

Bài 1. (4 điểm)

Số giờ có ánh sáng mặt trời của hai thành phố A và B ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho lần lượt bởi các hàm số

$$g(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 80) \right] + 12 \text{ và } h(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{186} (t - 74) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 1 \leq t \leq 365.$$

Hỏi vào ngày thứ mấy trong năm thì hai thành phố này có cùng số giờ có ánh sáng mặt trời?

Bài 2. (4 điểm)

Cho dãy (a_n) được xác định bởi $a_1 = \frac{241}{34}$ và $30a_{n+1} + 4a_n = 1975, \forall n \geq 1$.

a) Đặt $b_n = a_n - \frac{1975}{34}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (b_n) là một cấp số nhân.

b) Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $\left| S_n - \frac{1975n}{34} + 45 \right| < \frac{1}{2025}$, ở đây $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Bài 3. (4 điểm)

1. Tìm hai số thực a, b sao cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + ax + b}{(x-1)^2}$ tồn tại hữu hạn.

2. Cho các hàm số $y = f(x), y = f(x^2), y = \frac{f(x)}{f(x^2)}$ có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$. Hệ số góc các tiếp tuyến của $(C_1), (C_2), (C_3)$ tại điểm M có hoành độ $x_0 = 1$ lần lượt là k_1, k_2, k_3 thỏa mãn $k_1 + 2k_2 = 3k_3 \neq 0$. Tính diện tích của tam giác giới hạn bởi ba tiếp tuyến trên, biết rằng tiếp tuyến của (C_1) tại M đi qua điểm $A(-1; -1)$.

Bài 4. (6 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AB \parallel CD$), SCD là tam giác đều và $AB = 2AD = 2DC = 2CB = 4a$. Qua điểm M trên đoạn AD sao cho $MD = 3MA$, vẽ mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SCD) .

a) Chứng minh rằng thiết diện tạo được từ (α) với hình chóp đã cho là một hình thang cân. Tính chu vi của thiết diện đó.

b) Giả sử rằng M cách đều D và trung điểm của đoạn SD . Tính cosin của góc nhị diện $[A, SD, C]$.

Bài 5. (2 điểm)

Có $2n$ (n nguyên dương) kỳ thủ tham gia một giải thi đấu cờ vua, trong đó có hai bạn tên là Hoà và Bình. Ban tổ chức chia các kỳ thủ này thành n cặp để thi đấu với nhau.

a) Tính số cách chia cặp và chứng minh rằng số lượng đó luôn là một số lẻ.

b) Biết rằng xác suất để hai bạn Hoà và Bình thi đấu cùng cặp là $\frac{1}{23}$, tìm n .

--- HẾT ---

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh: