

MỤC LỤC PHIẾU KHẢO BÀI 11 – HK1

Trang

ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH

<i>Phiếu 1.1. Tập xác định, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác</i>	1
<i>Phiếu 1.2. Tập xác định, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác</i>	3
<i>Phiếu 2.1. Phương trình lượng giác cơ bản</i>	5
<i>Phiếu 2.2. Phương trình lượng giác cơ bản</i>	7
<i>Phiếu 3.1. Phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác</i>	9
<i>Phiếu 3.2. Phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác</i>	11
<i>Phiếu 4.1. Phương trình bậc nhất đối với sin và cosin (cổ điển)</i>	13
<i>Phiếu 4.2. Phương trình bậc nhất đối với sin và cosin (cổ điển)</i>	15
<i>Phiếu 5.1. Phương trình lượng giác đẳng cấp</i>	17
<i>Phiếu 5.2. Phương trình lượng giác đẳng cấp</i>	19
<i>Phiếu 6.1. Phương trình lượng giác đối xứng</i>	21
<i>Phiếu 6.2. Phương trình lượng giác đối xứng</i>	23
<i>Phiếu 7.1. Quy tắc đếm cơ bản</i>	25
<i>Phiếu 7.2. Quy tắc đếm cơ bản</i>	27
<i>Phiếu 8.1. Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp</i>	29
<i>Phiếu 8.2. Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp</i>	31
<i>Phiếu 8.3. Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp</i>	33
<i>Phiếu 9.1. Nhị thức Newton</i>	35
<i>Phiếu 9.2. Nhị thức Newton</i>	37
<i>Phiếu 9.3. Nhị thức Newton</i>	39
<i>Phiếu 10.1. Xác suất</i>	41
<i>Phiếu 10.2. Xác suất</i>	43
<i>Phiếu 10.3. Xác suất</i>	45
<i>Phiếu 11.1. Cấp số cộng – Cấp số nhân</i>	47
<i>Phiếu 11.2. Cấp số cộng – Cấp số nhân</i>	49
<i>Phiếu 11.2. Cấp số cộng – Cấp số nhân</i>	51

HÌNH HỌC

<i>Điểm 1.1. Tìm giao tuyến và giao điểm</i>	53
<i>Điểm 1.2. Tìm giao tuyến và giao điểm</i>	55
<i>Điểm 1.3. Tìm giao tuyến và giao điểm</i>	57
<i>Điểm 2.1. Tìm thiết diện</i>	59
<i>Điểm 2.2. Tìm thiết diện</i>	60
<i>Điểm 3.1. Chứng minh ba điểm thẳng hàng</i>	61
<i>Điểm 3.2. Chứng minh ba điểm thẳng hàng</i>	62
<i>Điểm 4.1. Chứng minh hai đường thẳng song song</i>	63
<i>Điểm 4.2. Chứng minh hai đường thẳng song song</i>	64
<i>Điểm 5.1. Tìm giao tuyến song song</i>	65
<i>Điểm 5.2. Tìm giao tuyến song song</i>	67
<i>Điểm 6.1. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng</i>	69
<i>Điểm 6.2. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng</i>	71
<i>Điểm 7.1. Chứng minh mặt phẳng song song với mặt phẳng</i>	73
<i>Điểm 7.2. Chứng minh mặt phẳng song song với mặt phẳng</i>	75

Bài toán số 01. Tập xác định và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác



1) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\sin 2x - 1}$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 2x - 1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos 2x + 1}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm

số $f(x) = \frac{9}{3 - \sin x}$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $3 - \sin x \neq 0$: luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1$

$\Leftrightarrow 4 \geq 3 - \sin x \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin x} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq \frac{9}{3 - \sin x} \leq \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{9}{4} \leq f(x) \leq \frac{9}{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} \min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{9}{4} \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \dots \\ \max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{9}{2} \text{ khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dots \end{cases}$

số $y = \frac{8}{3 - 2 \cos x}$.

3) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - \sin x + 5$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1] \Rightarrow y = t^2 - t + 5$.

Xét parabol (P) : $y = t^2 - t + 5$ khi $t \in [-1; 1]$.

Hoành độ đỉnh $t = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{19}{4}$.

Bảng biến thiên:

t	-1	1/2	1
y	7	19/4	5

Suy ra: $\min y = \frac{19}{4}$ và $\max y = 7$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - 2 \cos x + 7$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k \frac{\pi}{2} \right\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

Câu 2. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập xác định của hàm số $y = \tan \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \right\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Câu 3. Với $k \in \mathbb{Z}$, hàm số $y = \frac{3 \sin x + 5}{1 - \cos x}$ xác định khi

A. $x \neq \pi + k2\pi$.

B. $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x \neq k\pi$.

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4 \sin x - 3$ là

A. -7 .

B. -3 .

C. 1 .

D. 3 .

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 - 2 \cos x$ là

A. 0 .

B. 3 .

C. -1 .

D. 4 .

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 - 2 \cos x - \cos^2 x$ là

A. 2 .

B. 5 .

C. 0 .

D. 3 .

Câu 7. * Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 x - \cos x + 5 = m$ có nghiệm ?

A. 3 .

B. Vô số.

C. 2 .

D. 4 .

Bài toán số 01. Tập xác định và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác



1) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\sin 2x - 1}$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 2x - 1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

2) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{9}{3 - \sin x}$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $3 - \sin x \neq 0$: luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1$

$\Leftrightarrow 4 \geq 3 - \sin x \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin x} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq \frac{9}{3 - \sin x} \leq \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{9}{4} \leq f(x) \leq \frac{9}{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} \min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{9}{4} \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \dots \\ \max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{9}{2} \text{ khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dots \end{cases}$

3) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - \sin x + 5$.

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1] \Rightarrow y = t^2 - t + 5$.

Xét parabol (P) : $y = t^2 - t + 5$ khi $t \in [-1; 1]$.

Hoành độ đỉnh $t = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{19}{4}$.

Bảng biến thiên:

t	-1	1/2	1
y	7	19/4	5

Suy ra: $\min y = \frac{19}{4}$ và $\max y = 7$.

1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\cos 3x + 1}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{10}{4 + \cos x}$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 x - 2 \cos x + 3$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

Câu 2. Với $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3 \cos x}{\sin x}$ là

A. $x \neq 2k\pi$.

B. $x \neq k\pi$.

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x + 1}{\cos 2x - 1}$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$.

Câu 4. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là

A. $x \neq k\pi$.

B. $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Câu 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$. Khi đó

$M - m$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. $\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 6. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 2x + \cos 2x + 4$. Khi đó $M + 2m$ bằng

A. $\frac{27}{2}$.

B. $\frac{25}{2}$.

C. 14.

D. 13.

Câu 7. * Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ lần lượt là

A. $m = -\frac{1}{2}; M = 1$.

B. $m = 1; M = 2$.

C. $m = -2; M = 1$.

D. $m = -1; M = 2$.

Bài toán số 02. Phương trình lượng giác cơ bản



1) $\boxed{\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi \end{cases}}$

Ví dụ. Giải: $(2 \sin x - 1)(\sin x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - 1 = 0 \\ \sin x = -3 : \text{VN}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

1. $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

Ví dụ. Giải: $(2 \sin x + 1)(\sin x - 2) = 0.$

.....

2) $\boxed{\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi \end{cases}}$

Ví dụ. Giải: $(2 \cos 3x - \sqrt{3})(2 \cos x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos 3x - \sqrt{3} = 0 \\ \cos x = 2 : \text{VN}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}).$

2. $\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

Ví dụ. Giải: $(2 \cos 2x + 1)(\cos x + 5) = 0.$

.....

3) $\boxed{\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi}$

Ví dụ. Giải: $3 \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

3. $\tan a = \tan b \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Ví dụ. Giải: $\tan \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0.$

.....

4) $\boxed{\cot a = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi}$

Ví dụ. Giải: $3 \cot \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \cot \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cot \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

4. $\cot a = \cot b \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Ví dụ. Giải: $\cot \left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm ?

- A. $-2 \leq m \leq 0$.
- B. $m \leq 0$.
- C. $m \geq 1$.
- D. $0 \leq m \leq 1$.

Câu 2. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm là

- A. $(-\infty; -1)$.
- B. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
- C. $(1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 3. Với $k \in \mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$.
- B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.
- C. $x = k\pi$.
- D. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$.

Câu 4. Với $k \in \mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ là

- A. $x = k\pi$.
- B. $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2}$.
- C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
- D. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2}$.

Câu 5. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $2 \cos x = -\sqrt{2}$ là

- A. $\left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \right\}$.
- B. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{5\pi}{4} + k2\pi \right\}$.
- C. $\left\{ \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right\}$.
- D. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right\}$.

Câu 6. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $2 \sin 2x + 1 = 0$ là

- A. $\left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi; \frac{7\pi}{12} + k2\pi \right\}$.
- B. $\left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi \right\}$.
- C. $\left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi \right\}$.
- D. $\left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{12} + k2\pi \right\}$.

Câu 7. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0$ là

- A. $\left\{ -\frac{\pi}{9} + k3\pi \right\}$.
- B. $\left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$.
- C. $\{-\pi + k3\pi\}$.
- D. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$.

Câu 8. Với $k \in \mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $\cot 2x = -\sqrt{3}$ là

- A. $x = \operatorname{arccot} \frac{-\sqrt{3}}{2} + k\pi$.
- B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.
- C. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.
- D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Bài toán số 02. Phương trình lượng giác cơ bản



1) $\boxed{\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi \end{cases}}$

Ví dụ. Giải: $(2 \sin x - 1)(\sin x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - 1 = 0 \\ \sin x = -3 : \text{VN}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

1. $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

Ví dụ. Giải: $(2 \sin x - \sqrt{2})(\sin x + 4) = 0$.

2) $\boxed{\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi \end{cases}}$

Ví dụ. Giải: $(2 \cos 3x - \sqrt{3})(2 \cos x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos 3x - \sqrt{3} = 0 \\ \cos x = 2 : \text{VN}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. $\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

Ví dụ. Giải: $(2 \cos 3x - 1)(\cos x + 2) = 0$.

3) $\boxed{\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi}$

Ví dụ. Giải: $3 \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3. $\tan a = \tan b \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Ví dụ. Giải: $\tan \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$.

4) $\boxed{\cot a = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi}$

Ví dụ. Giải: $3 \cot \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \cot \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cot \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. $\cot a = \cot b \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Ví dụ. Giải: $\cot \left(3x + \frac{3\pi}{5}\right) + \sqrt{3} = 0$

Bài toán số 03. Phương trình bậc hai theo một hàm lượng giác

————→ **Phương pháp:** Dùng các công thức lượng giác đưa về cùng một hàm lượng giác và cùng cung.

1) Giải phương trình: $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin x = 2 : \text{VN}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$

1. Giải phương trình: $\sin^2 x + 4 \cos x - 4 = 0.$

.....

2) Giải phương trình: $\cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0.$

$\Leftrightarrow (2 \cos^2 x - 1) + 3 \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = -2 : \text{VN}_0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$

2. Giải phương trình: $\cos 2x + 5 \sin x - 3 = 0.$

.....

3) Giải phương trình: $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0.$

$\Leftrightarrow (2 \cos^2 2x - 1) + 12 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 1$

$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - 6 \cos 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = 2 : \text{VN}_0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi.$

3. Giải phương trình: $\cos 4x + 10 \sin^2 x - 1 = 0.$

.....

4) Giải phương trình: $\tan x + 4 \cot x = 5.$

ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}.$

Phương trình $\Leftrightarrow \tan x + 4 \cdot \frac{1}{\tan x} = 5$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(4) + k\pi \end{cases} \quad (\text{TM})$

4. Giải phương trình: $\tan x + 5 \cot x + 6 = 0.$

.....

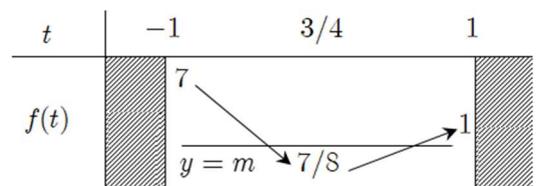
5. Tìm tất cả tham số m để phương trình $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 4 + m = 0$ có nghiệm ?

Giải. Phương trình $\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x - 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 \quad (*)$

Đặt $\sin x = t, t \in [-1; 1].$

$(*) \Leftrightarrow m = 2t^2 - 3t + 2 = f(t)$ có nghiệm $t \in [-1; 1].$

Với $f(t)$ là parabol có đỉnh $I\left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right)$ là điểm cực tiểu.



Phương trình đã cho có nghiệm khi parabol và đường $y = m$ có điểm chung $\Leftrightarrow 7/8 \leq m \leq 7.$

————→ **Sai lầm thường gặp:** Học sinh sử dụng điều kiện có nghiệm của pt bậc hai là $\Delta \geq 0.$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Cho phương trình $\cos 2x - \cos x + 2 = 0$. Nếu đặt $t = \cos x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây ?

- A. $2t^2 - t + 2 = 0$. B. $-2t^2 - t + 2 = 0$.
 C. $2t^2 - t + 1 = 0$. D. $-2t^2 - t + 3 = 0$.

Câu 2. Cho phương trình $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$. Nếu đặt $t = \sin x$, ($-1 \leq t \leq 1$) thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây ?

- A. $2t^2 + t = 0$. B. $2t^2 - t = 0$.
 C. $-2t^2 - t = 0$. D. $2t^2 + t - 2 = 0$.

Câu 3. Với $k \in \mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $\cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
 C. $x = k2\pi$. D. $x = \pi + k2\pi$.

Câu 4. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\cos 2x + 2 \sin x - 1 = 0$ là

- A. $\left\{ k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$. B. $\left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.
 C. $\{ k2\pi; \pi + k2\pi \}$. D. $\left\{ k\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

Câu 5. Phương trình $\cos x - \cos 2x = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

- A. 3.
 B. 1.
 C. 2.
 D. 4.

Câu 6. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$ là

- A. $x = k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 C. $x = k\pi$. D. $x = \frac{k\pi}{2}$.

Câu 7. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\frac{1}{\cos^2 x} = 2 \tan^2 x - 3 \tan x + 3$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{cases}$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \arctan 2 + k2\pi \end{cases}$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-\sin^2 x - 3 \cos x + 3m = 0$ có nghiệm ?

- A. $-1 < m < 1$. B. $-1 \leq m \leq 1$.
 C. $m < \frac{13}{12}$. D. $m \leq \frac{13}{12}$.

Bài toán số 03. Phương trình bậc hai theo một hàm lượng giác

————→ **Phương pháp:** Dùng các công thức lượng giác đưa về cùng một hàm lượng giác và cùng cung.

1) Giải phương trình: $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin x = 2 : \text{VN}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$

1. Giải phương trình: $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0.$

.....

.....

.....

.....

.....

2) Giải phương trình: $\cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0.$

$\Leftrightarrow (2 \cos^2 x - 1) + 3 \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = -2 : \text{VN}_0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$

2. Giải phương trình: $\cos 2x + 5 \sin x + 2 = 0.$

.....

.....

.....

.....

.....

3) Giải phương trình: $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0.$

$\Leftrightarrow (2 \cos^2 2x - 1) + 12 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 1$

$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - 6 \cos 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = 2 : \text{VN}_0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi.$

3. Giải phương trình: $\cos 4x - 12 \cos^2 x + 11 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

4) Giải phương trình: $\tan x + 4 \cot x = 5.$

ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}.$

Phương trình $\Leftrightarrow \tan x + 4 \cdot \frac{1}{\tan x} = 5$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(4) + k\pi \end{cases} \quad (\text{TM})$

4. Giải phương trình: $\tan x + 12 \tan x + 13 = 0.$

.....

.....

.....

.....

.....

5. Tìm tất cả tham số m để phương trình $\cos^2 x - \cos x + 3 = m$ có nghiệm ?

Giải.

.....

.....

.....

.....

.....

————→ **Sai lầm thường gặp:** Học sinh sử dụng điều kiện có nghiệm của pt bậc hai là $\Delta \geq 0.$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Cho phương trình $4 \cos 2x - \cos x + 2 = 0$. Nếu đặt $t = \cos x$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây ?

- A. $8t^2 - t - 2 = 0$. B. $-4t^2 - t + 6 = 0$.
 C. $-8t^2 - t + 6 = 0$. D. $4t^2 - t - 2 = 0$.

Câu 2. Với $k \in \mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $\cos 2x + 6 \sin x - 5 = 0$ là

- A. $x = \pi + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
 C. $x = k2\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 3. Hai họ nghiệm phương trình $2 \cos^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$ có dạng $x = \alpha + k2\pi$ và $x = \beta + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$. Biết $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ và $\alpha < \beta$. Khi đó $\beta - \alpha$ bằng

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{2}$.
 C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 4. Phương trình $\sqrt{3} \tan x - \sqrt{3} \cot x = 2$ có hai họ nghiệm có dạng $x = \alpha + k\pi$ và $x = \beta + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq \alpha, \beta < \pi$). Khi đó $\alpha\beta$ bằng

- A. $\frac{\pi^2}{12}$. B. $\frac{5\pi^2}{18}$.
 C. $-\frac{\pi^2}{12}$. D. $-\frac{\pi^2}{18}$.

Câu 5. Với $k \in \mathbb{Z}$, các họ nghiệm của phương trình $2 \cos 4x - 8 \sin^2 x + 3 = 0$ là

- A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.
 C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 6. * Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin^2 x - \sin x + 2 = m$ có nghiệm là

- A. 3.
 B. 5.
 C. 4.
 D. Vô số.

Câu 7. * Tìm các giá trị m để phương trình $\cos 2x - (2m - 1) \cos x - 2m = 0$ có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $-\frac{1}{2} < m \leq \frac{1}{2}$.
 C. $m < -\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3} \leq m \leq 1$.

Bài toán số 04. Phương trình bậc nhất với sin và cos (cổ điển): $a \sin x + b \cos x = c.$

————→ **Phương pháp giải:**

Bước 1. Kiểm tra điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2.$

Bước 2. Chia hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ và sử dụng: $\begin{cases} \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b = \sin(a \pm b) \\ \cos a \cdot \cos b \pm \sin a \cdot \sin b = \cos(a \mp b) \end{cases}$ đưa về PT cơ bản.

1) Giải phương trình: $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}.$

ĐK có nghiệm: $a^2 + b^2 = 4 > 2$: luôn đúng.

Chia hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ thì phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \vee x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

1. Giải phương trình: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Giải PT: $\sqrt{3} \cos 4x + \sin 4x = 2 \sin 2x.$

Chia hai vế $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$, thì phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin 4x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin 2x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải PT: $\cos 4x - \sqrt{3} \sin 4x = 2 \sin x.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3 \sin x + \cos x = m$ có nghiệm ?

Học sinh đọc và bổ sung lời giải. Phương trình có nghiệm \Leftrightarrow

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}}$ $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$: có số nguyên $m.$

4. Tìm tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x + m$ bằng 10 ?

Học sinh đọc và bổ sung lời giải. Gọi $y_0 \in T$ là tập giá trị của hàm số đã cho.

Để tồn tại giá trị lớn nhất thì phương trình $y_0 = 3 \sin x + 4 \cos x + m$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 3 \sin x + 4 \cos x = y_0 - m \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq y_0 - m \leq 5 \Leftrightarrow -5 + m \leq y_0 \leq m + 5.$$

Suy ra tập giá trị của hàm số là $T = [-5 + m; 5 + m] \Rightarrow \max_{\mathbb{R}} y = m + 5 \Leftrightarrow 10 = m + 5 \Leftrightarrow m = 5.$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Trong các phương trình sau phương trình nào có nghiệm ?

A. $3 \sin x - 2 \cos x = 5.$

B. $\sin x - \cos x = 2.$

C. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 3.$

D. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2.$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $5 \cos x - m \sin x = m + 1$ có nghiệm ?

A. $m \leq -13.$

B. $m \leq 12.$

C. $m \leq 24.$

D. $m \geq 24.$

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2 \sin^2 x + m \sin 2x = 2m$ vô nghiệm ?

A. $m \leq 0 \vee m \geq \frac{4}{3}.$

B. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}.$

C. $m < 0 \vee m > \frac{4}{3}.$

D. $0 < m < \frac{4}{3}.$

Câu 4. Phương trình $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây ?

A. $\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}.$

B. $\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}.$

C. $\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}.$

D. $\sin \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right) = \frac{1}{2}.$

Câu 5. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\cos x + \sin x = 1$ là

A. $\left\{ k\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}.$

B. $\left\{ k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}.$

C. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; k2\pi \right\}.$

D. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k\pi \right\}.$

Câu 6. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ là

A. $\left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi; \frac{5\pi}{12} + k2\pi \right\}.$

B. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right\}.$

C. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi \right\}.$

D. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{5\pi}{4} + k2\pi \right\}.$

Câu 7. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\sin x - \sqrt{3} \cos x - 2 \sin 3x = 0$ là

A. $\left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}.$

B. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \right\}.$

C. $\left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi \right\}.$

D. $\left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \right\}.$

Câu 8. Giá trị lớn nhất hàm số $y = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x + 1$ là $a + \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $b - a$ bằng

A. $1 + \sqrt{13}.$

B. 12.

C. 13.

D. 14.

Bài toán số 04. Phương trình bậc nhất với sin và cos (cổ điển): $a \sin x + b \cos x = c$.

————→ **Phương pháp giải:**

Bước 1. Kiểm tra điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Bước 2. Chia hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ và sử dụng: $\begin{cases} \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b = \sin(a \pm b) \\ \cos a \cdot \cos b \pm \sin a \cdot \sin b = \cos(a \mp b) \end{cases}$ đưa về PT cơ bản.

1) Giải phương trình: $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$.

ĐK có nghiệm: $a^2 + b^2 = 4 > 2$: luôn đúng.

Chia hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ thì phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \vee x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

1. Giải phương trình: $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2$.

2) Giải PT: $\sqrt{3} \cos 4x + \sin 4x = 2 \sin 2x$.

Chia hai vế $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$, thì phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin 4x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin 2x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải PT: $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos x$.

3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3 \sin x + 2 \cos x = m$ có nghiệm ?

Học sinh đọc và bổ sung lời giải. Phương trình có nghiệm \Leftrightarrow

4. Tìm tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = 6 \sin x + 8 \cos x + m$ bằng 12 ?

Học sinh đọc và bổ sung lời giải. Gọi $y_0 \in T$ là tập giá trị của hàm số đã cho.

Để tồn tại giá trị lớn nhất thì phương trình $y_0 = 6 \sin x + 8 \cos x + m$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 6 \sin x + 8 \cos x = y_0 - m \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

- Câu 1.** Điều kiện của tham số m để phương trình $m \sin x + 3 \cos x = 5$ có nghiệm là
- A. $m \geq -4$. B. $-4 \leq m \leq 4$.
 C. $m \geq \sqrt{34}$. D. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 4$.
- Câu 2.** Phương trình $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$ tương đương với phương trình nào sau đây ?
- A. $\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{4}$. B. $\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4}$.
 C. $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4}$. D. $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{4}$.
- Câu 3.** Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ là
- A. $\left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi; \frac{5\pi}{12} + k2\pi \right\}$. B. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right\}$.
 C. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{5\pi}{4} + k2\pi \right\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi \right\}$.
- Câu 4.** Phương trình $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \cos x$ có hai họ nghiệm dạng $x = \alpha + k2\pi$ và $x = \beta + \frac{k2\pi}{3}$, trong đó $\alpha \in (0; \pi)$ và $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$. Khi đó $2\alpha - \beta$ bằng
- A. $-\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{7\pi}{4}$.
 C. $-\frac{11\pi}{4}$. D. $\frac{5\pi}{4}$.
- Câu 5.** Với $k \in \mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x = 3$ là
- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$.
 C. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. D. $x = -\frac{4\pi}{3} + k\pi$.
- Câu 6.** * Số nghiệm của phương trình $2 \sin x - 2 \cos x = \sqrt{2}$ thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ là
- A. 2. B. 0.
 C. 3. D. 1.
- Câu 7.** * Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $(m + 1) \sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm ?
- A. 4037. B. 4036.
 C. 2020. D. 2019.
- Câu 8.** * Hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên ?
- A. 4. B. 3.
 C. 2. D. 1.

Bài toán số 05. Phương trình lượng giác đẳng cấp bậc hai $a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos^2 x = d$

————→ **Phương pháp giải:** (học sinh cần nhớ: đẳng cấp bậc n thì chia cho $\cos^n x \neq 0$).

Bước 1. Kiểm tra $\cos x = 0$ có phải là nghiệm không? nếu có thì nhận, không có thì loại.

Bước 2. Chia hai vế cho $\cos^2 x \neq 0$ và đưa về phương trình bậc hai theo $\tan x$.

- Sau khi chia, công thức thường được sử dụng là $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \frac{k}{\cos^2 x} = k.(1 + \tan^2 x)$.

1) Giải: $\sin^2 x - 4\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = -2$ (1)

Với $\cos x = 0 \xrightarrow[\sin^2 x=1]{(1)} 1 = -2$: sai.

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế (1) cho $\cos^2 x \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\sqrt{3} \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-2}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 4\sqrt{3} \tan x + 1 = -2(1 + \tan^2 x)$$

.....

1. Giải: $\cos^2 x - 3\sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = -2$.

.....

2) Giải PT: $2 \sin^3 x + 4 \cos^3 x = 3 \sin x$ (1)

Với $\cos x = 0 \xrightarrow[\sin x=\pm 1]{(1)} \pm 2 = \pm 3$: sai.

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế (1) cho $\cos^3 x \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{4 \cos^3 x}{\cos^3 x} = \frac{3 \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x + 4 = 3 \tan x.(1 + \tan^2 x)$$

.....
 $\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow$

2. Giải PT: $7 \cos x = 4 \cos^3 x + 4 \sin 2x$.

.....

3) Giải: $3 \cos^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$ (1)

Với $\cos x = 0 \xrightarrow[\sin^2 x=1]{(1)} 1 = 0$: sai.

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế (1) cho $\cos^4 x \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3 \cos^4 x}{\cos^4 x} - \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 4 \tan^2 x + \tan^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x = 1 \\ \tan^2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

.....

3. $\sqrt{3} \sin^4 x + \cos^4 x = (1 + \sqrt{3}) \sin^2 x \cos^2 x$.

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Cho phương trình $2 \sin^2 x - \sin 2x - 5 \cos^2 x = 1$. Khi đặt $t = \tan x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây ?

A. $2t^2 - t - 6 = 0$.

B. $t^2 - t - 3 = 0$.

C. $t^2 - 2t - 6 = 0$.

D. $t^2 - t - 6 = 0$.

Câu 2. Phương trình $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây ?

A. $(\tan x + 1)(\tan x + 3) = 0$.

B. $(\tan x - 1)(3 \tan x - 1) = 0$.

C. $(\tan x + 1)(3 \tan x + 1) = 0$.

D. $(\tan x - 1)(\tan x - 3) = 0$.

Câu 3. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin 2x + \cos^2 x + 2 = 0$ là

A. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}$.

B. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$.

C. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$.

D. $\left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}$.

Câu 4. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right)$.

B. $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right)$.

C. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$.

D. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Câu 5. Nghiệm dương nhỏ nhất x_0 của phương trình $3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$ là

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{18}$.

C. $\frac{\pi}{24}$.

D. $\frac{\pi}{54}$.

Bài toán số 05. Phương trình lượng giác đẳng cấp bậc hai $a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos^2 x = d$

————→ **Phương pháp giải:** (học sinh cần nhớ: đẳng cấp bậc n thì chia cho $\cos^n x \neq 0$).

Bước 1.

Bước 2.

————→ Sau khi chia, công thức thường được sử dụng là

1) Giải: $\sin^2 x - 4\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = -2$ (1)

Với $\cos x = 0 \xrightarrow[\sin^2 x=1]{(1)} 1 = -2$: sai.

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế (1) cho $\cos^2 x \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\sqrt{3} \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-2}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 4\sqrt{3} \tan x + 1 = -2(1 + \tan^2 x)$$

.....

1. Giải: $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x = 0$.

.....

2) Giải PT: $2 \sin^3 x + 4 \cos^3 x = 3 \sin x$ (1)

Với $\cos x = 0 \xrightarrow[\sin x=\pm 1]{(1)} \pm 2 = \pm 3$: sai.

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế (1) cho $\cos^3 x \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{4 \cos^3 x}{\cos^3 x} = \frac{3 \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

\Leftrightarrow

2. Giải PT: $2 \sin^3 x - \cos x = 0$.

.....

3) Giải: $3 \cos^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$ (1)

Với $\cos x = 0 \xrightarrow[\sin^2 x=1]{(1)} 1 = 0$: sai.

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế (1) cho $\cos^4 x \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3 \cos^4 x}{\cos^4 x} - \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 4 \tan^2 x + \tan^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x = 1 \\ \tan^2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

.....

3. $3 \cos^4 x - \sin^2 2x + \sin^4 x = 0$.

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Khi đặt $t = \tan x$ thì phương trình $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 1$ trở thành phương trình nào sau đây ?

A. $2t^2 - 3t - 1 = 0.$

B. $3t^2 - 3t - 1 = 0.$

C. $2t^2 + 3t - 3 = 0.$

D. $t^2 + 3t - 3 = 0.$

Câu 2. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$ là

A. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan(-3) + k\pi \right\}.$

B. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan \frac{1}{3} + k\pi \right\}.$

C. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan \frac{1}{3} + k\pi \right\}.$

D. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan(3) + k\pi \right\}.$

Câu 3. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x - 2 = 0$ là

A. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}.$

B. $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}.$

C. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}.$

D. $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}.$

Câu 4. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $4\sqrt{3} \sin 2x + 8 \cos^2 x = 4 \sin^2 x + 5$ là

A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}.$

B. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan(-2) + k\pi \right\}.$

C. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k\pi \right\}.$

D. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan(-2) + k\pi \right\}.$

Câu 5. * Phương trình $4 \sin^2 2x - 3 \sin 2x \cos 2x = \cos^2 2x$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 6. * Với giá trị lớn nhất của a bằng bao nhiêu để phương trình $a \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3a \cos^2 x = 2$ có nghiệm ?

A. 2.

B. 4.

C. $\frac{11}{3}.$

D. $\frac{8}{3}.$

Câu 7. * Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2 \cos 3x = m - 2 \cos x + \sqrt[3]{m + 6 \cos x}$ có nghiệm ?

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Bài toán số 06. Phương trình lượng giác đối xứng

① **Loại 1.** Dạng: $a(\sin x \pm \cos x) + b.\sin x \cos x + c = 0$ (nhận dạng: tổng – tích hoặc hiệu – tích)

— Phương pháp → $t = \sin x \pm \cos x, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow t^2 = (\sin x \pm \cos x)^2$ và biểu diễn $\sin x \cos x$ theo t .

- Công thức thường được sử dụng là $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4} \right)$.

② **Loại 2.** Dạng: $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x \pm \cot x) + c = 0$.

— Phương pháp → Đặt $t = \tan x \pm \cot x, |t| \geq 2 \Rightarrow t^2 = (\tan^2 x \pm \cot^2 x)$ và viết $\tan^2 x + \cot^2 x$ theo t .

- Công thức thường được sử dụng là $\tan x . \cot x = 1$ và $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$.

1) Giải PT: $2 \sin 2x + \sin x - \cos x + 1 = 0$ (1)

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Khi đó $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$$\text{Suy ra: } t^2 = (\sin x - \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - t^2.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2(1 - t^2) + t + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ (nhận)} \vee t = \frac{3}{2} \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } t = -1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$$

1. Giải PT: $10 \sin x \cos x = 12(\sin x + \cos x + 1)$.

2) Giải: $2 \tan x + 2 \cot x + \tan^2 x + \cot^2 x = 6$.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}, |t| \geq 2.$$

$$\Rightarrow t^2 = \tan^2 x + \cot^2 + 2 \tan x \cot x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2.$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2t + t^2 - 2 = 6$$

2. $\tan^2 x + \cot^2 x - 2 = \tan x - \cot x$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Cho phương trình $2\sin 2x + \sin x - \cos x + 1 = 0$. Nếu đặt $\sin x - \cos x = t$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây ?

- A. $2t^2 + t - 1 = 0$. B. $2t^2 + t - 3 = 0$.
 C. $-2t^2 - t + 3 = 0$. D. $2t^2 - t - 3 = 0$.

Câu 2. Với $k \in \mathbb{Z}$, các họ nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x - 2\sin x \cos x + 1 = 0$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$.
 C. $x = k2\pi$. D. $x = k\pi$.

Câu 3. Có tất cả bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $2(\sin x + \cos x) + 4\sin x \cos x = -1$?

- A. 4.
 B. 1.
 C. 3.
 D. 2.

Câu 4. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ là

- A. 2π .
 B. 4π .
 C. 3π .
 D. π .

Câu 5. Phương trình $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$ có nghiệm âm lớn nhất là x_1 , nghiệm dương nhỏ nhất là x_2 . Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

- A. $-\frac{5\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{2}$.
 C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $-\pi$.

Câu 6. Nếu x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì $3 + \sin 2x_0$ bằng

- A. 3. B. $3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 C. 0. D. $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$.

Câu 7. Nếu x_0 là nghiệm phương trình $(1 + \sqrt{5})(\sin x - \cos x) + \sin 2x = 1 + \sqrt{5}$ thì $\sin x_0$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 C. -1 hoặc 0 . D. 0 hoặc 1 .

Bài toán số 06. Phương trình lượng giác đối xứng

① **Loại 1.** Dạng: $a(\sin x \pm \cos x) + b.\sin x \cos x + c = 0$ (nhận dạng:

Phương pháp →

• Công thức thường được sử dụng là

② **Loại 2.** Dạng: $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x \pm \cot x) + c = 0$.

Phương pháp →

• Công thức thường được sử dụng là

1) Giải PT: $2 \sin 2x + \sin x - \cos x + 1 = 0$ (1)

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Khi đó $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$$\text{Suy ra: } t^2 = (\sin x - \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - t^2.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2(1 - t^2) + t + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ (nhận)} \vee t = \frac{3}{2} \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } t = -1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

1. Giải PT: $2(\sin x + \cos x) + 6 \sin x \cos - 2 = 0$.

2) Giải: $2 \tan x + 2 \cot x + \tan^2 x + \cot^2 x = 6$.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin x}, |t| \geq 2.$$

$$\Rightarrow t^2 = \tan^2 x + \cot^2 + 2 \tan x \cot x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2.$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2t + t^2 - 2 = 6$$

2. $\frac{2}{\sin^2 x} + 2 \tan^2 x + 5 \tan x + 5 \cot x + 4 = 0$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Cho phương trình $|\sin x + \cos x| + \sin x \cdot \cos x = 1$. Nếu đặt $t = |\sin x + \cos x|$ thì

- A. $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
- B. $t \in [0; \sqrt{2}]$.
- C. $t \in [0; +\infty)$.
- D. $|t| \geq 2$.

Câu 2. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $2(\sin x + \cos x) + \sin x \cos x = 2$ là

- A. $\left\{k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.
- B. $\left\{k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.
- C. $\left\{k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.
- D. $\left\{k\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

Câu 3. Với $k \in \mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $|\sin x + \cos x| + 8 \sin x \cos x = 1$ là

- A. $x = k2\pi$.
- B. $x = k\pi$.
- C. $x = \frac{k\pi}{2}$.
- D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 4. Với $k \in \mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\cos x - \sin x - 2 \sin 2x = 1$ là

- A. $\left\{\pi + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.
- B. $\left\{k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.
- C. $\left\{\pi + k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.
- D. $\left\{k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.

Câu 5. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos x + \sin x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ có nghiệm là

- A. $-\frac{\pi}{2}$.
- B. $-\pi$.
- C. $-\frac{3\pi}{2}$.
- D. -2π .

Câu 6. Nếu x_0 là nghiệm phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì $\sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- C. $\frac{1}{2}$.
- D. 1.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $8 \sin x + \cos x + |\sin x - \cos x| = m$ có nghiệm thực ?

- A. 7.
- B. 5.
- C. 6.
- D. 8.

Bài toán số 07. Quy tắc đếm cơ bản

————→ **Cần nhớ:**

- Công việc hoàn thành theo một trong k phương án (**trường hợp**) —————→ Sử dụng quy tắc cộng.
- Công việc hoàn thành lần lượt qua k **giai đoạn** —————→ Sử dụng quy tắc nhân.

1) Cho tập hợp $A = \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số được lấy từ A sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

Tập A gồm có 7 số có: 4 số lẻ, 3 số chẵn.

Gọi số có bốn chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4$ và $a_1 \neq 0$.

Phần tử	a_1	a_2	a_3	a_4
Số cách chọn	6	6	5	4

Theo QTN có: $6.6.5.4 = 720$ số thỏa mãn.

b) Khác nhau từng đôi một và là số chẵn.

Số cần tìm có dạng: $\overline{b_1b_2b_3b_4}$, trong đó $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4$, $b_1 \neq 0$, $b_4 \in \{0; 2; 4\}$.

TH 1. Chọn $b_4 = 0$.

Phần tử	b_4	b_1	b_2	b_3
Số cách chọn	1	6	5	4

Theo QTN có $1.6.5.4 = 120$ số.

TH 2. Chọn $b_4 \in \{2; 4\}$ và $b_1 \neq 0$.

Phần tử	b_4	b_1	b_2	b_3
Số cách chọn	2	5	5	4

Theo QTN có $2.5.5.4 = 200$ số.

Theo QTC có $120 + 200 = 320$ số.

2) Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ sao cho tích hai số trên hai thẻ là số chẵn ?

Giải. Từ 1 đến 9 có 5 số lẻ và 4 số chẵn.

TH1. Chọn 1 số chẵn, 1 số lẻ.

Chọn 1 số chẵn trong 4 số chẵn có 4 cách.

Chọn 1 số lẻ trong 5 số lẻ có 5 cách.

Theo QTN có $4.5 = 20$ số.

TH2. Chọn 2 số chẵn trong 4 số chẵn có 6 cách (????!!!)

Theo QTC có: $20 + 6 = 26$ cách.

1. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 3; 4; 5; 6; 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ A sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và là số chẵn.

2. Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 viên bi sao cho tổng hai số trên hai viên bi là số chẵn ?

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần ?



- A. 9.
- B. 10.
- C. 18.
- D. 24.

Câu 2. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

- A. 9.
- B. 5.
- C. 4.
- D. 1.

Câu 3. Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là

- A. 13.
- B. 72.
- C. 12.
- D. 30.

Câu 4. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

- A. 480.
- B. 24.
- C. 48.
- D. 60.

Câu 5. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

- A. 45.
- B. 280.
- C. 325.
- D. 605.

Câu 6. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số 7, 8, 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

- A. 27.
- B. 9.
- C. 6.
- D. 3.

Câu 7. Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây ?

- A. 4.
- B. 7.
- C. 12.
- D. 16.

Câu 8. Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau ?

- A. 13.
- B. 72.
- C. 12.
- D. 30.

Câu 9. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100 ?

- A. 36.
- B. 62.
- C. 54.
- D. 42.

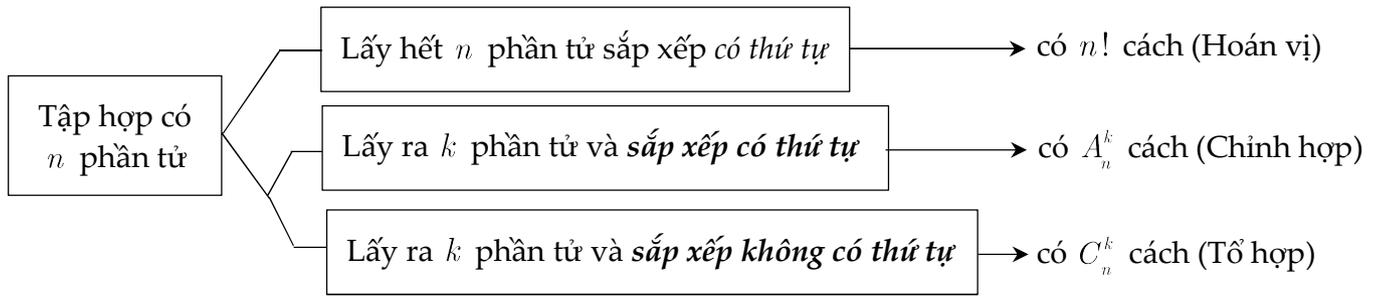
Câu 10. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau ?

- A. 154.
- B. 145.
- C. 144.
- D. 155.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

- Câu 1.** Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập ?
- A. 24. B. 48.
 C. 480. D. 60.
- Câu 2.** Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu ?
- A. 240. B. 210.
 C. 18. D. 120.
- Câu 3.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn ?
- A. 25. B. 75.
 C. 100. D. 15.
- Câu 4.** Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?
- A. 910000. B. 91000.
 C. 910. D. 625.
- Câu 5.** Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 3 học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em ?
- A. 12. B. 220.
 C. 60. D. 3.
- Câu 6.** Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng ?
- A. 100. B. 91.
 C. 10. D. 90.
- Câu 7.** An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường ?
- A. 6. B. 4.
 C. 10. D. 24.
- Câu 8.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau ?
- A. 156. B. 144.
 C. 96. D. 134.
- Câu 9.** Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số (không nhất thiết phải khác nhau) ?
- A. 324. B. 256.
 C. 248. D. 124.
- Câu 10.** Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau ?
- A. 36. B. 24.
 C. 20. D. 14.

Bài toán số 08. Hoán vị, Tổ hợp, Chinh hợp



• $P_n = n! = n.(n - 1)...3.2.1.$

• $A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}.$

• $C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$

Nhóm 1. Hoán vị và bài toán vách ngăn

Câu 1. Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 học sinh thành một hàng ngang ?

.....

Câu 2. Trên kệ sách dài có 3 quyển sách Toán và 4 quyển sách Lý (các quyển đều khác nhau). Có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển trên theo từng môn ?

.....

Câu 3. Có 4 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 học sinh trên thành một hàng ngang sao cho không có hai nữ nào đứng cạnh nhau (nam nữ xen kẽ) ?

.....

Câu 4. Có 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 học sinh trên thành một hàng ngang sao cho không có hai nữ nào đứng cạnh nhau ?

.....

Câu 5. Có bao nhiêu cách sắp xếp 2 nữ và 3 nam thành hàng ngang sao cho nữ luôn ở giữa 2 nam ?

.....

Nhóm 2. Phân biệt giữa tổ hợp và chinh hợp

Câu 6. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D mà không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi:

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành ? —————>

b) Có bao nhiêu véctơ được tạo thành —————>

Câu 7. Lớp có 10 nam và 8 nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra:

a) Ba học sinh đi dự lễ tổng kết —————>

b) Ba học sinh để làm lớp trưởng, lớp phó và thủ quỹ —————>

Câu 8. Cho đa giác đều 20 cạnh. Hỏi:

a) Đa giác có bao nhiêu đường chéo —————>

b) Số hình chữ nhật tạo thành từ các đỉnh trên —————>

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

- Câu 1.** Có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc ?
 A. 8. B. 1.
 C. 40320. D. 64.
- Câu 2.** Có 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ cho các học sinh này thành một hàng ngang sao cho không có nữ nào đứng cạnh nhau ?
 A. $5!.5!$. B. $2.5!.5!$.
 C. $10!$. D. $2.10!$.
- Câu 3.** Trên mặt phẳng cho 2022 điểm phân biệt. Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành từ 2022 điểm đã cho ?
 A. 2^{2022} . B. 2022^2 .
 C. C_{2022}^2 . D. A_{2022}^2 .
- Câu 4.** Trên mặt phẳng cho 2022 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ, khác vectơ – không có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ 2022 điểm đã cho ?
 A. 2^{2022} . B. 2022^2 .
 C. C_{2022}^2 . D. A_{2022}^2 .
- Câu 5.** Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh từ một nhóm có 5 học sinh ?
 A. $5!$. B. A_5^3 .
 C. C_5^3 . D. 5^3 .
- Câu 6.** Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh để bố trí vào vị trí tổ trưởng và tổ phó ?
 A. C_{10}^2 . B. A_{10}^2 .
 C. 10^2 . D. 2^{10} .
- Câu 7.** Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm hai phần tử của M là
 A. A_{10}^8 . B. A_{10}^2 .
 C. C_{10}^2 . D. 10^2 .
- Câu 8.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau ?
 A. 2^8 . B. C_8^2 .
 C. A_8^2 . D. 8^2 .
- Câu 9.** Có 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ cho các học sinh này thành một hàng ngang sao cho không có nữ nào đứng cạnh nhau ?
 A. $5!.3!$. B. $8!$.
 C. $5!.C_6^3$. D. $5!.A_6^3$.
- Câu 10.** Có 6 học sinh và 3 thầy giáo A, B, C . Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 9 người đó ngồi trên một hàng ngang có 9 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh ?
 A. 4320. B. 90.
 C. 43200. D. 720.

- Câu 8.** Cho tập $A = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau ?
- A. 720.
 B. 360.
 C. 120.
 D. 24.
- Câu 9.** Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập A ?
- A. A_{10}^4 .
 B. $9.C_9^4$.
 C. $9.A_9^4$.
 D. C_{10}^4 .
- Câu 10.** Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có hai bạn A , và B , đứng ngẫu nhiên thành một hàng. Có bao nhiêu cách sắp xếp để hai bạn A và B đứng cạnh nhau ?
- A. $10!$.
 B. $2!.8!$.
 C. $2!.9!$.
 D. A_{10}^2 .
- Câu 11.** Một lớp học có 30 bạn học sinh trong đó có 3 cán sự lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 4 bạn học sinh đi dự đại hội đoàn trường sao cho trong 4 học sinh đó có ít nhất một cán sự lớp ?
- A. 23345.
 B. 9585.
 C. 12455.
 D. 9855.
- Câu 12.** Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 4 chữ số khác nhau ?
- A. 2240.
 B. 2520.
 C. 2016.
 D. 256.
- Câu 13.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 5 ?
- A. 136.
 B. 648.
 C. 144.
 D. 120.
- Câu 14.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau mà số đó nhất thiết phải có mặt các chữ số 1, 2, 5 ?
- A. 684
 B. 648.
 C. 846.
 D. 864.

A. C_{38}^2 .

B. A_{38}^2 .

C. $C_{20}^2 C_{18}^1$.

D. $C_{20}^1 C_{18}^1$.

Câu 9. Một tổ có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh đi lao động trong đó có 2 học sinh nam ?

A. $C_9^2 \cdot C_6^3$.

B. $C_6^2 + C_9^3$.

C. $A_6^2 \cdot A_9^3$.

D. $C_6^2 \cdot C_9^3$.

Câu 10. Trên đường thẳng d_1 cho 5 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2 \parallel d_1$ cho n điểm phân biệt. Biết có 175 tam giác được tạo thành mà 3 đỉnh lấy từ $n + 5$ điểm trên thì n là

A. $n = 9$.

B. $n = 8$.

C. $n = 10$.

D. $n = 7$.

Câu 11. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau ?

A. 720.

B. 360.

C. 120.

D. 24.

Câu 12. Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau ?

A. 2520.

B. 50000.

C. 4500.

D. 2296.

Câu 13. Cho tập $A = \{1; 3; 5; 6; 7; 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau đôi một được lập từ A mà luôn có mặt chữ số 5 ?

A. 60.

B. 120.

C. 240.

D. 10.

Câu 14. Cho tập $A = \{0; 1; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau đôi một được lập từ A mà luôn có mặt chữ số 4 ?

A. 90.

B. 30.

C. 80.

D. 120.

Câu 15. Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4 ?

A. 249.

B. 1500.

C. 3204.

D. 2942.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

- Câu 1.** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{15}$ là
- A. 4000. B. 2700.
 C. 3003. D. 3600.
- Câu 2.** Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^6$ là
- A. 110. B. 240.
 C. 60. D. 420.
- Câu 3.** Hệ số của x^2 trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{10}$ bằng
- A. 3124. B. 13440.
 C. 2268. D. 210.
- Câu 4.** Hệ số của x^4 trong khai triển của biểu thức $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ bằng
- A. 11520. B. 256.
 C. 45. D. 3360.
- Câu 5.** Hệ số của x^3 trong khai triển $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9$ là
- A. 1. B. -18.
 C. 144. D. -672.
- Câu 6.** Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $P_2 \cdot x^2 - P_3 \cdot x = 8$.
- A. $S = -4$. B. $S = -1$.
 C. $S = 4$. D. $S = 3$.
- Câu 7.** Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n$.
- A. $P = 5$. B. $P = 6$.
 C. $P = 30$. D. $P = 360$.
- Câu 8.** Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0$?
- A. 1. B. 2.
 C. 3. D. Vô số.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển thành đa thức của $(2 - 3x)^{10}$?

A. $C_{10}^6 \cdot 2^6 \cdot (-3)^4$.

B. $C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot (-3)^6$.

C. $-C_{10}^4 \cdot 2^6 \cdot (-3)^4$.

D. $-C_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot 3^6$.

Câu 2. Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^7$ bằng

A. 84.

B. 672.

C. 560.

D. 280.

Câu 3. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển biểu thức $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$?

A. -240.

B. 810.

C. -810.

D. 240.

Câu 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21}$?

A. $2^7 C_{21}^7$.

B. $2^8 C_{21}^8$.

C. $-2^8 C_{21}^8$.

D. $-2^7 C_{21}^7$.

Câu 5. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$?

A. 15.

B. 240.

C. -240.

D. -15.

Câu 6. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển $x^3(1 - x)^8$?

A. -28.

B. 70.

C. -56.

D. 56.

Câu 7. Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $P_n A_n^2 + 72 = 6(A_n^2 + 2P_n)$.

A. $P = 12$.

B. $P = 5$.

C. $P = 10$.

D. $P = 6$.

Câu 8. Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $7(A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1}) = 30P_x$.

A. $P = 7$.

B. $P = 4$.

C. $P = 28$.

D. $P = 14$.

Bài toán số 09. Nhị thức Newton và phương trình chứa A_n^k, C_n^k, P_n .



1) Nhị thức Newton: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \dots\dots\dots$. Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = \dots\dots\dots$

- $\dots\dots\dots$
- $\dots\dots\dots$
- $\dots\dots\dots$

2) Giải phương trình chứa A_n^k, C_n^k, P_n .

• Học sinh cần nhớ công thức:

+ Hoán vị: $P_n = n! = \dots\dots\dots$

+ Chỉnh hợp: $A_n^k = \dots\dots\dots$

+ Tổ hợp: $C_n^k = \dots\dots\dots$

Điều kiện: $\begin{cases} k \geq 0 \\ n \geq k \\ k, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

• Nguyên tắc giải: $\dots\dots\dots$

Học sinh tham khảo kỹ cột bên trái và làm lại cột bên phải

1. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$.

Giải. Với $a = 2x, b = \frac{-1}{x^2}, n = 6$, ta có:

$$T_{k+1} = C_6^k \cdot (2x)^{6-k} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)^k = C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot x^{6-k} \cdot \frac{(-1)^k}{x^{2k}}$$

$$= C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot \frac{x^{6-k}}{x^{2k}} = C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{6-3k}$$

Số hạng không chứa $x \Rightarrow 6 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Do đó số hạng cần tìm là $C_6^2 \cdot 2^{6-2} \cdot (-1)^2 = 240$.

1. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển đa thức $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10}$.

- $\dots\dots\dots$

2. Giải phương trình: $A_n^3 + 2C_n^2 = 16n$ (*)

Điều kiện: $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 16n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 16n$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + n(n-1) = 16n$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 2n^2 - 15n = 0 \Rightarrow n = 5.$$

2. Giải phương trình: $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$.

- $\dots\dots\dots$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Hệ số của x^4 trong khai triển $(2x + 1)^{10}$ thành đa thức là

- A. $2^6 A_{10}^4$.
- B. $2^6 C_{10}^4$.
- C. $2^4 C_{10}^6$.
- D. $2^4 A_{10}^6$.

Câu 2. Hệ số $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$ là

- A. 5005.
- B. 3003.
- C. 4004.
- D. 58690.

Câu 3. Tìm số hạng thứ sáu trong khai triển $(3x^2 - y)^{10}$?

- A. $-61236x^{10}y^5$.
- B. $-61236x^7y^5$.
- C. $61236x^{10}y^5$.
- D. $17010x^8y^6$.

Câu 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21}$?

- A. $16C_{21}^4$.
- B. $-16C_{21}^4$.
- C. $8C_{21}^3x^{12}$.
- D. $-8C_{21}^3$.

Câu 5. Trong khai triển nhị thức $\left(x + \frac{8}{x^3}\right)^8$, số hạng không chứa x là

- A. 1800.
- B. 1729.
- C. 1792.
- D. 1700.

Câu 6. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^9$?

- A. 64.
- B. $\frac{21}{16}$.
- C. 84.
- D. $\frac{27}{16}$.

Câu 7. Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

- A. $S = 2$.
- B. $S = 7$.
- C. $S = 9$.
- D. $S = 14$.

Câu 8. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. Vô số.

Bài toán số 10. Xác suất



Bài toán: Cho Chọn Tính xác suất sao cho ?

————> Giải bài toán trước chữ “Tính xác suất” (hay xác suất) là tìm được không gian mẫu $n(\Omega)$.

————> Giải bài toán sau chữ “Tính xác suất” (hay xác suất) là tìm được số phần tử của biến cố $n(A)$.

————> Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ —————> Chọn đáp án.

Học sinh tham khảo kỹ cột bên trái và làm lại cột bên phải

<p>1. Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Tính xác suất để lấy được 3 quả màu xanh ?</p> <p>Giải. Chọn 3 quả bóng trong 12 quả bóng, suy ra số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_{12}^3$.</p> <p>Gọi A là biến cố: “lấy được 3 quả màu xanh”. Chọn 3 quả màu xanh trong 7 quả màu xanh, suy ra số phần tử của A là $n(A) = C_7^3$.</p> <p>Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{44}$.</p>	<p>1. Từ một hộp chứa 10 viên bi gồm 6 viên bi màu xanh và 4 viên bi màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Tính xác suất để lấy được 3 bi màu xanh ?</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
<p>2. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh. Tính xác suất sao cho 2 học sinh được chọn có ít nhất một nữ ?</p> <p>Giải. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh trong 10 học sinh, suy ra số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_{10}^2 = 45$.</p> <p>Gọi A là biến cố: “2 người được chọn có ít nhất một người nữ”.</p> <p>TH 1. Chọn 1 nữ + 1 nam có $C_3^1.C_7^1$ cách.</p> <p>TH 2. Chọn 2 nữ có C_3^2 cách.</p> <p>Suy ra: $n(A) = C_3^1.C_7^1 + C_3^2 = 24$.</p> <p>$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.</p>	<p>2. Một tổ học sinh có 8 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh. Tính xác suất sao cho 2 học sinh được chọn có ít nhất một nữ ?</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
<p>3. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số gồm 17 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để chọn được hai số chẵn ?</p> <p>Giải. Chọn 2 số trong 17 số $\Rightarrow n(\Omega) = C_{17}^2$.</p> <p>Từ 1 \rightarrow 17 có 8 số chẵn. Chọn 2 số chẵn trong 8 số chẵn $\Rightarrow n(A) = C_8^2$.</p> <p>Xác suất cần tìm $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_8^2}{C_{17}^2} = \frac{7}{34}$.</p>	<p>3. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số gồm 19 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để chọn được hai số lẻ ?</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng

- A. $\frac{5}{22}$. B. $\frac{6}{11}$.
 C. $\frac{5}{11}$. D. $\frac{8}{11}$.

Câu 2. Trong hộp có 10 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong hộp đó. Xác suất sao cho 2 viên bi lấy ra khác màu bằng

- A. $\frac{21}{136}$. B. $\frac{35}{68}$.
 C. $\frac{3}{10}$. D. $\frac{21}{40}$.

Câu 3. Một hộp chứa 16 viên bi trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để lấy được ít nhất 1 viên bi xanh bằng

- A. $\frac{53}{80}$. B. $\frac{3}{14}$.
 C. $\frac{11}{14}$. D. $\frac{27}{80}$.

Câu 4. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 người. Xác suất sao cho 2 người được chọn có ít nhất 1 người nữ bằng

- A. $\frac{12}{15}$. B. $\frac{7}{15}$.
 C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{8}{15}$.

Câu 5. Đội văn nghệ của một lớp có 5 bạn nam và 7 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn tham gia biểu diễn văn nghệ. Tính xác suất để 5 bạn được chọn có đủ nam, nữ và số bạn nam lớn hơn 2.

- A. $\frac{547}{792}$. B. $\frac{245}{792}$.
 C. $\frac{210}{792}$. D. $\frac{582}{792}$.

Câu 6. Sau buổi hội nghị, 10 thành viên ban tổ chức đứng thành một hàng ngang để chụp hình. Biết rằng có 3 nữ. Tính xác suất để 3 nữ đó luôn cạnh nhau ?

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{15}$.
 C. $\frac{3}{25}$. D. $\frac{2}{25}$.

Câu 7. Gọi S là tập các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được tạo từ tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn ?

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{5}$.
 C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

Bài toán số 10. Xác suất



- Câu 1.** Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ ba màu và số bi đỏ bằng số bi vàng
- A. $\frac{313}{408}$. B. $\frac{95}{408}$.
 C. $\frac{5}{102}$. D. $\frac{25}{136}$.
- Câu 2.** Một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó 4 phế phẩm. Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm ?
- A. $\frac{91}{323}$. B. $\frac{637}{969}$.
 C. $\frac{7}{9}$. D. $\frac{91}{285}$.
- Câu 3.** Một đoàn đại biểu gồm 5 người được chọn ra từ một tổ gồm 8 nam và 7 nữ để tham dự hội nghị. Xác suất để chọn được đoàn đại biểu có đúng 2 người nữ là
- A. $\frac{56}{143}$. B. $\frac{140}{429}$.
 C. $\frac{1}{143}$. D. $\frac{28}{715}$.
- Câu 4.** Có 3 học sinh lớp A, 5 học sinh lớp B và 7 học sinh lớp C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh lập thành một đội. Tính xác suất để tất cả học sinh lớp A đều được chọn ?
- A. $\frac{12}{91}$. B. $\frac{2}{91}$.
 C. $\frac{5}{13}$. D. $\frac{7}{13}$.
- Câu 5.** Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 17 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số chẵn bằng
- A. $\frac{7}{34}$. B. $\frac{9}{34}$.
 C. $\frac{9}{17}$. D. $\frac{8}{17}$.
- Câu 6.** Một hộp chứa 7 quả cầu xanh, 5 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 quả. Xác suất để 3 quả được chọn có ít nhất 2 quả xanh là
- A. $\frac{7}{44}$. B. $\frac{4}{11}$.
 C. $\frac{7}{11}$. D. $\frac{21}{220}$.
- Câu 7.** Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 5 quyển sách lý, 6 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển sách được lấy ra có ít nhất một quyển sách toán ?
- A. $\frac{24}{91}$. B. $\frac{58}{91}$.
 C. $\frac{24}{455}$. D. $\frac{33}{91}$.

- Câu 8.** Một nhóm gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 học sinh trong nhóm đó. Xác suất để trong 3 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ bằng
- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{2}{3}$.
 C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 9.** Có 10 thẻ được đánh số 1, 2, ... 10. Bốc ngẫu nhiên 2 thẻ. Tính xác suất để tích 2 số ghi trên 2 thẻ bốc được là một số lẻ ?
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{7}{9}$.
 C. $\frac{5}{18}$. D. $\frac{2}{9}$.
- Câu 10.** Một chiếc hộp có chín thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ rồi nhân hai số ghi trên thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả nhân được là một số chẵn.
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{5}{18}$.
 C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{13}{18}$.
- Câu 11.** Hai bạn lớp A và hai bạn lớp B được xếp vào 4 ghế sắp thành hàng ngang. Xác suất sao cho các bạn cùng lớp không ngồi cạnh nhau bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$.
 C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 12.** Một hộp chứa 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Người ta lấy ngẫu nhiên một thẻ từ hộp đó. Tính xác suất để thẻ lấy được mang số lẻ và không chia hết cho 3 ?
- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{3}{10}$.
 C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{4}{15}$.
- Câu 13.** Thầy Bình đặt lên bàn 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Bạn An chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 10 tấm thẻ lấy ra có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm mang số chẵn trong đó chỉ có một tấm thẻ mang số chia hết cho 10 ?
- A. $\frac{99}{667}$. B. $\frac{8}{11}$.
 C. $\frac{3}{11}$. D. $\frac{99}{167}$.
- Câu 14.** Cho đa giác đều 20 đỉnh. Trong các tứ giác có bốn đỉnh là đỉnh của đa giác, chọn ngẫu nhiên một tứ giác. Tính xác suất để tứ giác được chọn là hình chữ nhật ?
- A. $\frac{6}{323}$. B. $\frac{3}{323}$.
 C. $\frac{15}{323}$. D. $\frac{14}{323}$.

Bài toán số 10. Xác suất

☆☆☆

- Câu 1.** Từ một hộp chứa 11 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng
- A. $\frac{4}{455}$. B. $\frac{24}{455}$.
 C. $\frac{4}{165}$. D. $\frac{33}{91}$.
- Câu 2.** Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng
- A. $\frac{5}{22}$. B. $\frac{6}{11}$.
 C. $\frac{5}{11}$. D. $\frac{8}{11}$.
- Câu 3.** Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 người. Xác suất sao cho 2 người được chọn có ít nhất 1 người nữ bằng
- A. $\frac{12}{15}$. B. $\frac{7}{15}$.
 C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{8}{15}$.
- Câu 4.** Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để trong ba quyển sách lấy ra có ít nhất một quyển là toán ?
- A. $\frac{2}{7}$. B. $\frac{3}{4}$.
 C. $\frac{37}{42}$. D. $\frac{10}{21}$.
- Câu 5.** Xếp ngẫu nhiên 2 quả cầu xanh, 2 quả cầu đỏ, 2 quả cầu trắng (các quả cầu này đôi một khác nhau) thành một hàng ngang. Tính xác suất để 2 quả cầu màu trắng không xếp cạnh nhau ?
- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$.
 C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 6.** Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, rồi cộng các số trên các bi lại với nhau. Xác suất để kết quả thu được là 1 số lẻ bằng
- A. $\frac{31}{32}$. B. $\frac{11}{32}$.
 C. $\frac{16}{33}$. D. $\frac{21}{32}$.
- Câu 7.** Cho 14 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 14. Chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 tấm thẻ này chia hết cho 3 bằng
- A. $\frac{30}{91}$. B. $\frac{61}{91}$.
 C. $\frac{31}{91}$. D. $\frac{12}{17}$.

Câu 8. Có 40 tấm thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 40. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một thẻ mang số chia hết cho 6 bằng

A. $\frac{126}{1147}$.

B. $\frac{16}{33}$.

C. $\frac{1787}{2300}$.

D. $\frac{127}{380}$.

Câu 9. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ và 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ chia hết cho 10.

A. $\frac{99}{667}$.

B. $\frac{98}{667}$.

C. $\frac{97}{667}$.

D. $\frac{96}{667}$.

Câu 10. Có 20 thẻ đựng trong 2 hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ từ 2 hộp (mỗi hộp 1 thẻ). Tính xác suất lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn ?

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 11. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\frac{11}{21}$.

B. $\frac{221}{441}$.

C. $\frac{10}{21}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 12. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\frac{13}{27}$.

B. $\frac{14}{27}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{365}{729}$.

Câu 13. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X . Tính xác suất để số được chọn có tổng các số là số lẻ ?

A. $\frac{10}{21}$.

B. $\frac{3}{18}$.

C. $\frac{11}{21}$.

D. $\frac{5}{18}$.

Câu 14. Cho tập $X = \{1; 2; 3; \dots; 53\}$ gồm 53 số tự nhiên liên tiếp. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập X . Xác suất sao cho tích hai số được chọn chia hết cho 4 bằng

A. $\frac{1}{14}$.

B. $\frac{13}{14}$.

C. $\frac{25}{53}$.

D. $\frac{26}{53}$.

Bài toán số 11. Cấp số cộng – Cấp số nhân



Cấp số cộng	Cấp số nhân
<p>1) Định nghĩa: Một dãy số được gọi là cấp số cộng khi số liền sau trừ số liền trước bằng một hằng số không đổi, hằng số không đổi đó gọi là công sai d.</p> <p>Tức có: $u_{k+1} - u_k = d$.</p>	<p>1) Định nghĩa: Một dãy số được gọi là cấp số cộng khi số liền sau chia số liền trước bằng một hằng số không đổi, hằng số không đổi đó gọi là công bội q. Tức có: $\frac{u_{k+1}}{u_k} = q$.</p>
<p>2) Tính chất: Cấp số cộng có tính chất là trung bình cộng.</p> <p>a, b, c lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \frac{a+c}{2} = b$.</p>	<p>2) Tính chất: Cấp số nhân có tính chất là trung bình nhân.</p> <p>a, b, c lập thành cấp số nhân $a.c = b^2$.</p>
<p>3) Số hạng thứ n: $u_n = u_1 + (n - 1)d$.</p>	<p>3) Số hạng thứ n: $u_n = u_1 q^{n-1}$.</p>
<p>4) Tổng: $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}[2u_1 + (n - 1)d]$.</p>	<p>4) Tổng: $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$.</p>

Học sinh tham khảo kỹ cột bên trái và làm lại cột bên phải

<p>1. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_7 = 13$. Hãy tìm:</p> <p>a) Công sai $d = ?$ Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, ta có: $u_7 = u_1 + 6d$</p> $\Leftrightarrow d = \frac{u_7 - u_1}{6} = \frac{13 - 1}{6} = 2.$ <p>b) Tìm số hạng thứ 20 của cấp số cộng đó? Ta có: $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19.2 = 39$.</p> <p>c) Tính tổng 12 số hạng đầu tiên của CSC? Ta có: $S_{12} = \frac{12}{2} \cdot [2.1 + (12 - 1).2] = 144$.</p>	<p>1. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_{10} = 29$. Hãy tìm:</p> <p>a) Công sai $d = ?$</p> <p>b) Tìm số hạng thứ 7 của cấp số cộng đó?</p> <p>c) Tìm tổng của 8 số hạng đầu tiên của CSC?</p>
<p>2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Hãy tìm:</p> <p>a) Công bội $q = ?$ Ta có: $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$.</p> <p>b) Số hạng thứ 10 của cấp số nhân đó? Ta có: $u_{10} = u_1 \cdot q^{10-1} = 2 \cdot 3^9 = 39366$.</p> <p>c) Tính tổng 20 số hạng đầu tiên của CSN? Ta có: $S_9 = u_1 \cdot \frac{1 - q^9}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 3^9}{1 - 3} = 19682$.</p>	<p>2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$. Hãy tìm:</p> <p>a) Công bội $q = ?$</p> <p>b) Số hạng thứ 8 của cấp số nhân đó?</p> <p>c) Tính tổng 12 số hạng đầu tiên của CSN?</p>

BÀI TẬP VẬN DỤNG

- Câu 1.** (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT lần 1 năm 2020) Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng
- A. 6. B. 3.
 C. 12. D. -6.
- Câu 2.** (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2019) Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị của u_4 bằng
- A. 22. B. 17.
 C. 12. D. 250.
- Câu 3.** (Đề thi TN THPT năm 2021 – Mã đề 104) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 10$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng
- A. -8. B. 8.
 C. 5. D. 1/5.
- Câu 4.** (Sở GD & ĐT Lai Châu năm 2021) Cho cấp số cộng có các số hạng lần lượt là $-4, 1, x$. Khi đó giá trị của x bằng
- A. $x = 9$. B. $x = 4$.
 C. $x = 7$. D. $x = 6$.
- Câu 5.** (Sở GD & ĐT Thái Nguyên năm 2021) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$ và $u_{20} = 60$. Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho bằng
- A. 200. B. 250.
 C. -250. D. -200.
- Câu 6.** (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2020 lần 1) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng
- A. 3. B. -4.
 C. 4. D. 1/3.
- Câu 7.** (Sở GD & ĐT Hà Tĩnh) Một cấp số nhân có công bội $q = -3$, số hạng thứ ba bằng 27. Số hạng thứ hai của cấp số nhân đã cho bằng
- A. 9. B. -9.
 C. -81. D. 81.
- Câu 8.** (Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc) Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Số hạng thứ sáu của của cấp số nhân đã cho bằng
- A. -160. B. -320.
 C. 160. D. 320.
- Câu 9.** (Sở GD & ĐT Hải Phòng) Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Giá trị của u_6 bằng
- A. 160. B. -320.
 C. -160. D. 320.
- Câu 10.** (Sở GD & ĐT Phú Thọ) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Số hạng u_4 bằng
- A. 7. B. 9.
 C. 24. D. 11.

Bài toán số 11. Cấp số cộng – Cấp số nhân



Cấp số cộng	Cấp số nhân
1) <u>Định nghĩa</u> :	1) <u>Định nghĩa</u> :
2) <u>Tính chất</u> :	2) <u>Tính chất</u> :
3) <u>Số hạng thứ n</u> :	3) <u>Số hạng thứ n</u> :
4) <u>Tổng</u> :	4) <u>Tổng</u> :

BÀI TẬP VẬN DỤNG

- Câu 1.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Số hạng u_4 bằng
- A. 7. B. 9.
 C. 24. D. 11.
- Câu 2.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 8$ và $u_5 = 17$. Công sai d bằng
- A. -3. B. -5.
 C. 3. D. 5.
- Câu 3.** Một cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 5$ và $u_3 = 9$. Khi đó u_4 bằng
- A. 12 B. 13.
 C. 36. D. 4.
- Câu 4.** Cho cấp số cộng với $u_1 = 7$ và công sai $d = 3$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng
- A. 70. B. 205.
 C. 206668. D. 29524.
- Câu 5.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$ và $u_{20} = 60$. Tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng
- A. 1125. B. 1024.
 C. 2250. D. 1215.
- Câu 6.** Xác định x để ba số thực $1 - x; x^2; 1 + x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ?
- A. $x \in \emptyset$. B. $x = \pm 2$.
 C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

- Câu 7.** Một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đó bằng
- A. -3 . B. 2 .
C. 9 . D. -2 .
- Câu 8.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Số hạng thứ 7 của cấp số nhân đó bằng
- A. -384 . B. 192 .
C. -192 . D. 384 .
- Câu 9.** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và số hạng thứ hai $u_2 = -4$. Số hạng thứ tư bằng
- A. 8 . B. -8 .
C. -16 . D. 16 .
- Câu 10.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = 4$ và công bội $q = 2$. Tổng của 9 số hạng đầu bằng
- A. 2044 . B. 1022 .
C. 4092 . D. 2046 .
- Câu 11.** Cho cấp số nhân với công bội là một số dương, biết $u_3 = 18$ và $u_5 = 162$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng
- A. 2130 . B. 672 .
C. 242 . D. 60 .
- Câu 12.** Biết ba số x^2 ; 8 ; x theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Giá trị của x bằng
- A. $x = 4$. B. $x = 5$.
C. $x = 2$. D. $x = 1$.
- Câu 13.** Cho ba số $x - 1$, $x + 2$, $x + 4$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Khi đó $2x - 1$ bằng
- A. 8 . B. -8 .
C. 20 . D. -17 .
- Câu 14.** Các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng; đồng thời, các số $x - 1$, $y + 2$, $x - 3y$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Khi đó $x + y$ bằng
- A. -8 .
B. -4 .
C. 12 .
D. 8 .
- Câu 15.** Một tòa nhà hình tháp có 30 tầng và tổng cộng có 1890 phòng, càng lên cao thì số phòng càng giảm, biết cứ 2 tầng liên tiếp thì hơn kém nhau 4 phòng. Quy ước rằng tầng trệt là tầng số 1, tiếp theo lên là tầng số 2, 3,... Hỏi tầng số 10 có bao nhiêu phòng?
- A. 55 .
B. 41 .
C. 85 .
D. 30 .

Bài toán số 11. Cấp số cộng – Cấp số nhân



Cấp số cộng	Cấp số nhân
1) <u>Định nghĩa</u> :	1) <u>Định nghĩa</u> :
2) <u>Tính chất</u> :	2) <u>Tính chất</u> :
3) <u>Số hạng thứ n</u> :	3) <u>Số hạng thứ n</u> :
4) <u>Tổng</u> :	4) <u>Tổng</u> :

BÀI TẬP VẬN DỤNG

- Câu 1.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Công sai của cấp số cộng đó bằng
- A. 2. B. -4.
 C. 4. D. 1.
- Câu 2.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 6$. Số hạng thứ 4 của cấp số cộng bằng
- A. 25. B. 13.
 C. -23. D. 19.
- Câu 3.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và công sai $d = 4$. Số hạng thứ 6 của cấp số cộng bằng
- A. -19. B. 25.
 C. -15. D. 29.
- Câu 4.** Nếu các số $4 + m, 5 + 2m, 16 + m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu ?
- A. $m = 4$. B. $m = 6$.
 C. $m = 3$. D. $m = 5$.
- Câu 5.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$ và $u_{20} = 60$. Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho bằng
- A. 200. B. 250.
 C. -250. D. -200.
- Câu 6.** Một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đó là
- A. -3. B. 2.
 C. 9. D. -2.

Câu 7. Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ thì u_5 bằng

A. $\frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

Câu 8. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_4 = 54$. Công bội của cấp số nhân bằng

A. $q = 3$.

B. $q = -3$.

C. $q = 2$.

D. $q = -2$.

Câu 9. Cấp số nhân (u_n) có công bội âm, biết $u_3 = 12$ và $u_7 = 192$. Khi đó u_{10} bằng

A. 1536.

B. -1536.

C. 3072.

D. -3072.

Câu 10. Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) có $u_4 - u_2 = 54$ và $u_5 - u_3 = 108$?

A. $u_1 = 3, q = 2$.

B. $u_1 = 9, q = 2$.

C. $u_1 = 9, q = -2$.

D. $u_1 = 3, q = -2$.

Câu 11. Cho một cấp số nhân có các số hạng đều không âm thỏa mãn $u_2 = 6$ và $u_4 = 24$. Tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

A. $3 \cdot 2^{12} - 3$.

B. $2^{12} - 1$.

C. $3 \cdot 2^{12} - 1$.

D. $3 \cdot 2^{12}$.

Câu 12. Xét các số thực dương a, b sao cho $-25, 2a, 3b$ là cấp số cộng và $2, a + 2, b - 3$ là cấp số nhân. Khi đó $a^2 + b^2 - 3ab$ bằng

A. 59.

B. 89.

C. 31.

D. 76.

Câu 13. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi tiền đặt lần trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu ?

A. Thắng 20000 đồng.

B. Hòa vốn.

C. Thua 20000 đồng.

D. Thua 40000 đồng.

Bài toán số 01. Tìm giao tuyến và tìm giao điểm

① Bài toán 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

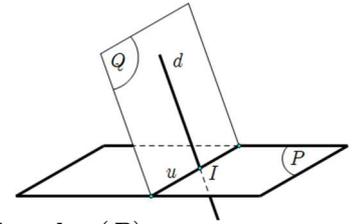
Phương pháp → Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng. Nối hai điểm chung lại đó là giao tuyến cần tìm.

② Bài toán 2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

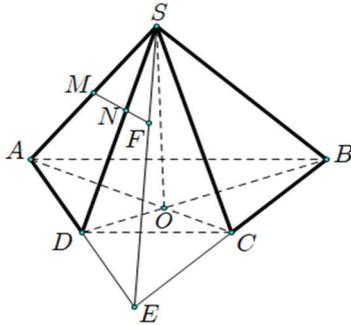
Phương pháp → Ta làm theo các bước sau:

- Bước 1. Chọn mặt phẳng phụ (Q) chứa d .
- Bước 2. Tìm giao tuyến giữa $u = (P) \cap (Q)$.

- Bước 3. Trong (Q) , gọi $I = d \cap u$. Ta có:
$$\begin{cases} I \in u, u \subset (P) \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow I = d \cap (P).$$



1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của SA và $N \in SD$.



a) Tìm giao tuyến giữa (SAC) và (SBD) .

Ta có: $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có:
$$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases}$$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

b) Tìm giao điểm của MN và (SBC) .

- Chọn mặt phẳng phụ (SAD) chứa MN .

- Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC) :

Ta có: $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (3)

Trong $(ABCD)$, gọi $E = AD \cap BC$.

Ta có:
$$\begin{cases} E \in AD, AD \subset (SAD) \Rightarrow E \in (SAD) \\ E \in BC, BC \subset (SBC) \Rightarrow E \in (SBC) \end{cases}$$

$\Rightarrow E \in (SAD) \cap (SBC)$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = SE$.

- Trong (SAD) , gọi $F = MN \cap SE$.

Ta có:
$$\begin{cases} F \in SE, SE \subset (SBC) \\ F \in MN \end{cases}$$

$\Rightarrow F = MN \cap (SBC)$.

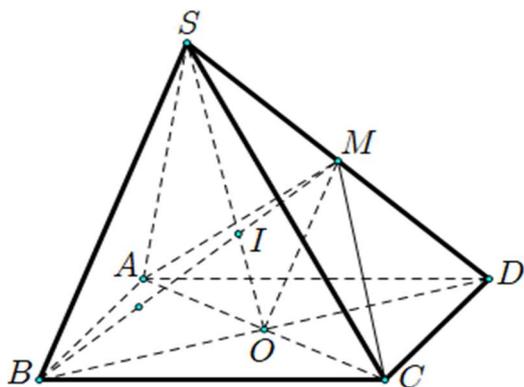
1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của SB và $N \in SC$.

a) Tìm giao tuyến giữa (SAC) và (SBD) .

b) Tìm giao điểm của MN và (SAD) .

2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi M là trung điểm của SD .

a) Tìm giao tuyến của: (AMC) và (SBD) .



Ta có: $\begin{cases} M \in (AMC) \\ M \in SD, SD \subset (SBD) \Rightarrow M \in (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in (AMC) \cap (SBD)$ (1)

Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (AMC) \Rightarrow O \in (AMC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (AMC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (AMC) \cap (SBD) = MO$.

b) Tìm $I = BM \cap (SAC)$?

- Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa BM .
- Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC) :

Ta có: $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (3)

Mà $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

- Trong (SAC) , ta có: $I = SO \cap BM$.

Khi đó $\begin{cases} I \in SO, SO \subset (SAC) \\ I \in BM \end{cases}$

Suy ra: $I = BM \cap (SAC)$.

c) Chứng minh rằng: $BI = 2IM$.

Trong ΔSBD có BM, SO là hai đường trung tuyến và $BM \cap SO = I$.

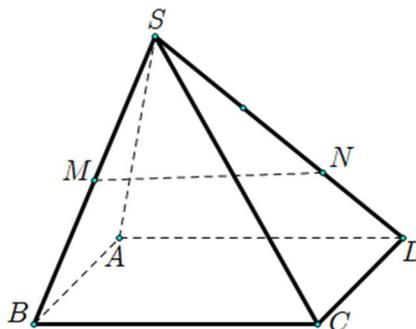
$\Rightarrow I$ là trọng tâm của ΔSBD .

Theo tính chất trọng tâm, ta có:

$BI = 2IM$ (đpcm).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Gọi M là trung điểm SB và $N \in SD$ sao cho $SN = 2ND$.

a) Tìm giao tuyến của (AMC) và (SBD) .



b) Tìm $E = MN \cap (ABCD)$?

c) Gọi $F = AE \cap SO$. Tính tỉ số $\frac{EN}{EM} = ?$

Bài toán số 01. Tìm giao tuyến và tìm giao điểm

① **Bài toán 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng**

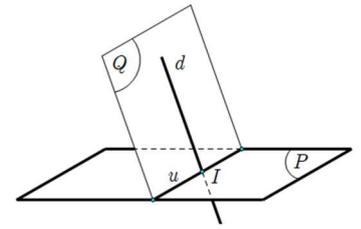
Phương pháp →

② **Bài toán 2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .**

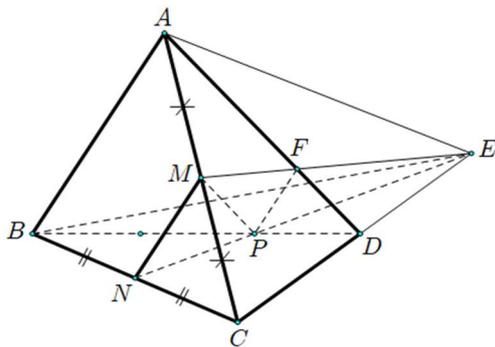
Phương pháp →

Ta làm theo các bước sau:

- Bước 1.
- Bước 2.
- Bước 3.



1) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BP = 2PD$.



a) Tìm $E = CD \cap (MNP)$?

Trong (BCD) , gọi $E = NP \cap CD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} E \in CD \\ E \in NP, NP \subset (MNP) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = CD \cap (MNP).$$

b) Chứng minh: $DE = DC$.

Trong $\triangle BCE$, ta có EN là đường trung tuyến và $BP = 2PD$ nên P là trọng tâm của $\triangle BCE$.
 $\Rightarrow D$ là trung điểm $CE \Rightarrow DE = DC$ (đpcm).

c) Tìm $F = AD \cap (MNP)$?

- Chọn mặt phẳng phụ (ACD) chứa AD .
- Tìm giao tuyến của (ACD) và (MNP) :

$$\text{Ta có: } M \in (MNP) \cap (ACD) \quad (1)$$

$$\text{Mà: } \begin{cases} E \in (MNP) \\ E \in CD, CD \subset (ACD) \Rightarrow E \in (ACD) \end{cases}$$

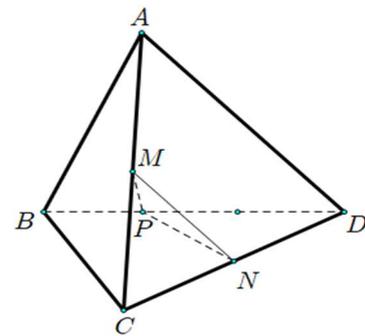
$$\Rightarrow E \in (MNP) \cap (ACD) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) } \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = ME.$$

- Trong (ACD) , gọi $F = ME \cap AD$.

$$\text{Có } \begin{cases} F \in AD \\ F \in ME \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow F = AD \cap (MNP).$$

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và CD . Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BP = 2PD$.



a) Tìm $E = IK \cap (SBD)$?

b) Chứng minh: $BC = BE$.

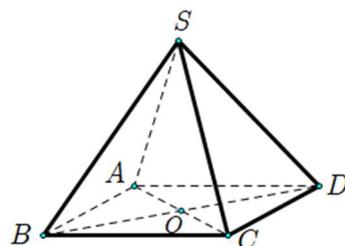
c) Tìm $F = AB \cap (MNP)$?

BÀI TẬP VẬN DỤNG

(Học sinh trình bày tự luận ngắn gọn)

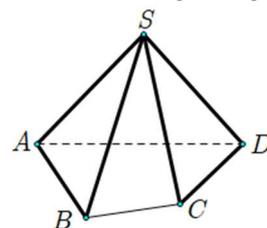
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng

- A. SA .
- B. SO .
- C. SC .
- D. SB .



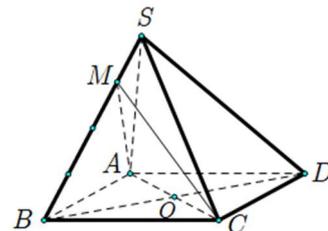
Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác không có cặp cạnh đối nào song song. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng

- A. SM với $M = SA \cap CD$.
- B. SO với $O = AC \cap BD$.
- C. SI với $I = AC \cap BD$.
- D. SE với $E = AB \cap CD$.



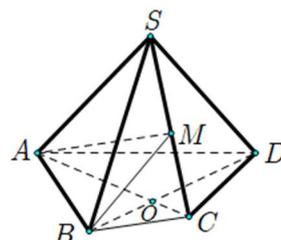
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , điểm M nằm trên cạnh SB sao cho $SB = 4SM$. Giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (ACM) nằm trên đường thẳng nào sau đây ?

- A. OM .
- B. AM .
- C. CM .
- D. AC .



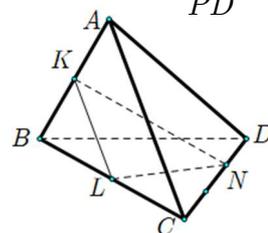
Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là

- A. Giao điểm của SD và BK với $K = SO \cap AM$.
- B. Giao điểm của SD và MK với $K = SO \cap AM$.
- C. Giao điểm của SD và AB .
- D. Giao điểm của SD và AM .



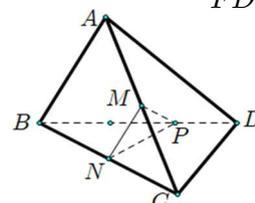
Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AB và BC, N là điểm thuộc CD sao cho $CN = 2ND$. Gọi P là giao điểm của AD với mặt phẳng (KLN) . Tỉ số $\frac{PA}{PD}$ bằng

- A. $1/2$.
- B. $2/3$.
- C. $3/2$.
- D. 2 .



Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên BD lấy điểm P sao cho $BP = 2DP$. Gọi F là giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP) . Tỉ số $\frac{FA}{FD}$ bằng

- A. $1/2$.
- B. 2 .
- C. 3 .
- D. $1/4$.



Bài toán số 01. Tìm giao tuyến và tìm giao điểm

① **Bài toán 1.** Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp →

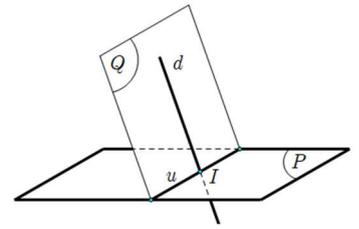
② **Bài toán 2.** Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Phương pháp →

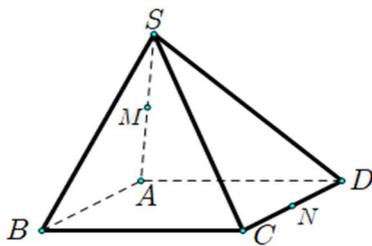
• Bước 1.

• Bước 2.

• Bước 3.



1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD .



a) Tìm $E = AD \cap (BMN)$?

.....

.....

.....

b) Tìm $F = SD \cap (BMN)$?

.....

.....

.....

c) Chứng minh: $FS = 2FD$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

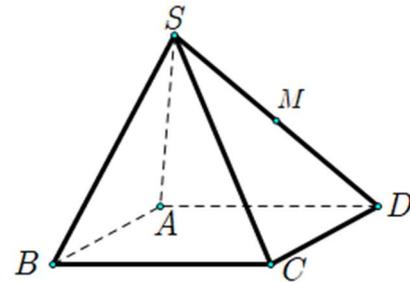
.....

.....

.....

.....

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi M là trung điểm của SD .



a) Tìm $I = SM \cap (SAC)$?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) Tìm $E = SA \cap (BCM)$?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

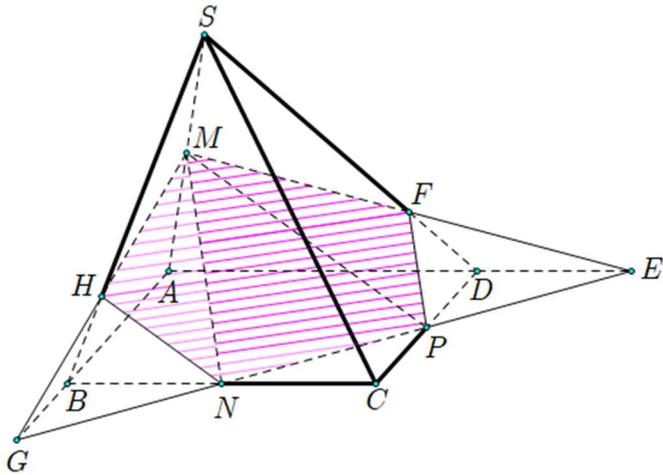
(Học sinh trình bày tự luận ngắn gọn)

- Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là
- A. Đoạn SO .
 - B. Đường thẳng SA .
 - C. Đường thẳng SO .
 - D. Điểm S .
- Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (MBC) và mặt phẳng (NAD) là đường thẳng
- A. BC .
 - B. AM .
 - C. BN .
 - D. MN .
- Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là
- A. SI với $I = AC \cap BM$.
 - B. SJ với $J = AM \cap BD$.
 - C. SP với $P = AB \cap CD$.
 - D. SO với $O = AC \cap BD$.
- Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của SC , I là giao điểm của AD và BC , J là giao điểm của AC và BD . Giao tuyến của mặt phẳng (ADM) và (SBC) là
- A. IJ .
 - B. MJ .
 - C. MI .
 - D. SI .
- Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC và BC . Lấy điểm P trên cạnh SA , H là giao điểm của AC và MN . Khi đó, K là giao điểm của SO và mặt phẳng (PMN) được xác định như sau:
- A. $K = SO \cap PH$.
 - B. $K = SO \cap NP$.
 - C. $K = SO \cap MN$.
 - D. $K = SO \cap PM$.
- Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên BD lấy điểm P sao cho $BP = 2DP$. Gọi F là giao điểm của AD với (MNP) . Tỉ số $\frac{FA}{FD}$ bằng
- A. 0,5.
 - B. 2.
 - C. 3.
 - D. 0,25.

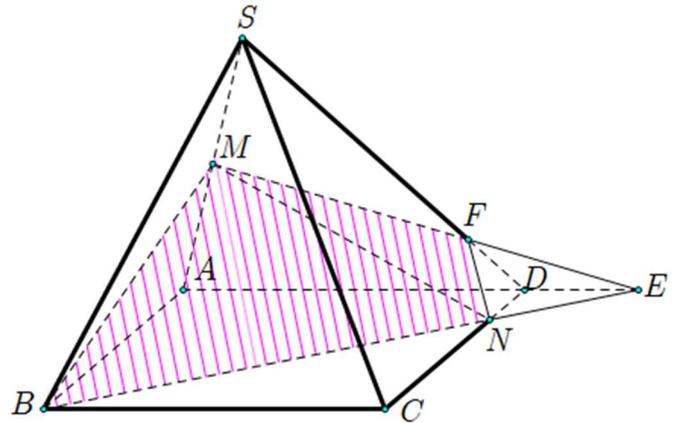
Bài toán số 02. Bài toán tìm thiết diện

Phương pháp →

- 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt trên các cạnh SA, BC, CD . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) ?



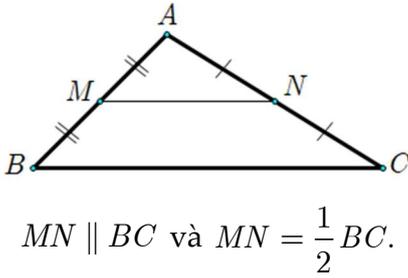
- 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tìm thiết diện của mặt phẳng (BMN) với hình chóp ?



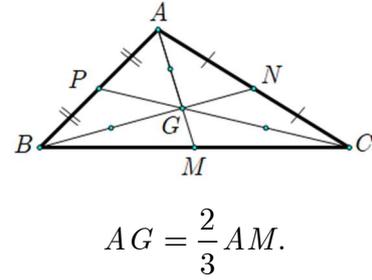
Bài toán số 4. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp → Sử dụng đường trung bình, định lý Thales, đồng dạng, để chứng minh hai đường thẳng song song (nếu chúng đồng phẳng).

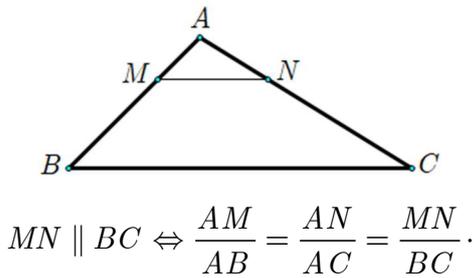
1) Đường trung bình



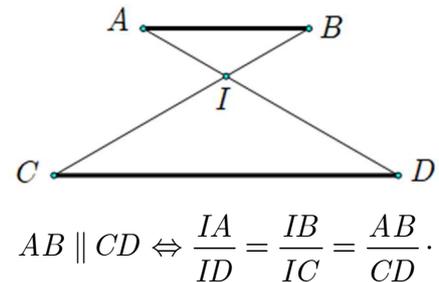
2) Trọng tâm



3) Định lý Thales

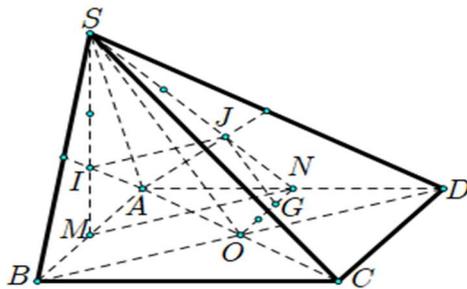


4) Đồng dạng (đồng hồ cát)



VÍ DỤ VÀ THỰC HÀNH

1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Gọi I, J, G là trọng tâm của $\Delta SAB, \Delta SAD, \Delta AOD$.



a) Chứng minh: $IJ \parallel BD$.

Do I, J lần lượt là trọng tâm $\Delta SAB, \Delta SAD$
 nên $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{Thales } \Delta SMN} IJ \parallel MN$ (1)

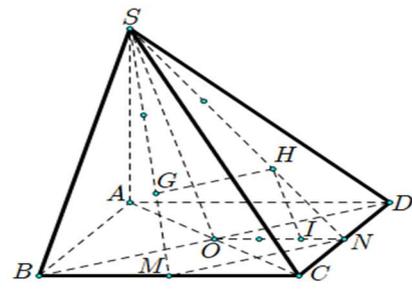
Trong ΔABD , có MN là đường trung bình
 nên $MN \parallel BD$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow IJ \parallel BD$ (đpcm).

b) Chứng minh: $GJ \parallel SO$.

Do J, G lần lượt là trọng tâm $\Delta SAD, \Delta AOD$
 nên $\frac{NJ}{NS} = \frac{NG}{NO} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{Thales } \Delta NSO} JG \parallel SO$.

2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Gọi I, J, G là trọng tâm của $\Delta SAB, \Delta SAD, \Delta AOD$.



a) Chứng minh: $GH \parallel BD$.

.....

b) Chứng minh: $HI \parallel SO$.

.....

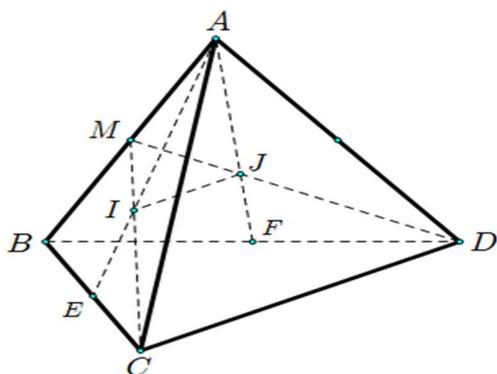
Bài toán số 4. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp →

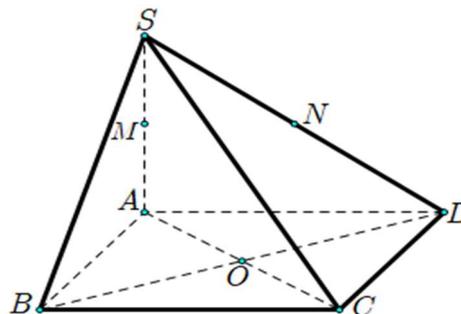
<p>1) Đường trung bình</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>2) Trọng tâm</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
<p>3) Định lí Thales</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>4) Đồng dạng (đồng hồ cát)</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>

VÍ DỤ VÀ THỰC HÀNH

1) Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng: $IJ \parallel CD$.



2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .



a) Chứng minh: $MN \parallel BC$.

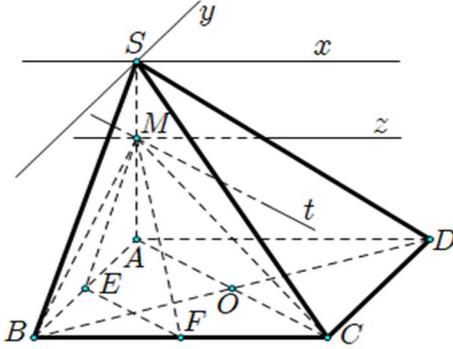
b) Chứng minh: $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

Bài toán số 5. Tìm giao tuyến song song

Phương pháp → Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) có chứa hai đường thẳng song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng, ta làm như sau:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \parallel b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ax \text{ với } Ax \parallel a \parallel b.$$

1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC . Tìm:



a) Giao tuyến giữa (SBC) và (SAD) :

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx, \text{ với } Sx \parallel BC \parallel AD.$$

b) Giao tuyến giữa (SAB) và (SCD) :

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sy, \text{ với } Sy \parallel AB \parallel CD.$$

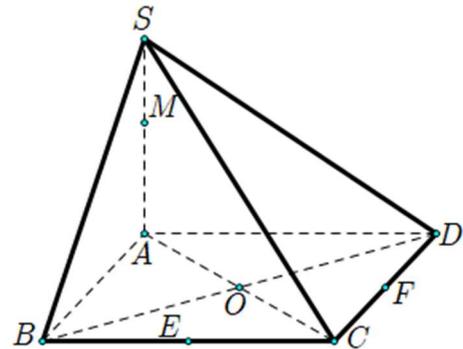
c) Giao tuyến giữa (MBC) và (SAD) :

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (MBC), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = Mz \text{ với } Mz \parallel BC \parallel AD.$$

d) Giao tuyến giữa (MEF) và (SAC) :

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \parallel AC \text{ (do } EF : \text{đtb } \Delta ABC) \\ EF \subset (MEF), AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (MEF) \cap (SAC) = Mt \text{ với } Mt \parallel EF \parallel AC.$$

2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tìm:



a) Giao tuyến giữa (SBC) và (SAD) :

.....

.....

.....

.....

b) Giao tuyến giữa (SAB) và (SCD) :

.....

.....

.....

.....

c) Giao tuyến giữa (MCD) và (SAB) :

.....

.....

.....

.....

d) Giao tuyến giữa (MEF) và (SBD) :

.....

.....

.....

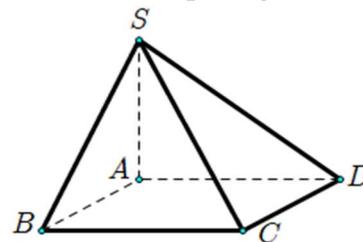
.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

(Học sinh trình bày tự luận ngắn gọn vào chỗ còn trống)

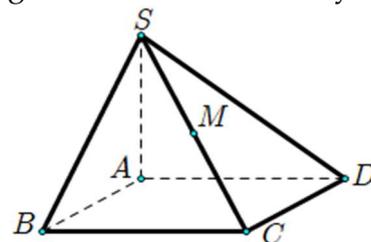
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng

- A. AC .
- B. AD .
- C. BD .
- D. DC .



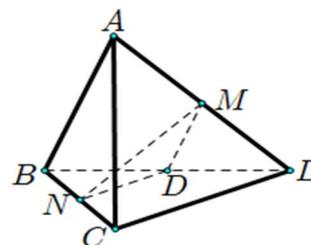
Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi M là trung điểm của SC . Giao tuyến của mặt phẳng (MAD) và (SBC) là

- A. Đường thẳng qua M và song song với BC .
- B. Đường thẳng DM .
- C. Đường thẳng AM .
- D. Đường thẳng qua M và song song với CD .



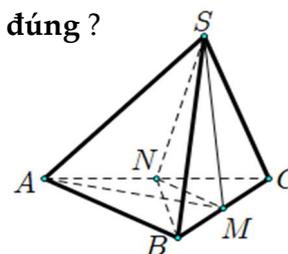
Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N, P là trung điểm của AD, BC và BD . Gọi đường thẳng d là giao tuyến của (MNP) và (ACD) . Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. d song song với AB .
- B. d song song với CD .
- C. d song song với AC .
- D. d song song với BC .



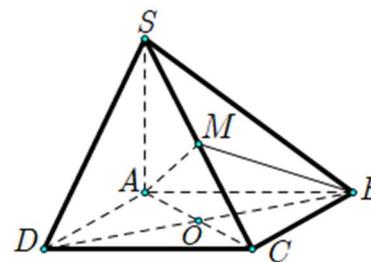
Câu 4. Trong mặt phẳng (P) cho ΔABC có hai đường trung tuyến AM và BN . Lấy điểm S nằm ngoài (P) . Gọi d là giao tuyến của (SAB) và (SMN) . Khẳng định nào **đúng** ?

- A. d song song với BN .
- B. d song song với AM .
- C. d song song với MN .
- D. d chứa điểm C .



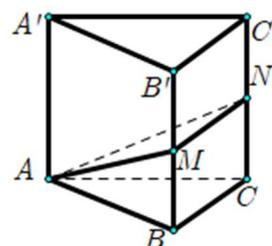
Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của cạnh SC . Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB) . Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. $N \in SO$ thỏa mãn $NO = 2SN$.
- B. N là trung điểm của SO .
- C. $N \in BM \cap SD$.
- D. N là trung điểm của SD .



Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' , Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

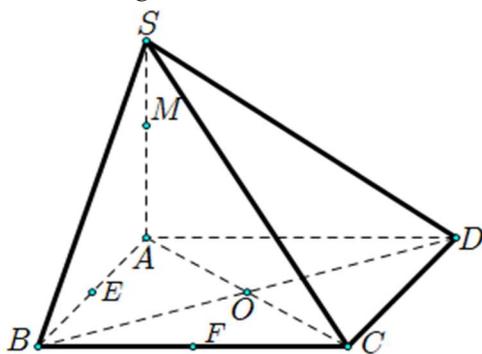
- A. $\Delta \parallel AA'$.
- B. $\Delta \parallel AB$.
- C. $\Delta \parallel AC$.
- D. $\Delta \parallel BC$.



Bài toán số 5. Tìm giao tuyến song song

Phương pháp →

1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC . Tìm:



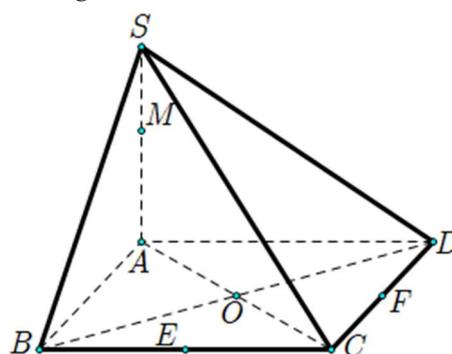
a) Giao tuyến giữa (SBC) và (SAD) :

b) Giao tuyến giữa (SAB) và (SCD) :

c) Giao tuyến giữa (MBC) và (SAD) :

d) Giao tuyến giữa (MEF) và (SAC) :

2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tìm:



a) Giao tuyến giữa (SBC) và (SAD) :

b) Giao tuyến giữa (SAB) và (SCD) :

c) Giao tuyến giữa (MCD) và (SAB) :

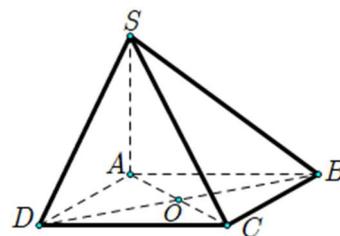
d) Giao tuyến giữa (MEF) và (SBD) :

BÀI TẬP VẬN DỤNG

(Học sinh trình bày tự luận ngắn gọn vào chỗ còn trống)

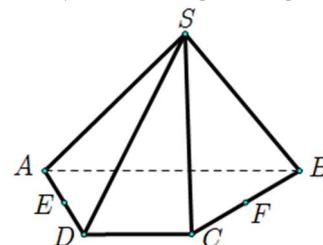
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng

- A. Qua đỉnh S và tâm O .
- B. Qua đỉnh S và song song với BC .
- C. Qua đỉnh S và song song với AB .
- D. Qua đỉnh S và song song với BD .



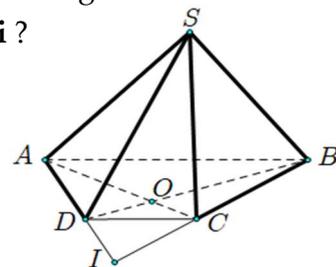
Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang với đáy AB, CD . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng

- A. Qua S và song song với AD .
- B. Qua S và song song với EF .
- C. Qua S và song song với AF .
- D. Qua S và giao điểm của cặp đường thẳng AB, SC .



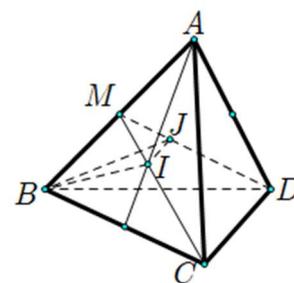
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), O là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của AD và BC . Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
- B. $(SAD) \cap (SBC) = SI$.
- C. $(SAB) \cap (SAD) = SA$.
- D. $(SAB) \cap (SCD) = SO$.



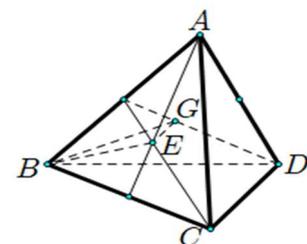
Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J là trọng tâm các tam giác ABC, ABD . Gọi M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. $(BIJ) \cap (BCD) = Bx$, với $Bx \parallel CD$.
- B. $\frac{MI}{MC} = \frac{MJ}{MD} = \frac{1}{3}$.
- C. $IJ \parallel CD$.
- D. AJ, DI là hai đường thẳng cắt nhau.



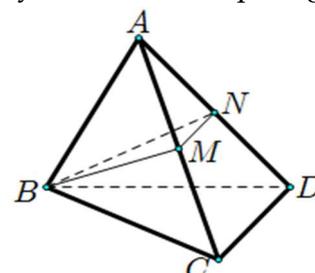
Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. GE và CD chéo nhau.
- B. $GE \parallel CD$.
- C. GE cắt AD .
- D. GE cắt CD .



Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm của AC và AD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và (BCD) là đường thẳng

- A. d qua B và song song với BC .
- B. d qua B và song song với MN .
- C. d qua B và I , với $I = MD \cap CN$.
- D. d qua B và song song với MC .

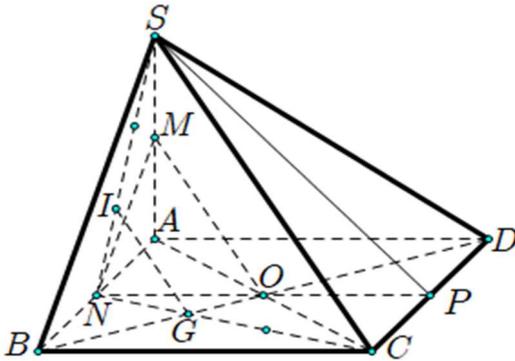


Bài toán số 6. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng

Phương pháp → Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) , ta cần chứng minh đường thẳng d song song với một đường thẳng d' nằm trong mặt phẳng (P) .

Chứng minh $d \parallel (P)$, ta cần: $\begin{cases} d \parallel d' \\ d' \subset (P), d \notin (P) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (P).$

- 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P là trung điểm của SA, AB, CD và G, I là trọng tâm các tam giác $\triangle ABC, \triangle SBC$.



- a) Chứng minh: $MN \parallel (SBC)$.

Ta có: $\begin{cases} MN \parallel BC \text{ (do } MN : \text{đtb } \triangle SAB) \\ BC \subset (SBC), MN \notin (SBC) \end{cases}$
 $\Rightarrow MN \parallel (SBC)$ (đpcm).

- b) Chứng minh: $NP \parallel (SAD)$.

Ta có: $\begin{cases} NP \parallel AD \text{ (do } NP : \text{đtb trong } ABCD) \\ AD \subset (SAD), NP \notin (SAD) \end{cases}$
 $\Rightarrow NP \parallel (SAD)$ (đpcm).

- c) Chứng minh: $MO \parallel (SCD)$.

Ta có: $\begin{cases} MO \parallel SC \text{ (do } MO : \text{đtb } \triangle SAC) \\ SC \subset (SCD), MO \notin (SCD) \end{cases}$
 $\Rightarrow MO \parallel (SCD)$ (đpcm).

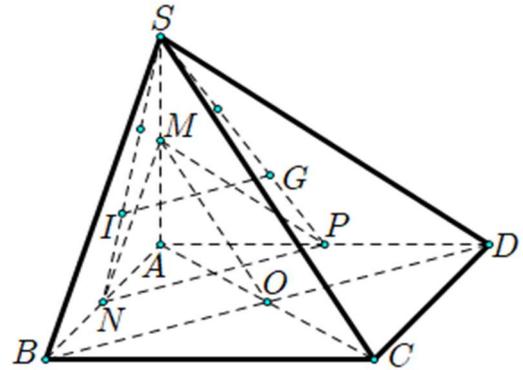
- d) Chứng minh: $IG \parallel (SBC)$.

Do G, I là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle SBC$ nên

$$\frac{NG}{NC} = \frac{NI}{NS} = \frac{1}{3} \xrightarrow[\triangle NSC]{\text{Thales}} IG \parallel SC.$$

Ta có: $\begin{cases} IG \parallel SC \\ SC \subset (SBC), IG \notin (SBC) \end{cases}$
 $\Rightarrow IG \parallel (SBC)$ (đpcm).

- 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tâm O . Gọi M, N, P là trung điểm của SA, AB, AD và G, I là trọng tâm các tam giác $\triangle SAD, \triangle SAB$.



- a) Chứng minh: $MN \parallel (SBC)$.

.....

- b) Chứng minh: $BD \parallel (MNP)$.

.....

- c) Chứng minh: $MO \parallel (SCD)$.

.....

- d) Chứng minh: $IG \parallel (SBD)$.

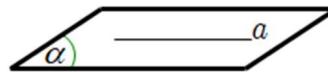
.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

(Học sinh trình bày tự luận ngắn gọn vào chỗ còn trống)

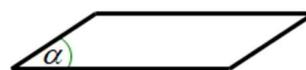
Câu 1. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

- A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
- B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a .
- C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
- D. Nếu b và a không có điểm chung thì $b \parallel (\alpha)$.



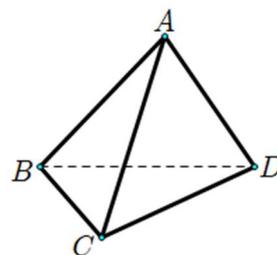
Câu 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng nhất ?

- A. a và b song song hoặc chéo nhau.
- B. a và b chéo nhau.
- C. a và b không có điểm chung.
- D. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.



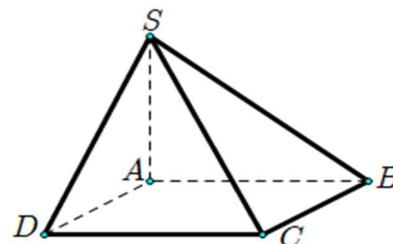
Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC, AD sao cho $AM = 2MB, AN = 2NC, AP = PD$. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

- A. $ND \parallel (ABC)$.
- B. $MP \parallel (BCD)$.
- C. $NP \parallel (BCD)$.
- D. $MN \parallel (BCD)$.



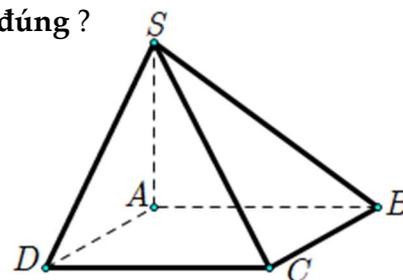
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm tam giác SAD và SBC . Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

- A. $GK \parallel (ABCD)$.
- B. $GK \parallel (SCD)$.
- C. $GK \parallel (SAC)$.
- D. $GK \parallel (SAB)$.



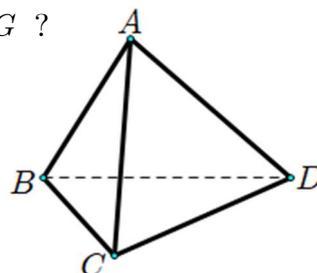
Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB và ABC . Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. $G_1G_2 \parallel (ABCD)$.
- B. $G_1G_2 \parallel (SAD)$.
- C. $G_1G_2 \parallel (SDC)$.
- D. $G_1G_2 \parallel (SAB)$.



Câu 6. Cho tứ diện $ABCD, G$ là trọng tâm của tam giác ABD và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng nào sau đây song song với đường thẳng MG ?

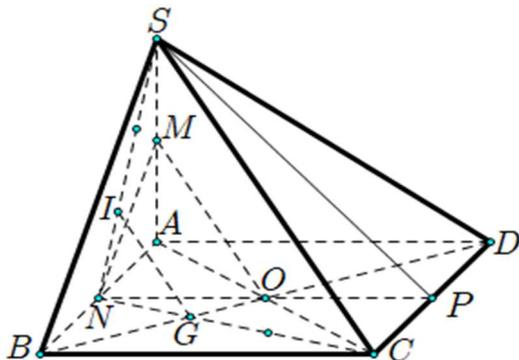
- A. (ABC) .
- B. (BCD) .
- C. (ABD) .
- D. (ACD) .



Bài toán số 6. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng

Phương pháp →

1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P là trung điểm của SA, AB, CD và G, I là trọng tâm các tam giác $\triangle ABC, \triangle SBC$.



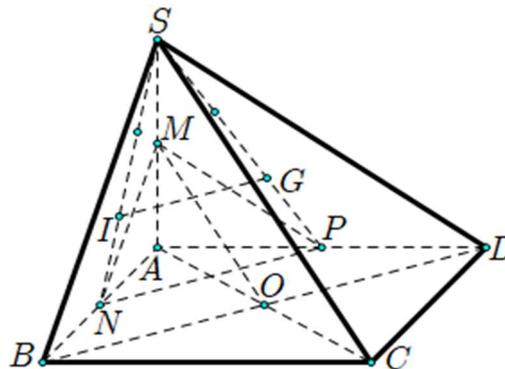
a) Chứng minh: $MO \parallel (SCD)$.

b) Chứng minh: $MN \parallel (SBC)$.

c) Chứng minh: $NP \parallel (SAD)$.

d) Chứng minh: $IG \parallel (SBC)$.

2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tâm O . Gọi M, N, P là trung điểm của SA, AB, AD và G, I là trọng tâm các tam giác $\triangle SAD, \triangle SAB$.



a) Chứng minh: $BD \parallel (MNP)$.

b) Chứng minh: $MO \parallel (SCD)$.

c) Chứng minh: $MN \parallel (SBC)$.

d) Chứng minh: $IG \parallel (SBD)$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Cho các mệnh đề:

1. $a \parallel b, b \subset (P) \Rightarrow a \parallel (P)$.
2. $a \parallel (P), a \subset (Q), \forall (Q)$ và $(Q) \cap (P) = b \Rightarrow b \parallel a$.
3. Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.
4. Nếu a, b là 2 đường thẳng chéo nhau thì có vô số mặt phẳng chứa a và song song với b .

Số mệnh đề đúng là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và AD . Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. $MN \parallel (BCD)$.
- B. $MN \parallel (ABD)$.
- C. $MN \parallel (ACD)$.
- D. $MN \parallel (ABC)$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ và G là trọng tâm tam giác ABD . Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. $MG \parallel (ACD)$.
- B. $MG \parallel (ABD)$.
- C. $MG \parallel (ABC)$.
- D. $MG \parallel (BCD)$.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD . Những khẳng định nào sau là **đúng** ?

- (1) : $MN \parallel (BCD)$. (2) : $MN \parallel (ACD)$. (3) : $MN \parallel (ABD)$.

- A. (1) và (3).
- B. (2) và (3).
- C. (1) và (2).
- D. Chỉ có (1) đúng.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. $MG \parallel (ACD)$.
- B. $MG \parallel (ABC)$.
- C. $MG \parallel (ABD)$.
- D. $MG \parallel (BCD)$.

Câu 6. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SCD . Xét các khẳng định sau:

- (1) : $G_1G_2 \parallel (SBC)$. (2) : $G_1G_2 \parallel (SAD)$.
 (3) : $G_1G_2 \parallel (SAC)$. (4) : $G_1G_2 \parallel (ABD)$.

Các khẳng định đúng là

- A. (1), (2), (4). B. (1), (2), (3). C. (1), (4). D. (3), (4).

BÀI TẬP VẬN DỤNG

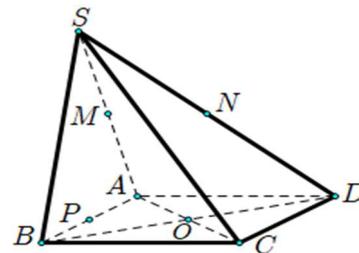
(Học sinh trình bày tự luận ngắn gọn vào chỗ còn trống)

Câu 1. Cho đường thẳng $a \subset (P)$ và đường thẳng $b \subset (Q)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

- A. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.
- B. $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.
- C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.
- D. a và b chéo nhau.

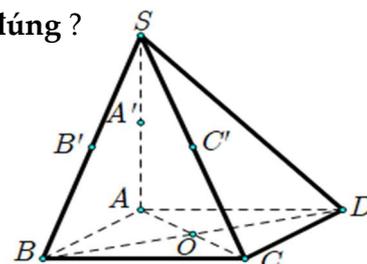
Câu 2. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

- A. $(NMP) \parallel (SBD)$.
- B. (NOM) cắt (OPM) .
- C. $(MON) \parallel (SBC)$.
- D. $(PON) \cap (MNP) = NP$.



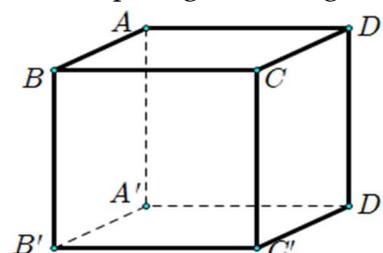
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC . Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. $A'B' \parallel (SAB)$.
- B. $(A'B'C') \parallel (ACD)$.
- C. $A'B' \parallel (SBC)$.
- D. $(BA'C') \parallel (B'AC)$.



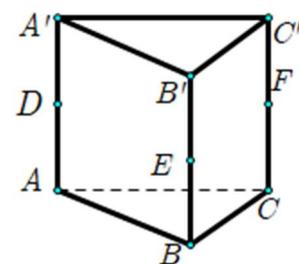
Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây ?

- A. (BCA') .
- B. (BDC') .
- C. $(A'C'C)$.
- D. (BDA') .



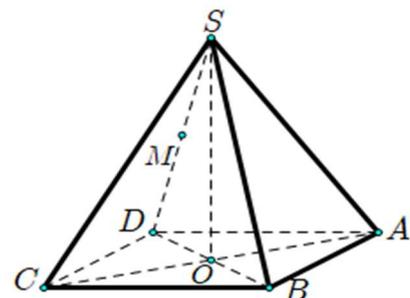
Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Lấy các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' và điểm G là trọng tâm tam giác ABC . Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. $(DB'F) \parallel (GEC)$.
- B. $(DB'F) \parallel (AEC)$.
- C. $(DB'F) \parallel (AEG)$.
- D. $(DB'F) \parallel (ABC)$.



Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = SD = 8a$ và đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = 8a$. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (ABM) bằng

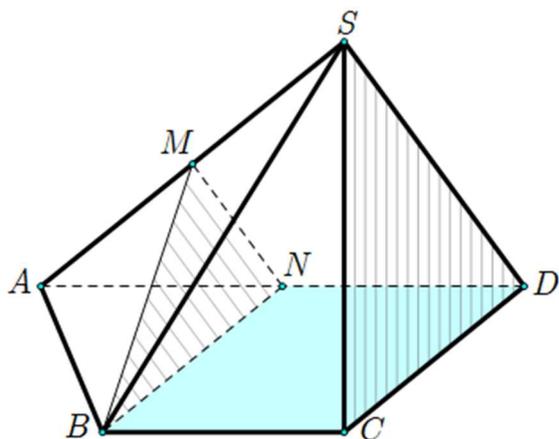
- A. $12a^2$.
- B. $6a^2\sqrt{11}$.
- C. $24a^2$.
- D. $12a^2\sqrt{11}$.



Bài toán số 6. Chứng minh mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q).

Phương pháp →

- 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.



- 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SD . Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

