

TRƯỜNG THCS CAO XUÂN HUY

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG VÒNG 2, NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn: Toán – Lớp 8. Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho các số thực a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$.

Tính giá trị biểu thức: $M = 7a^3 - 2b^4 + 2022$.

b) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh rằng ab chia hết cho $a + b + c$.

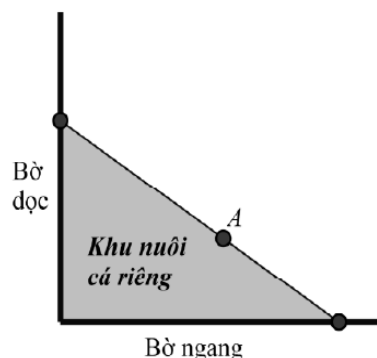
Câu 2. (4,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ thỏa mãn $p^2 - 5q^2 = 4$.

b) Giải phương trình: $(x^2 + x + 2)^3 - (x + 1)^3 = x^6 + 1$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A . Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng khu nuôi cá riêng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12m (hình vẽ bên).



b) Bác Xuân vay 20.000.000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế. Trong một năm đầu bác chưa trả được nên số tiền lãi trong năm đầu được chuyển thành vốn để tính lãi năm sau. Sau 2 năm bác Xuân phải trả là 23.540.000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm đầu? Biết rằng trong năm sau ngân hàng đã giảm 30% lãi suất.

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $AD \cdot HD = BD \cdot CD$

b) Chứng minh: H là giao điểm của các đường phân giác của tam giác DEF .

c) Gọi M là trung điểm của BC . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM , cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại P và Q . Chứng minh: $HP = HQ$.

Câu 5. (1,0 điểm)

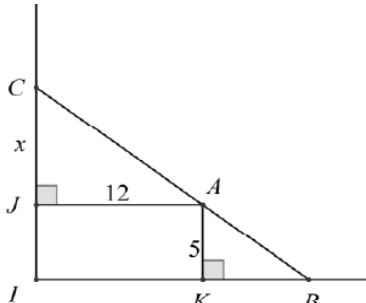
Cho một đa giác đều có 2025 đỉnh. Tô màu các đỉnh của đa giác bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tồn tại ba đỉnh của đa giác được tô cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

.....Hết.....

Họ và tên thí sinh :Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Đáp án	Điểm																				
Câu 1. (4,0 điểm)																						
a) Cho các số thực a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $M = 7a^3 - 2b^4 + 2022$.																						
b) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh rằng ab chia hết cho a + b + c.																						
a 2,0đ	Ta có $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$ $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab - 2a + 2b + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 = 0 \\ (a - 1)^2 = 0 \\ (b + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ Thay $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ vào $M = 7a^3 - 2b^4 + 2022$ ta được $M = 7.1^3 - 2(-1)^4 + 2022 = 2027$ Vậy giá trị của biểu thức $M = 2027$.	0,5 0,5 1,0																				
b 2,0đ	Từ $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (a + b)^2 - c^2 = 2ab$ $\Rightarrow (a + b + c)(a + b - c) = 2ab$ (*) TH1: a + b + c lẻ thì từ (*) suy ra $2ab : (a + b + c)$ $\Rightarrow ab : (a + b + c)$ vì $(2, a + b + c) = 1$ TH2: a + b + c chẵn Vì a + b + c, a + b - c cùng tính chẵn lẻ nên a + b - c chẵn. Đặt a + b - c = 2k (k ∈ N*) Từ (*) suy ra $ab = k(a + b + c) \Rightarrow ab : (a + b + c)$ Vậy ta luôn có $ab : (a + b + c)$	0,5 0,5 0,5 0,5																				
Câu 2. (4,0 điểm)																						
a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p; q) thỏa mãn $p^2 - 5q^2 = 4$.																						
b) Giải phương trình: $(x^2 + x + 2)^3 - (x + 1)^3 = x^6 + 1$																						
a 2,0đ	$p^2 - 5q^2 = 4 \Leftrightarrow p^2 - 4 = 5q^2 \Leftrightarrow (p - 2)(p + 2) = 5q^2$ Do $0 < p - 2 < p + 2$ và q nguyên tố nên p - 2 chỉ có thể nhận các giá trị 1, 5, q, q^2 Ta có bảng giá trị tương ứng	0,5 0,5																				
	<table><tr><td>$p - 2$</td><td>$p + 2$</td><td>p</td><td>q</td></tr><tr><td>1</td><td>$5q^2$</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>q^2</td><td>7</td><td>3</td></tr><tr><td>q</td><td>$5q$</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>q^2</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	$p - 2$	$p + 2$	p	q	1	$5q^2$	3	1	5	q^2	7	3	q	$5q$	3	1	q^2	5	3	1	0,5
$p - 2$	$p + 2$	p	q																			
1	$5q^2$	3	1																			
5	q^2	7	3																			
q	$5q$	3	1																			
q^2	5	3	1																			
	Do p, q là các số nguyên tố nên chỉ có cặp $(p; q) = (7; 3)$ thỏa mãn.	0,5																				
b 2,0đ	Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - (a + b + c)^3$ $= (a + b + c)^3 - 3c(a + b)(a + b + c) - 3ab(a + b) - (a + b + c)^3$	0,5																				

	$= -3(a+b)[c(a+b+c)+ab] = -3(a+b)[a(b+c)+c(b+c)]$ $= -3(a+b)(b+c)(c+a) \quad (*)$ Ta có $(x^2+x+2)^3 - (x+1)^3 = x^6+1 \Rightarrow (x^2)^3 + (x+1)^3 + 1 - (x^2+x+2)^3 = 0$ $\Rightarrow -3(x^2+x+1)(x+2)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x = -2$	0,5 0,5 0,5
Câu 3. (4,0 điểm) a) Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng khu nuôi cá riêng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m. b) Bác Xuân vay 20.000.000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế. Trong một năm đầu bác chưa trả được nên số tiền lãi trong năm đầu được chuyển thành vốn để tính lãi năm sau. Sau 2 năm bác Xuân phải trả là 23.540.000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm đầu? Biết rằng trong năm sau ngân hàng đã giảm 30% lãi suất.		
a 2,0đ	Đặt tên các điểm như hình vẽ. Đặt $CJ = x$ (m, $x > 0$) Vì hai tam giác AJC và BKA là hai tam giác đồng dạng nên: $\frac{CJ}{AK} = \frac{JA}{KB}$ $\frac{x}{5} = \frac{12}{KB}$ $KB = \frac{60}{x}.$ Diện tích của khu nuôi cá là: $S_{(x)} = \frac{1}{2}(x+5) \cdot \left(\frac{60}{x} + 12\right).$ $S(x) = \frac{1}{2} \left(60 + 12x + \frac{300}{x} + 60 \right)$ $S(x) = 6x + \frac{150}{x} + 60 = 6 \left(x + \frac{25}{x} + 10 \right) = 6 \left(\frac{x^2 - 10x + 25}{x} + 20 \right) = 6 \left[\frac{(x-5)^2}{x} + 20 \right] \geq 120$ Dấu bằng xảy ra khi $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng là $120(m^2)$, đạt được khi $x = 5m$.	 0,5 0,5 0,5 0,5
b 2,0đ	Gọi $r\%$ là lãi suất trong một năm đầu của ngân hàng ($r > 0$) Tiền lãi năm thứ nhất là: $20\,000\,000 \cdot \frac{r}{100} = 200\,000.r$ (đồng)	0,5

	Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi sau 1 năm là: $20\,000\,000 + 200\,000.r$ (đồng) Lãi suất của ngân hàng trong năm thứ hai là: $r\% - 30\%.r\% = 0,7r\%$ Tiền lãi năm thứ hai là: $(20\,000\,000 + 200\,000.r) \cdot \frac{0,7r}{100} = 1400r^2 + 140000r \text{ (đồng)}$ Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi sau 2 năm là: $20\,000\,000 + 200\,000.r + 1400r^2 + 140000r =$ $= 1400r^2 + 340000r + 20\,000\,000 \text{ (đồng)}$ Theo đề bài, ta có phương trình: $1400r^2 + 340000r + 20\,000\,000 = 23\,540\,000$ $\Leftrightarrow 1400r^2 + 340000r - 3\,540\,000 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} r = 10 \\ r = -\frac{1770}{7} \end{cases}$ Vì $r > 0$ nên $r = 10$ (nhận); $r = -\frac{1770}{7}$ (loại) Vậy lãi suất cho vay của ngân hàng là 10% trong một năm đầu.	0,5
		0,5
		0,5

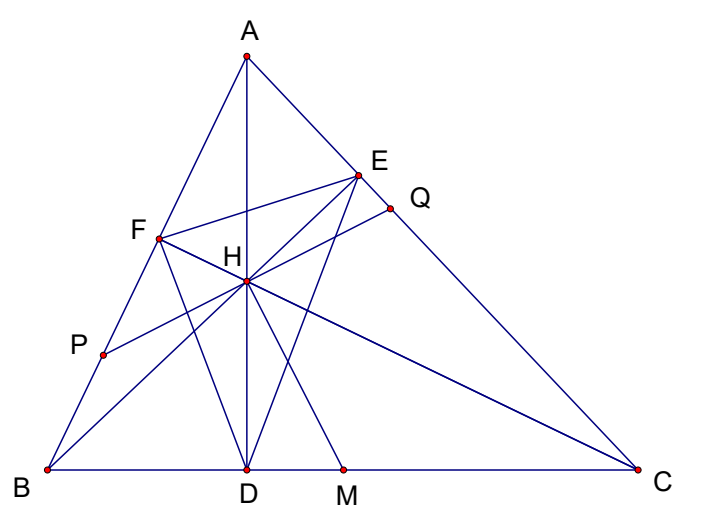
Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $AD.HD = BD.CD$

b) Chứng minh: H là giao điểm của các đường phân giác của tam giác DEF.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM, cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh: $HP = HQ$.

		
a 2,5đ	Chứng minh: $\triangle ABD \sim \triangle CHD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{HD} \Rightarrow AD.HD = BD.CD$	1,0 1,5

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 8**
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-8>