

**KẾ HOẠCH HOẠT ĐỘNG****Học kỳ II**

<b>Tuần</b>	<b>Thứ</b>	<b>Nội dung</b>
20		
21		
22		
23		

24		
25		
26		
27		
28		

29		
30		
31		
32		

33		
34		
35		
36		

# ĐẠI SỐ

## **Chương 4. Bất đẳng thức. Bất phương trình**

Bài 1. Bất đẳng thức	06
Bài 2. Bất phương trình & hệ bất phương trình một ẩn	09
Bài 3. Dấu của nhị thức bậc nhất	12
Bài 4. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn	16
Bài 5. Dấu của tam thức bậc hai	19

## **Chương 5. Thống kê**

Bài 4. Phương sai & độ lệch chuẩn	22
-----------------------------------	----

## **Chương 6. Cung & góc lượng giác. Công thức lượng giác**

Bài 1. Cung & góc lượng giác	26
Bài 2. Giá trị lượng giác của một cung	29
Bài 3. Công thức lượng giác	33

# Chương 4. BẤT ĐẲNG THỨC & BẤT PHƯƠNG TRÌNH

## §1. BẤT ĐẲNG THỨC

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Ôn tập bất đẳng thức:

##### 1.1. Khái niệm:

Các ..... dạng " $a < b$ " hoặc " $a > b$ " hoặc " $a \leq b$ " hoặc " $a \geq b$ " được gọi là bất đẳng thức.

Ví dụ 1:  $3 \leq 2$  → .....  
 $x^2 + 7 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  → .....

##### 1.2. BĐT hệ quả & BĐT tương đương:

- ✦ Nếu mệnh đề " $(1) \Rightarrow (2)$ " đúng thì ta nói BĐT (...) là BĐT hệ quả của BĐT (...)
- ✦ Nếu (1) là hệ quả của (2) và (2) là hệ quả của (1) thì (1) và (2) .....

##### 1.3. Tính chất của BĐT:

STT	Tính chất	Ghi chú
1	$a \geq b \Leftrightarrow a + C \geq b + C$	
2	$a \geq b \Leftrightarrow a.C \geq b.C$ nếu $C > 0$ $a \geq b \Leftrightarrow a.C \leq b.C$ nếu $C < 0$	
3	$\begin{cases} a \geq b \\ c \geq d \end{cases} \Rightarrow a + c \geq b + d$	
4	$\begin{cases} a \geq b > 0 \\ c \geq d > 0 \end{cases} \Rightarrow a.c \geq b.d$	
5	$a \geq b \Leftrightarrow a^n \geq b^n$ nếu $n$ lẻ $a \geq b > 0 \Leftrightarrow a^n \geq b^n$ nếu $n$ chẵn	
6	$a \geq b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} \geq \sqrt[3]{b}$ $a \geq b > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$	

Ví dụ 2: CMR với mọi  $x, y$  sao cho  $0 > x > y$ , ta đều có  $x^2 < y^2$ .



#### 2. BĐT Cauchy:

##### 2.1. BĐT Cauchy:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi .....

Ví dụ 3: Chứng minh rằng  $x^2y + \frac{1}{y} \geq 2x, \forall x \geq 0, y > 0$ .



**2.2. Các hệ quả:**

•  $a + \frac{1}{a} \geq \dots, \forall a > 0$

•  $\left. \begin{matrix} a, b > 0 \\ a + b = \text{const} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \cdot b$  đạt giá trị .....nhất khi  $a = b$

•  $\left. \begin{matrix} a, b > 0 \\ a \cdot b = \text{const} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + b$  đạt giá trị .....nhất khi  $a = b$

**Ví dụ 4:** Tìm GTLN của hàm số  $y = \sqrt{x(5-x)}$  trên khoảng  $(0;5)$ .

**Ví dụ 5:** Tìm GTNN của hàm số  $y = x + \frac{3}{x-2}$  trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

**3. BĐT chứa dấu giá trị tuyệt đối:**

Điều kiện	Nội dung
	$ x  \geq 0,  x  \geq x,  x  \geq -x$
$a > 0$	$ x  \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$
	$ x  \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$
	$ a  -  b  \leq  a+b  \leq  a  +  b $

**Ví dụ 6:** Cho  $x \in [-2;0]$ . CMR  $|x+1| \leq 1$ .

## B. THỰC HÀNH:

### 1. Hoạt động 1:

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi giá trị của  $x$ ?

- A.  $8x > 4x$ .      B.  $8x < 4x$ .      C.  $8x^2 > 4x^2$ .      D.  $8+x > 4+x$ .

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào không đúng với mọi giá trị của  $x$ ?

- A.  $8+x > 4+x$ .      B.  $8-x > 4-x$ .      C.  $8x^2 \geq 4x^2$ .      D.  $\frac{8}{x} > \frac{4}{x}$ .

Câu 3. Cho  $a > b > 0$  và  $c \neq 0$ . Bất đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $a+c > b+c$ .      B.  $a-c > b-c$ .      C.  $ac > bc$ .      D.  $ac^2 > bc^2$ .

Câu 4. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ ?

- A.  $x^2y + \frac{1}{y} \geq 2x$ .      B.  $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ .      C.  $x^2+y \geq y$ .      D.  $x^2+y \geq 2x\sqrt{y}$ .

Câu 5. Cho  $y > 0$ . Bất đẳng thức nào sau đây không đúng với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ ?

- A.  $y+1 \geq 2\sqrt{y}$ .      B.  $x^2y + \frac{1}{y} \geq 2x$ .      C.  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .      D.  $x^2+y > x^2$ .

Câu 6. Cho  $a, b$  là hai số cùng dấu. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A.  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .      B.  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$ .      C.  $\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2ab$ .      D.  $\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \leq 0$ .

Câu 7. Với hai số dương  $x, y$  thỏa  $xy = 36$ , bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $x+y \geq 12$ .      B.  $x+y \geq 72$ .      C.  $\left| \frac{x+y}{2} \right|^2 > 36$ .      D.  $x+y \leq 12$ .

Câu 8. Cho hai số dương  $x, y$  thỏa  $x+y = 12$ , bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

- A.  $2\sqrt{xy} \leq 12$ .      B.  $xy \leq 36$ .      C.  $2xy \leq x^2 + y^2$ .      D.  $xy \leq 12$ .

Câu 9. Cho hai số  $x, y \geq 0$  sao cho  $xy = 2$ . Giá trị nhỏ nhất của  $A = x^2 + y^2$  là

- A. 2.      B. 1.      C. 0.      D. 4.

Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \sqrt{(2x+3)(5-2x)}$  trên đoạn  $\left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$  là

- A. 2.      B. 4.      C. 8.      D.  $2\sqrt{2}$ .

### 2. Hoạt động 2:

Câu 1. Chứng minh rằng:

- a)  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0$       b)  $(a+b)(ab+1) \geq 4ab, \forall a, b \geq 0$   
 c)  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6, \forall a, b, c > 0$       d)  $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b > 0$

Câu 2. (BT 4 SGK trang 79) Chứng minh rằng:

- a)  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2, \forall x, y \geq 0$       b)  $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3, \forall x, y \geq 0$

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a)  $f(x) = x + \frac{5}{x}$  với  $x > 0$

b)  $f(x) = x + \frac{2}{x-3}$  với  $x > 3$

Câu 4. Cho hàm số  $y = \sqrt{(x+3)(5-x)}$  với  $-3 \leq x \leq 5$ . Tìm  $x$  sao cho hàm số đạt giá trị lớn nhất.



## §2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH & HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Khái niệm bất phương trình một ẩn:

##### 1.1. Bất phương trình một ẩn:

BPT ẩn  $x$  là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) < g(x) \quad (f(x) \leq g(x)) \quad (1)$$

trong đó  $f(x)$  và  $g(x)$  là những biểu thức của .....

Ta gọi  $f(x)$  và  $g(x)$  lần lượt là vế ..... và vế ..... của BPT (1). Số thực  $x_0$  thỏa mãn BPT (1) được gọi là một ..... của BPT (1).

Giải BPT là tìm ..... của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói BPT .....

##### 1.2. Điều kiện của một bất phương trình:

tương tự điều kiện của phương trình

Ví dụ 1: Tìm điều kiện của BPT  $\frac{3}{x} < 1 - \sqrt{x+2}$ .

##### 1.3. Bất phương trình chứa tham số:

Ví dụ 2:  $3x^2 - (2m+1)x + m - 7 \geq 0$ .

#### 2. Hệ bất phương trình một ẩn:

Hệ BPT ẩn  $x$  gồm một số BPT ẩn  $x$  mà ta phải tìm các nghiệm ..... của chúng.

Mỗi giá trị của  $x$  đồng thời là nghiệm của ..... các BPT của hệ được gọi là một ..... của hệ BPT đã cho.

Giải hệ BPT là tìm ..... của nó.

Để giải một hệ BPT ta ..... rồi lấy ..... của các tập nghiệm.

Ví dụ 3: Giải hệ bất phương trình 
$$\begin{cases} 15x - 2 \leq 2x + \frac{1}{3} \\ \frac{2x+1}{3} < 4x + 5 \end{cases}$$

### 3. Một số phép biến đổi bất phương trình:

#### 3.1. Bất phương trình tương đương:

Hai BPT tương đương là hai BPT có cùng ..... (Tương tự đối với hệ BPT)

#### 3.2. Phép biến đổi tương đương:

Để giải một BPT (hệ BPT) ta liên tiếp biến đổi nó thành những BPT (hệ BPT) ..... cho đến khi được BPT (hệ BPT) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay ..... Các phép biến đổi như vậy được gọi là phép biến đổi tương đương.

\* Cộng (trừ):  $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) \dots Q(x) + f(x)$

\* Nhân (chia):

$P(x) < Q(x)$	
$f(x) > 0, \forall x$	$P(x) \cdot f(x) \dots Q(x) \cdot f(x)$
$f(x) < 0, \forall x$	$P(x) \cdot f(x) \dots Q(x) \cdot f(x)$

\* Bình phương hai vế: Nếu  $P(x), Q(x) \geq 0, \forall x$  thì  $P(x) < Q(x) \dots P^2(x) < Q^2(x)$ .

## B. THỰC HÀNH:

### 1. Hoạt động 1:

1. Điền vào chỗ trống của bảng sau:

STT	Bất phương trình	Điều kiện
1	$\frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$	
2	$\frac{1}{x^2-4} \leq \frac{2x}{x^2-4x+3}$	
3	$2 x -1 + \sqrt[3]{x-1} < \frac{2x}{x+1}$	
4	$2\sqrt{1-x} > 3x + \frac{1}{x+4}$	

### 2. Hoạt động 2:

Câu 1. Điều kiện của bất phương trình  $5x + \frac{1}{x^2-4} \geq 10 + \frac{1}{x^2-4}$  là

- A.  $x > 2$ .                      B.  $x \neq 2$ .                      C.  $x \neq -2$ .                      D.  $x \neq \pm 2$ .

Câu 2. Điều kiện của bất phương trình  $\sqrt{3x-9} - \sqrt{4x+21} > 0$  là

- A.  $x \geq 3$ .                      B.  $x \geq -\frac{21}{4}$ .                      C.  $-\frac{21}{4} \leq x \leq 3$ .                      D.  $x \leq -\frac{21}{4}$

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình  $\sqrt{x-2017} \leq \sqrt{2017-x}$  là

- A.  $S = \emptyset$ .                      B.  $S = \{2017\}$ .                      C.  $S = [2017; +\infty)$ .                      D.  $S = (-\infty; 2017]$ .

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình  $x + \sqrt{x-2} \leq 2 + \sqrt{x-2}$  là

- A.  $S = \emptyset$ .                      B.  $S = \{2\}$ .                      C.  $S = [2; +\infty)$ .                      D.  $S = (-\infty; 2]$ .

Câu 5.  $x = -3$  là nghiệm của bất phương trình nào sau đây:

A.  $(x+2)(x+3) > 0$ .    B.  $(x+2)(x+3)^2 \leq 0$ .    C.  $x + \sqrt{1-x^2} \geq 0$ .    D.  $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{3+2x} > 0$ .

Câu 6. Bất phương trình  $5x - 1 > \frac{2x}{5} + 3$  có nghiệm là

A.  $\forall x$ .    B.  $x < 2$ .    C.  $x > -\frac{5}{2}$ .    D.  $x > \frac{20}{23}$ .

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình  $(2x-1)(x+3) - 3x + 1 > (x-1)(x+3) + x^2 - 5$  là

A.  $S = \emptyset$ .    B.  $S = \mathbb{R}$ .    C.  $S = (-\infty; 6)$ .    D.  $S = (6; +\infty)$ .

Câu 8. Tập nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} \frac{4x-10}{4} - 2 \geq 2x+3 \\ 5x+1 < 1 - \frac{x+3}{2} \end{cases}$  là

A.  $S = \left(-\infty; -\frac{15}{2}\right]$ .    B.  $S = \left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$ .    C.  $S = \left(-\infty; -\frac{15}{2}\right)$ .    D.  $S = \emptyset$ .

Câu 9. Nghiệm nguyên của bất phương trình  $x + \sqrt{x} > (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)$  là

A.  $[0; 3)$ .    B.  $\{0; 3\}$ .    C.  $\{0; 1; 2\}$ .    D.  $\{0; 1; 2; 3\}$ .

Câu 10. Hệ bất phương trình  $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$  có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0.    B. 1.    C. 2.    D. 3.

### 3. Hoạt động 3:

1. Giải các bất phương trình sau:

a)  $\frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} < \frac{1-2x}{4}$

b)  $x + \sqrt{x} > (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)$

c)  $(\sqrt{1-x} + 3)(2\sqrt{1-x} - 5) > \sqrt{1-x} - 3$

d)  $(2x-1)(x+3) - 3x + 1 \leq (x-1)(x+3) + x^2 - 5$

2. Giải các hệ bất phương trình sau:

a)  $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$

c)  $\begin{cases} -2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3} \\ x - \frac{1}{2} < \frac{5(3x-1)}{2} \end{cases}$

d)  $\begin{cases} \frac{3x+1}{2} - \frac{3-x}{3} \leq \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{3} \\ 3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{4}{3} \end{cases}$

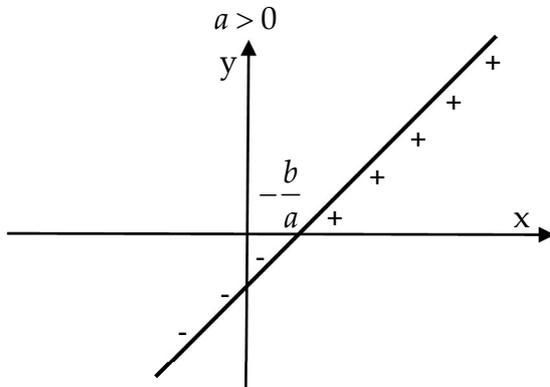


## §3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

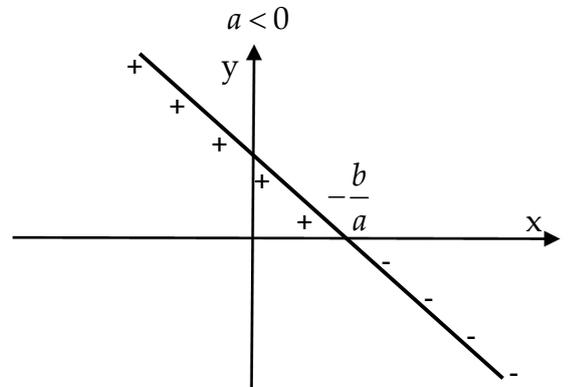
$$y = \quad ( \quad )$$

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Dấu của nhị thức bậc nhất:



..... dấu với a      ..... dấu với a



..... dấu với a      ..... dấu với a

#### ⊗ Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	..... dấu với a	0	..... dấu với a

**Ví dụ 1:** Xét dấu các biểu thức sau:

a)  $y = 2x + 4$

x	
$2x + 4$	

- ?  $y > 0$  trên khoảng .....
- $y \geq 0$  trên khoảng .....
- $y < 0$  trên khoảng .....
- $y \leq 0$  trên khoảng .....

b)  $y = 5 - 3x$

x	
$5 - 3x$	

- ?  $y > 0$  trên khoảng .....
- $y \geq 0$  trên khoảng .....
- $y < 0$  trên khoảng .....
- $y \leq 0$  trên khoảng .....

**Ví dụ 2:** Xét dấu các biểu thức sau:

a)  $y = (2x + 4)(5 - 3x)$

x	
$2x + 4$	
$5 - 3x$	
y	

- ?  $y > 0$  trên khoảng .....
- $y \geq 0$  trên khoảng .....
- $y < 0$  trên khoảng .....
- $y \leq 0$  trên khoảng .....

b)  $y = \frac{2x + 4}{5 - 3x}$

x	
$2x + 4$	
$5 - 3x$	
y	

- ?  $y > 0$  trên khoảng .....
- $y \geq 0$  trên khoảng .....
- $y < 0$  trên khoảng .....
- $y \leq 0$  trên khoảng .....

## 2. Áp dụng vào giải bất phương trình:

**Ví dụ 3:** Giải các bất phương trình:

a)  $(2x + 4)(5 - 3x) > 0$

x	
2x + 4	
5 - 3x	
VT	

$\Rightarrow S =$

b)  $\frac{2x + 4}{5 - 3x} > 0$

x	
2x + 4	
5 - 3x	
VT	

$\Rightarrow S =$

**Ví dụ 4:** Giải các bất phương trình:

a)  $(2x + 4)(5 - 3x) \geq 0$

x	
2x + 4	
5 - 3x	
VT	

$\Rightarrow S =$

b)  $\frac{2x + 4}{5 - 3x} \geq 0$

x	
2x + 4	
5 - 3x	
VT	

$\Rightarrow S =$

**Ví dụ 5:** Giải bất phương trình  $\frac{1}{1-x} \geq 1$ .



## 3. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối:

$\boxtimes |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$ 

 $\boxtimes |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}$

**Ví dụ 6:** Giải các bất phương trình:

a)  $|5x - 4| > 6$

b)  $|1 - 2x| + x - 3 < 5$



**B. THỰC HÀNH:**

**1. Hoạt động 1:**

1. Xét dấu các biểu thức sau:

a)  $y = 2x - 4$       b)  $y = 4 - 2x$       c)  $y = (2x - 4)(3 - x)$       d)  $y = x^2 - 9$   
 e)  $y = (x - 1)^2$       f)  $y = \frac{2x - 4}{3 - x}$       g)  $y = \frac{x^2 - 9}{x}$       h)  $y = \frac{1}{2 - x} - \frac{1}{2 + x}$

2. Kiểm tra xem các giá trị sau đây có thuộc tập nghiệm các bất phương trình không:

STT	Bất phương trình	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
1	$(2x - 4)(3 - x) < 0$			
2	$\frac{2x - 4}{3 - x} \leq 0$			
3	$ 5 - 2x  \leq 4x - 3$			

**2. Hoạt động 2:**

Câu 1. Biểu thức  $1 - 5x$  nhận giá trị âm khi

A.  $x < \frac{1}{5}$ .      B.  $x > \frac{1}{5}$ .      C.  $x < -\frac{1}{5}$ .      D.  $x > -\frac{1}{5}$ .

Câu 2. Bất phương trình  $2x - 3 \geq x$  có nghiệm là

A.  $x > 3$ .      B.  $x < 3$ .      C.  $x \geq 3$ .      D.  $x \leq 3$ .

Câu 3. Bất phương trình  $(2x + 1)(2 - x) \geq 0$  có tập nghiệm là

A.  $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .      B.  $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ .      C.  $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .      D.  $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ .

Câu 4. Bất phương trình  $\frac{2 - x}{2x + 1} \geq 0$  có tập nghiệm là

A.  $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .      B.  $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ .      C.  $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .      D.  $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ .

Câu 5. Nghiệm nguyên của bất phương trình  $\frac{2 - x}{2x + 1} \geq 0$  là

A.  $[0; 2]$ .      B. 1 và 2.      C. 0, 1 và 2.      D.  $\left(-\frac{1}{2}; 2\right]$ .

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình  $|2x - 1| > x$  là

A.  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$ .      B.  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ .      C.  $\mathbb{R}$ .      D.  $\emptyset$ .

Câu 7. Để phương trình  $(2 - m)x^2 + 3mx + 5m - 6 = 0$  có hai nghiệm trái dấu thì

A.  $m \in \left(-\infty; \frac{6}{5}\right) \cup (2; +\infty)$ .      B.  $S = \left(-\infty; \frac{6}{5}\right) \cup (2; +\infty)$ .  
 C.  $m \in \left(\frac{6}{5}; 2\right)$ .      D.  $S = \left(\frac{6}{5}; 2\right)$ .

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình  $x^2 - 2x < 0$  là

A.  $\emptyset$ .      B.  $\mathbb{R}$ .      C.  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .      D.  $(0; 2)$ .

Câu 9. Tập nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} \frac{2-x}{2x+1} \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$  là

- A.  $\left(-\frac{1}{2}; 2\right]$ .      B.  $[2; +\infty)$ .      C.  $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .      D.  $\left(\frac{1}{2}; 2\right]$ .

Câu 10. Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{\frac{x-1}{4x+3}}$  là

- A.  $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup [1; +\infty)$ .      B.  $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup [1; +\infty)$ .      C.  $\left[-\frac{3}{4}; 1\right]$ .      D.  $\left(-\frac{3}{4}; 1\right]$ .

### 3. Hoạt động 3:

Câu 1. Giải các bất phương trình sau:

- a)  $(2x-1)(x+3) > 0$       b)  $2x^2 + 5x - 3 > 0$       c)  $\frac{2x-1}{x+3} \geq 0$       d)  $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} < 1$   
 e)  $\frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1}$       f)  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} < \frac{3}{x+3}$       g)  $|5-8x| \leq 4x-3$       h)  $|2x-1| \geq x+1$

Câu 2. Tìm giá trị của tham số  $m$  sao cho các phương trình sau có hai nghiệm trái dấu:

- a)  $(m-2)x^2 - 3x + 7 - 2m = 0$       b)  $(m+1)x^2 + 2mx + 4 - m^2 = 0$



## §4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn:

##### 1.1. Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn:

BPT bậc nhất hai ẩn  $x, y$  có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \quad (1)$$

$$(ax + by < c; ax + by \geq c; ax + by > c)$$

trong đó:

- $a, b, c$  là những số thực đã cho;  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0;
- $x$  và  $y$  là các .....

##### 1.2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ..... các điểm có tọa độ  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của bất phương trình (1) được gọi là ..... của nó.

× Bước 1. Vẽ đường thẳng  $\Delta: ax + by = c$

× Bước 2. Chọn điểm  $M_0(x_0; y_0)$  .....  $\Delta$

× Bước 3. Thế  $x_0$  và  $y_0$  vào (1)

Nếu thỏa mãn thì miền chứa  $M_0$  là miền nghiệm, ngược lại thì miền kia là miền nghiệm.

× Bước 4. Kết luận

Gạch bỏ miền không phải miền nghiệm

**Ví dụ 1:** Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình sau:

a)  $2x + y \leq 3$

b)  $-3x + 2y > 0$

#### 2. Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn:

Hệ BPT bậc nhất 2 ẩn gồm một số BPT bậc nhất 2 ẩn  $x, y$  mà ta phải tìm các ..... của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là ..... của hệ BPT đã cho.

Cũng như BPT bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ BPT bậc nhất 2 ẩn

**Ví dụ 2:** Biểu diễn hình học tập nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 10 \end{cases}$$

### 3. Áp dụng vào bài toán kinh tế:

Giải một số bài toán kinh tế thường dẫn đến việc xét những hệ BPT bậc nhất hai ẩn và giải chúng. Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến Quy hoạch tuyến tính. Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế.

Tham khảo: <http://bit.ly/2zOUs5z>



## B. THỰC HÀNH:

### 1. Hoạt động 1:

Câu 1. Cặp số  $(1, -1)$  là nghiệm của bất phương trình nào sau đây:

- A.  $x + 3y > 3$ .      B.  $x + 3y < -1$ .      C.  $2x + y > 5$ .      D.  $3x + y < -1$ .

Câu 2. Cặp số  $(2, 3)$  là nghiệm của bất phương trình nào sau đây:

- A.  $x - 3y + 1 > 0$ .      B.  $x - y < 0$ .      C.  $4x - 3y - 1 > 0$ .      D.  $x - 3y + 10 < 0$ .

Câu 3. Cặp số nào sau đây không phải là nghiệm của bất phương trình  $5x - 2y + 2 \leq 0$ ?

- A.  $(1; 3)$ .      B.  $(0; 1)$ .      C.  $(-1; 0)$ .      D.  $(-1; 1)$ .

Câu 4. Điểm  $O(0; 0)$  thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây:

- A.  $x + y + 3 \leq 0$ .      B.  $x - y + 5 < 0$ .      C.  $x + y + 2 \geq 0$ .      D.  $x - y > 1$ .

Câu 5. Điểm  $M(-1; -1)$  thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây:

- A.  $2x + y + 5 < 0$ .      B.  $2x + y + 2 > 0$ .      C.  $x + 2y > 2$ .      D.  $2x + y < 2$ .

Câu 6. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$ ?

- A.  $A(1; 2)$ .      B.  $B(-1; -2)$ .      C.  $C(2; -1)$ .      D.  $O(0; 0)$ .

Câu 7. Điểm  $O(0; 0)$  thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây:

- A.  $\begin{cases} x + 2y > 4 \\ x + y + 2 > 0 \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} x + y > 6 \\ x + 2y + 1 > 0 \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} x + 3y < 6 \\ 2x + y + 3 < 0 \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x + 7y + 2 > 0 \\ 2x - y + 1 > 0 \end{cases}$ .

### 2. Hoạt động 2:

Câu 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các BPT bậc nhất hai ẩn sau:

a)  $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$

b)  $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$

c)  $4(x - 1) + 5(y - 3) \geq 2x - 9$

d)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 \leq 0$

Câu 2. Giải các hệ BPT sau:

a) 
$$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y < -3 \\ x + y \geq 5 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$$

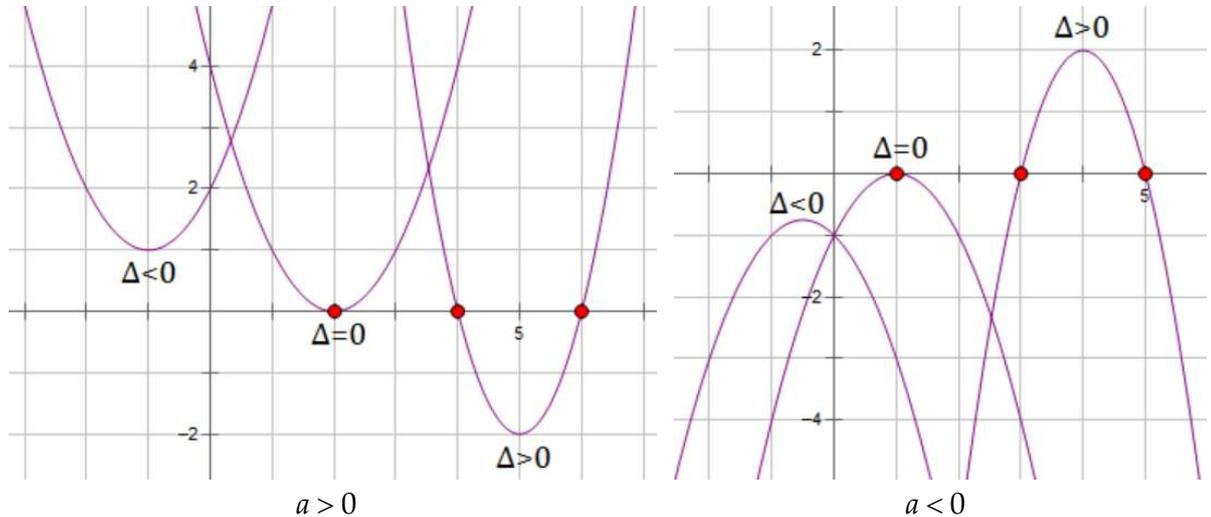
d) 
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

## §5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

$$y = \quad ( \quad )$$

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Định lí về dấu của tam thức bậc hai:



☒  $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)	..... dấu với a		

☒  $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	..... dấu với a	<b>0</b>	..... dấu với a

☒  $\Delta > 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases} \quad (x_1 < x_2)$$

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
f(x)	..... dấu với a	<b>0</b>	..... dấu với a	<b>0</b> ..... dấu với a

**Ví dụ 1:** Xét dấu các biểu thức sau:

a)  $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

b)  $g(x) = 9x^2 - 24x + 16$

c)  $h(x) = 3x^2 + 2x - 5$

**Ví dụ 2:** Xét dấu của biểu thức  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}$ .

## 2. Bất phương trình bậc 2 một ẩn:

BPT bậc hai ẩn  $x$  là BPT dạng  $ax^2 + bx + c < 0$  ( $ax^2 + bx + c \leq 0$ ,  $ax^2 + bx + c > 0$ ,  $ax^2 + bx + c \geq 0$ ), trong đó  $a, b, c$  là những số thực đã cho,  $a \neq 0$ .

**Ví dụ 3:** Giải các bất phương trình sau:

a)  $-x^2 + 3x - 5 > 0$

b)  $9x^2 - 24x + 16 > 0$

c)  $3x^2 + 2x - 5 \leq 0$

d)  $4x^2 - 1 < 0$

**Ví dụ 4:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình sau có 2 nghiệm trái dấu:

$$2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$$

**B. THỰC HÀNH:****1. Hoạt động 1:**

Câu 1. Biểu thức  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  nhận giá trị dương trên khoảng nào sau đây:

- A.  $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ . B.  $[-1; 3]$ . C.  $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ . D.  $(-1; 3)$ .

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình  $x^2 - 2x - 3 > 0$  là

- A.  $\emptyset$ . B.  $\mathbb{R}$ . C.  $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ . D.  $(-1; 3)$ .

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình  $x^2 + 9 \geq 6x$  là

- A.  $\emptyset$ . B.  $\{3\}$ . C.  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ . D.  $\mathbb{R}$ .

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình  $x^2 + 9 > 6x$  là

- A.  $\emptyset$ . B.  $\{3\}$ . C.  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ . D.  $\mathbb{R}$ .

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình  $x(x^2 - 1) \geq 0$  là

- A.  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ . B.  $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$ . C.  $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$ . D.  $[-1; 1]$ .

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình  $\frac{x-1}{x^2+4x+3} \leq 0$  là

- A.  $(-\infty; -1)$ . B.  $(-3; -1) \cup [1; +\infty)$ . C.  $(-\infty; -3) \cup (-1; 1]$ . D.  $(-3; 1)$ .

Câu 7. Phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm khi

- A.  $a \cdot c < 0$ . B.  $\Delta < 0$ . C.  $\Delta > 0$ . D.  $\Delta \geq 0$ .

Câu 8. Để phương trình  $(2 - 2m)x^2 + 3mx + 6 - 5m + m^2 = 0$  có hai nghiệm trái dấu thì

- A.  $m \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$ . B.  $S = (1; 2) \cup (3; +\infty)$ . C.  $m \in (-\infty; 1) \cup (2; 3)$ . D.  $S = (-\infty; 1) \cup (2; 3)$ .

Câu 9. Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$  là

- A.  $\emptyset$ . B.  $\{3\}$ . C.  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ . D.  $\mathbb{R}$ .

Câu 10. Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+4x+3}}$  là

- A.  $(-\infty; -3) \cup (-1; 1]$ . B.  $(-3; -1) \cup [1; +\infty)$ . C.  $\mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$ . D.  $\mathbb{R}$ .

**2. Hoạt động 2:**

Câu 1. (BT 3 SGK trang 105) Giải các bất phương trình sau:

- a)  $x^2 + x + 1 > 0$       b)  $x^2 - 4x + 4 \leq 0$       c)  $2x^2 + 7x - 15 \geq 0$       d)  $6 + x - x^2 < 0$   
 e)  $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5) > 0$       f)  $\frac{3 - x^2}{x(4x^2 + x - 3)} \leq 0$   
 g)  $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}$       h)  $|2x^2 - x + 1| < 9x + 1$

Câu 2. Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $-3x^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$

- a) Có hai nghiệm trái dấu      b) Có hai nghiệm phân biệt  
 c) Vô nghiệm      d) Có nghiệm



# Chương 5. THỐNG KÊ

## §4. PHƯƠNG SAI & ĐỘ LỆCH CHUẨN

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Số trung bình cộng:

☑ Đối với bảng phân bố tần số, tần suất:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k) = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k$$

☑ Đối với bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k) = f_1c_1 + f_2c_2 + \dots + f_kc_k$$

**Ví dụ 1:** Tính điểm thi trung bình của học sinh huyện Bình Tân trong bảng sau:

*Điểm thi bắn đạn thật của học sinh huyện Bình Tân*

Điểm	27	28	29	30	Cộng
Tần số	10	6	3	1	20

**Ví dụ 2:** Tính độ cao trung bình của những cây đậu bắp trong bảng sau:

*Độ cao của 49 cây đậu bắp*

Độ cao (cm)	[100;120)	[120;140)	[140;160)	[160;180]	Cộng
Tần số	8	10	15	16	49

#### 2. Phương sai:

☑ Đối với bảng phân bố tần số, tần suất:

$$s^2 = \frac{1}{n}[n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2]$$

$$= f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(x_k - \bar{x})^2$$

☑ Đối với bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$$s^2 = \frac{1}{n}[n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2]$$

$$= f_1(c_1 - \bar{x})^2 + f_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(c_k - \bar{x})^2$$

**Ví dụ 3:** Tính phương sai của bảng số liệu sau:

*Điểm thi bắn đạn thật của học sinh huyện Bình Tân*

Điểm	27	28	29	30	Cộng
Tần số	10	6	3	1	20

#### Các ký hiệu

- ▣  $n$ :
- ▣  $n_1, n_2, \dots, n_k$ :
- ▣  $f_1, f_2, \dots, f_k$ :
- ▣  $x_1, x_2, \dots, x_k$ :
- ▣  $c_1, c_2, \dots, c_k$ :

**Ví dụ 4:** Tính phương sai của bảng số liệu sau:

*Độ cao của 49 cây đậu bắp*

Độ cao (cm)	[100;120)	[120;140)	[140;160)	[160;180]	Cộng
Tần số	8	10	15	16	49

### 3. Độ lệch chuẩn:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Phương sai  $s^2$  và độ lệch chuẩn  $s$  đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng  $\bar{x}$ ). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng độ lệch chuẩn  $s$ , vì  $s$  có cùng đơn vị đo với dấu hiệu được nghiên cứu.

**Ví dụ 5:** Sau khi thống kê số học sinh các lớp của trường THCS&THPT Mỹ Thuận năm học 2015 – 2016, ta được hai bảng phân bố như sau:

<i>Khối THCS</i>		<i>Khối THPT</i>	
Số HS	Tần số	Số HS	Tần số
[30;35)	8	[30;35)	6
[35;40)	4	[35;40)	2
[40;45]	3	[40;45]	6
Tổng	15	Tổng	14

- Tính số học sinh trung bình mỗi lớp
- Tìm độ chênh lệch số học sinh giữa các lớp khối THCS và các lớp khối THPT
- Xét xem khối nào có số học sinh mỗi lớp đều hơn



**2. Hoạt động 2:**

Câu 1. Cho bảng phân bố tần số

*Tuổi của 169 đoàn viên thanh niên*

Tuổi	18	19	20	21	22	Cộng
Tần số	10	50	70	29	10	169

Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố trên.

Câu 2. (BT 2 SGK trang 128) Hai lớp 10C, 10D của một trường THPT đồng thời làm bài thi môn Văn theo cùng một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số sau đây.

*Điểm thi Văn của lớp 10C*

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	3	7	12	14	3	1	40

*Điểm thi Văn của lớp 10D*

Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	8	18	10	4	40

- Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của các bảng phân bố đã cho.
- Xét xem kết quả làm bài thi của môn Văn ở lớp nào là đồng đều hơn?

Câu 3. (BT 3 SGK trang 128) Cho hai bảng phân bố tần số ghép lớp

*Khối lượng của nhóm cá mè thứ 1*

Khối lượng (kg)	[0,6;0,8)	[0,8;1,0)	[1,0;1,2)	[1,2;1,4]	Cộng
Tần số	4	6	6	4	20

*Khối lượng của nhóm cá mè thứ 2*

Khối lượng (kg)	[0,5;0,7)	[0,7;0,9)	[0,9;1,1)	[1,1;1,3)	[1,3;1,5]	Cộng
Tần số	3	4	6	4	3	20

- Tính các số trung bình cộng của các bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.
- Tính phương sai của các bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.
- Xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn?

Câu 4. Trong một trường THPT, để tìm hiểu tình hình học môn Toán của hai lớp 10A và 10B, người ta cho hai lớp thi Toán theo cùng một đề thi và lập được hai bảng phân bố tần số sau.

Lớp điểm thi	Tần số
[0;2)	2
[2;4)	4
[4;6)	12
[6;8)	28
[8;10]	4
Cộng	50

*Điểm thi Toán của lớp 10A*

Lớp điểm thi	Tần số
[0;2)	4
[2;4)	10
[4;6)	17
[6;8)	14
[8;10]	5
Cộng	50

*Điểm thi Toán của lớp 10B*

a) Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của các bảng phân bố trên.

b) Xét xem lớp nào có số điểm đồng đều hơn.

Câu 5. Thống kê kết quả học kỳ I môn Toán của ba lớp 11A2, 11A3 và 11A4 năm học 2014 - 2015, ta thu được bảng sau:

	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10]	Tổng	$\bar{x}$	$s^2$	$s$
<b>11A2</b>	0	5	14	14	7				
<b>11A3</b>	0	0	7	14	20				
<b>11A4</b>	0	0	8	20	14				

a) Hãy điền các số thích hợp vào ô trống của bảng trên.

b) Xét xem lớp nào học giỏi hơn, lớp nào học đều hơn?



# Chương 6. CUNG & GÓC LƯỢNG GIÁC

## CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

### §1. CUNG & GÓC LƯỢNG GIÁC

#### A. LÝ THUYẾT:

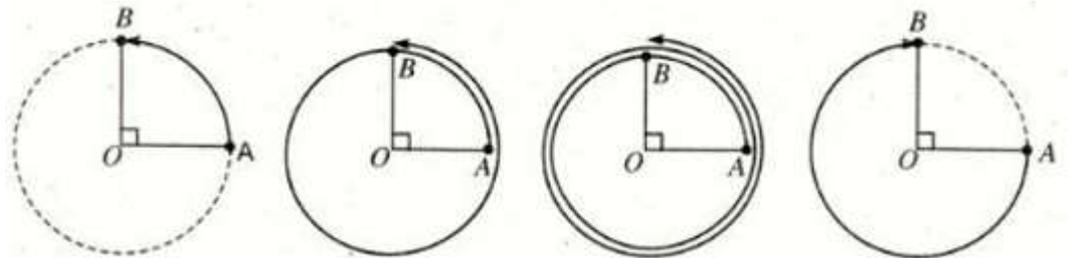
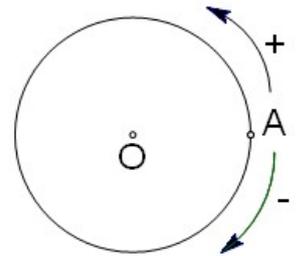
##### 1. Khái niệm cung & góc lượng giác:

##### 1.1. Đường tròn định hướng:

× Đường tròn định hướng là đường tròn mà trên đó đã chọn một chiều chuyển động là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.

Quy ước:

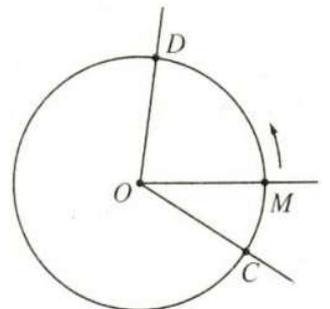
- chiều dương: ..... chiều kim đồng hồ
- chiều âm: ..... chiều kim đồng hồ



× Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng, ta có ..... cung lượng giác điểm đầu A, điểm cuối B.

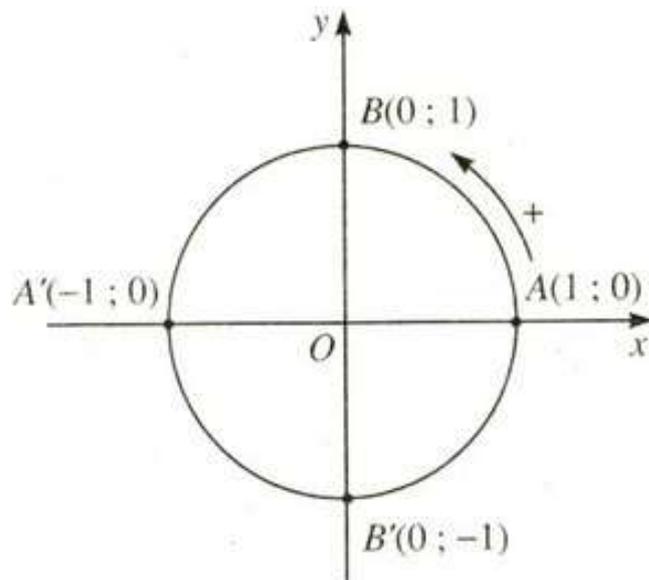
Kí hiệu:  $\overset{\curvearrowright}{AB}$

× Tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến vị trí OD, tạo ra một góc lượng giác. Kí hiệu:  $(OC, OD)$ .



##### 1.2. Đường tròn lượng giác:

Đường tròn lượng giác là đường tròn ....., tâm ....., bán kính bằng .....



## 2. Số đo của cung & góc lượng giác:

### 2.1. Độ & Radian:

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

\* Bảng chuyển đổi thông dụng:

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
Rad										

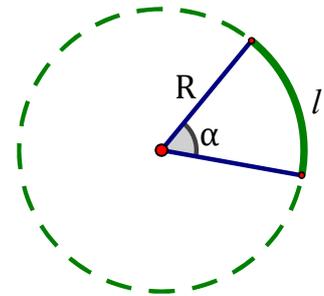
\* Độ dài của một cung tròn:

$$l = R\alpha \quad (\alpha : \text{rad})$$

Ví dụ: Một đường tròn có bán kính 15cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn có số đo:

a)  $\frac{4}{15}$

b)  $13^\circ$



### 2.2. Số đo của một cung lượng giác:

Số đo của một cung lượng giác  $\overset{\frown}{AB}$  là một số thực. Kí hiệu: số  $\overset{\frown}{AB}$ .

$$\overset{\frown}{Sđ} AB = \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{hay } \overset{\frown}{sđ} AB = \alpha^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

### 2.3. Số đo của một góc lượng giác:

Số đo góc lượng giác (OA,OB) là số đo của cung lượng giác  $\overset{\frown}{AB}$  tương ứng.

## B. THỰC HÀNH:

### 1. Hoạt động 1:

1. Ghi số liệu thích hợp vào chỗ trống trong bảng sau:

Độ	30°		35°30'		-9°50'		-120°		720°
Rad		-3		$\frac{1}{5}$		12,3		$-\frac{7\pi}{4}$	

2. Ghi số liệu thích hợp vào chỗ trống trong bảng sau:

Đường tròn		Số đo cung		Độ dài cung
Bán kính	Đường kính	Độ	Rad	
30cm			$\frac{\pi}{9}$	
	30cm		10	
42m		37°		
	16m	420°42'		



## §2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Giá trị lượng giác của một cung:

##### 1.1. Định nghĩa:

Cho cung  $\widehat{AM}$  có số đo  $\alpha$ , khi đó:

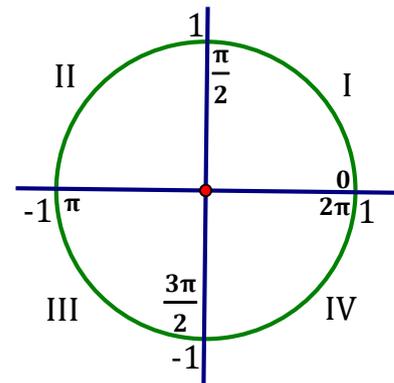
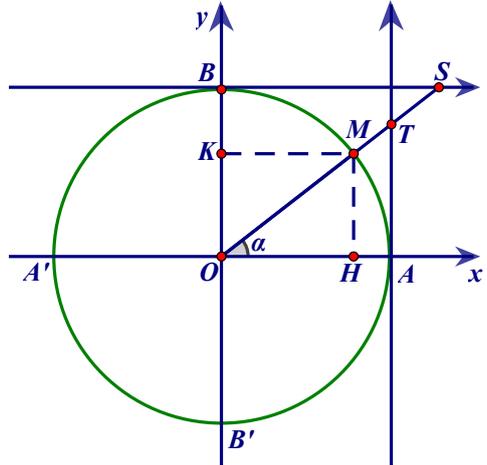
- $\sin \alpha =$  \_\_\_\_\_
- $\cos \alpha =$  \_\_\_\_\_
- $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_
- $\cot \alpha =$  \_\_\_\_\_

##### 1.2. Hệ quả:

- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}$
- $|\sin \alpha| \leq 1, \forall \alpha$
- $|\cos \alpha| \leq 1, \forall \alpha$
- Với mọi số thực  $m \in [-1; 1]$  đều tồn tại  $\alpha, \beta$  mà  $\sin \alpha = m$  và  $\cos \beta = m$

##### 1.3. Dấu của các giá trị lượng giác:

	I	II	III	IV
	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	-	+



##### 1.4. Giá trị lượng giác của các cung thường gặp:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin$									
$\cos$									
$\tan$									
$\cot$									

#### 2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác:

##### 2.1. Công thức lượng giác cơ bản:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 
  $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\begin{aligned} \checkmark \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \checkmark 1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} \\ \checkmark \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \checkmark \tan x \cdot \cot x &= 1 \end{aligned}$$

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng  $(1 + \tan x)(1 + \cot x) = \tan x + \cot x + 2$

**Ví dụ 2:** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính giá trị của  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  và  $\cot \alpha$ .

**Ví dụ 3:** Cho  $\cot x = -2$  và  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ . Tính các giá trị lượng giác còn lại của  $x$ .

## 2.2. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt:

	Đổi	Bù	Phụ	Hơn kém $\pi$
	$-x$	$\pi - x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\pi + x$
Sin				
Cos				
Tan				
Cot				

**B. THỰC HÀNH:**

**1. Hoạt động 1:**

1. Ghi số liệu thích hợp vào bảng sau:

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		$\frac{4}{13}$		
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$			$-\frac{15}{7}$	
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$-0,7$			
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$				$-3$
$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$				$-3$

**2. Hoạt động 2:**

1. Giá trị của biểu thức  $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ$  bằng

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $-\sqrt{3}$       D.  $\sqrt{3}$

2.  $M = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 105^\circ + \cos^2 115^\circ + \cos^2 125^\circ$  bằng

- A. 4      B.  $\frac{7}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

- A.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$     B.  $\tan x \cdot \cot x = 1$     C.  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cot^2 x}$     D.  $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

4. Cho  $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ . Khi đó  $\sin x \cdot \cos x$  bằng

- A.  $\frac{9}{16}$       B.  $\frac{9}{32}$       C.  $\frac{3}{16}$       D.  $\frac{25}{32}$

5. Biểu thức  $\sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x$  luôn có giá trị bằng

- A. 6      B. 5      C. 4      D. 3

6. Cho  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó  $\sin \alpha$  bằng

- A.  $\frac{5}{13}$                       B.  $-\frac{5}{13}$                       C.  $-\frac{5}{12}$                       D.  $-\frac{13}{12}$

7. Cho  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó  $\tan \alpha$  bằng

- A.  $\frac{5}{13}$                       B.  $-\frac{5}{13}$                       C.  $-\frac{5}{12}$                       D.  $-\frac{13}{12}$

8. Cho  $\cot \alpha = -\frac{12}{13}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó  $\tan \alpha$  bằng

- A.  $\frac{5}{13}$                       B.  $-\frac{5}{13}$                       C.  $-\frac{5}{12}$                       D.  $-\frac{13}{12}$

9. Cho  $\cot \alpha = 2 + \sqrt{3}$ . Phát biểu nào sau đây đúng nhất:

- A.  $\alpha = 15^\circ$                       B.  $\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}$                       C.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$                       D. A, B, C đúng

10. Biểu thức  $A = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$  bằng

- A.  $2\sin x$                       B.  $-2\sin x$                       C. 0                      D.  $-2\cot x$

### 3. Hoạt động 3

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $x$  ta luôn có:

- a)  $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$                       b)  $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$

2. Tính các giá trị lượng giác của  $x$ , biết rằng  $20\cos^2 x + 9\cos x - 20 = 0$  và  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .

## §3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Công thức cộng:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{aligned}$$

Ví dụ 1: Tính  $\cos 15^\circ$  và  $\tan \frac{7\pi}{12}$ .



#### 2. Công thức nhân đôi & công thức hạ bậc:

##### 2.1. Công thức nhân đôi:

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a \\ \tan 2a &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính  $S = \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4}$

**2.2. Công thức hạ bậc:**

$$\begin{aligned} \cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2} \\ \tan^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính  $\cot 22,5^\circ$

**3. Công thức biến đổi tích thành tổng & tổng thành tích:**

**3.1. Công thức biến đổi tích thành tổng:**

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \\ \sin a \sin b &= \frac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{2} \\ \sin a \cos b &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức  $A = \sin \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$

**3.2. Công thức biến đổi tổng thành tích:**

$$\begin{aligned} \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức  $B = \frac{\sin 5x + \sin 3x + \sin x}{\cos 5x + \cos 3x + \cos x}$

## B. THỰC HÀNH:

### 1. Hoạt động 1:

1. Nếu  $\cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x$  thì  $x$  không thể bằng

A.  $\frac{\pi}{10}$                       B.  $\frac{\pi}{5}$                       C.  $\frac{\pi}{2}$                       D.  $\frac{5\pi}{2}$

2. Cho  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$  và  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Tính  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ .

A.  $\frac{12-5\sqrt{3}}{26}$                       B.  $\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$                       C.  $\frac{-5+12\sqrt{3}}{26}$                       D.  $\frac{-5-12\sqrt{3}}{26}$

3. Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ . Khi đó  $\cos 2\alpha$  bằng

A.  $\frac{1}{8}$                       B.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$                       C.  $-\frac{\sqrt{7}}{4}$                       D.  $-\frac{1}{8}$

4. Nếu  $\sin a = \frac{\sqrt{5}}{3}$  thì  $\cos 2a \cdot \sin a$  bằng

A.  $\frac{17\sqrt{5}}{27}$                       B.  $-\frac{\sqrt{5}}{9}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}}{27}$                       D.  $-\frac{\sqrt{5}}{27}$

5. Nếu  $\alpha$  là góc nhọn và  $\sin 2\alpha = a$  thì  $\sin \alpha + \cos \alpha$  bằng

A.  $(\sqrt{2}-1)a+1$                       B.  $\sqrt{a+1}-\sqrt{a^2-a}$                       C.  $\sqrt{a+1}$                       D.  $\sqrt{a+1}+\sqrt{a^2-a}$

6. Nếu  $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  thì  $\alpha$  bằng

A.  $30^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $45^\circ$                       D.  $22,5^\circ$

7. Mệnh đề nào sau đây đúng:

A.  $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$                       B.  $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$   
 C.  $\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$                       D.  $\sin a - \cos a = \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$

8. Tính  $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$ .

A.  $-\frac{1}{2}$                       B. 1                      C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{2}$

### 2. Hoạt động 2:

1. (BT 2 SGK trang 154) Tính:

a)  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ , biết  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

b)  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ , biết  $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2. (BT 4 SGK trang 154) Chứng minh các đẳng thức:

a)  $\frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}$

b)  $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

3. (BT 6 SGK trang 154) Cho  $\sin 2\alpha = -\frac{5}{9}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $\sin\alpha$  và  $\cos\alpha$

# HÌNH HỌC

## *Chương 2. Tích vô hướng & Ứng dụng*

Bài 1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì từ $0^\circ$ đến $180^\circ$ -----	37
Bài 2. Tích vô hướng của hai vectơ-----	39
Bài 3. Các hệ thức lượng trong tam giác & Giải tam giác-----	42

## *Chương 3. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng*

Bài 1. Phương trình đường thẳng -----	47
Bài 2. Phương trình đường tròn -----	53
Bài 3. Phương trình đường elip -----	57

# Chương 2. TÍCH VÔ HƯỚNG & ỨNG DỤNG

## §1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC BẤT KÌ TỪ 0° ĐẾN 180°

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt từ 0° đến 180°:

$\alpha$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin									
cos									
tan									
cot									

#### 2. Góc giữa hai vectơ:

Góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được kí hiệu là  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

##### 2.1. Tính chất:

- $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
- Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ..... với nhau. Kí hiệu:  $\vec{a} \perp \vec{b}$

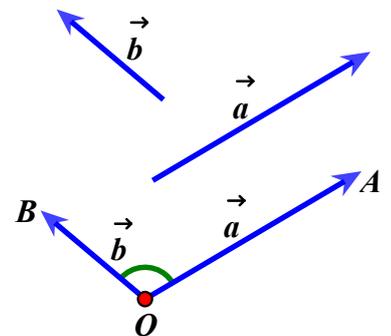
##### 2.2. Cách xác định:

Để xác định góc  $(\vec{a}, \vec{b})$ , ta dựng 2 vectơ:

- $\vec{OA} = \vec{a}$
- $\vec{OB} = \vec{b}$

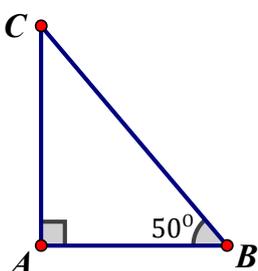
sao cho  $\vec{OA}$  và  $\vec{OB}$  có cùng ..... (điểm đầu)

Khi đó,  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) = \widehat{AOB}$



**Ví dụ:** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại A, có góc  $\widehat{ABC} = 50^\circ$ . Hãy xác định các góc sau:

- a)  $(\vec{CA}, \vec{CB})$       b)  $(\vec{AB}, \vec{BC})$       c)  $(\vec{AC}, \vec{CB})$       d)  $(\vec{AB}, \vec{CB})$



**B. THỰC HÀNH:****1. Hoạt động 1:**

1. Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại A. Góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  bằng  
A.  $45^\circ$                       B.  $90^\circ$                       C.  $135^\circ$                       D.  $180^\circ$
2. Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại A. Góc  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$  bằng  
A.  $45^\circ$                       B.  $90^\circ$                       C.  $135^\circ$                       D.  $180^\circ$
3. Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại A. Góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  bằng  
A.  $45^\circ$                       B.  $90^\circ$                       C.  $135^\circ$                       D.  $180^\circ$
4. Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại A. Góc  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$  bằng  
A.  $45^\circ$                       B.  $90^\circ$                       C.  $135^\circ$                       D.  $180^\circ$
5. Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại A. Góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB})$  bằng  
A.  $45^\circ$                       B.  $90^\circ$                       C.  $135^\circ$                       D.  $180^\circ$
6. Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại A. Góc  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$  bằng  
A.  $45^\circ$                       B.  $90^\circ$                       C.  $135^\circ$                       D.  $180^\circ$
7. Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại A. Góc  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})$  bằng  
A.  $45^\circ$                       B.  $90^\circ$                       C.  $135^\circ$                       D.  $180^\circ$

## §2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Định nghĩa:

##### 1.1. Tích vô hướng là gì?

Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  (khác  $\vec{0}$ ). Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một ..... , được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

##### 1.2. Nhận xét:

- $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{b} = \dots\dots$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

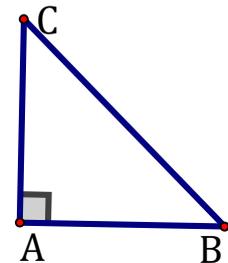
Để chứng minh 2 vectơ vuông góc, ta chứng minh ..... của chúng = 0

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$   
Suy ra  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Ví dụ 1: Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại A, có  $AB = AC = a$ .

- a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$                       b)  $\vec{AB} \cdot \vec{CB}$                       c)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

Tính:



##### 1.3. Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ và mọi số k bất kì, ta đều có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  .....
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  .....
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0$   
 $a^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

#### 2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng:

Cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ . Khi đó:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Ví dụ 2: Cho  $\Delta ABC$  có  $A(2;4)$ ,  $B(1;2)$  và  $C(6;2)$ .

- a) Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

- b) Chứng minh rằng  $\Delta ABC$  vuông tại A

### 3. Ứng dụng của tích vô hướng:

#### 3.1. Độ dài vector:

Cho vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ , khi đó:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Ví dụ 3: Cho hai điểm  $M(12; -4)$  và  $N(0; 1)$ . Tính độ dài của đoạn thẳng MN.

#### 3.2. Góc giữa hai vectơ:

Cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ , khi đó:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Ví dụ 4: Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{m} = (3; 4)$  và  $\vec{n} = (4; -3)$

## B. THỰC HÀNH:

### 1. Hoạt động 1:

1. Ghi nội dung thích hợp vào ô trống của bảng sau:

STT	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$ \vec{a} $	$ \vec{b} $	$(\vec{a}, \vec{b})$
1	$\vec{a} = (2; -3)$	$\vec{b} = (6; 4)$				
2	$\vec{a} = (3; 2)$	$\vec{b} = (5; -1)$				
3	$\vec{a} = (-2; -2\sqrt{3})$	$\vec{b} = (3; \sqrt{3})$				

2. Chứng minh công thức biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

Gọi ý:  $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$ ,  $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}$

▪  $\vec{i}$  là vectơ đơn vị trên Ox,  $\vec{j}$  là vectơ đơn vị trên Oy



**2. Hoạt động 2:**

1. Phát biểu nào sau đây không đúng?

- A.  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$                       B.  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{0}$                       C.  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$                       D.  $\vec{i} \perp \vec{j}$

2. Cho tam giác đều ABC, cạnh a. Hãy chọn phát biểu đúng nhất:

- A.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$                       B.  $(\vec{BA}, \vec{BC}) = 60^\circ$   
 C.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$                       D. Cả A, B, C đều đúng

3. Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = (3; 4)$  và  $\vec{v} = (2; -1)$  là

- A. 5                      B. 7                      C. 2                      D. 10

4. Cặp vectơ nào sau đây vuông góc với nhau:

- A.  $\vec{u} = (2; 5)$  và  $\vec{v} = (5; 2)$                       B.  $\vec{u} = (2; 5)$  và  $\vec{v} = (-5; -2)$   
 C.  $\vec{u} = (2; 5)$  và  $\vec{v} = (2; -5)$                       D.  $\vec{u} = (2; 5)$  và  $\vec{v} = (5; -2)$

5. Vectơ  $\vec{u} = (3; 4)$  có độ dài bằng

- A. 5                      B. 7                      C. 12                      D. 25

6. Cho hai điểm A(3;4) và B(2;-1). Phát biểu nào sau đây không đúng:

- A.  $\vec{AB} = (-1; 3)$                       B.  $\vec{AB} = (-1; -5)$                       C.  $|\vec{AB}| = \sqrt{26}$                       D.  $AB = \sqrt{26}$

7. Góc giữa hai vectơ  $\vec{u} = (0; 5)$  và  $\vec{v} = (\sqrt{3}; -1)$  có số đo bằng

- A.  $0^\circ$                       B.  $120^\circ$                       C.  $180^\circ$                       D.  $360^\circ$

8. Cho tứ giác ABCD có A(-3 ;7), B(4;3), C(5;-5), D(-2;-1). Tứ giác ABCD là hình gì?

- A. Hình bình hành    B. Hình thoi                      C. Hình chữ nhật    D. Hình vuông

9. Cho  $\Delta ABC$  có A(-2;4), B(1;4), C(1;0). Chu vi của  $\Delta ABC$  là

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 12

10. Cho  $\Delta ABC$  có A(1;3), B(5;-4), C(-3;-2). Trực tâm H của  $\Delta ABC$  có tọa độ là

- A. (1;-1)                      B.  $(-\frac{5}{24}; \frac{1}{6})$                       C.  $(\frac{5}{24}; -\frac{1}{6})$                       D.  $(\frac{5}{24}; \frac{1}{6})$

**3. Hoạt động 3**

1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 điểm A(1;3) và B(4;2).

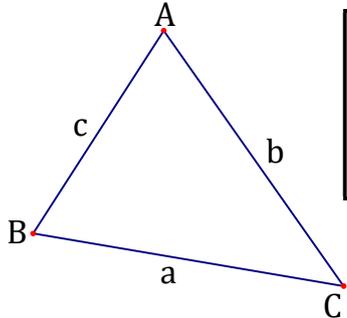
- a) CMR: O, A, B là ba đỉnh của một tam giác  
 b) Tính OA, OB                      c) Tính góc  $\widehat{OAB}$   
 d) CMR:  $\Delta OAB$  vuông cân                      e) Tính chu vi và diện tích  $\Delta OAB$

2. (BT 6 SGK trang 46) Trên mặt phẳng Oxy cho 4 điểm  $A(7;-3)$ ,  $B(8;4)$ ,  $C(1;5)$ ,  $D(0;-2)$ .  
Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình vuông.

## §3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC GIẢI TAM GIÁC

### A. LÝ THUYẾT:

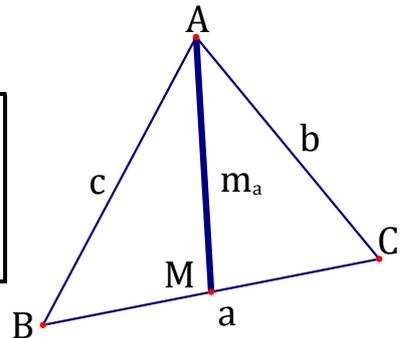
#### 1. Định lí cosin:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 =$$

$$c^2 =$$



Hệ quả  
tuyến

$$\cos \hat{A} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos \hat{B} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos \hat{C} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Độ dài đường trung

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$m_c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

**Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có cạnh  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$  và góc  $\hat{C} = 120^\circ$ . Tính cạnh  $c$ , góc  $\hat{A}$ , góc  $\hat{B}$  và độ dài trung tuyến AK.



Nếu  $\Delta ABC$  vuông tại A thì:

\*  $b^2 + c^2 =$

\* Trung tuyến  $AM =$

\* Đường tròn ngoại tiếp có đường kính bằng:



**4. Giải tam giác và ứng dụng:**

**4.1. Giải tam giác:**

Giải tam giác là

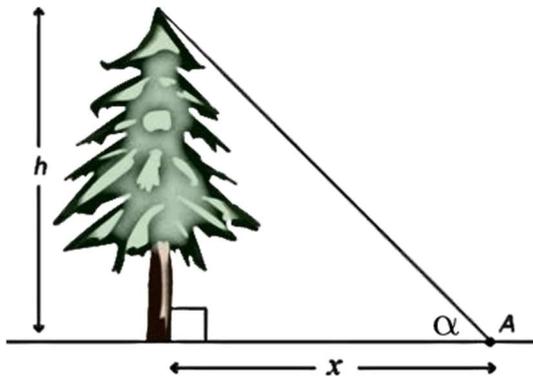
**4.2. Ứng dụng vào việc đo đạc:**

Ví dụ 4: Đo chiều cao của cây

Giả sử khoảng cách từ A đến gốc cây là  $x = 100$  m,

dùng giác kế đo được góc  $\hat{A} = \alpha = 17^\circ$ .

Hãy tính chiều cao  $h$  của cây.



Giác kế dùng để ngắm và đo đạc

$$\tan \alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow h =$$

**B. THỰC HÀNH:**

**1. Hoạt động 1:**

1. Cho  $\Delta ABC$  có các trung tuyến  $AM, BN, CK$ . Điền các thông tin thích hợp vào bảng

sau:

STT	Cạnh			Góc			Trung tuyến		
	BC				$\widehat{ABC}$				CK
		b	c	$\hat{A}$		$\hat{C}$	$m_a$	$m_b$	
1	5cm	8cm				$60^\circ$			
2	3m		5m	$35^\circ$		$53^\circ$			
3	3	4	5						

2. Cho  $\Delta ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Điền các thông tin thích hợp vào bảng sau:

STT	Cạnh	Góc	B.kính đường tròn ngoại tiếp
-----	------	-----	------------------------------

	a	b	c	Â	Ê	Ê	R
1	210m			30°	45°		
2		13cm		27°		53°	
3					40°	50°	12mm

3. Cho  $\Delta ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Điền các thông tin thích hợp vào bảng sau:

STT	Cạnh			Góc			Diện tích	Bán kính		Đường cao		
	a	b	c	Â	Ê	Ê	S	R	r	$h_a$	$h_b$	$h_c$
1	13cm	14cm	15cm									
2	5m		8m		60°							
3		35		50°		110°						

**2. Hoạt động 2:**

1. Cho tam giác ABC có  $a = 8\text{ m}, b = 5\text{ m}, \widehat{ACB} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh AB là

- A. 49m                      B. 7m                      C. 19,7m                      D. 4,4m

2. Cho tam giác ABC có  $AB = 4\text{ cm}, BC = 7\text{ cm}, CA = 9\text{ cm}$ . Giá trị  $\cos A$  là

- A.  $\frac{2}{3}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $-\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{1}{2}$

3. Tam giác ABC có  $a = 8, b = 6, c = 4$ . Độ dài trung tuyến BD là

- A.  $\sqrt{10}$                       B.  $\sqrt{46}$                       C.  $\sqrt{31}$                       D. 31

4. Cho tam giác ABC có  $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ . Hãy chọn kết quả đúng:

- A.  $\hat{B} = 120^\circ$                       B.  $\hat{C} = 60^\circ$                       C.  $\hat{B} = 45^\circ$                       D.  $\hat{A} = 15^\circ$

5. Tam giác ABC có  $\hat{A} = 3\hat{C}, \hat{B} = 2\hat{C}$  và chu vi  $3 + \sqrt{3}$ . Độ dài ba cạnh của tam giác là

- A.  $a = \sqrt{3}; c = 1; b = 2$                       B.  $a = 2; b = \sqrt{3}; c = 1$   
 C.  $a = 2; b = \sqrt{2}; c = 1$                       D.  $a = \sqrt{3}; b = 1; c = 2$

6. Tam giác ABC có  $AB = 4\text{ cm}$ , góc  $\hat{B} = 35^\circ$ , góc  $\hat{C} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh BC là

- A. 2,65cm                      B. 85°                      C. 4,6cm                      D. 2,31cm

7. Tam giác ABC có chu vi bằng 15 và nội tiếp đường tròn có bán kính bằng 5. Biểu thức  $\sin A + \sin B + \sin C$  có giá trị là

- A. 3                      B.  $\frac{5}{2}$                       C.  $\frac{3}{2}$                       D. 1

8. Tam giác ABC có  $\hat{A} = 45^\circ$ . Chọn phát biểu đúng:

- A.  $a = R\sqrt{3}$                       B.  $S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC}$                       C.  $a^2 + b^2 = 4S + 2R^2$                       D. Cả A, B, C

9. Tam giác ABC có  $a = 13, b = 8, c = 7$ . Kết quả nào sai?

- A.  $S = 14\sqrt{3}$                       B.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -28$                       C. Góc  $\hat{A}$  tù                      D.  $\hat{A} = 135^\circ$

10. Tam giác ABC có độ dài ba cạnh lần lượt là  $a = 6, b = 5, c = 4$ . Tích  $R.r$  có giá trị là

- A. 4                      B. 4                      C. 5                      D. 6

### 3. Hoạt động 3

1. (BT 2 SGK trang 59) Cho tam giác ABC biết các cạnh  $a = 52$  cm,  $b = 85$  cm và  $c = 54$  cm. Tính các góc  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  và  $\hat{C}$ . Từ đó suy ra sự tương ứng giữa cạnh và góc của tam giác.

2. (BT 7 SGK trang 59) Tính góc lớn nhất của tam giác ABC biết:

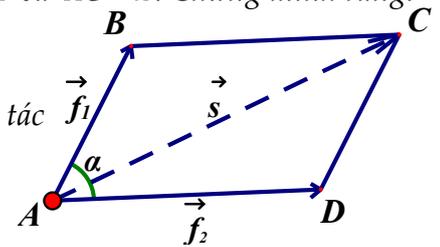
- a)  $a = 3$  cm,  $b = 4$  cm và  $c = 6$  cm;                      b)  $a = 40$  cm,  $b = 13$  cm và  $c = 37$  cm.

3. Cho tam giác MNK có cạnh  $MN = 5$  m,  $NK = 8$  m và góc  $\widehat{MNK} = 120^\circ$ . Tính cạnh MK, góc  $\widehat{NMK}$ , diện tích S và độ dài trung tuyến MQ.

4. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có  $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$ .

5. Cho hình bình hành ABCD có  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $BD = m$  và  $AC = n$ . Chứng minh rằng:

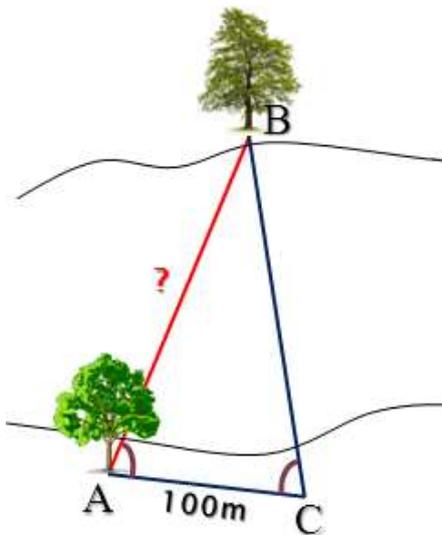
$$m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$$



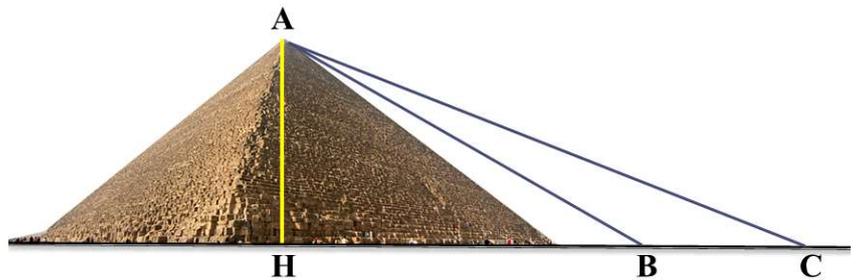
6. (VD 2 SGK trang 50) Hai lực  $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$  cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \alpha$ . Hay lập công thức

tính cường độ của hợp lực  $\vec{s}$ .

7. Để đo khoảng cách giữa hai gốc cây A và B, người ta dựng cọc C (như hình) và đo được như sau:  $AC = 100$  m, góc  $\hat{A} = 60^\circ$ , góc  $\hat{C} = 80^\circ$ . Hãy tính khoảng cách giữa 2 gốc cây.



8. Để đo chiều cao AH của một kim tự tháp, người ta dựng cọc B và C (như hình), và đo được như sau: góc  $\widehat{ABH} = 30^\circ$ , góc  $\widehat{ACH} = 20^\circ$ ,  $BC = 100$  m. Hãy tính chiều cao của kim tự tháp.



9. Ngày xưa, có một lão nông nhân hậu sống với ba người con trai trong một túp lều tranh nhỏ. Nhà nghèo, ba anh em chỉ học hết lớp 10 rồi nghỉ học về làm ruộng. Tài sản duy nhất của ông là một mảnh ruộng đã canh tác nhiều năm. Một lần bệnh nặng, cho rằng mình không qua khỏi, ông lão gọi ba người con lại và hỏi:

- Cha sắp đi gặp mẹ các con. Gia tài để lại chỉ có mảnh ruộng nhỏ của tổ tiên, chỉ có thể chia cho một người. Vậy các con nghĩ sao?

Ba anh em từ nhỏ quần quýt với nhau, yêu thương chan hòa. Họ rôi rít nhường cho nhau quyền thừa kế, không ai chịu nhận cho riêng mình. Có người còn đề nghị bốc thăm.

Thấy vậy, lão nông mỉm cười, ông dẫn các con ra ngoài ruộng và nói:

- Các con xem, chiều hôm qua cha đã dùng dây thừng vạch ra một đường tròn to lớn trên đất. Trong các con, nếu ai có thể tính được diện tích của hình tròn này, ta sẽ giao mảnh ruộng cho người đó. Bằng không, ta thà rằng bán nó đi cũng không chia cho ai.

Ba anh em vô đầu suy nghĩ, tìm cách tính diện tích hình tròn. Chợt người em út bỗng thốt lên mừng rỡ:

- Hai anh, em đã tìm được cách!

Rồi vội vã đi tìm ba cây cọc và một sợi thước dây.

Người em út sẽ tính diện tích hình tròn thế nào chỉ với những dụng cụ trên?



## Chương 3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

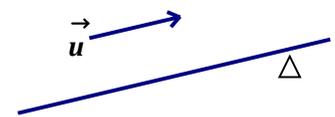
### §1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

#### A. LÝ THUYẾT:

##### 1. Phương trình tham số của đường thẳng:

##### 1.1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng:

Cho đường thẳng  $\Delta$  và vectơ  $\vec{u} \neq \vec{0}$ . Nếu ..... của  $\vec{u}$  ..... hoặc ..... với  $\Delta$  thì  $\vec{u}$  được gọi là vectơ chỉ phương của  $\Delta$ .

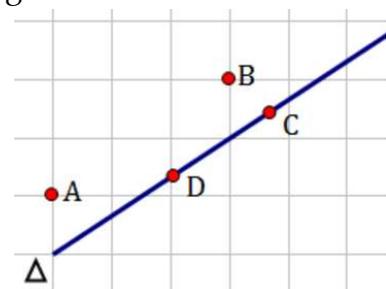


Nhận xét:

- Mỗi đường thẳng có ..... vectơ chỉ phương.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một ..... và một ..... của nó.

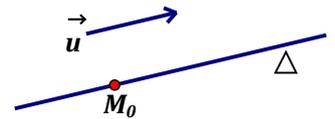
**Ví dụ 1:** Quan sát hình bên và đánh dấu X vào vectơ nào là chỉ phương của  $\Delta$ .

- |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\vec{AB}$ | <input type="checkbox"/> $\vec{BA}$ | <input type="checkbox"/> $\vec{AD}$ | <input type="checkbox"/> $\vec{DA}$ |
| <input type="checkbox"/> $\vec{DC}$ | <input type="checkbox"/> $\vec{CD}$ | <input type="checkbox"/> $\vec{BC}$ | <input type="checkbox"/> $\vec{CB}$ |



**1.2. Phương trình tham số của đường thẳng:**

Giả sử đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2)$ , khi đó:



$$\Delta: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \quad (t: \text{tham số})$$

**Ví dụ 2:** Viết phương trình **tham số** của đường thẳng  $d_1$  trong các trường hợp sau:

- a)  $d_1$  đi qua  $A(1;-3)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (5;1)$
- b)  $d_1$  đi qua  $A(1;-3)$  và  $B(4;-3)$



**1.3. Liên hệ giữa vectơ chỉ phương và hệ số góc của đường thẳng:**

Cho đường thẳng  $\Delta$  có hệ số góc  $k$  và vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2)$ , khi đó:

$$k = -\frac{u_1}{u_2} \quad (u_2 \neq 0)$$

⇒ Nếu  $\Delta$  có hệ số góc  $k$  thì có vectơ chỉ phương  $\vec{v} = (1; -k)$

**Ví dụ 3:** Viết phương trình đường thẳng  $d_2$  đi qua  $A(1;-3)$  và có hệ số góc  $k = -2$ .

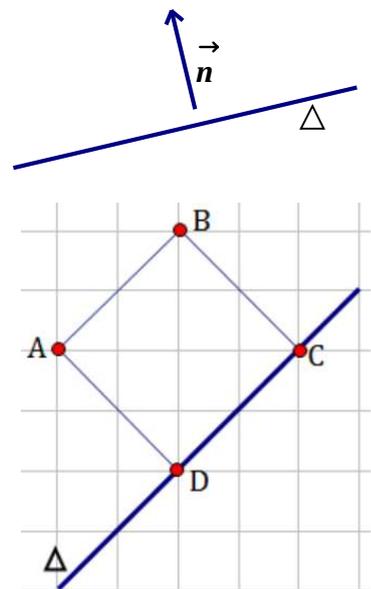
**2. Phương trình tổng quát của đường thẳng:**

**2.1. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng:**

Cho đường thẳng  $\Delta$  và vectơ  $\vec{n} \neq \vec{0}$ . Nếu ..... của  $\vec{n}$  ..... với  $\Delta$  thì  $\vec{n}$  được gọi là vectơ pháp tuyến của  $\Delta$ .

Nhận xét:

- Mỗi đường thẳng có ..... vectơ pháp tuyến.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một ..... và một ..... của nó.
- Nếu  $\vec{u}$  là vectơ chỉ phương của  $\Delta$ ,  $\vec{n}$  là vectơ pháp tuyến của  $\Delta$  thì  $\vec{u}$  và  $\vec{n}$  ..... với nhau, tức là  $\vec{u} \cdot \vec{n} = \dots$



**Ví dụ 4:** Quan sát hình bên và đánh dấu X vào vectơ nào là pháp tuyến của  $\Delta$ .

- $\vec{AB}$         $\vec{BA}$         $\vec{AD}$         $\vec{DA}$

- $\overrightarrow{DC}$        $\overrightarrow{CD}$        $\overrightarrow{BC}$        $\overrightarrow{CB}$

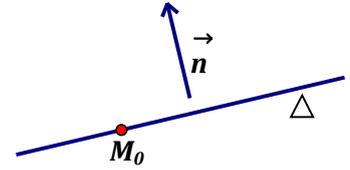
**Ví dụ 5:** Đường thẳng  $d_3: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$  có vectơ pháp tuyến là:

- $\vec{m} = (3; 4)$      $\vec{n} = (4; 3)$      $\vec{u} = (-4; 3)$      $\vec{x} = (-4; -3)$      $\vec{z} = (-3; 4)$

**2.2. Phương trình tổng quát của đường thẳng:**

Giả sử đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (a; b)$ , khi đó:

$\Delta: (x - x_0) + (y - y_0) = 0$   
 hay  $\boxed{\Delta: x + y + c = 0}$  ( $c = -ax_0 - by_0$ )



**Ví dụ 6:** Lập phương trình **tổng quát** của đường thẳng  $d_4$  trong các trường hợp sau:

- a)  $d_4$  đi qua  $S(2; -2)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (3; 1)$
- b)  $d_4$  đi qua  $S(2; -2)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 4)$
- c)  $d_4$  đi qua  $S(2; -2)$  và song song với  $\Delta_1: 4x - 3y + 2 = 0$
- d)  $d_4$  đi qua  $S(2; -2)$  và vuông góc với  $\Delta_2: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$



**2.3. Các trường hợp đặc biệt:**

Cho đường thẳng  $\Delta: ax + by + c = 0$

Trường hợp	Kết luận	Ghi chú
$a = 0$	$\Delta$ song song với trục .....	
$b = 0$	$\Delta$ song song với trục .....	
$c = 0$	$\Delta$ đi qua .....	

### 3. Vị trí tương đối & góc của hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n}_1 = ( \quad ; \quad )$$

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n}_2 = ( \quad ; \quad )$$

#### 3.1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:

Trường hợp	Kết luận	Ghi chú
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$		
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$		
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$		

**Ví dụ 7:** Xét vị trí tương đối của đường thẳng  $d : x - y + 1 = 0$  với mỗi đường thẳng sau:

a)  $\Delta_1 : 2x + y - 4 = 0$

b)  $\Delta_2 : x - y - 1 = 0$

c)  $\Delta_3 : 2x - 2x + 2 = 0$



#### 3.2. Góc giữa hai đường thẳng:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

**Ví dụ 8:** Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  trong các trường hợp sau:

a)  $d_1 : 4x - 2y + 6 = 0$  và  $d_2 : x - 3y + 1 = 0$

b)  $d_1 : 2x + 3y + 4 = 0$  và  $d_2 : 3x - 2y + 1 = 0$

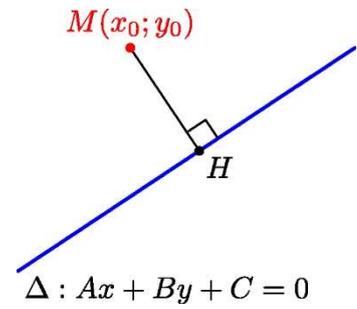


**4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:**

Cho đường thẳng  $\Delta : ax + by + c = 0$  và một điểm  $S(x_0; y_0)$ ,

khi đó:

$$d(S, \Delta) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



**Ví dụ 9:** Trong hình bên,  $d(M, \Delta) = \dots\dots$

**Ví dụ 10:** Tính khoảng cách từ các điểm sau đây đến đường thẳng  $\Delta : 3x - 2y - 1 = 0$

:

a)  $M(-2; 1)$

b)  $N(1; 1)$

**B. THỰC HÀNH:**

**1. Hoạt động 1:**

1. Tìm vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến, hệ số góc và một điểm đi qua của các đường thẳng sau đây:

STT	Đường thẳng	Hệ số góc	Vectơ chỉ phương	Vectơ pháp tuyến	Điểm đi qua
1	$\Delta_1 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$				
2	$\Delta_2 : 4x - 10y + 1 = 0$				
3	$\Delta_3 : y = -2x + 3$				

2. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

STT	Đường thẳng $d_1$	Đường thẳng $d_2$	Vị trí tương đối
1	$4x - 10y + 1 = 0$	$x + y + 2 = 0$	
2	$12x - 6y + 10 = 0$	$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$	
3	$8x + 10y - 12 = 0$	$\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$	
4	$-3x + 6y - 3 = 0$	$y = -2x + 3$	

3. Tìm số đo góc giữa các cặp đường thẳng sau đây:

STT	Đường thẳng $d_1$	Đường thẳng $d_2$	Số đo góc
1	$2x + y - 4 = 0$	$3x - 2y + 1 = 0$	

2	$2x - 3y + 26 = 0$	$\begin{cases} x = 2014 - 4t \\ y = 2016 + 6t \end{cases}$	
3	$y = -2x + 4$	$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	

4. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong các trường hợp sau đây:

STT	Điểm	Đường thẳng	Khoảng cách
1	A(3;5)	$\Delta: 4x + 3y + 1 = 0$	
2	B(1;-2)	$d: 3x - 4y - 26 = 0$	
3	C(1;2)	$m: 3x + 4y - 11 = 0$	
4	D(3;5)	$n: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$	

**2. Hoạt động 2:**

1. Vectơ nào không phải vectơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4t \end{cases}$  ?

- A.  $\vec{a} = (-3; 4)$       B.  $\vec{b} = (3; -4)$       C.  $\vec{c} = (6; -8)$       D.  $\vec{d} = (6; 8)$

2. Đường thẳng  $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4t \end{cases}$  đi qua những điểm nào sau đây:

- A. A(2;0)      B. B(-1;4)      C. C(5;-4)      D. Cả A, B, C

3. Đường thẳng  $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4t \end{cases}$  có hệ số góc bằng

- A.  $-\frac{2}{3}$       B. 0      C.  $-\frac{3}{4}$       D.  $-\frac{4}{3}$

4. Đường thẳng  $\Delta_2$  đi qua điểm S(5;1) và có vectơ pháp tuyến  $\vec{v} = (2; -3)$  có phương trình

là

- A.  $2x - 3y - 7 = 0$       B.  $2x - 3y - 13 = 0$       C.  $5x + y - 7 = 0$       D.  $5x + y - 26 = 0$

5. Cho đường thẳng  $\Delta_3: 5x - 3y + 2 = 0$ . Phát biểu nào sau đây đúng nhất?

- A.  $\Delta_3$  đi qua điểm K(2;4)      B.  $\Delta_3$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{m} = (5; -3)$   
 C.  $\Delta_3$  có vectơ chỉ phương  $\vec{w} = (3; 5)$       D. Cả A, B, C đều đúng

6. Hai đường thẳng  $\Delta_3: 5x - 3y + 2 = 0$  và  $\Delta_4: -10x + 6y - 1 = 0$  có bao nhiêu giao điểm

- A. 0      B. 1      C. 2      D. Vô số

7. Góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_3: 5x - 3y + 2 = 0$  và  $\Delta_5: 3x + 5y - 1 = 0$  có số đo bằng

- A.  $0^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $90^\circ$       D.  $270^\circ$

8. Khoảng cách từ điểm K(2;-2) đến đường thẳng  $\Delta_5: 3x + 5y + 4 = 0$  bằng

A. 0                      B.  $\frac{4}{\sqrt{34}}$                       C.  $-\frac{4}{\sqrt{34}}$                       D.  $\frac{20}{\sqrt{34}}$

9. Cho hai điểm  $A(-2;3)$  và  $B(8;-5)$ . Tìm phát biểu đúng nhất về đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ :

- A. Đi qua trung điểm  $M(3;-1)$                       B. Có  $\vec{AB}=(10;-8)$  là vectơ pháp tuyến  
C. Có phương trình  $5x - 4y - 19 = 0$                       D. Cả A, B, C đều đúng

10. Cho  $A(3;-2)$ ,  $B(-1;1)$ ,  $C(5;4)$ . Đường cao  $AH$  của  $\Delta ABC$  có phương trình là

- A.  $6x + 3y - 4 = 0$       B.  $2x + y - 4 = 0$       C.  $6x - 3y + 5 = 0$       D. Đáp án khác

### 3. Hoạt động 3

1. Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  trong các trường hợp sau:

- a)  $\Delta$  đi qua  $A(3;-5)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{v} = (-4;1)$ .  
b)  $\Delta$  đi qua  $A(3;-5)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{m} = (2;3)$ .  
c)  $\Delta$  đi qua  $A(3;-5)$  và  $B(2;-2)$ .  
d)  $\Delta$  đi qua  $A(3;-5)$  và có hệ số góc  $k = -3$ .

e)  $\Delta$  đi qua  $A(3;-5)$  và song song với  $d_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$ .

f)  $\Delta$  đi qua  $A(3;-5)$  và vuông góc với  $d_2 : 3x - 4y + 5 = 0$ .

g)  $\Delta$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $MN$ , biết  $M(1;4)$  và  $N(3;-8)$ .

2. (BT 3 SGK trang 80) Cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(1;4)$ ,  $B(3;-1)$  và  $C(6;2)$ .

- a) Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng  $AB$ ,  $BC$  và  $CA$ ;  
b) Lập phương trình tổng quát của đường cao  $AH$  và trung tuyến  $AM$ .

3. (BT 9 SGK trang 81) Tìm bán kính của đường tròn tâm  $C(-2;-2)$  tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta : 5x + 12y - 10 = 0$ .

4. (BT 6 SGK trang 80) Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tham số  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ .

Tìm điểm  $M$  thuộc  $d$  và cách điểm  $A(0;1)$  một khoảng bằng 5.

## §2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

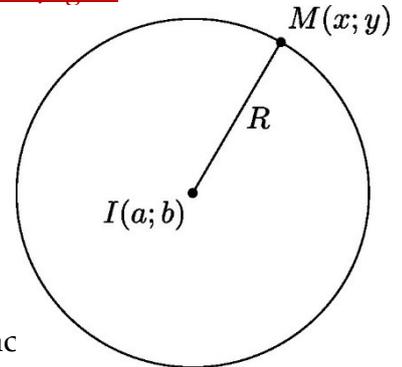
### A. LÝ THUYẾT:

#### 1. Phương trình đường tròn:

##### 1.1. Phương trình đường tròn có tâm và bán kính cho trước (Dạng 1):

Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có tâm  $I(a; b)$  và bán kính R, khi đó:

$$(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$



**Ví dụ 1:** Đường tròn (C):  $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 12$  có tâm ..... và bán kính  $R = \dots\dots\dots$

**Ví dụ 2:** Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

- a) (C) có tâm  $I(2; -3)$  và bán kính  $R = 4$
- b) (C) có tâm là gốc tọa độ O và bán kính  $R = 5$
- c) (C) có tâm  $I(2; -3)$  và đi qua  $M(3; 1)$
- d) (C) có tâm  $I(2; -3)$  và tiếp tuyến  $\Delta: 3x + 2y - 26 = 0$
- e) (C) có đường kính AB, với  $A(3; 4)$  và  $B(-3; 2)$



##### 1.2. Phương trình đường tròn dạng khai triển (Dạng 2):

Khai triển hằng đẳng thức và đặt  $c = a^2 + b^2 - R^2$ , phương trình Dạng 1 trở thành:

$$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Trong đó:

- Tâm  $I(a; b)$
- Bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
- Điều kiện:  $a^2 + b^2 - c \geq 0$

**Ví dụ 3:**  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 7 = 0$  có phải là phương trình của một đường tròn không.



Nếu phải, hãy cho biết tâm và bán kính của đường tròn đó.

**Ví dụ 4:** Tìm tâm và bán kính của các đường tròn sau:

a)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

b)  $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 4 = 0$

**2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn:**

Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có tâm  $I(a;b)$ , và  $\Delta$  là tiếp tuyến với (C) tại  $M_0(x_0;y_0)$ , khi đó:

- $\Delta$  đi qua điểm .....
- $\Delta$  có vectơ  $\overrightarrow{IM}$  là vectơ .....

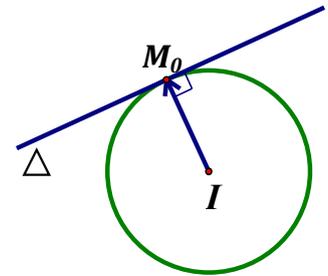
$\Rightarrow$  Phương trình ..... của  $\Delta$

**Ví dụ 5:** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C):  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ :

a) Tại điểm  $H(3;4)$

b) Đi qua điểm  $P(-1;0)$

c) Đi qua điểm  $S(5;1)$



## B. THỰC HÀNH:

### 1. Hoạt động 1:

1. Điền nội dung thích hợp vào bảng sau:

STT	Phương trình	Tâm	Bán kính
1	$(x-5)^2 + y^2 = 8$		
2	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$		
3	$2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 22 = 0$		

2. Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính R và điểm M. Hãy điền vào chỗ trống bên dưới:

STT	Trường hợp	Vị trí của M	Số tiếp tuyến đi qua M
1	$IM > R$	M nằm ..... đường tròn (C)	
2	$IM = R$	M nằm ..... đường tròn (C)	
3	$IM < R$	M nằm ..... đường tròn (C)	

### 2. Hoạt động 2:

1. Cho đường tròn (C):  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ . Hãy chọn phát biểu đúng:

- A. Tâm  $I(-3;2)$  và bán kính  $R = 16$ .      B. Tâm  $I(-3;2)$  và bán kính  $R = 4$ .  
 C. Tâm  $I(3;-2)$  và bán kính  $R = 4$ .      D. Tâm  $I(3;-2)$  và bán kính  $R = -4$ .

2. Đường tròn tâm O, bán kính  $R = 1$  (đường tròn đơn vị) có phương trình là

- A.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ .      B.  $x^2 + y^2 = 0$ .  
 C.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$ .      D.  $x^2 + y^2 = 1$ .

3. Đường tròn tâm  $I(2;-3)$  và đi qua điểm  $A(3;1)$  có bán kính

- A.  $R = \sqrt{17}$ .      B.  $R = 17$ .      C.  $R = \sqrt{29}$ .      D.  $R = \sqrt{13}$ .

4. Cho đường tròn tâm I và tiếp tuyến  $\Delta$ . Hãy chọn phát biểu đúng:

- A.  $d(I, \Delta) < R$ .      B.  $d(I, \Delta) = R$ .      C.  $d(I, \Delta) > R$ .      D.  $d(I, \Delta) = 0$ .

5. Cho đường tròn tâm  $I(4;3)$  có tiếp tuyến  $\Delta: 3x - 4y - 5 = 0$ . Bán kính R bằng

- A. 0.      B. 5.      C. -1.      D. 1.

6. Cho hai điểm  $A(1;5)$  và  $B(4;1)$ . Đường tròn đường kính AB có

- A. Tâm  $M(3;-4)$  và bán kính  $R = 5$ .      B. Tâm  $N(5;6)$  và bán kính  $R = 5$ .  
 C. Tâm  $P\left(\frac{5}{2}; 3\right)$  và bán kính  $R = \frac{5}{2}$ .      D. Tâm  $Q\left(\frac{3}{2}; -2\right)$  và bán kính  $R = \frac{5}{2}$ .

7. Đường tròn (C):  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  có

- A. Tâm  $I(-2;4)$  và bán kính  $R = 2\sqrt{6}$ .      B. Tâm  $I(-1;2)$  và bán kính  $R = 3$ .  
 C. Tâm  $I(-1;2)$  và bán kính  $R = 1$ .      D. Tâm  $I(-1;2)$  và bán kính  $R = 3$ .

8. Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn?

A.  $2x^2 + y^2 - 8x + 2y - 1 = 0$ .

B.  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ .

C.  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 20 = 0$ .

D.  $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0$ .

9. Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn?

A.  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$ .

B.  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 20 = 0$ .

C.  $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 4 = 0$ .

D. Cả A, B, C đều đúng.

10. Tiếp tuyến với đường tròn (C):  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$  tại điểm  $F(5; 2)$  là

A.  $3x + 4y - 15 = 0$ .    B.  $3x + 4y - 12 = 0$ .    C.  $3x - 4y + 23 = 0$ .    D.  $3x + 4y - 23 = 0$ .

11. Cho đường tròn (C) có tâm  $I(1; 2)$  và  $\Delta$  là tiếp tuyến với (C) tại  $D(3; 5)$ . Hãy tìm lỗi sai trong lời giải sau:

$\Delta$  đi qua  $D(3; 5)$  và có vectơ chỉ phương  $\overline{ID} = (2; 3)$

$\Delta: 3(x - 2)^2 + 5(y - 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 6 + 5y - 15 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 5y - 21 = 0$

### 3. Hoạt động 3

1. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) Tâm  $I(1; 2)$  và bán kính  $R = \sqrt{3}$

b) Tâm  $I(1; 2)$  và đi qua  $H(2; -3)$

c) Đường kính PS với  $P(1; 2)$  và  $S(7; 6)$

d) Tâm  $I(1; 2)$ , tiếp tuyến  $\Delta: x + 2y - 7 = 0$

2. (BT 3 SGK trang 84) Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm:

a)  $A(1; 2)$ ,  $B(5; 2)$ ,  $C(1; -3)$

b)  $M(-2; 4)$ ,  $N(-2; 4)$ ,  $P(6; -2)$

3. Tìm tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ , biết  $A(4; 3)$ ,  $B(2; 7)$  và  $C(-3; -8)$ .

4. Cho đường tròn (C):  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

a) Tìm tâm và bán kính của (C)

b) Điểm  $S(1; 1)$  có nằm trên đường tròn không. Nếu có, hãy viết phương trình của tiếp tuyến tại đó.

5. (BT 6 SGK trang 84) Cho đường tròn (C) có phương trình  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ .

a) Tìm tọa độ tâm và bán kính của (C);

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm  $A(-1; 0)$ ;

c) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng  $3x - 4y + 5 = 0$

6. Tìm  $m$  để các phương trình sau trở thành phương trình đường tròn:

a)  $x^2 + y^2 - 4mx + 2my + 3 - 2m + 5m^2 = 0$

b)  $x^2 + y^2 + 2mx - 4my - 2 + 3m + 4m^2 = 0$

## §3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

### A. LÝ THUYẾT:

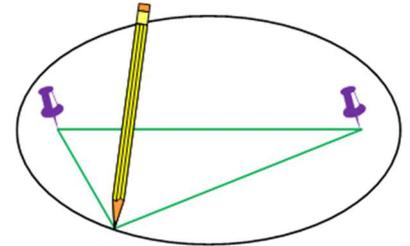
#### 1. Đường elip là gì?

Cho hai điểm cố định  $F_1, F_2$  sao cho  $F_1F_2 = 2c$  và một độ dài không đổi  $2a$  sao cho  $a > c$

Elip là tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng sao cho:

$$F_1M + F_2M =$$

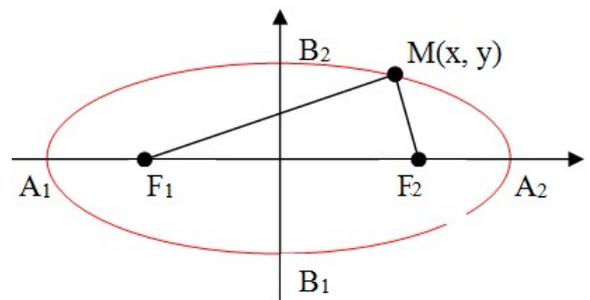
- Hai điểm  $F_1, F_2$  được gọi là ..... của elip
- Độ dài  $F_1F_2 = 2c$  được gọi là ..... của elip



#### 2. Phương trình chính tắc của elip:

☑ Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình, khi đó:

- Tiêu điểm:  $F_1( -c ; 0 ), F_2( c ; 0 )$
- Đỉnh:  $A_1( -a ; 0 ), A_2( a ; 0 )$   
 $B_1( 0 ; -b ), B_2( 0 ; b )$
- Tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c$
- Độ dài trục lớn:  $A_1A_2 = 2a$
- Độ dài trục nhỏ:  $B_1B_2 = 2b$
- $a^2 = b^2 + c^2$



☑ Phương trình chính tắc:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Ví dụ:** Xác định độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh của các elip có phương trình sau:

a)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

b)  $36x^2 + 64y^2 = 100$

c)  $9x^2 + 16y^2 = 1$

## B. THỰC HÀNH:

### 1. Hoạt động 1:

1. Điền thông tin thích hợp vào bảng sau:

STT	Phương trình elip	Tiêu cự	Độ dài trục lớn	Độ dài trục nhỏ	Các tiêu điểm	Các đỉnh
1	$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$					
2	$64x^2 + 36y^2 = 100$					
3	$9x^2 + 16y^2 = 1$					
4			8	6		
5		6	10			

### 2. Hoạt động 2:

1. (BT 10 SGK trang 94) Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip đó có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 769266km và 768106km. Tính khoảng cách ngắn nhất và khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng, biết rằng các khoảng cách đó đạt được khi Trái Đất và Mặt Trăng nằm trên trục lớn của elip.



2. (BT 4 SGK trang 88) Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là 80cm và trục nhỏ là 40cm từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước 80cm x 40cm, người vẽ hình elip đó lên tấm ván ép (như hình). Hỏi phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

