BÀI 1. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

2. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

3. Trong tam giác vuông, góc vuông là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc vuông (tức là cạnh huyền) là cạnh lớn nhất.

4. Trong tam giác tù, góc tù là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. So sánh các cạnh của một tam giác như sau:

Phương pháp giải: Để so sánh các cạnh của một tam giác, ta làm

Bước 1. Xác định tam giác chứa các cạnh theo yêu cầu của đề bài.

Bước 2. Xác định các góc đối diện với các cạnh đó, tính số đo của góc chưa biết (nếu cần).

Bước 3. So sánh các góc đối diện đó.

Bước 4: Kết luận.

1A. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=80^\circ,\widehat{C}=50^\circ$.

a) Tìm cạnh lớn nhất của tam giác ABC.

b) Tam giác ABC là tam giác gì?

1B. Cho tam giác MNP có $\widehat{M}=105^\circ,\widehat{N}=35^\circ$.

a) Tìm cạnh nhỏ nhất của tam giác MNP.

b) Tam giác MNP là tam giác gì?

2A. Cho tam giác DEF có $\widehat{D}=60^\circ,\widehat{E}=50^\circ$.

a) Tính số đo của góc F.

b) So sánh các cạnh của tam giác DEF.

2B. Cho tam giác XYZ có $\widehat{Y}=47^\circ,\widehat{Z}=58^\circ$.

a) Tính số đo của góc X.

b) So sánh các cạnh của tam giác XYZ.

3A. Cho tam giác HIK cân tại H có $\widehat{H}=50^\circ$.

a) Tính số đo góc I và góc K.

b) So sánh các cạnh của tam giác HIK.

3B. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{B}=70^\circ$.

a) Tính số đo góc A và góc C.

b) So sánh các cạnh của tam giác ABC.

4A. Cho tam giác MPD cân tại M có số đo góc ngoài tại đỉnh M bằng 120°.

a) Tính số đo các góc của tam giác MPD.

b) So sánh các cạnh của tam giác MPD.

4B. Cho tam giác HMN cân tại H có số đo góc ngoài tại đỉnh H bằng 160°.

a) Tính số đo các góc của tam giác *HMN*.

b) So sánh các cạnh của tam giác HMN.

Dạng 2. So sánh các góc của một tam giác

Phương pháp giải: Để so sánh các góc của một tam giác, ta làm như sau:

Bước 1: Xác định tam giác chứa các góc theo yêu cầu của đề bài.

Bước 2: Xác định các cạnh đối diện với các góc đó, tính các cạnh chưa biết (nếu cần).

Bước 3: So sánh các cạnh đối diện đó.

Bước 4: Kết luận.

5A. Cho tam giác DEF có $DE=5\text{ cm}, DF=6\text{ cm}, EF=7\text{ cm}$. Hãy so sánh các góc của tam giác DEF.

5B. Cho tam giác MNP có $MN=5\text{ cm}, NP=12\text{ cm}, MP=16\text{ cm}$. Hãy so sánh các góc của tam giác MNP.

6A. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB=12\text{ cm}$ và chu vi tam giác ABC bằng 60 cm. Hãy so sánh các góc của tam giác ABC.

6B. Cho tam giác IKL cân tại I có $LK=17\text{ cm}$ và chu vi tam giác IKL bằng 45 cm. Hãy so sánh các góc của tam giác IKL.

7A. Cho tam giác PQR vuông tại P có $PQ=6\text{ cm}, PR=8\text{ cm}$. Hãy so sánh các góc của tam giác PQR.

7B. Cho tam giác UVX vuông tại U có $UV=21\text{ cm}, UX=29\text{ cm}$. Hãy so sánh các góc của tam giác *UVX*.

Dạng 3. So sánh hai góc không trong cùng một tam giác

Phương pháp giải: Để so sánh hai góc không trong cùng một tam giác, ta làm như sau:

Cách 1. Sử dụng cặp góc trung gian (có thể là cặp góc bù hoặc phụ với cặp góc cần so sánh).

Cách 2. Sử dụng góc thứ ba sao cho góc này bằng một trong hai góc cần so sánh và cùng nằm trong một tam giác với góc còn lại.

8A. Cho tam giác nhọn DEF có $DE = 6$ cm, $DF = 9$ cm.

a) So sánh các góc E và góc F.

b) Kẻ DK vuông góc với EF tại K. So sánh các góc EDK và FDK.

8B. Cho tam giác MNP có $MN = 16$ cm, $MP = 7$ cm.

a) So sánh các góc N và góc P.

b) So sánh hai góc ngoài tại đỉnh N và đỉnh P của tam giác MNP.

Dạng 4. So sánh hai cạnh không trong cùng một tam giác

Phương pháp giải: Để so sánh hai cạnh không trong cùng một tam giác, ta thường sử dụng một cạnh thứ ba sao cho cạnh này bằng một trong hai cạnh cần so sánh và cùng nằm trong một tam giác với cạnh còn lại.

9A. Cho tam giác MNP, biết $\widehat{M} + \widehat{N} = 130^\circ, \widehat{M} - \widehat{N} = 40^\circ$.

a) So sánh các cạnh của tam giác *MNP*.

b) Tia phân giác của góc M cắt NP ở D. So sánh độ dài các đoạn thẳng ND và PD.

9B. Cho tam giác DEF, biết $\widehat{D} : \widehat{E} : \widehat{F} = 1:2:3$.

a) So sánh các cạnh của tam giác DEF.

b) Tia phân giác của góc D cắt EF ở M. So sánh độ dài các đoạn thẳng EM và FM.

10A. Cho tam giác ABC có góc B nhọn và $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC ở M. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $AB = AN$

a) Chứng minh rằng $BM = MN$.

b) So sánh BM và MC.

10B. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC > AB$. Tia phân giác của góc B cắt cạnh AC ở D. Kẻ DE vuông góc với BC tại E.

a) Chứng minh rằng $AD = DE$.

b) So sánh AD và DC.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

11. Cho tam giác ABC cân tại A có chu vi bằng 20 cm, cạnh $BC = 8$ cm. So sánh các góc của tam giác ABC.

12. Cho tam giác DEF, biết $\widehat{D} : \widehat{E} : \widehat{F} = 5:7:3$. Hãy so sánh các cạnh của tam giác DEF.

13. Cho tam giác MNP vuông tại M, lấy điểm E trên cạnh MP.

a) So sánh NM và NE.

b) Chứng minh tam giác NEP là tam giác tù.

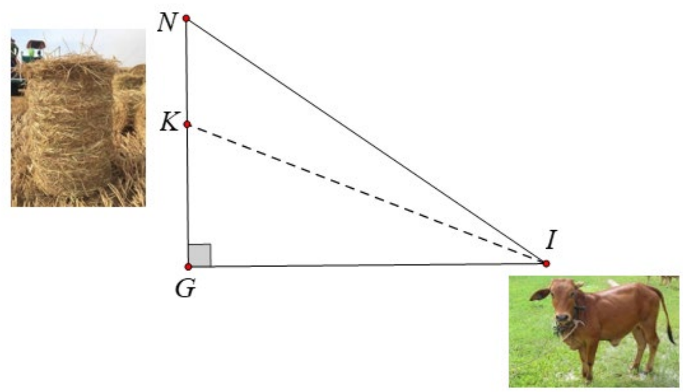
c) Chứng minh $NM < NE < NP$.

14. Cho tam giác PQR có $PQ < PR$. Gọi E là trung điểm của cạnh QR. Trên tia đối của EP lấy điểm F sao cho $PE = EF$.

a) Chứng minh tam giác PQE và FRE bằng nhau.

b) So sánh góc QPE và góc EPR.

15. Ba địa điểm G, N, I là ba đỉnh của một tam giác vuông tại G, biết $GI = 20$ m. Người ta buộc một con bò tại điểm I. Nếu đặt một bó rơm tại một điểm K nằm giữa G và N thì con bò có tới ăn được không biết dây buộc dài 20 m.



HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1A. Tam giác ABC có $\widehat{A}=80^\circ, \widehat{C}=50^\circ \Rightarrow \widehat{B}=50^\circ$.

a) Vì $\widehat{A}$ là góc lớn nhất, suy ra cạnh lớn nhất là cạnh BC.

b) Tam giác ABC là tam giác cân tại A vì $\widehat{B}=\widehat{C}=50^\circ$.

1B. Tam giác MNP có $\widehat{M}=105^\circ, \widehat{N}=35^\circ \Rightarrow \widehat{P}=40^\circ$.

a) Cạnh nhỏ nhất là cạnh MP.

b) Tam giác MNP là tam giác tù tại M vì $\widehat{M}=105^\circ$.

2A. a) Tam giác DEF có $\widehat{D}=60^\circ, \widehat{E}=50^\circ \Rightarrow \widehat{F}=70^\circ$

b) Vì $\widehat{E}<\widehat{D}<\widehat{F}$ nên $DF<FE<DE$.

2B. Tương tự bài 2A.

a) 75°. b) $YZ>XY>XZ$.

3A. a) Tam giác HIK cân tại H có $\widehat{H}=50^\circ \Rightarrow \hat{I}=\widehat{K}=\dfrac{180^\circ-50^\circ}{2}=65^\circ$.

b) Từ đó suy ra $\widehat{H}<\hat{I}=\widehat{K}$ nên $IK<HK=HI$.

3B. a) $40^\circ, 70^\circ$. b) $AB=AC>BC$.

4A. Tam giác MPD cân tại M có số đo góc ngoài đỉnh M bằng 120°

$\Rightarrow \widehat{M}=60^\circ \Rightarrow \widehat{P}=\widehat{D}=60^\circ$. Từ đó suy ra $MP=PD=MD$.

4B. a) Góc M và góc N có số đo là 20°. Suy ra, góc H có số đo là 140°.

b) $MN>HM=HN$.

5A. Tam giác DEF có $DE=5$ cm, $DF=6$ cm, $EF=7$ cm nên: $DE<DF<EF \Rightarrow \widehat{F}<\widehat{E}<\widehat{D}$.

5B. Tương tự bài 5A: $\widehat{N}>\widehat{M}>\widehat{P}$.

6A. Tam giác ABC cân tại A có $AB=12$ cm nên $AC=12$ cm và chu vi tam giác ABC bằng 60 cm

Suy ra $BC=60-(12+12)=36$ cm. Từ đó $AB=AC<BC$

$\Rightarrow \widehat{C}=\widehat{B}<\widehat{A}$ (theo quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác).

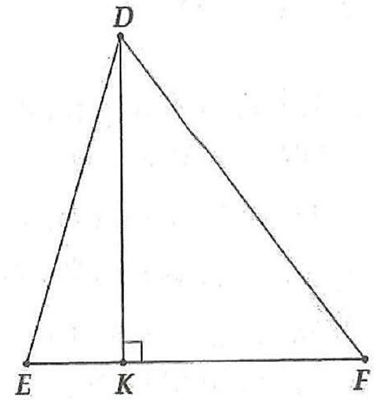
6B. Tương tự bài $\hat{I}=\widehat{K}>\hat{L}$.

7A. Tam giác PQR vuông tại P có $PQ=6$ cm, $PR=8$ cm.

Từ đó ta có $PQ < PR \Rightarrow \hat{R} < \hat{Q} < \hat{P}$ (do góc vuông là góc lớn nhất).

7B. Tương tự bài 7A. Đáp số: $\hat{X} < \hat{V} < \hat{U}$.

8A.



a) Vì $DE < DF \Rightarrow \widehat{F} < \widehat{E}$.

b) Ta có: $\widehat{EDK} + \widehat{E} = \widehat{FDK} + \widehat{F} = 90^\circ$.

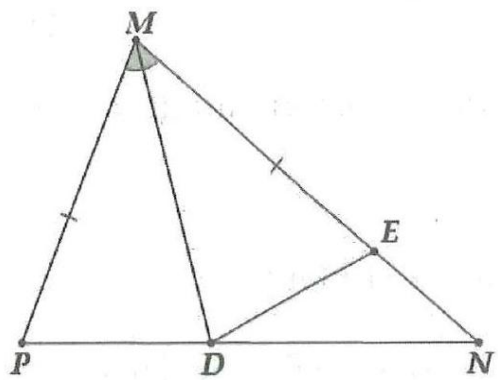
Mà $\hat{F} < \hat{E}(cmt) \Rightarrow \widehat{EDK} < \widehat{FDK}$.

8B. a) Thứ tự các góc: $\widehat{N} < \widehat{P}$.

b) Góc ngoài tại đỉnh N lớn hơn góc ngoài tại đỉnh P.

9A. a) Vì tam giác MNP có $\widehat{M} + \widehat{N} = 130^\circ, \widehat{M} - \widehat{N} = 40^\circ$ nên suy ra

$\widehat{M} = (130 + 40) : 2 = 85^\circ, \widehat{N} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 50^\circ$.



Từ đó $\hat{N} < \hat{P} < \hat{M}$ suy ra $MP < MN < NP$.

b) Trên cạnh MN lấy điểm E sao cho $MP = ME$.

Dễ dàng chứng minh được:

$\triangle MPD = \triangle MED$ (c.g.c) $\Rightarrow PD = ED; \widehat{MED} = \widehat{MPD} = 50^\circ$

Suy ra $\widehat{DEN} = 180^\circ - \widehat{MED} = 130^\circ$.

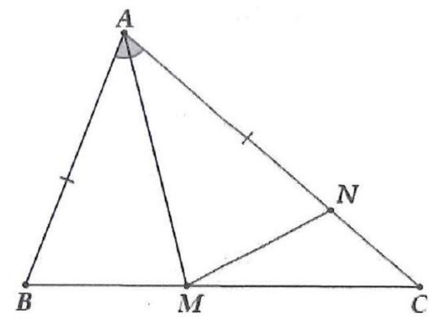
Vậy tam giác EDN là tam giác tù tại E nên $DN > DE$ hay $DN > DP$.

9B. a) Vì $\widehat{D} : \widehat{E} : \widehat{F} = 1 : 2 : 3 \Rightarrow \dfrac{\widehat{D}}{1} = \dfrac{\widehat{E}}{2} = \dfrac{\widehat{F}}{3} = \dfrac{\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F}}{1 + 2 + 3} = 30^\circ$.

Từ đó tính được các góc của tam giác và so sánh được các cạnh của tam giác DEF: $EF < DF < DE$.

b) $EM > FM$.

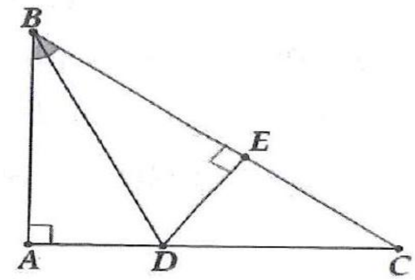
10A.



a) Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABM = \triangle ANM\left(c.g.c\right)$ nên $BM = MN$ (cạnh tương ứng).

b) Vì $\widehat{B} = \widehat{ANM} < 90^\circ$ nên góc $\widehat{MNC} > 90^\circ$. HS tự chứng minh được $BM < MC$.

10B.



a) Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABD = \triangle EBD$ (cạnh huyền góc nhọn) nên $AD = DE$.

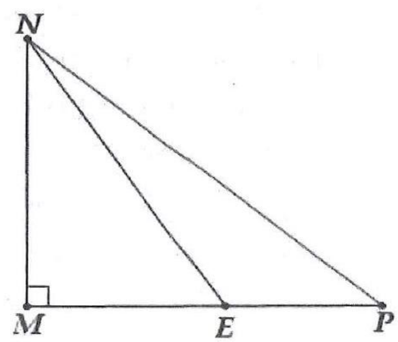
b) Dễ dàng chứng minh được $DC > DE$ nên $DC > DA$.

b) $AD < DC$.

11. Tính được độ dài các cạnh tam giác ABC, suy ra $BC > AB = AC$ nên $\widehat{A} > \widehat{C} = \widehat{B}$.

12. Tương tự bài 9B. HS tự làm.

Đáp án: $\hat{E} > \hat{D} > \hat{F}\left(84^\circ > 60^\circ > 36^\circ\right)$ nên $DF > FE > DE$.

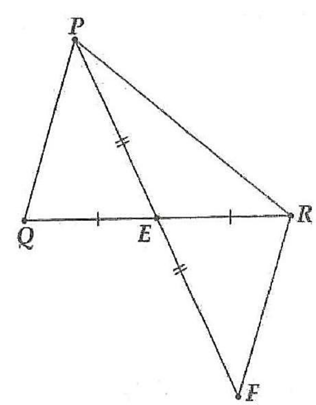


13. a) Tam giác MNE vuông tại M nên $MN < NE$ (1).

b) Có $\widehat{NEP}$ là góc ngoài tại đỉnh E của tam giác MNE nên $\widehat{NEP} = \widehat{M} + \widehat{MNE} = 90^\circ + \widehat{MNE} > 90^\circ$ nên $\triangle NEP$ là tam giác tù tại E.

c) Vì tam giác NEP là tam giác tù tại E nên $NE < NP$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $MN < NE < NP$.



14. a) Dễ dàng chứng minh được $\triangle PQE = \triangle FRE$ (c.g.c).

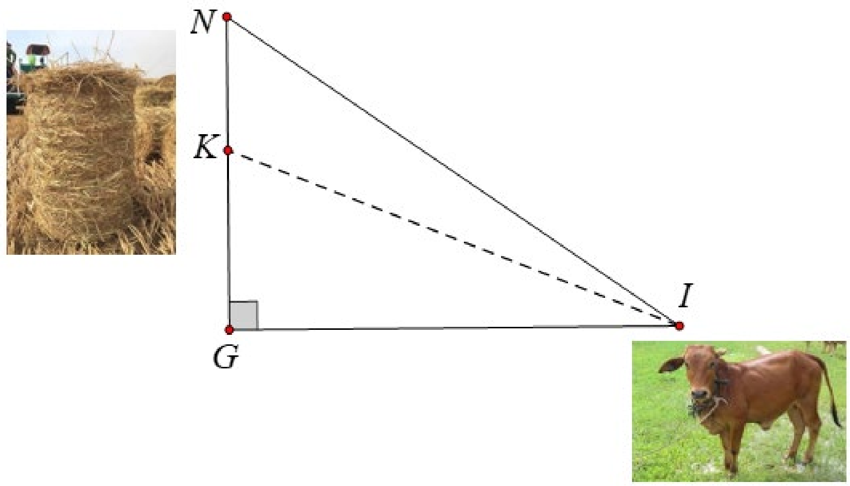
b) Từ $\triangle PQE = \triangle FRE$.

$\Rightarrow PQ = RF; \widehat{QPE} = \widehat{RFE}$

Mà $PQ < PR$ (gt) nên $RF < PR$

$\Rightarrow \widehat{EPR} < \widehat{EFR}$ hay $\widehat{QPE} > \widehat{EPR}$.

15. Vị trí đặt bó rơm là điểm K nằm trên cạnh GN. Khi đó tam giác KIG là tam giác vuông tại G nên $GI <$ IK hay $IK > 20m$. Vì vậy con Bò không thể với tới bó rơm đó.

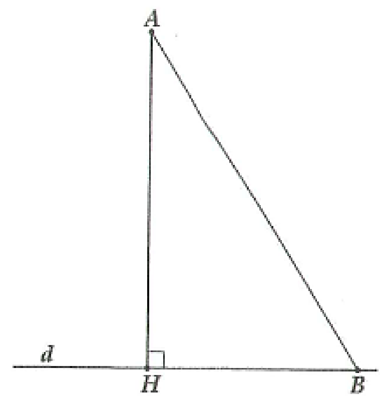


BÀI 2. QUAN HỆ ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định lý:

Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất.



Chú ý:

• Vì độ dài đoạn thẳng AH là ngắn nhất trong các đoạn thẳng kẻ từ A đến d nên độ dài đoạn thẳng AH được gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.

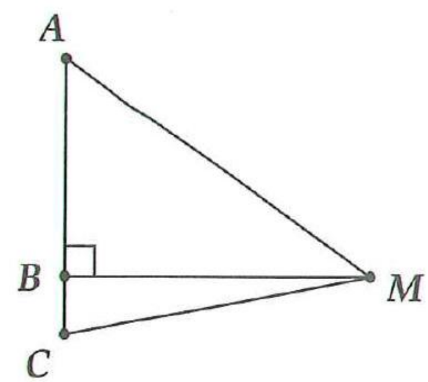
• Khi điểm A nằm trên đường thẳng d thì khoảng cách từ A đến d bằng 0.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

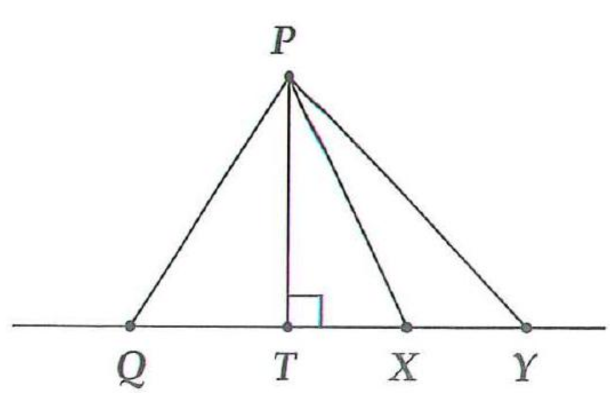
Dạng 1. Xác định các đường vuông góc, đường xiên

Phương pháp giải: Dựa vào khái niệm đường vuông góc, đường xiên.

1A. Cho hình vẽ, hãy xác định đường xiên, đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng AC.



1B. Cho hình vẽ, hãy xác định đường xiên, đường vuông góc kẻ từ điểm P đến đường thẳng QY.



2A. Vẽ hình theo diễn đạt sau:

- Vẽ đường thẳng a

- Vẽ điểm G không nằm trên đường thẳng a.

- Vẽ đường vuông góc GK từ điểm G đến đường thẳng a, K thuộc a.

- Vẽ các đường xiên GM, GN, GP.

2B. Vẽ hình theo diễn đạt sau:

- Vẽ các đường thẳng x, y không trùng nhau.

- Vẽ điểm D không nằm trên đường thẳng x cũng không nằm trên đường thẳng y.

- Vẽ đường vuông góc DA từ điểm D đến đường thẳng x, A thuộc x và đường vuông góc DB từ điểm D đến đường thẳng y, B thuộc y.

- Vẽ các đường xiên DM, DN kẻ từ D đến đường thẳng x và đường xiên DE kẻ từ D đến đường thẳng y.

Dạng 2. So sánh độ dài các đường xiên

Phương pháp giải: Vận dụng định lý quan hệ đường vuông góc và đường xiên.

3A. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên tia đối của BA lấy hai điểm M và N sao cho M nằm giữa B và N.

a) So sánh CM và CN.

b) Sắp xếp các đoạn thẳng CA, CB, CM, CN theo thứ tự độ dài giảm dần.

3B. Cho tam giác MNP vuông tại M. Trên cạnh MN lấy hai điểm A và B sao cho $MA < MB$.

a) So sánh PA và PB.

b) Sắp xếp các đoạn thẳng PN, PM, PB, PA theo thứ tự độ dài tăng dần.

4A. Cho tam giác DEF vuông tại D.Trên tia đối của các tia ED và FD lần lượt lấy điểm P và Q.

a) Chứng minh $PF < PQ$.

b) Chứng minh $EF < PQ$.

4B. Cho tam giác TAB vuông tại T. Trên cạnh AT lấy điểm U, trên cạnh TB lấy điểm V.

a) Chứng minh $AB > AV$.

b) Chứng minh $AB > UV$.

5A. Cho tam giác XYZ có $\widehat{X} > \widehat{Y}$. Kẻ ZH vuông góc với XY.

a) So sánh ZX và ZY.

b) Trong 3 đoạn thẳng $\mathrm{ZX}, \mathrm{ZH}, \mathrm{ZY}$ thì đoạn thẳng ngắn nhất là đoạn thẳng nào?

5B. Cho tam giác GHI có $\widehat{GHI} < \widehat{GIH}$. Kẻ GK vuông góc với HI.

a) So sánh GH và GI.

b) Trong 3 đoạn thẳng GK, GI, GH đoạn thẳng ngắn nhất là đoạn thẳng nào, đoạn thẳng dài nhất là đoạn nào?

6A. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên tia đối của BA lấy điểm D.

a) So sánh CB và CD.

b) Lấy điểm E trên cạnh AC. Chứng minh $BE < DC$.

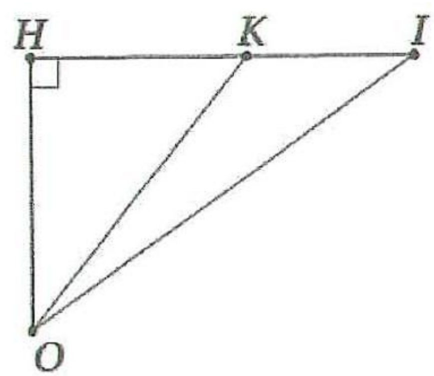
6B. Cho tam giác DEM vuông tại D. Trên cạnh MD lấy điểm F.

a) So sánh EF và EM.

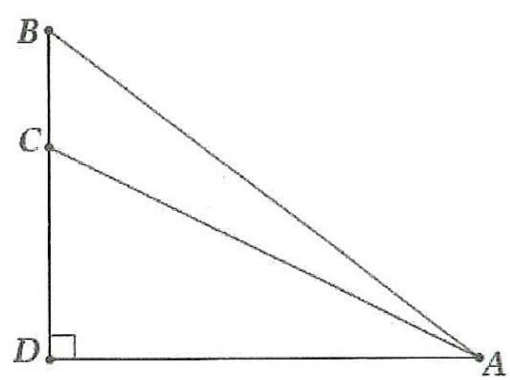
b) Lấy điểm N trên cạnh DE. Chứng minh $EM > NF$.

Dạng 3. Toán có nội dung thực tế

Phương pháp: Vận dụng định lý về quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác, định lý về đường vuông góc và đường xiên.



7A. Bạn Mai tập bơi. Đường bơi ngày thứ nhất, ngày thứ hai, ngày thứ ba của Mai lần lượt là các đoạn OH, OK, OI. Hỏi Mai có đạt mục tiêu đề ra là đường bơi ngày bơi hôm sau dài hơn ngày bơi hôm trước không (biết thời gian bơi của các ngày là như nhau)?



7B. Bạn Liên chuẩn bị cho kỳ thi chạy ngắn ở trường bằng cách tập chạy và được kết quả như sau:

Ngày thứ nhất Liên chạy được quãng đường AB.

Ngày thứ hai Liên chạy được quãng đường AC.

Ngày thứ ba Liên chạy được quãng đường AD.

Biết các quãng đường Liên chạy được trong ba ngày đều được đo trong thời gian là 15 phút. Theo em, kết quả luyện tập đó của Liên có đạt mục tiêu đề ra là quãng đường hôm sau phải dài hơn quãng đường hôm trước chưa?

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

8. Cho tam giác ABC có góc B là góc tù. Trên cạnh BC lấy điểm D. Chứng minh rằng $AB < AD < AC$.

9. Cho tam giác DEF vuông tại D. Trên cạnh DE và DF lần lượt lấy 2 điểm P và Q.

a) Chứng minh rằng $PD < PQ$.

b) Chứng minh rằng $PQ < PF$.

c) Chứng minh rằng $PF < EF$.

d) Hãy sắp xếp các đoạn FP, FE, QP và DP theo thứ tự độ dài giảm dần.

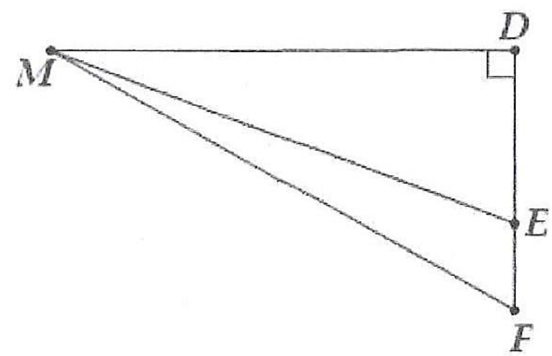
10. Cho tam giác MNP nhọn. Gọi ME là đường vuông góc kẻ từ điểm M đến cạnh NP.

a) So sánh EN và NM

b) Chứng minh rằng $NP < NM + MP$.

11. Cho tam giác HIK, vẽ HM vuông góc với IK (M thuộc đoạn IK). Gọi D là điểm nằm giữa H và M, E là điểm nằm giữa I và M, N là điểm nằm giữa M và K. Chứng minh rằng chu vi tam giác DEN nhỏ hơn chu vi tam giác HIK.

12. Nhà A - Lùng muốn đào một cái giếng khoan để dùng. Sau khi thăm dò thì vị trí D, E, F là những vị trí thuận lợi nhất để đào giếng (có mạch nước). Nếu nhà A - Lùng ở vị trí M thì nên đào giếng ở đâu để khoảng cách từ nhà đến giếng là gần nhất?



13. Cho tam giác ABC có góc A là góc tù. Kẻ BD vuông góc với AC tại D, kẻ CE vuông góc với AB tại E.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng BA, BC, BD.

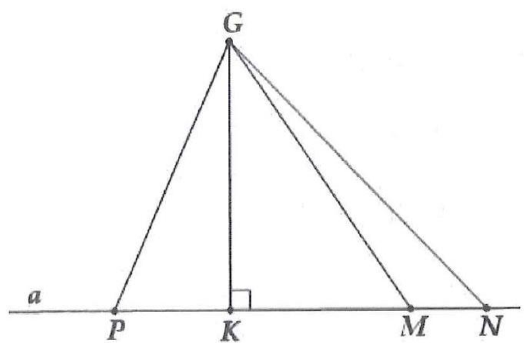
b) Chứng minh: $BC > DE$.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1A. Đường vuông góc là MB, đường xiên là MA và MC.

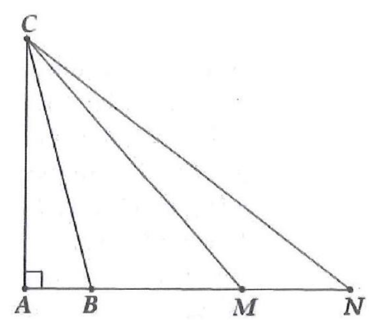
1B. Đường xiên PQ, PX, PY và đường vuông góc PT kẻ từ P đến đường thẳng XY.

2A. Hình vẽ:



2B. Tương tự bài 2A.

3A. a) Chứng minh được tam giác CMN là tam giác tù tại M nên cạnh CN là cạnh lớn nhất. Do đó $CM < CN$.



b) Ta có tam giác CAB vuông tại A nên $CA < CB$.

Chứng minh được tam giác CBM tù tại B nên $CB < CM$.

Lại có $CM < CN$.

Vậy $CN > CM > CB > CA$.

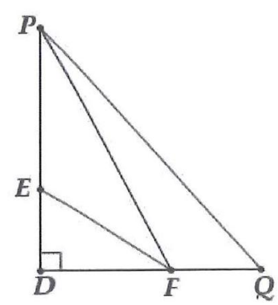
3B. a) $PA < PB$. b) $PM < PA < PB < PN$.

4B. a) Dễ dàng chứng minh được

tam giác PFQ tù tại F nên $PF < PQ$.

b) Chứng minh tương tự câu a,

được $FE < FP$. Mà $PF < PQ$ nên $EF < PQ$.

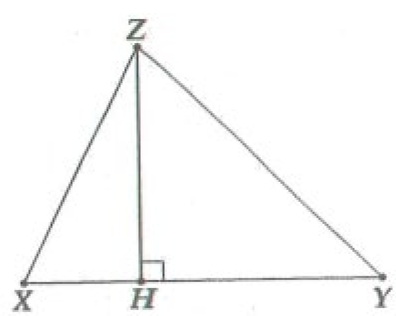


4B. Tương tự bài 4A.

5A. a) Vì $\widehat{X} > \widehat{Y}$ nên $ZY > ZX$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác).

b) Trong 3 đoạn thẳng ZX, ZH, ZY thì đoạn thẳng ngắn nhất là đường vuông góc ZH.

c) Ta dễ dàng chứng minh được ZH < ZX < ZY.



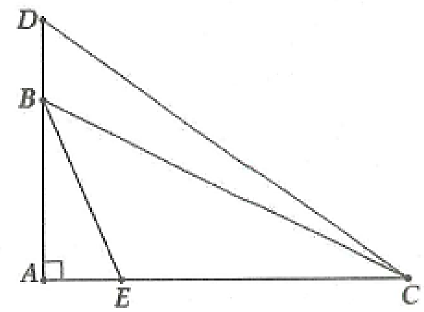
5B. a) $GH > GI$

b) GK ngắn nhất, GH dài nhất.

6A.

a) Dễ dàng chứng minh tam giác CBD là tam giác tù tại B nên $CB < CD$.

b) Dễ dàng chứng minh $BE < BC$ nên $BE < DC$.



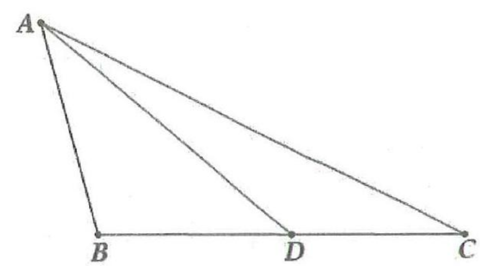
6B. Tương tự bài 6A. a) $EF < EM$. b) HS tự chứng minh.

7A. Vì $OH < OK < OI$ nên bạn Mai có đạt mục tiêu đề ra.

7B. Tương tự bài 7A. Chưa, vì $AB > AC > AD$.

8.

Dễ dàng chứng minh được $\mathrm{AB} < \mathrm{AD} < \mathrm{AC}$.



9. Tương tự bài 6A.

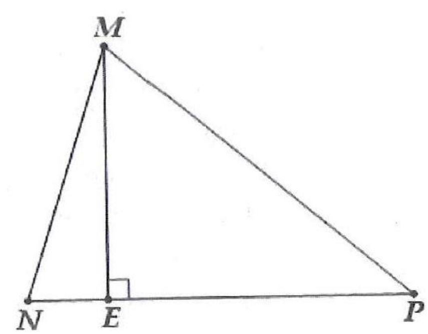
10. a) Dễ dàng chứng minh được $EN < NM$ (1)

b) Tương tự câu a, chứng minh được $EP < MP(2)$

Từ (1), (2) suy ra

$EN + EP < NM + MP$.

Hay $NP < NM + MP$.



11. Chứng minh được $DN < DK < KH$ hay $DN < HK$ (1).

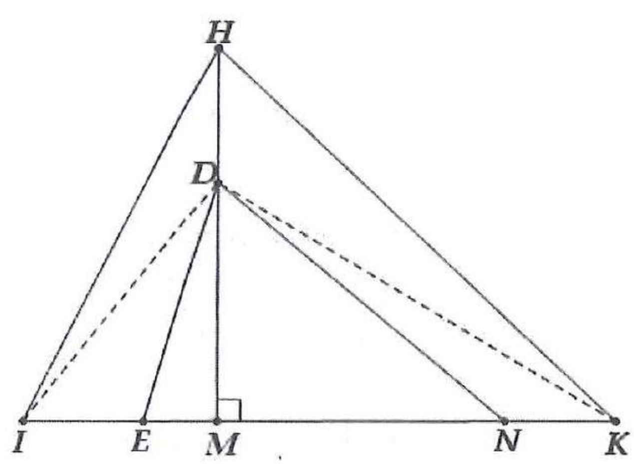
Chứng minh được $DE < DI < IH$ hay $DE < IH(2)$.

Chứng minh được: $EN < IK$ (3).

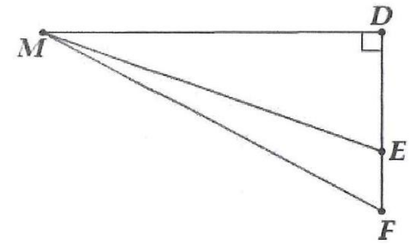
Từ (1), (2), (3) suy ra

$DN + DE + EN < HK + IH + IK$.

Hay chu vi tam giác DEN nhỏ hơn chu vi tam giác HIK.



12. Nhà A - Lùng nên đặt giếng tại vị trí D để khoảng cách từ nhà đến giếng là ngắn nhất.



13. a) Vì tam giác BAD vuông tại D (gt) nên $BD < BA(1)$.

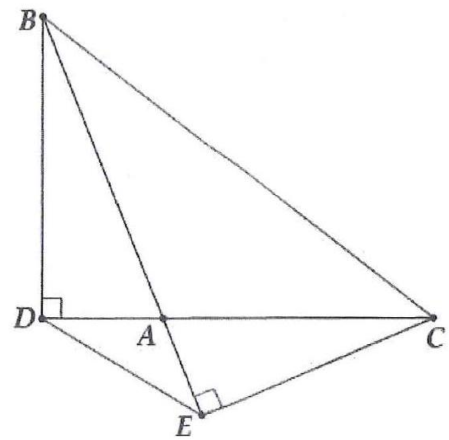
Tại có tam giác ABC tù tại A (gt) nên $BA < BC(2)$.

Từ (1), (2) suy ra $BD < BA < BC$.

b) Ta có tam giác AEC vuông tại E (gt), mà A thuộc đoạn DC nên góc DEC là góc tù.

Do đó $DE < DC$ (3) mà $DC < BC$ (vì tam giác BDC vuông tại D) (4).

Từ (3), (4) suy ra $DE < BC$.



BÀI 3. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

***Định lý*:** Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bất kỳ luôn nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại.

Tính chất: Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bất kỳ luôn lớn hơn hiệu độ dài hai cạnh còn lại.

Nhận xét: Nếu kí hiệu a,b,c là độ dài ba cạnh tuỳ ý của một tam giác thì: $b-c<a<b+c$.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Nhận biết ba độ dài có phải là ba cạnh của một tam giác hay không

Phương pháp giải: Để kiểm tra ba độ dài có phải là độ dài ba cạnh của một tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất có nhỏ hơn tổng hai độ dài còn lại hoặc độ dài nhỏ nhất có lớn hơn hiệu hai độ dài còn lại hay không.

1A. Cho các bộ ba đoạn thẳng có độ dài như sau:

a) $6\text{cm}, 8\text{cm}, 10\text{cm}$.

b) $12\text{dm}, 4\text{dm}, 19\text{dm}$.

c) $23\text{m}, 4\text{m}, 27\text{m}$.

Hỏi bộ ba nào không thể là độ dài ba cạnh của một tam giác? Vì sao? Với mỗi bộ ba còn lại, hãy vẽ một tam giác có độ dài ba cạnh được cho trong bộ ba đó.

1B. Cho các bộ ba đoạn thẳng có độ dài như sau:

a) $4\text{cm}, 5\text{cm}, 6\text{cm}$.

b) $2\text{dm}, 14\text{dm}, 16\text{dm}$.

c) $22\text{m}, 4\text{m}, 27\text{m}$.

Hỏi bộ ba nào không thể là độ dài ba cạnh của một tam giác? Vì sao? Với mỗi bộ ba còn lại, hãy vẽ một tam giác có độ dài ba cạnh được cho trong bộ ba đó.

Dạng 2. Tìm độ dài một cạnh của một tam giác khi biết độ dài của hai cạnh còn lại.

Phương pháp giải: Vận dụng điều kiện của bài toán và bất đẳng thức tam giác để giải.

2A. Độ dài hai cạnh của một tam giác bằng 9 cm và 1 cm. Tính độ dài của cạnh còn lại biết rằng độ dài đó là một số nguyên (cm). Khi đó tam giác với độ dài các cạnh đã biết là tam giác gì?

2B. Độ dài hai cạnh của một tam giác bằng 5 cm và 2 cm. Tính độ dài của cạnh còn lại biết rằng độ dài đó là một số nguyên lẻ (cm). Khi đó tam giác với độ dài các cạnh đã biết là tam giác gì?

3A. Cho tam giác ABC có $AB = 2\text{ cm}, BC = 8\text{ cm}$ và BC là cạnh lớn nhất. Hãy tìm độ dài cạnh AC biết rằng đó là một số nguyên (cm).

3B. Cho tam giác XYZ có $XY = 3\text{ cm}, YZ = 12\text{ cm}$ và YZ là cạnh lớn nhất. Hãy tìm độ dài cạnh XZ biết rằng đó là một số nguyên chẵn (cm).

4A. Cho tam giác DEF cân tại D có độ dài hai cạnh là 12 cm và 5 cm. Tìm độ dài cạnh còn lại.

4B. Cho tam giác MNP cân tại P có độ dài hai cạnh là 6 cm và 9 cm. Tìm độ dài cạnh còn lại.

Dạng 3. Tính chu vi của tam giác cân

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa của tam giác cân (hai cạnh bên bằng nhau) và bất đẳng thức của tam giác để tìm cạnh còn lại, từ đó tính chu vi của tam giác (bằng tổng độ dài ba cạnh của tam giác).

5A. Tính chu vi của tam giác cân ABC, biết:

a) $AB = 14\text{ cm}, AC = 6\text{ cm}$.

b) $AB = 5\text{ cm}, AC = 8\text{ cm}$.

5B. Tính chu vi của tam giác cân GHI biết:

a) $GH = 23\text{ cm}, HI = 11\text{ cm}$.

b) $GH = 15\text{ cm}, HI = 31\text{ cm}$.

6A. Tính chu vi của một tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó là $7,5\text{ cm}$ và $3,5\text{ cm}$.

6B. Biết chu vi của một tam giác cân bằng $55,7\text{ cm}$ và độ dài một cạnh của nó bằng $11,2\text{ cm}$. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác cân đó.

Dạng 4. Chứng minh các bất đẳng thức về độ dài.

Phương pháp giải:

- Sử dụng bất đẳng thức của một tam giác nếu kí hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh tuỳ ý của một tam giác thì: $b - c < a < b + c$.

- Sử dụng các phép biến đổi:

+ Cộng vào cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số:

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

+ Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c > b + d$$

7A. Cho tam giác BAC có $AB = x, AC = y (x > y)$. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, hãy chứng minh rằng chu vi của tam giác ABC lớn hơn $2x$ nhưng nhỏ hơn $2(x+y)$.

7B. Cho tam giác MNP có $MN = u, NP = v(u > v)$. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, hãy chứng minh rằng chu vi của tam giác MNP lớn hơn $2u$ nhưng nhỏ hơn 2 $(u+v)$.

8A. Cho tam giác MNP, trên cạnh NP lấy điểm E khác N và P.

a) So sánh ME với $MN + NE$.

b) Chứng minh $ME + EP < MN + NP$.

c) Lấy điểm F thuộc đoạn ME.

Chứng minh rằng $FM + FP < EM + EP$.

Từ đó suy ra $FM + FP < MN + NP$.

8B. Cho tam giác DEF, trên cạnh EF lấy điểm H (khác E và F).

a) So sánh $DE + EH$ với DH.

b) Chứng minh $DE + EF > DH + HF$.

c) Lấy điểm I thuộc đoạn DH.

Chứng minh rằng $HD + HF > ID + IF$.

Từ đó suy ra $DE + EF > ID + IF$.

9A. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm D (khác B và C).

a) Chứng minh $AB + BD > AD$.

b) So sánh $2AD$ với $AB + AC + BC$.

c) Chứng minh rằng AD nhỏ hơn nửa chu vi tam giác ABC.

9B. Cho tam giác XYZ. Trên cạnh YZ lấy điểm M (khác Y và Z).

a) Chứng minh $XY + YM > XM$.

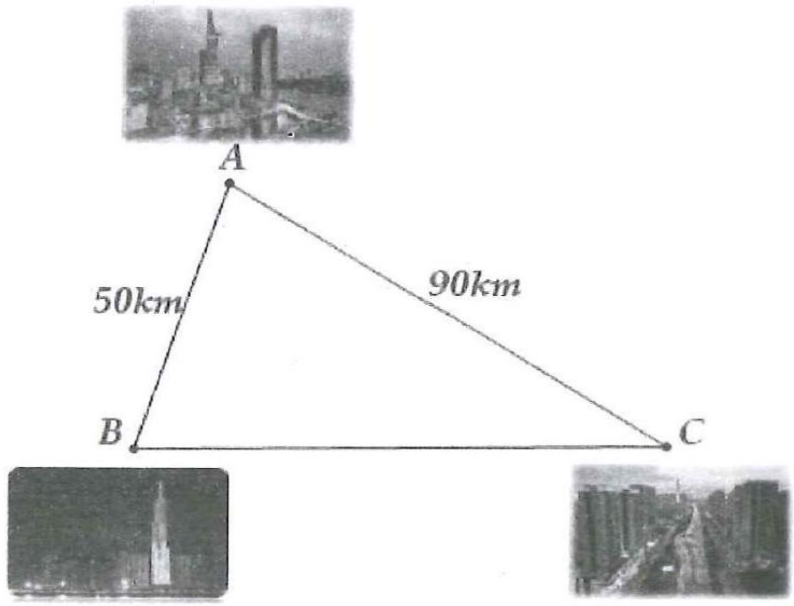
b) So sánh $XY + YZ + ZX$ với $2XM$.

c) Chứng minh rằng nửa chu vi tam giác XYZ lớn hơn XM.

Dạng 5. Bài toán có nội dung thực tế

Phương pháp giải: Vận dụng bất đẳng thức tam giác để giải.

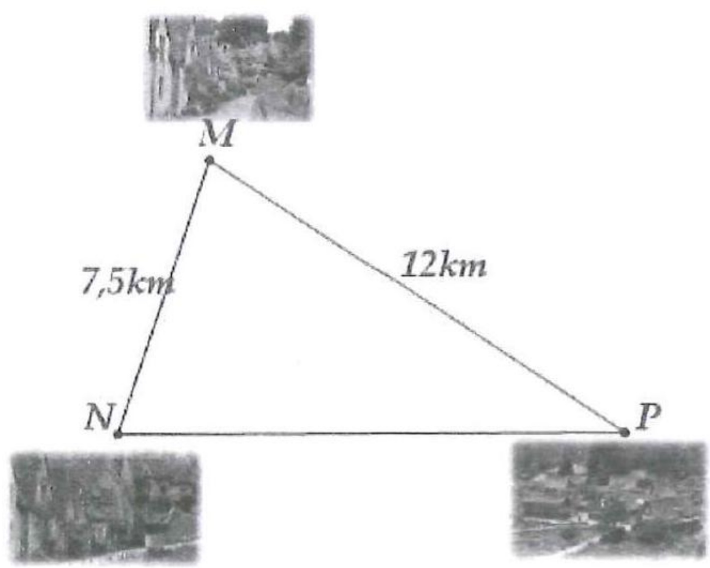
10A. Ba thành phố A, B, C trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác trong đó $AB = 50$ km, $AC = 90$ km.



a) Nếu đặt ở B máy Truyền phát tín hiệu có bán kính hoạt động bằng 50 km thì ở thành phố C có nhận được tín hiệu không? Vì sao?

b) Nếu đặt ở B máy truyền phát tín hiệu có bán kính hoạt động bằng 150 km thì ở thành phố C có nhận được tín hiệu không? Vì sao?

10B. Ba ngôi làng M,N,P trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác trong đó $MN=7,5\text{ km}, MP=12\text{ km}$.



a) Nếu đặt ở N máy phát sóng có bán kính hoạt động bằng 4 km thì ở thành phố P có nhận được tín hiệu không? Vì sao?

b) Nếu đặt ở N máy phát sóng có bán kính hoạt động bằng 15 km thì ở thành phố P có nhận được tín hiệu không? Vì sao?

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

11. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, hãy kiểm tra xem bộ ba đoạn thẳng có độ dài dưới đây có thể tạo thành một tam giác hay không?

a) $5\text{ cm}, 12\text{ cm}, 13\text{ cm}$.

b) $5\text{ cm}, 11\text{ cm}, 5\text{ cm}$.

c) $7\text{ cm}, 9\text{ cm}, 16\text{ cm}$.

12. Chu vi của một tam giác cân là 57 cm, một cạnh dài 17 cm. Tính độ dài hai cạnh còn lại của tam giác đó.

13. Cho tam giác MNP và điểm O nằm trong tam giác đó.

Chứng minh rằng $OM + OP < NM + NP$.

14. Cho tam giác DEF. Gọi I là trung điểm của cạnh EF.

Chứng minh rằng $ID < \dfrac{DE + DF}{2}$.

15. Cho tam giác GHK có $GH > GK$, tia phân giác của góc G cắt cạnh HK tại M. Gọi N là điểm nằm giữa G và M. Chứng minh $GH - GK > NH - NK$.

16. Ba trạm biến áp tạo thành tam giác có các đỉnh là A, B, C.

Biết $AB = 4\text{ km}, AC = 10\text{ km}$.

a) Tính BC biết BC là số nguyên nhỏ nhất (km).

b) Bạn Mai tính rằng tổng đường dây diện nối giữa các trạm biến áp là 21 000m. Hỏi bạn Mai tính đúng không?

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1A. a) $6\text{ cm}, 8\text{ cm}, 10\text{ cm}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác (vì $6 > 10 - 8$ hoặc $10 < 6 + 8$)

b) $12\text{dm}, 4\text{dm}, 19\text{dm}$ không là độ dài ba cạnh của một tam giác (vì $4 < 19 - 12$ hoặc $19 > 12 + 4$).

c) 23m, 4m, 27m không là độ dài ba cạnh của một tam giác (vì $23 + 4 = 27$).

1B. Tương tự bài 1A. HS tự làm.

2A. Gọi độ dài cạnh còn lại của tam giác là x, khi đó thêm bất đẳng thức tam giác ta có: $9 - 1 < x < 9 + 1$. Suy ra $x = 9$.

Vậy độ dài cạnh còn lại của tam giác là 9 cm. Khi đó tam giác là tam giác cân.

2B. Tương tự bài 2B. HS tự làm.

3A. Vì BC là cạnh lớn nhất, mà $BC = 8\text{ cm}$ nên $\text{AC} < 8\text{ cm}$.

Mặt khác $AC > BC - AB = 8 - 2 = 6\text{ cm}$.

Vậy $AC = 7\text{ cm}$.

3B. Tương tự bài **3A.** HS tự làm.

4A. Vì tam giác DEF cân tại D có độ dài hai cạnh là 12 cm và 5 cm.

Trường hợp 1: $DE = DF = 12\text{ cm}$, suy ra $EF = 5\text{ cm}$.

Khi đó $DE - DF < EF < DE + DF (12 - 12 < 5 < 12 + 12)$ thoả mãn.

Trường hợp 2: $DE = DF = 5\text{ cm}$ suy ra $EF = 12\text{ cm}$, Khi đó $EF - DE \ > DF (12 - 5 > 5)$ nên không thoả mãn.

Vậy cạnh còn lại của tam giác là 12 cm.

4B. Tương tự bài 4A. HS tự làm.

5A. a) Vì tam giác ABC cân, tương tự bài 4A tìm được $BC = 14\text{ cm}$. Khi đó chu vi tam giác ABC là $14 + 14 + 6 = 34(\text{cm})$.

b) Vì tam giác ABC cân, tương tự bài 4A tìm được $BC = 5\text{ cm}$ hoặc $BC = 8\text{ cm}$.

Trường hợp 1: $BC = 5\text{ cm}$

Chu vi tam giác ABC là: $5 + 5 + 8 = 18(\text{cm})$

Trường hợp 2: $BC = 8\text{ cm}$

Chu vi tam giác ABC là: $5 + 8 + 8 = 21(\text{cm})$.

5B. Tương tự bài 5A. HS tự làm.

6A. Tương tự bài 5A. HS tự làm.

6B. Xét trường hợp 1: Nếu cạnh bên của tam giác cân bằng 11,2cm.

Vì chu vi của tam giác cân bằng $55,7$ cm nên độ dài cạnh đáy của tam giác cân là:

$$55,7 - 11,2.2 = 33,3(\text{cm}).$$

Điều này là vô lý vì theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$11,2 + 11,2 = 22,4 < 33,4.$$

Xét trường hợp 2: Nếu cạnh đáy của tam giác cân bằng 11,2cm.

Vì chu vi của tam giác cân bằng $55,7$ cm nên độ dài cạnh bên của tam giác cân là:

$$(55,7 - 11,2) : 2 = 22,25(\text{cm})$$

Vậy độ dài 2 cạnh còn lại của tam giác cân là $22,25$ cm.

7A. Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có: $AB - AC < BC < AB + AC$

Suy ra $AB - AC + AB + AC < BC + AB + AC < AB + AC + AB + AC$.

Suy ra $2AB < AB + AC + BC < 2(AB + AC)$.

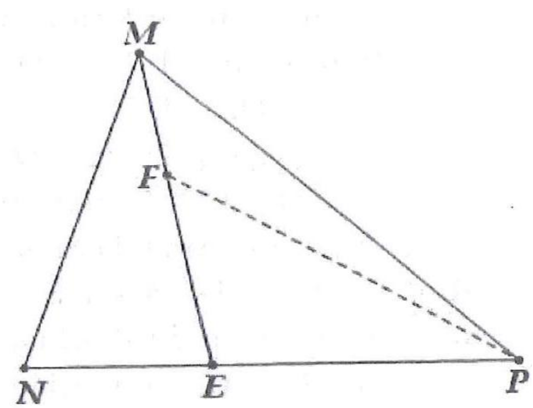
Suy ra $2x < AB + AC + BC < 2(x + y)$.

Vậy chu vi của tam giác ABC lớn hơn $2x$ nhưng nhỏ hơn $2(x + y)$.

7B. Tương tự bài 7A. HS tự làm.

8A. a) $ME < MN + NE$

(bất đẳng thức tam giác MNE).



b) Từ câu a, ta có:

$ME < MN + NE$

$\Rightarrow ME + EP < MN + NE + EP$

$\Rightarrow ME + EP < MN + NP$. (đpcm)

c) Tương tự câu a,

ta có $FP < FE + EP$

$\Rightarrow FP + MF < FE + EP + MF = ME + EP$

Mà theo câu b, ta có $ME + EP < MN + NP$ nên suy ra $FP + FM < MN + NP$.

8B. Tương tự 8A. HS tự làm

9A. a) $AB + BD > AD$ (bất đẳng thức tam giác ABD).

b) Ta có: $AC + CD > AD$ (bất đẳng thức tam giác ADC).

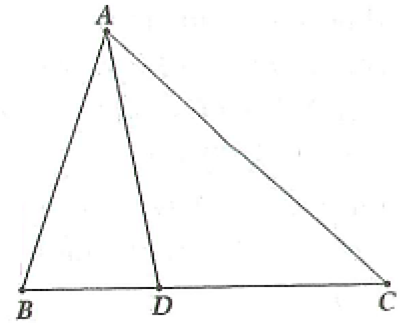
Kết hợp với câu a, ta có $AB + BD + AC + CD > AD + AD$

hay $AB + BC + AC > 2AD$.

c) Từ câu b suy ra

$$AD < \frac{AB + AC + BC}{2}$$

hay AD nhỏ hơn nửa chu vi tam giác ABC.



9B. Tương tự bài 9A. HS tự làm.

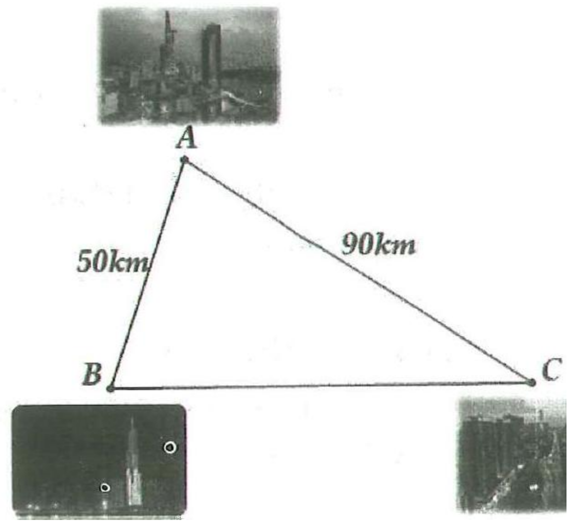
10A. a) Vì A, B, C là ba đỉnh của một tam giác nên

$AC - AB < BC < AB + AC$

hay $40 < BC < 140$. Vậy nên:

Nếu đặt ở B máy truyền phát tín hiệu có bán kính hoạt động bằng 50 km thì ở thành phố C có thể nhận được tín hiệu nếu $BC < 50$ km hoặc không nhận được nếu $BC > 50$ km.

b) Nếu đặt ở B máy truyền phát tín hiệu có bán kính hoạt động bằng 150 km thì ở thành phố C nhận được tín hiệu vì $CB < 140 \text{ km} < 150 \text{ km}$.



10B. Tương tự bài 10A. HS tự làm.

11. Tương tự bài 1A. HS tự làm.

12. Tương tự bài 2A. HS tự làm.

13. Gọi giao điểm của MO với NP là E.

Ta có: $OP < OE + EP$

(bất đẳng thức tam giác OPE)

Suy ra $OP + OM < OE + EP + OM$

hay $OP + OM < ME + EP$ (1).

Ta lại có $ME < MN + NE$

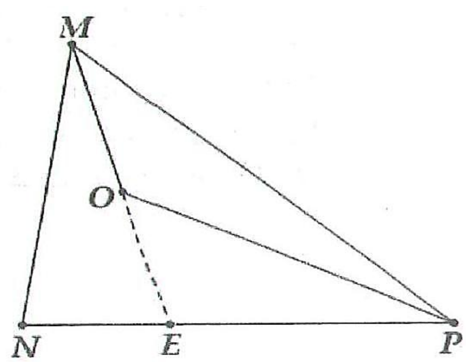
(bất đẳng thức tam giác MNE)

Suy ra $ME + EP < MN + NE + EP$

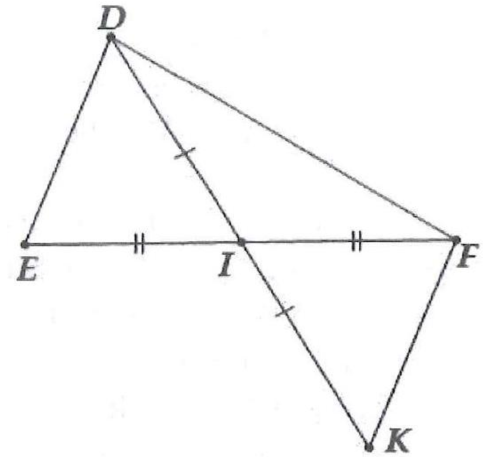
hay $ME + EP < MN + NP$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$OP + OM < MN + NP$.



14. Trên tia đối của ID lấy điểm K sao cho $ID = IK$.



Dễ dàng chứng minh được

$\Delta DIE = \Delta KIF\left(c.g.c\right)$

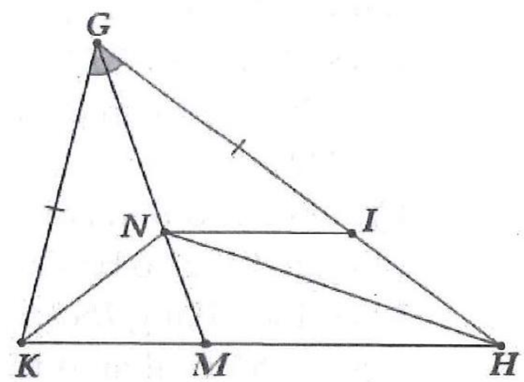
suy ra $ED = FK$.

Ta có $DK < DF + KF$

hay $2DI < DF + DE$.

Vậy $ID < \dfrac{DE + DF}{2}$.

15. Trên cạnh GH lấy điểm I sao cho $GK = GI$.



Dễ dàng chứng minh được

$\Delta GKN = \Delta GIN$ (c.g.c)

suy ra $NK = NI$.

Ta có $IH > NH - NI$

(bất đẳng thức tam giác INH).

Hay $GH - GI > NH - NI$

Suy ra $GH - GK > NH - NK$

(vì $GI = GK, NI = NK$).

16. a) Ta có $AC - AB < BC < AB + AC$

(bất đẳng thức tam giác ABC)

Hay $6\text{ km} < BC < 14\text{ km}$.

Vì BC là số nguyên nhỏ nhất nên $BC = 7\text{ km}$.

b) Chu vi tam giác ABC là $4 + 10 + 7 = 21\left(\text{km}\right) = 21000\left(\text{m}\right)$.

Vậy bạn Mai tính đúng.

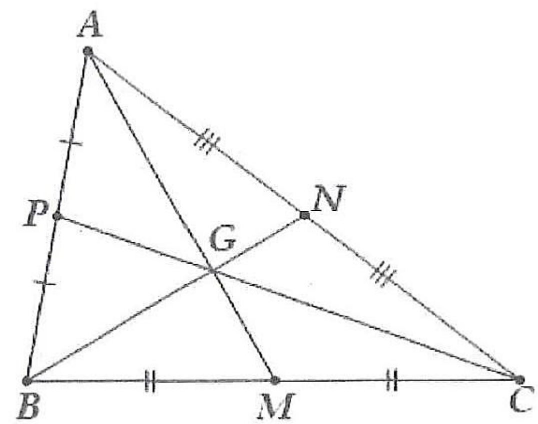
BÀI 4. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN, BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG MỘT TAM GIÁC.

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Sự đồng quy của ba đường trung tuyến trong một tam giác.

a) Định nghĩa đường trung tuyến:

• Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là ***đường trung tuyến*** (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC) của tam giác ABC.



• Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

b) Tính chất:

• Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng quy tại một điểm).

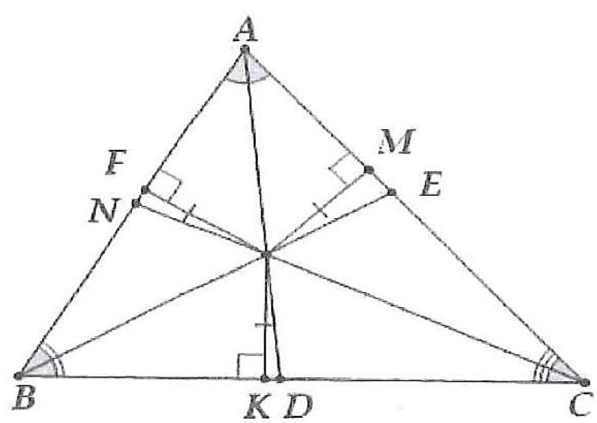
• Chú ý: Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy. Điểm đồng quy của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác.

• Trong hình vẽ trên, tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP đồng quy tại trọng tâm G, ta có: $\frac{GA}{AM} = \frac{GB}{BN} = \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}$.

2. Sự đồng quy của ba đường phân giác trong tam giác.

a) Định nghĩa đường phân giác:

• Trong tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D thì đoạn thẳng AD được gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC.



• Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

b) Tính chất:

• Ba đường phân giác của một tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

• Trên hình vẽ, tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF đồng quy tại điểm I, ta có: $IK = IM = IN$.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính tỉ số độ dài các đoạn thẳng

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất ba đường trung tuyến của tam giác.

1A. Cho hình vẽ, hãy điền vào chỗ chấm các số thích hợp để hoàn thành các đẳng thức sau.

a) $GA = \ldots AM$;

$GM = \ldots AM$;

$GM = \ldots GA$.

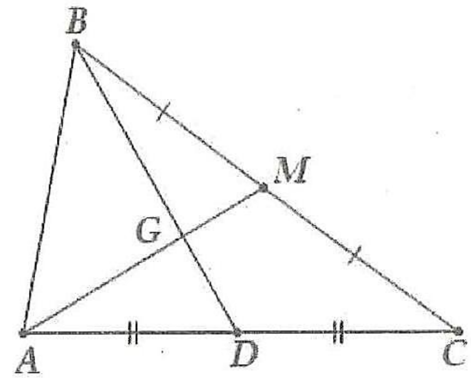
b) $GB = \ldots BD$;

$GD = \ldots BD$;

$GD = \ldots GB$.

c) $BD = \ldots BG$;

$AM = \ldots GM$.



1B. Cho hình vẽ, hãy điền vào chỗ chấm các số thích hợp để hoàn thành các đẳng thức sau.

a) $GE = \ldots EN; GN = \ldots EN$,

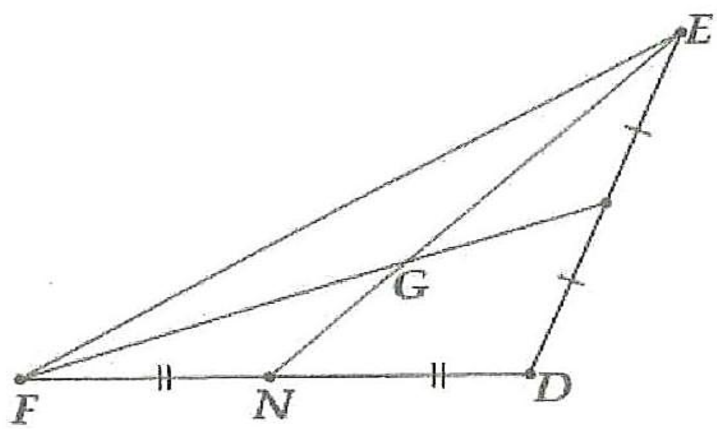
$GE = \ldots GN$

b) $GF = \ldots FM$.

$GM = \ldots FM$.

$GM = \ldots FG$.

c) $FM = \ldots FG; EN = \ldots GN$.



Dạng 2. Chứng minh mối quan hệ giữa các đoạn thẳng

Phương pháp giải: Vận dụng kiến thức về

- Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác.
- Tam giác bằng nhau.

2A. Cho tam giác DEF có ba đường trung tuyến DM, EN, FP đồng quy tại G. Trên tia đối của GD lấy điểm Q sao cho $GD = GQ$. Chứng minh rằng:

a) Các cạnh EG, GQ, QE của tam giác EGQ bằng $\frac{2}{3}$ các đường trung tuyến của tam giác DEF.

b) Các đường trung tuyến GK, EM, QH của tam giác EGQ lần lượt bằng nửa các cạnh DE, EF, FD của tam giác DEF.

2B. Cho tam giác MNP có ba đường trung tuyến MI, NK, PL đồng quy tại G. Trên tia đối của GM lấy điểm O sao cho $GO = GM$. Chứng minh rằng:

a) Các đường trung tuyến MI, NK, PL của tam giác MNP lần lượt bằng $\frac{3}{2}$ các cạnh của tam giác NGO.

b) Các cạnh MN, NP, PM của tam giác MNP lần lượt gấp hai lần các đường trung tuyến GD, NI, OE của tam giác NGO.

3A. Cho tam giác XYZ. Trên tia đối của XY lấy điểm T sao cho $XY = XT$. Trên cạnh XZ lấy điểm V sao cho $XV = \frac{1}{3}XZ$. Tia YV cắt TZ tại điểm U. Chứng minh rằng:

a) U là trung điểm của TZ.

b) XU song song với YZ.

c) $XU = \frac{1}{2}YZ$.

3B. Cho tam giác *GHI*. Trên tia đối của GH lấy điểm N sao cho $GH = GN$. Trên cạnh *GI* lấy điểm M sao cho $GI = 3GM$. Tia *HM* cắt *NI* tại điểm P. Chứng minh:

a) P là trung điểm của NI.

b) $HI = 2GP$.

c) GP song song với HI.

4A. Cho góc nhọn xAy. Từ một điểm E trên tia phân giác của góc A, kẻ các đường vuông góc EB, EC đến hai cạnh Ax, Ay.

a) So sánh EB và EC.

b) Chứng minh $AB = AC$.

4B. Cho góc mOn khác góc tù. Kẻ tia phân giác Ot của góc mOn và tia phân giác Oz của góc ngoài kề bù với góc mOn. Chứng minh:

a) Ot vuông góc với Oz.

b) Khoảng cách từ điểm A bất kỳ trên tia Oz đến hai đường tia Om và On là bằng nhau.

Dạng 3. Chứng minh một điểm là trọng tâm của một tam giác, một điểm nằm trên đường phân giác của một góc

Phương pháp giải:

- Để chứng minh một điểm là trọng tâm của một tam giác, ta có thể chứng minh theo một trong hai cách sau đây:

Cách 1. Chứng minh điểm đó là giao điểm của hai đường trung tuyến trong tam giác.

Cách 2. Chứng minh điểm đó thuộc một đường trung tuyến và thoả mãn một trong các tỉ lệ về tính chất ba đường trung tuyến trong tam giác.

- Để chứng minh một điểm thuộc đường phân giác của một góc, ta có thể chứng minh theo một trong hai cách sau đây:

Cách 1. Chứng minh đường thẳng chứa điểm đó là đường phân giác của góc.

Cách 2. Chứng minh điểm đó cách đều hai cạnh của góc.

5A. Cho tam giác DEF. Vẽ trung tuyến EM. Trên tia EM lấy hai điểm G và N sao cho $EG=\frac{2}{3}EM$ và M là trung điểm của GN. Gọi P là trung điểm của NF, GP cắt MF tại O.

Chứng minh rằng:

a) O là trọng tâm của tam giác NGF.

b) Lấy I thuộc đoạn GF sao cho $GI=\frac{1}{3}GF$. Chứng minh rằng 3 điểm E, I, P thẳng hàng.

c) $GO=\frac{1}{3}EF$.

5B. Cho tam giác MNP. Vẽ trung tuyến NQ. Trên tia NQ lấy hai điểm G và K sao cho $NQ=\frac{3}{2}GN$ và Q là trung điểm của GK. Gọi E là trung điểm của KP, GE cắt PQ tại F. Chứng minh rằng:

a) F là giao điểm các đường trung tuyến của tam giác KGP.

b) $NP=3GF$.

6A. Cho tam giác ABC có hai đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng I cách đều AB và AC.

6B. Cho tam giác GHI có hai đường phân giác GM, HN cắt nhau tại P. Chứng minh rằng P thuộc tia phân giác của góc GIH.

7A. Cho góc mAn khác góc bẹt. Trên tia Am lấy hai điểm D và E, trên tia An lấy hai điểm F và H sao cho $AD=AF, AE=AH$. Gọi K là giao điểm của DH và EF. Chứng minh rằng:

a) $EF=DH$.

b) Tam giác EKD và tam giác HKF bằng nhau.

c) AK là tia phân giác của góc mAn.

7B. Cho tam giác DEF cân tại D. Trên cạnh DE và DF lần lượt lấy hai điểm H và K sao cho

$DH = DK$. Gọi giao điểm của EK và FH là O. Chứng minh rằng:

a) $EK = FH$.

b) Tam giác HOE và tam giác KOF bằng nhau.

c) DO vuông góc với EF.

Dạng 4. Đường trung tuyến, đường phân giác trong các tam giác đặc biệt

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất của tam giác cân, tam giác vuông, tam giác đều và tính chất ba đường trung tuyến trong tam giác để giải bài tập.

8A. Cho tam giác đều ABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng $GA = GB = GC$.

8B. Cho tam giác đều DEF có O là giao điểm của hai đường trung tuyến trong tam giác. Chứng minh rằng $OD = OE = OF$.

9A. Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AD. Chứng minh rằng $AD = \frac{1}{2}BC$.

9B. Cho tam giác MNP vuông tại M. Trên cạnh NP lấy điểm E sao cho $NP = 2ME$. Chứng minh rằng ME là trung tuyến ứng với cạnh NP.

10A. Cho tam giác GHK có đường trung tuyến GM. Biết rằng $GM = \frac{1}{2}\ HK$. Chứng minh rằng tam giác GHK vuông tại G.

10B. Cho tam giác XYZ có E là trung điểm của YZ sao cho $YZ = 2XE$. Chứng minh rằng tam giác XYZ vuông tại X.

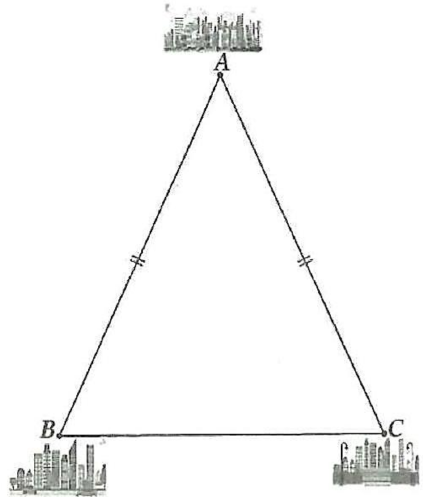
11A. Cho tam giác ABC cân tại A, có G là trọng tâm của tam giác và I là giao điểm các đường phân giác của tam giác. Chứng minh rằng ba điểm A, G, I thẳng hàng.

11B. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, đường trung tuyến AM đồng thời là đường phân giác thì tam giác ABC là tam giác cân tại A.

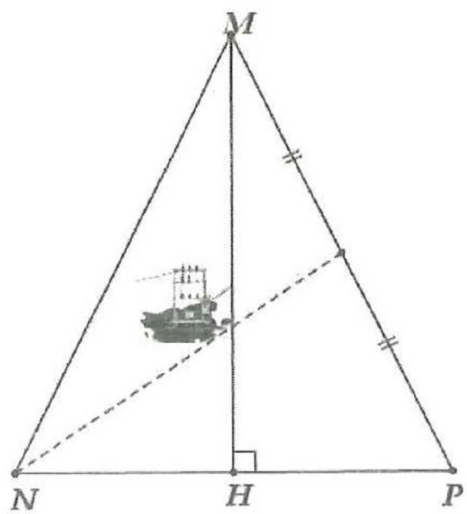
Dạng 5. Bài toán có nội dung thực tế

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất về ba đường trung tuyến, ba đường phân giác của tam giác để giải.

12. Ba thành phố A, B, C trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác cân tại A có $\widehat{A} = 50^\circ$. Người ta cần đặt một trạm phát sóng tại một điểm I sao cho khoảng cách từ trạm phát sóng I đến các cạnh AB, BC, CA là bằng nhau. Tính số đo góc BIC.



13. Ba địa điểm M, N, P trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác cân tại M. Gọi $MH = 90$ cm là khoảng cách từ M đến cạnh NP. Người ta muốn xây một trạm biến áp tại trọng tâm của tam giác MNP. Bạn Vinh tính được khoảng cách từ trạm biến áp đến điểm M là 35 cm. Hỏi bạn Vinh tính có đúng không?



III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

14. Cho tam giác MNP. Gọi I là giao điểm hai phân giác của hai góc N và M. Qua I kẻ đường thẳng song song với NP, cắt MN tại E và cắt MP tại F. Chứng minh rằng $EF = NE + PF$.

15. Cho tam giác DEF. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của hai góc E và F và K là giao điểm các đường phân giác ngoài của hai góc E và F. Chứng minh rằng D, I, K thẳng hàng.

16. Cho tam giác TUV. Các tia phân giác của góc U và V cắt nhau tại O. Gọi A, B, C lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến TU, TV, UV. Tia TO cắt UV tại D. Chứng minh rằng:

a) $OA = OB = OC$.

b) Góc UOC và góc DOV bằng nhau.

17. Cho tam giác DEF có $\widehat{D} = 120^\circ$. Các tia phân giác DM, FN cắt nhau tại O. Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh E cắt tia FD tại P. Chứng minh rằng:

a) EO vuông góc với EP.

b) Góc EMP và góc PMD bằng nhau.

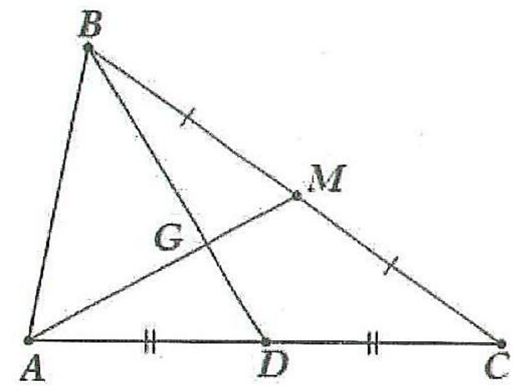
c) Ba điểm M, N, P thẳng hàng.

18. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD.Từ D kẻ DE song song với AB (E thuộc AC). Biết $AE = ED$ và BE cắt AD tại G. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABC cân tại A.

b) G là trọng tâm của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ



1A. a) $GA = \frac{2}{3}AM, GM = \frac{1}{3}AM$,

$GM = \frac{1}{2}GA$.

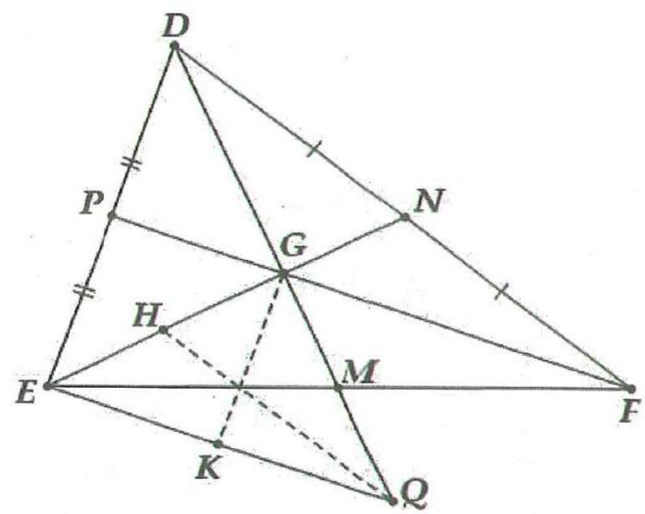
b) $GB = \frac{2}{3}BD, GD = \frac{1}{3}BD$.

$GD = \frac{1}{2}GB$.

c) $BD = \frac{3}{2}BG,\ AM = 3GM$.

1B. Tương tự bài 1A. HS tự làm.

2A. a) Vì ba đường trung tuyến DM, EN, FP của tam giác EDF đồng quy tại $G(gt)$ nên



$EG = \frac{2}{3}EN.GD = \frac{2}{3}DM.GF = \frac{2}{3}FP$.

Lại có $GD = GQ$ (gt) nên $GQ = \frac{2}{3}DM$.

Dễ dàng chứng minh

$\triangle GMF = \triangle QME$ (c.g.c).

Suy ra $EQ = GF$ (cạnh tương ứng)

Suy ra $EQ = \frac{2}{3}FP$.

Vậy $EG = \frac{2}{3}EN . EQ = \frac{2}{3}FP . GQ = \frac{2}{3}DM$.

Hay các cạnh của tam giác EGQ bằng $\frac{2}{3}$ các đường trung tuyến của tam giác DEF.

b) Ta có: $EM = MF = \frac{1}{2}EF$ (gt) (1).

Dễ dàng chứng minh được $\triangle DGN = \triangle QGH$ (c.g.c)

Suy ra $QH = DN = \frac{1}{2}DF(2)$.

Từ câu a ta có $\triangle GMF = \triangle QME$ suy ra $\widehat{MGF} = \widehat{MQE}$

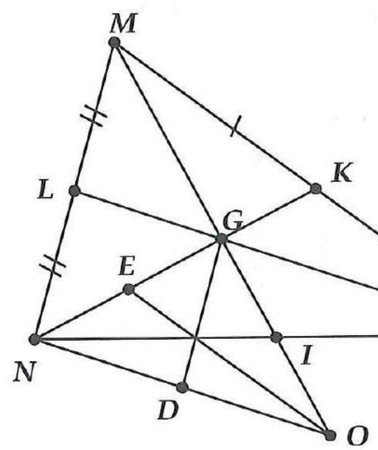
Suy ra $EQ//GF$ Hay $QE//FP$ suy ra $\widehat{PGE} = \widehat{GEK}$.

Lai có $PG = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}QE = EK$.

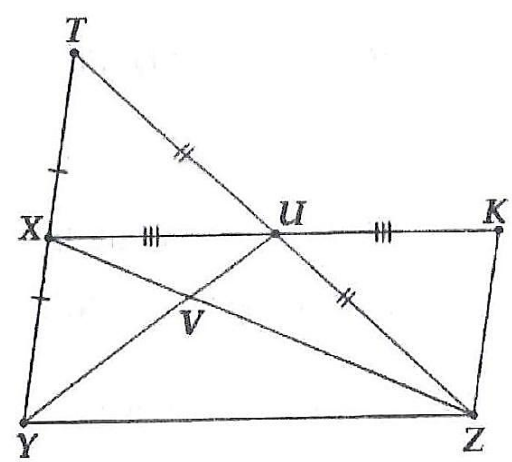
Từ đó chứng minh được $\triangle PGE = \triangle KEG$(c.g.c) suy ra $PE = GK = \frac{1}{2}DE$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra các đường trung tuyến GK, EM, GH của tam giác EGQ bằng nửa các cạnh của tam giác DEF

2B. Tương tự bài 2A. HS tự chứng minh.



3A. a) Vì $XT = XY$ (gt) nên ZX là đường trung tuyến của tam giác TYZ. Mà V thuộc ZX và $XV = \frac{1}{3}$ XZ suy ra V là trọng tâm của tam giác TYZ. Lại có V thuộc YU nên YU là đường trung tuyến của tam giác TYZ hay U là trung điểm của TZ.



b) Trên tia đối của tia UX lấy điểm K sao cho $UX = UK$.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle TXU = \triangle ZKU\left(c.g.c\right)$

suy ra $KZ = TX = XY$ và $\widehat{TXU} = \widehat{ZKU}$, suy ra $TY//ZK$

nên $\widehat{YXZ} = \widehat{KZX}$.

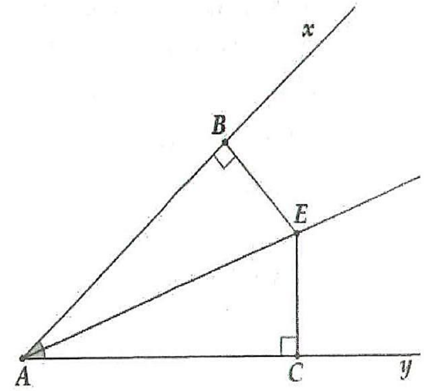
Từ đó chứng minh được $\triangle XYZ = \Delta ZKX$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{YZX} = \widehat{KXZ} \Rightarrow \widehat{YZX} = \widehat{KXZ}$ suy ra $XK//YZ$ hay $XU//YZ$.

c) Từ $\triangle XYZ = \Delta ZKX$ (c.g.c) suy ra $YZ = XK$ (hai cạnh tương ứng).

Từ đó suy ra $XU = \frac{1}{2}XK = \frac{1}{2}YZ$.

3B. Tương tự bài 3A. HS tự chứng minh.



4A. a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ACE$

(cạnh huyền - góc nhọn). Do đó $EB = EC$.

b) Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABE = \triangle ACE$

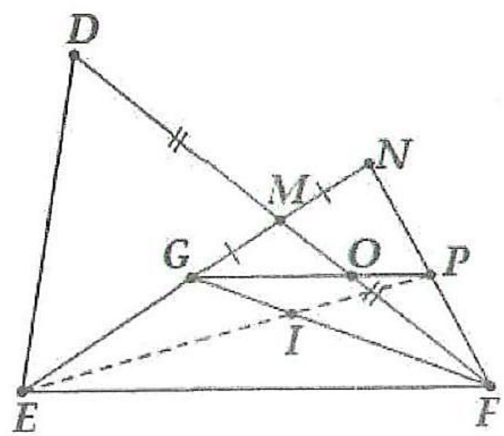
(cạnh huyền góc nhọn) nên $AB = AC$.

4B. a) Gọi góc kề bù với mOn là mOx.

Ta có $\widehat{\mathrm{tOm}} + \widehat{\mathrm{mOz}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{mOn}} + \frac{1}{2}\widehat{xOm} = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ$.

b) Tương tự 4A. HS tự chứng minh.

5A. a) Vì P là trung điểm của NF (gt) nên GP là đường trung tuyến của tam giác NGF.



Lại có M là trung điểm của $GN(gt)$ nên FM là đường trung tuyến của tam giác NGF.

Hai đường trung tuyến GP và FM cắt nhau tại O nên O là trọng tâm của tam giác NGF.

b) Vì O là trọng tâm của tam giác NGF nên $GO = \frac{2}{3}GP\ (1)$

Xét tam giác NEF có EP và FG là hai đường trung tuyến nên theo kết quả của bài 3A ta có $GP = \frac{1}{2}EF\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $GO = \frac{2}{3}GP = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}EF = \frac{1}{3}EF$ (đpcm).

5B. Tương tự bài 5A. HS tự chứng minh.

6A. Vì tam giác ABC có hai đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I nên AI là đường phân giác thứ ba của tam giác ABC. Vậy I thuộc tia phân giác của góc BAC.

6B. Tương tự bài 6A. HS tự chứng minh.

7A. a) Xét $\triangle AFE$ và $\triangle ADH$ có $AE = AH\,(\text{gt})$

Góc A là góc chung $AF = AD(\text{gt})$

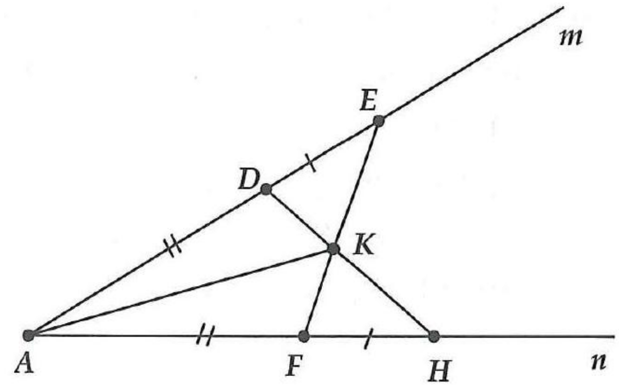
Suy ra $\triangle AFE = \triangle ADH(\text{ c.g.c})$

nên $EF = DH$ (cạnh tương ứng).

b) Từ $\triangle AFE = \triangle ADH(\text{cmt})$

suy ra

$\widehat{DEK} = \widehat{FHK}; \widehat{AFE} = \widehat{ADH} \Rightarrow \widehat{KFH} = \widehat{KDE}$



Dễ dàng chứng minh $DE = FH$.

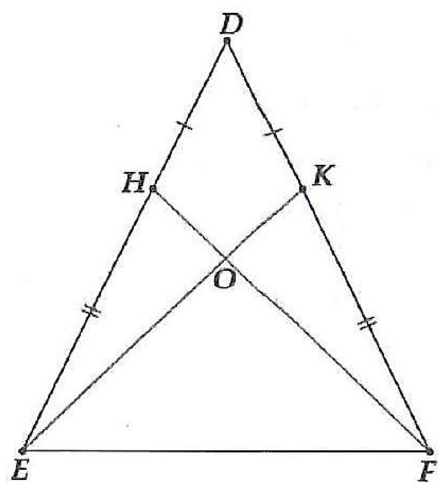
Từ đó suy ra $\triangle EKD = \triangle HKF(\text{ g.c.g})$.

c) Từ $\triangle EKD = \triangle HKF(\text{cmt})$ nên $KD = KF$ (cạnh tương ứng).

Từ đó $\triangle DAK = \triangle FAK(\text{ c.c.c}) \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{FAK}$ (hai góc tương ứng).

Vậy AK là tia phân giác của góc mAn .

7B. Tương tự bài 7A. HS tự chứng minh.



8A. Gọi AM, BN, CD là các đường trung tuyến.

Vì tam giác ABC đều nên dễ dàng chứng minh

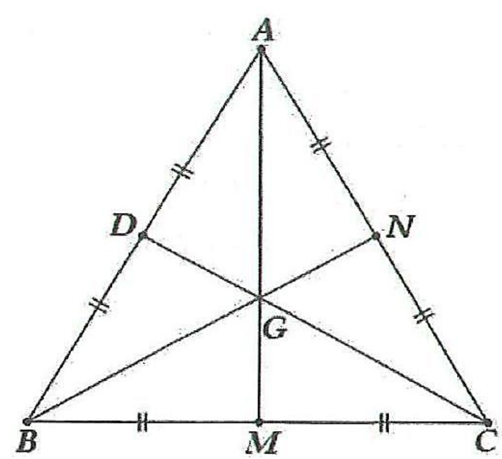
được $\triangle ABM = \triangle BCN$ do đó $AM = BN$ (1)

và $\triangle ABM = \triangle ACD$ suy ra $AM = CD$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AM = BN = CD$

Lại có: $GA = \dfrac{2}{3}AM \,.\, GB = \dfrac{2}{3}BN \,.\, GC = \dfrac{2}{3}CD$

nên $GA = GB = GC$.



8B. Tương tự bài **8A.** HS tự chứng minh.

9A. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DA = DE$.

Dễ dàng chứng minh

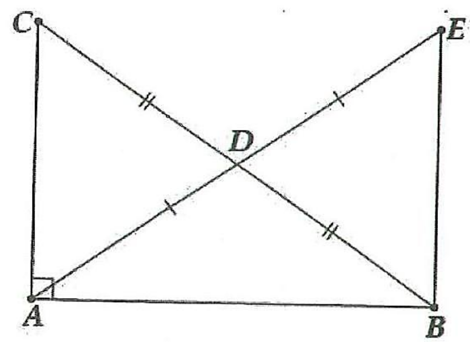
$\triangle ADC = \triangle EDB$(c.g.c)

suy ra $AC = BE$ và $\widehat{CAD} = \widehat{BED}$

Suy ra $AC // BE$.

Mà CA vuông góc với AB nên EB vuông góc với BA.

Vậy góc EBA vuông.



Xét $\triangle CAB$ & $\triangle EBA$ có: $CA = EB$(cmt), $\widehat{CAB} = \widehat{EBA} = 90^\circ$, AB là cạnh chung.

Suy ra $\triangle CAB = \triangle EBA$, nên $CB = AE$ mà $AD = \frac{1}{2}AE$ suy ra $AD = \frac{1}{2}BC$ (đpcm).

9B. Tương tự bài 9A. HS tự chứng minh.

10A. Theo đề bài ta có

$GM = MH = MK = \frac{1}{2}KH$.

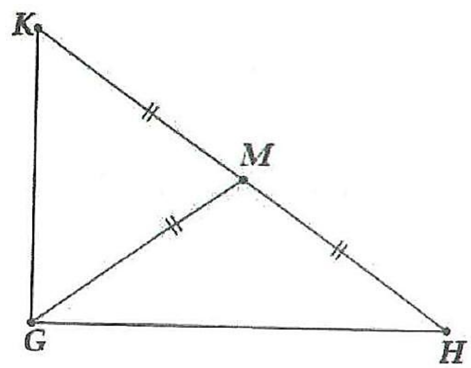
Từ đó suy ra tam giác KMG cân tại M nên $\widehat{K} = \widehat{KGM}$

và tam giác MGH cân tại M nên $\widehat{H} = \widehat{MGH}$.

Mà $\widehat{K} + \widehat{H} + \widehat{KGH} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{KGM} + \widehat{MGH} + \widehat{KGH} = 180^\circ$

Hay $\widehat{KGH} + \widehat{KGH} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{KGH} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{KGH} = 90^\circ$.

Vậy tam giác GHK vuông tại G.



10B. Tương tự bài 10A. HS tự chứng minh.

11A. Gọi AM là đường trung tuyến,

khi đó G thuộc AM (1)

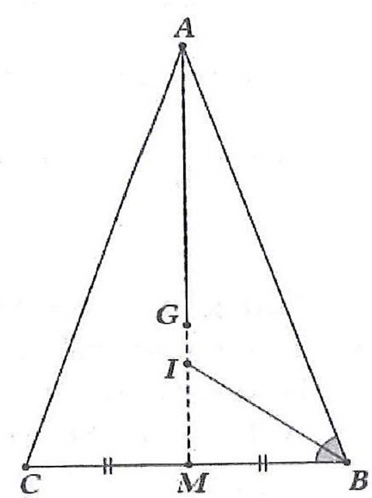
Dễ dàng chứng minh được

$\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c) suy ra

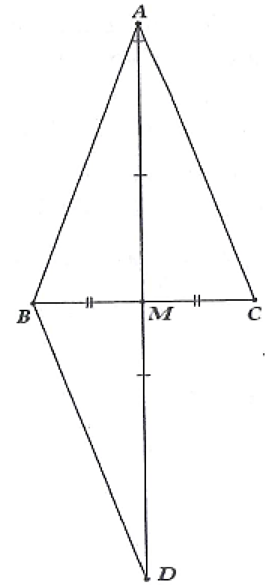
góc BAM và góc CAM bằng nhau hay

AM là phân giác của góc BAC suy ra I thuộc AM (2).

Từ (1) và (2) suy ra A, G, I thẳng hàng.



11B. Trên tia AM lấy điểm D sao cho $AM = MD$.



Dễ dàng chứng minh được

$\triangle DBM = \triangle ACM$ (c.g.c)

suy ra $BD = AC$ và hai góc BDM , CAM bằng nhau.

Mà hai góc CAM, BAM bằng nhau

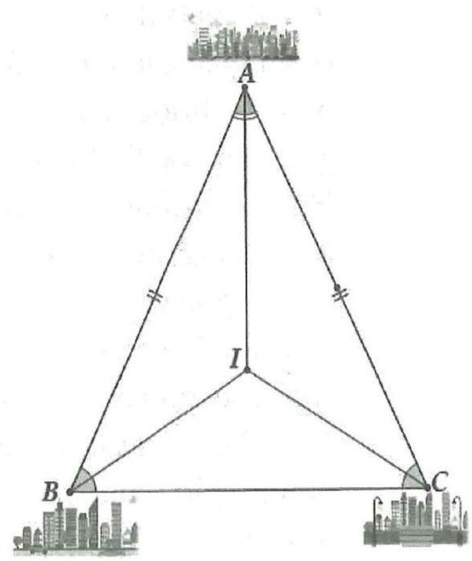
nên suy ra hai góc BAM , BDM bằng nhau.

Vậy tam giác ABD cân tại B suy ra $BA = BD$.

Lại có $BD = AC$ (cmt) nên $BA = AC$.

Vậy tam giác ABC cân tại A.

12. Vì tam giác ABC cân tại A có



$\widehat{A} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 130^\circ$.

Vì khoảng cách từ I đến các cạnh AB, BC, CA

bằng nhau nên I là giao điểm ba đường phân giác.

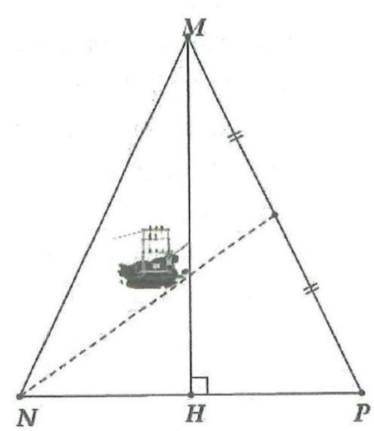
Khi đó $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{ACB}$

$= \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = \frac{1}{2}.130^\circ = 65^\circ$

Xét $\triangle IBC$ có $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 65^\circ\,(\text{cmt})$

$\Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

13. Dễ dàng chứng minh được đường vuông góc MH đồng thời là đường trung tuyến nên trọng tâm G của tam giác thuộc MH.

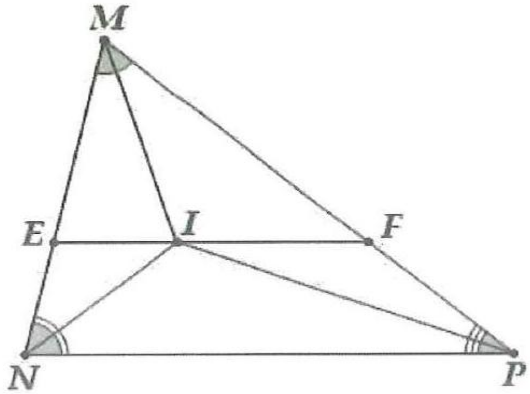


Theo tính chất ba đường trung tuyến

ta có $GM = \frac{2}{3}MH = \frac{2}{3}.90 = 60\,(\text{cm})$.

Vậy Ban Vinh nói khoảng cách từ trạm biến áp đến điểm M trên bản đồ là 35 cm là không đúng

14.



Vì $EI//NP$ nên $\widehat{EIN}=\widehat{INP}=\widehat{INE}$ suy ra tam giác IEN cân tại E nên $EI=EN$.

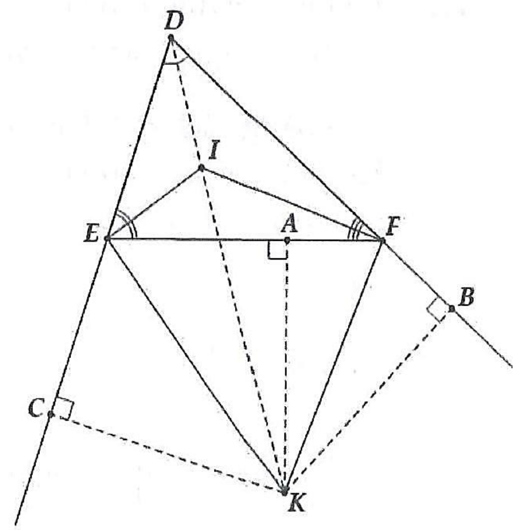
Chứng minh tương tự ta có $FI=$ FP.

Từ đó suy ra $EF=EI+IF=EN+$ FP.

15. Vì I là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF nên I thuộc đường phân giác của góc EDF (1)

Hạ KA vuông góc với EF, KB vuông góc với DF,KC vuông góc với DE.

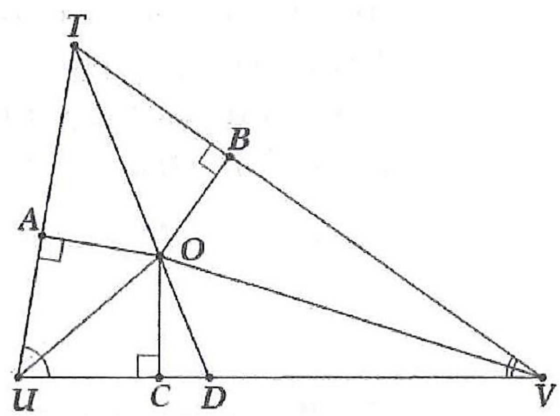
Vì K thuộc đường phân giác của góc ngoài đỉnh E nên $KA=KC,K$ lại thuộc đường phân giác của góc ngoài đỉnh F nên $KB=KA$. Từ đó suy ra $KB=KC$ nên K thuộc tia phân giác của góc EDF (2) Từ (1) và (2) suy ra I và K cùng thuộc tia phân giác của góc EDF nên ba điểm D,I,K thẳng hàng.



16. a) Vì O là giao điểm các đường phân giác của góc U và V nên O là giao điểm các đường phân giác của tam giác TUV. Do đó O cách đều ba cạnh của tam giác TUV. Vậy $OA=OB=OC$.

b) Vì TO là phân giác nên góc UTO và góc OTV bằng nhau.

Ta có VOD là góc ngoài đỉnh O của tam giác TOV nên $\widehat{VOD}=\widehat{OTV}+\widehat{OVT}\ (1)$

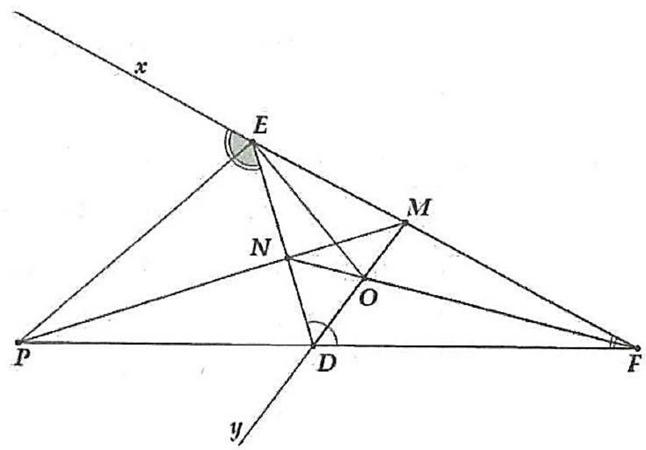


$$=\frac{\widehat{UTV}+\widehat{\mathrm{TVU}}}{2}=\frac{180^{\circ}-\widehat{\mathrm{TUV}}}{2}=90^{\circ}-\frac{\widehat{\mathrm{TUV}}}{2}(1)$$

Xét tam giác OUC vuông tại C nên $\widehat{UOC} = 90^\circ - \widehat{OUC} = 90^\circ - \frac{\widehat{TUV}}{2}\left(2\right).$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{UOC} = \widehat{DOV}$.

17. a) Dễ dàng chứng minh OE vuông góc với EP (phân giác của hai góc kề bù).



b) Vì $\widehat{EDF} = 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EDP} = 60^\circ$ mà DM là phân giác nên

$\widehat{EDM} = \widehat{MDF} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{yDP} = \widehat{MDF} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{yDP} = \widehat{EDP} = 60^\circ$.

Suy ra DP là phân giác góc ngoài đỉnh D. Mà EP là phân giác góc ngoài đỉnh E nên P là giao điểm hai phân giác góc ngoài đỉnh D và E của tam giác MDE.

Hs tự chứng minh bài toán phụ: Nếu điểm M cách đều 2 cạnh Ox, Oy của $\widehat{xOy}$ (khác góc bẹt) thì M thuộc phân giác của $\widehat{xOy}$.

Vì P thuộc phân giác $\widehat{xED}$ nên P các đều Ex và ED; Vì P thuộc phân giác $\widehat{EDy}$ nên P cách đều DE và Dy. Do đó P cách đều Ex và Dy hay P cách đều Mx và My nên theo bài toán phụ ta suy ra P thuộc phân giác $\widehat{EMD}$.

Suy ra MP là phân giác của góc $\widehat{EMD}$. Do đó $\widehat{EMP} = \widehat{PMD}$.

c) Vì N thuộc phân giác của $\widehat{DFE}$ nên N cách đều FE và FP (1)

Ta có $\widehat{PDM} = \widehat{EDM} = 60^\circ \Rightarrow DE$ là phân giác của $\widehat{PDM}$

Nên N thuộc $\widehat{PDM} \Rightarrow N$ cách đều FP và DM (2)

Từ (1) và (2) suy ra N cách đều DM và FE

Theo bài toán phụ câu b), suy ra N thuộc phân giác của $\widehat{EMD}$

Mà P thuộc phân giác của $\widehat{EMD}$

Nên M, N, P thẳng hàng.

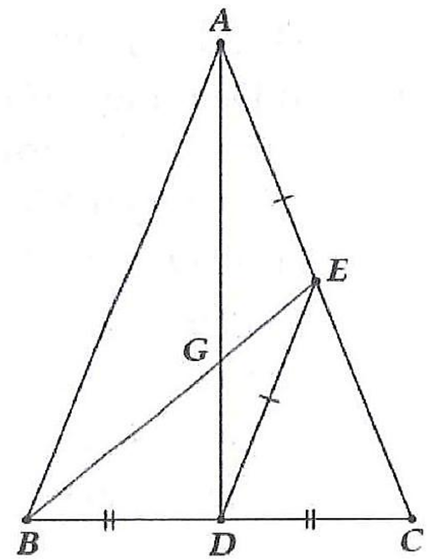
18. a) Vì $AE = ED$ nên tam giác AED cân tại E, suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{EAD}$.

Mà $DE // AB$ (gt) nên $\widehat{ADE} = \widehat{DAB}$. Từ đó suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ hay AD là phân giác của góc BAC.

Mà AD là đường trung tuyến nên tam giác ABC là tam giác cân tại A (đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác-bài 11A).

b) Vì $DE//AB$ nên $\widehat{ABD}=\widehat{EDC}$, mà $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$ (tam giác ABC cân tại A)

Suy ra góc EDC và góc ACD bằng nhau. Từ đó tam giác EDC cân tại E Nên $ED=EC$ suy ra $EC=EA(=ED$ hay E là trung điểm của AC nên BE là đường trung tuyến, lại có AD là đường trung tuyến cắt BE tại $G(\text{gt})$ nên G là trọng tâm của tam giác ABC.

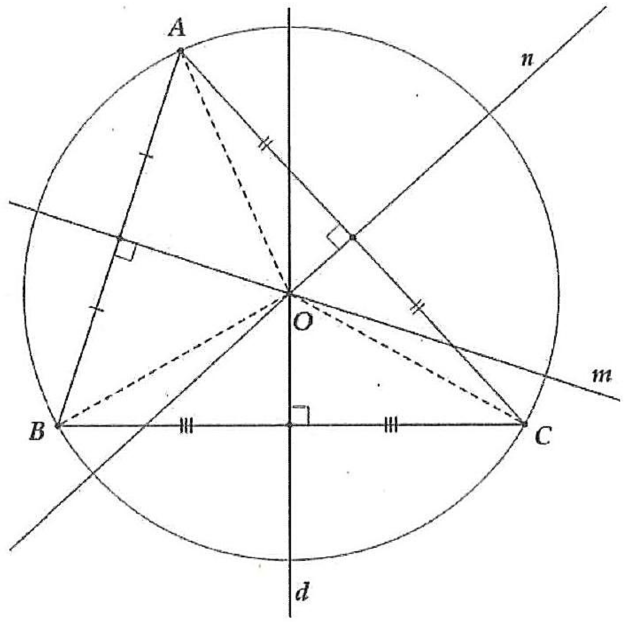


BÀI 5. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO TRONG MỘT TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Sự đồng quy của ba đường trung trực trong một tam giác

a) Định nghĩa đường trung trực



• Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác.

• Mỗi tam giác có ba đường trung trực.

b) Tính chất

• Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng quy tại một điểm). Điểm đó cách đều ba đỉnh của tam giác.

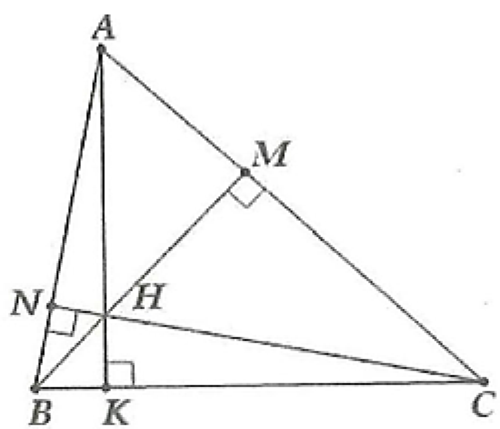
• Trên hình vẽ bên, tam giác ABC có ba đường trung trực d, m, n đồng quy tại điểm O, ta có:

$OA = OB = OC$.

• O là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C.

2. Sự đồng quy của ba đường cao trong tam giác

a) Định nghĩa đường cao



• Trong tam giác ABC, đoạn thẳng AK là một đường cao (xuất phát từ đỉnh A hay ứng với cạnh BC) của tam giác ABC.

• Mỗi tam giác có ba đường cao.

b) Tính chất

• Ba đường cao của một tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tam giác.

• Trên hình vẽ, tam giác ABC có ba đường cao AK, BM, CN đồng quy tại H. H là trực tâm của tam giác ABC.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất đường trung trực tam giác.

1A. Cho tam giác nhọn $MNP(MN < MP)$, đường cao MH, đường trung tuyến MI. Trên tia đối của HM lấy điểm E sao cho $HM = HE$, trên tia đối của IM lấy điểm F sao cho $IM = IF$. Chứng minh rằng $NE = PF$.

1B. Cho tam giác nhọn DEF $(DE > DF)$, đường cao DA, đường trung tuyến DI. Trên tia đối của AD lấy điểm C sao cho $AD = AC$, trên tia đối của ID lấy điểm H sao cho $ID = IH$.

Chứng minh rằng

a) $FC = EH$.

b) $IC = \frac{1}{2}DH; HC // FE$.

Dạng 2. Tính số đo góc

Phương pháp giải: Vận dụng kiến thức về

- Tính chất ba đường trung trực, ba đường cao của tam giác;
- Tam giác bằng nhau.
- Tam giác đặc biệt.

2A. Cho $\widehat{mOn} = 50^\circ$ và điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B sao cho Om là đường trung trực của AB, vẽ điểm C sao cho On là đường trung trực của AC.

a) Chứng minh tam giác BOC là tam giác cân.

b) Tính góc BOC.

2B. Cho $\widehat{xAy} = 75^\circ$ và điểm M nằm trong góc đó. Vẽ điểm N sao cho Ax là đường trung trực của MN, vẽ điểm P sao cho Ay là đường trung trực của MP. Tính góc NAP.

3A. Cho tam giác XYZ cân tại X. Đường trung trực của XZ cắt XY tại A. Biết ZA là phân giác của góc XZY. Tính các góc của tam giác XYZ.

3B. Cho tam giác DEF cân tại D. Tia phân giác của góc DFE cắt cạnh DE tại điểm M sao cho $MD = MF$. Tính các góc của tam giác DEF.

4A. Cho góc $\widehat{xAy} = 50^\circ$. Trên tia Ax lấy điểm M. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với Ay tại H, trên tia đối của HA lấy điểm N. Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với Ax tại P và MN cắt HP tại I.

a) Chứng minh AI vuông góc với NP.

b) Tính góc *MIN*.

4B. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{BAC} = 70^\circ$. Kẻ BK vuông góc với AC tại K và CI vuông góc với AB tại I. Giao điểm của BK và CI là H.

a) Chứng minh rằng AH vuông góc với BC.

b) Tính góc *BHC*.

Dạng 3: Bài toán liên quan đến đường trung trực.

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất đường trung trực của tam giác và tính chất của các tam giác đặc biệt (tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều).

5A. Cho tam giác DEF cân tại D, trung tuyến DM, đường trung trực của DE cắt DM tại O. Chứng minh rằng O cách đều ba đỉnh của tam giác DEF.

5B. Cho tam giác MNP là tam giác đều có G là trọng tâm. Chứng minh rằng G cách đều ba đỉnh của tam giác MNP.

6A. Cho tam giác GHI có $GH < GI$. Đường trung trực của HI cắt GI tại M. Chứng minh rằng $GM + MH = GI$.

6B. Cho tam giác ABC có góc C nhỏ hơn góc B. Đường trung trực của BC cắt AC tại K. Chứng minh rằng $AK + KB = AC$.

7A. Cho tam giác MNP vuông tại M có $\widehat{P} = 30^\circ$. Đường trung trực của NP cắt MP tại Q. Chứng minh rằng NQ là phân giác của MNP.

7B. Cho tam giác DEF vuông tại D có $\widehat{F} = 40^\circ$. Đường trung trực của EF cắt DF tại K. Tính góc DEK.

8A. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BK (K thuộc AC). Từ K kẻ KE vuông góc với BC (E thuộc BC). Giao điểm của AB và KE là H. Chứng minh rằng:

a) BK là đường trung trực của AE;

b) BK là đường trung trực của CH.

8B. Cho tam giác DEF vuông tại D, đường phân giác EM (M thuộc DF). Từ M kẻ MN vuông góc với EF (N thuộc EF). Giao điểm của DE và NM là O. Chứng minh rằng:

a) EM vuông góc với DN;

b) EM là đường phân giác của góc OEF.

9A. Cho góc nhọn xAy và điểm O cố định nằm trong góc đó. Xác định vị trí của các điểm M thuộc Ax, N thuộc Ay sao cho chu vi tam giác OMN là nhỏ nhất.

9B. Cho đường thẳng a và hai điểm E, F nằm về cùng một phía đối với đường thẳng a sao cho EF không vuông góc với đường thẳng a. Hãy tìm trên đường thẳng a một điểm P sao cho $|PE - PF|$ có giá trị nhỏ nhất.

Dạng 4. Bài toán liên quan đến đường cao

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất đường cao của tam giác và tính chất các tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác vuông)

10A. Cho đoạn thẳng MN và điểm P nằm giữa M và N sao cho $PM < PN$. Từ P kẻ tia Px vuông góc với MN tại P. Trên tia Px lấy điểm Q và R sao cho $PQ = PM, PR = PN$. Giao điểm của MQ và RN là S. Chứng minh rằng:

a) MS vuông góc với RN;

b) R là trực tâm của tam giác MQN.

10B. Cho đoạn thẳng EF và điểm A nằm giữa E và F sao cho $AE < AF$. Từ A kẻ tia At vuông góc với EF tại A. Trên tia At lấy điểm B và C sao cho $AB = AE, AC = AF$. Giao điểm của EB và CF là D. Chứng minh rằng: B là trực tâm của tam giác ECF.

11A. Cho tam giác DEF cân tại D, hai đường cao EH và FK cắt nhau tại I. Tia DI cắt EF tại M. Chứng minh rằng:

a) M là trung điểm của EF;

b) Tam giác MHK cân.

11B. Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao BM và CN cắt nhau tại H. Tia AH cắt BC tại E. Chứng minh rằng:

a) AE là phân giác của góc BAC;

b) Tam giác EMN là tam giác cân.

12A. Cho tam giác XYZ vuông tại X, đường cao XH. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của XH và HZ. Chứng minh rằng:

a) M là trực tâm của tam giác XYN;

b) YM vuông góc với XN.

12B. Cho tam giác TUV vuông tại T, đường cao TA. Gọi B, C lần lượt là trung điểm của TA và AV. Chứng minh rằng:

a) BC song song với TV;

b) UB vuông góc với TC.

13A. Cho tam giác nhọn GHK có $GH < GK$, đường cao GA. Trên đoạn AK lấy điểm D sao cho $AH = AD$. Từ D kẻ DE vuông góc với GK (E thuộc GK).Từ K kẻ KF vuông góc với GD tại F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác GHD cân;

b) Ba đường thẳng GA, DE và KF đồng quy tại một điểm.

13B. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, đường cao AD. Trên đoạn DC lấy điểm E sao cho $DB = DE$.

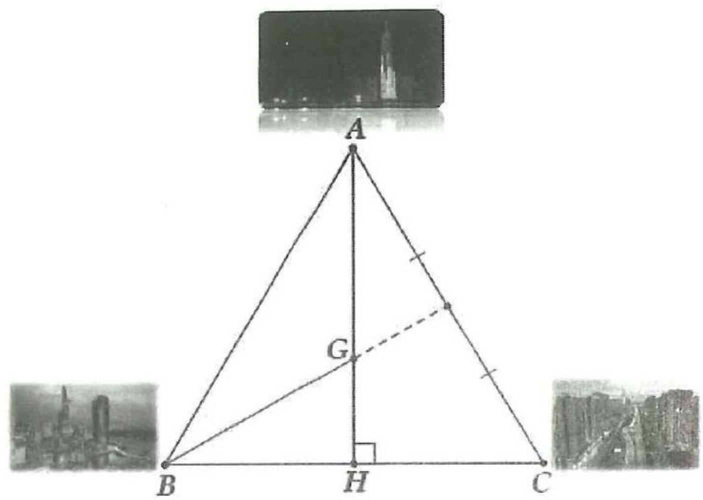
a) Chứng minh rằng tam giác ABE cân;

b) Từ E kẻ EF vuông góc với AC (F thuộc AC). Từ C kẻ CK vuông góc với AE (K thuộc AE). Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, EF và CK đồng quy tại một điểm.

Dạng 5. Bài toán có nội dung thực tế

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất về ba đường trung trực, ba đường cao của tam giác đều giải.

14A. Ba thành phố A, B, C trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác đều có độ dài đường cao $AH = 12$ cm. Goi G là trọng tâm của tam giác ABC. Xác định khoảng cách từ G đến các định B và C trên bản đồ.

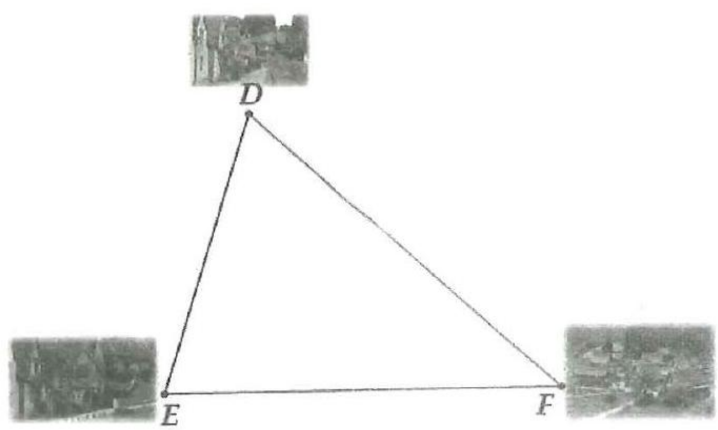


14B. Ba thành phố A, B, C trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác đều có G là trọng tâm, biết $GB = 10$ cm. Tính độ dài đường cao AH trên bản đồ.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

15. Ba ngôi làng D, E, F trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác.

Người ta cần đặt một trạm biến áp để kéo điện về với các ngôi làng. Vậy phải đặt trạm biến áp tại đâu để khoảng cách từ trạm biến áp đến các ngôi làng là như nhau?



16. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực thì tam giác đó là tam giác cân.

17. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường cao thì tam giác đó là tam giác cân.

18. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, BC, AC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $AD = BE = CF$.

a) Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

b) Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC. Chứng minh rằng O cũng là giao điểm các đường trung trực của tam giác DEF.

c) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng H cũng là trực tâm của tam giác DEF.

19. Cho tam giác tù MNP có $\widehat{NMP}=135^{\circ}$. Từ N và P lần lượt kẻ NA vuông góc với MP, PB vuông góc với MN tại A và B. Kẻ đường cao MH của tam giác MNP.

a) Chứng minh rằng các tam giác MNA, MPB là các tam giác vuông cân.

b) Chứng minh ba đường thẳng MH, NA, PB đồng quy tại một điểm.

20. Cho tam giác DEF vuông cân tại D. Trên cạnh DE lấy điểm H, trên tia đối của DF lấy điểm K sao cho $DH = DK$.

a) Chứng minh rằng KH vuông góc với EF.

b) Chứng minh rằng FH vuông góc với EK.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1A. Dễ dàng chứng minh được $\Delta PIF = \Delta NIM$ (c.g.c)

suy ra $PF = NM$ (1)

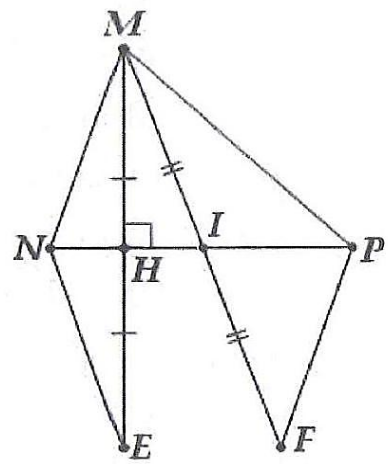
Chứng minh được

$\triangle MNH = \triangle ENH\left(c.g.c\right)$

Suy ra $NM = NE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$PF = NE$ (đpcm).



1B. Tương tự bài 1A. HS tự chứng minh.

2A. a) Vì Om là đường trung trực của AB nên $OA = OB$

Vì On là đường trung trực của AC nên $OA = OC$

Từ đó suy ra $OB = OC$ nên $\triangle BOC$ cân tại O.

b) Vì $OA = OB\left(\text{cmt}\right)$ nên $\triangle AOB$ cân

tại O, có Om là đường trung trực nên Om đồng

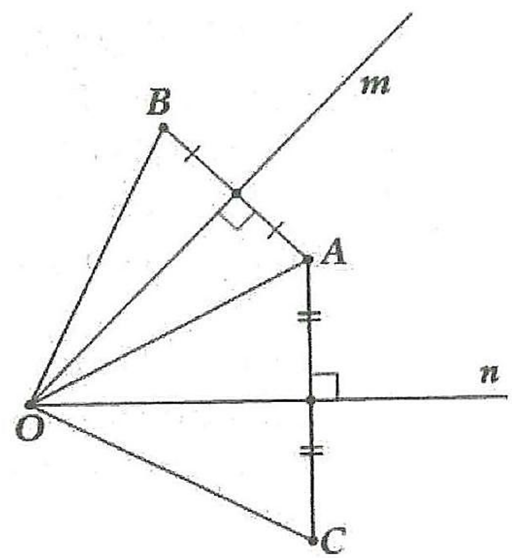
thời là đường phân giác của $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{BOm} = \widehat{mOA}\ \left(1\right)$

Chứng minh tương tự có $\widehat{COn} = \widehat{nOA}\ \left(2\right)$

Ta có $\widehat{BOC} = \widehat{BOm} + \widehat{mOA} + \widehat{AOn} + \widehat{nOC}\ \left(3\right)$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$\widehat{BOC} = 2\left(\widehat{mOA} + \widehat{AOn}\right) = 2\cdot\widehat{mOn} = 2\cdot 50^\circ = 100^\circ$



2B. Tương tự bài 2A. Đáp số: 150°.

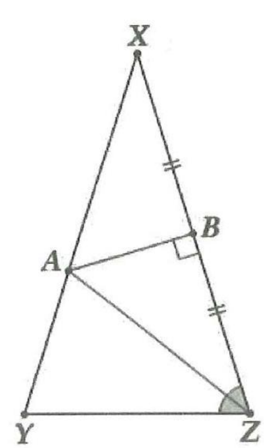
3A. Gọi B là trung điểm của XZ.

Dễ dàng chứng minh được

$\triangle XAB = \triangle ZAB(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{X} = \widehat{AZB}$.

Mà $\widehat{AZB} = \widehat{AZY}\ \left(gt\right) \Rightarrow \widehat{X} = \widehat{AZB} = \widehat{AZY}$

hay $\widehat{Y} = \widehat{YZX} = 2\widehat{X}$



Áp dụng định lý tổng ba góc trong

một tam giác ta có $\widehat{X}+\widehat{Y}+\widehat{XZY}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{X}+2\widehat{X}+2\widehat{X}=180^\circ \Rightarrow 5\widehat{X}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{X}=36^\circ$

Suy ra $\widehat{Y}=\widehat{XZY}=72^\circ$.

3B. Tương tự bài 3A. Đáp số: 60°.

4A. a) Xét $\triangle MAN$ có

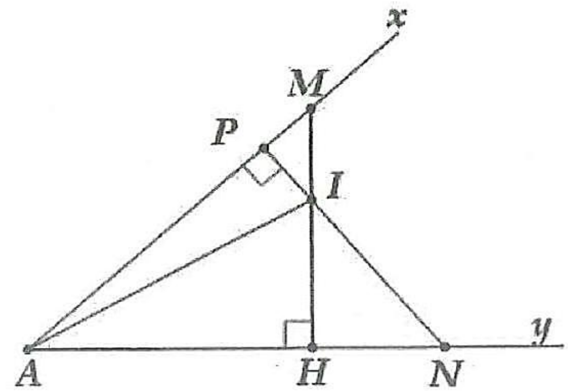
$MH \perp AN, NP \perp AM$, mà

$NP \cap MH$ tại I nên I là trực tâm của $\triangle MAN$

Từ đó suy ra $AI \perp MN$

b) Xét $\triangle MHA$ vuông tại H có

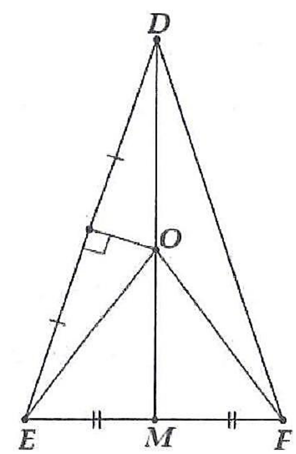
$\widehat{MAH}=50^\circ (gt) \Rightarrow \widehat{M}=40^\circ$



Có $\widehat{MIN}$ là góc ngoài đỉnh I của $\triangle PMI$, suy ra $\widehat{MIN}=\widehat{M}+\widehat{MPI}=40^\circ+90^\circ=130^\circ$.

4B. Tương tự bài 4A. Đáp số: b) 110°.

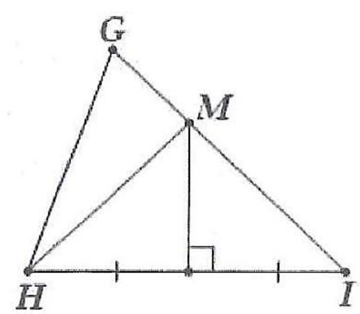
5A. Vì ΔDEF cân tại D nên đường trung tuyến DM đồng thời là đường trung trực. Khi đó O là giao điểm của hai đường trung trực nên theo tính chất O cách đều ba đỉnh của ΔDEF.



5B. Tương tự bài **5A.** HS tự chứng minh.

6A. Vì M thuộc đường trung trực của HI nên $MH=MI$.

Ta có $GI=GM+MI=GM+HM$ (đpcm).



6B. Tương tự bài **6A.** HS tự chứng minh.

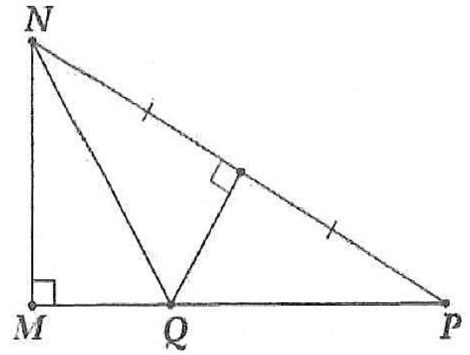
7A. Vì Q thuộc đường trung trực của NP nên $QN=QP$, suy ra ΔNQP cân tại Q, từ đó ta có

$\widehat{MPN} = \widehat{QNP} = 30^\circ$.

Mà $\widehat{MNP} = 60^\circ$ (vì ΔMNP vuông tại M có $\widehat{MPN} = 30^\circ$)

Suy ra $\widehat{MNQ} = 60^\circ - \widehat{QNP} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{MNQ} = \widehat{QNP}\left(= 30^\circ\right) \Rightarrow NQ$ là phân giác của $\widehat{MNP}$.



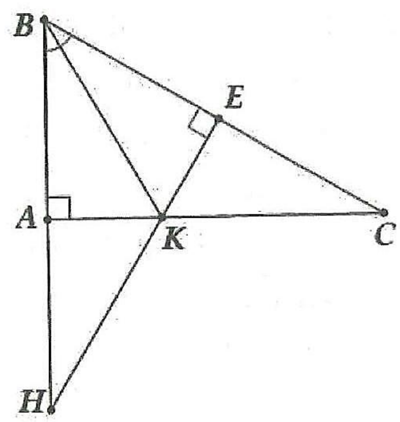
7B. Tương tự bài **7A.** HS tự chứng minh

8A. a) Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABK = \triangle EBK$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra $BA = BE, AK = KE$ (cạnh tương ứng).

Từ đó suy ra BK là đường trung trực của AE (tính chất).

b) Dễ dàng chứng minh $\triangle AKH = \triangle EKC$ (cạnh góc vuông - góc nhọn kề), suy ra $AH = EC$ và $KH = KC$ (cạnh tương ứng). Lại có $AB = BE\left(\text{cmt}\right)$. Từ đó suy ra $BH = BC$.

Vậy BK là đường trung trực của HC.



8B. Tương tự bài **8A.** HS tự chứng minh.

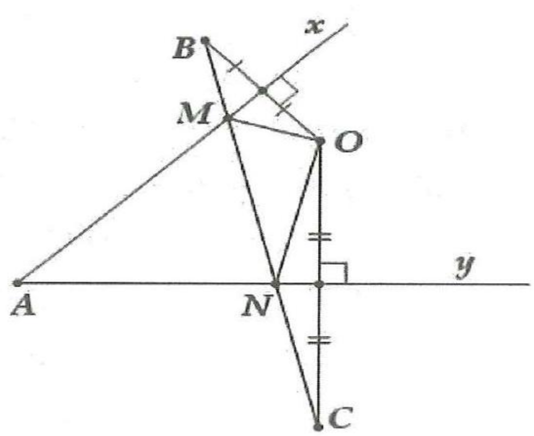
9A. Lấy điểm B sao cho Ax là đường trung trực của OB, lấy điểm C sao cho Ay là đường trung trực của OC.

Vì điểm O cố định nên hai điểm B và C cố định.

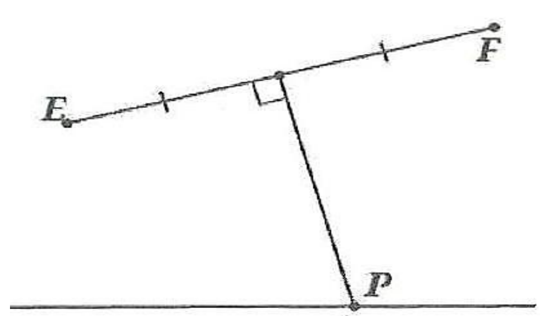
Gọi giao điểm của BC với trục Ax, Ay lần lượt là M và N.

Khi đó chu vi tam giác OMN bằng:

$OM + MN + ON = BM + MN + NC = BC$ cố định ngắn nhất.

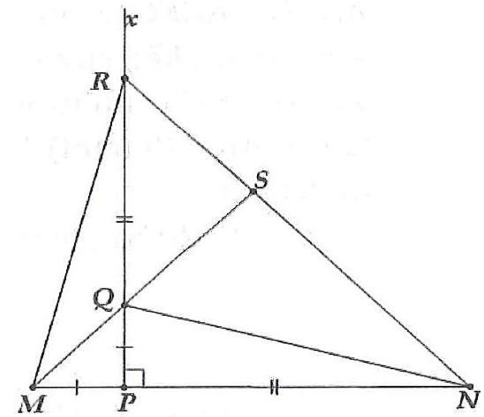


9B. Ta có $\left|PE - PF\right| \geq 0$ với mọi điểm P tuỳ ý và $\left|PE - PF\right| = 0$ khi và chỉ khi với các điểm P mà $PE = PF$, tức là khi điểm P nằm trên đường trung trực của EF. Mặt khác P thuộc đường thẳng a và do EF không vuông góc với a nên P là giao điểm của đường



thẳng a với đường trung trực của EF.

Vậy: Khi P là giao điểm của đường thẳng a với đường trung trực của EF thì $|PE - PF|$ có giá trị nhỏ nhất là bằng 0 .



10A. a) Xét $\triangle MPQ$ vuông tại P có $PM = PQ(gt)$ nên $\triangle MPQ$ là tam giác vuông cân, suy ra $\widehat{MQP} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{RQS} = 45^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Tương tự ta có $\triangle PRN$ vuông cân nên $\widehat{PRN} = 45^\circ$

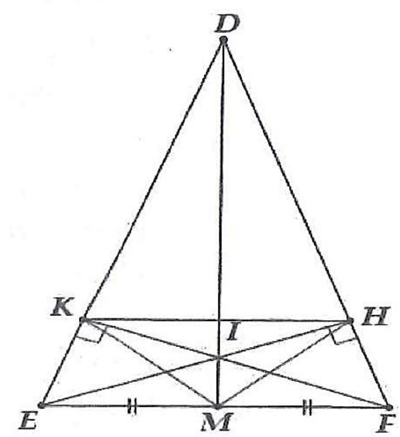
Xét $\triangle PQS$ có

$\widehat{RQS} = \widehat{QRS} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{RSQ} = 90^\circ$.

Vậy MQ vuông góc với RN tại S .

b) Xét $\triangle QMN$ có hai đường cao QP và NS cắt nhau tại R nên R là trực tâm của $\triangle QMN$

10B. Tương tự bài 10A. HS tự chứng minh.

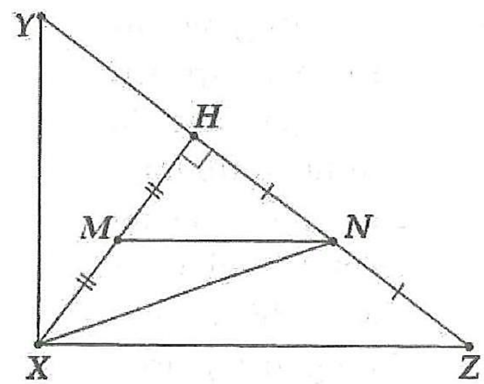


11A. a) Xét $\triangle DEF$ có hai đường cao EH và FK cắt nhau tại I nên I là trực tâm của $\triangle DEF$. Từ đó suy ra DM vuông góc với EF . Mà $\triangle DEF$ cân tại D nên đường cao DM đồng thời là đường trung tuyến. Vậy M là trung điểm của EF .

b) Vì $\triangle EKF$ vuông tại K có M là trung điểm của cạnh huyền nên theo bài 9A (Bài 4: Sự đồng quy của ba đường trung tuyến, ba đường phân giác trong một tam giác) ta có: $KM = \dfrac{1}{2}EF$. Chứng minh tương tự ta có $HM = \dfrac{1}{2}EF$

Từ đó suy ra $KM = HM$ nên $\triangle MHK$ cân tại M .

11B. Tương tự bài 11A. HS tự chứng minh.



12A. a) Áp dụng kết quả bài 3A (Bài 4: Sự đồng quy của ba đường trung tuyến, ba đường phân giác trong một tam giác), ta có $MN // XZ$. Mà XZ vuông góc với XY nên MN vuông góc với XY .

Xét ΔXYN có hai đường cao

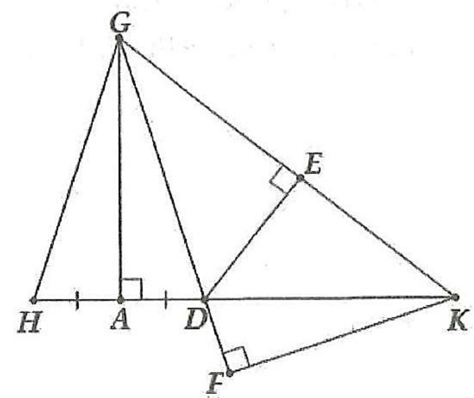
MN và XH cắt nhau tại M nên M là trực tâm của ΔXYN .

b) Vì M là trực tâm của ΔXYN nên YM vuông góc với XN .

12B. Tương tự bài **12A.** HS tự chứng minh.

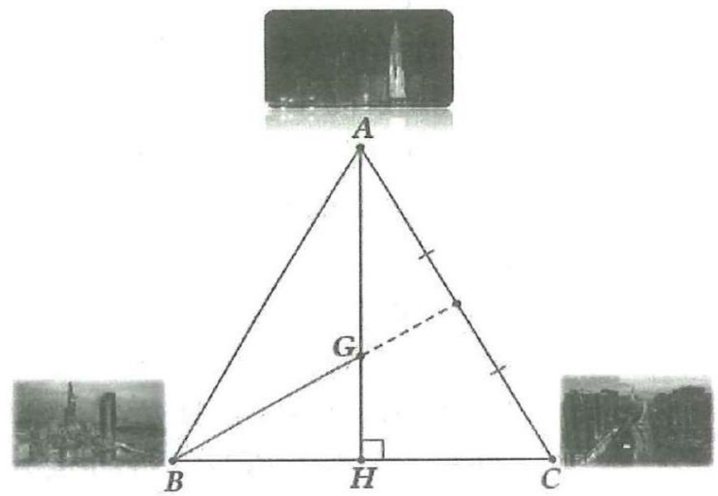
13A. a) Dễ dàng chứng minh được $\triangle GAH = \triangle GAD$ (hai cạnh góc vuông), suy ra $GH = GD$ (hai cạnh tương ứng). Vậy $\triangle GHD$ cân tại G.

b) Xét $\triangle GDK$ có ba đường cao DE, KF, GA đồng quy tại một điểm.



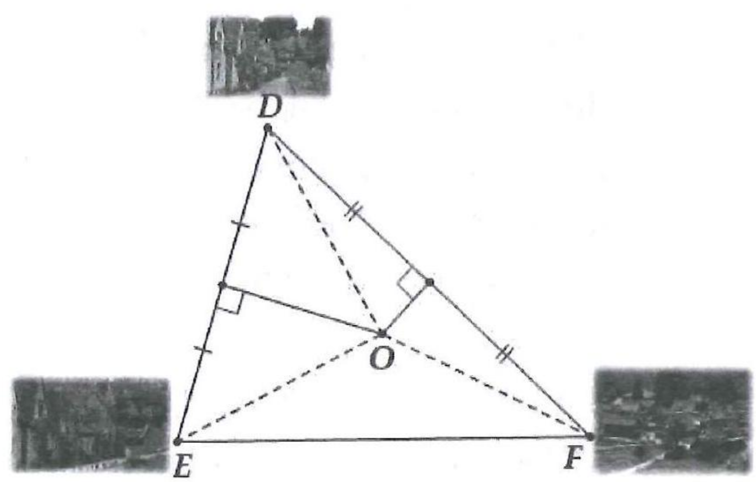
13B. Tương tự bài **13A.** HS tự chứng minh.

14A. Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều có AH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến. G là trọng tâm nên ta có $GA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.12 = 8\,(\text{cm})$. Mà $GA = GB = GC$ (do tam giác ABC đều) nên $GB = GC = 8$ cm.

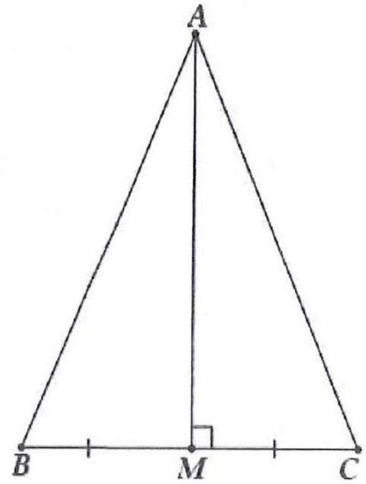


14B. Tương tự bài 14A. HS tự chứng minh.

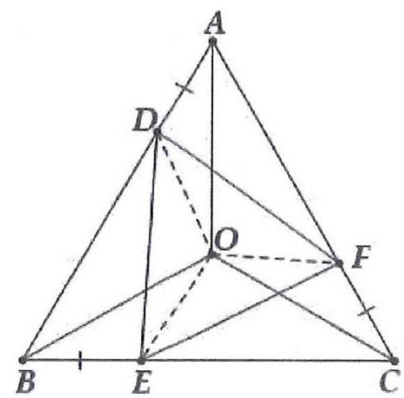
15. Để khoảng cách từ trạm biến áp đến các ngôi làng là như nhau thì trạm biến áp cần đặt tại điểm O với O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle DEF$.



16. Dễ dàng chứng minh được $AB = AC$ nên tam giác ABC là tam giác cân tại A.



17. Tương tự bài 16. HS tự chứng minh.



18. a) Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}$

và $AB=BC=AC$.

Mà $AD=BE=CF(\text{gt})$ nên suy ra $DB=EC=FA$.

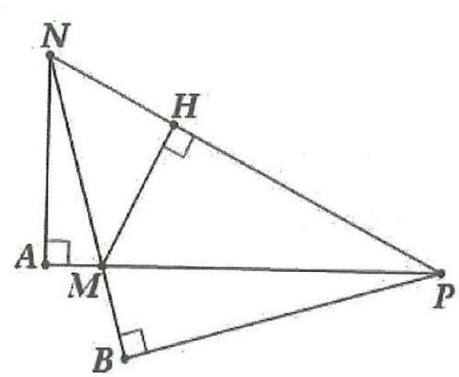
Dễ dàng chứng minh được các tam giác ADF, BED, CFE đôi một bằng nhau (c.g.c) nên suy ra $DF=DE=$ EF.

Vậy $\triangle DEF$ là tam giác đều.

b) Vì O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$ nên $OA=OB=OC$ và AO, BO, CO đồng thời là các đường phân giác của A, B, C.

Dễ dàng chứng minh các tam giác ADO, BEO, CFO đôi một bằng nhau (c.g.c) nên suy ra $OD=OE=OF$. Vậy O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle DEF$

c) Vì Tam giác ABC và DEF là các tam giác đều nên giao điểm các đường trung trực cũng chính là giao điểm các đường cao, nghĩa là điểm O trùng với điểm H.



19. a) Vì $\widehat{NMP}=135^\circ\,(gt)$

$\Rightarrow \widehat{NMA}=\widehat{BMP}=45^\circ$

Tam giác AMN vuông tại A có

$\widehat{NMA}=45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

Tam giác MBP vuông tại B có

$\widehat{BMP}=45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

b) Xét $\triangle MNP$ có ba đường cao MH, PB, NA đồng quy tại một điểm.

20. a) Gọi giao điểm của KH và EF là P.

Vì $\triangle DEF$ vuông cân tại D nên $\widehat{DFE} = 45^\circ$

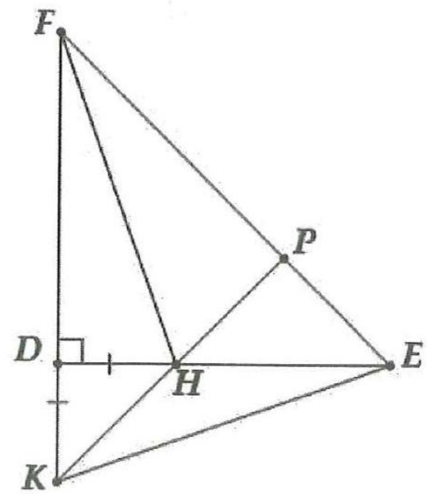
Vì $\triangle DHK$ vuông cân tại D nên $\widehat{DKH} = 45^\circ$

Xét. $\triangle FKP$ có $\widehat{KFP} = \widehat{FKP} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{FPK} = 90^\circ$.

Vậy KH vuông góc với EF tại P.

b) Xét $\triangle FKE$ có hai đường cao ED và KP cắt nhau tại H nên H là trực tâm của tam giác FKE.

Vậy FH vuông góc với EK.



ÔN TẬP CHƯƠNG IX

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần tóm tắt lý thuyết từ **Bài 1** đến **Bài 5**.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.

1A. Cho tam giác DEF có $\widehat{D}=30^{\circ}, \widehat{E}=105^{\circ}$. So sánh độ dài các cạnh của tam giác DEF.

1B. Cho tam giác MNP có $\widehat{N}=25^{\circ}, \widehat{P}=127^{\circ}$. So sánh độ dài các cạnh của tam giác MNP.

2A. Cho tam giác ABC có $AB=3$ cm, $AC=4$ cm, $BC=5$ cm. Hãy so sánh các góc của tam giác ABC.

2B. Cho tam giác GHI có $GH=13$ cm, $HI=7$ cm, $GI=9$ cm. Hãy so sánh các góc của tam giác GHI.

3A. Cho tam giác PQR có $\widehat{P}=100^{\circ}$, tia phân giác của góc Q và R cắt nhau tại M. Tính $\widehat{QMR}$.

3B. Cho tam giác XYZ có $\widehat{X}=40^{\circ}$, tia phân giác của góc Y và góc Z cắt nhau tại K. Tính $\widehat{ZKY}$.

4A. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=60^{\circ}, \widehat{C}<\widehat{B}<90^{\circ}$.

a) Chứng minh rằng $AB<AC$.

b) Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM=AB$. Chứng minh tam giác ABM là tam giác đều.

c) So sánh các cạnh của tam giác ABC.

4B. Cho tam giác TUV có $\widehat{T}=60^{\circ}, \widehat{V}>90^{\circ}$.

a) Trên cạnh TU lấy điểm K sao cho $TV=TK$. Chứng minh rằng tam giác TVK là tam giác đều.

b) So sánh các cạnh của tam giác TUV.

c) So sánh các cạnh của tam giác KUV.

d) So sánh các cạnh của tam giác BMC.

5A. Cho tam giác nhọn DEF có đường cao DI, đường trung tuyến DM. Chứng minh rằng:

a) $DI<\frac{1}{2}(DE+DF)$.

b) $DM<\frac{1}{2}(DE+DF)$.

5B. Cho tam giác nhọn MNP có đường cao MH, đường trung tuyến MK. Chứng minh rằng:

a) $MH < \frac{1}{2}(MN + MP)$;

b) $2MK < MN + MP$.

6A. Cho tam giác PQR có đường phân giác của góc P cắt cạnh QR tại điểm A sao cho $QA = 2AR$. Trên tia đối của RP lấy điểm B sao cho $RP = RB$. Chứng minh tam giác PQB là tam giác cân.

6B. Cho tam giác ABC có phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D sao cho $DC = \frac{1}{2}DB$. Trên tia đối của CA lấy điểm E sao cho $CA = CE$. Chứng minh rằng tam giác ABE là tam giác cân.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

7. Cho tam giác đều DEF. Tia phân giác của góc E cắt cạnh DF tại M. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt tia EM tại N và cắt tia EF tại P. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DNF là tam giác cân.

b) NF vuông góc với EF.

c) Tam giác DFP là tam giác cân.

8. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE. Trên tia đối của BD lấy điểm M sao cho $BM = AC$. Trên tia đối của CE lấy điểm N sao cho $CN = AB$. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$.

b) $\triangle ABM = \triangle NCA$

c) Tam giác MAN là tam giác vuông cân.

9. Cho tam giác DEF cân tại D, đường cao DH, G là trọng tâm. Trên tia đối của HG lấy điểm K sao cho $HG = HK$.

a) Chứng minh rằng $EG = GF = FK = KE$.

b) Chứng minh $\triangle DEK = \triangle DFK$

c) Nếu $FG = \frac{1}{2}DK$ thì tam giác DKF là tam giác gì? Vì sao?

10. Cho tam giác PQR, các đường phân giác ngoài của góc Q và R cắt nhau tại I. Từ P kẻ các đường thẳng vuông góc với hai đường phân giác ngoài trên, cắt cạnh QR tại điểm H và K.

Chứng minh rằng:

a) Chu vi của tam giác PQR bằng HK.

b) Đường trung trực của HK đi qua điểm I;

c) PI là tia phân giác của góc QPR.

11. Cho tam giác cân $MNP(MN = MP > NP)$. Đường trung trực của MP cắt tia PN tại điểm A. Trên tia đối của MA lấy điểm B sao cho $MB = AN$. Chứng minh rằng:

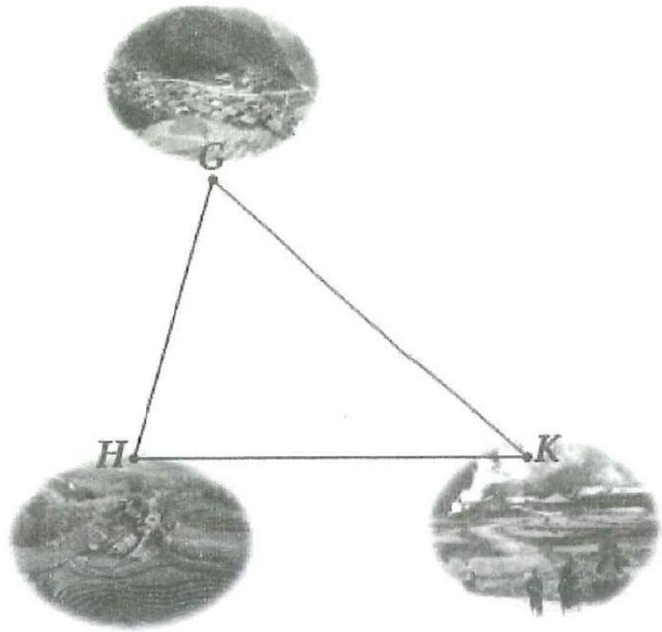
a) Tam giác MAP là tam giác cân.

b) Tam giác BAP là tam giác cân.

12. Ba thôn G, H, K tạo thành ba đỉnh của một tam giác. Nhà nước muốn xây dựng một trường tiểu học cho ba thôn đó.

a) Vậy cần đặt vị trí trường học ở đâu để khoảng cách từ trường tới ba thôn là như nhau?

b) Nối giữa các thôn có một con đường duy nhất. Vậy cần đặt vị trí trường học ở đâu để khoảng cách từ trường học tới ba con đường nối giữa các thôn là như nhau?



13. Ba bạn Mai, Linh, Bách học cùng lớp và chơi rất thân với nhau. Ba bạn muốn trồng một cây xanh và chăm sóc cho cây xanh đó lớn. Biết rằng Nhà ba bạn là ba đỉnh của một tam giác.

a) Vậy cần trồng cây xanh ở đâu để khoảng cách từ cây xanh đến nhà ba bạn là như nhau?

b) Ba bạn muốn đến nhà nhau chỉ có một con đường duy nhất. Vậy cần trồng cây xanh ở đâu để khoảng cách từ cây đến các con đường nối nhà ba bạn là như nhau?

14. Cho tam giác DEF cân tại D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DF và DE. Kẻ DH vuông góc với EF.

a) Chứng minh rằng $EM = FN$ và $\widehat{DEM} = \widehat{DFN}$.

b) Gọi giao điểm của EM và FN là K. Chứng minh rằng $KE = KF$.

c) Chứng minh EM, FN, DH đồng quy.

ÔN TẬP CHƯƠNG IX

1A. Dễ dàng tính được $\widehat{F} = 45^\circ$.

Từ đó ta thấy $\widehat{D} < \widehat{F} < \widehat{E}$ suy ra $EF < DE < DF$.

1B. Tương tự bài 1A. Đáp số: $MN > NP > MP$.

2A. Dễ dàng nhận thấy $AB < AC < BC \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$.

2B. Tương tự bài 2A. Đáp số: $\hat{I} > \widehat{H} > \widehat{G}$.

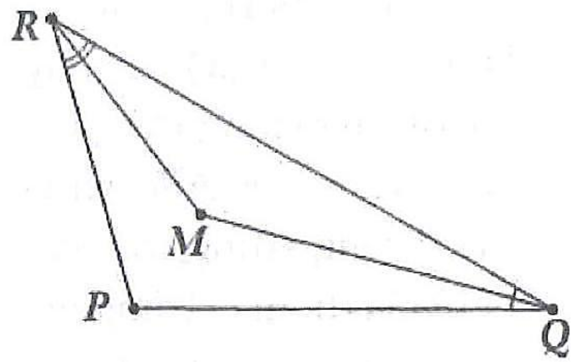
3A. Vì $\hat{P} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{PRQ} + \widehat{PQR} = 80^\circ$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\widehat{PQR} + \widehat{PRQ}\right) = 40^\circ$

Từ đó suy ra

$\widehat{RMQ} = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{PRQ} + \widehat{PQR}\right)$

$= 140^\circ$.



3B. Tương tự bài 3A. Đáp số: 110°.

4A. a) Vì $\widehat{C} < \widehat{B}$ suy ra $AB < AC$.

b) Vì $AB = AM$ và $\widehat{A} = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABM$ đều.

c) Vì $\triangle ABM$ đều nên $BM = AM$.

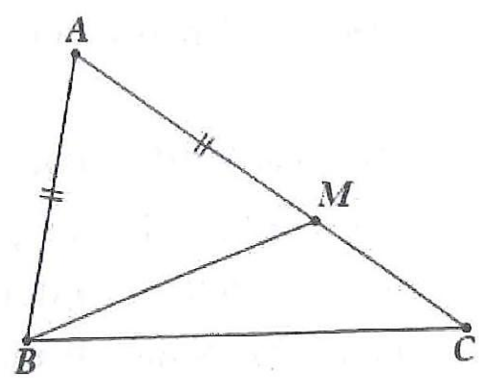
Do đó $BM + MC = AM + MC = AC$.

Mà $BM + MC > BC$ suy ra $AC > BC$ (1).

Ta có $\triangle BMC$ là tam giác tù tại $M\left(\widehat{M} = 120^\circ\right)$

suy ra $BC > BM$ do đó $BC > AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC > BC > AB$.



d) Ta có: $\widehat{BMC} = 120^\circ$ (cmt) nên $\widehat{C} + \widehat{MBC} = 60^\circ$.

Lại có $\widehat{ABC} < 90^\circ\,(\text{gt})$, mà $\widehat{ABM} = 60^\circ$

nên $\widehat{MBC} < 30^\circ \Leftarrow \widehat{MCB} > 30^\circ$.

Do vậy tam giác BMC có: $\widehat{BMC} > \widehat{MCB} > \widehat{MBC}$

$\Rightarrow BC > BM > MC$.

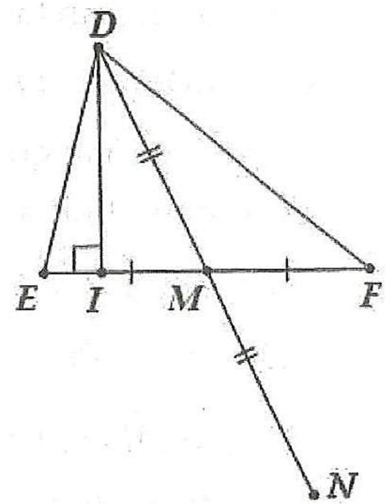
4B. Tương tự bài **4A**.

b) $TU > UV > TV$.

c) $UV > KU > KV$.

5A. a) Ta có $\Delta DIE, \Delta DIF$ là các tam giác vuông tại I nên $DI < DE$ và $DI < DF$. Do đó $2DI < DE + DF$.

Vậy $DI < \frac{1}{2}(DE + DF)$.



b) Trên tia đối MD lấy điểm N sao cho $MD = MN$.

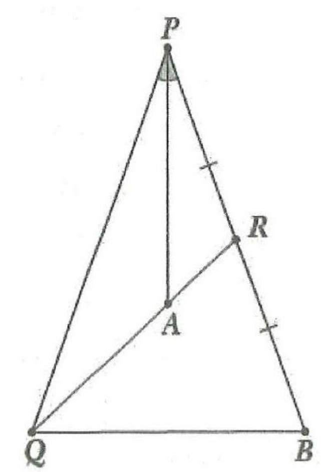
Dễ dàng chứng minh được $\triangle DEM = \triangle NFM$ (c.g.c)

suy ra $DE = NF$ (cạnh tương ứng).

Ta có: $DN < DF + FN$ hay $2DM < DF + DE$

suy ra $DM = \frac{1}{2}(DE + DF)$.

5B. Tương tự bài 5A. HS tự chứng minh.



6A. Xét $\triangle PQB$ có QR là đường trung tuyến.

Mà $QA = 2AR$ nên A là trọng tâm của $\triangle PQB$

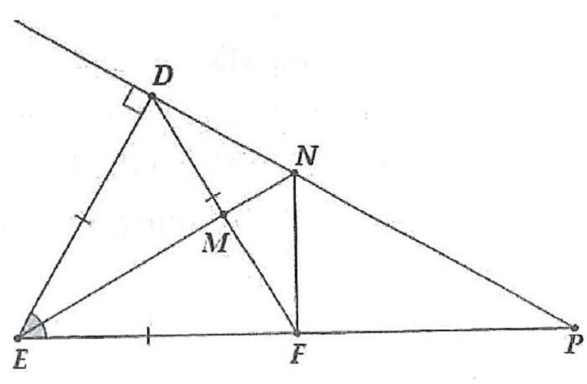
Do đó PA là một đường trung tuyến.

Mà PA là đường phân giác nên theo **Bài 11B**

(Bài 4. Sự đồng quy của ba đường trung tuyến,

ba đường phân giác trong một tam giác) ta có $\triangle PQB$ cân tại P.

6B. Tương tự bài 6A. HS tự chứng minh.



7. a) Dễ dàng chứng minh được $\triangle DEN = \triangle FEN$(c.g.c) suy ra $ND = NF$ (cạnh tương ứng).

Vậy $\triangle DNF$ cân tại N.

b) Vì $\triangle DEN = \triangle FEN(\text{cmt}) \Rightarrow \widehat{NDE} = \widehat{NFE} = 90^\circ$ (góc tương ứng).

Vậy NF vuông góc với EF.

c) Dễ dàng tính được: $\widehat{NDF}=30^\circ, \widehat{DFP}=120^\circ \Rightarrow \hat{P}=30^\circ$.

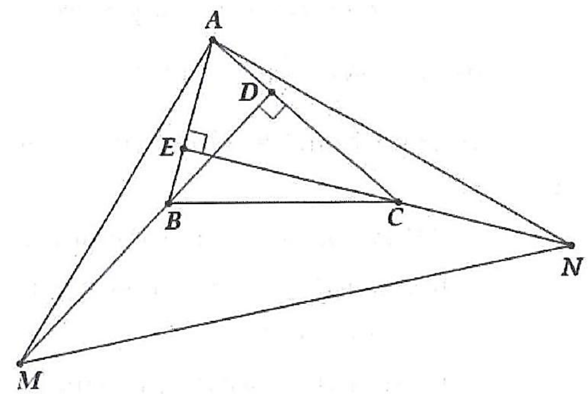
Do đó $\hat{P}=\widehat{PDF}\left(=30^\circ\right)$ suy ra tam giác DFP cân tại F.

8. a) Ta có: $\widehat{ABD}+\widehat{BAD}=\widehat{ACE}+\widehat{BAD}=90^\circ \Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{ACE}$.

Mà $\widehat{ABD}+\widehat{ABM}=\widehat{ACE}+\widehat{ACN}=180^\circ \Rightarrow \widehat{ABM}=\widehat{ACN}$

b) Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABM=\triangle NCA$ (c.g.c)

c) Vì $\triangle ABM=\triangle NCA$ (cmt) nên suy ra AM = AN (cạnh tương ứng) và $\widehat{MAB}=\widehat{ANC}$ (góc tương ứng).



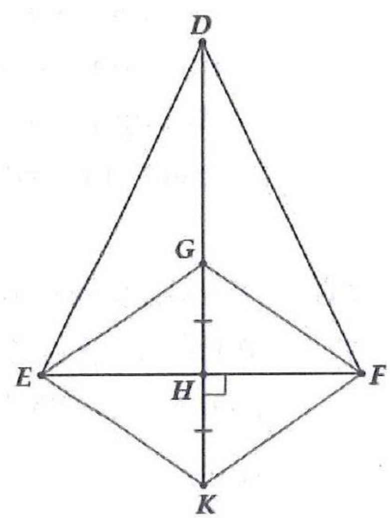
Mà $\widehat{ANC}+\widehat{EAN}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MAB}+\widehat{EAN}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MAN}=90^\circ$

Vậy $\triangle MAN$ là tam giác vuông cân tại A.

9. a) Vì $\triangle DEF$ cân tại D nên đường cao DH ứng với cạnh đáy EF đồng thời là đường trung trực của EF.



Mà G và K thuộc DH nên $GE=GF$ và $KE=KF$.

Mặt khác lại có EH vuông góc với GK tại trung điểm H của GK nên EH là đường trung trực của GK hay $EG=EK$. Vậy $EG=GF=FK=KE$.

b) Dễ dàng chứng minh được $\triangle DEK=\triangle DFK$ (c.c.c)

c) Vì G là trọng tâm của tam giác DEF nên

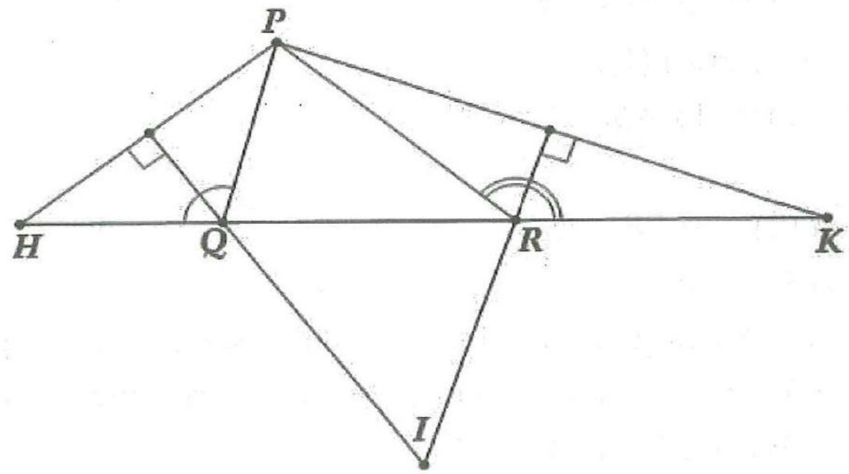
$GD=\dfrac{2}{3}DH \Rightarrow GH=\dfrac{1}{3}DH\,; GK=\dfrac{2}{3}DH \Rightarrow GD=GK$.

Tam giác DFK có đường trung tuyến FG ứng với cạnh DK. Nếu $FG=\dfrac{1}{2}DK$ thì tam giác DFK là tam giác vuông tại F (theo **Bài 10A - Bài 4**. Sự đồng quy của ba đường trung tuyến, ba đường phân giác trong một tam giác).

Do đó $\widehat{DFK}=90^\circ$.

Mà $FG=GK=KF$ nên $\triangle FGK$ là tam giác đều suy ra $\widehat{GKF}=60^\circ \Rightarrow \widehat{HDF}=30^\circ \Rightarrow \widehat{EDF}=60^\circ$ nên tam giác DEF là tam giác đều.

10. a) Dễ dàng chứng minh được $\triangle HQP$ cân tại Q (đường cao đồng thời là đường phân giác) nên $QP=QH$.



Tương tự tam giác PRK cân tại R nên $RP = RK$.

Do đó chu vi tam giác PQR bằng: $PQ + PR + RQ = QH + RK + RQ = HK$.

b) Theo câu a, tam giác PQH cân tại Q nên đường phân giác QI đồng thời là đường trung trực của PH.

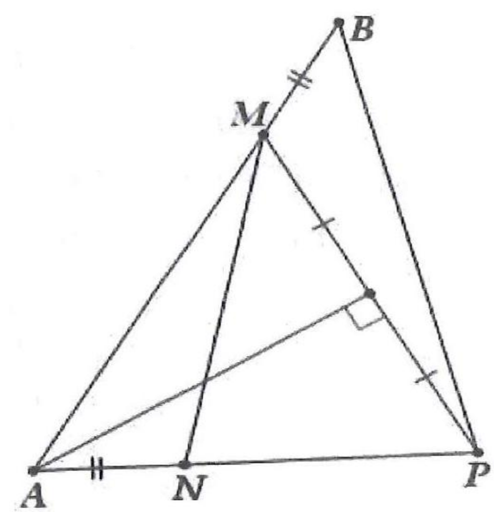
Tương tự IR là đường trung trực của PK.

Vậy I là giao điểm hai đường trung trực của tam giác PHK nên đường trung trực của HK phải đi qua I.

c) Vì I là giao điểm đường phân giác ngoài đỉnh Q nên I cách đều hai cạnh QR và PQ (kéo dài), và đỉnh R nên I cách đều hai cạnh QR và PR (kéo dài) của tam giác PQR. Do đó, I cách đều hai cạnh PQ và PR nên I thuộc phân giác của của góc QPR.

11. a) Vì A thuộc đường trung trực của MP nên $AM = AP$.

Vậy $\triangle MAP$ cân tại A.



b) Vì $\triangle MAP$ cân tại A(cmt) nên $\widehat{APM} = \widehat{AMP}$

Vì $\triangle MNP$ cân tại M nên $\widehat{APM} = \widehat{MNP}$

Do đó $\widehat{AMP} = \widehat{MNP} \Rightarrow \widehat{PMB} = \widehat{MNA}$.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle MNA = \triangle PMB$(c.g.c) suy ra $MA = PB$ (cạnh tương ứng) (1).

Mà $MA = AP$(do $\triangle MAP$ cân tại A) (2).

Từ (1) và (2) nên $PB = AP$.

Vậy $\triangle PAB$ cân tại P.

12. a) Vị trí xây trường học là giao điểm của ba đường trung trực.

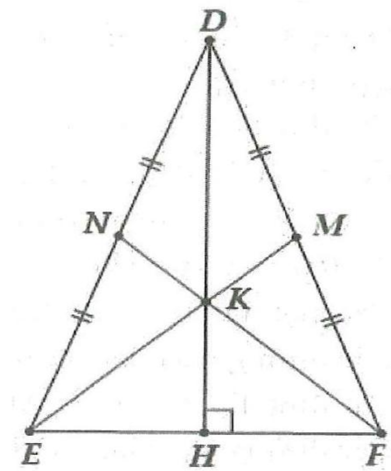
b) Vị trí xây trường học là giao điểm ba đường phân giác.

13. Tương tự bài 12. HS tự làm.

14. a) Dễ dàng chứng minh được $\triangle DEM = \triangle DFN$ (c.g.c)

Từ đó suy ra $EM = FN$ (cạnh tương ứng) và $\widehat{DEM} = \widehat{DFN}$ (góc tương ứng).

b) Từ câu a ta có $\widehat{DEM} = \widehat{DFN}$, mà $\widehat{DEF} = \widehat{DFE}$ (do tam giác DEF cân tại D) nên suy ra $\widehat{KEF} = \widehat{KFE}$. Vậy tam giác KEF cân tại K nên $KE = KF$.



c) Vì M, N lần lượt là trung điểm DF và DE nên EM, FN là các đường trung tuyến của tam giác DEF (1).

Vì tam giác DEF cân tại D có DH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến của tam giác DEF (2).

Từ (1) và (2) suy ra EM, FN, DH đồng quy.