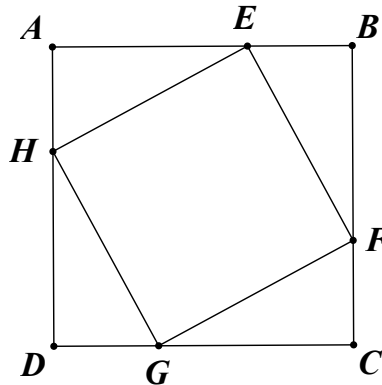
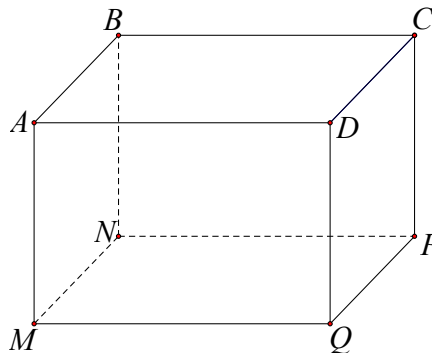


CHUYÊN ĐỀ 13_CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ CÓ LIÊN QUAN CỰC TRỊ

Câu 1: Bác Bình có mảnh vườn hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10m. Ở bốn góc vườn, bác Bình muốn trồng hoa thành các hình tam giác vuông bằng nhau (hình vẽ). Hãy tính khoảng cách từ góc vườn A đến vị trí E sao cho tứ giác $EFGH$ có chu vi nhỏ nhất.



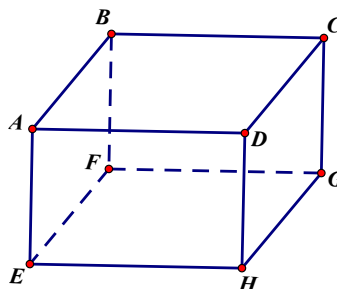
Câu 2: Bác An muốn đặt đóng một chiếc hộp đựng quà lưu niệm có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy $ABCD$ là hình vuông như hình dưới đây.



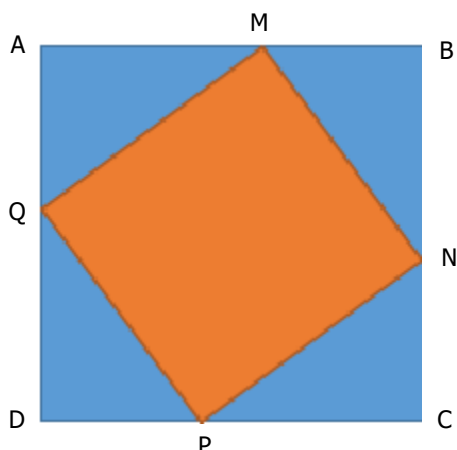
Để món quà trở nên đặc biệt, bác An muốn mạ bốn mặt xung quanh và mặt đáy dưới (mặt $MNPQ$) của chiếc hộp bằng kim loại quý (không mạ nắp hộp). Em hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của hộp quà sao cho tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất biết rằng thể tích của chiếc hộp là $4dm^3$.

Câu 3: Một cửa hàng xăng dầu cần xây một bồn chứa dầu hình trụ bằng thép có thể tích $54\pi (m^3)$ và giá mỗi mét vuông thép là 500 ngàn đồng. Hỏi số tiền thấp nhất mà cửa hàng phải trả ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

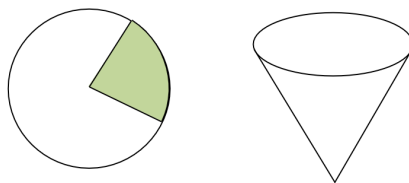
Câu 4: Một trang trại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích $27 m^3$ để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu bằng chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên liệu nhất (không tính đến bề dày của thành hầm).



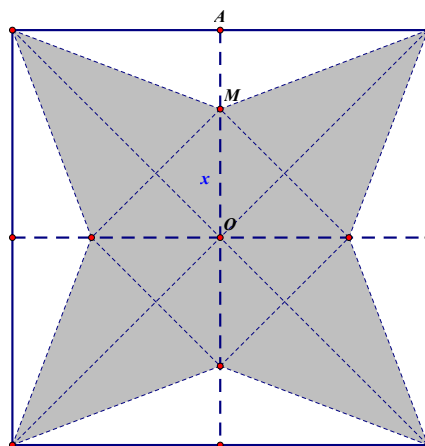
Câu 5: Một cái sân hình vuông ABCD có cạnh là 8 m. Người ta muốn lát gạch màu khác để trang trí lên mảnh sân hình vuông MNPQ nội tiếp trong sân hình vuông ABCD. Tìm vị trí của M, N, P, Q để hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất



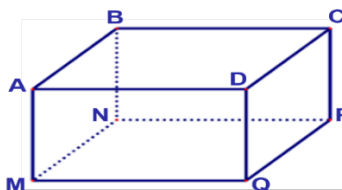
Câu 6: Với một tấm tôn hình tròn có bán kính $R = 6 \text{ cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt một phần (dạng hình quạt) của hình tròn như hình bên dưới. Thể tích lớn nhất của hình nón có được khi người ta cắt cung tròn của hình quạt có chiều dài là bao nhiêu?



Câu 7: Cắt một miếng giấy hình vuông như hình bên và xếp thành hình một hình chóp tứ giác đều. Biết các cạnh hình vuông bằng 20 cm , $OM = x(\text{cm})$. Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất.



Câu 8: Bác Minh muốn đặt đóng một chiếc hộp đựng quà lưu niệm có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy ABCD là hình vuông như hình dưới đây.

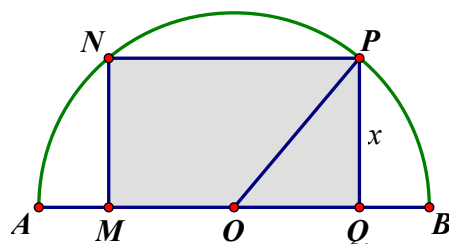


Để món quà trở nên đặc biệt, bác Minh muốn mạ bốn mặt xung quanh và mặt đáy dưới (đáy MNPQ) của chiếc hộp bằng kim loại quý (không mạ nắp hộp). Em hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy

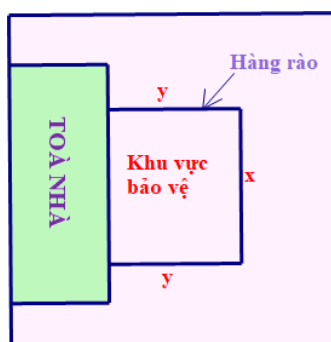
và chiều cao AM của hộp quà sao cho tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất biết rằng thể tích của chiếc hộp là $4dm^3$.

Câu 9: Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa đó là nhỏ nhất.

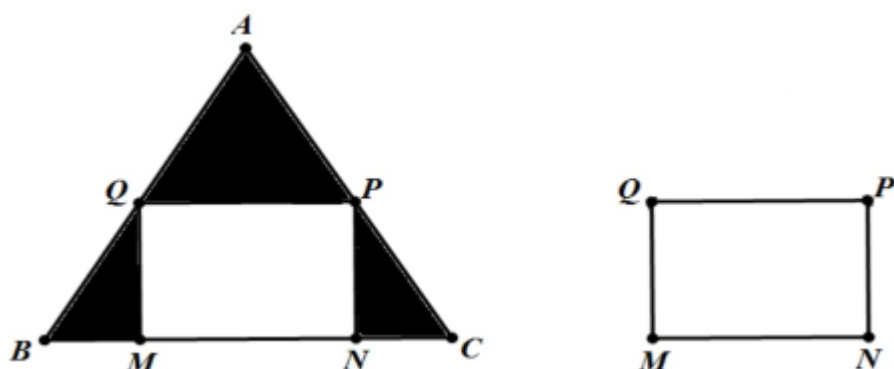
Câu 10: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp trong nửa đường tròn (O) bán kính $10cm$, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn (như hình vẽ).



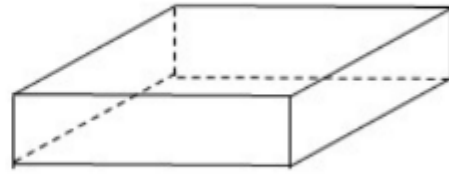
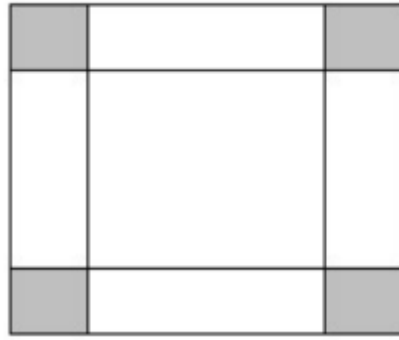
Câu 11: Người ta cần lập hàng rào quanh khu vực bảo vệ có dạng hình chữ nhật cho một toà nhà như hình vẽ bên. Hỏi nếu có 80m hàng rào bao quanh 3 mặt như trên thì diện tích tối đa của khu vực bảo vệ là bao nhiêu?



Câu 12: Cho một tấm nhôm có hình tam giác đều có cạnh bằng $100cm$. Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.



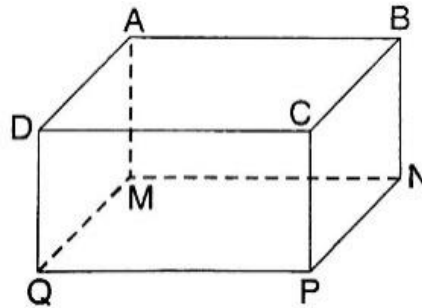
Câu 13: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để thể tích của hộp là lớn nhất.



Câu 14: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên đều bằng 6 cm , độ dài cạnh đáy là $x\text{ (cm)}$. Tìm x để diện tích xung quanh của hình chóp đều đó là lớn nhất.

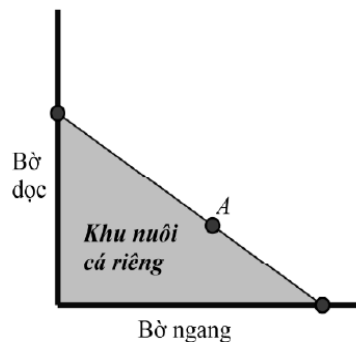
Câu 15: Một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước $a\text{ (cm)}$, người ta muốn cắt đi ở bốn góc bốn hình vuông cạnh bằng $x\text{ (cm)}$ để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

Câu 16: Một gia đình muốn xây một cái bể chứa nước nhỏ ở góc vườn để chủ động tưới rau, bể có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy $MNPQ$ là hình vuông (hình vẽ)

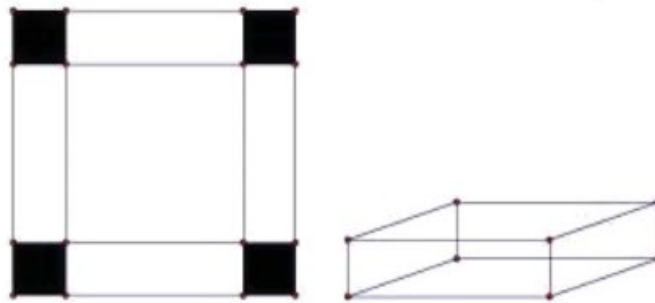


Hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của bể sao cho tổng diện tích các mặt làm bể (bao gồm 4 mặt xung quanh và một mặt đáy) là nhỏ nhất, biết rằng thể tích của bể là 4 m^3 .

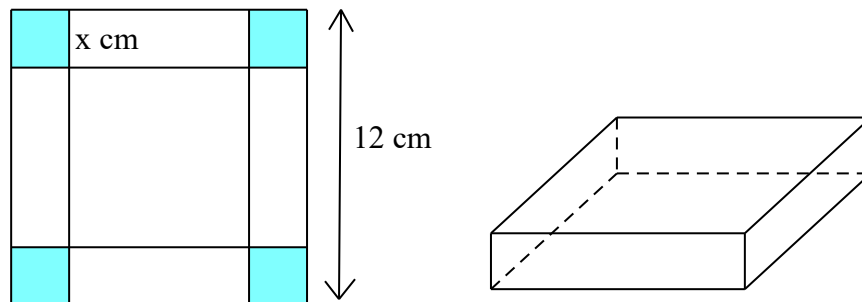
Câu 17: Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A . Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m .



Câu 18: Cho tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\text{ (cm)}$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Câu 19: Cho một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gấp tấm nhôm đó thành hình hộp không có nắp (Hình vẽ). Tìm x để không khí bên trong hộp là nhiều nhất.

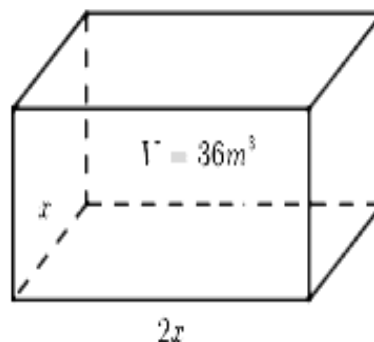


Câu 20:

Một gia đình muốn cải tạo một ao nước nhỏ thành một hồ nước đẹp hơn. Hồ nước có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp hai lần chiều rộng và người ta tính được có thể tích bằng $\frac{62\ 250}{3} \text{ m}^3$. Theo thị trường xây dựng, giá tiền xây dựng bình quân là 350 000 đồng/ m^2 (bao gồm cả đáy và thành hồ). Hỏi chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng hồ nước trên là bao nhiêu tiền

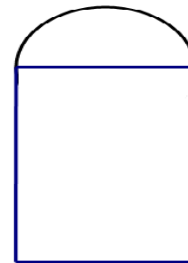


Câu 21: Bác Duy muốn xây một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 36 m^3 . Đáy bể có dạng hình chữ nhật với chiều rộng là $x(\text{m})$, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bác Duy muốn phần diện tích cần xây (bao gồm diện tích xung quanh và đáy bể) là nhỏ nhất để tiết kiệm chi phí thì x phải bằng bao nhiêu?



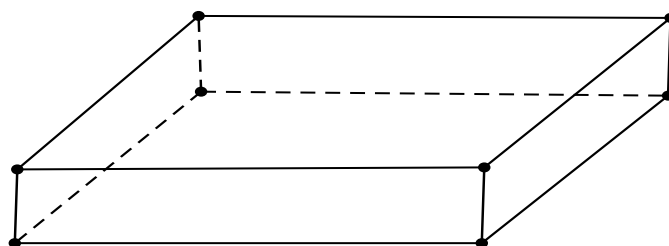
Câu 22:

Bác Nam muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài của khuôn gỗ (các đường in đậm trong hình bên, bỏ qua độ rộng của cạnh khuôn gỗ) là $8m$. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa sổ có diện tích lớn nhất.

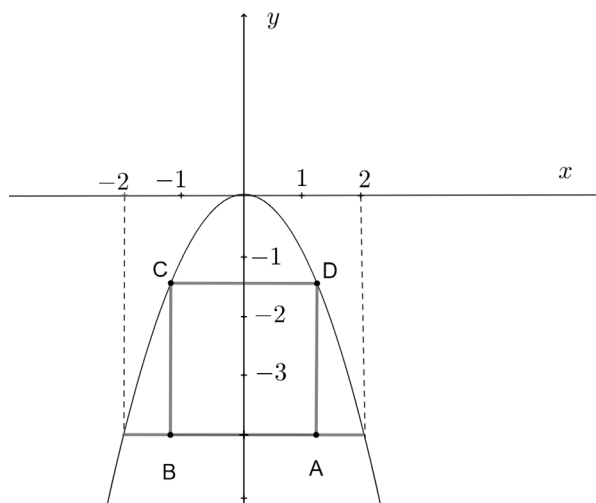


Câu 23: Một gia đình muốn xây một hồ chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $400 m^3$ đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là $500\,000$ đồng/ m^2 (bao gồm cả diện tích tường và đáy bể). Hỏi chi phí thuê nhân công thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây hồ chứa nước là bao nhiêu triệu đồng?

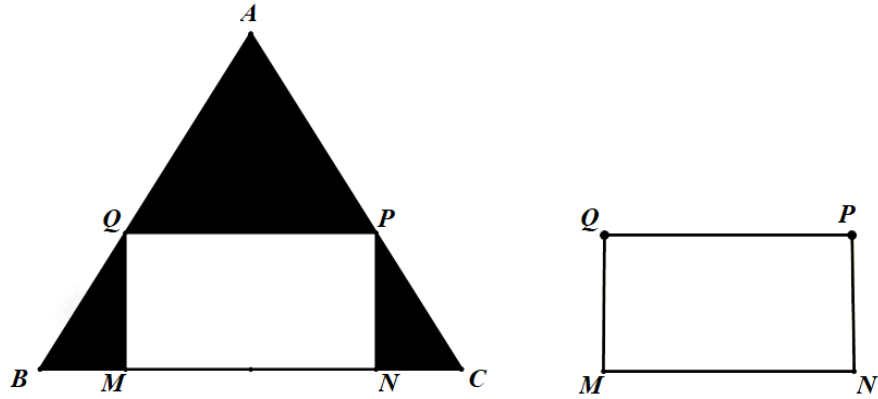
Câu 24: Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp dạng hình hộp chữ nhật thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều bằng $12cm$; tổng của chiều rộng và chiều cao là $24cm$. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị lớn nhất ấy bằng bao nhiêu?



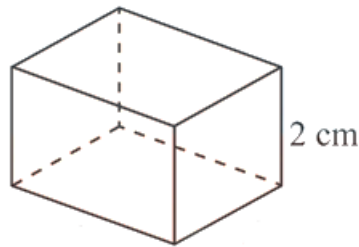
Câu 25: Cửa hầm lò khai thác than có dạng một parabol, khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4 mét, khoảng cách giữa hai chân cửa là 4 mét. Người ta muốn gia cố cho cửa lò bằng một khung thép hình chữ nhật sao cho hai đỉnh dưới của khung thép chạm đất, hai đỉnh trên của khung thép chống vào mái hầm (hình vẽ minh họa). Tìm kích thước của khung thép sao cho diện tích của hình chữ nhật tạo bởi khung thép lớn nhất.



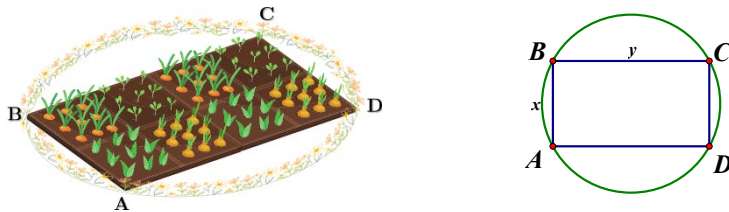
Câu 26: Cho một tấm nhôm hình tam giác đều có cạnh bằng $20(cm)$. Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài đoạn MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất?



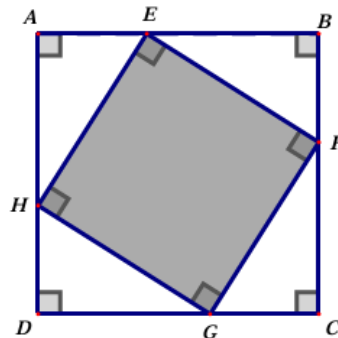
Câu 27: Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 , chiều cao của hộp là 2 cm . Tìm kích thước đáy của hộp sao cho sử dụng ít vật liệu nhất.



Câu 28: Người ta muốn làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 640 m^2 , để tạo thêm cảnh quan xung quanh đẹp hơn, người ta mở rộng thêm bốn phần diện tích để trồng hoa, tạo thành một đường tròn đi như hình vẽ, biết tâm hình tròn trùng với giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật. Khi đó chọn kích thước cạnh $ABCD$ như thế nào để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất?



Câu 29: Một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh 30 m . Người ta xây dựng một vườn hoa dạng hình vuông $EFGH$ có các đỉnh E, F, G, H thuộc các cạnh của hình vuông $ABCD$ (hình vẽ). Xác định vị trí điểm E trên cạnh AB để diện tích vườn hoa nhỏ nhất.

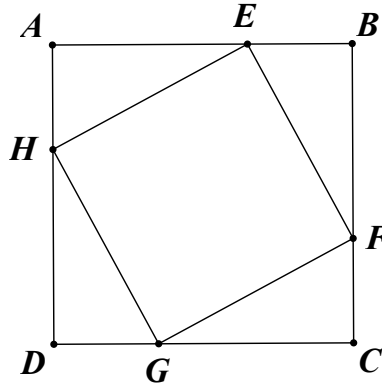


Câu 30: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Biết thể tích của nó là 1280 cm^3 và chiều cao là 20 cm . Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh.

- Câu 31:** Ông An có 2400 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu?
- Câu 32:** Một trang chữ của một tạp chí cần diện tích là 384cm^2 . Lề trên, lề dưới là 3cm ; lề phải, lề trái là 2cm . Hỏi chiều ngang và chiều dọc tối ưu của trang giấy lần lượt là bao nhiêu để diện tích trang giấy là nhỏ nhất?
- Câu 33:** Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt nhân kỉ niệm ngày giải phóng hoàn toàn miền Nam 30 – 4. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 200 người tham gia. Để thu hút nhiều người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá 100 nghìn đồng/1tour thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour còn bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt đó là lớn nhất.
- Câu 34:** Kim cương là một khoáng sản quý, có rất nhiều giá trị và được sử dụng với nhiều mục đích khác nhau. Giá bán của một viên kim cương rất cao và phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố. Giả sử rằng giá bán của viên kim cương tỉ lệ với bình phương khối lượng của nó. Khi đem một viên kim cương cắt thành ba phần và vẫn bán với giá như trên (theo đúng tỉ lệ trên) thì tổng số tiền thu được tăng lên hay giảm đi? Trong trường hợp nào, giá bán của viên kim cương ban đầu giảm nhiều nhất? và giảm bao nhiêu lần?
- Câu 35:** Công ty sản xuất thùng gỗ muốn thiết kế số lượng lớn thùng đựng hàng hóa bên trong, dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp với thể tích là $62,5\text{dm}^3$. Để tiết kiệm vật liệu gỗ làm thùng, người ta cần thiết kế thùng sao cho có tổng S diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất. Hỏi S có giá trị bằng bao nhiêu?
- Câu 36:** Cửa hàng nhà bác Dũng chuyên kinh doanh máy tính tại Hà Nội. Một loại máy tính có giá nhập vào một chiếc là 18 triệu đồng và bán ra với giá 22 triệu đồng. Với giá bán như trên thì một năm số lượng máy tính bán được dự kiến là 500 chiếc. Để tăng thêm lượng tiêu thụ dòng máy tính này, bác Dũng dự định giảm giá bán và ước lượng cứ giảm 200 nghìn đồng một chiếc thì số lượng máy tính bán ra trong một năm sẽ tăng 50 chiếc. Vậy bác Dũng phải bán với giá bao nhiêu để sau khi giảm giá lợi nhuận thu được sẽ cao nhất?
- Câu 37:** Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy móc có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ (người này sẽ giám sát tất cả các máy hoạt động). Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất?
- Câu 38:** Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

CHUYÊN ĐỀ 13_CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ CÓ LIÊN QUAN CỰC TRỊ

Câu 1: Bác Bình có mảnh vườn hình vuông ABCD có cạnh bằng 10m. Ở bốn góc vườn, bác Bình muốn trồng hoa thành các hình tam giác vuông bằng nhau (hình vẽ). Hãy tính khoảng cách từ góc vườn A đến vị trí E sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.



Lời giải

Ta có: $\triangle AEH = \triangle AFD = \triangle CGE = \triangle DHG$ suy ra

$HE = FE = FG = GH$ và $\widehat{AEH} = \widehat{DFE}$ mà

$\widehat{AEH} + \widehat{FED} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{AEH} + \widehat{FED} + \widehat{HDF} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{HDF} = 90^\circ$

Vậy tứ giác EFGH là hình vuông.

Đặt $AE = x(m)$, điều kiện $0 < x < 10$

Suy ra $AH = 10 - x(m)$

Tam giác AHE là tam giác vuông tại A có:

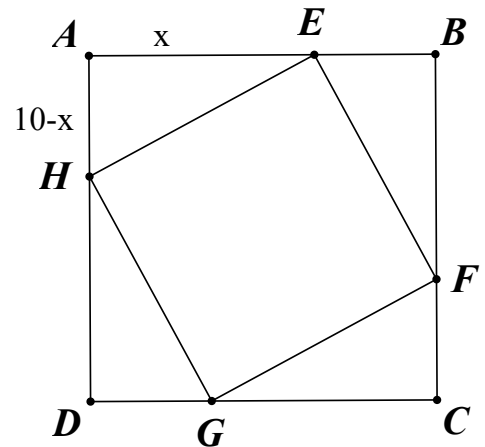
$$HE^2 = AH^2 + AE^2$$

$$\text{hay } HE^2 = x^2 - (10 - x)^2$$

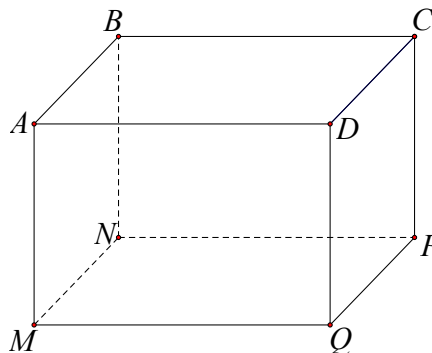
$$HE^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50 \geq 50$$

$$\text{Suy ra } HE \geq \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Chu vi tứ giác EFGH bằng $4HE$. Vậy chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất. HE nhỏ nhất khi $HE = 5\sqrt{2}$ khi $x = 5$.



Câu 2: Bác An muốn đặt đóng một chiếc hộp đựng quà lưu niệm có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy ABCD là hình vuông như hình dưới đây.



Để món quà trở nên đặc biệt, bác An muốn mạ bốn mặt xung quanh và mặt đáy dưới (mặt MNPQ) của chiếc hộp bằng kim loại quý (không mạ nắp hộp). Em hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt

đáy và chiều cao AM của hộp quả sao cho tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất biết rằng thể tích của chiếc hộp là $4dm^3$.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh MN là $x(dm)$ ($x > 0$)

Gọi độ dài chiều cao AM là $h(dm)$ ($h > 0$)

Do thể tích của chiếc hộp là $4dm^3$ nên ta có: $x^2h = 4$

$$\text{Suy ra } h = \frac{4}{x^2}$$

Diện tích cần mạ kim loại quý của chiếc hộp là :

$$\begin{aligned} S &= x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x} \\ &= \left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(4x + \frac{16}{x}\right) - 4 = (x-2)^2 + \left(4x + \frac{16}{x}\right) - 4 \end{aligned}$$

Chứng minh bất đẳng thức Cô – si.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho 2 số $4x > 0$ và $\frac{16}{x} > 0$ và $(x-2)^2 \geq 0$ ta có:

$$S \geq 0 + 2\sqrt{4x \cdot \frac{16}{x}} - 4 = 0 + 2 \cdot 8 - 4 = 12$$

$$\text{Dấu «} = \text{» xảy ra khi } \begin{cases} x-2=0 \\ 4x = \frac{16}{x} \end{cases}$$

$$\text{Ta giải ra được } x = 2 \text{ từ đó suy ra } h = \frac{4}{2^2} = 1$$

Vậy khi độ dài cạnh đáy $MN = 2dm$ và chiều cao $AM = 1dm$ thì diện tích cần mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất bằng $12dm^2$.

Câu 3: Một cửa hàng xăng dầu cần xây một bồn chứa dầu hình trụ bằng thép có thể tích $54\pi(m^3)$ và giá mỗi mét vuông thép là 500 ngàn đồng. Hỏi số tiền thấp nhất mà cửa hàng phải trả ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Ta chứng minh với a, b, c là các số thực không âm, thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (1)

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thật vậy

* Với $a = 0, b = 0, c = 0$ thì bất đẳng thức luôn đúng.

* Với 3 số a, b, c dương.

$$\text{Đặt: } x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c} \Rightarrow x, y, z > 0 \Rightarrow x + y + z > 0$$

Bất đẳng thức (1) trở thành $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$

$$\begin{aligned} \text{Xét } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x+y+z) \left[((x+y)^2 - (x+y)z + z^2) \right] - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \frac{1}{2} (x+y+z) \left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \right] \geq 0, (\forall x, y, z > 0) \end{aligned}$$

Vậy $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ hay $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

* Gọi bán kính đáy là $x(m)$ ($x > 0$), chiều cao bồn chứa là $h(m)$.

Thể tích chứa của bồn là $V = \pi x^2 \cdot h = 54\pi \Rightarrow h = \frac{54}{x^2} (m)$.

Diện tích toàn phần của bồn chứa là: $S_{TP} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot h = 2\pi x^2 + \frac{108\pi}{x} (m^2)$

Để chi phí xây dựng thấp nhất thì diện tích toàn phần của bồn phải nhỏ nhất.

Ta có $S_{TP} = 2\pi x^2 + \frac{108\pi}{x}$

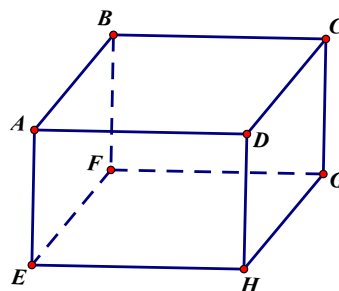
Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$2\pi x^2 + \frac{108\pi}{x} = 2\pi x^2 + \frac{54\pi}{x} + \frac{54\pi}{x} \geq 3\sqrt[3]{2\pi x^2 \cdot \frac{54\pi}{x} \cdot \frac{54\pi}{x}} = 54\pi$$

S_{TP} đạt giá trị nhỏ nhất bằng $54\pi (m^2)$ khi $2\pi x^2 = \frac{54\pi}{x} \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3 (m)$

Khi đó số tiền xây bồn thấp nhất mà cửa hàng phải trả là: $54\pi \cdot 500000 \approx 84\,823\,002$ (đồng).

Câu 4: Một trang trại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích $27 m^3$ để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu bằng chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên liệu nhất (không tính đến bề dày của thành hầm).



Lời giải

Gọi chiều rộng (và chiều sâu) của hầm là $x (m; x > 0)$

Vì thể tích của hàm là $27m^3$ nên chiều dài của hàm là: $\frac{27}{x^2}(m)$.

Biểu thức biểu thị diện tích toàn phần của hàm là:

$$2x \cdot x + 2x \cdot \frac{27}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{27}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x} = 2\left(x^2 + \frac{54}{x}\right) = 2 \cdot A.$$

$$\text{Ta có: } A + 9 = x^2 + \frac{54}{x} + 9 = x^2 + \frac{27}{x} + \frac{27}{x} + 9$$

$$\left(\sqrt{x^2} - \sqrt{\frac{27}{x}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{27}{x} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{27}{x}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{27}{x}} + \sqrt{9}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{27}{x} + 9 \geq 2\sqrt{\frac{27}{x} \cdot 9}$$

$$\Rightarrow A + 9 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{27}{x}} + 2\sqrt{\frac{27}{x} \cdot 9} \Rightarrow A + 9 \geq 2\sqrt{27x} + 2\sqrt{\frac{27 \cdot 9}{x}}$$

$$\Rightarrow A + 9 \geq 4\sqrt{\sqrt{27x} \cdot \sqrt{\frac{27 \cdot 9}{x}}} = 4 \cdot 9 \Rightarrow A + 9 \geq 36.$$

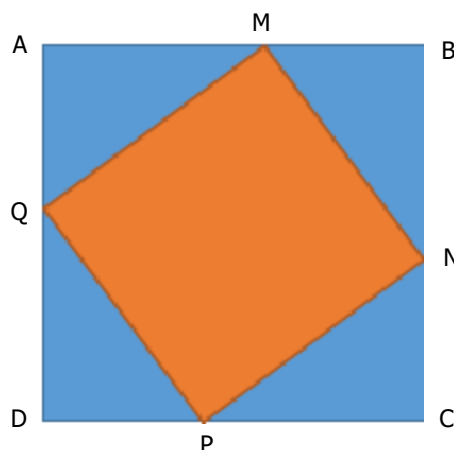
$$\Rightarrow A \geq 27$$

Đẳng thức xảy ra khi:

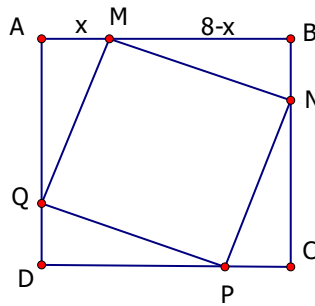
$$x^2 = \frac{27}{x} = 9 \Rightarrow x = 3.$$

Vậy khi kích thước chiều rộng là $3m$ và chiều dài là $\frac{27}{3^2} = 3(m)$ thì thi công hàm sẽ tiết kiệm nguyên liệu nhất.

Câu 5: Một cái sân hình vuông ABCD có cạnh là 8 m. Người ta muốn lát gạch màu khác để trang trí lên mảnh sân hình vuông MNPQ nội tiếp trong sân hình vuông ABCD. Tìm vị trí của M, N, P, Q để hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất



Lời giải



Gọi cái sân đó là hình vuông ABCD, phần lát gạch màu trang trí là hình vuông MNPQ

Chứng minh $\Delta AMQ = \Delta BNM = \Delta CPN = \Delta DQP$

Gọi $AM = x$ thì $MB = 8 - x$

Diện tích hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất khi tổng diện tích 4 tam giác vuông ở 4 góc hình vuông ABCD là lớn nhất. Gọi S là tổng diện tích 4 tam giác đó, ta có:

$$S = 2 \cdot AM \cdot AQ$$

$$\text{Mà } AM + AQ = AM + MB = 8 \text{ (m)}$$

$$(AM - MB)^2 \geq 0$$

$$AM^2 + MB^2 \geq 2 \cdot AM \cdot MB$$

$$(AM + MB)^2 \geq 4 \cdot AM \cdot MB$$

$$2 \cdot AM \cdot MB \leq \frac{(AM + MB)^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32$$

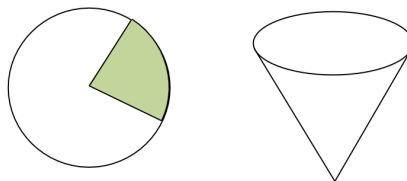
$$\text{Hay } S \leq 32$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } AM = MB = \frac{8}{2} = 4$$

Khi đó M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Vậy khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA thì hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất.

Câu 6: Với một tấm tôn hình tròn có bán kính $R = 6 \text{ cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt một phần (dạng hình quạt) của hình tròn như hình bên dưới. Thể tích lớn nhất của hình nón có được khi người ta cắt cung tròn của hình quạt có chiều dài là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi x (cm, $x > 0$) là chiều dài cung tròn được ghép tạo thành hình nón. Suy ra đường tròn đáy của hình nón có độ dài là x (cm). Bán kính R của hình tròn sẽ trở thành đường sinh của hình nón.

$$\text{Gọi bán kính của đáy là } r \text{ (cm, } r > 0\text{)}. \text{ Suy ra : } 2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

Chiều cao của hình nón là : $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2}}$

Thể tích của hình nón là : $V = \frac{1}{3}\Pi r^2 h = \frac{\Pi}{3} \left(\frac{2}{2\Pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2}}$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có :

$$V^2 = \frac{4\Pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\Pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\Pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2} \right) \leq \frac{4\Pi^2}{9} \left(\frac{\frac{x^2}{8\Pi^2} + \frac{x^2}{8\Pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2}}{3} \right)^3 = \frac{4\Pi^2}{9} \cdot \frac{R^6}{27}$$

Do đó V lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{x^2}{8\Pi^2} = R^2 - \frac{x^2}{4\Pi^2} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{6}\Pi$ (cm)

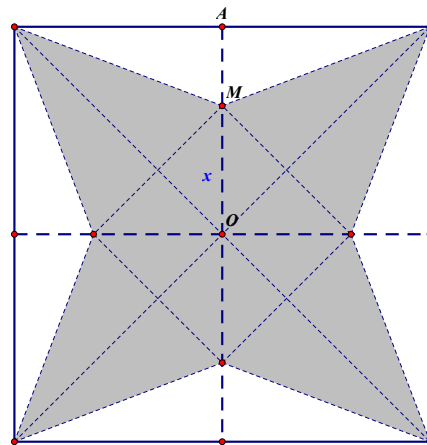
Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương: Dễ dàng chứng minh

Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương.

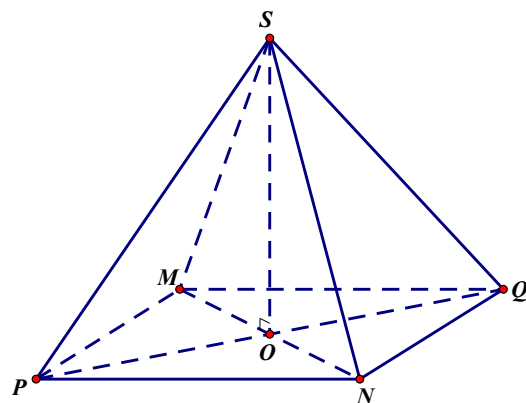
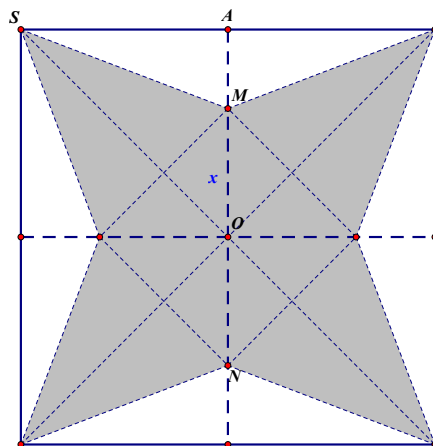
Cho các số thực dương a, b, c . Ta có:

$$a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c^3\sqrt{abc}} \geq 4\sqrt[4]{abc^3\sqrt{abc}} = 4\sqrt[3]{abc}.$$

Câu 7: Cắt một miếng giấy hình vuông như hình bên và xếp thành hình một hình chóp tứ giác đều. Biết các cạnh hình vuông bằng 20cm, $OM = x$ (cm). Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất.



Lời giải



Ta có $OA = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10(\text{cm})$; $AM = OA - OM = 10 - x$; $MN = 2OM = 2x$ với $0 < x < 10$.

Xét hình chóp đều $S.MPNQ$ như hình vẽ.

Diện tích đáy của hình chóp đã cho là: $S_{\text{đáy}} = \frac{1}{2} MN^2 = \frac{1}{2} \cdot (2x)^2 = 2x^2$.

Ta có $SM^2 = SA^2 + AM^2$.

Do đó $h = SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{SA^2 + AM^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 + (10 - x)^2 - x^2} = \sqrt{200 - 20x}$.

Thể tích của hình chóp đều $S.MPNQ$ là: $V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2x^2 \cdot \sqrt{200 - 20x}$.

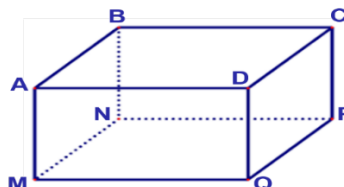
Suy ra:

$$V^2 = \frac{4}{9} x^4 (200 - 20x) = \frac{4}{9 \cdot 5^4} \cdot 5x \cdot 5x \cdot 5x \cdot 5x \cdot (200 - 20x) \leq \frac{4}{9 \cdot 5^4} \cdot \left(\frac{5x + 5x + 5x + 5x + 200 - 20x}{5} \right)^5$$

$$\text{Hay } V^2 \leq \frac{4}{9 \cdot 5^4} \cdot 40^5 = \frac{2^{18} \cdot 10}{9}. \text{ Do đó } V \leq \frac{2^9 \sqrt{10}}{3} = \frac{512\sqrt{10}}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $5x = 200 - 20x$ hay $x = 8$.

Câu 8: Bác Minh muốn đặt đóng một chiếc hộp đựng quà lưu niệm có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy $ABCD$ là hình vuông như hình dưới đây.



Để món quà trở nên đặc biệt, bác Minh muốn mạ bốn mặt xung quanh và mặt đáy dưới (đáy $MNPQ$) của chiếc hộp bằng kim loại quý (không mạ nắp hộp). Em hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của hộp quà sao cho tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất biết rằng thể tích của chiếc hộp là $4dm^3$.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh đáy MN và độ dài chiều cao AM của hộp quà lần lượt là $x(dm)$ và $y(dm)$ với $x > 0$ và $y > 0$.

Do thể tích hộp quà là $4dm^3$ nên $x^2 y = 4$ hay $y = \frac{4}{x^2}$.

Tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý là: $S = 4xy + x^2 = x^2 + \frac{16}{x}$

$$S = x^2 - 4x + 4 + \frac{4x^2 + 16}{x} - 4 = (x - 2)^2 + \frac{4(x - 2)^2}{x} + 12$$

Chứng minh được $S \geq 12$ và dấu bằng xảy ra khi $x = 2, y = 1$.

Vậy, để tổng diện tích các mặt được mạ kim loại quý của chiếc hộp là nhỏ nhất thì độ dài cạnh mặt đáy và chiều cao chiếc hộp lần lượt là $2dm$ và $1dm$.

Câu 9: Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa đó là nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Đổi } 1000 \text{ lít} = 1 \text{ (m}^3\text{)}$$

Ta có thể tích của bể nước là

$$V = \pi R^2 h = 1 \text{ vậy } h = \frac{1}{\pi R^2}$$

Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

$$\text{Hay } S_{tp} = 2\pi R \frac{1}{\pi R^2} + 2\pi R^2$$

$$S_{tp} = \frac{2}{R} + 2\pi R^2 \quad (R > 0)$$

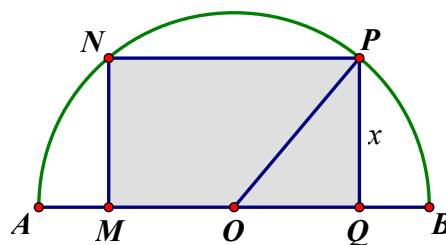
Áp dụng Câu toán phụ số 2: Với ba số không âm $a; b; c$ thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

ta có

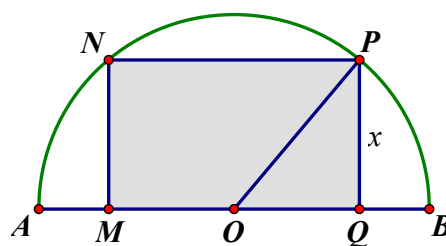
$$S_{tp} = \frac{2}{R} + 2\pi R^2 = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi} \text{ (m}^2\text{)}$$

Vậy diện tích toàn phần nhỏ nhất khi và chỉ khi $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ (m)}$.

Câu 10: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp trong nửa đường tròn (O) bán kính $10cm$, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn (như hình vẽ).



Lời giải



Gọi $x \text{ (cm)}$ là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn $(0 < x < 10)$

Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn là:

$$MQ = 2\sqrt{10^2 - x^2} \text{ (cm)}$$

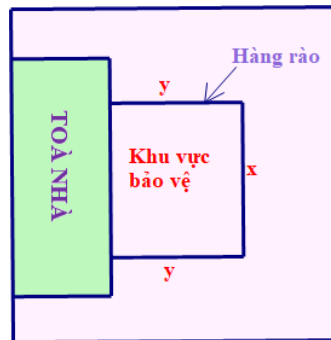
Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = x \cdot 2\sqrt{100 - x^2} = 2\sqrt{x^2 \cdot (100 - x^2)} \text{ (cm}^2\text{)}$

Ta có: $2\sqrt{x^2 \cdot (100 - x^2)} \leq x^2 + 100 - x^2 = 100$.

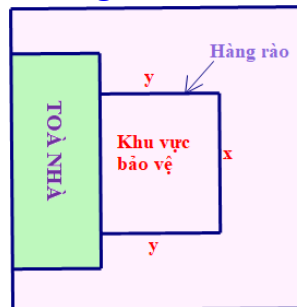
Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = 100 - x^2 \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là 100cm^2 khi $x = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$

Câu 11: Người ta cần lập hàng rào quanh khu vực bảo vệ có dạng hình chữ nhật cho một toà nhà như hình vẽ bên. Hỏi nếu có 80m hàng rào bao quanh 3 mặt như trên thì diện tích tối đa của khu vực bảo vệ là bao nhiêu?



Lời giải



Gọi chiều dài, chiều rộng của khu vực bảo vệ lần lượt là x, y (m, $x > 0, y > 0$)

Diện tích khu vực bảo vệ là $S \text{ (m}^2\text{)}$. Ta có: $S = x \cdot y$ (1)

Vì khu vực bảo vệ có 3 mặt, nên ta có: $x + 2y = 80$ suy ra: $x = 80 - 2y$ (2)

Từ (1), (2) ta có

$$S = y(80 - 2y) = -2y^2 + 80y = -(y - 20)^2 + 800.$$

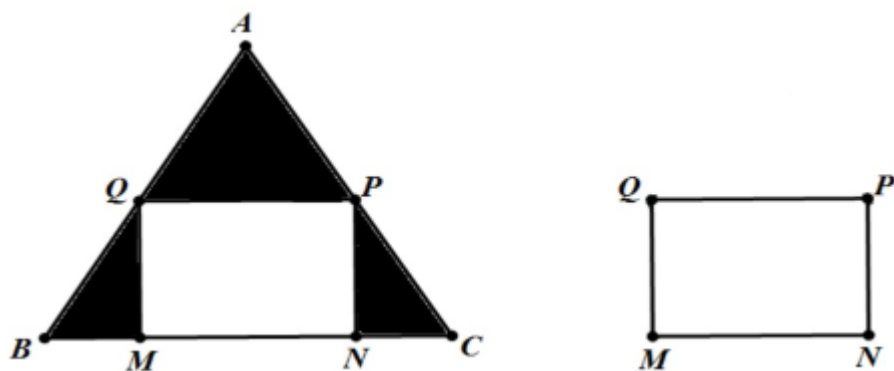
Có: $-(y - 20)^2 \leq 0$

$$-(y - 20)^2 + 800 \leq 800$$

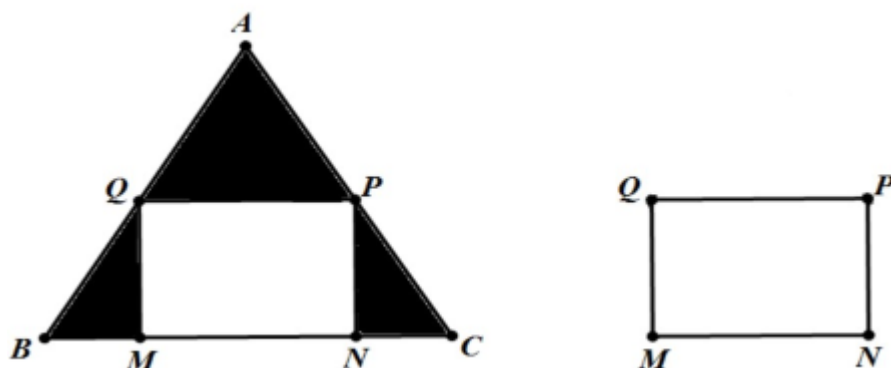
Nên ≤ 800 . Dấu “=” xảy ra khi $y = 20$ suy ra $x = 40$.

Vậy diện tích tối đa là 800m^2 khu vực bảo vệ có chiều dài 40m, chiều rộng 20m.

Câu 12: Cho một tấm nhôm có hình tam giác đều có cạnh bằng 100cm . Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.



Lời giải



Giả sử $MB = x \Rightarrow NC = x$ nên $MN = 100 - 2x$.

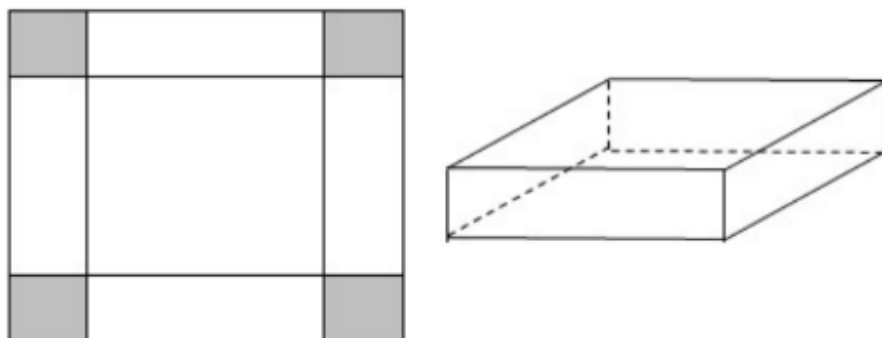
Ta có $MQ = \tan 60^\circ \cdot BM = x\sqrt{3}$ nên diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S = (100 - 2x)x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(50 - x)x \leq 2\sqrt{3}\left(\frac{50 - x + x}{2}\right)^2 = 1250\sqrt{3}.$$

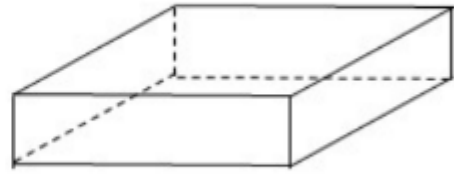
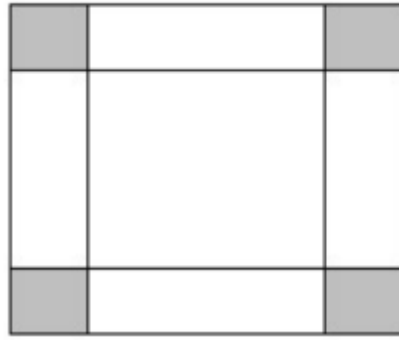
Dấu bằng xảy ra khi $50 - x = x \Leftrightarrow x = 25$.

Vậy $MB = 25 \text{ cm}$ thì diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là lớn nhất.

Câu 13: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để thể tích của hộp là lớn nhất.



Lời giải



Chiếc hộp tạo thành là một hình hộp có đáy là hình vuông cạnh $12-2x$ cm và chiều cao là x cm.

Thể tích của hộp là $V = (12-2x)^2 x$ ($0 < x < 6$)

Ta có: $(12-2x)^2 x = \frac{1}{4}(12-2x)(12-2x)4x$

Áp dụng bất đẳng thức cosi cho 3 số dương ta được

$$(12-2x)(12-2x)4x \leq \left(\frac{12-2x+12-2x+4x}{3} \right)^3$$

$$\text{Do đó } V \leq \frac{1}{4} \cdot 8^3 = 128$$

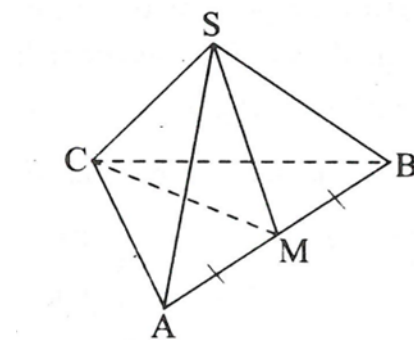
Dấu “=” xảy ra khi $12-2x = 4x$

Khi đó $x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy khi $x = 2$ thì thể tích của hộp là lớn nhất.

Câu 14: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên đều bằng 6 cm , độ dài cạnh đáy là x (cm) . Tìm x để diện tích xung quanh của hình chóp đều đó là lớn nhất.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB .

Khi đó SM là trung đoạn của hình chóp.

Ta có $AB = BC = AC = x$ thì:

$$SM^2 = SB^2 - \left(\frac{x}{2} \right)^2 = 6^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$SM = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 6^2 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{144 - x^2}$$

Diện tích xung quanh của hình chóp là: $S_{xq} = \frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{144 - x^2} = \frac{3x}{4}\sqrt{144 - x^2}$

Vận dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ hay $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ta được:

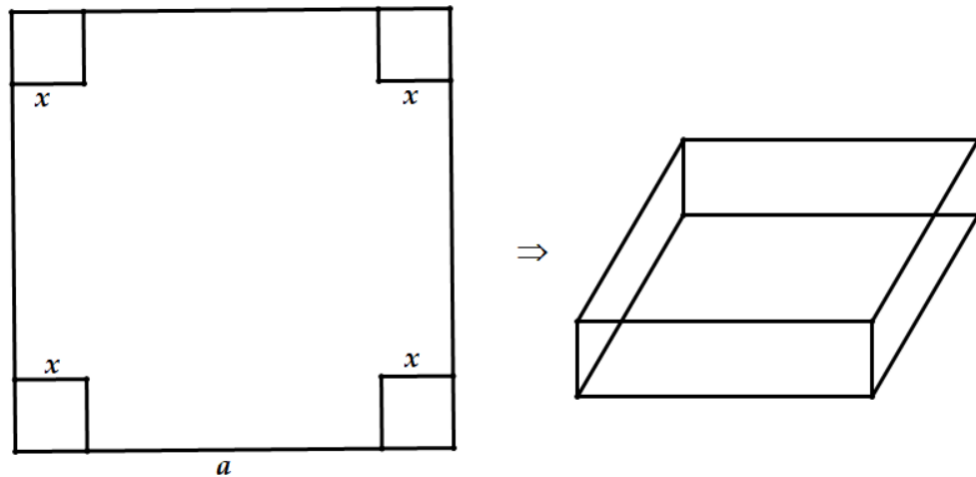
$$x \cdot \sqrt{144 - x^2} \leq \frac{x^2 + 144 - x^2}{2} = 72.$$

Do đó $S_{xq} \leq \frac{3}{4} \cdot 72 = 54.$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{144 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 144 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 72 \Leftrightarrow x = 6\sqrt{2}.$

Câu 15: Một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước a (cm), người ta muốn cắt đi ở bốn góc bốn hình vuông cạnh bằng x (cm) để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

Lời giải



Vì cạnh của hình vuông bị cắt là x (cm) nên ta có điều kiện $0 < x < a$

Chiều dài cạnh của miếng tôn sau khi cắt là $a - 2x$ (cm), chiều cao là x (cm)

Ta có thể tích hình hộp $V = x(a - 2x)(a - 2x) = \frac{1}{4}4x(a - 2x)(a - 2x).$

Ta chứng minh Câu toán: Với ba số không âm a, b, c thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$$

$$\begin{aligned}
&= (a+b+c) \left[(a+b)^2 + c^2 - c(a+b) \right] + c^3 - 3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c) (a^2 + b^2 + 2ab + c^2 - bc - ca - 3ab) \\
&= (a+b+c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
&= \frac{1}{2} (a+b+c) \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right) \geq 0
\end{aligned}$$

Khi đó $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

Đặt $a^3 = x$, $b^3 = y$, $c^3 = z$ thì

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \text{ hay } xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3$$

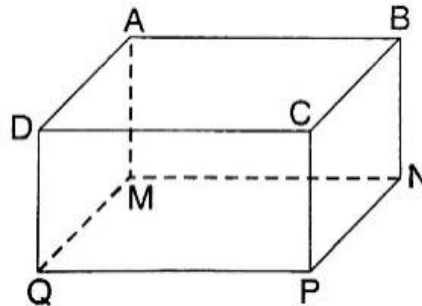
Áp dụng Câu toán trên ta có

$$\frac{1}{4} 4x(a-2x)(a-2x) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4x+a-2x+a-2x}{3} \right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8a^3}{27} = \frac{2a^3}{27}$$

Thể tích lớn nhất khi $4x = a - 2x$ suy ra $a = 6x$ hay $x = \frac{a}{6}$ (cm)

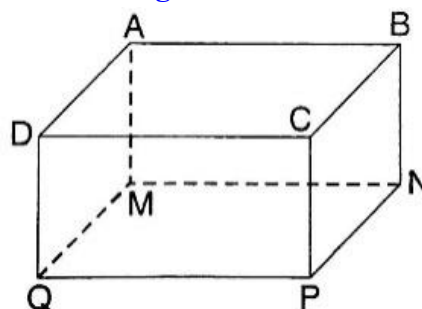
Vậy để thể tích hộp lớn nhất cần cắt 4 góc bốn hình vuông cạnh $\frac{a}{6}$ (cm)

Câu 16: Một gia đình muốn xây một cái bể chứa nước nhỏ ở góc vườn để chủ động tưới rau, bể có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy $MNPQ$ là hình vuông (hình vẽ)



Hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của bể sao cho tổng diện tích các mặt làm bể (bao gồm 4 mặt xung quanh và một mặt đáy) là nhỏ nhất, biết rằng thể tích của bể là $4m^3$.

Lời giải



Gọi độ dài cạnh đáy MN và độ dài chiều cao AM của bể lần lượt là x (m) và y (m) với $x > 0; y > 0$

Do thể tích bể bơi là $4m^3$ nên $x^2y = 4$ hay $y = \frac{4}{x^2}$

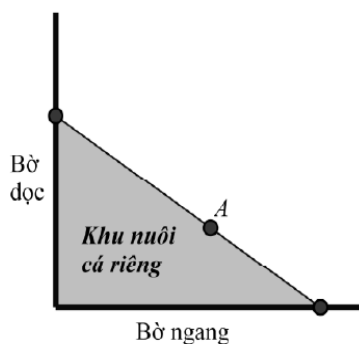
Tổng diện tích các mặt của bể bơi là: $S = 4xy + x^2 = x^2 + \frac{16}{x}$

$$S = x^2 - 4x + 4 + \frac{4x^2 + 16}{x} - 4 = (x - 2)^2 + \frac{4(x - 2)^2}{x} + 12 \geq 12$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2; y = 1$ (thỏa mãn)

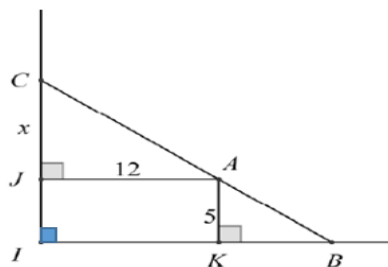
Vậy để tổng diện tích các mặt của bể nhỏ nhất khi độ dài cạnh mặt đáy và chiều cao của bể lần lượt là $2m$ và $1m$.

Câu 17: Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí **A**. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.



Lời giải

Đặt tên các điểm như hình vẽ.



Đặt $CJ = x, (x > 0)$.

Chứng minh hai tam giác AJC và BKA là hai tam giác đồng dạng, suy ra

$$\frac{CJ}{AK} = \frac{JA}{KB} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{12}{KB} \Leftrightarrow KB = \frac{60}{x}.$$

Diện tích của khu nuôi cá là: $S = \frac{1}{2}(x + 5) \cdot \left(\frac{60}{x} + 12 \right)$.

$$S(x) = \frac{1}{2} \left(60 + 12x + \frac{300}{x} + 60 \right)$$

$$S(x) = 6x + \frac{150}{x} + 60$$

Ta có $\left(\sqrt{6x} - \sqrt{\frac{150}{x}} \right)^2 \geq 0$ với mọi $x > 0$ suy ra

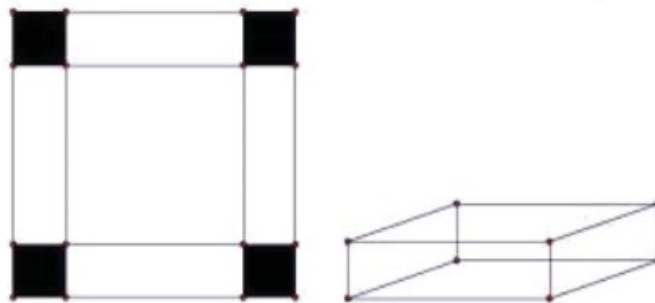
$$6x + \frac{150}{x} \geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} = 60$$

Dấu bằng xảy ra khi $6x = \frac{150}{x} \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$.

$$\text{Nên } S(x) = 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 60 + 60 = 120$$

Suy ra diện tích nhỏ nhất có thể giăng là 120 m^2 , đạt được khi $x = 5 \text{ m}$.

Câu 18: Cho tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải

Gọi độ dài cạnh hình vuông bị cắt là x (cm) ($0 < x < 6$)

Thể tích của khối hộp tạo thành là:

$$V = x(12 - 2x)^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Áp dụng BĐT AM-GM (Cauchy) cho 3 số dương, ta có

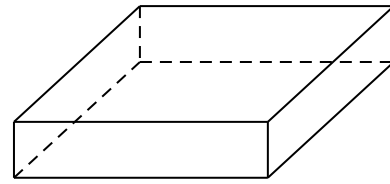
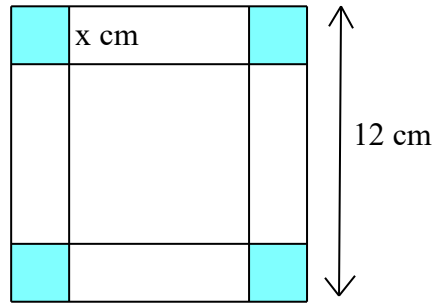
$$x(12 - 2x)^2 = 2.2x.(6 - x)(6 - x) \leq 2 \cdot \frac{(2x + 6 - x + 6 - x)^3}{27} = 128 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $2x = 6$

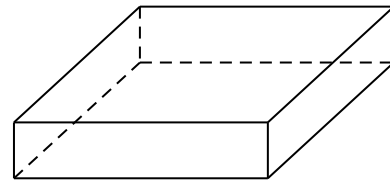
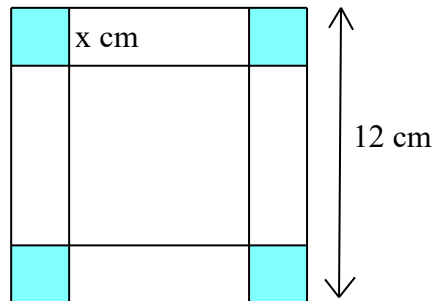
$$x = 3$$

Vậy khi độ dài cạnh hình vuông bị cắt bằng 3cm thì thể tích hình tạo thành lớn nhất.

Câu 19: Cho một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gấp tấm nhôm đó thành hình hộp không có nắp (Hình vẽ). Tìm x để không khí bên trong hộp là nhiều nhất.



Lời giải



Chiều cao của hình hộp là x (cm). ĐK: $0 < x < 6$.

Đáy của hình hộp là hình vuông cạnh bằng.

Không khí bên trong hộp là: $V = S_{xq} \cdot h = (12 - 2x)^2 \cdot x$ (cm³).

Ta có: $V = 4x(6 - x)(6 - x) = 2 \cdot 2x(6 - x)(6 - x)$.

Chứng minh bất đẳng thức: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Ta có: $(a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \geq 0$

$(a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b + c) \geq 0$

$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ac - bc - 3ab) \geq 0$

$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq 0$

$(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$ đúng với mọi a, b, c dương.

Vậy bất đẳng thức: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ được chứng minh.

Đặt $a = \sqrt[3]{2x}$, $b = \sqrt[3]{6 - x}$, $c = \sqrt[3]{6 - x}$. Khi đó ta có: $2x + 6 - x + 6 - x \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2x(6 - x)(6 - x)}$

Hay $12 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2x(6 - x)(6 - x)}$.

$\sqrt[3]{2x(6 - x)(6 - x)} \leq 4$

$2 \cdot 2x(6 - x)(6 - x) \leq 2 \cdot 4^3$

$V \leq 128$

Dấu “=” xảy ra khi $2x = 6 - x$ hay $x = 2$ (thỏa mãn).

Vậy không khí trong hộp nhiều nhất bằng $128(\text{cm}^3)$ khi $x = 2(\text{cm})$.

Câu 20:

Một gia đình muốn cải tạo một ao nước nhỏ thành một hồ nước đẹp hơn. Hồ nước có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp hai lần chiều rộng và người ta tính được có thể tích bằng $\frac{62\ 250}{3} \text{ m}^3$. Theo thị trường xây dựng, giá tiền xây dựng bình quân là $350\ 000$ đồng/ m^2 (bao gồm cả đáy và thành hồ). Hỏi chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng hồ nước trên là bao nhiêu tiền



Lời giải

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy hồ là x (m) (điều kiện $x > 0$)

Suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x$ (m).

Gọi y là chiều sâu của hồ (điều kiện $y > 0$)

Thể tích của hồ là $V = 2x \cdot x \cdot y = 2x^2 y$ (m^3).

Theo Câu ra ta có phương trình $2x^2 y = \frac{62\ 500}{3}$.

$$\text{Suy ra } y = \frac{31\ 250}{3x^2}$$

Diện tích xây dựng của hồ nước là

$$S = 2x \cdot x + 2 \cdot (2x + x) \cdot y = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + 6 \cdot x \cdot \frac{31\ 250}{3x^2} = 2x^2 + \frac{62\ 500}{x}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, với hai số dương a, b ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Ta có

$$S = 2x^2 + \frac{62\ 500}{x} = (2x^2 + 1250) + \frac{62\ 500}{x} - 1250 \geq 2\sqrt{2x^2 \cdot 1250} + \frac{62\ 500}{x} - 1250 = 100x + \frac{62\ 500}{x} - 1250$$

$$S \geq 100x + \frac{62\ 500}{x} - 1250 \geq 2\sqrt{100x \cdot \frac{62\ 500}{x}} - 1250 = 3750$$

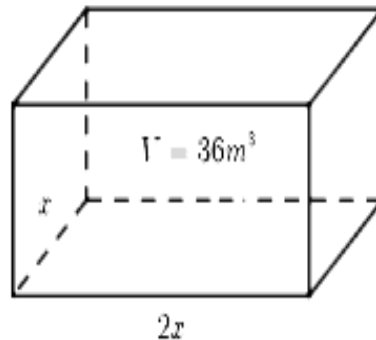
Khi đó $S_{\min} = 3750$.

$$\text{Dấu = xảy ra khi } \begin{cases} 2x^2 = 1250 \\ 100x = \frac{62\ 500}{x} \end{cases} \text{ Suy ra } x = 25$$

Vậy chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng hồ nước là

$$3750.350\,000 = 1\,312\,500\,000 \text{ đồng.}$$

Câu 21: Bác Duy muốn xây một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 36m^3 . Đáy bể có dạng hình chữ nhật với chiều rộng là $x(m)$, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bác Duy muốn phần diện tích cần xây (bao gồm diện tích xung quanh và đáy bể) là nhỏ nhất để tiết kiệm chi phí thì x phải bằng bao nhiêu?



Lời giải

Có hai số không âm a, b , áp dụng BĐT Cô – si. Ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Suy ra $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Diện tích đáy bể $x \cdot 2x = 2x^2 (m^2)$

Chiều cao bể $36 : (2x^2) = \frac{18}{x^2} m$

Diện tích xung quanh bể $2 \cdot (x + 2x) \cdot \frac{18}{x^2} = \frac{108}{x} m^2$

Áp dụng BĐT Cô – si cho $2x^2; \frac{54}{x}$ (vì $x > 0$)

Diện tích cần sơn $S = 2x^2 + \frac{108}{x} m^2 = 2x^2 + \frac{54}{x} + \frac{54}{x} \geq 3\sqrt{2x^2 \cdot \frac{54}{x} \cdot \frac{54}{x}} = 54$

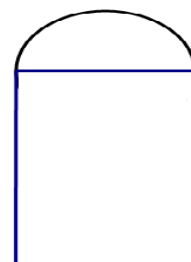
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2x^2 = \frac{54}{x}$

Suy ra $x^3 = 27$ suy ra $x = 3$

Vậy diện tích cần sơn nhỏ nhất là $x = 3m$.

Câu 22:

Bác Nam muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài của khuôn gỗ (các đường in đậm trong hình bên, bỏ qua độ rộng của cạnh khuôn gỗ) là $8m$. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa sổ có diện tích lớn nhất.



Lời giải

Gọi đường kính của nửa hình tròn là $x(m)$; $0 < x < 8$

Khi đó bán kính: $\frac{x}{2}(m)$

Gọi cạnh còn lại của hình chữ nhật là y ($m; 0 < y < 8$)

Khi đó tổng độ dài của khuôn gỗ

$$\frac{\pi x}{2} + x + 2y = 8$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x + 2y = 8$$

$$y = 4 - \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)x$$

$$S \text{ của sở } S = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy = \frac{\pi x^2}{8} + xy$$

$$\frac{\pi x^2}{8} + x \left[4 - \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)x \right]$$

$$= \dots = -\frac{\pi + 4}{8} \left(x - \frac{16}{\pi + 4} \right)^2 + \frac{32}{\pi + 4} \leq \frac{32}{\pi + 4}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{18}{\pi + 4} \text{ nên } y = \frac{8}{\pi + 4}$$

Câu 23: Một gia đình muốn xây một hồ chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 400 m^3 đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là $500\,000 \text{ đồng/m}^2$ (bao gồm cả diện tích tường và đáy bể). Hỏi chi phí thuê nhân công thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây hồ chứa nước là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là x (m) ($x > 0$)

Suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $4x$ (m).

Gọi chiều cao của bể là y (m, $y > 0$).

$$\text{Thể tích của bể là } V = 4x \cdot x \cdot y = 400 \text{ suy ra } x^2 \cdot y = 100 \text{ suy ra } y = \frac{100}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích xây dựng của bể là } S &= 4x^2 + 2(x + 4x)y = 4x^2 + 10xy = 4x^2 + 10 \cdot \frac{100}{x^2} \cdot x \\ &= 4x^2 + \frac{1000}{x} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số không âm (với hai số không âm x, y ta có

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \text{ nên } x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \text{ suy ra } x + y \geq 2\sqrt{xy}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = y):$$

$$\text{Ta có } S = 4x^2 + \frac{1000}{x} = (4x^2 + 100) + \frac{1000}{x} - 100 \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot 100} + \frac{1000}{x} - 100 = 40x + \frac{1000}{x} - 100$$

.

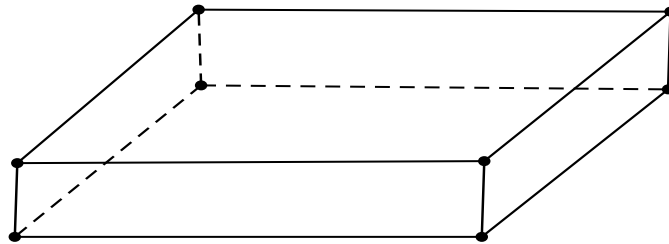
$$\text{Và } S \geq 40x + \frac{1000}{x} - 100 \geq 2\sqrt{40x \cdot \frac{1000}{x}} - 100 = 400 - 100 = 300.$$

Khi đó $S_{\min} = 300$.

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 4x^2 = 100 \\ 40x = \frac{1000}{x} \end{cases} \text{ suy ra } x = 5$$

Vậy chi phí thấp nhất thuê nhân công là $300.500\,000 = 150\,000\,000$ đồng = 150 triệu đồng

Câu 24: Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp dạng hình hộp chữ nhật thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều bằng 12cm ; tổng của của rộng và chiều cao là 24cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị lớn nhất ấy bằng bao nhiêu ?



Lời giải

Gọi chiều rộng là $x(cm)$ ($0 < x < 12$)

Chiều dài là $12 - x(cm)$

Chiều cao là $24 - x(cm)$

Ta có thể tích chiếc hộp là: $V = x(12 - x)(24 - x)(cm^3)$

Bất đẳng thức Cauchy 3 số không âm a, b, c ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Thật vậy, đặt $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c} \Rightarrow x, y, z \geq 0 \Rightarrow x + y + z \geq 0$

Ta phải chứng minh:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz \geq 0$$

$$(x + y + z) \left[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2 \right] - 3xy(x + y + z) \geq 0$$

$$(x + y + z) \left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz - yz \right] - 3xy(x + y + z) \geq 0$$

$$(x + y + z) \left[x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \right] \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0 \text{ (vì } x + y + z \geq 0 \text{)}$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm ta có:

$$V = x(12-x)(24-x)(cm^3)$$

$$\frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} \cdot x \cdot (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})(12-x)(24-x)$$

$$\leq \frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} \cdot \left[\frac{x + (\sqrt{3}-1)(12-x) + (2-\sqrt{3})(24-x)}{3} \right]^3$$

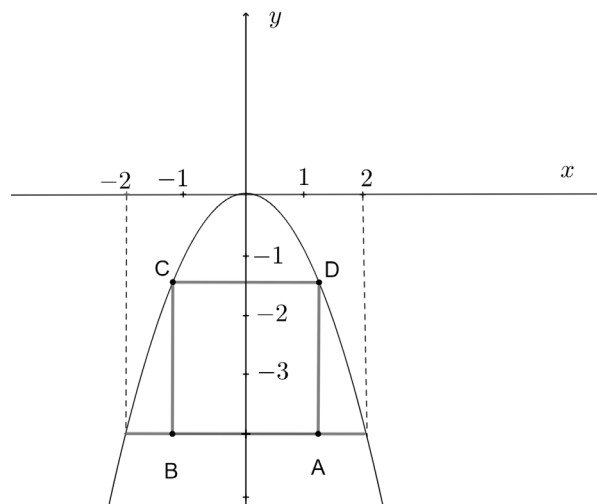
$$= \frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} \cdot \left[\frac{x + 12\sqrt{3} - \sqrt{3}x - 12 + x + 48 - 2x - 24\sqrt{3} + \sqrt{3}x}{3} \right]^3$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} \cdot \left[\frac{36 - 12\sqrt{3}}{3} \right]^3 = 384\sqrt{3}$$

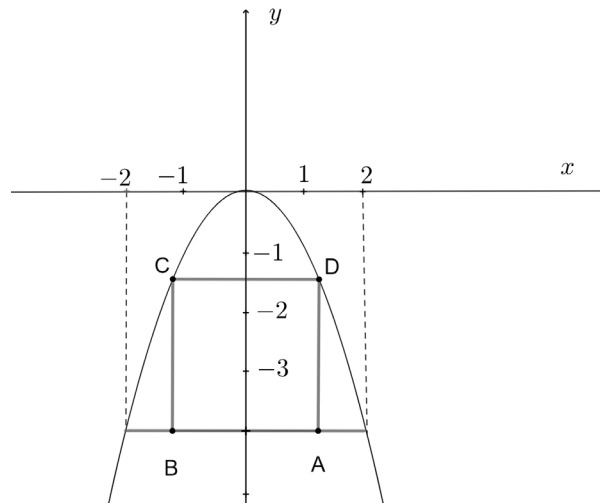
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $x = (\sqrt{3}-1)(12-x) = (2-\sqrt{3})(24-x) \Leftrightarrow x = 12 - 4\sqrt{3}$

Vậy $V_{\max} = 384\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 12 - 4\sqrt{3}$.

Câu 25: Cửa hầm lò khai thác than có dạng một parabol, khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4 mét, khoảng cách giữa hai chân cửa là 4 mét. Người ta muốn gia cố cho cửa lò bằng một khung thép hình chữ nhật sao cho hai đỉnh dưới của khung thép chạm đất, hai đỉnh trên của khung thép chống vào mái hầm (hình vẽ minh họa). Tìm kích thước của khung thép sao cho diện tích của hình chữ nhật tạo bởi khung thép lớn nhất.



Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Parabol có dạng $y = ax^2$ ($a < 0$)

Khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4 mét, khoảng cách giữa hai chân cửa là 4 mét nên parabol đi qua điểm $(2; -4)$

Suy ra:

$$-4 = a \cdot 2^2$$

$$a = -1$$

Parabol có dạng $y = -x^2$

Giả sử $ABCD$ là hình chữ nhật có độ dài $AB = CD = 2k$

Khi đó 4 đỉnh của khung thép hình chữ nhật có tọa độ là:

$$A(k; -4); B(-k; -4); C(-k; k^2); D(k; k^2) (k > 0)$$

Suy ra $AB = 2k; BC = 4 - k^2$

Khi đó diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $2k(4 - k^2)$

Ta có:

$$2k(4 - k^2) - \frac{32}{3\sqrt{3}} = -2 \left(k^3 - 4k + \frac{16}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$= -2 \left(k^2 - 2k \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} \right) \cdot \left(k + \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$$

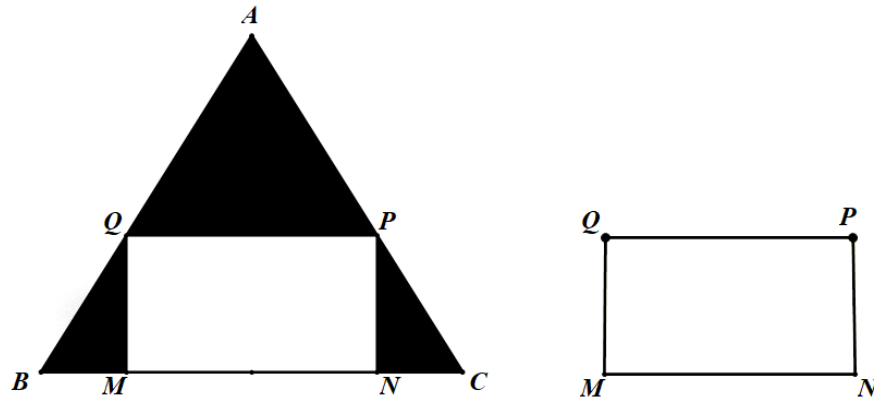
$$= -2 \left(k - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \left(k + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) \leq 0 \text{ với } k > 0$$

Suy ra

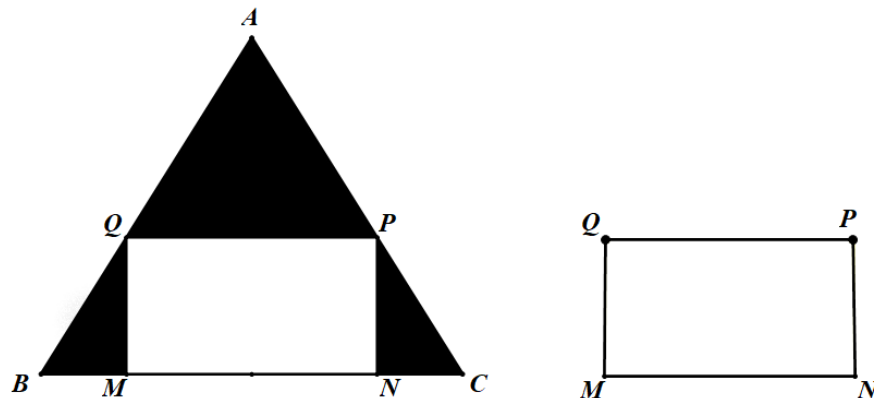
$$2k(4 - k^2) \leq \frac{32}{3\sqrt{3}}$$

Dấu “=” có khi $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Câu 26: Cho một tấm nhôm hình tam giác đều có cạnh bằng $20(cm)$. Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài đoạn MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất?



Lời giải



Gọi độ dài đoạn MB là $x(cm)$, ta có:

Độ dài đoạn NC là $x(cm)$

Độ dài đoạn MN là $20 - x - x = 20 - 2x(cm)$

Tam giác BQM vuông tại M có:

$$\tan B = \tan 60^\circ = \frac{QM}{BM} = \frac{QM}{x}$$

$$QM = x \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN \cdot QM = (20 - 2x) \cdot x\sqrt{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $S = (20 - 2x) \cdot x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(10 - x) \cdot x \leq 2\sqrt{3} \left(\frac{10 - x + x}{2} \right)^2$

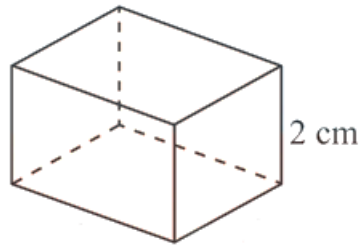
$$S \leq 2\sqrt{3} \cdot 25 = 50\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $10 - x = x$

$$x = 5$$

Vậy $MB = 5\text{ cm}$ để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

Câu 27: Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 , chiều cao của hộp là 2 cm . Tìm kích thước đáy của hộp sao cho sử dụng ít vật liệu nhất.



Lời giải

Gọi chiều rộng của đáy hộp là x ($x > 0$, cm).

Ta có chiều dài của hộp là $\frac{500}{2x}$ (cm)

Ta có diện tích toàn phần của chiếc hộp là

$$S = 2x \cdot \frac{500}{2x} + 2 \left(x + \frac{500}{2x} \right) \cdot 2 = 500 + 2x + \frac{250}{x} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương $2x$ và $\frac{250}{x}$, ta có

$$2x + \frac{250}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{250}{x}} = 20\sqrt{5}$$

Từ đó $S \geq 500 + 20\sqrt{5}$ (cm²)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x = \frac{250}{x}$ hay $x^2 = \frac{250}{2} = 125$

Suy ra $x = 5\sqrt{5}$ cm, từ đó $\frac{250}{5\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}$ cm.

Vậy chiều rộng của hộp là $5\sqrt{5}$ cm, chiều dài là $10\sqrt{5}$ cm.

Chúng minh bổ sung Bất đẳng thức Cauchy

Xét hai số thực dương a , b ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Thật vậy, vì a , b là các số thực dương nên

Từ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, suy ra $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

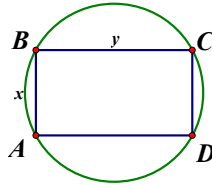
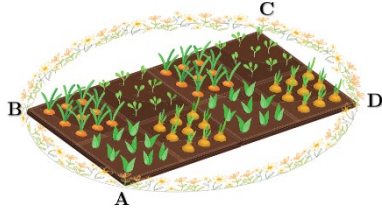
$$\text{Hay } (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

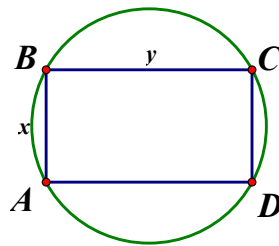
Vậy với hai số thực dương a, b bất kỳ ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$

Câu 28: Người ta muốn làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $640m^2$, để tạo thêm cảnh quan xung quanh đẹp hơn, người ta mở rộng thêm bốn phần diện tích để trồng hoa, tạo thành một đường tròn đi như hình vẽ, biết tâm hình tròn trùng với giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật. Khi đó chọn kích thước cạnh $ABCD$ như thế nào để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất?



Lời giải



Độ dài đường kính của đường tròn là đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$,

Vậy biểu thức xác định đường kính của đường tròn là $\sqrt{x^2 + y^2}$

Vậy bán kính của đường tròn là $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$

Diện tích đường tròn là $S = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4}$

Diện tích của hình chữ nhật là $S_{hcn} = xy = 640(m^2)$

Diện tích phần đất trồng hoa là

$$S' = S - S_{hcn} = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4} - xy$$

Có $(x - y)^2 \geq 0$ với mọi $x; y$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} \geq \frac{xy}{2} > 0$$

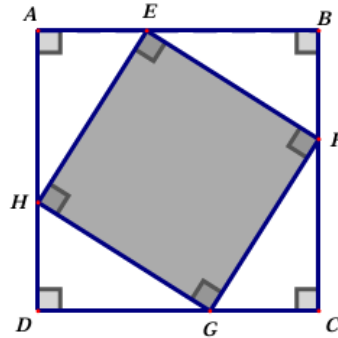
$$\Rightarrow \frac{\pi(x^2 + y^2)}{4} \geq \frac{\pi xy}{2} \Rightarrow \frac{\pi(x^2 + y^2)}{4} - xy \geq \frac{\pi xy}{2} - xy$$

$$\text{Vậy } S' \geq \frac{\pi xy}{2} - xy \Rightarrow S \geq 320\pi - 640$$

Vậy để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất thì $x = y$

Khi đó $x = y = 8\sqrt{10}$ (m)

Câu 29: Một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh 30m. Người ta xây dựng một vườn hoa dạng hình vuông $EFGH$ có các đỉnh E, F, G, H thuộc các cạnh của hình vuông $ABCD$ (hình vẽ). Xác định vị trí điểm E trên cạnh AB để diện tích vườn hoa nhỏ nhất.



Lời giải

Đặt $AE = x$ ($0 \leq x \leq 30$)

Chỉ ra được $S_{EFGH} = S_{ABCD} - 4S_{AEH} = 900 - 2x(30 - x)$

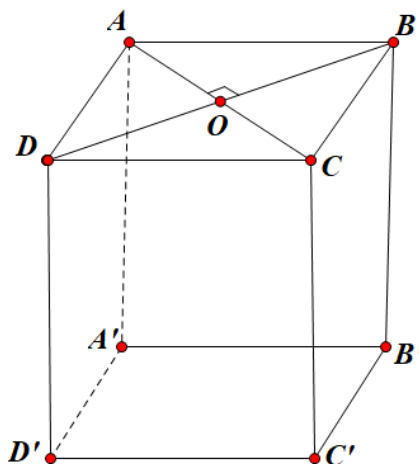
Do đó: $S_{EFGH} = 2x^2 - 60x + 900 = 2(x - 15)^2 + 450 \geq 450$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 15$ (tm)

Vậy min $S_{EFGH} = 450m^2$ khi $AE = 15m$

Câu 30: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Biết thể tích của nó là $1280cm^3$ và chiều cao là $20cm$. Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh.

Lời giải



Ta đặt $AC = 2m; BD = 2n$.

Diện tích đáy $ABCD$ là: $S = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 2n = mn$.

Mặt khác: $S = \frac{V}{h} = \frac{1280}{20} = 64 (cm^2)$

Vậy $2m.n = 64 (cm^2)$.

Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng là:

$$S_{xq} = 4.AB.20 = 80AB.$$

Vậy S_{xq} nhỏ nhất khi AB nhỏ nhất.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Ta có $AC \perp BD$ tại O .

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O , ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 = m^2 + n^2$.

Mặt khác $m^2 + n^2 \geq 2mn$. Do đó $AB^2 \geq 64 \Rightarrow AB \geq 8 (cm)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của AB là $8cm$ khi $m = n$ tức là khi $ABCD$ là hình vuông.

Giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh là $4.8.20 = 640 (cm^2)$.

Câu 31: Ông An có 2400 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau $a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b > 0$ (Bất đẳng thức AM-GM)

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(a + b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0, \forall a, b > 0$$

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x và y , với $2x + y = 2400$ ($0 < x, y < 2400$).

Diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là: $S = xy = \frac{1}{2} 2x.y \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{(2x + y)^2}{8} = \frac{2400^2}{8} = 720000$.

Vậy ông nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là $720000 m^2$.

Câu 32: Một trang chữ của một tạp chí cần diện tích là $384cm^2$. Lề trên, lề dưới là $3cm$; lề phải, lề trái là $2cm$. Hỏi chiều ngang và chiều dọc tối ưu của trang giấy lần lượt là bao nhiêu để diện tích trang giấy là nhỏ nhất?

Lời giải

Chứng minh bất đẳng thức CAUCHY:

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Thật vậy: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Gọi $a, b (cm) (a > 0, b > 0)$ là độ dài chiều dọc và chiều ngang của trang chữ suy ra kích thước trang giấy là $a + 6, b + 4$.

Ta có: $a.b = 384$ suy ra $b = \frac{384}{a}$ (1).

Diện tích trang sách là $S = (a + 6)(b + 4)$

Suy ra $S = 4a + \frac{2304}{a} + 408$.

Theo bất đẳng thức CAUCHY ta có:

$$S \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{2304}{a}} + 408 = 600.$$

Suy ra $\min S = 600$ suy ra $4a = \frac{2304}{a}$ suy ra $a = 24$

Suy ra chiều dọc và chiều ngang tối ưu của trang giấy là $30\text{cm}, 20\text{cm}$.

Câu 33: Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt nhân kỉ niệm ngày giải phóng hoàn toàn miền Nam 30 – 4. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 200 người tham gia. Để thu hút nhiều người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá 100 nghìn đồng/1tour thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour còn bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt đó là lớn nhất.

Lời giải

Gọi số lần giảm giá 100 000 đồng/1tour để thu được doanh thu lớn nhất là x (lần)

Sau x lần giảm thì giá của một tour là: $2\,000\,000 - 100\,000.x$ (đồng).

Vì cứ sau 1 lần giảm thì có thêm 20 người tham gia nên sau x lần giảm thì có thêm $20.x$ (người tham gia) nên tổng số người tham gia sau x lần giảm giá là: $200 + 20.x$ (người)

Tổng doanh thu sau x lần giảm giá là:

$$S = (2\,000\,000 - 100\,000.x) \cdot (200 + 20.x) \text{ (đồng)}$$

$$S = 100\,000.20 \cdot (20 - x) \cdot (10 + x) \text{ (đồng)}$$

$$S = 2\,000\,000 \cdot (-x^2 + 10x + 200) \text{ (đồng)}$$

$$\text{Xét } -x^2 + 10x + 200 = -(x^2 - 10x + 25 - 25 - 200) = -(x - 5)^2 + 225$$

$$\text{Vì } -(x - 5)^2 + 225 \leq 225 \text{ nên } 2\,000\,000 \cdot (-x^2 + 10x + 200) \leq 2\,000\,000.225 = 450\,000\,000$$

$$\text{hay } S \leq 450\,000\,000$$

$$S_{\max} = 450\,000\,000$$

Khi đó $x = 5$ (lần)

Vậy giá tour khi đó: $2\,000\,000 - 100\,000.5 = 1\,500\,000$ (đồng).

Câu 34: Kim cương là một khoáng sản quý, có rất nhiều giá trị và được sử dụng với nhiều mục đích khác nhau. Giá bán của một viên kim cương rất cao và phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố. Giả sử rằng giá bán của viên kim cương tỉ lệ với bình phương khối lượng của nó. Khi đem một viên kim cương cắt thành ba phần và vẫn bán với giá như trên (theo đúng tỉ lệ trên) thì tổng số tiền thu được tăng lên hay giảm đi? Trong trường hợp nào, giá bán của viên kim cương ban đầu giảm nhiều nhất? và giảm bao nhiêu lần?

Lời giải

Giả sử viên kim cương ban đầu có khối lượng là m . Giá bán của viên kim cương tỉ lệ với bình phương khối lượng, nên giá bán là km^2 với k là một hằng số.

Khi cắt viên kim cương thành ba phần có khối lượng a, b, c sao cho $m = a + b + c$,

Giá bán của ba phần này lần lượt là ka^2, kb^2, kc^2

Tổng giá bán của ba phần là $ka^2 + kb^2 + kc^2 = k(a^2 + b^2 + c^2)$

Ta cần so sánh km^2 và $k(a^2 + b^2 + c^2)$

Vì $m = a + b + c$, ta có $m^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

Do đó $m^2 > a^2 + b^2 + c^2$,

Điều này có nghĩa là $km^2 > k(a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy tổng số tiền thu được sau khi cắt giảm đi so với giá bán của viên kim cương ban đầu.

Sau giảm giá nhiều nhất xảy ra khi $a^2 + b^2 + c^2$ nhỏ nhất, tức là $a = b = c = \frac{m}{3}$

Trong trường hợp này, tổng giá bán là: $k\left(\left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^2\right) = k\frac{m^2}{3}$

So với giá bán ban đầu km^2 , giá bán giảm đi $km^2 - k\frac{m^2}{3} = \frac{2}{3}km^2$

Vậy giá bán giảm đi $\frac{2}{3}$ lần so với giá bán ban đầu.

Và giảm giá nhiều nhất khi chia thành 3 phần bằng nhau.

Câu 35: Công ty sản xuất thùng gỗ muốn thiết kế số lượng lớn thùng đựng hàng hóa bên trong, dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp với thể tích là $62,5\text{dm}^3$. Để tiết kiệm vật liệu gỗ làm thùng, người ta cần thiết kế thùng sao cho có tổng S diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất. Hỏi S có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

* **Chứng minh bất đẳng thức Cauchy với ba số không âm a, b, c :** $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Giải:

Đặt $a = x^3; b = y^3; c = z^3$ suy ra $x + y + z \geq 0$

Bất đẳng thức qui được về: $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ hay $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$

Xét $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)^3 - 3z(x + y)(x + y + z) - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)\left[(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy\right]$

$$\begin{aligned}
&= (x+y+z)[x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-3xz-3yz-3xy] \\
&= (x+y+z)[x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz] \\
&= \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2] \geq 0
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$

Từ đó suy ra $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

* Áp dụng giải Câu toán:

Gọi a (dm) là độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ ($a > 0$)

Theo đề Câu ta có chiều cao của lăng trụ là $h = \frac{62,5}{a^2}$

Diện tích xung quang của hình lăng trụ đứng là:

$$S = 4 \cdot \frac{62,5}{a^2} \cdot a + a^2 = \frac{250}{a} + a^2 = \frac{125}{a} + \frac{125}{a} + a^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có:

$$S \geq 3\sqrt[3]{\frac{125}{a} \cdot \frac{125}{a} \cdot a^2} = 75$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{125}{a} = a^2$ hay $a = 5$

Vậy diện tích gỗ nhỏ nhất để sản xuất thùng là 75dm^2 khi độ dài cạnh đáy là 5dm .

Câu 36: Cửa hàng nhà bác Dũng chuyên kinh doanh máy tính tại Hà Nội. Một loại máy tính có giá nhập vào một chiếc là 18 triệu đồng và bán ra với giá 22 triệu đồng. Với giá bán như trên thì một năm số lượng máy tính bán được dự kiến là 500 chiếc. Để tăng thêm lượng tiêu thụ dòng máy tính này, bác Dũng dự định giảm giá bán và ước lượng cứ giảm 200 nghìn đồng một chiếc thì số lượng máy tính bán ra trong một năm sẽ tăng 50 chiếc. Vậy bác Dũng phải bán với giá bao nhiêu để sau khi giảm giá lợi nhuận thu được sẽ cao nhất?

Lời giải

Đổi 200 nghìn đồng = 0,2 triệu đồng.

Gọi x là giá mới mà cửa hàng bán một chiếc máy tính (triệu đồng, $x > 18$)

Số tiền cửa hàng bị giảm khi bán một chiếc máy tính là $22 - x$ (triệu đồng)

Khi đó, số lượng máy tính bán ra được trong một năm là:

$$500 + 50(22 - x) : 0,2 = 6000 - 250x \text{ (chiếc)}$$

Lợi nhuận mà cửa hàng thu được khi bán giá mới là:

$$(6000 - 250x) \cdot (x - 18) = -250x^2 + 10500x - 108000 = -250 \cdot (x^2 - 42x + 432) \\ = -250(x - 21)^2 + 2250 \geq 2250$$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 21 = 0$ hay $x = 21$

Vậy giá bán mới một chiếc máy tính của cửa hàng là 21 triệu đồng, giá trị lợi nhuận thu được cao nhất là 2250 (triệu đồng).

Câu 37: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy móc có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ (người này sẽ giám sát tất cả các máy hoạt động). Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất?

Lời giải

Gọi số máy móc công ty nên sử dụng là x (máy). Điều kiện $x > 0$.

Trong một giờ, số quả bóng tennis sản xuất được là $30x$ (quả bóng)

Như vậy, số giờ để sản xuất 8000 quả bóng là $\frac{8000}{30x}$ (giờ)

Mỗi giờ phải trả 192 nghìn đồng cho người giám sát và chi phí thiết lập cho mỗi máy là 200 nghìn đồng nên chi phí sản xuất là

$$B = 200000x + \frac{8000}{30x} \cdot 192000 = 200000x + \frac{51200000}{x} \text{ (đồng)}.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau $a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b > 0$ (Bất đẳng thức AM-GM)

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(a + b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0, \forall a, b > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương $200000x$ và $\frac{51200000}{x}$, ta được

$$200000x + \frac{51200000}{x} \geq 2\sqrt{200000x \cdot \frac{51200000}{x}} = 6400000.$$

Dấu “=” xảy ra khi $200000x = \frac{51200000}{x} \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow x = 16$ (nhận) hay $x = -16$ (loại).

Vậy số máy móc công ty nên sử dụng là 16 máy để chi phí sản xuất là thấp nhất.

Câu 38: Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và

y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Lời giải

Ta có phương trình $3000x + 4000y = 2023000$

$$3x + 4y = 2023$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{2023 - 3x}{4} \geq 1, \text{ suy ra } 1 \leq x \leq \frac{2019}{3} = 673$$

$$\text{Mặt khác ta có } y = \frac{2023 - 3x}{4} = \frac{2024 - 4x - 1 + x}{4} = 506 - x + \frac{x - 1}{4}$$

Để y nguyên thì $x - 1$ chia hết cho 4, suy ra $x = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}$.

Kéo theo $y = 505 - 3k$.

Do đó $1 \leq 1 + 4k \leq 673$ hay $0 \leq k \leq 168$.

Vậy có 169 cặp