích của chiếc hộp là $4dm^3$.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh MN là $x(dm)$ ($x > 0$)

Gọi độ dài chiều cao AM là $h(dm)$ ($h > 0$)

Do thể tích của chiếc hộp là $4dm^3$ nên ta có: $x^2h = 4$

$$\text{Suy ra } h = \frac{4}{x^2}$$

Diện tích cần mạ kim loại quý của chiếc hộp là :

$$\begin{aligned} S &= x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x} \\ &= \left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(4x + \frac{16}{x}\right) - 4 = (x-2)^2 + \left(4x + \frac{16}{x}\right) - 4 \end{aligned}$$

Chứng minh bất đẳng thức Cô – si.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho 2 số $4x > 0$ và $\frac{16}{x} > 0$ và $(x-2)^2 \geq 0$ ta có:

$$S \geq 0 + 2\sqrt{4x \cdot \frac{16}{x}} - 4 = 0 + 2 \cdot 8 - 4 = 12$$

$$\text{Dấu «} = \text{» xảy ra khi } \begin{cases} x-2=0 \\ 4x = \frac{16}{x} \end{cases}$$

$$\text{Ta giải ra được } x = 2 \text{ từ đó suy ra } h = \frac{4}{2^2} = 1$$

Vậy khi độ dài cạnh đáy $MN = 2dm$ và chiều cao $AM = 1dm$ thì diện tích cần mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất bằng $12dm^2$.

Câu 3: Một cửa hàng xăng dầu cần xây một bồn chứa dầu hình trụ bằng thép có thể tích $54\pi(m^3)$ và giá mỗi mét vuông thép là 500 ngàn đồng. Hỏi số tiền thấp nhất mà cửa hàng phải trả ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Ta chứng minh với a, b, c là các số thực không âm, thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (1)

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thật vậy

* Với $a = 0, b = 0, c = 0$ thì bất đẳng thức luôn đúng.

* Với 3 số a, b, c dương.

$$\text{Đặt: } x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c} \Rightarrow x, y, z > 0 \Rightarrow x + y + z > 0$$

Bất đẳng thức (1) trở thành $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$

$$\text{Xét } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz$$

$$= (x+y+z) \left[((x+y)^2 - (x+y)z + z^2) \right] - 3xy(x+y+z)$$

$$= (x+y+z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= \frac{1}{2} (x+y+z) [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \geq 0, (\forall x, y, z > 0)$$

$$\text{Vậy } x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz \text{ hay } a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

* Gọi bán kính đáy là $x(m)$ ($x > 0$), chiều cao bồn chứa là $h(m)$.

$$\text{Thể tích chứa của bồn là } V = \pi x^2 \cdot h = 54\pi \Rightarrow h = \frac{54}{x^2} (m).$$

$$\text{Diện tích toàn phần của bồn chứa là: } S_{TP} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot h = 2\pi x^2 + \frac{108\pi}{x} (m^2)$$

Để chi phí xây dựng thấp nhất thì diện tích toàn phần của bồn phải nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } S_{TP} = 2\pi x^2 + \frac{108\pi}{x}$$

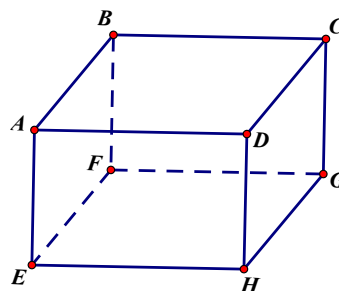
Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$2\pi x^2 + \frac{108\pi}{x} = 2\pi x^2 + \frac{54\pi}{x} + \frac{54\pi}{x} \geq 3\sqrt[3]{2\pi x^2 \cdot \frac{54\pi}{x} \cdot \frac{54\pi}{x}} = 54\pi$$

$$S_{TP} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } 54\pi (m^2) \text{ khi } 2\pi x^2 = \frac{54\pi}{x} \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3 (m)$$

Khi đó số tiền xây bồn thấp nhất mà cửa hàng phải trả là : $54\pi \cdot 500000 \approx 84\,823\,002$ (đồng).

Câu 4: Một trang trại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích $27 m^3$ để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu bằng chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên liệu nhất (không tính đến bề dày của thành hầm).



Lời giải

Gọi chiều rộng (và chiều sâu) của hầm là $x (m; x > 0)$

Vì thể tích của hầm là $27m^3$ nên chiều dài của hầm là: $\frac{27}{x^2}(m)$.

Biểu thức biểu thị diện tích toàn phần của hầm là:

$$2x \cdot x + 2x \cdot \frac{27}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{27}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x} = 2\left(x^2 + \frac{54}{x}\right) = 2 \cdot A.$$

$$\text{Ta có: } A + 9 = x^2 + \frac{54}{x} + 9 = x^2 + \frac{27}{x} + \frac{27}{x} + 9$$

$$\left(\sqrt{x^2} - \sqrt{\frac{27}{x}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{27}{x} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{27}{x}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{27}{x}} + \sqrt{9}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{27}{x} + 9 \geq 2\sqrt{\frac{27}{x} \cdot 9}$$

$$\Rightarrow A + 9 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{27}{x}} + 2\sqrt{\frac{27}{x} \cdot 9} \Rightarrow A + 9 \geq 2\sqrt{27x} + 2\sqrt{\frac{27 \cdot 9}{x}}$$

$$\Rightarrow A + 9 \geq 4\sqrt{\sqrt{27x} \cdot \sqrt{\frac{27 \cdot 9}{x}}} = 4 \cdot 9 \Rightarrow A + 9 \geq 36.$$

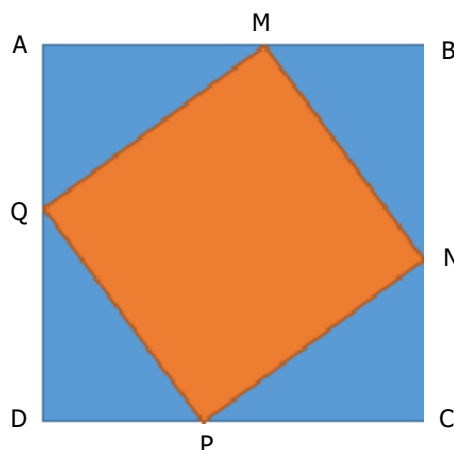
$$\Rightarrow A \geq 27$$

Đẳng thức xảy ra khi:

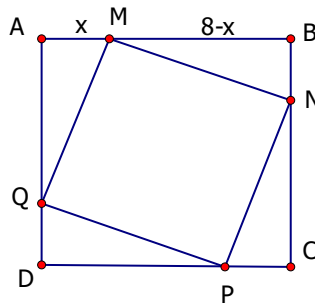
$$x^2 = \frac{27}{x} = 9 \Rightarrow x = 3.$$

Vậy khi kích thước chiều rộng là $3m$ và chiều dài là $\frac{27}{3^2} = 3(m)$ thì thi công hầm sẽ tiết kiệm nguyên liệu nhất.

Câu 5: Một cái sân hình vuông ABCD có cạnh là 8 m. Người ta muốn lát gạch màu khác để trang trí lên mảnh sân hình vuông MNPQ nội tiếp trong sân hình vuông ABCD. Tìm vị trí của M, N, P, Q để hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất



Lời giải



Gọi cái sân đó là hình vuông ABCD, phần lát gạch màu trang trí là hình vuông MNPQ

Chứng minh $\Delta AMQ = \Delta BNM = \Delta CPN = \Delta DQP$

Gọi $AM = x$ thì $MB = 8 - x$

Diện tích hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất khi tổng diện tích 4 tam giác vuông ở 4 góc hình vuông ABCD là lớn nhất. Gọi S là tổng diện tích 4 tam giác đó, ta có:

$$S = 2 \cdot AM \cdot AQ$$

$$\text{Mà } AM + AQ = AM + MB = 8 \text{ (m)}$$

$$(AM - MB)^2 \geq 0$$

$$AM^2 + MB^2 \geq 2 \cdot AM \cdot MB$$

$$(AM + MB)^2 \geq 4 \cdot AM \cdot MB$$

$$2 \cdot AM \cdot MB \leq \frac{(AM + MB)^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32$$

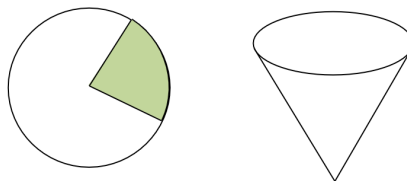
$$\text{Hay } S \leq 32$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } AM = MB = \frac{8}{2} = 4$$

Khi đó M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Vậy khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA thì hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất.

Câu 6: Với một tấm tôn hình tròn có bán kính $R = 6 \text{ cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt một phần (dạng hình quạt) của hình tròn như hình bên dưới. Thể tích lớn nhất của hình nón có được khi người ta cắt cung tròn của hình quạt có chiều dài là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi x (cm, $x > 0$) là chiều dài cung tròn được ghép tạo thành hình nón. Suy ra đường tròn đáy của hình nón có độ dài là x (cm). Bán kính R của hình tròn sẽ trở thành đường sinh của hình nón.

$$\text{Gọi bán kính của đáy là } r \text{ (cm, } r > 0\text{)}. \text{ Suy ra : } 2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

Chiều cao của hình nón là : $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2}}$

Thể tích của hình nón là : $V = \frac{1}{3}\Pi r^2 h = \frac{\Pi}{3} \left(\frac{2}{2\Pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2}}$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có :

$$V^2 = \frac{4\Pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\Pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\Pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2} \right) \leq \frac{4\Pi^2}{9} \left(\frac{\frac{x^2}{8\Pi^2} + \frac{x^2}{8\Pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2}}{3} \right)^3 = \frac{4\Pi^2}{9} \cdot \frac{R^6}{27}$$

Do đó V lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{x^2}{8\Pi^2} = R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{6}\Pi$ (cm)

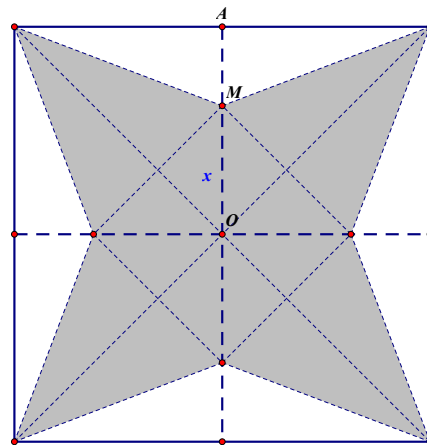
Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương: Dễ dàng chứng minh

Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương.

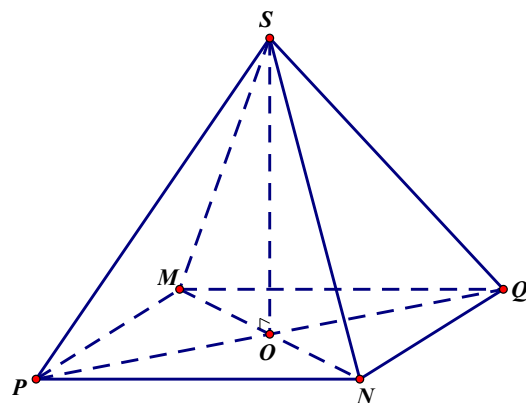
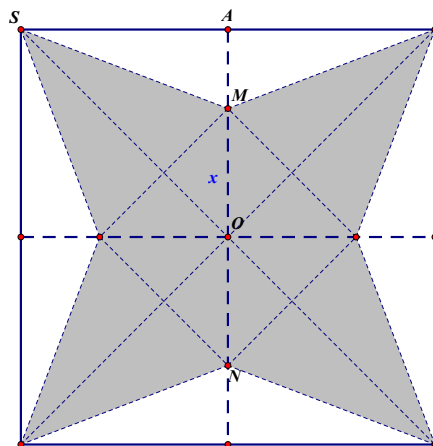
Cho các số thực dương a, b, c . Ta có:

$$a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c^3\sqrt{abc}} \geq 4\sqrt[4]{abc^3\sqrt{abc}} = 4\sqrt[3]{abc}.$$

Câu 7: Cắt một miếng giấy hình vuông như hình bên và xếp thành hình một hình chóp tứ giác đều. Biết các cạnh hình vuông bằng 20cm, $OM = x$ (cm). Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất.



Lời giải



Ta có $OA = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10(\text{cm})$; $AM = OA - OM = 10 - x$; $MN = 2OM = 2x$ với $0 < x < 10$.

Xét hình chóp đều $S.MPNQ$ như hình vẽ.

Diện tích đáy của hình chóp đã cho là: $S_{\text{đáy}} = \frac{1}{2} MN^2 = \frac{1}{2} \cdot (2x)^2 = 2x^2$.

Ta có $SM^2 = SA^2 + AM^2$.

Do đó $h = SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{SA^2 + AM^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 + (10 - x)^2 - x^2} = \sqrt{200 - 20x}$.

Thể tích của hình chóp đều $S.MPNQ$ là: $V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2x^2 \cdot \sqrt{200 - 20x}$.

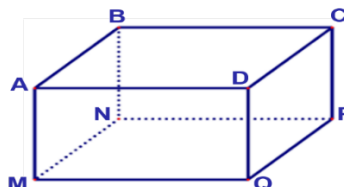
Suy ra:

$$V^2 = \frac{4}{9} x^4 (200 - 20x) = \frac{4}{9 \cdot 5^4} \cdot 5x \cdot 5x \cdot 5x \cdot 5x \cdot (200 - 20x) \leq \frac{4}{9 \cdot 5^4} \cdot \left(\frac{5x + 5x + 5x + 5x + 200 - 20x}{5} \right)^5$$

$$\text{Hay } V^2 \leq \frac{4}{9 \cdot 5^4} \cdot 40^5 = \frac{2^{18} \cdot 10}{9}. \text{ Do đó } V \leq \frac{2^9 \sqrt{10}}{3} = \frac{512\sqrt{10}}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $5x = 200 - 20x$ hay $x = 8$.

Câu 8: Bác Minh muốn đặt đóng một chiếc hộp đựng quà lưu niệm có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy $ABCD$ là hình vuông như hình dưới đây.



Để món quà trở nên đặc biệt, bác Minh muốn mạ bốn mặt xung quanh và mặt đáy dưới (đáy $MNPQ$) của chiếc hộp bằng kim loại quý (không mạ nắp hộp). Em hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của hộp quà sao cho tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất biết rằng thể tích của chiếc hộp là 4dm^3 .

Lời giải

Gọi độ dài cạnh đáy MN và độ dài chiều cao AM của hộp quà lần lượt là $x(\text{dm})$ và $y(\text{dm})$ với $x > 0$ và $y > 0$.

Do thể tích hộp quà là 4dm^3 nên $x^2 y = 4$ hay $y = \frac{4}{x^2}$.

Tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý là: $S = 4xy + x^2 = x^2 + \frac{16}{x}$

$$S = x^2 - 4x + 4 + \frac{4x^2 + 16}{x} - 4 = (x - 2)^2 + \frac{4(x - 2)^2}{x} + 12$$

Chứng minh được $S \geq 12$ và dấu bằng xảy ra khi $x = 2, y = 1$.

Vậy, để tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất thì độ dài cạnh mặt đáy và chiều cao chiếc hộp lần lượt là $2dm$ và $1dm$.

Câu 9: Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa đó là nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Đổi } 1000 \text{ lít} = 1 \text{ (m}^3\text{)}$$

Ta có thể tích của bể nước là

$$V = \pi R^2 h = 1 \text{ vậy } h = \frac{1}{\pi R^2}$$

Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

$$\text{Hay } S_{tp} = 2\pi R \frac{1}{\pi R^2} + 2\pi R^2$$

$$S_{tp} = \frac{2}{R} + 2\pi R^2 \quad (R > 0)$$

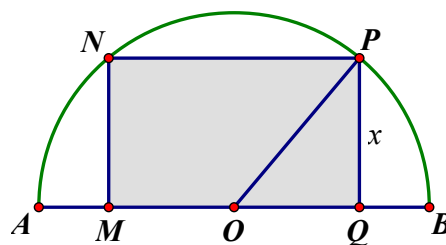
Áp dụng Câu toán phụ số 2: Với ba số không âm $a; b; c$ thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

ta có

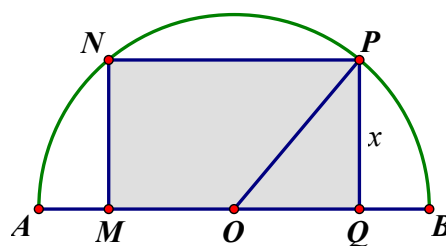
$$S_{tp} = \frac{2}{R} + 2\pi R^2 = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi} \text{ (m}^2\text{)}$$

Vậy diện tích toàn phần nhỏ nhất khi và chỉ khi $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ (m)}$.

Câu 10: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp trong nửa đường tròn (O) bán kính $10cm$, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn (như hình vẽ).



Lời giải



Gọi $x(cm)$ là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn $(0 < x < 10)$

Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn là:

$$MQ = 2\sqrt{10^2 - x^2} \text{ (cm)}$$

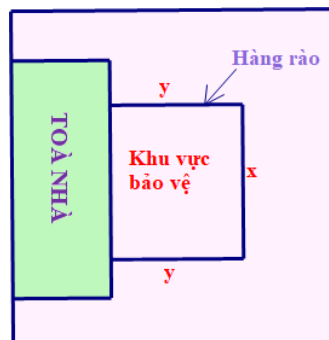
Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = x \cdot 2\sqrt{100 - x^2} = 2\sqrt{x^2 \cdot (100 - x^2)} \text{ (cm}^2\text{)}$

Ta có: $2\sqrt{x^2 \cdot (100 - x^2)} \leq x^2 + 100 - x^2 = 100$.

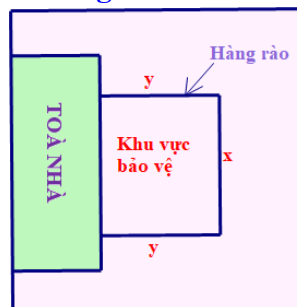
Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = 100 - x^2 \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là 100cm^2 khi $x = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$

Câu 11: Người ta cần lập hàng rào quanh khu vực bảo vệ có dạng hình chữ nhật cho một toà nhà như hình vẽ bên. Hỏi nếu có 80m hàng rào bao quanh 3 mặt như trên thì diện tích tối đa của khu vực bảo vệ là bao nhiêu?



Lời giải



Gọi chiều dài, chiều rộng của khu vực bảo vệ lần lượt là x, y (m, $x > 0, y > 0$)

Diện tích khu vực bảo vệ là $S \text{ (m}^2\text{)}$. Ta có: $S = x \cdot y$ (1)

Vì khu vực bảo vệ có 3 mặt, nên ta có: $x + 2y = 80$ suy ra: $x = 80 - 2y$ (2)

Từ (1), (2) ta có

$$S = y(80 - 2y) = -2y^2 + 80y = -(y - 20)^2 + 800.$$

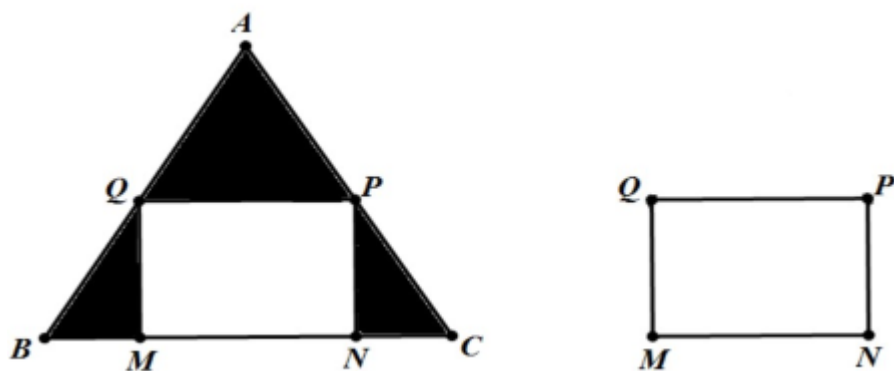
$$\text{Có: } -(y - 20)^2 \leq 0$$

$$-(y - 20)^2 + 800 \leq 800$$

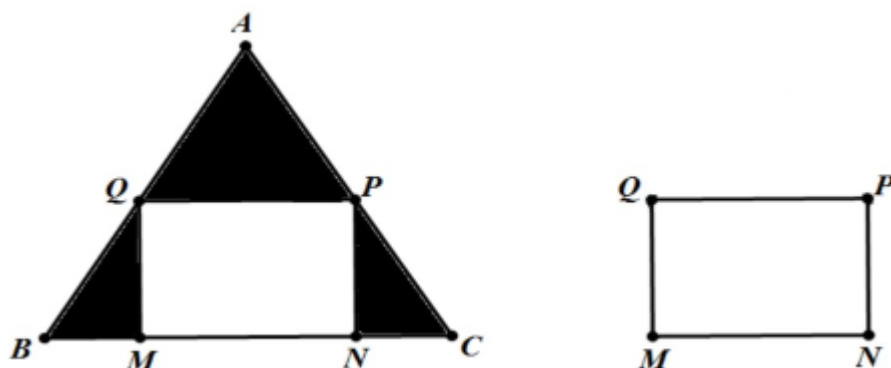
Nên ≤ 800 . Dấu “=” xảy ra khi $y = 20$ suy ra $x = 40$.

Vậy diện tích tối đa là 800m^2 khu vực bảo vệ có chiều dài 40m, chiều rộng 20m.

Câu 12: Cho một tấm nhôm có hình tam giác đều có cạnh bằng 100cm . Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.



Lời giải



Giả sử $MB = x \Rightarrow NC = x$ nên $MN = 100 - 2x$.

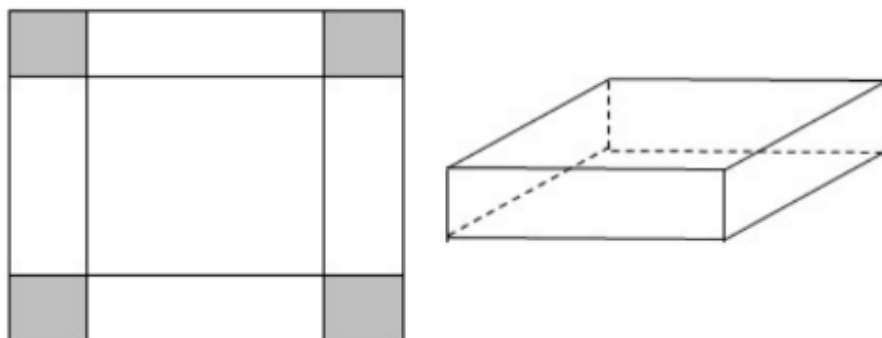
Ta có $MQ = \tan 60^\circ \cdot BM = x\sqrt{3}$ nên diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S = (100 - 2x)x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(50 - x)x \leq 2\sqrt{3}\left(\frac{50 - x + x}{2}\right)^2 = 1250\sqrt{3}.$$

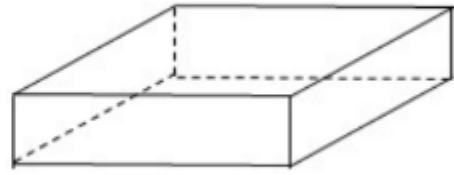
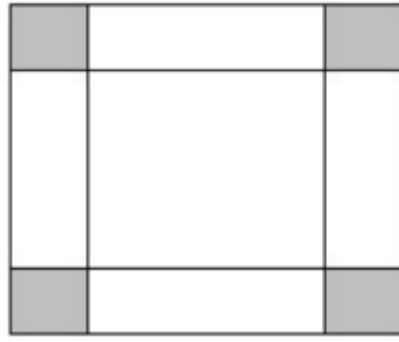
Dấu bằng xảy ra khi $50 - x = x \Leftrightarrow x = 25$.

Vậy $MB = 25 \text{ cm}$ thì diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là lớn nhất.

Câu 13: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để thể tích của hộp là lớn nhất.



Lời giải



Chiếc hộp tạo thành là một hình hộp có đáy là hình vuông cạnh $12-2x$ cm và chiều cao là x cm.

Thể tích của hộp là $V = (12-2x)^2 x$ ($0 < x < 6$)

Ta có: $(12-2x)^2 x = \frac{1}{4}(12-2x)(12-2x)4x$

Áp dụng bất đẳng thức cosi cho 3 số dương ta được

$$(12-2x)(12-2x)4x \leq \left(\frac{12-2x+12-2x+4x}{3} \right)^3$$

$$\text{Do đó } V \leq \frac{1}{4} \cdot 8^3 = 128$$

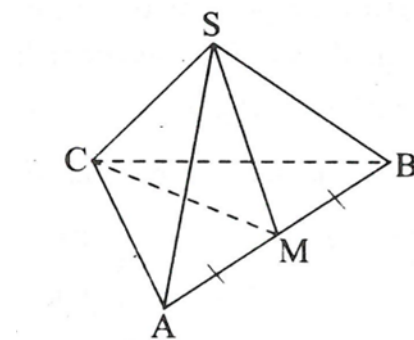
Dấu “=” xảy ra khi $12-2x = 4x$

Khi đó $x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy khi $x = 2$ thì thể tích của hộp là lớn nhất.

Câu 14: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên đều bằng 6 cm , độ dài cạnh đáy là x (cm) . Tìm x để diện tích xung quanh của hình chóp đều đó là lớn nhất.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB .

Khi đó SM là trung đoạn của hình chóp.

Ta có $AB = BC = AC = x$ thì:

$$SM^2 = SB^2 - \left(\frac{x}{2} \right)^2 = 6^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$SM = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 6^2 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{144 - x^2}$$

Diện tích xung quanh của hình chóp là: $S_{xq} = \frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{144 - x^2} = \frac{3x}{4}\sqrt{144 - x^2}$

Vận dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ hay $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ta được:

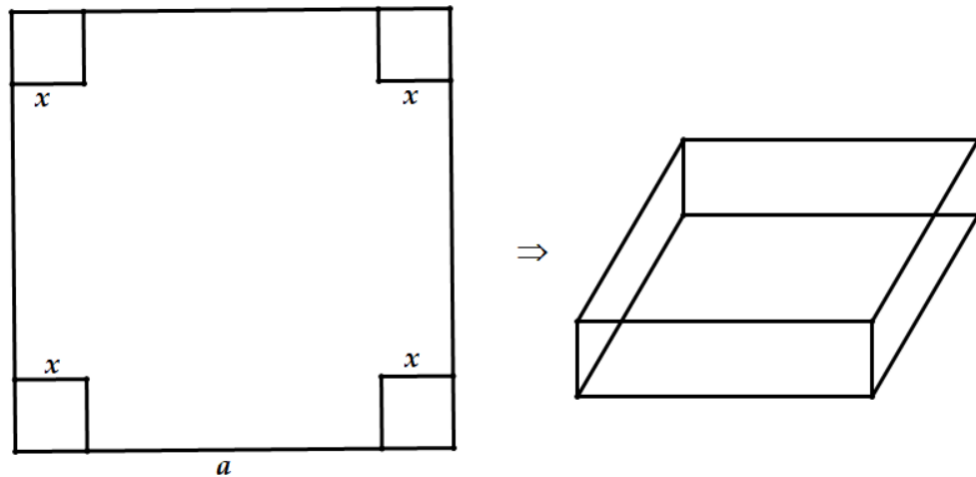
$$x \cdot \sqrt{144 - x^2} \leq \frac{x^2 + 144 - x^2}{2} = 72.$$

Do đó $S_{xq} \leq \frac{3}{4} \cdot 72 = 54.$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{144 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 144 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 72 \Leftrightarrow x = 6\sqrt{2}.$

Câu 15: Một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước a (cm), người ta muốn cắt đi ở bốn góc bốn hình vuông cạnh bằng x (cm) để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

Lời giải



Vì cạnh của hình vuông bị cắt là x (cm) nên ta có điều kiện $0 < x < a$

Chiều dài cạnh của miếng tôn sau khi cắt là $a - 2x$ (cm), chiều cao là x (cm)

Ta có thể tích hình hộp $V = x(a - 2x)(a - 2x) = \frac{1}{4}4x(a - 2x)(a - 2x).$

Ta chứng minh Câu toán: Với ba số không âm a, b, c thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$$

$$\begin{aligned}
&= (a+b+c) \left[(a+b)^2 + c^2 - c(a+b) \right] + c^3 - 3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c) (a^2 + b^2 + 2ab + c^2 - bc - ca - 3ab) \\
&= (a+b+c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
&= \frac{1}{2} (a+b+c) \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right) \geq 0
\end{aligned}$$

Khi đó $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

Đặt $a^3 = x$, $b^3 = y$, $c^3 = z$ thì

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \text{ hay } xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3$$

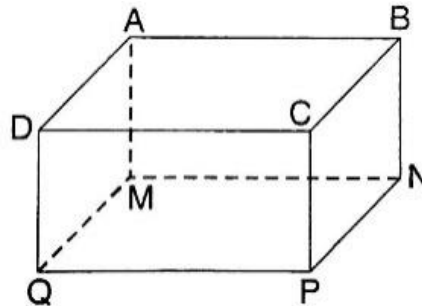
Áp dụng Câu toán trên ta có

$$\frac{1}{4} 4x(a-2x)(a-2x) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4x+a-2x+a-2x}{3} \right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8a^3}{27} = \frac{2a^3}{27}$$

Thể tích lớn nhất khi $4x = a - 2x$ suy ra $a = 6x$ hay $x = \frac{a}{6}$ (cm)

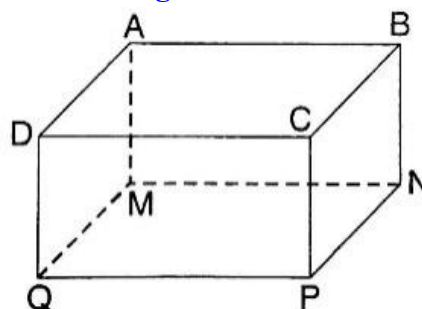
Vậy để thể tích hộp lớn nhất cần cắt 4 góc bốn hình vuông cạnh $\frac{a}{6}$ (cm)

Câu 16: Một gia đình muốn xây một cái bể chứa nước nhỏ ở góc vườn để chủ động tưới rau, bể có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy $MNPQ$ là hình vuông (hình vẽ)



Hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của bể sao cho tổng diện tích các mặt làm bể (bao gồm 4 mặt xung quanh và một mặt đáy) là nhỏ nhất, biết rằng thể tích của bể là $4m^3$.

Lời giải



Gọi độ dài cạnh đáy MN và độ dài chiều cao AM của bể lần lượt là x (m) và y (m) với $x > 0; y > 0$

Do thể tích bể bơi là $4m^3$ nên $x^2y = 4$ hay $y = \frac{4}{x^2}$

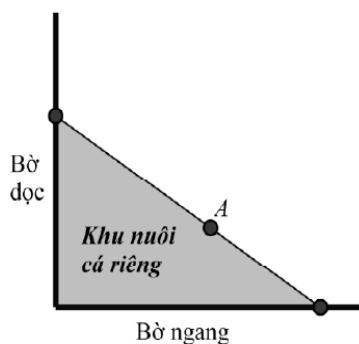
Tổng diện tích các mặt của bể bơi là: $S = 4xy + x^2 = x^2 + \frac{16}{x}$

$$S = x^2 - 4x + 4 + \frac{4x^2 + 16}{x} - 4 = (x - 2)^2 + \frac{4(x - 2)^2}{x} + 12 \geq 12$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2; y = 1$ (thỏa mãn)

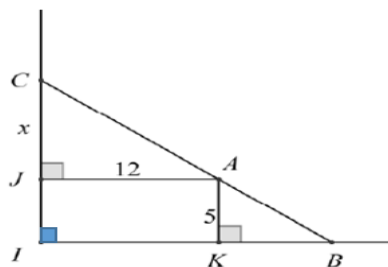
Vậy để tổng diện tích các mặt của bể nhỏ nhất khi độ dài cạnh mặt đáy và chiều cao của bể lần lượt là $2m$ và $1m$.

Câu 17: Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí **A**. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.



Lời giải

Đặt tên các điểm như hình vẽ.



Đặt $CJ = x, (x > 0)$.

Chứng minh hai tam giác AJC và BKA là hai tam giác đồng dạng, suy ra

$$\frac{CJ}{AK} = \frac{JA}{KB} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{12}{KB} \Leftrightarrow KB = \frac{60}{x}.$$

Diện tích của khu nuôi cá là: $S = \frac{1}{2}(x + 5) \cdot \left(\frac{60}{x} + 12 \right)$.

$$S(x) = \frac{1}{2} \left(60 + 12x + \frac{300}{x} + 60 \right)$$

$$S(x) = 6x + \frac{150}{x} + 60$$

Ta có $\left(\sqrt{6x} - \sqrt{\frac{150}{x}} \right)^2 \geq 0$ với mọi $x > 0$ suy ra

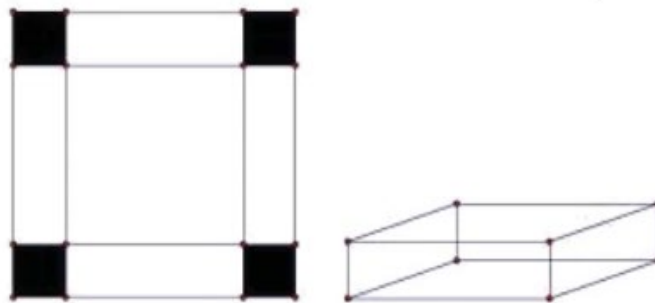
$$6x + \frac{150}{x} \geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} = 60$$

Dấu bằng xảy ra khi $6x = \frac{150}{x} \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$.

$$\text{Nên } S(x) = 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 60 + 60 = 120$$

Suy ra diện tích nhỏ nhất có thể giăng là 120 m^2 , đạt được khi $x = 5 \text{ m}$.

Câu 18: Cho tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải

Gọi độ dài cạnh hình vuông bị cắt là x (cm) ($0 < x < 6$)

Thể tích của khối hộp tạo thành là:

$$V = x(12 - 2x)^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Áp dụng BĐT AM-GM (Cauchy) cho 3 số dương, ta có

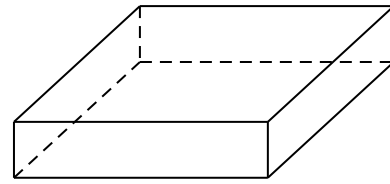
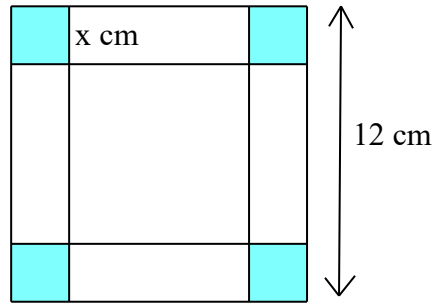
$$x(12 - 2x)^2 = 2.2x.(6 - x)(6 - x) \leq 2 \cdot \frac{(2x + 6 - x + 6 - x)^3}{27} = 128 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $2x = 6$

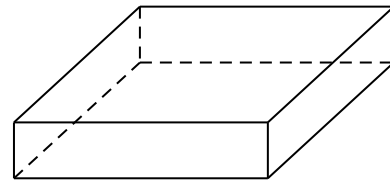
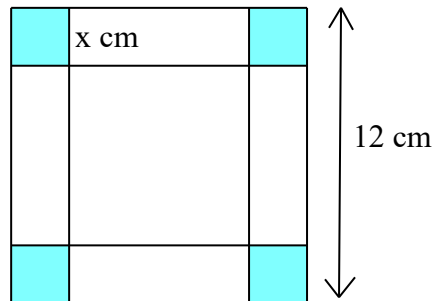
$$x = 3$$

Vậy khi độ dài cạnh hình vuông bị cắt bằng 3cm thì thể tích hình tạo thành lớn nhất.

Câu 19: Cho một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gấp tấm nhôm đó thành hình hộp không có nắp (Hình vẽ). Tìm x để không khí bên trong hộp là nhiều nhất.



Lời giải



Chiều cao của hình hộp là x (cm). ĐK: $0 < x < 6$.

Đáy của hình hộp là hình vuông cạnh bằng.

Không khí bên trong hộp là: $V = S_{xq} \cdot h = (12 - 2x)^2 \cdot x$ (cm³).

Ta có: $V = 4x(6 - x)(6 - x) = 2 \cdot 2x(6 - x)(6 - x)$.

Chứng minh bất đẳng thức: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Ta có: $(a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \geq 0$

$(a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b + c) \geq 0$

$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ac - bc - 3ab) \geq 0$

$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq 0$

$(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$ đúng với mọi a, b, c dương.

Vậy bất đẳng thức: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ được chứng minh.

Đặt $a = \sqrt[3]{2x}$, $b = \sqrt[3]{6 - x}$, $c = \sqrt[3]{6 - x}$. Khi đó ta có: $2x + 6 - x + 6 - x \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2x(6 - x)(6 - x)}$

Hay $12 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2x(6 - x)(6 - x)}$.

$\sqrt[3]{2x(6 - x)(6 - x)} \leq 4$

$2 \cdot 2x(6 - x)(6 - x) \leq 2 \cdot 4^3$

$V \leq 128$

Dấu “=” xảy ra khi $2x = 6 - x$ hay $x = 2$ (thỏa mãn).

Vậy không khí trong hộp nhiều nhất bằng $128(\text{cm}^3)$ khi $x = 2(\text{cm})$.

Câu 20:

Một gia đình muốn cải tạo một ao nước nhỏ thành một hồ nước đẹp hơn. Hồ nước có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp hai lần chiều rộng và người ta tính được có thể tích bằng $\frac{62\ 250}{3} \text{ m}^3$. Theo thị trường xây dựng, giá tiền xây dựng bình quân là $350\ 000$ đồng/ m^2 (bao gồm cả đáy và thành hồ). Hỏi chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng hồ nước trên là bao nhiêu tiền



Lời giải

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy hồ là x (m) (điều kiện $x > 0$)

Suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x$ (m).

Gọi y là chiều sâu của hồ (điều kiện $y > 0$)

Thể tích của hồ là $V = 2x \cdot x \cdot y = 2x^2 y$ (m^3).

Theo Câu ra ta có phương trình $2x^2 y = \frac{62\ 500}{3}$.

$$\text{Suy ra } y = \frac{31\ 250}{3x^2}$$

Diện tích xây dựng của hồ nước là

$$S = 2x \cdot x + 2 \cdot (2x + x) \cdot y = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + 6 \cdot x \cdot \frac{31\ 250}{3x^2} = 2x^2 + \frac{62\ 500}{x}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, với hai số dương a, b ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Ta có

$$S = 2x^2 + \frac{62\ 500}{x} = (2x^2 + 1250) + \frac{62\ 500}{x} - 1250 \geq 2\sqrt{2x^2 \cdot 1250} + \frac{62\ 500}{x} - 1250 = 100x + \frac{62\ 500}{x} - 1250$$

$$S \geq 100x + \frac{62\ 500}{x} - 1250 \geq 2\sqrt{100x \cdot \frac{62\ 500}{x}} - 1250 = 3750$$

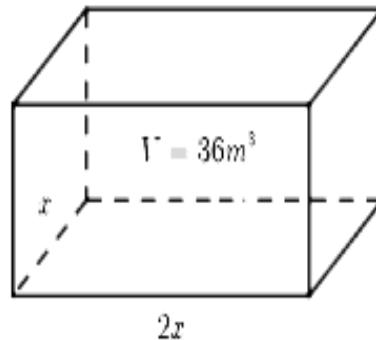
Khi đó $S_{\min} = 3750$.

$$\text{Dấu} = \text{xảy ra khi } \begin{cases} 2x^2 = 1250 \\ 100x = \frac{62\ 500}{x} \end{cases} \text{ Suy ra } x = 25$$

Vậy chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng hồ nước là

$$3750.350\,000 = 1\,312\,500\,000 \text{ đồng.}$$

Câu 21: Bác Duy muốn xây một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 36m^3 . Đáy bể có dạng hình chữ nhật với chiều rộng là $x(m)$, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bác Duy muốn phần diện tích cần xây (bao gồm diện tích xung quanh và đáy bể) là nhỏ nhất để tiết kiệm chi phí thì x phải bằng bao nhiêu?



Lời giải

Có hai số không âm a, b , áp dụng BĐT Cô – si. Ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Suy ra $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Diện tích đáy bể $x \cdot 2x = 2x^2 (m^2)$

Chiều cao bể $36 : (2x^2) = \frac{18}{x^2} m$

Diện tích xung quanh bể $2 \cdot (x + 2x) \cdot \frac{18}{x^2} = \frac{108}{x} m^2$

Áp dụng BĐT Cô – si cho $2x^2; \frac{54}{x}$ (vì $x > 0$)

Diện tích cần sơn $S = 2x^2 + \frac{108}{x} m^2 = 2x^2 + \frac{54}{x} + \frac{54}{x} \geq 3\sqrt{2x^2 \cdot \frac{54}{x} \cdot \frac{54}{x}} = 54$

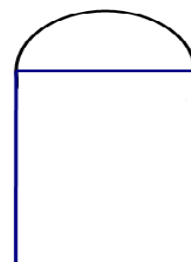
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2x^2 = \frac{54}{x}$

Suy ra $x^3 = 27$ suy ra $x = 3$

Vậy diện tích cần sơn nhỏ nhất là $x = 3m$.

Câu 22:

Bác Nam muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài của khuôn gỗ (các đường in đậm trong hình bên, bỏ qua độ rộng của cạnh khuôn gỗ) là $8m$. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa sổ có diện tích lớn nhất.



Lời giải

Gọi đường kính của nửa hình tròn là $x(m; 0 < x < 8)$

Khi đó bán kính: $\frac{x}{2}(m)$

Gọi cạnh còn lại của hình chữ nhật là y ($m; 0 < y < 8$)

Khi đó tổng độ dài của khuôn gỗ

$$\frac{\pi x}{2} + x + 2y = 8$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x + 2y = 8$$

$$y = 4 - \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)x$$

$$\text{S cửa sổ } S = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy = \frac{\pi x^2}{8} + xy$$

$$\frac{\pi x^2}{8} + x \left[4 - \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)x \right]$$

$$= \dots = -\frac{\pi + 4}{8} \left(x - \frac{16}{\pi + 4} \right)^2 + \frac{32}{\pi + 4} \leq \frac{32}{\pi + 4}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{18}{\pi + 4} \text{ nên } y = \frac{8}{\pi + 4}$$

Câu 23: Một gia đình muốn xây một hồ chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 400 m^3 đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là $500\,000 \text{ đồng/m}^2$ (bao gồm cả diện tích tường và đáy bể). Hỏi chi phí thuê nhân công thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây hồ chứa nước là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là x (m) ($x > 0$)

Suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $4x$ (m).

Gọi chiều cao của bể là y (m, $y > 0$).

$$\text{Thể tích của bể là } V = 4x \cdot x \cdot y = 400 \text{ suy ra } x^2 \cdot y = 100 \text{ suy ra } y = \frac{100}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích xây dựng của bể là } S &= 4x^2 + 2(x + 4x)y = 4x^2 + 10xy = 4x^2 + 10 \cdot \frac{100}{x^2} \cdot x \\ &= 4x^2 + \frac{1000}{x} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số không âm (với hai số không âm x, y ta có

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \text{ nên } x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \text{ suy ra } x + y \geq 2\sqrt{xy}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = y):$$

$$\text{Ta có } S = 4x^2 + \frac{1000}{x} = (4x^2 + 100) + \frac{1000}{x} - 100 \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot 100} + \frac{1000}{x} - 100 = 40x + \frac{1000}{x} - 100$$

.

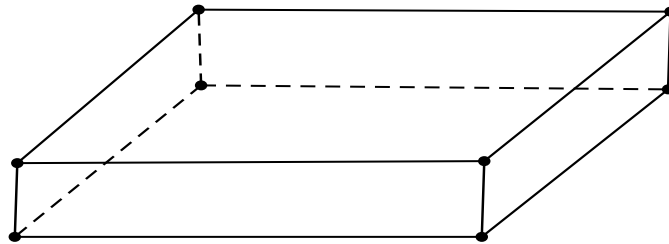
$$\text{Và } S \geq 40x + \frac{1000}{x} - 100 \geq 2\sqrt{40x \cdot \frac{1000}{x}} - 100 = 400 - 100 = 300.$$

Khi đó $S_{\min} = 300$.

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 4x^2 = 100 \\ 40x = \frac{1000}{x} \end{cases} \text{ suy ra } x = 5$$

Vậy chi phí thấp nhất thuê nhân công là $300.500\,000 = 150\,000\,000$ đồng = 150 triệu đồng

Câu 24: Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp dạng hình hộp chữ nhật thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều bằng 12cm ; tổng của của rộng và chiều cao là 24cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị lớn nhất ấy bằng bao nhiêu ?



Lời giải

Gọi chiều rộng là $x(cm)$ ($0 < x < 12$)

Chiều dài là $12 - x(cm)$

Chiều cao là $24 - x(cm)$

Ta có thể tích chiếc hộp là: $V = x(12 - x)(24 - x)(cm^3)$

Bất đẳng thức Cauchy 3 số không âm a, b, c ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Thật vậy, đặt $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c} \Rightarrow x, y, z \geq 0 \Rightarrow x + y + z \geq 0$

Ta phải chứng minh:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz \geq 0$$

$$(x + y + z) \left[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2 \right] - 3xy(x + y + z) \geq 0$$

$$(x + y + z) \left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz - yz \right] - 3xy(x + y + z) \geq 0$$

$$(x + y + z) \left[x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \right] \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0 \text{ (vì } x + y + z \geq 0 \text{)}$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm ta có:

$$V = x(12-x)(24-x)(cm^3)$$

$$\frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} \cdot x \cdot (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})(12-x)(24-x)$$

$$\leq \frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} \cdot \left[\frac{x + (\sqrt{3}-1)(12-x) + (2-\sqrt{3})(24-x)}{3} \right]^3$$

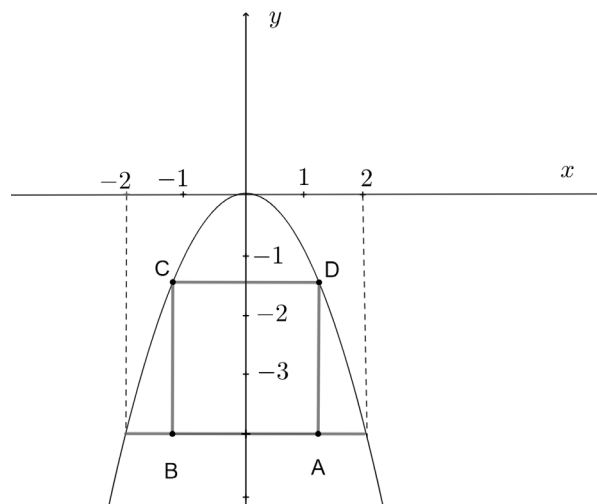
$$= \frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} \cdot \left[\frac{x + 12\sqrt{3} - \sqrt{3}x - 12 + x + 48 - 2x - 24\sqrt{3} + \sqrt{3}x}{3} \right]^3$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} \cdot \left[\frac{36 - 12\sqrt{3}}{3} \right]^3 = 384\sqrt{3}$$

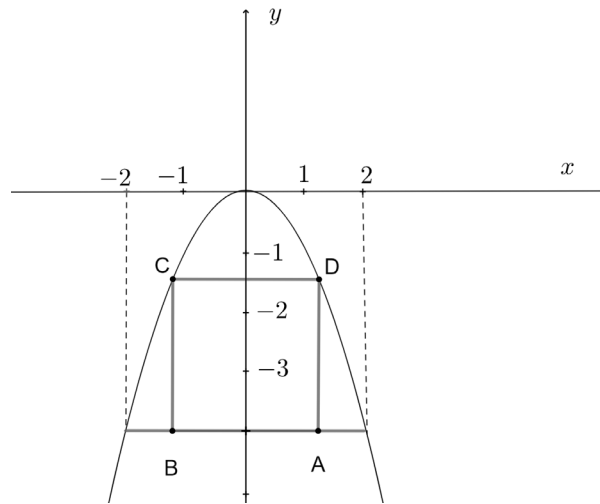
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $x = (\sqrt{3}-1)(12-x) = (2-\sqrt{3})(24-x) \Leftrightarrow x = 12 - 4\sqrt{3}$

Vậy $V_{\max} = 384\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 12 - 4\sqrt{3}$.

Câu 25: Cửa hầm lò khai thác than có dạng một parabol, khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4 mét, khoảng cách giữa hai chân cửa là 4 mét. Người ta muốn gia cố cho cửa lò bằng một khung thép hình chữ nhật sao cho hai đỉnh dưới của khung thép chạm đất, hai đỉnh trên của khung thép chống vào mái hầm (hình vẽ minh họa). Tìm kích thước của khung thép sao cho diện tích của hình chữ nhật tạo bởi khung thép lớn nhất.



Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Parabol có dạng $y = ax^2$ ($a < 0$)

Khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4 mét, khoảng cách giữa hai chân cửa là 4 mét nên parabol đi qua điểm $(2; -4)$

Suy ra:

$$-4 = a \cdot 2^2$$

$$a = -1$$

Parabol có dạng $y = -x^2$

Giả sử $ABCD$ là hình chữ nhật có độ dài $AB = CD = 2k$

Khi đó 4 đỉnh của khung thép hình chữ nhật có tọa độ là:

$$A(k; -4); B(-k; -4); C(-k; k^2); D(k; k^2) (k > 0)$$

Suy ra $AB = 2k; BC = 4 - k^2$

Khi đó diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $2k(4 - k^2)$

Ta có:

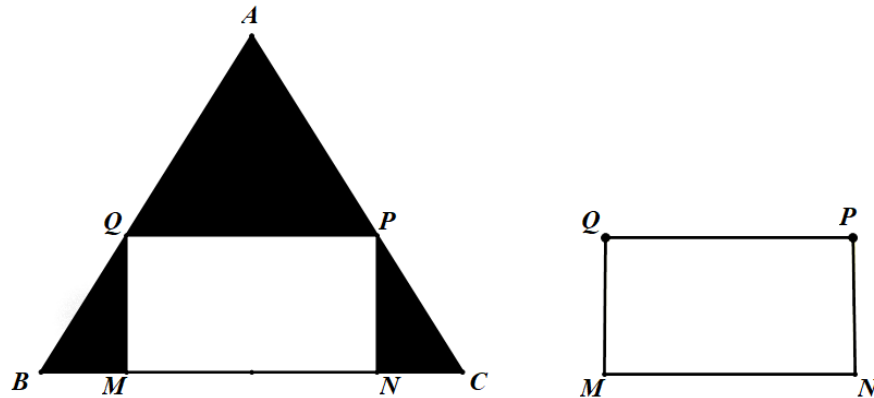
$$\begin{aligned} 2k(4 - k^2) - \frac{32}{3\sqrt{3}} &= -2 \left(k^3 - 4k + \frac{16}{3\sqrt{3}} \right) \\ &= -2 \left(k^2 - 2k \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} \right) \cdot \left(k + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) \\ &= -2 \left(k - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \left(k + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) \leq 0 \text{ với } k > 0 \end{aligned}$$

Suy ra

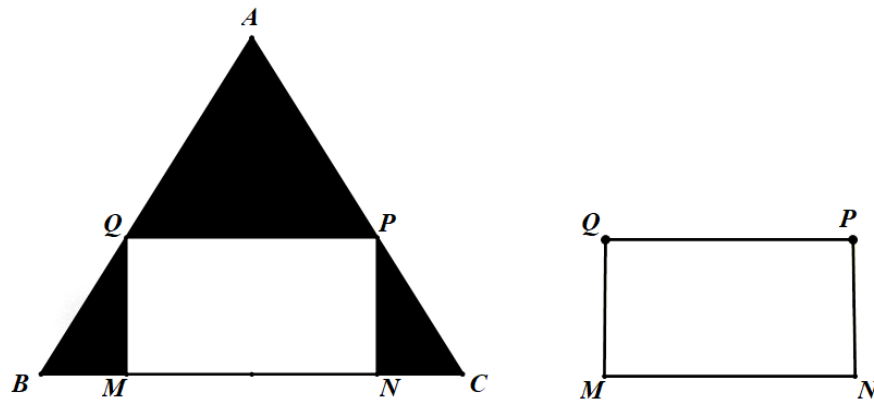
$$2k(4 - k^2) \leq \frac{32}{3\sqrt{3}}$$

Dấu “=” có khi $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Câu 26: Cho một tấm nhôm hình tam giác đều có cạnh bằng $20(cm)$. Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài đoạn MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất?



Lời giải



Gọi độ dài đoạn MB là $x(cm)$, ta có:

Độ dài đoạn NC là $x(cm)$

Độ dài đoạn MN là $20 - x - x = 20 - 2x(cm)$

Tam giác BQM vuông tại M có:

$$\tan B = \tan 60^\circ = \frac{QM}{BM} = \frac{QM}{x}$$

$$QM = x \cdot \tan 60^\circ = x \cdot \sqrt{3}$$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN \cdot QM = (20 - 2x) \cdot x \sqrt{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $S = (20 - 2x) \cdot x \sqrt{3} = 2\sqrt{3}(10 - x) \cdot x \leq 2\sqrt{3} \left(\frac{10 - x + x}{2} \right)^2$

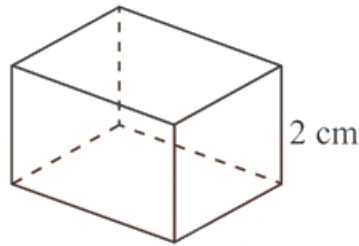
$$S \leq 2\sqrt{3} \cdot 25 = 50\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $10 - x = x$

$$x = 5$$

Vậy $MB = 5\text{ cm}$ để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

Câu 27: Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 , chiều cao của hộp là 2 cm . Tìm kích thước đáy của hộp sao cho sử dụng ít vật liệu nhất.



Lời giải

Gọi chiều rộng của đáy hộp là x ($x > 0$, cm).

Ta có chiều dài của hộp là $\frac{500}{2x}$ (cm)

Ta có diện tích toàn phần của chiếc hộp là

$$S = 2x \cdot \frac{500}{2x} + 2 \left(x + \frac{500}{2x} \right) \cdot 2 = 500 + 2x + \frac{250}{x} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương $2x$ và $\frac{250}{x}$, ta có

$$2x + \frac{250}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{250}{x}} = 20\sqrt{5}$$

$$\text{Từ đó } S \geq 500 + 20\sqrt{5} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } 2x = \frac{250}{x} \text{ hay } x^2 = \frac{250}{2} = 125$$

$$\text{Suy ra } x = 5\sqrt{5} \text{ cm, từ đó } \frac{250}{5\sqrt{5}} = 10\sqrt{5} \text{ cm.}$$

Vậy chiều rộng của hộp là $5\sqrt{5}\text{ cm}$, chiều dài là $10\sqrt{5}\text{ cm}$.

Chúng minh bổ sung Bất đẳng thức Cauchy

$$\text{Xét hai số thực dương } a, b \text{ ta có } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Thật vậy, vì a, b là các số thực dương nên

$$\text{Từ } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ suy ra } a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

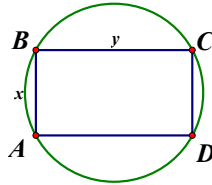
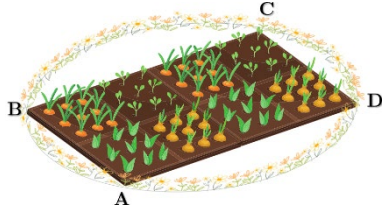
$$\text{Hay } (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

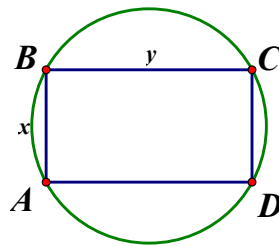
Vậy với hai số thực dương a, b bất kỳ ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$

Câu 28: Người ta muốn làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $640m^2$, để tạo thêm cảnh quan xung quanh đẹp hơn, người ta mở rộng thêm bốn phần diện tích để trồng hoa, tạo thành một đường tròn đi như hình vẽ, biết tâm hình tròn trùng với giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật. Khi đó chọn kích thước cạnh $ABCD$ như thế nào để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất?



Lời giải



Độ dài đường kính của đường tròn là đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$,

Vậy biểu thức xác định đường kính của đường tròn là $\sqrt{x^2 + y^2}$

Vậy bán kính của đường tròn là $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$

Diện tích đường tròn là $S = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4}$

Diện tích của hình chữ nhật là $S_{hcn} = xy = 640(m^2)$

Diện tích phần đất trồng hoa là

$$S' = S - S_{hcn} = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4} - xy$$

Có $(x - y)^2 \geq 0$ với mọi $x; y$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} \geq \frac{xy}{2} > 0$$

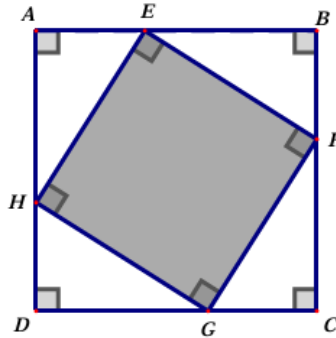
$$\Rightarrow \frac{\pi(x^2 + y^2)}{4} \geq \frac{\pi xy}{2} \Rightarrow \frac{\pi(x^2 + y^2)}{4} - xy \geq \frac{\pi xy}{2} - xy$$

$$\text{Vậy } S' \geq \frac{\pi xy}{2} - xy \Rightarrow S \geq 320\pi - 640$$

Vậy để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất thì $x = y$

Khi đó $x = y = 8\sqrt{10}$ (m)

Câu 29: Một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh 30m. Người ta xây dựng một vườn hoa dạng hình vuông $EFGH$ có các đỉnh E, F, G, H thuộc các cạnh của hình vuông $ABCD$ (hình vẽ). Xác định vị trí điểm E trên cạnh AB để diện tích vườn hoa nhỏ nhất.



Lời giải

Đặt $AE = x$ ($0 \leq x \leq 30$)

Chỉ ra được $S_{EFGH} = S_{ABCD} - 4S_{AEH} = 900 - 2x(30 - x)$

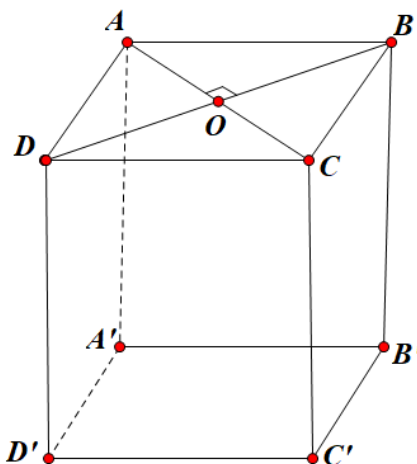
Do đó: $S_{EFGH} = 2x^2 - 60x + 900 = 2(x - 15)^2 + 450 \geq 450$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 15$ (tm)

Vậy min $S_{EFGH} = 450m^2$ khi $AE = 15m$

Câu 30: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Biết thể tích của nó là $1280cm^3$ và chiều cao là $20cm$. Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh.

Lời giải



Ta đặt $AC = 2m; BD = 2n$.

Diện tích đáy $ABCD$ là: $S = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 2n = mn$.

Mặt khác: $S = \frac{V}{h} = \frac{1280}{20} = 64 (cm^2)$

Vậy $2m.n = 64 (cm^2)$.

Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng là:

$$S_{xq} = 4.AB.20 = 80AB.$$

Vậy S_{xq} nhỏ nhất khi AB nhỏ nhất.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Ta có $AC \perp BD$ tại O .

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O , ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 = m^2 + n^2$.

Mặt khác $m^2 + n^2 \geq 2mn$. Do đó $AB^2 \geq 64 \Rightarrow AB \geq 8 (cm)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của AB là $8cm$ khi $m = n$ tức là khi $ABCD$ là hình vuông.

Giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh là $4.8.20 = 640 (cm^2)$.

Câu 31: Ông An có 2400 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau $a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b > 0$ (Bất đẳng thức AM-GM)

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(a + b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0, \forall a, b > 0$$

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x và y , với $2x + y = 2400$ ($0 < x, y < 2400$).

Diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là: $S = xy = \frac{1}{2} 2x.y \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{(2x + y)^2}{8} = \frac{2400^2}{8} = 720000$.

Vậy ông nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là $720000 m^2$.

Câu 32: Một trang chữ của một tạp chí cần diện tích là $384cm^2$. Lề trên, lề dưới là $3cm$; lề phải, lề trái là $2cm$. Hỏi chiều ngang và chiều dọc tối ưu của trang giấy lần lượt là bao nhiêu để diện tích trang giấy là nhỏ nhất?

Lời giải

Chứng minh bất đẳng thức CAUCHY:

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Thật vậy: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Gọi $a, b (cm) (a > 0, b > 0)$ là độ dài chiều dọc và chiều ngang của trang chữ suy ra kích thước trang giấy là $a + 6, b + 4$.

Ta có: $a.b = 384$ suy ra $b = \frac{384}{a}$ (1).

Diện tích trang sách là $S = (a + 6)(b + 4)$

Suy ra $S = 4a + \frac{2304}{a} + 408$.

Theo bất đẳng thức CAUCHY ta có:

$$S \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{2304}{a}} + 408 = 600.$$

Suy ra $\min S = 600$ suy ra $4a = \frac{2304}{a}$ suy ra $a = 24$

Suy ra chiều dọc và chiều ngang tối ưu của trang giấy là $30\text{cm}, 20\text{cm}$.

Câu 33: Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt nhân kỉ niệm ngày giải phóng hoàn toàn miền Nam 30 – 4. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 200 người tham gia. Để thu hút nhiều người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá 100 nghìn đồng/1tour thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour còn bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt đó là lớn nhất.

Lời giải

Gọi số lần giảm giá 100 000 đồng/1tour để thu được doanh thu lớn nhất là x (lần)

Sau x lần giảm thì giá của một tour là: $2\,000\,000 - 100\,000.x$ (đồng).

Vì cứ sau 1 lần giảm thì có thêm 20 người tham gia nên sau x lần giảm thì có thêm $20.x$ (người tham gia) nên tổng số người tham gia sau x lần giảm giá là: $200 + 20.x$ (người)

Tổng doanh thu sau x lần giảm giá là:

$$S = (2\,000\,000 - 100\,000.x) \cdot (200 + 20.x) \text{ (đồng)}$$

$$S = 100\,000.20 \cdot (20 - x) \cdot (10 + x) \text{ (đồng)}$$

$$S = 2\,000\,000 \cdot (-x^2 + 10x + 200) \text{ (đồng)}$$

$$\text{Xét } -x^2 + 10x + 200 = -(x^2 - 10x + 25 - 25 - 200) = -(x - 5)^2 + 225$$

$$\text{Vì } -(x - 5)^2 + 225 \leq 225 \text{ nên } 2\,000\,000 \cdot (-x^2 + 10x + 200) \leq 2\,000\,000.225 = 450\,000\,000$$

$$\text{hay } S \leq 450\,000\,000$$

$$S_{\max} = 450\,000\,000$$

Khi đó $x = 5$ (lần)

Vậy giá tour khi đó: $2\,000\,000 - 100\,000.5 = 1\,500\,000$ (đồng).

Câu 34: Kim cương là một khoáng sản quý, có rất nhiều giá trị và được sử dụng với nhiều mục đích khác nhau. Giá bán của một viên kim cương rất cao và phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố. Giả sử rằng giá bán của viên kim cương tỉ lệ với bình phương khối lượng của nó. Khi đem một viên kim cương cắt thành ba phần và vẫn bán với giá như trên (theo đúng tỉ lệ trên) thì tổng số tiền thu được tăng lên hay giảm đi? Trong trường hợp nào, giá bán của viên kim cương ban đầu giảm nhiều nhất? và giảm bao nhiêu lần?

Lời giải

Giả sử viên kim cương ban đầu có khối lượng là m . Giá bán của viên kim cương tỉ lệ với bình phương khối lượng, nên giá bán là km^2 với k là một hằng số.

Khi cắt viên kim cương thành ba phần có khối lượng a, b, c sao cho $m = a + b + c$,

Giá bán của ba phần này lần lượt là ka^2, kb^2, kc^2

Tổng giá bán của ba phần là $ka^2 + kb^2 + kc^2 = k(a^2 + b^2 + c^2)$

Ta cần so sánh km^2 và $k(a^2 + b^2 + c^2)$

Vì $m = a + b + c$, ta có $m^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

Do đó $m^2 > a^2 + b^2 + c^2$,

Điều này có nghĩa là $km^2 > k(a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy tổng số tiền thu được sau khi cắt giảm đi so với giá bán của viên kim cương ban đầu.

Sau giảm giá nhiều nhất xảy ra khi $a^2 + b^2 + c^2$ nhỏ nhất, tức là $a = b = c = \frac{m}{3}$

Trong trường hợp này, tổng giá bán là: $k\left(\left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^2\right) = k\frac{m^2}{3}$

So với giá bán ban đầu km^2 , giá bán giảm đi $km^2 - k\frac{m^2}{3} = \frac{2}{3}km^2$

Vậy giá bán giảm đi $\frac{2}{3}$ lần so với giá bán ban đầu.

Và giảm giá nhiều nhất khi chia thành 3 phần bằng nhau.

Câu 35: Công ty sản xuất thùng gỗ muốn thiết kế số lượng lớn thùng đựng hàng hóa bên trong, dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp với thể tích là $62,5\text{dm}^3$. Để tiết kiệm vật liệu gỗ làm thùng, người ta cần thiết kế thùng sao cho có tổng S diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất. Hỏi S có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

* **Chứng minh bất đẳng thức Cauchy với ba số không âm a, b, c :** $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Giải:

Đặt $a = x^3; b = y^3; c = z^3$ suy ra $x + y + z \geq 0$

Bất đẳng thức qui được về: $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ hay $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$

Xét $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)^3 - 3z(x + y)(x + y + z) - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)\left[(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy\right]$

$$\begin{aligned}
&= (x+y+z)[x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-3xz-3yz-3xy] \\
&= (x+y+z)[x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz] \\
&= \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2] \geq 0
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$

Từ đó suy ra $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

* Áp dụng giải Câu toán:

Gọi a (dm) là độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ ($a > 0$)

Theo đề Câu ta có chiều cao của lăng trụ là $h = \frac{62,5}{a^2}$

Diện tích xung quang của hình lăng trụ đứng là:

$$S = 4 \cdot \frac{62,5}{a^2} \cdot a + a^2 = \frac{250}{a} + a^2 = \frac{125}{a} + \frac{125}{a} + a^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có:

$$S \geq 3\sqrt[3]{\frac{125}{a} \cdot \frac{125}{a} \cdot a^2} = 75$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{125}{a} = a^2$ hay $a = 5$

Vậy diện tích gỗ nhỏ nhất để sản xuất thùng là 75dm^2 khi độ dài cạnh đáy là 5dm .

Câu 36: Cửa hàng nhà bác Dũng chuyên kinh doanh máy tính tại Hà Nội. Một loại máy tính có giá nhập vào một chiếc là 18 triệu đồng và bán ra với giá 22 triệu đồng. Với giá bán như trên thì một năm số lượng máy tính bán được dự kiến là 500 chiếc. Để tăng thêm lượng tiêu thụ dòng máy tính này, bác Dũng dự định giảm giá bán và ước lượng cứ giảm 200 nghìn đồng một chiếc thì số lượng máy tính bán ra trong một năm sẽ tăng 50 chiếc. Vậy bác Dũng phải bán với giá bao nhiêu để sau khi giảm giá lợi nhuận thu được sẽ cao nhất?

Lời giải

Đổi 200 nghìn đồng = 0,2 triệu đồng.

Gọi x là giá mới mà cửa hàng bán một chiếc máy tính (triệu đồng, $x > 18$)

Số tiền cửa hàng bị giảm khi bán một chiếc máy tính là $22 - x$ (triệu đồng)

Khi đó, số lượng máy tính bán ra được trong một năm là:

$$500 + 50(22 - x) : 0,2 = 6000 - 250x \text{ (chiếc)}$$

Lợi nhuận mà cửa hàng thu được khi bán giá mới là:

$$(6000 - 250x) \cdot (x - 18) = -250x^2 + 10500x - 108000 = -250 \cdot (x^2 - 42x + 432) \\ = -250(x - 21)^2 + 2250 \geq 2250$$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 21 = 0$ hay $x = 21$

Vậy giá bán mới một chiếc máy tính của cửa hàng là 21 triệu đồng, giá trị lợi nhuận thu được cao nhất là 2250 (triệu đồng).

Câu 37: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy móc có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ (người này sẽ giám sát tất cả các máy hoạt động). Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất?

Lời giải

Gọi số máy móc công ty nên sử dụng là x (máy). Điều kiện $x > 0$.

Trong một giờ, số quả bóng tennis sản xuất được là $30x$ (quả bóng)

Như vậy, số giờ để sản xuất 8000 quả bóng là $\frac{8000}{30x}$ (giờ)

Mỗi giờ phải trả 192 nghìn đồng cho người giám sát và chi phí thiết lập cho mỗi máy là 200 nghìn đồng nên chi phí sản xuất là

$$B = 200000x + \frac{8000}{30x} \cdot 192000 = 200000x + \frac{51200000}{x} \text{ (đồng)}.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau $a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b > 0$ (Bất đẳng thức AM-GM)

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(a + b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0, \forall a, b > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương $200000x$ và $\frac{51200000}{x}$, ta được

$$200000x + \frac{51200000}{x} \geq 2\sqrt{200000x \cdot \frac{51200000}{x}} = 6400000.$$

Dấu “=” xảy ra khi $200000x = \frac{51200000}{x} \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow x = 16$ (nhận) hay $x = -16$ (loại).

Vậy số máy móc công ty nên sử dụng là 16 máy để chi phí sản xuất là thấp nhất.

Câu 38: Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và

y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Lời giải

Ta có phương trình $3000x + 4000y = 2023000$

$$3x + 4y = 2023$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{2023 - 3x}{4} \geq 1, \text{ suy ra } 1 \leq x \leq \frac{2019}{3} = 673$$

$$\text{Mặt khác ta có } y = \frac{2023 - 3x}{4} = \frac{2024 - 4x - 1 + x}{4} = 506 - x + \frac{x - 1}{4}$$

Để y nguyên thì $x - 1$ chia hết cho 4, suy ra $x = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}$.

Kéo theo $y = 505 - 3k$.

Do đó $1 \leq 1 + 4k \leq 673$ hay $0 \leq k \leq 168$.

Vậy có 169 cặp