

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

**Câu 1 (2,0 điểm)**

a) Rút gọn biểu thức  $P = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{3(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0$ .

b) Cho hai số thực dương  $x, y$  phân biệt thoả mãn  $\frac{x}{y} = \frac{x^3+y}{y^3+x} = \frac{xy}{xy+1}$ . Tính giá trị của  $x^3 + y^3$ .

**Câu 2 (1,0 điểm)**

Gọi  $A$  là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số và các chữ số đều khác 0. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp  $A$ .

a) Tính xác suất của biến cố “Chọn được số chia hết cho 4”.

b) Tính xác suất của biến cố “Chọn được số  $\overline{ab}$  sao cho tổng  $\overline{ab} + \overline{ba}$  là số chính phương”.

**Câu 3 (2,0 điểm)**

a) Tìm các cặp số nguyên không âm  $(a; b)$  thoả mãn  $(ab-5)^2 - a^2 = b(a+b)$ .

b) Tìm các bộ số nguyên dương  $(x; y; p)$  với  $p$  nguyên tố, thoả mãn  $(x^3 + x + 3)(x^2 - x + 1) = p^y$ .

**Câu 4 (1,0 điểm)** Cho các số thực dương  $x, y, z$  thoả mãn  $x + y + z = xy + yz + zx$ .

a) Chứng minh  $x + y + z \geq 3$ .

b) Chứng minh  $\frac{1}{x^2 + y^2 + z} + \frac{1}{y^2 + z^2 + x} + \frac{1}{z^2 + x^2 + y} \leq 1$ .

**Câu 5 (1,0 điểm)**

Cho bảng vuông kích thước  $8 \times 8$  gồm 64 ô vuông, có 8 hàng và 8 cột. Ta điền vào tất cả các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông điền đúng một số nguyên dương thuộc tập  $S = \{1; 2; 3; \dots; 64\}$  (hai ô vuông khác nhau điền hai số khác nhau).

a) Ta gọi một thanh dọc là hình gồm 7 ô vuông liên tiếp thuộc cùng một cột. Xét một cách điền sao cho mọi thanh dọc đều chứa tối đa 3 số chẵn. Chứng minh mỗi cột chứa ít nhất 4 số lẻ.

b) Với cách điền như câu a), chứng minh tồn tại ít nhất hai hàng chứa toàn số chẵn.

c) Một cặp số gọi là “không thân thiện nhau” nếu chúng nằm ở hai ô vuông kề nhau (là hai ô vuông có chung cạnh) và hiệu của chúng (số lớn trừ số bé) lớn hơn 4. Chứng minh với mọi cách điền số, có thể tìm được một cặp số “không thân thiện nhau”.

**Câu 6 (3,0 điểm)**

Cho tam giác nhọn  $ABC$ , có  $AC > AB$ . Tia phân giác góc  $A$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Đường tròn  $(I)$  ngoại tiếp tam giác  $ADM$  cắt các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $E$  và  $F$  ( $E, F \neq A$ ).

Gọi  $N$  là trung điểm  $EF$  và  $J$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DMN$ .

a) Chứng minh các đẳng thức  $BE.BA = BD.BM$ ;  $CF.CA = CM.CD$  và  $BE = CF$ .

b) Gọi  $B'$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $N$ , chứng minh  $B'C // AD$  và ba điểm  $M, A, J$  thẳng hàng.

c) Đường thẳng  $MN$  cắt đường tròn  $(I)$  tại điểm thứ hai  $P$ , đường thẳng  $DP$  cắt các đường thẳng  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $K$  và  $L$ . Chứng minh  $P$  là trung điểm  $KL$ .

----- HẾT -----