TUYỂN TẬP 1 SỐ CÂU HỎI LIÊN QUAN TỶ SỐ THỂ TÍCH

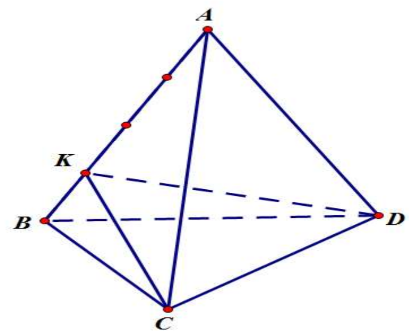
1. KHỐI CHÓP - MỨC 1

Câu 1. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $60\,cm^3$ và điểm K trên cạnh AB sao cho $AB = 4KB$. Tính thể tích V của khối tứ diện $BKCD$.

A. $V = 20\,cm^3$. **B.** $V = 12\,cm^3$. **C.** $V = 30\,cm^3$. **D.** $V = 15\,cm^3$.

Lời giải

Chọn D



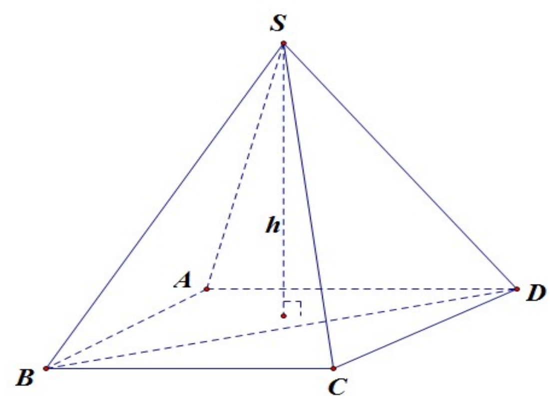
Ta có: $\dfrac{V_{B.KCD}}{V_{B.ACD}} = \dfrac{BK}{BA}.\dfrac{BC}{BC}.\dfrac{BD}{BD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{B.KCD} = \dfrac{1}{4}V_{B.ACD} = \dfrac{1}{4}.60 = 15\left(cm^3\right)$

Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và thể tích bằng 8. Thể tích của khối chóp $S.BCD$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



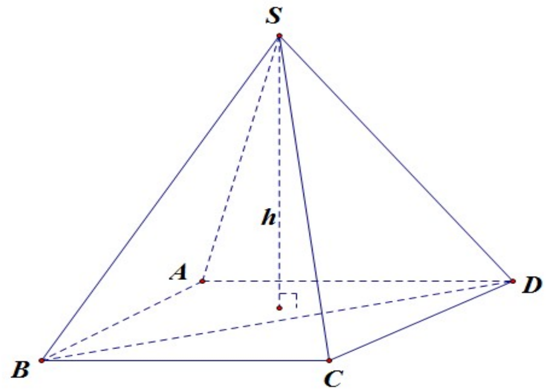
Ta có: Hai hình chóp $S.ABCD$ và $S.BCD$ có cùng chiều cao h là khoảng cách từ S đến mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{V_{BCD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{3}.S_{BCD}.h}{\frac{1}{3}.S_{ABCD}.h} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{BCD} = \dfrac{1}{2}V_{ABCD} = 4.$

Câu 3. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và thể tích bằng 8. Thể tích của khối chóp $S.BCD$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



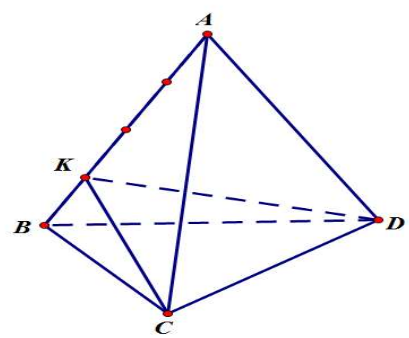
Ta có: Hai hình chóp $S.ABCD$ và $S.BCD$ có cùng chiều cao h là khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ và $S_{BCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}\Rightarrow \frac{V_{BCD}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}.S_{BCD}.h}{\frac{1}{3}.S_{ABCD}.h}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{BCD}=\frac{1}{2}V_{ABCD}=4.$

Câu 4. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $60\,cm^3$ và điểm K trên cạnh AB sao cho $AB=4KB$. Tính thể tích V của khối tứ diện $BKCD$.

A. $V=20\,cm^3$. **B.** $V=12\,cm^3$. **C.** $V=30\,cm^3$. **D.** $V=15\,cm^3$.

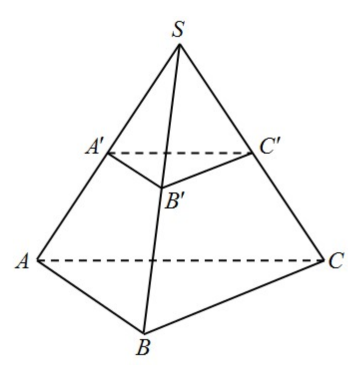
Lời giải

Chọn D



Ta có: $\frac{V_{B.KCD}}{V_{B.ACD}}=\frac{BK}{BA}.\frac{BC}{BC}.\frac{BD}{BD}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{B.KCD}=\frac{1}{4}V_{B.ACD}=\frac{1}{4}.60=15\left(cm^3\right)$

Câu 5. Cho khối chóp $S.ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC (minh hoạ như hình vẽ). Tỉ số $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$ bằng



A. 8. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

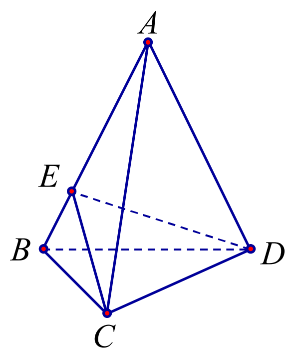
Ta có: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.

Câu 6. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V và điểm E trên cạnh AB sao cho $AE=3EB$. Tính thể tích khối tứ diện $EBCD$ theo V.

A. $\dfrac{V}{4}$. **B.** $\dfrac{V}{3}$. **C.** $\dfrac{V}{2}$. **D.** $\dfrac{V}{5}$.

Lời giải

Chọn A



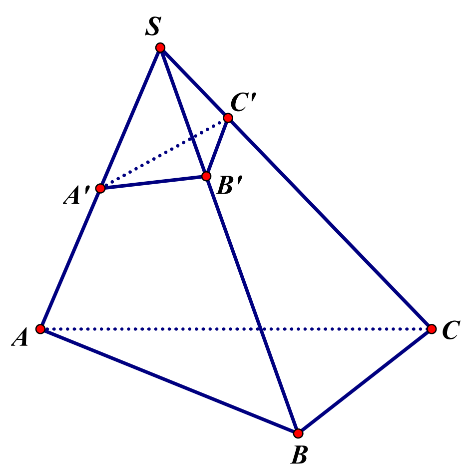
$\dfrac{V_{B.ECD}}{V_{A.BCD}}=\dfrac{BE}{BA}.\dfrac{AC}{AC}.\dfrac{AD}{AD}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow V_{B.ECD}=V_{E.BCD}=\dfrac{1}{4}V$

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABC$, trên ba cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA'=\dfrac{1}{2}SA$, $SB'=\dfrac{1}{3}SB$, $SC'=\dfrac{1}{4}SC$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$. Khi đó tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ là:

A. 12. **B.** $\dfrac{1}{12}$. **C.** 24. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải:

Chọn D



Theo công thức tỉ số thể tích khối chóp, ta được: $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{24}$.

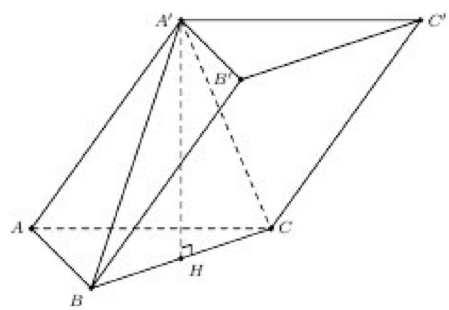
2. KHỐI LĂNG TRỤ - MỨC 1

Câu 8. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 15. Thể tích khối chóp $A'.ABC$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A



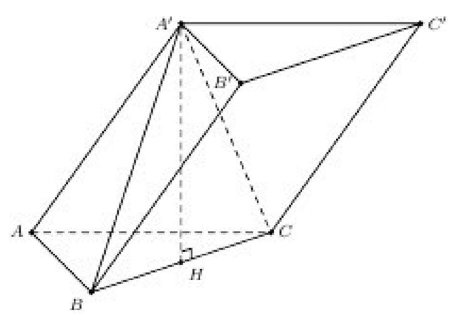
Vì lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khối chóp $A'.ABC$ có diện tích đáy như nhau và cùng chiều cao nên $\frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = 5$.

Câu 9. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 15. Thể tích khối chóp $A'.ABC$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A



Vì lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khối chóp $A'.ABC$ có diện tích đáy như nhau và cùng chiều cao nên $\frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = 5$.

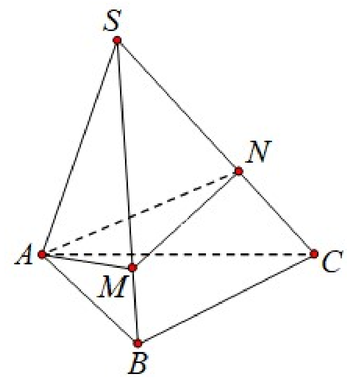
3. KHỐI CHÓP - MỨC 2

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = 3a\sqrt{2}$, $SC = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $3a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Lấy $M \in SB$, $N \in SC$ sao cho $SA = SM = SN = a$.

Vì $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$ do đó khối chóp $SAMN$ là tứ diện đều cạnh a nên $V_{S.AMN} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AMN}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SM} \cdot \frac{SC}{SN} = 6\sqrt{6} \Rightarrow V_{S.ABC} = 6\sqrt{6}V_{S.AMN} = 6\sqrt{6}\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = a^3\sqrt{3}.$

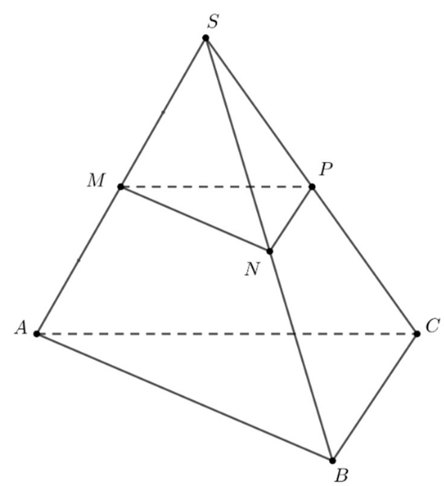
Câu 11. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 48. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC. Thể tích của khối chóp $S.MNP$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có hình vẽ:



Ta có: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}} = \frac{SA}{SM} \cdot \frac{SB}{SN} \cdot \frac{SC}{SP}$.

Theo giả thiết ta có: $\frac{48}{V_{S.MNP}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \Leftrightarrow V_{S.MNP} = 6$ (đvtt).

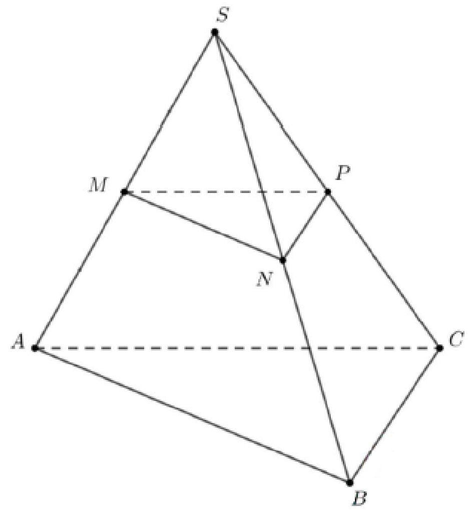
Câu 12. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 48. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC. Thể tích của khối chóp $S.MNP$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có hình vẽ:



Ta có: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}} = \dfrac{SA}{SM} \cdot \dfrac{SB}{SN} \cdot \dfrac{SC}{SP}$.

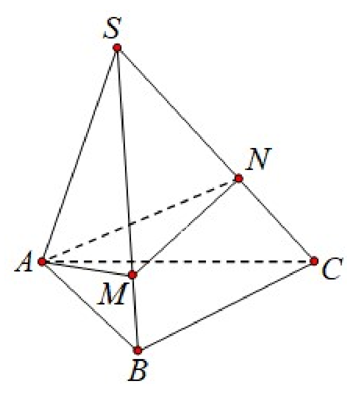
Theo giả thiết ta có: $\dfrac{48}{V_{S.MNP}} = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{2}{1} \Leftrightarrow V_{S.MNP} = 6$ (đvtt).

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = 3a\sqrt{2}$, $SC = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $3a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Lấy $M \in SB$, $N \in SC$ sao cho $SA = SM = SN = a$.

Vì $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$ do đó khối chóp $SAMN$ là tứ diện đều cạnh a nên $V_{S.AMN} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

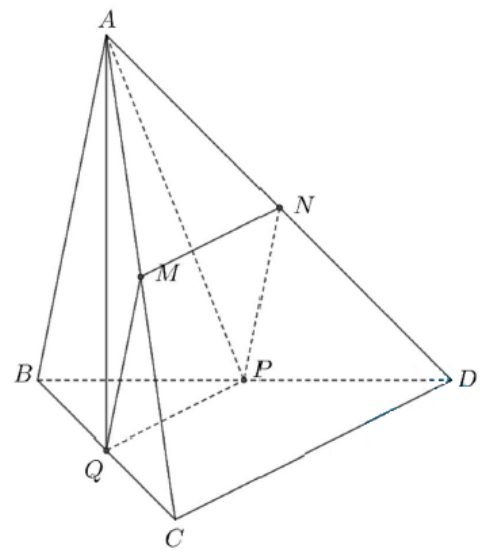
Mặt khác $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.AMN}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB}{SM} \cdot \dfrac{SC}{SN} = 6\sqrt{6} \Rightarrow V_{S.ABC} = 6\sqrt{6} V_{S.AMN} = 6\sqrt{6} \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = a^3\sqrt{3}$.

Câu 14. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích là V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AD, BD, BC. Thể tích khối chóp $A.MNPQ$ là

A. $\frac{V}{12}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{V}{6}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1:

Ta có: $\frac{V_{AMNP}}{V_{ACDP}} = \frac{AM}{AC}.\frac{AN}{AD}.\frac{AP}{AP} = \frac{1}{4}$.

Mà $\frac{V_{ACDP}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2}$.

Vậy $V_{A.MNPQ} = 2V_{AMNP} = 2.\frac{1}{4}V_{ACDP} = 2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = \frac{V}{4}$.

Cách 2:

Ta có: $V_{A.MNPQ} = 2V_{APMQ}$ (do $MNPQ$ là hình thoi).

Mà $V_{APMQ} = V_{BPMQ}$ (do $AB // MQ$) nên $V_{A.MNPQ} = 2V_{BPMQ}$.

Vì P là trung điểm của BD nên $d\left(P,\left(ABC\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(D,\left(ABC\right)\right)$ và $S_{BQM} = \frac{1}{4}S_{ABC}$.

Nên $V_{BPMQ} = \frac{1}{3}d\left(P,\left(ABC\right)\right).S_{BQM} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}d\left(D,\left(ABC\right)\right).\frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{8}.\frac{1}{3}d\left(D,\left(ABC\right)\right).S_{ABC} = \frac{V}{8}$.

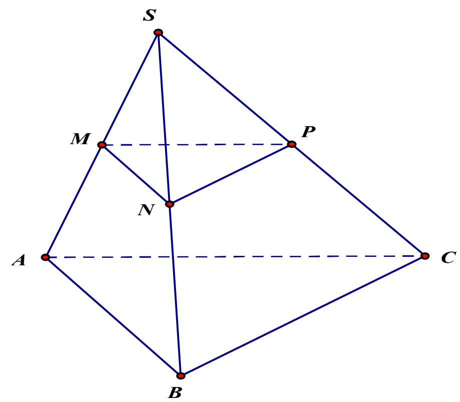
Suy ra $V_{AMNPQ} = \frac{V}{4}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC. Tính tỉ số thể tích của 2 khối chóp $S.MNP$ và $S.ABC$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



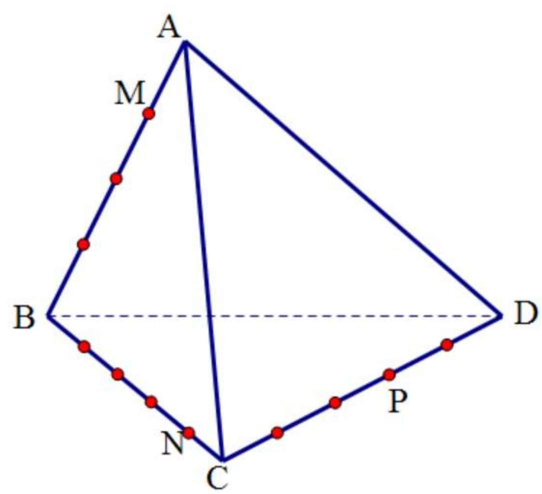
Ta có $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{1}{8}$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Xét điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh BC, điểm P trên cạnh CD sao cho $\dfrac{MB}{MA} = 3, \dfrac{NB}{NC} = 4, \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{3}{2}$. Gọi V_1, V_2 theo thứ tự là thể tích các khối tứ diện $MNBD$ và $NPAC$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$V_1 = \dfrac{1}{3} h_1 . S_1$ với $h_1 = d\left(M, (BCD)\right); S_1 = S_{\Delta NBD}$.

$V_2 = \dfrac{1}{3} h_2 . S_2$ với $h_2 = d\left(A, (BCD)\right);\ S_2 = S_{\Delta CNP}$.

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{h_1 . S_1}{h_2 . S_2} = 5$. Vì $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{3}{4}$ và $S_1 = \dfrac{4}{5} S_{\Delta BCD};\ S_2 = \dfrac{1}{5} . \dfrac{3}{5} S_{\Delta BCD} = \dfrac{3}{25} S_{\Delta BCD} \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{20}{3}$.

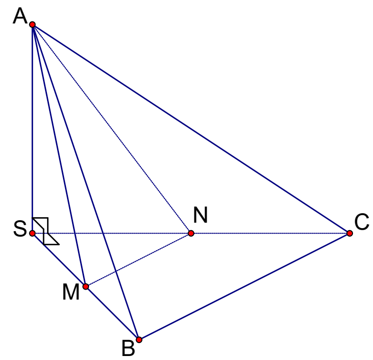
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a$, $SB = 2a$ và $SC = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SC. Tính theo a thể tích khối chóp $S.AMN$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Hình vẽ



Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta SBC} = \frac{1}{6}SA.SB.SC = a^3$

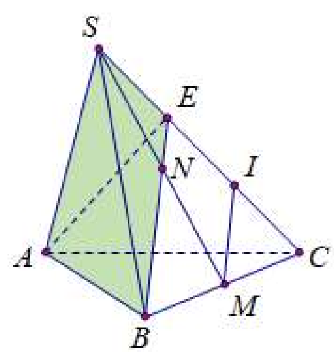
Mặc khác $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{4}$. Suy ra $V_{S.AMN} = \frac{1}{4}V_{S.ABC} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 18. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, SM. Mặt phẳng (ABN) cắt SC tại E. Gọi V_2 là thể tích của khối chóp $S.ABE$ và V_1 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_2 = \frac{1}{4}V_1$. **B.** $V_2 = \frac{1}{3}V_1$. **C.** $V_2 = \frac{1}{6}V_1$. **D.** $V_2 = \frac{1}{8}V_1$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của EC nên IM là đường trung bình của tam giác $BCE \Rightarrow MI//EN$

Mà N là trung điểm của $SM \Rightarrow EN$ là đường trung bình của tam giác SMI suy ra E là trung điểm của SI.

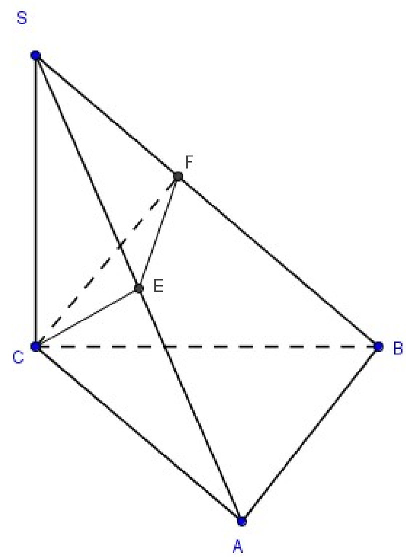
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{SE}{SC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow V_2 = \frac{1}{3}V_1$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $SC \perp (ABC)$ và $SC = a$. Mặt phẳng qua C, vuông góc với SB cắt SA, SB lần lượt tại E và F. Thể tích khối chóp $S.CEF$ là

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\frac{a^3}{36}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{36}$. **D.** $\frac{a^3}{18}$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác vuông SCA có $SC = CA = a$ nên là tam giác vuông cân ở C.

Ta có $AB \perp AC$ và $AB \perp SC$ suy ra $AB \perp (SAC)$ suy ra $AB \perp CE$. (1)

Mặt khác theo giả thiết $SB \perp (CEF) \Rightarrow SB \perp CE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SAB) \perp CE \Rightarrow CE \perp SA$. Do đó E la trung điểm của SA vì tam giác SCA vuông cân ở C.

Trong tam giác vuông SCB có $SC^2 = SF.SB \Leftrightarrow \frac{SC^2}{SB^2} = \frac{SF}{SB}$.

Từ đó ta có $\frac{V_{S.CEF}}{V_{S.CAB}} = \frac{SE}{SA}.\frac{SF}{SB} = \frac{1}{2}.\frac{SC^2}{SB^2} = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{a^2+2a^2} = \frac{1}{6}$

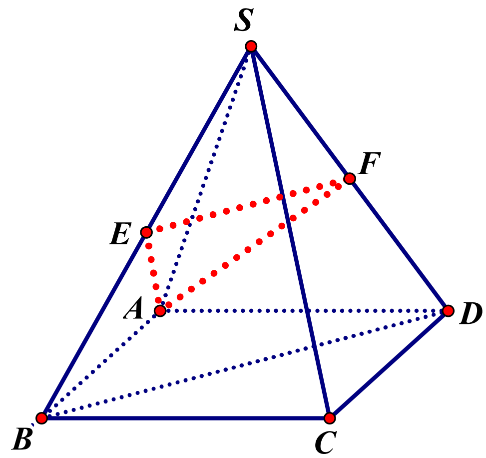
$\Rightarrow V_{S.CEF} = \frac{1}{6}V_{S.CAB} = \frac{1}{6}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}a.a.a = \frac{a^3}{36}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB, SD. Tỉ số $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn C



Áp dụng công thức tỉ số thể tích hình chóp, ta có: $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SE}{SB}.\frac{SF}{SC}=\frac{1}{4}$.

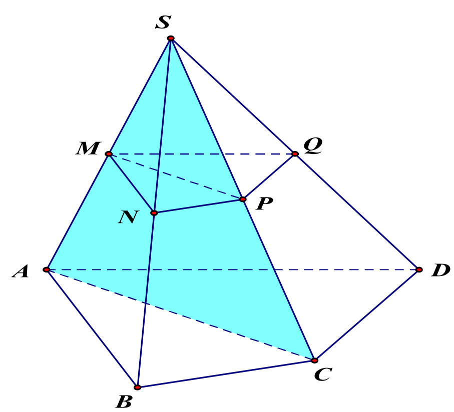
Suy ra $V_{S.AEF}=\frac{1}{4}V_{S.ABD}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}$.

Vậy $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{8}$.

Câu 21. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Biết khối chóp $S.ABCD$ có thể tích là $16a^3$. Tính thể tích khối chóp $S.MNPQ$ theo a.

A. $2a^3$. **B.** a^3. **C.** $8a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải



Chọn A

Cách 1: Mặt phẳng (SAC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối chóp tam giác $S.ABC$ và $S.ADC$, đồng thời cũng chia khối chóp $S.MNPQ$ thành hai khối chóp $S.MNP$ và $S.MQP$.

Áp dụng phương pháp tỷ số thể tích, ta có:

$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC}=\frac{1}{8}$ nên $V_{S.MNP}=\frac{1}{8}V_{S.ABC}$; và $\frac{V_{S.MQP}}{V_{S.ADC}}=\frac{1}{8}$ nên $V_{S.MQP}=\frac{1}{8}V_{S.ADC}$.

Do đó $V_{S.MNPQ}=V_{S.MNP}+V_{S.MQP}=\frac{1}{8}\left(V_{S.ABC}+V_{S.ADC}\right)\Leftrightarrow V_{S.MNPQ}=\frac{1}{8}V_{S.ABCD}=\frac{1}{8}.16a^3=2a^3$.

Cách 2: Ta dễ dàng chỉ ra được tứ giác $MNPQ$ đồng dạng với $ABCD$ theo tỷ số $\frac{1}{2}$ nên $S_{MNPQ}=\left(\frac{1}{2}\right)^2.S_{ABCD}$. Đồng thời $d\left(S,\left(MNPQ\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(S,\left(ABCD\right)\right)$.

Do đó, ta có:

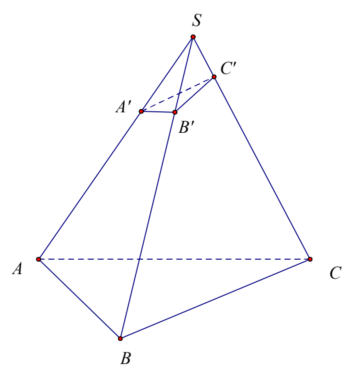
$V_{S.MNPQ}=\frac{1}{3}S_{MNPQ}.d\left(S,\left(MNPQ\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S_{ABCD}.d\left(S,\left(ABCD\right)\right)=\frac{1}{8}V_{S.ABCD}=\frac{1}{8}.16a^3=2a^3$.

Câu 22. Cho khối chóp $S.ABC$ có các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC thoả $3SA'=SA$, $4SB'=SB$, $5SC'=3SC$. Biết thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ bằng $5\left(\text{cm}^3\right)$. Tìm thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $120\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $60\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $80\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $100\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn D



Áp dụng tỉ lệ thể tích ta có:

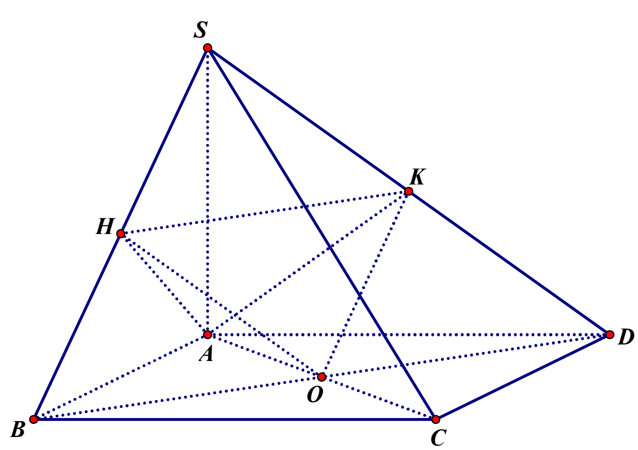
$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{3}{5}=\frac{1}{20}\Rightarrow V_{S.ABC}=20V_{S.A'B'C'}=100\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SB, SD. Tỷ số thể tích $\frac{V_{AOHK}}{V_{S.ABCD}}$ bằng

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C



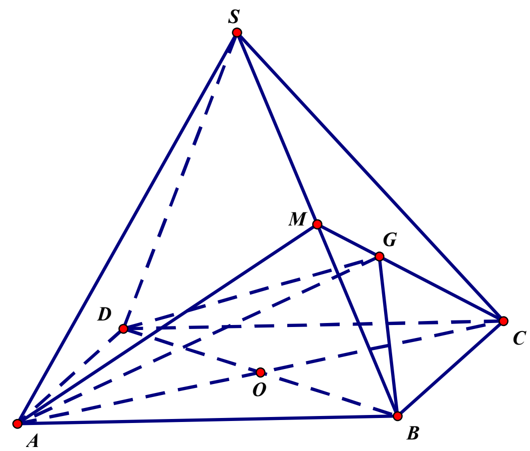
Vì H và K, O lần lượt là trung điểm của SB và SD, BD nên $S_{OHK}=\frac{1}{4}S_{SBD}$

Suy ra $V_{AOHK}=\frac{1}{4}V_{A.SBD}=\frac{1}{4}V_{S.ABD}=\frac{1}{8}V_{S.ABCD}\Rightarrow\frac{V_{AOHK}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{8}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là trung điểm SB và G là trọng tâm của tam giác SBC. Gọi V, V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $M.ABC$ và $G.ABD$, tính tỉ số $\frac{V}{V'}$.

A. $\frac{V}{V'}=\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{V}{V'}=\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{V}{V'}=\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{V}{V'}=\frac{2}{3}$.

Lời giải



Chọn A

Cách 1:

Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Ta có $\frac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}=\frac{1}{2}$.

Mặt khác $V_{S.ABC}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}\Rightarrow V_{M.ABC}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

Dễ thấy $d\left(G,\left(ABCD\right)\right)=\frac{1}{3}d\left(S,\left(ABCD\right)\right)$; $S_{ABD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Vậy $V_{G.ABD}=\frac{1}{6}.V_{ABCD}$.

Suy ra, $\frac{V_{M.ABC}}{V_{G.ABD}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{2}$.

Cách 2:

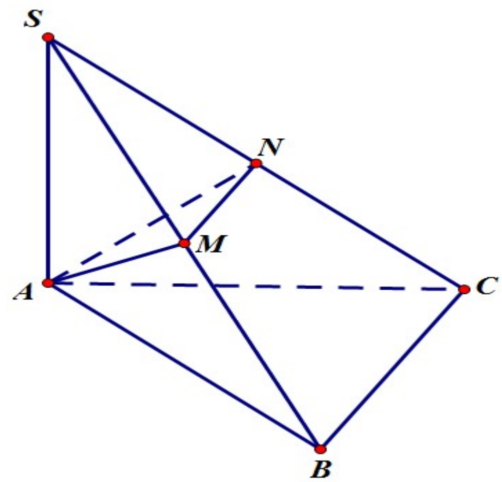
$\frac{V_{G.ABD}}{V_{M.ABC}}=\frac{V_{G.ABC}}{V_{M.ABC}}=\frac{GC}{MC}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{V_{M.ABC}}{V_{G.ABD}}=\frac{3}{2}$

Câu 25. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Thể tích V của khối chóp $A.BCNM$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Do $SA=AB=AC=a$ nên các tam giác SAC,SAB cân tại A.

Theo đề bài M, N là hình chiếu của A trên SB, SC nên M, N lần lượt là trung điểm SB, SC.

Khi đó: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM.SN}{SB.SC}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow V_{S.AMN}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

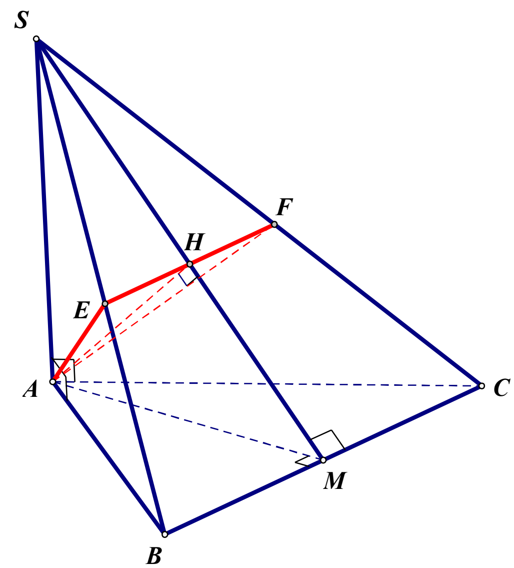
Vậy thể tích khối chóp $A.BCNM$ là $V_{A.BMNC}=V_{S.ABC}-V_{S.AMN}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}-\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm BC. Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SM cắt SB, SC lần lượt tại E, F. Biết $V_{S.AEF}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABC}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{8}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3}{5}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp SM$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SM. Do $FE = (P) \cap (SBC)$ $\Rightarrow FE \perp SM \Rightarrow FE \parallel BC$ và FE đi qua H.

$V_{S.AEF} = \frac{1}{4}V_{S.ABC} \Leftrightarrow \frac{SE}{SB}.\frac{SF}{SC} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{SH}{SM}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SH}{SM} = \frac{1}{2}$. Vậy H là trung điểm cạnh SM.

Suy ra ΔSAM vuông cân tại $A \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

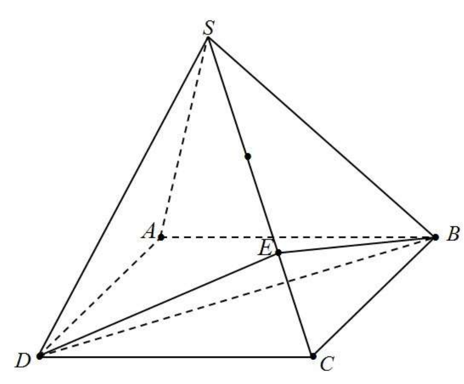
Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích bằng 1. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SEBD$.

A. $V = \frac{2}{3}$. **B.** $V = \frac{1}{6}$. **C.** $V = \frac{1}{3}$. **D.** $V = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\frac{V_{SEBD}}{V_{SCBD}} = \frac{SE}{SC} = \frac{2}{3}$.

Mà: $V_{SBCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SEBD} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Câu 28. Cho khối chóp tam giác đều. Nếu tăng cạnh đáy lên hai lần và giảm chiều cao đi bốn lần thì thể tích của khối chóp đó sẽ:

A. Không thay đổi. **B.** Tăng lên hai lần. **C.** Giảm đi ba lần. **D.** Giảm đi hai lần.

Lời giải

Chọn A

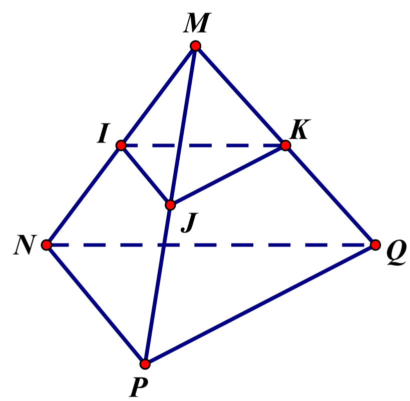
Nếu tăng cạnh đáy lên hai lần thì diện tích đáy tăng bốn lần. Vì giảm chiều cao đi bốn lần nên thể tích khối chóp không thay đổi.

Câu 29. Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I; J; K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN; MP; MQ. Tỉ số thể tích $\frac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn D



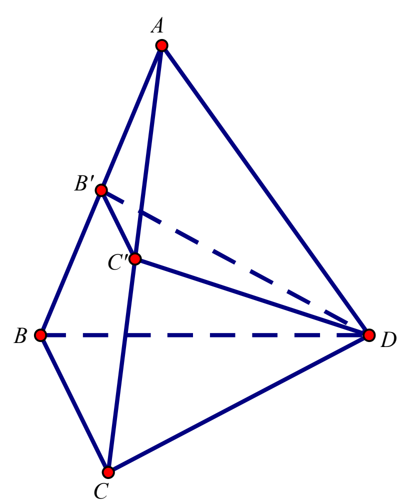
Ta có: $\frac{V_{M.IJK}}{V_{M.NPQ}} = \frac{MI}{MN}.\frac{MJ}{MP}.\frac{MK}{MQ} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ bằng:

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

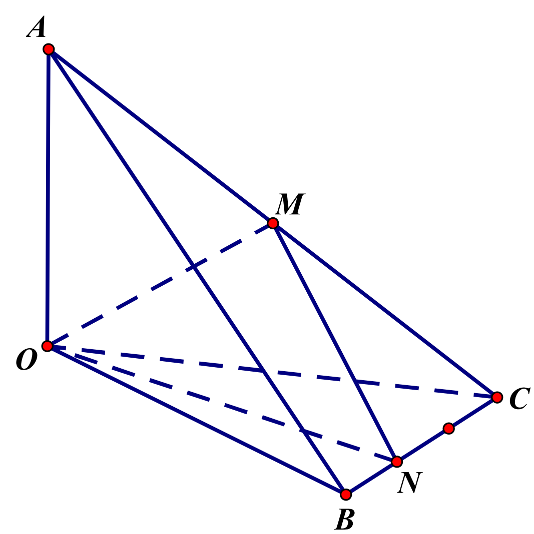
Câu 31. Cho tứ diện $OABC$ có $OA=a, OB=2a,\ OC=3a$ đôi một vuông góc với nhau tại O. Lấy M là trung điểm của cạnh AC; N nằm trên cạnh CB sao cho $CN=\frac{2}{3}CB$. Tính theo a thể tích khối chóp $OAMNB$.

A. $2a^3$. **B.** $\frac{1}{6}a^3$. **C.** $\frac{2}{3}a^3$. **D.** $\frac{1}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:



$V_{OABC}=\frac{1}{3}d\left(A;(OBC)\right).S_{\Delta OBC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=a^3$

$V_{MOBC}=\frac{1}{3}d\left(M;(OBC)\right).S_{\Delta OCN}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.d\left(M;(OBC)\right)\frac{2}{3}.S_{\Delta OBC}=\frac{1}{3}.V_{OABC}=\frac{a^3}{3}$

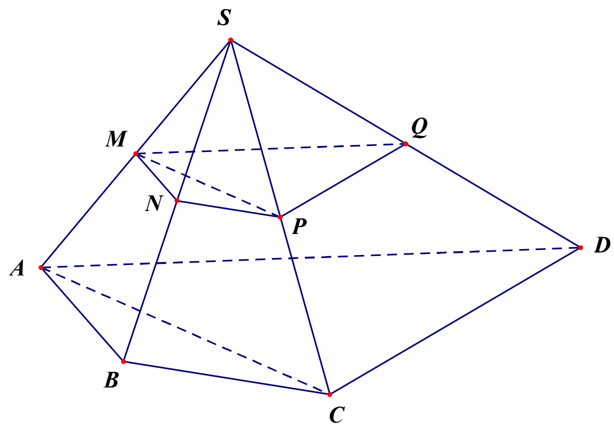
$V_{AOMNB}=V_{OABC}-V_{MOBC}=a^3-\frac{a^3}{3}=\frac{2a^3}{3}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.MNPQ$ và $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{S.MNP}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABC}$ và $V_{S.MQP}=\dfrac{1}{8}V_{S.ADC}$

$\Rightarrow V_{S.MNPQ}=V_{S.MQP}+V_{S.MNP}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABC}+\dfrac{1}{8}V_{S.ADC}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$

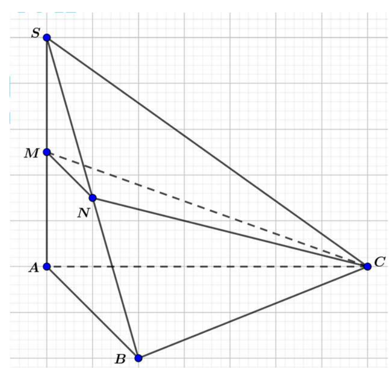
$\Rightarrow \dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{8}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC đều, $AB=a$, góc giữa SB và (ABC) bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tính thể tích khối chóp $S.MNC$

A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\widehat{(SB,(ABC))}=(SB,AB)=\widehat{SBA}=60°$.

$SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{4}a^3$.

Mà $\dfrac{V_{S.CMN}}{V_{S.CAB}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow V_{S.CMN}=\dfrac{1}{4}V_{S.CAB}=\dfrac{1}{16}a^3$.

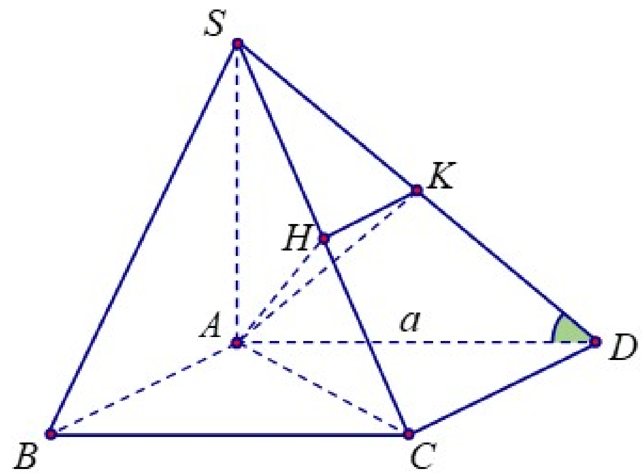
Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi

$V_1;V_2$ lần lượt là thể tích khối chóp $S.AHK$ và $S.ACD$ với H, K lần lượt là trung điểm của SC và SD. Tính độ dài đường cao của khối chóp $S.ABCD$ và tỉ số $k=\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $h=a;k=\dfrac{1}{4}$. **B.** $h=a;k=\dfrac{1}{6}$. **C.** $h=2a;k=\dfrac{1}{8}$. **D.** $h=2a;k=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Do (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy nên $SA\perp(ABCD)$.

Ta có $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp SD$.

Dễ thấy góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SDA}=45°$.

Ta có tam giác SAD là tam giác vuông cân đỉnh A. Vậy $h=SA=a$.

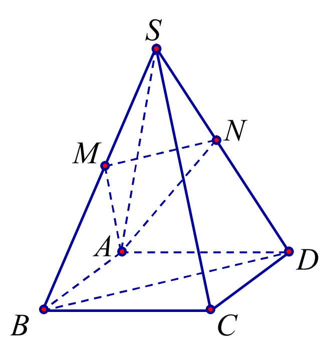
Áp dụng công thức tỉ số thể tích có: $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{SH}{SC}.\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh SB và SD sao cho $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SN}{SD}=k$. Tìm giá trị của k để thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng $\dfrac{1}{8}$.

A. $k=\dfrac{1}{8}$. **B.** $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $k=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $k=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD} = k^2$.

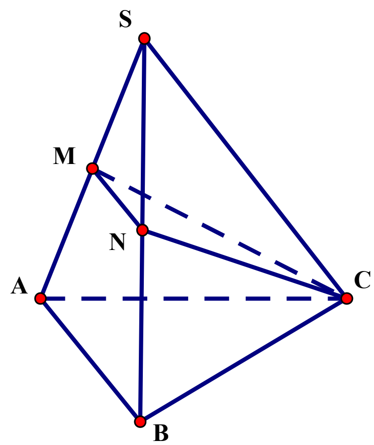
Mà $V_{S.AMN} = \dfrac{1}{8}$, $V_{S.ABD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{8} = k^2 \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tính tỉ số $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNC}}$.

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

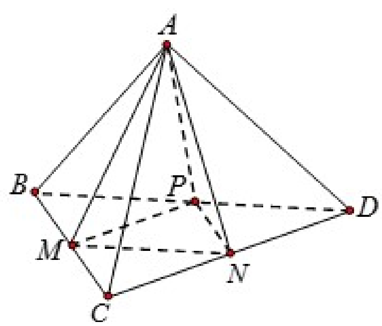
Chọn A



Ta có $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNC}} = \dfrac{SA.SB.SC}{SM.SN.SC} = 4$.

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một và $AB = 3a$, $AC = 6a$, $AD = 4a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, BD. Tính thể tích khối đa diện $AMNP$.

A. $3a^3$. **B.** $12a^3$. **C.** a^3. **D.** $2a^3$.



Lời giải

Chọn A

Cách 1: Khối tứ diện $ABCD$ được chia thành bốn tứ diện có thể tích bằng nhau.

Mà $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.AC.AD = 12a^3$ nên $V_{AMNP} = \dfrac{1}{4}V_{ABCD} = 3a^3$.

Cách 2: Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.AC.AD = 12a^3$.

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 3a\sqrt{5}$; $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = 2a\sqrt{13}$; $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5a$.

Diện tích tam giác BCD: $S_{BCD}=\sqrt{p\left(p-BC\right)\left(p-CD\right)\left(p-BD\right)}$, với $p=\dfrac{3a\sqrt{5}+2a\sqrt{13}+5a}{2}$

$\Rightarrow S_{BCD}=3a^2\sqrt{29}\Rightarrow d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}=\dfrac{12a}{\sqrt{29}}$.

Mà M, N, P là trung điểm các cạnh BC, CD, BD nên hai tam giác BCD và MNP đồng dạng theo tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ nên $S_{MNP}=\dfrac{1}{4}S_{BCD}$

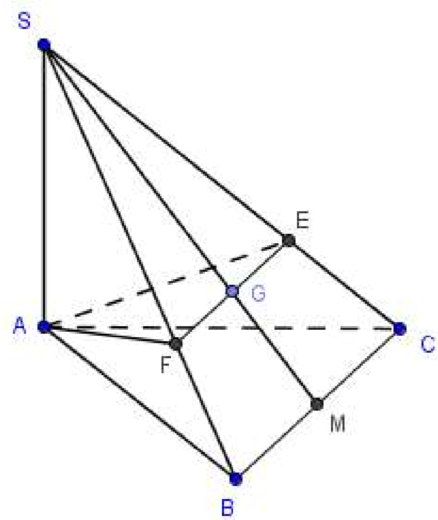
Khi đó $V_{AMNP}=\dfrac{1}{3}.S_{MNP}.d\left(A,\left(MNP\right)\right)=3a^3$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là ΔABC vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$, $SA\perp\left(ABC\right)$, $SA=a$. Gọi G là trọng tâm của ΔSBC, $mp\left(\alpha\right)$ đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

A. $\dfrac{4a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{4a^3}{27}$. **C.** $\dfrac{5a^3}{54}$. **D.** $\dfrac{2a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Trong mặt phẳng $\left(SBC\right)$. Qua G kẻ đường thẳng song song với BC và lần lượt cắt SC, SB tại E, F. Khi đó ta được khối đa diện không chứa đỉnh S là $ABCEF$.

Ta có G là trọng tâm của ΔSBC nên $\dfrac{V_{S.AFE}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SF}{SB}.\dfrac{SE}{SC}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$.

Do đó $V_{S.AFE}=\dfrac{4}{9}.V_{S.ABC}\Rightarrow V_{ABCEF}=V_{S.ABC}-\dfrac{4}{9}.V_{S.ABC}=\dfrac{5}{9}.V_{S.ABC}$.

Vì tam giác ΔABC vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$ nên $AB=BC=a$.

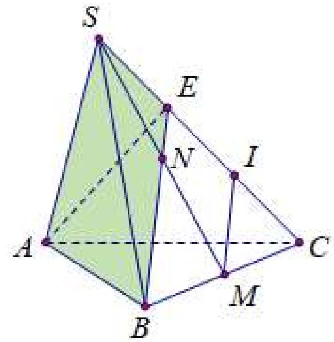
Mặt khác $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}a.a.a=\dfrac{a^3}{6}$. Suy ra $V_{ABCEF}=\dfrac{5}{9}.\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{5a^3}{54}$..

Câu 39. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, SM. Mặt phẳng $\left(ABN\right)$ cắt SC tại E. Gọi V_2 là thể tích của khối chóp $S.ABE$ và V_1 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_2 = \frac{1}{4}V_1$. **B.** $V_2 = \frac{1}{3}V_1$. **C.** $V_2 = \frac{1}{6}V_1$. **D.** $V_2 = \frac{1}{8}V_1$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của EC nên IM là đường trung bình của tam giác $BCE \Rightarrow MI // EN$

Mà N là trung điểm của $SM \Rightarrow EN$ là đường trung bình của tam giác SMI suy ra E là trung điểm của SI.

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{SE}{SC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow V_2 = \frac{1}{3}V_1$.

4. KHỐI LĂNG TRỤ - MỨC 2

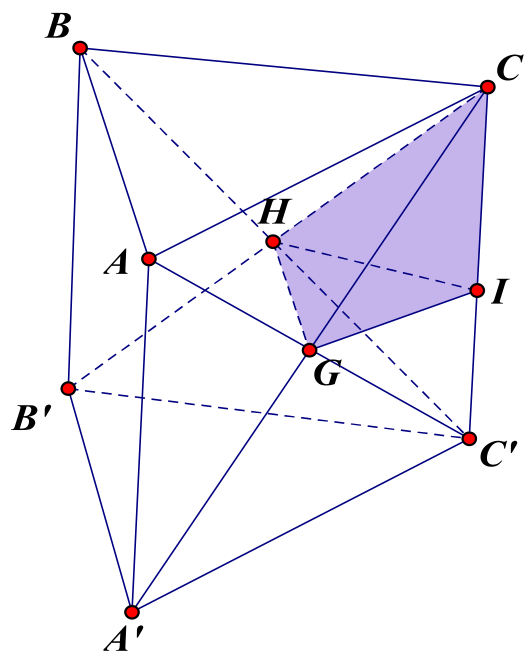
Câu 40. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Lấy H, G lần lượt là tâm của hình chữ nhật $BCC'B'$ và $ACC'A'$, I là trung điểm của CC'. Tính tỉ số thể tích của tứ diện $CHGI$ và tứ diện $CB'A'C'$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{30}{8}$. **D.** $\frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{V_{CHGI}}{V_{CB'A'C'}}=\frac{CH}{CB'}.\frac{CG}{CA'}.\frac{CI}{CC'}=\frac{CH}{2CH}.\frac{CG}{2CG}.\frac{CI}{2CI}=\frac{1}{8}.$$

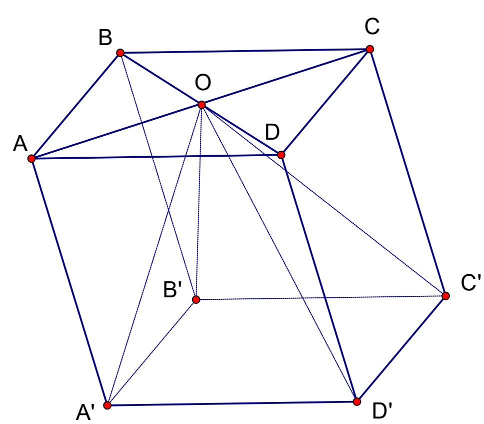


Câu 41. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi O là giao điểm AC và BD. Thể tích khối chóp $O.A'B'C'D'$ bằng bao nhiêu lần thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



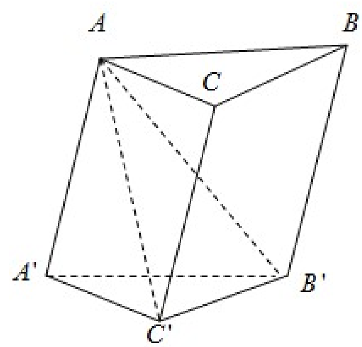
Do khối chóp và khối hộp có cùng chiều cao và diện tích đáy nên $\frac{V_{O.A'B'C'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{3}$

Câu 42. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, biết rằng thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ bằng 12 .Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. 24. **B.** 36. **C.** 18. **D.** 32.

Lời giải

Chọn C



Ta có: Đặt $V=V_{ABC.A'B'C'}$

$V=h.S_{A'B'C'}$.

$V_{A.A'B'C'}=\frac{1}{3}h.S_{A'B'C'}=\frac{1}{3}V$.

$V_{ABCC'B'}=V-V_{A.A'B'C'}=\frac{2}{3}V=12\Leftrightarrow V=18$.

Câu 43. **(Đề Thi thử Trường Chuyên Lê Thánh Tông_Quảng Nam_2020)** Gọi V là thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và V_1 là thể tích của tứ diện $A'BCD$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $V=4V_1$. **B.** $V=2V_1$. **C.** $V=6V_1$. **D.** $V=3V_1$.

Lời giải

Chọn C

Gọi h là khoảng cách từ A' đến mp $(ABCD)$. Khi đó, h là chiều cao của khối hộp cũng là chiều cao của tứ diện $A'BCD$.

Ta có: $\frac{V}{V_1}=\frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{V_{A'BCD}}=\frac{S_{ABCD}.h}{\frac{1}{3}S_{BCD}.h}=\frac{2S_{BCD}.h}{\frac{1}{3}S_{BCD}.h}=6$

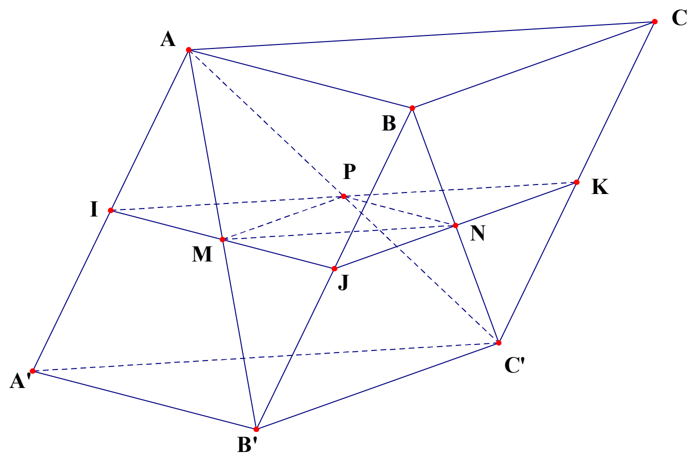
$\Rightarrow V=6V_1$.

Câu 44. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và diện tích đáy bằng 3 . Gọi M , N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$ và $CAA'C'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M , N, P bằng

A. 6 . **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = 3.4 = 12$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC'.

$\Rightarrow V_{ABC.IJK} = 6$.

Áp dụng bài toán tỷ số thể tích ta có: $\dfrac{V_{A.IMP}}{V_{A.A'B'C'}} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{A.IMP} = \dfrac{1}{8} V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}$

Dễ thấy $V_{A.IMP} = V_{B.MNJ} = V_{C.NPK} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $V_{ABC.MNP} = V_{ABC.IJK} - 3V_{A.IMP} = 6 - 3.\dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}$.

Câu 45. Nếu cạnh của một hình lập phương tăng lên 3 lần thì thể tích của hình lập phương đó tăng lên bao nhiêu lần?

A. 27. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi cạnh của hình lập phương là a thì thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Khi tăng cạnh lên 3 lần thì cạnh là $3a$, thể tích khối lập phương mới là $V^* = (3a)^3 = 27a^3$.

Khi đó $V^* = 27V$.

Câu 46. *Nếu cạnh của một hình lập phương tăng lên 2 lần thì thể tích của hình lập phương đó tăng lên bao nhiêu lần?*

A. 9. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Gọi cạnh của hình lập phương là a thì thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Khi tăng cạnh lên 2 lần thì cạnh là $2a$, thể tích khối lập phương mới là $V^* = (2a)^3 = 8a^3$.

Khi đó $V^* = 8V$.

Câu 47. *Nếu thể tích của một hình lập phương tăng lên 8 lần thì cạnh của hình lập phương đó tăng lên bao nhiêu lần?*

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Gọi cạnh của hình lập phương là a thì thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Khi tăng thể tích lên 8 lần thì thể tích là $V^* = 8V = 8a^3$.

Khi đó cạnh của hình lập phương là $2a$. Kết luận: Cạnh tăng lên 2 lần.

Câu 48. **(Đề Thi thử Trường Chuyên Lê Thánh Tông_Quảng Nam_2020)** Gọi V là thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và V_1 là thể tích của tứ diện $A'BCD$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $V = 4V_1$. **B.** $V = 2V_1$. **C.** $V = 6V_1$. **D.** $V = 3V_1$.

Lời giải

Chọn C

Gọi h là khoảng cách từ A' đến mp $(ABCD)$. Khi đó, h là chiều cao của khối hộp cũng là chiều cao của tứ diện $A'BCD$.

Ta có: $\frac{V}{V_1} = \frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{V_{A'BCD}} = \frac{S_{ABCD}.h}{\frac{1}{3}S_{BCD}.h} = \frac{2S_{BCD}.h}{\frac{1}{3}S_{BCD}.h} = 6$

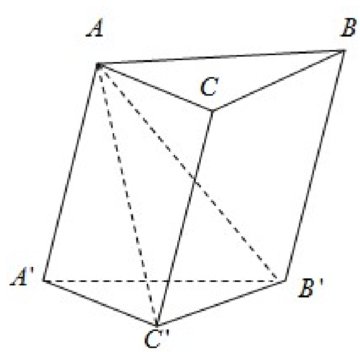
$\Rightarrow V = 6V_1$.

Câu 49. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, biết rằng thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ bằng 12. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. 24. **B.** 36. **C.** 18. **D.** 32.

Lời giải

Chọn C



Ta có: Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$

$V = h.S_{A'B'C'}$.

$V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}h.S_{A'B'C'} = \frac{1}{3}V$.

$V_{ABCC'B'} = V - V_{A.A'B'C'} = \frac{2}{3}V = 12 \Leftrightarrow V = 18$.

Câu 50. Nếu cạnh của một hình lập phương tăng lên 3 lần thì thể tích của hình lập phương đó tăng lên bao nhiêu lần?

A. 27. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi cạnh của hình lập phương là a thì thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Khi tăng cạnh lên 3 lần thì cạnh là $3a$, thể tích khối lập phương mới là $V^* = (3a)^3 = 27a^3$.

Khi đó $V^* = 27V$.

Câu 51. *Nếu cạnh của một hình lập phương tăng lên 2 lần thì thể tích của hình lập phương đó tăng lên bao nhiêu lần?*

A. 9. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Gọi cạnh của hình lập phương là a thì thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Khi tăng cạnh lên 2 lần thì cạnh là $2a$, thể tích khối lập phương mới là $V^* = (2a)^3 = 8a^3$.

Khi đó $V^* = 8V$.

Câu 52. *Nếu thể tích của một hình lập phương tăng lên 8 lần thì cạnh của hình lập phương đó tăng lên bao nhiêu lần?*

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Gọi cạnh của hình lập phương là a thì thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Khi tăng thể tích lên 8 lần thì thể tích là $V^* = 8V = 8a^3$.

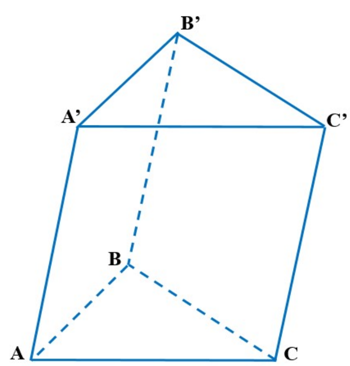
Khi đó cạnh của hình lập phương là $2a$. Kết luận: Cạnh tăng lên 2 lần.

Câu 53. Khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $66\,cm^3$. Tính thể tích khối tứ diện $A'.ABC$.

A. $11\,cm^3$. **B.** $33\,cm^3$. **C.** $44\,cm^3$. **D.** $22\,cm^3$.

Lời giải

Chọn D



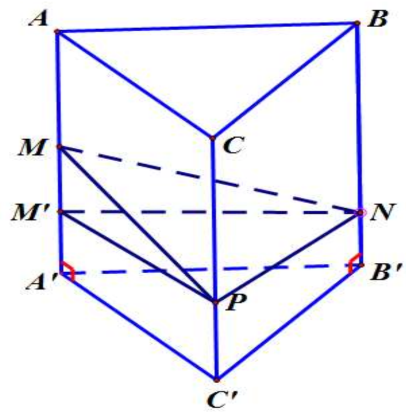
Ta có: $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.\mathrm{d}\left(A',(ABC)\right).S_{ABC} = \frac{1}{3}.V_{A'B'C'.ABC} = 22\,cm^3$.

Câu 54. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng

A. $\frac{20}{27}V$. **B.** $\frac{11}{18}V$. **C.** $\frac{9}{16}V$. **D.** $\frac{2}{3}V$.

Lời giải

Chọn B



Lấy M' thuộc đoạn AA' sao cho $AM' = \frac{2}{3}AA'$, khi đó ta có:

$MM' = AM' - AM = \frac{2}{3}AA' - \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{6}AA'$

Dễ thấy $V_{M.M'NP} = \frac{1}{18}V$ và $V_{ABC.M'NP} = \frac{2}{3}V$

Gọi thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ là V'

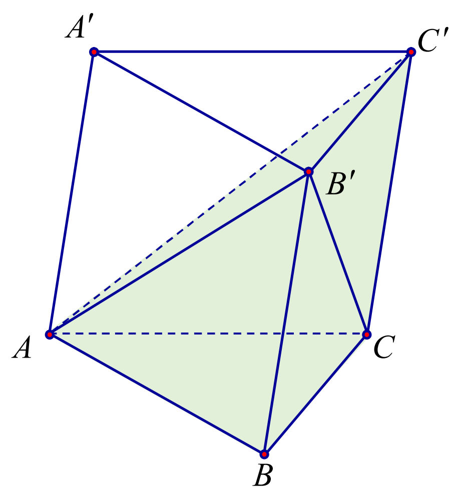
Ta có $V' = V_{ABC.M'NP} - V_{M.M'NP} = \frac{2}{3}V - \frac{1}{18}V = \frac{11}{18}V$

Câu 55. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\frac{3V}{4}$. **B.** $\frac{2V}{3}$. **C.** $\frac{V}{2}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

Lời giải

Chọn B



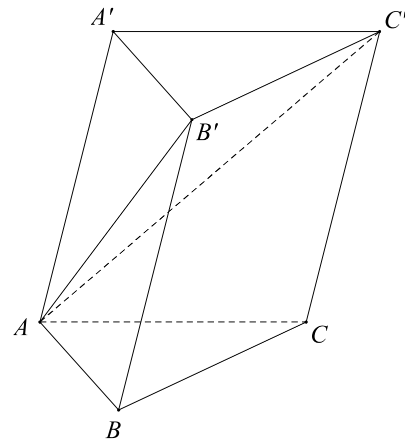
Ta có: $V_{ABCB'C'} = V_{B'ABC} + V_{C'B'AC} = \frac{V}{3} + \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$

Câu 56. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Tính thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ theo V.

A. $\frac{2}{3}V$. **B.** $\frac{2}{5}V$. **C.** $\frac{1}{2}V$. **D.** $\frac{1}{3}V$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}V$.

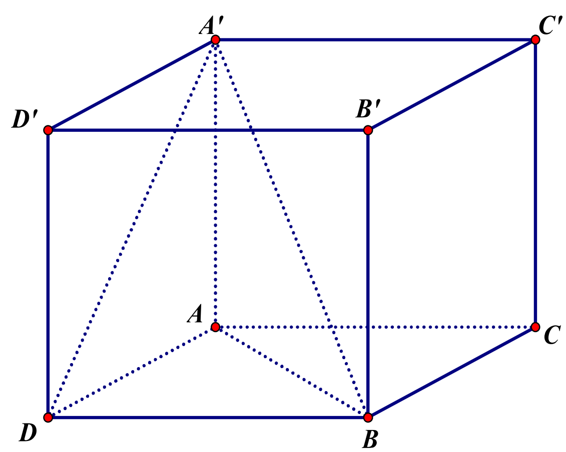
Suy ra $V_{A.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$.

Câu 57. Gọi V_1 là thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_2 là thể tích khối tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $V_1 = 4V_2$. **B.** $V_1 = 6V_2$. **C.** $V_1 = 2V_2$. **D.** $V_1 = 8V_2$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Giả sử cạnh của hình lập phương là a, ta có $V_1 = a^3$ và $V_2 = \frac{1}{3}AA'.S_{ABD} = \frac{1}{6}a^3$ suy ra $V_1 = 6V_2$.

Cách 2: Ta có $V_2 = \frac{1}{3}AA'.S_{ABD} = \frac{1}{3}AA'.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}AA'.S_{ABCD} = \frac{1}{6}V_1 \Rightarrow V_1 = 6V_2$.

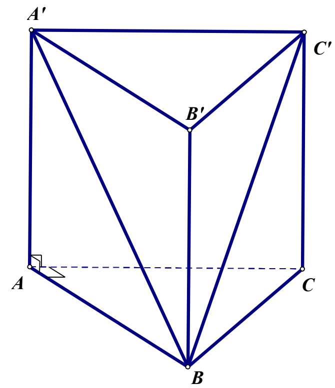
Cách 3: Ta có $V_{A'ABD} = \frac{1}{3}V_{ABD.A'B'D'} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} \Rightarrow V_1 = 6V_2$.

Câu 58. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$, $A'A = 2a$. Thể tích của khối tứ diện $A'BB'C$ là

A. $\frac{2a^3}{3}$. **B.** $2a^3$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



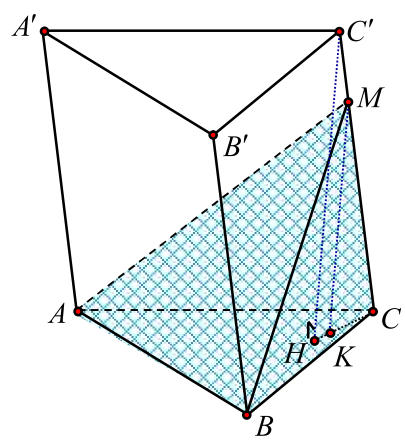
Ta có $V_{A'BB'C} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}2a.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{3}$.

Câu 59. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CM = 3C'M$. Tính thể tích V của khối chóp $M.ABC$

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{3V}{4}$. **C.** $\frac{V}{12}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C' và M lên mặt phẳng (ABC)

Ta có $C'H // MK \Rightarrow \frac{MK}{CC'} = \frac{CM}{CC'} = \frac{3}{4}$.

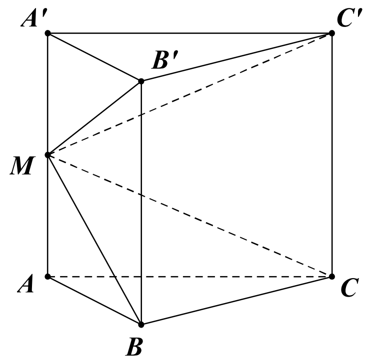
Khi đó $V_{M.ABC} = \frac{1}{3}MK.S_{ABC} \Leftrightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}CC'.S_{ABC} = \frac{V}{4}$.

Câu 60. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Điểm M là trung điểm cạnh AA'. Tính theo V thể tích khối chóp $M.BCC'B'$.

A. $\frac{2V}{3}$. **B.** $\frac{3V}{4}$. **C.** $\frac{V}{3}$. **D.** $\frac{V}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi: $V = V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC}$.

$\Rightarrow V_{M.ABC} = V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}.MA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}V$.

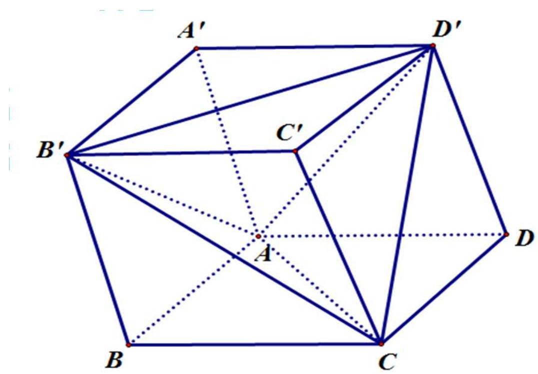
Ta có: $V_{M.BCC'B'} = V - V_{M.ABC} - V_{M.A'B'C'} = V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{6}V = \frac{2V}{3}$.

Câu 61. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lờigiải

Chọn A



Ta có $V_{B'.ABC} = V_{D'.ACD} = V_{C.B'C'D'} = V_{A.A'B'D'} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{6}V_2$.

Suy ra $V_1 = V_2 - 4.\frac{1}{6}V_2 = \frac{1}{3}V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

Câu 62. Một khối lập phương có thể tích gấp 24 thể tích một khối tứ diện đều. Hỏi cạnh của hình lập phương gấp mấy lần cạnh của hình tứ diện đều?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Gọi hình lập phương có cạnh là a, khối tứ diện đều có cạnh là b.

Khi đó, thể tích khối lập phương là: $V_1 = a^3$

Thể tích khối tứ diện đều là: $V_2 = \dfrac{b^3\sqrt{2}}{12}$.

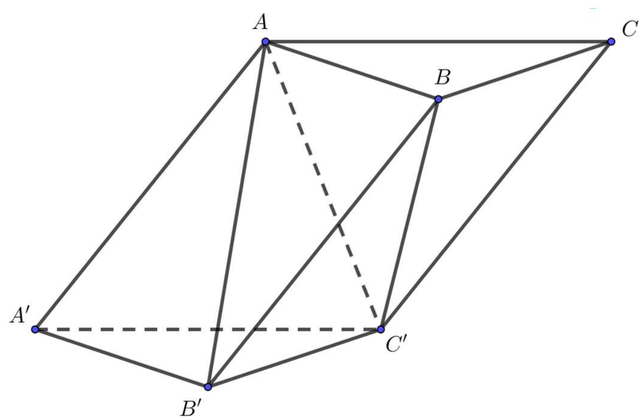
Theo đề bài ta có: $V_1 = 24V_2 \Leftrightarrow a^3 = 24.\dfrac{b^3\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow a^3 = 2\sqrt{2}b^3 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}b$.

Câu 63. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của khối lăng trụ đã cho và khối tứ diện $ABB'C'$. Tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$V_{A.BB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} - V_{C'.ABC}$.

Mà $V_{A.A'B'C'} = V_{C'.ABC} = \dfrac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$. Nên $V_{A.BB'C'} = \dfrac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$.

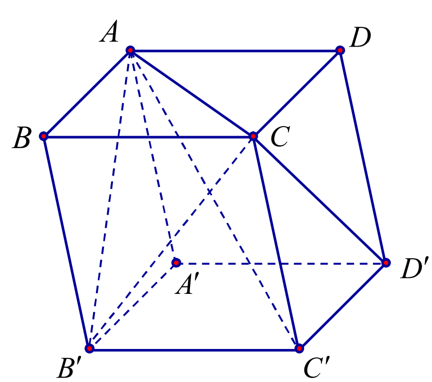
Vậy $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 64. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 9. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

A. 3. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 6. **D.** $\dfrac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi h và V lần lượt là chiều cao và thể tích khối hộp.

Ta có

$V_{ACB'D'} = S_{ABCD}.h$

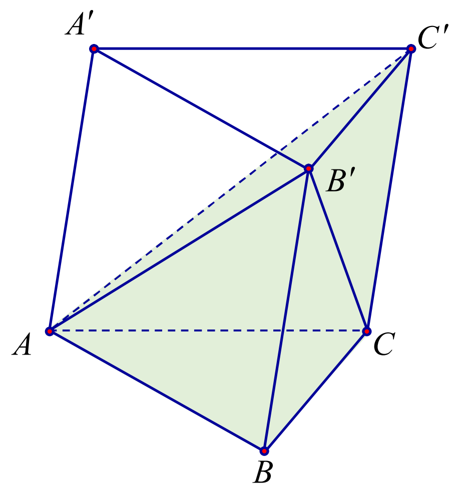
$V_{ACB'D'} = V - 4V_{B'CD'C'} = V - 4.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.S_{ABCD}.h = V - \frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V = \frac{9}{3} = 3.$

Câu 65. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\frac{3V}{4}$. **B.** $\frac{2V}{3}$. **C.** $\frac{V}{2}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $V_{ABCB'C'} = V_{B'ABC} + V_{C'B'AC} = \frac{V}{3} + \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$

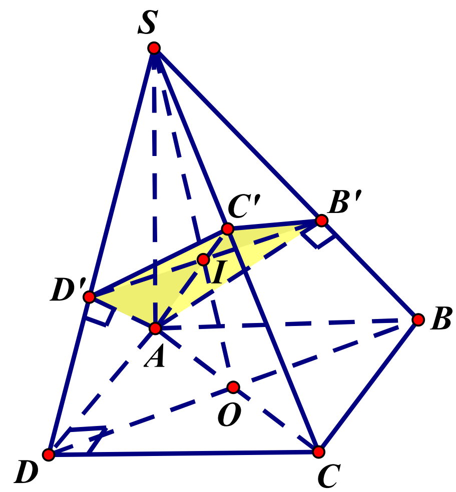
5. KHỐI CHÓP - MỨC 3

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi $B';D'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB,SD. Mặt phẳng $\left(AB'D'\right)$ cắt cạnh SC tại C'. Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{16a^3}{45}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

Lời giải

Chọn B



Ta có $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'}$ (1) mà $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$ $(*)$

ΔSAC vuông tại A nên $SC^2 = SA^2 + AC^2 = (2a)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 6a^2$ suy ra $SC = a\sqrt{6}$

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$ và $SB \perp AB'$ suy ra $AB' \perp (SBC)$ nên $AB' \perp BC$

Tương tự $AD' \perp SC$. Từ đó suy ra $SC \perp \left(AB'D'\right) \equiv \left(AB'C'D'\right)$ nên $SC \perp AC'$

Mà $SC'.SC = SA^2$ suy ra $\frac{SC'}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{6a^2} = \frac{2}{3}$. Ta cũng có $\frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + a^2} = \frac{4}{5}$

Từ $(*) \Rightarrow \frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{8}{15}$ suy ra $V_{SAB'C'} = \frac{8}{15}V_{SABC} = \frac{8}{15}.\frac{1}{2}V_{SABCD} = \frac{8}{30}V_{SABCD}$ mà

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{2a^3}{3}$

Suy ra $V_{SAB'C'} = \frac{8}{30}.\frac{2a^3}{3} = \frac{8a^3}{45}$

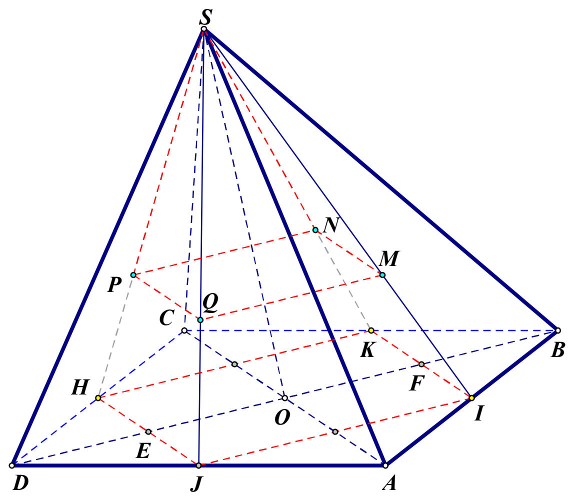
Từ (1) suy ra $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'} = \frac{16a^3}{45}$.

Câu 67. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA. Biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là V, khi đó thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{27V}{4}$. **B.** $\left(\frac{9}{2}\right)^2 V$. **C.** $\frac{9V}{4}$. **D.** $\frac{81V}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Ta có $\frac{d(S,(MNPQ))}{d(S,(ABCD))} = \frac{SM}{SI} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác gọi $S = S_{ABCD}$ ta có $\frac{S_{\Delta DEJ}}{S_{\Delta BDA}} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{\Delta DEJ} = \frac{1}{16}S$.

Tương tự ta có $\frac{S_{\Delta JAI}}{S_{\Delta DAB}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta JAI} = \frac{1}{8}$.

Suy ra $S_{HKIJ} = \left[1 - \left(4.\frac{1}{16} + 2.\frac{1}{8}\right)\right]S = \frac{1}{2}S$.

Mà $\frac{S_{MNPQ}}{S_{HKIJ}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{2}{9}S_{ABCD}$.

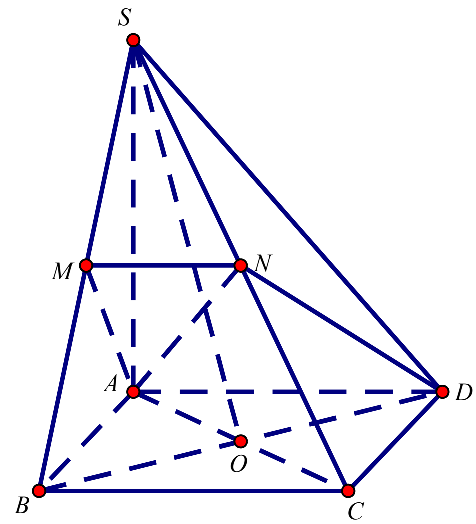
Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}d(S,(ABCD)).S = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}d(S,(MNPQ)).\frac{9}{2}S = \frac{27}{4}V$.

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADMN$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó ta có $\widehat{SOA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ nên $\widehat{SOA} = 60°$. Khi đó $\tan 60° = \dfrac{SA}{AO} \Rightarrow SA = AO.\tan 60° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{V_{S.AND}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SN}{SC}.\dfrac{SD}{SD} = \dfrac{1}{2}$.

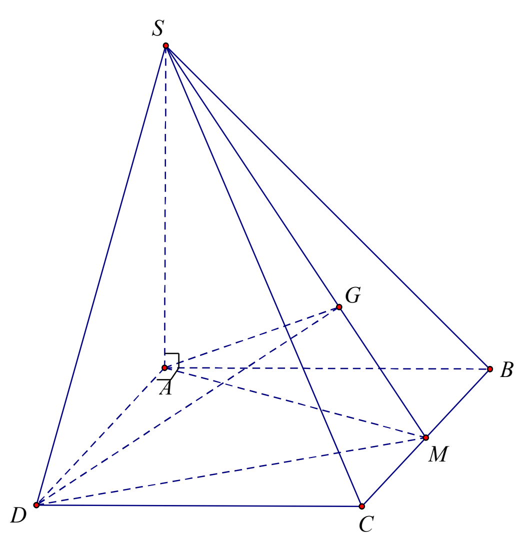
Do đó $V_{S.ADMN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}.\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{8}.V_{S.ABCD} = \dfrac{3}{8}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{16}$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật. $SA = AD = 2a$. Góc giữa (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là $60°$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Tính thể tích khối chóp $S.AGD$ là

A. $\dfrac{32a^3\sqrt{3}}{27}$. **B.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{16a^3}{9\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



Vì góc giữa (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là $60°$ nên $\widehat{SBA} = 60° \Rightarrow AB = \dfrac{SA}{\tan 60°} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Khi đó: $S_{ABCD} = AB.AD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}.2a = \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm BC, khi đó: $S_{ADM} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

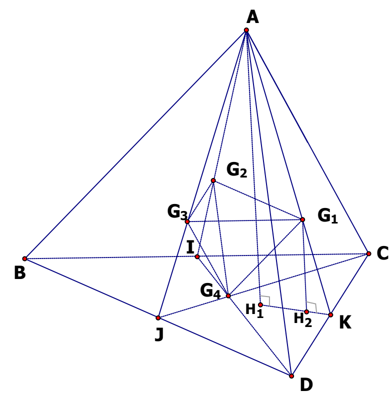
$\Rightarrow V_{S.ADG} = \dfrac{2}{3}V_{S.ADM} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}.2a.\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{27}$.

Câu 70. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 là trọng tâm của bốn mặt của tứ diện $ABCD$. Thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ là:

A. $\dfrac{V}{27}$. **B.** $\dfrac{V}{18}$. **C.** $\dfrac{V}{4}$. **D.** $\dfrac{V}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, BD và DC.

Gọi h là khoảng cách từ A đến (BCD), h_1 là khoảng cách từ G_4 đến $(G_1G_2G_3)$.

Vì $(G_1G_2G_3)//(BCD)$ nên $d(G_4,(G_1G_2G_3)) = d(G_1,(BCD)) = G_1H_2 = h'$, $h = AH_1$.

$\Rightarrow \dfrac{h_1}{h} = \dfrac{KG_1}{KA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow h_1 = \dfrac{h}{3}$.

Gọi S, S', S_1 lần lượt là diện tích các tam giác BCD, IJK và $G_1G_2G_3$.

Vì I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, BD và DC nên:

$S' = \dfrac{1}{2}JK.d(I,JK) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{BC}{2}.\dfrac{1}{2}d(D,BC) = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2}.BC.d(D,BC) = \dfrac{1}{4}S$ (1).

Tam giác $G_1G_2G_3$ đồng dạng với tam giác KIJ với tỉ số đồng dạng là: $\dfrac{G_1G_2}{Ik} = \dfrac{AG_1}{Ak} = \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S'} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow S_1 = \dfrac{4}{9}S'$ (2) (Vì tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow S_1 = \dfrac{S}{9}$.

Thể tích khối từ diện $G_1G_2G_3G_4$ là: $V_1 = \dfrac{1}{3}S_1.h_1 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{S}{9}.\dfrac{h}{3} = \dfrac{1}{27}.\left(\dfrac{1}{3}.S.h\right) = \dfrac{V}{27}$.

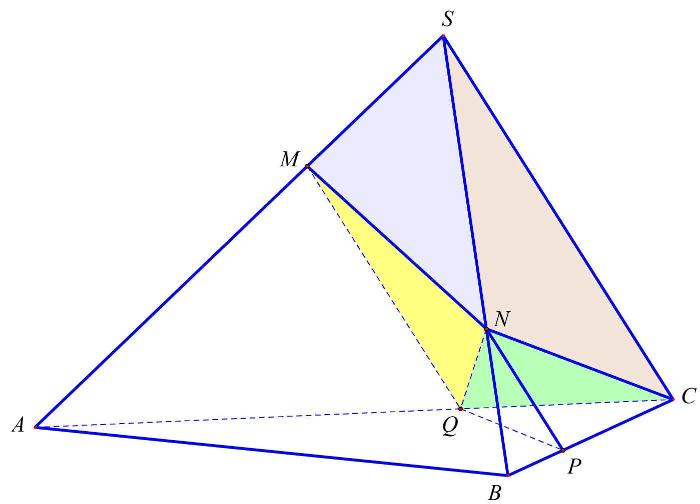
Câu 71. Cho hình chóp $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp

$S.ABC$ thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với (H_1) là khối đa diện chứa điểm S, (H_2) là khối đa diện chứa điểm A. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC.

Ta có $NP\,//\,MQ\,//\,SC$.

Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC), ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

Ta có $\frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\frac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))}\cdot\frac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$.

$\frac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\frac{NS}{BS}=\frac{2}{3}$; $\frac{S_{AMQ}}{S_{ASC}}=\frac{AM}{AS}\cdot\frac{AQ}{AC}=\left(\frac{AM}{AS}\right)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{S_{SMQC}}{S_{ASC}}=\frac{5}{9}$.

Do đó $\frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}=\frac{10}{27}$.

$\frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}=\frac{d(N,(QPC))}{d(S,(ABC))}\cdot\frac{S_{QPC}}{S_{ABC}}=\frac{NB}{SB}\cdot\left(\frac{CQ}{CA}\cdot\frac{CP}{CB}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{27}$.

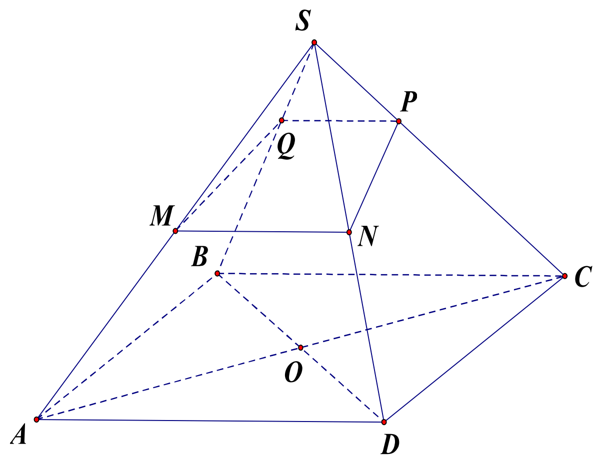
Do đó $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}+\frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}=\frac{10}{27}+\frac{2}{27}=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{V_1}{V_1+V_2}=\frac{4}{9}\Rightarrow 5V_1=4V_2\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{5}$.

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD. Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại Q, P. Đặt $\frac{SQ}{SB}=x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNQP$, V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V_1=\frac{1}{2}V$.

A. $x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$. **B.** $x=\sqrt{2}$. **C.** $x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Do $\begin{cases} MN \,//\, BC \\ (\alpha)\cap(SBC)=PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \,//\, BC$.

$\dfrac{V_{S.MNQ}}{V}+\dfrac{V_{S.NPQ}}{V}=\dfrac{V_1}{V} \Leftrightarrow \dfrac{V_{S.MNQ}}{2V_{S.ABD}}+\dfrac{V_{S.NPQ}}{2V_{S.BCS}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SQ}{SB}+\dfrac{SP}{SC}.\dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SQ}{SB}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{2}=1$

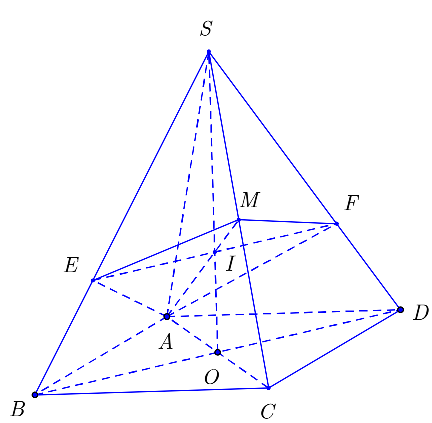
$\Leftrightarrow 2x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (vì $x>0$).

Câu 73. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$. Gọi M là trung điểm của SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích V khối chóp $S.AEMF$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng (SBD): $EF\cap SO=I$. Suy ra A,M,I thẳng hàng.

Trong tam giác SAC hai trung tuyến AM, SO cắt nhau tại I suy ra $\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$.

Lại có $EF // BD \Rightarrow \frac{SE}{SB}=\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$.

Ta có: $\frac{V_{S.AEM}}{V_{SABC}}=\frac{SE}{SB}\cdot\frac{SM}{SC}=\frac{1}{3}$. $\frac{V_{S.AFM}}{V_{SADC}}=\frac{SF}{SD}\cdot\frac{SM}{SC}=\frac{1}{3}$.

Vậy $\frac{V_{S.AEM}+V_{S.AFM}}{V_{S.ABC}+V_{S.ADC}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{V_{S.AEMF}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{3}$.

Góc giữa cạnh bên và đáy của $S.ABCD$ bằng góc $\widehat{SBO}=60°$ suy ra $SO=BO\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

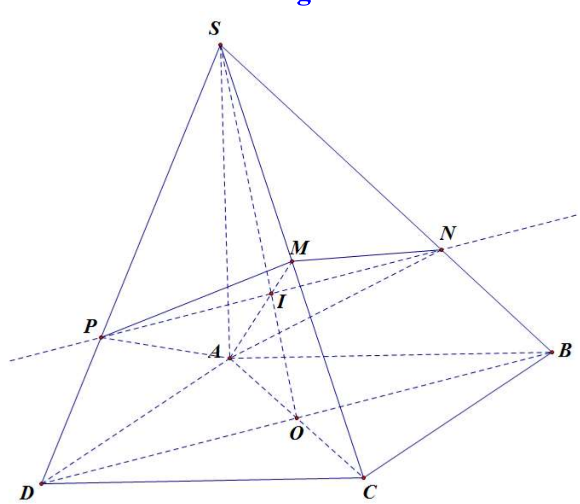
Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $V_{S.AEMF}=\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Câu 74. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD chia khối chóp thành hai khối đa diện, đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy $ABCD$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ là

A. $\frac{V_2}{V_1}=3$. **B.** $\frac{V_2}{V_1}=2$. **C.** $\frac{V_2}{V_1}=1$. **D.** $\frac{V_2}{V_1}=\frac{3}{2}$.

Lời giải



Chọn B

Đặt $V_{S.ABCD}=V$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi I là giao điểm của SO và AM.

Do $(P)//BD$ nên (P) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến NP qua I và song song với BD; $(N\in SB; P\in SD)$.

Xét tam giác SAC có I là giao điểm hai trung tuyến nên I là trọng tâm.

Ta có $\dfrac{V_{S.APN}}{V_{S.ADB}}=\dfrac{SP.SN}{SD.SB}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}\Rightarrow V_{S.APN}=\dfrac{4}{9}V_{S.ADB}=\dfrac{4}{9}.\dfrac{1}{2}V=\dfrac{2}{9}V$.

Tương tự $\dfrac{V_{S.PMN}}{V_{S.DCB}}=\dfrac{SP.SM.SN}{SD.SC.SB}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}\Rightarrow V_{S.PMN}=\dfrac{2}{9}V_{S.DCB}=\dfrac{2}{9}.\dfrac{1}{2}V=\dfrac{1}{9}V$.

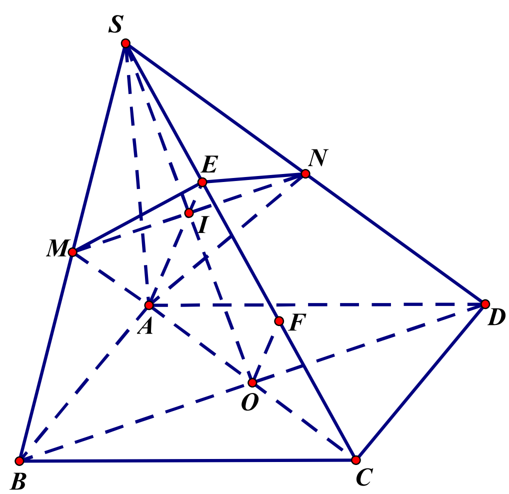
Từ đó $V_1=V_{S.APN}+V_{S.PMN}=\dfrac{1}{3}V$. Do đó $\dfrac{V_2}{V_1}=2$.

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có thể tích bằng V. Gọi E là điểm trên cạnh SC sao cho $EC=2ES$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AE và song song với BD, (α) cắt SB, SD lần lượt tại hai điểm M, N. Tính theo V thể tích khối chóp $S.AMEN$.

A. $\dfrac{3V}{8}$. **B.** $\dfrac{3V}{16}$. **C.** $\dfrac{V}{9}$. **D.** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$, $I=SO\cap AE$, khi đó MN đi qua I và $MN//BD$.

Gọi F là trung điểm EC, suy ra $OF//AE$. Ta có $\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{SE}{SF}=\dfrac{1}{2}$.

Từ đó $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{1}{2}$.

Từ đó:

$\dfrac{V_{S.AME}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SE}{SC}=1.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow V_{S.AME}=\dfrac{1}{6}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{12}V$.

$\dfrac{V_{S.ANE}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SE}{SC}=1.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow V_{S.ANE}=\dfrac{1}{6}V_{S.ADC}=\dfrac{1}{12}V$.

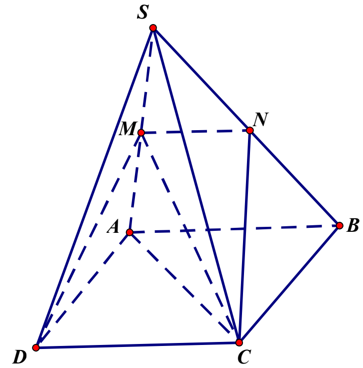
Do đó $V_{S.AMEN}=V_{S.AME}+V_{S.ANE}=\dfrac{1}{12}V+\dfrac{1}{12}V=\dfrac{V}{6}$

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N là trung điểm của SA,SB. Mặt phẳng $(MNCD)$ chia hình chóp đã cho thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần là (số bé chia số lớn)

A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là V.

Ta có $\dfrac{V_{S.MDC}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SD}{SD}.\dfrac{SC}{SC}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SC}{SC}=\dfrac{1}{4}$;

$$\frac{V_{S.MDC}}{V_{S.ADC}}+\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{S.MDC}}{\frac{1}{2}V}+\frac{V_{S.MNC}}{\frac{1}{2}V}=\frac{V_{S.MNCD}}{\frac{1}{2}V}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

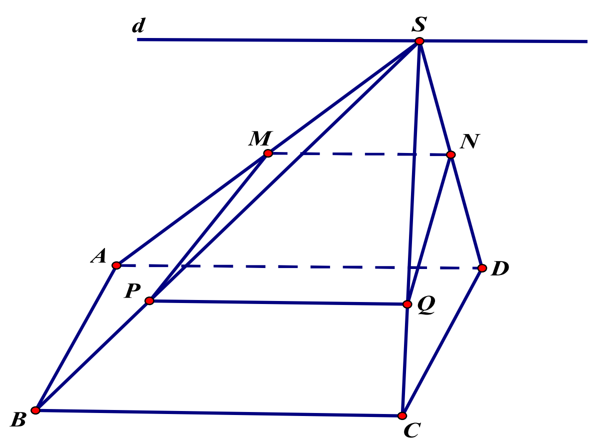
$$\Rightarrow V_{S.MNCD}=\frac{3}{8}V\Rightarrow V_{MNABCD}=V-\frac{3}{8}V=\frac{5}{8}V\Rightarrow\frac{V_{S.MNCD}}{V_{MNABCD}}=\frac{3}{5}.$$

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SA,SD. Mặt phẳng (α) chứa MN và cắt các tia SB,SC lần lượt tại P và Q. Đặt $\dfrac{SP}{SB}=x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNQP$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V=2V_1$.

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$. **C.** $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$. **D.** $x=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh $PQ//BC$.

Giải sử $(SBC)\cap(SAD)=d$ khi đó ta có: $\begin{cases}(SBC)\cap(SAD)=d\\(SBC)\cap(ABCD)=BC\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\\BC//AD\end{cases}\Rightarrow d//BC,\ d//AD.$

M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SA,SD nên ta có $MN//AD,\ MN//d.$

Ta lại có: $\begin{cases}(SBC)\cap(SAD)=d\\(SBC)\cap(\alpha)=PQ\\(SAD)\cap(\alpha)=MN\\d//MN\end{cases}\Rightarrow PQ//MN\Rightarrow PQ//BC.$

Xét tam giác SBC có $PQ//BC,\ \dfrac{SP}{SB}=x\ \Rightarrow\dfrac{SQ}{SC}=\dfrac{SP}{SB}=x.$

$$\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.MNQP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}+V_{S.NQP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABD}}+\frac{V_{S.NQP}}{2V_{S.DCB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{SM.SN.SP}{SA.SB.SD}+\frac{1}{2}\cdot\frac{SN.SQ.SP}{SD.SC.SB}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot x=\frac{x+2x^2}{8}\cdot$$

Theo bài ra: $V=2V_1\Rightarrow\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{x+2x^2}{8}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}\\x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}\end{array}\right.$

Mà $\dfrac{SP}{SB}=x\Rightarrow x>0\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}\cdot$

Cách 2

Sử dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích của khối chóp tứ giác như sau:

Cho chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của khối chóp tại các điểm M,P,Q,N với $\dfrac{SQ}{SC}=\dfrac{SP}{SB}=x,\ \dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}\cdot$

Thì ta có: $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{x.x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+2+2\right)=\dfrac{x+2x^2}{8}\cdot$

Theo bài ra: $V=2V_1\Rightarrow\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{x+2x^2}{8}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}\\x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}\end{array}\right..$

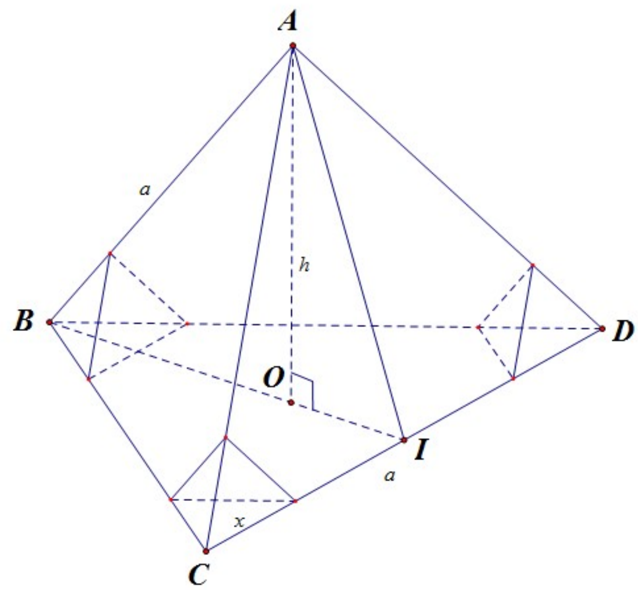
Mà $\dfrac{SP}{SB}=x\Rightarrow x>0\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$

Câu 78. Cho tứ diện đều có chiều cao bằng h, ở ba góc của tứ diện người ta cắt đi các tứ diện đều bằng nhau có độ dài cạnh bằng x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng một nửa thể tích khối tứ diện đều ban đầu. Tìm x.

A. $x=\dfrac{h\sqrt[3]{6}}{6}$. **B.** $x=\dfrac{h\sqrt[3]{6}}{2}$. **C.** $x=\dfrac{h\sqrt[6]{6}}{6}$. **D.** $x=\dfrac{h\sqrt[6]{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử có tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a, chiều cao $AO = h$.

Tam giác BCD đều cạnh a nên $S_{BCD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi I là trung điểm của CD thì $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BO = \dfrac{2}{3}BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ABO vuông tại O nên $h = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích tứ diện đều $ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}S_{BCD}.h = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Gọi V' là thể tích của tứ diện đều cạnh x, ta có $V' = \dfrac{x^3\sqrt{2}}{12}$.

Phần bị cắt đi có thể tích: $3V' = \dfrac{x^3\sqrt{2}}{4}$.

Vì khối đa diện còn lại có thể tích bằng một nửa thể tích khối tứ diện đều ban đầu nên ta có:

$$\frac{3V'}{V} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{x^3\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}} = \frac{3x^3}{a^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{a^3}{6} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt[3]{6}}.$$

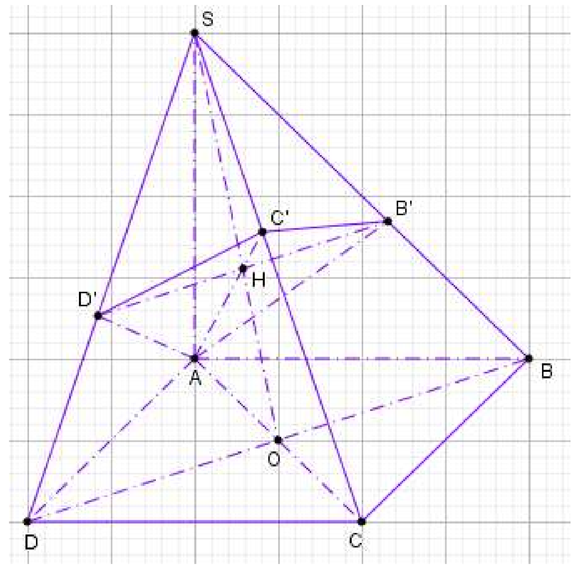
Mặt khác, từ $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ suy ra $a = \dfrac{h\sqrt{6}}{2}$. Do đó, $x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{h\sqrt{6}}{2\sqrt[3]{6}} = \dfrac{h\sqrt[6]{6}}{2}$.

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. B', D' lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}\Rightarrow V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Có $\Delta SAB=\Delta SAD\Rightarrow\begin{cases}SB=SD=a\sqrt{3}\\AB'=AD'\end{cases}\Rightarrow SB'=SD'=\frac{SA^2}{SB}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$

Gọi $O=AC\cap BD$, $H=B'D'\cap SO$. Khi đó $C'=AH\cap SC$.

Ta có $\frac{SB'}{SB}=\frac{SD'}{SD}=\frac{2}{3}\Rightarrow B'D'\parallel BD\Rightarrow\frac{SH}{SO}=\frac{2}{3}$ suy ra H là trọng tâm của tam giác SAC $\Rightarrow\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}$.

Ta có $\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}}=\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S.AC'D'}=\frac{1}{3}V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

Ta có $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S.AB'C'}=\frac{1}{3}V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

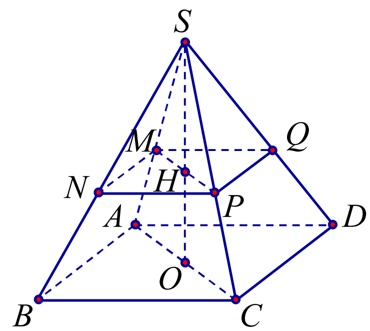
Vậy $V_{S.AB'C'D'}=V_{S.AB'C'}+V_{S.AC'D'}=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 80. Một viên đá có hình dạng là khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng a. Người ta cắt khối đá đó bởi mặt phẳng song song với đáy của khối chóp để chia khối đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích của thiết diện khối đá bị cắt bởi mặt phẳng nói trên. *(Giả thiết rằng tổng thể tích của hai khối đá sau vẫn bằng thể tích của khối đá đầu).*

A. $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $\frac{a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M , N , P , Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng cắt với cạnh bên SA , SB , SC , SD

và $H = SO \cap (MNPQ)$. Do $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ (MNPQ) \parallel (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (MNPQ)$

Đặt $\dfrac{SH}{SO} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SQ}{SD} = k \ (k > 0)$ (Định lý Thales) và $V = V_{S.ABCD}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V} = \dfrac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} + \dfrac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC} + \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SP}{SC}.\dfrac{SQ}{SD}\right) = \dfrac{1}{2}\left(k^3 + k^3\right) = k^3$

Theo ycbt : $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V} = k^3 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Mặt khác $\dfrac{1}{2} = \dfrac{V_{S.MNPQ}}{V} = \dfrac{\frac{1}{3}SH.S_{MNPQ}}{\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}} = k.\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}}$

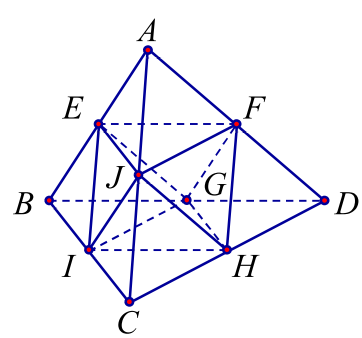
$\Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2k}.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}.a^2 = \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Câu 81. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V , thể tích của khối đa diện có đỉnh là trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng V' . Tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\dfrac{V_{AEJF}}{V_{ABCD}} = \dfrac{V_{AEJF}}{V} = \dfrac{AE}{AB}.\dfrac{AJ}{AC}.\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{1}{8}$.

Tương tự: $\dfrac{V_{BIGE}}{V} = \dfrac{1}{8}$, $\dfrac{V_{CIHJ}}{V} = \dfrac{1}{8}$, $\dfrac{V_{DHGF}}{V} = \dfrac{1}{8}$.

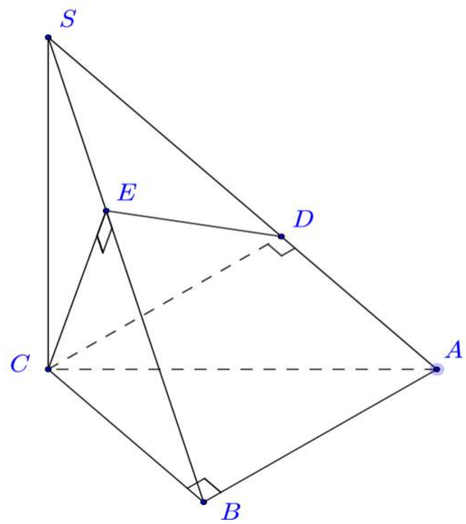
Vậy: $\dfrac{V'}{V}=1-4.\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC\perp(ABC)$, $SC=3a$. Tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α)đi qua C và vuông góc với SA, cắt SA, SB lần lượt tại D, E. Tính tỉ số thể tích khối chóp $S.CDE$ và khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{9}{11}$. **B.** $\dfrac{9}{20}$. **C.** $\dfrac{7}{20}$. **D.** $\dfrac{15}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $CD\perp SA$ tại D, kẻ $CE\perp SB$ tại E.

Ta có $\begin{cases}AB\perp BC\\AB\perp SC\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SBC)\Rightarrow AB\perp CE$

Ta có $\begin{cases}CE\perp SB\\CE\perp AB\end{cases}\Rightarrow CE\perp(SAB)\Rightarrow CE\perp SA$

Ta có $\begin{cases}SA\perp CE\\SA\perp CD\end{cases}\Rightarrow SA\perp(CDE)$

Nhận thấy (CDE)qua C và vuông góc với SA (thỏa điều kiện bài toán)$\Rightarrow(CDE)\equiv(\alpha)$

$CA=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=a\sqrt{6}$.

Ta có: $\dfrac{SD}{SA}=\dfrac{SD.SA}{SA^2}=\dfrac{SC^2}{SA^2}=\dfrac{(3a)^2}{\left(a\sqrt{6}\right)^2+(3a)^2}=\dfrac{3}{5}$.

$\dfrac{SE}{SB}=\dfrac{SE.SB}{SB^2}=\dfrac{SC^2}{SB^2}=\dfrac{(3a)^2}{\left(a\sqrt{3}\right)^2+(3a)^2}=\dfrac{3}{4}$.

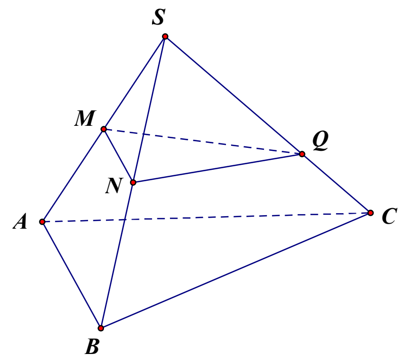
Tỉ số thể tích cần tìm là: $\dfrac{V_{S.CDE}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SC}{SC}.\dfrac{SD}{SA}.\dfrac{SE}{SB}=1.\dfrac{3}{5}.\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{20}$.

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có $V_{S.ABC}=6a^3$. Gọi M, N, Q lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB, SC sao cho $SM=MA$, $SN=NB$, $SQ=2QC$. Thể tích khối chóp $S.MNQ$ là

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $3a^3$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



M nằm trên các cạnh SA sao cho $SM=MA\Rightarrow \dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{2}$.

N nằm trên các cạnh SB sao cho $SN=NB\Rightarrow \dfrac{SN}{SB}=\dfrac{1}{2}$.

Q nằm trên các cạnh SC sao cho $SQ=2QC\Rightarrow \dfrac{SQ}{SC}=\dfrac{2}{3}$.

,.

Khi đó: $\dfrac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$.

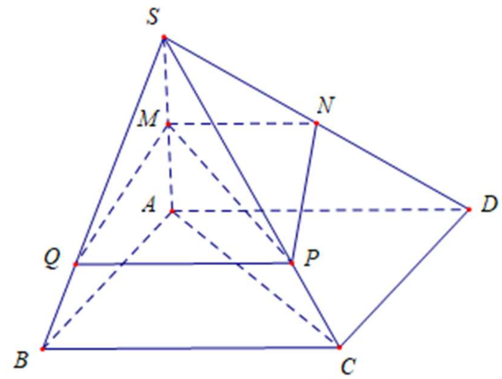
$\Rightarrow V_{S.MNQ}=\dfrac{1}{6}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}.6a^3=a^3$.

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SD. Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại Q,P. Đặt $\dfrac{SQ}{SB}=x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNPQ$, V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V_1=\dfrac{1}{2}V$.

A. $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$. **B.** $x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$. **C.** $x=\sqrt{2}$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết ta có MN là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow MN\ //\ AD$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $AD\ //\ BC \Rightarrow MN\ //\ BC$.

Có $\begin{cases}(MNPQ)\cap(SBC)=PQ\\ MN\ //\ BC\end{cases} \Rightarrow PQ\ //\ BC \Rightarrow \dfrac{SP}{SC}=\dfrac{SQ}{SB}=x$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $S_{\Delta ADC}=S_{\Delta ACB}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow V_{S.ADC}=V_{S.ACB}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{x}{4} \Rightarrow \dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{x}{8}$ và $\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACB}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SP}{SC}.\dfrac{SQ}{SB}=\dfrac{x^2}{2} \Rightarrow \dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{x^2}{4}$

.

Do đó $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}}{V}=\dfrac{x}{8}+\dfrac{x^2}{4}$.

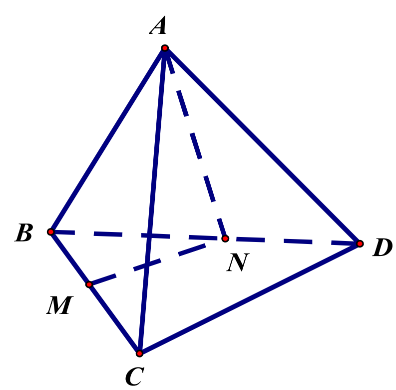
Theo giả thiết ta có $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{8}-\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$.

Vì $x>0$ nên $x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$.

Câu 85. Cho khối tứ diện $ABCD$. Hai điểm M,N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC,BD sao cho $2\dfrac{BC}{BM}+\dfrac{BD}{BN}=6$. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{5}{36}$. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải



Chọn B

Đặt $x=\dfrac{BC}{BM};y=\dfrac{BD}{BN};\left(x,y>0\right)\Rightarrow 2x+y=6\Rightarrow 6\ge 2\sqrt{2xy}\Rightarrow xy\le\dfrac{9}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{2}{9}$

$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\dfrac{1}{3}d\left(A,\left(BMN\right)\right).S_{\Delta BMN}}{\dfrac{1}{3}d\left(A,BCD\right).S_{\Delta BCD}}=\dfrac{BM}{BC}.\dfrac{BN}{BD}=\dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{2}{9}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$ là: $\dfrac{2}{9}$

Câu 86. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, mặt bên tạo với mặt đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm của $SA.$, thể tích của khối chóp $M.ABC$ bằng

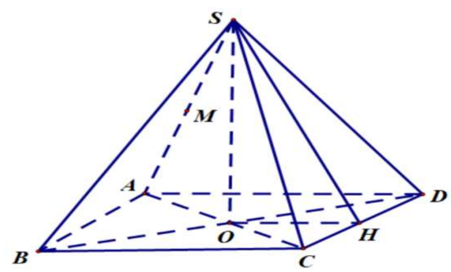
A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $O=AC\cap BD$; H là trung điểm CD

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp\left(ABCD\right)$



Góc giữa $\left(SCD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 60^0 suy ra $\widehat{SHO}=60°$,

$SO=OH.\tan\widehat{SHO}=a\sqrt{3}$

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.4a^2=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

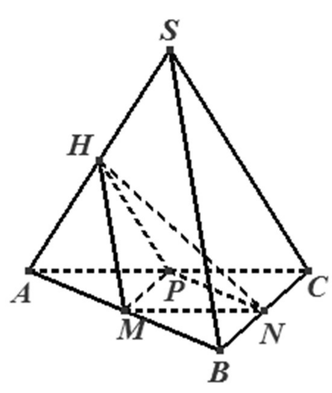
$\dfrac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{MA}{SA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{M.ABC}=\dfrac{1}{2}.V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 87. Cho tứ diện $S.ABC$ có thể tích V. Gọi H,M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,AB,BC,CA. Thể tích khối chóp $H.MNP$ tính theo V là

A. $\dfrac{1}{12}V$. **B.** $\dfrac{1}{16}V$. **C.** $\dfrac{1}{8}V$. **D.** $\dfrac{3}{8}V$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\dfrac{d\left(H,(MNP)\right)}{d\left(S,(MNP)\right)}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{V_{H.MNP}}{V_{S.MNP}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow V_{H.MNP}=\dfrac{1}{2}V_{S.MNP}$

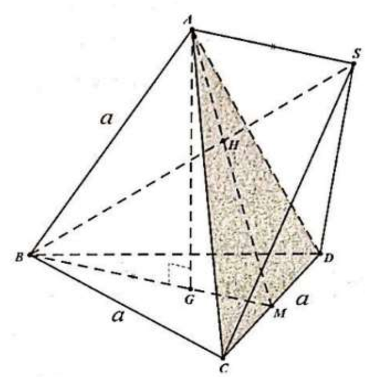
Ta có $\dfrac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow V_{S.MNP}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABC}$. Do đó $V_{H.MNP}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABC}$.

Câu 88. Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi S là điểm sao cho $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{BG}$. Thể tích của khối đa diện $SABCD$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **C.** $\dfrac{5a^3\sqrt{2}}{36}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Chia khối đa diện $SABCD$ thành 2 khối chóp là $A.BCD$ và $S.ACD$.

Ta có: $V_{SABCD}=V_{ABCD}+V_{SADC}$

Áp dụng công thức tính nhanh khối đa diện đều: $V_{ABCD}=\dfrac{AB^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Gọi H là giao điểm giữa AM và SB.

$$\frac{V_{SACD}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(S;(ACD)\right).S_{ACD}}{\frac{1}{3}d\left(B;(ACD)\right).S_{ACD}}=\frac{d\left(S;(ACD)\right)}{d\left(B;(ACD)\right)}=\frac{SH}{BH}$$

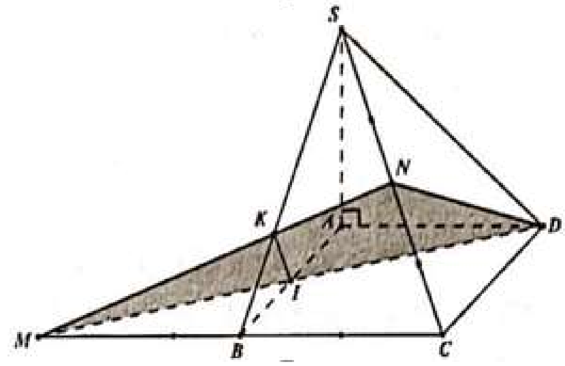
Mặt khác theo giả thiết $\overline{AS}=\overline{BG}\Rightarrow\begin{cases}AS=BG\\AS//BG\end{cases}\Rightarrow\dfrac{SH}{BH}=\dfrac{SA}{BM}=\dfrac{SA}{\frac{3}{2}BG}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

$$\frac{V_{SACD}}{V_{ABCD}}=\frac{SH}{BH}=\frac{2}{3}\Rightarrow V_{SACD}=\frac{2}{3}V_{ABCD}=\frac{2}{3}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$$

$$\Rightarrow V_{SABCD}=V_{ABCD}+V_{SACD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}+\frac{a^3\sqrt{2}}{18}=\frac{5a^3\sqrt{2}}{36}$$

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^0$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45^0. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$

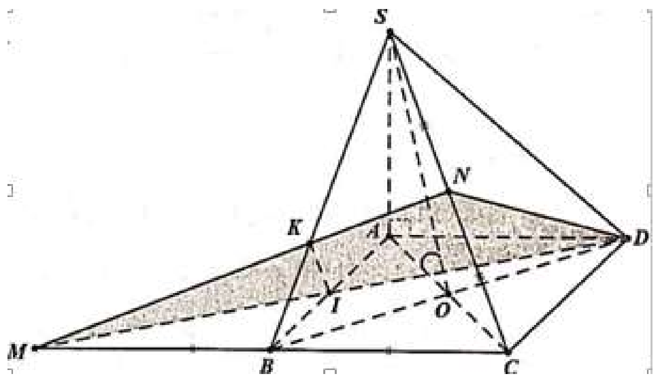
thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ bên). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$



A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{12}{7}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O=AC\cap BD$

Khi đó góc giữa 2 mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $45^0 \Leftrightarrow \widehat{SOA}=45^o$

Ta có: $\triangle BAD$ đều $\Rightarrow AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SA=AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $V=\frac{1}{3}.SA.2S_{\Delta ABD}=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3}{4}$

Ta có: N là trung điểm SC nên $\frac{d\left(N;\left(ABCD\right)\right)}{d\left(S;\left(ABCD\right)\right)}=\frac{NC}{SC}=\frac{1}{2}$

Thể tích khối chóp $N.MCD$ bằng thể tích khối chóp $N.ABCD$ bằng: $V'=\frac{1}{2}V=\frac{a^3}{8}$

Ta có K là trọng tâm tam giác $SMC \Rightarrow \frac{KB}{SB}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{d\left(K;\left(ABCD\right)\right)}{d\left(S;\left(ABCD\right)\right)}=\frac{KB}{SB}=\frac{1}{3}$

Thể tích khối chóp $KMIB$ bằng: $V''=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}SA.S_{\Delta MBI}=\frac{1}{9}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3}{48}$

Khi đó: $V_2=V'-V''=\frac{a^3}{8}-\frac{a^3}{48}=\frac{5a^3}{48}$ và $V_1=V-V_2=\frac{a^3}{4}-\frac{5a^3}{48}=\frac{7a^3}{48}$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\dfrac{7a^3}{48}}{\dfrac{5a^3}{48}}=\dfrac{7}{5}$.

Câu 90. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, mặt bên tạo với mặt đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm của $SA.$, thể tích của khối chóp $M.ABC$ bằng

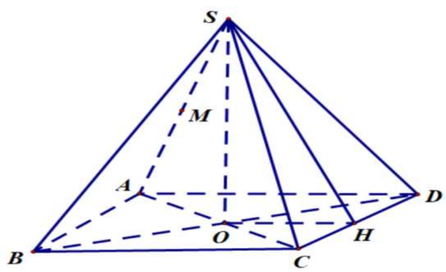
A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $O=AC\cap BD$; H là trung điểm CD

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$



Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60^0 suy ra $\widehat{SHO}=60°$,

$SO=OH.\tan\widehat{SHO}=a\sqrt{3}$

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.4a^2=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

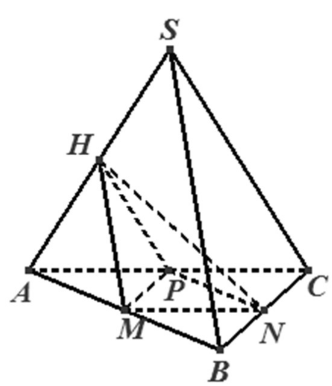
$\dfrac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{MA}{SA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{M.ABC}=\dfrac{1}{2}.V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 91. Cho tứ diện $S.ABC$ có thể tích V. Gọi H,M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,AB,BC,CA. Thể tích khối chóp $H.MNP$ tính theo V là

A. $\dfrac{1}{12}V$. **B.** $\dfrac{1}{16}V$. **C.** $\dfrac{1}{8}V$. **D.** $\dfrac{3}{8}V$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\dfrac{d(H,(MNP))}{d(S,(MNP))}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{V_{H.MNP}}{V_{S.MNP}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow V_{H.MNP}=\dfrac{1}{2}V_{S.MNP}$

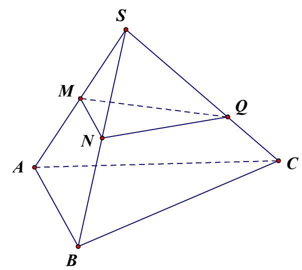
Ta có $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow V_{S.MNP}=\frac{1}{4}V_{S.ABC}$. Do đó $V_{H.MNP}=\frac{1}{8}V_{S.ABC}$.

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABC$ có $V_{S.ABC}=6a^3$. Gọi M, N, Q lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB, SC sao cho $SM=MA$, $SN=NB$, $SQ=2QC$. Thể tích khối chóp $S.MNQ$ là

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $3a^3$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



M nằm trên các cạnh SA sao cho $SM=MA\Rightarrow\frac{SM}{SA}=\frac{1}{2}$.

N nằm trên các cạnh SB sao cho $SN=NB\Rightarrow\frac{SN}{SB}=\frac{1}{2}$.

Q nằm trên các cạnh SC sao cho $SQ=2QC\Rightarrow\frac{SQ}{SC}=\frac{2}{3}$.

,.

Khi đó: $\frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.

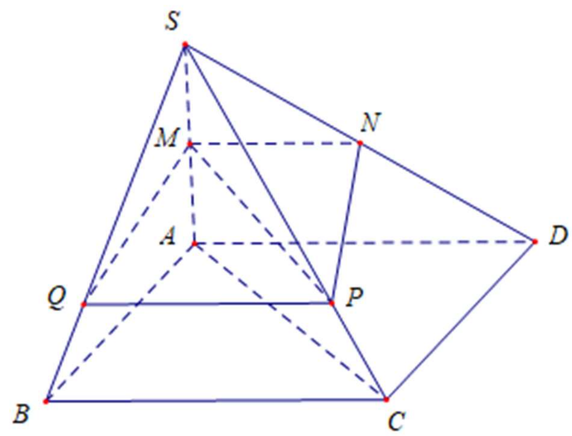
$\Rightarrow V_{S.MNQ}=\frac{1}{6}V_{S.ABC}=\frac{1}{6}.6a^3=a^3$.

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SD. Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại Q,P. Đặt $\frac{SQ}{SB}=x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNPQ$, V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V_1=\frac{1}{2}V$.

A. $x=\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$. **B.** $x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$. **C.** $x=\sqrt{2}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết ta có MN là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow MN\ //\ AD$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $AD\ //\ BC \Rightarrow MN\ //\ BC$.

Có $\begin{cases}(MNPQ)\cap(SBC)=PQ\\ MN\ //\ BC\end{cases} \Rightarrow PQ\ //\ BC \Rightarrow \dfrac{SP}{SC}=\dfrac{SQ}{SB}=x$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $S_{\Delta ADC}=S_{\Delta ACB}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow V_{S.ADC}=V_{S.ACB}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{x}{4} \Rightarrow \dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{x}{8}$ và $\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACB}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SP}{SC}.\dfrac{SQ}{SB}=\dfrac{x^2}{2} \Rightarrow \dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{x^2}{4}$

.

Do đó $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}}{V}=\dfrac{x}{8}+\dfrac{x^2}{4}$.

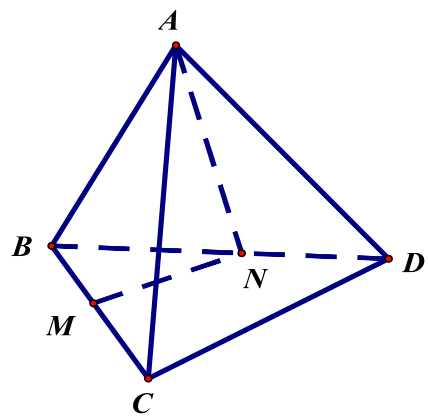
Theo giả thiết ta có $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{8}-\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$.

Vì $x>0$ nên $x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$.

Câu 94. Cho khối tứ diện $ABCD$. Hai điểm M,N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC,BD sao cho $2\dfrac{BC}{BM}+\dfrac{BD}{BN}=6$. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{5}{36}$. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải



Chọn B

Đặt $x=\frac{BC}{BM};y=\frac{BD}{BN};\left(x,y>0\right)\Rightarrow 2x+y=6\Rightarrow 6\ge 2\sqrt{2xy}\Rightarrow xy\le \frac{9}{2}\Rightarrow \frac{1}{xy}\ge \frac{2}{9}$

$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A,\left(BMN\right)\right).S_{\Delta BMN}}{\frac{1}{3}d\left(A,BCD\right).S_{\Delta BCD}}=\frac{BM}{BC}.\frac{BN}{BD}=\frac{1}{xy}\ge \frac{2}{9}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ là: $\frac{2}{9}$

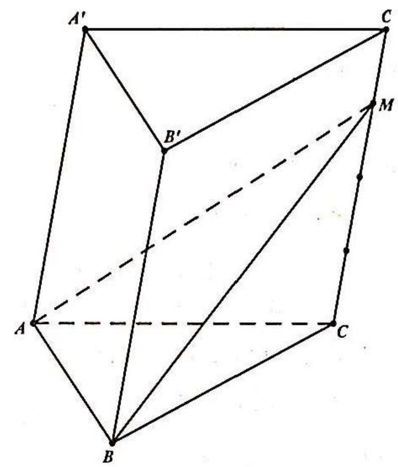
6. KHỐI LĂNG TRỤ - MỨC 3

Câu 95. Cho lăng trụ $ABC.AB'C'$ có thể tích là V. Gọi M là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CM=3C'M$. Thể tích của khối chóp $M.ABC$ theo V là:

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{3V}{4}$. **C.** $\frac{V}{12}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Thể tích của khối chóp $M.ABC$ là:

$$\frac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(M;\left(ABC\right)\right).S_{ABC}}{d\left(C';\left(ABC\right)\right).S_{ABC}}$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{d\left(M;\left(ABC\right)\right)}{d\left(C';\left(ABC\right)\right)}=\frac{1}{3}.\frac{MC}{C'C}=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow V_{M.ABC}=\frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{V}{4}.$$

Cách 2: Áp dụng công thức tỉ số thể tích.

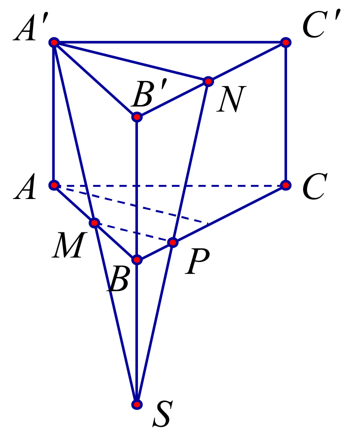
$$\frac{V_{C.ABM}}{V_{A'B'C'.ABC}}=\frac{1}{3}\frac{CM}{CC'}=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{M.ABC}=\frac{1}{4}V.$$

Câu 96. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $\left(A'MN\right)$ cắt cạnh BC tại P. Tính thể tích V khối đa diện $MBP.A'B'N$.

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$. **B.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{48}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi S là giao điểm của các đường $A'M$; NP và BB' . Có M ; B ; P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA' ; SB' và SN .

Vì ΔABC đều cạnh a nên $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$\dfrac{V_{S.BMP}}{V_{S.A'B'N}}=\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SM}{SA'}.\dfrac{SP}{SN}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow V_{S.BMP}=\dfrac{1}{8}V_{S.A'B'N}\Rightarrow V_{MBP.A'B'N}=\dfrac{7}{8}V_{S.A'B'N}$ (1).

Vì B là trung điểm của SB' nên $V_{S.A'B'N}=2.V_{B.A'B'N}$. Vì N là trung điểm của $B'C'$ nên

$V_{B.A'B'N}=\dfrac{1}{2}V_{B.A'B'C'}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.BB'.S_{ABC}=\dfrac{1}{6}.a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}\Rightarrow V_{S.A'B'N}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (2).

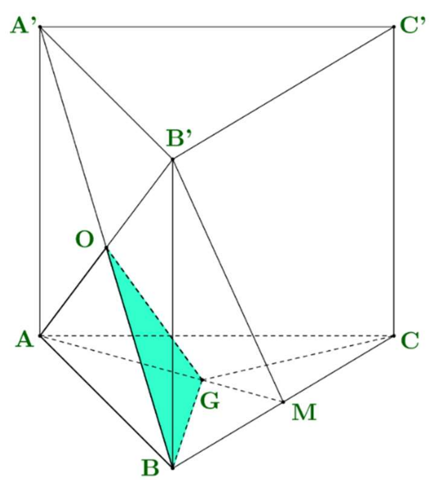
Từ (1) và (2) ta có $V_{MBP.A'B'N}=\dfrac{7}{8}V_{S.A'B'N}=\dfrac{7}{8}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}=\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{96}$.

Câu 97. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có điểm O và G lần lượt là tâm của mặt bên $ABB'A'$ và trọng tâm của ΔABC . Biết $V_{ABC.A'B'C'}=270\text{ cm}^3$. Thể tích của khối chóp $AOGB$ bằng

A. 15 cm^3 . **B.** 30 cm^3 . **C.** 45 cm^3 . **D.** 15 cm^3 .

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có:

$\oplus$ $\dfrac{V_{AOGB}}{V_{AB'MB}}=\dfrac{AO}{AB'}.\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{AOGB}=\dfrac{1}{3}.V_{AB'MB}$ (1)

$\oplus$ $S_{\Delta B'MB}=\dfrac{1}{2}.d\left(B',BC\right).BM=\dfrac{1}{4}.d\left(B',BC\right).BC=\dfrac{1}{4}.S_{B'C'CB}$

$$\Rightarrow \frac{V_{AB'MB}}{V_{AB'C'CB}} = \frac{\frac{1}{3}.d\left(A,\left(B'BM\right)\right).S_{\Delta B'MB}}{\frac{1}{3}.d\left(A,\left(B'C'CB\right)\right).S_{B'C'CB}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{AB'MB} = \frac{1}{4}.V_{AB'C'CB}\,(2)$$

$\oplus$ $V_{AB'C'CB} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}\,(3)$

Từ (1), (2) và (3), suy ra $V_{AOGB} = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{18}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{18}.270 = 15\text{ cm}^3$.

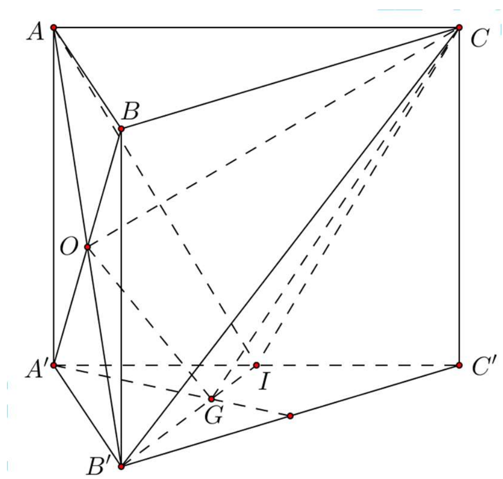
Vậy $V_{AOGB} = 15\text{ cm}^3$.

Câu 98. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 30. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Thể tích tứ diện $COGB'$ bằng:

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{15}{14}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của $A'C'$.

Ta có: $\frac{V_{B'.GOC}}{V_{B'.IAC}} = \frac{B'G}{B'I}.\frac{B'O}{B'A}.\frac{B'C}{B'C} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{B'.GOC} = \frac{1}{3}V_{B'.IAC}\ \left(1\right)$.

Mặt khác $S_{\Delta IAC} = \frac{1}{2}d_{(I,AC)}.AC = \frac{1}{2}d_{(A',AC)}.AC = S_{\Delta A'AC} = \frac{1}{2}S_{ACC'A'}$.

Mà $\frac{V_{B'.IAC}}{V_{B'.ACC'A'}} = \frac{S_{\Delta IAC}}{S_{ACC'A'}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow V_{B'.IAC} = \frac{1}{2}V_{B'.ACC'A'}\ \left(2\right)$.

$V_{B'.ACC'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{B'.ABC} = V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.30 = 20\ \left(3\right)$.

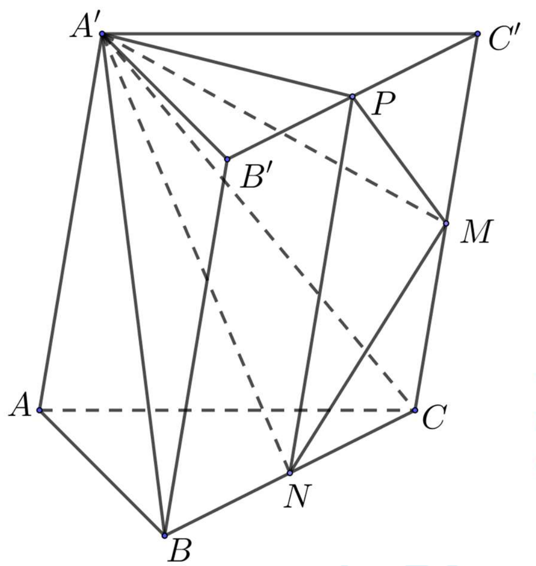
Từ $\left(1\right)$, $\left(2\right)$, $\left(3\right)$ suy ra $\Rightarrow V_{B'.GOC} = \frac{10}{3}$.

Câu 99. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh CC', BC và $B'C'$, khi đó tỉ số thể tích của khối chóp $A'.MNP$ với lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$+\ V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.d\left(A',(ABC)\right)=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}\Rightarrow V_{A'.BCC'B'}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

$+\ V_{A'.MNP}=\frac{1}{3}S_{\Delta MNP}.d\left(A',(MNP)\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}S_{BB'C'C}.d\left(A',(BB'C'C)\right)=\frac{1}{4}V_{A'.BB'C'C}$.

(Vì: $S_{\Delta MNP}=\frac{1}{2}S_{CC'PN}=\frac{1}{4}S_{BB'C'C}$ và $d\left(A',(MNP)\right)=d\left(A',(BB'C'C)\right)$).

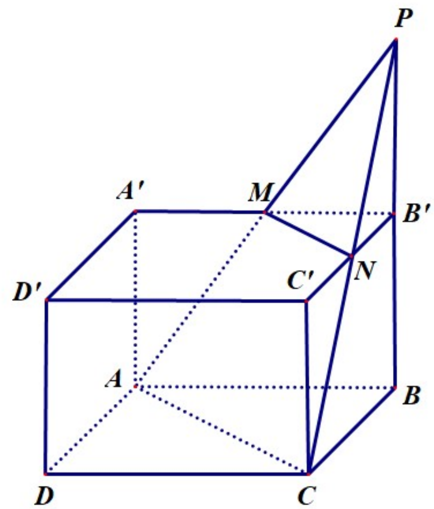
Suy ra: $V_{A'.MNP}=\frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}$.

Câu 100. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là trung điểm của $B'C'$, P đối xứng với B qua B'. Khi đó mặt phẳng (PAC) chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích phần lớn và phần bé.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{17}{7}$. **C.** $\frac{25}{7}$. **D.** $\frac{25}{14}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (ACM) chia khối hộp chữ nhật thành hai phần như hình vẽ. Gọi thể tích khối hộp chữ nhật ban đầu là V, phần chứa điểm B' có thể tích V_1 và phần còn lại có thể tích V_2.

Ta có $\frac{PB'}{PB}=\frac{PN}{PC}=\frac{PM}{PA}=\frac{MB'}{AB}=\frac{1}{2}$.

Thể tích của khối chóp $P.ACB$ là $V_{P.ACB}=\frac{1}{3}PB.S_{ABC}=\frac{1}{3}.2.BB'.\frac{1}{2}AB.BC=\frac{1}{3}V$.

Ta lại có $\frac{V_{P.MNB'}}{V_{P.ACB}}=\frac{PB'}{PB}.\frac{PN}{PC}.\frac{PM}{PA}=\frac{1}{8}$.

Do đó $V_1=V_{P.ACB}-V_{P.MNB'}=\left(1-\frac{1}{8}\right).V_{P.ACB}=\frac{7}{8}V_{P.ACB}=\frac{7}{8}.\frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'}=\frac{7}{24}V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{V-V_1}=\frac{7V}{24\left(V-\frac{7}{24}V\right)}=\frac{7}{17}$.

Câu 101. Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+2y+18}{x}$.

A. $P=9$. **B.** $P=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

C. $P=1+9\sqrt{2}$. **D.** Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta đặt $t=x^2-2y$, $t\in\mathbb{R}$.

Phương trình $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$ trở thành

$$4+9.3^t=\left(4+9^t\right).\frac{49}{7^t}\Leftrightarrow 4\left(7^t-49\right)+9^t\left[9.\left(\frac{7}{3}\right)^t-49\right]=0.$$

Nhận thấy $t=2$ là nghiệm phương trình.

Ta chứng minh $t=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

☑ Xét $t>2$: $7^t>49$ và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t>49$ nên vế trái phương trình luôn dương, nên phương trình vô nghiệm.

☑ Xét $t<2$: $7^t<49$ và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t<49$ nên vế trái phương trình luôn âm, nên phương trình vô nghiệm.

Vậy $t=x^2-2y=2 \Leftrightarrow y=\frac{x^2-2}{2}$ thay vào $P=\frac{x+2y+18}{x}=\frac{x^2+x+16}{x}$

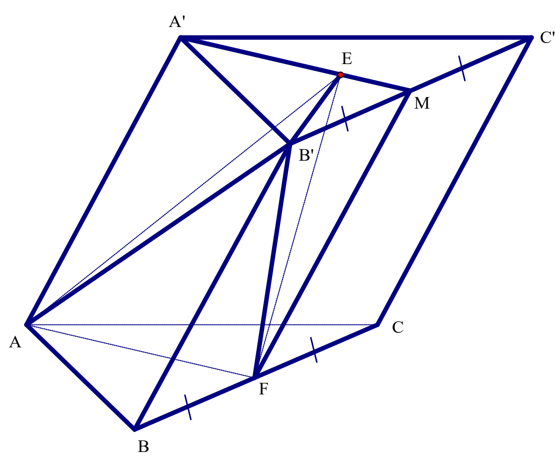
$=x+\frac{16}{x}+1\ge 2\sqrt{x.\frac{16}{x}}+1=9$. Dấu bằng đạt được khi $x=\frac{16}{x}\Rightarrow x=4$.

Câu 102. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi E là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ và F là trung điểm BC. Tính tỉ số thể tích giữa khối $B'.EAF$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D



M là trung điểm của B’C’ $\Rightarrow S_{EAF}=\frac{1}{2}S_{AA'MF}$.

$d\left(B',\left(AA'MF\right)\right)=d\left(B',\left(AEF\right)\right)$.

$V_{B'.AA'MF}=V_{ABF.A'B'M}-V_{B'.ABF}=V_{ABF.A'B'M}-\frac{1}{3}V_{ABF.A'B'M}=\frac{2}{3}V_{ABF.A'B'M}$.

Suy ra $V_{B'.EAF}=\frac{1}{2}V_{B'.AA'MF}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.V_{ABF.A'B'M}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}$.

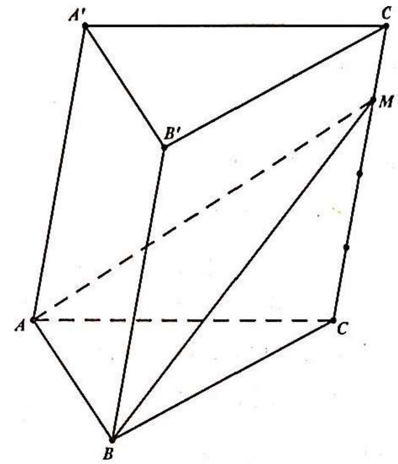
Vậy $\frac{V_{B'.EAF}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{6}$.

Câu 103. Cho lăng trụ $ABC.AB'C'$ có thể tích là V. Gọi M là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CM=3C'M$. Thể tích của khối chóp $M.ABC$ theo V là:

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{3V}{4}$. **C.** $\frac{V}{12}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Thể tích của khối chóp $M.ABC$ là:

$$\frac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(M;\left(ABC\right)\right).S_{ABC}}{d\left(C';\left(ABC\right)\right).S_{ABC}}$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{d\left(M;\left(ABC\right)\right)}{d\left(C';\left(ABC\right)\right)}=\frac{1}{3}.\frac{MC}{C'C}=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow V_{M.ABC}=\frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{V}{4}.$$

Cách 2: Áp dụng công thức tỉ số thể tích.

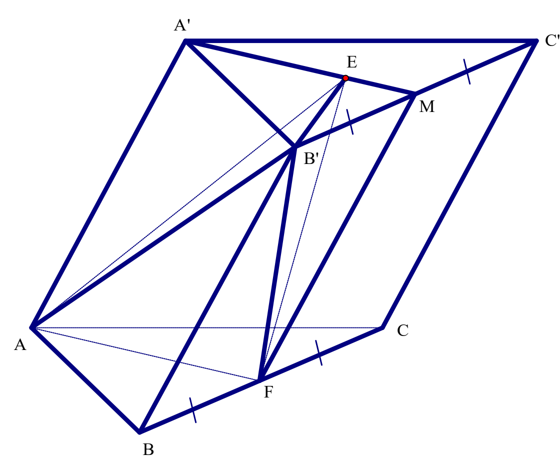
$$\frac{V_{C.ABM}}{V_{A'B'C'.ABC}}=\frac{1}{3}\frac{CM}{CC'}=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{M.ABC}=\frac{1}{4}V.$$

Câu 104. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi E là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ và F là trung điểm BC. Tính tỉ số thể tích giữa khối $B'.EAF$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D



M là trung điểm của B'C' $\Rightarrow S_{EAF}=\frac{1}{2}S_{AA'MF}$.

$d\left(B',\left(AA'MF\right)\right)=d\left(B',\left(AEF\right)\right)$.

$V_{B'.AA'MF} = V_{ABF.A'B'M} - V_{B'.ABF} = V_{ABF.A'B'M} - \frac{1}{3}V_{ABF.A'B'M} = \frac{2}{3}V_{ABF.A'B'M}$.

Suy ra $V_{B'.EAF} = \frac{1}{2}V_{B'.AA'MF} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.V_{ABF.A'B'M} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}$.

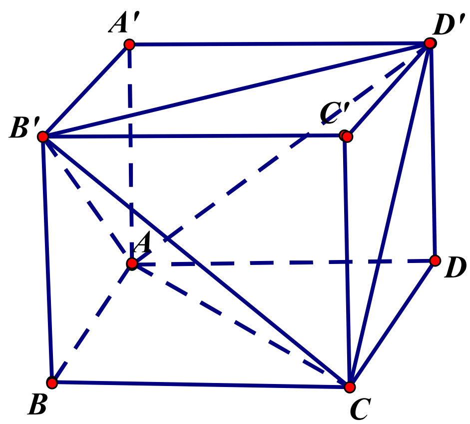
Vậy $\frac{V_{B'.EAF}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{6}$.

Câu 105. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$ và thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Ta có $V_{ACB'D'} = V - V_{AA'B'D'} - V_{D'ADC} - V_{B'ABC} - V_{CB'C'D'} = V - 4.\frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V$.

Vậy $\frac{V_{ACB'D'}}{V} = \frac{1}{3}$.

Câu 106. Cho khối hộp $ABCDA'B'C'D'$ có thể tích V. Các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AD'}$. Tính thể tích khối chóp $AMNP$ theo V.

A. $6V$. **B.** $8V$. **C.** $12V$. **D.** $4V$.

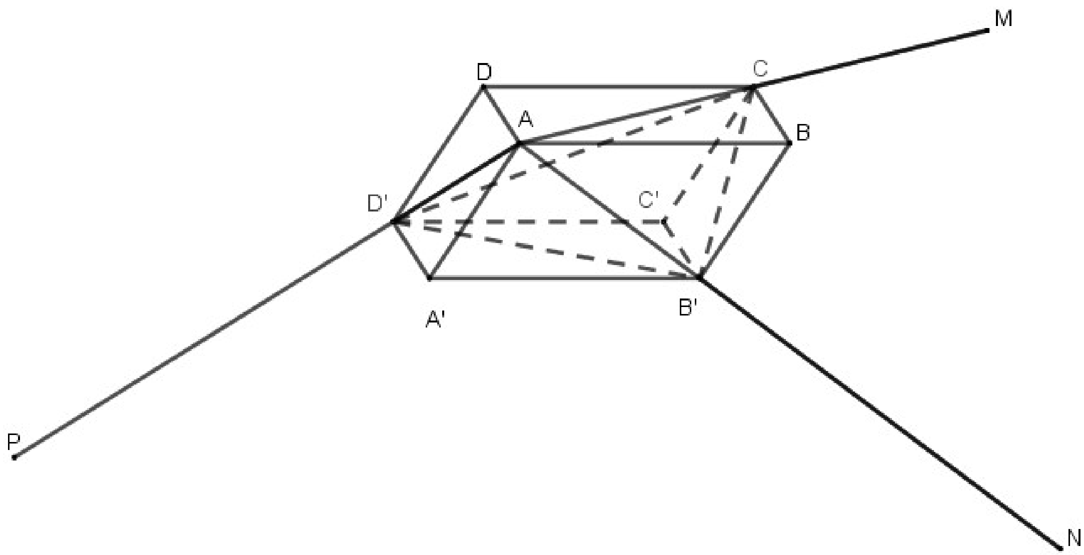
Lời giải

Chọn B

Phân tích:

 Nhận dạng bài toán: Đây là bài toán tính thể tích khối đa diện thông qua tỉ số thể tích.

 Kiến thức cần nhớ: Cho khối chóp $S.ABC$. Trên các đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác S. Ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.



Ta có: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.CB'D'}}=\frac{AM}{AC}.\frac{AN}{AB'}.\frac{AP}{AD'}=2.3.4=24 \Rightarrow V_{A.MNP}=24V_{A.CB'D'}$. Mặt khác:

$V_{A.CB'D'}=V_{ABCDA'B'C'D'}-V_{A.A'B'D'}-V_{A.B'BC}-V_{A.D'DC}-V_{C.C'B'D'}=V-4.\frac{1}{6}V=\frac{V}{3}\Rightarrow V_{A.MNP}=8V$.

Câu 107. Cho khối hộp $ABCDA'B'C'D'$ có thể tích V. Lấy điểm M đối xứng với A qua C, điểm N đối xứng với A qua B', điểm P thỏa mãn $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD'}$. Tìm k để thể tích khối chóp $AMNP$ bằng $\frac{V}{2}$.

A. $k=\frac{3}{8}$. **B.** $k=\pm\frac{3}{8}$. **C.** $k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=\pm\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.CB'D'}}=\frac{AM}{AC}.\frac{AN}{AB'}.\frac{AP}{AD'}=2.2.|k|=4|k| \Rightarrow V_{A.MNP}=4|k|V_{A.CB'D'}$.

Mà: $V_{A.CB'D'}=V_{ABCDA'B'C'D'}-V_{A.A'B'D'}-V_{A.B'BC}-V_{A.D'DC}-V_{C.C'B'D'}=V-4.\frac{1}{6}V=\frac{V}{3}$

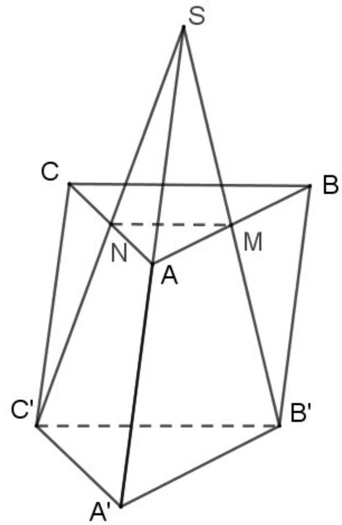
$\Rightarrow V_{A.MNP}=\frac{4}{3}|k|V \Rightarrow V_{A.CB'D'}=\frac{V}{2}\Leftrightarrow |k|=\frac{3}{8}$.

Câu 108. Cho khối lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$ có thể tích V. Điểm M là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(C'B'M)$ chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1 và V_2, biết V_1 là khối chứa điểm A. Tính V_2 theo V.

A. $V_2=\frac{7}{12}$. **B.** $V_2=\frac{5}{12}$. **C.** $V_2=\frac{5}{6}$. **D.** $V_2=\frac{17}{24}$.

Lời giải

Chọn B



Do $C'B'//(\text{ABC})$ nên $(C'B'M)$ cắt AC tại điểm N thỏa mãn $MN//B'C' \Rightarrow N$ là trung điểm AC.

Dễ thấy 3 đường $C'N, B'M, A'A$ đồng quy tại S và $V_{S.AMN} = \frac{1}{8}V_{S.A'B'C'} \Rightarrow V_1 = \frac{7}{8}V_{S.A'B'C'}$.

Gọi h, S lần lượt là chiều cao và diện tích đáy của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$, ta có:

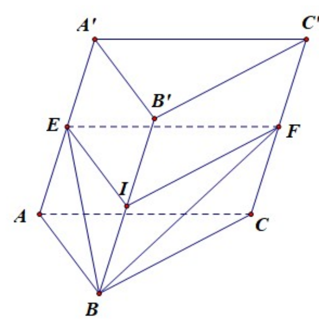
$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3}d\left(S;\left(A'B'C'\right)\right).S = \frac{1}{3}.2h.S = \frac{2}{3}V$, vậy $\Rightarrow V_1 = \frac{7}{12}V \Rightarrow V_2 = \frac{5}{12}V$.

Câu 109. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AA', CC'. Mặt phẳng (BEF) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần đó là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$; V_1 là thể tích khối chóp $B.AEFC$; V_2 là thể tích khối đa diện $BB'EFC'A'$; I là trung điểm của cạnh BB' và h là chiều cao của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có: $(EIF)//(ABC)$ nên $d\left(B,(EIF)\right) = \frac{h}{2}$.

$V_{B.IEF} = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}h.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}V$. Do đó $V_1 = V_{ABC.EIF} - V_{B.EIF} = \frac{1}{2}V - \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V$.

$V_2 = V - V_1 = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

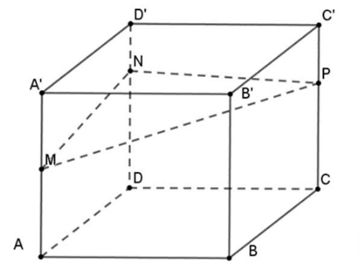
Cách 2.

Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$; V_1 là thể tích khối chóp $B.AEFC$, V_2 là thể tích khối đa diện $BB'EFC'A'$

Ta có $V_1 = \frac{1}{2}V_{BACC'A'} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}V$ suy ra $V_2 = \frac{2}{3}V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

Câu 110. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích là 2110. Biết $A'M = MA$, $DN = 3ND'$, $CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chi khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khôi đa diện nhỏ hơn bằng

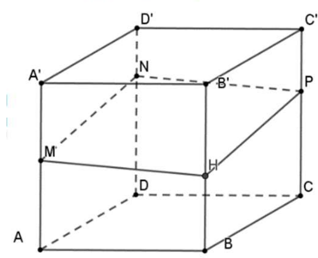


A. $\frac{5275}{6}$. **B.** $\frac{5275}{12}$. **C.** $\frac{7385}{18}$. **D.** $\frac{8440}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1



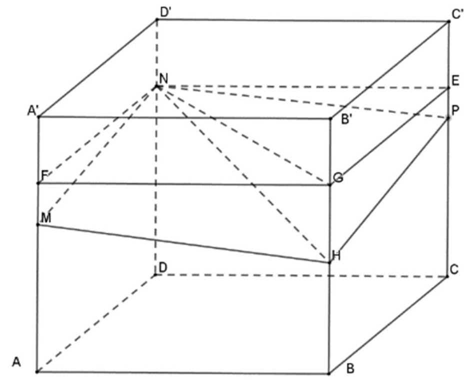
Gọi H là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB'. Khi đó ta có

$\frac{D'N}{DD'} + \frac{B'H}{BB'} = \frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Khi đó ta có $\frac{V_{A'B'C'D'.MNPH}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{4}\left(\frac{D'N}{DD'} + \frac{B'H}{BB'} + \frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'}\right) = \frac{1}{2}.\frac{5}{6} = \frac{5}{12}$.

Vậy thể tích của khối nhỏ là $V_{A'B'C'D'.MNPH} = \frac{5}{12}.2110 = \frac{5275}{6}$.

Cách 2



Gọi H là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB'. Khi đó ta có

$\dfrac{D'N}{DD'}+\dfrac{B'H}{BB'}=\dfrac{A'M}{AA'}+\dfrac{C'P}{CC'}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$, suy ra $\dfrac{B'H}{BB'}=\dfrac{7}{12}$.

Gọi $E\in C'C, F\in A'A, G\in B'B$ sao cho $\overrightarrow{D'N}=\overrightarrow{C'E}=\overrightarrow{A'F}=\overrightarrow{B'G}$. Gọi V_0 là thể tích khối $A'B'C'D'ABCD$. Gọi V là thể tích khối $A'B'C'D'MHPN$. Gọi V_1 là thể tích khối $A'B'C'D'FGEN$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $N.FMHG$ và Gọi V_3 là thể tích khối chóp $N.EPHG$. Ta có $V=V_1+V_2+V_3$.

Do $D'N=\dfrac{1}{4}D'D$ nên suy ra $V_1=\dfrac{1}{4}V_0$.

$V_2=\dfrac{1}{3}S_{FGHM}.AD$ mà $\dfrac{S_{FGHM}}{S_{ABA'B'}}=\dfrac{FM+GH}{A'A+B'B}=\dfrac{7}{24}$ suy ra $V_2=\dfrac{7}{72}V_0$

$V_3=\dfrac{1}{3}S_{GHPE}.AB$ mà $\dfrac{S_{GHPE}}{S_{BCC'B'}}=\dfrac{EP+GH}{C'C+B'B}=\dfrac{5}{24}$ suy ra $V_2=\dfrac{5}{72}V_0$

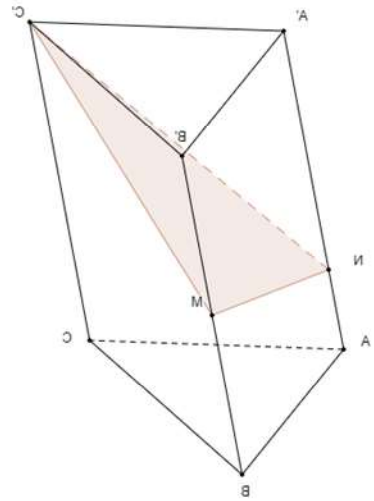
Vậy thể tích khối cần tính là: $V=\dfrac{5}{12}V_0=\dfrac{5275}{6}$.

Câu 111. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm cạnh BB', N là điểm thuộc cạnh AA' sao cho $AA'=4AN$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ thành 2 phần, phần chứa điểm A có thể tích V_2, phần còn lại có thể tích V_1. Tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{a}{b}$ với a,b là số tự nhiên và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tổng $a+b$ bằng

A. 8. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\dfrac{V_{ABC.NMC'}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AN}{AA'}+\dfrac{BM}{BB'}+\dfrac{CC'}{CC'}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{7}{12}$.

$\Rightarrow V_{ABC.NMC'}=\dfrac{7}{12}V_{ABC.A'B'C'}\Rightarrow V_{NMC'A'B'}=\dfrac{5}{12}V_{ABC.A'B'C'}$.

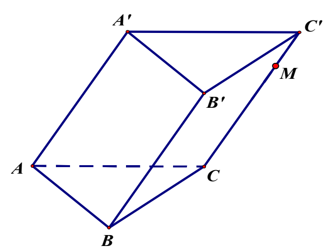
$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V_{NMC'A'B'}}{V_{ABC.NMC'}}=\dfrac{5}{7}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow a+b=12$.

Câu 112. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là điểm trên cạnh CC' sao cho $CM=3C'M$. Tính thể tích của khối chóp $M.ABC$.

A. $\dfrac{V}{4}$. **B.** $\dfrac{3V}{4}$. **C.** $\dfrac{V}{12}$. **D.** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn A



$\dfrac{V_{M.ABC}}{V_{C'.ABC}}=\dfrac{MC}{C'C}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow V_{M.ABC}=\dfrac{3}{4}V_{C'.ABC}$.

$\dfrac{V_{C'.ABC}}{V_{A'B'C'.ABC}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{C'.ABC}=\dfrac{1}{3}V$.

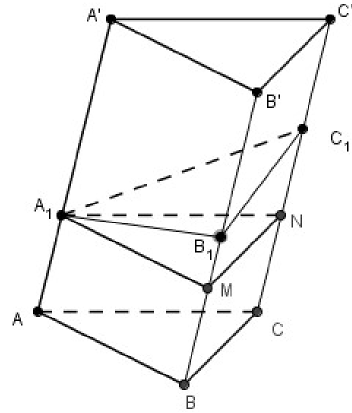
Suy ra $V_{M.ABC}=\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{3}V=\dfrac{V}{4}$.

Câu 113. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V và độ dài cạnh bên $AA'=6$ đơn vị. Cho điểm A_1 thuộc cạnh AA' sao cho $AA_1=2$. Các điểm B_1, C_1 lần lượt thuộc cạnh BB', CC' sao cho $BB_1=x$, $CC_1=y$, ở đó x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy=12$. Biết rằng thể tích của khối đa diện $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $\dfrac{1}{2}V$. Giá trị của $|x-y|$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt thuộc BB' và CC' sao cho $BM = CN = 2$. Khi đó ta có

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{ABC.A_1MN} + V_{A_1MNC_1B_1} = \frac{1}{3}V + \frac{x+y-4}{12}V_{A'BCC'B'} = \frac{1}{3}V + \frac{x+y-4}{12}\cdot\frac{2}{3}V.$$

Mặt khác theo giả thiết ta có $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}V$ nên suy ra

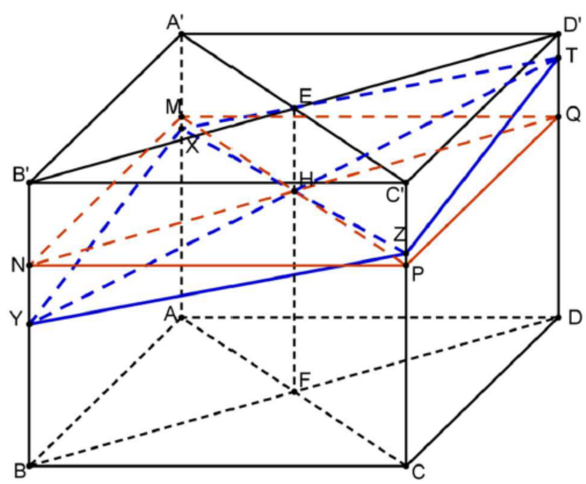
$\frac{1}{3}V + \frac{x+y-4}{12}\cdot\frac{2}{3}V = \frac{1}{2}V \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{x+y-4}{12}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+y=7$, kết hợp với $xy=12$. Ta có $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$. Do đó $|x-y|=1$.

Câu 114. Cho một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC' lấy lần lượt lấy ba điểm X, Y, Z sao cho $AX = 2A'X$, $BY = B'Y$, $CZ = 3C'Z$. Mặt phẳng (XYZ) cắt cạnh DD' ở tại điểm T. Khi đó tỉ số thể tích của khối $XYZT.ABCD$ và khối $XYZT.A'B'C'D'$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{7}{24}$. **B.** $\frac{7}{17}$. **C.** $\frac{17}{7}$. **D.** $\frac{17}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Xét mặt phẳng qua H và song song mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Khi đó, hai mặt phẳng $(XYZT)$; $(MNPQ)$ cùng với các mặt bên của hình hộp chữ nhật giới hạn những khối đa diện bằng nhau và đối xứng nhau qua điểm H.

Khi đó, $V_{A'B'C'D'XYZT} = V_{A'B'C'D'MNPQ}$.

Ta có: $(MNPQ)//(ABCD)$ nên $\frac{V_{A'B'C'D'MNPQ}}{V_{A'B'C'D'ABCD}} = \frac{EH}{EF}$ hay $\frac{V_{XYZTABCD}}{V_{A'B'C'D'XYZT}} = \frac{HF}{EH}$.

Xét hình thang $A'XZC'$ có đường trunh bình EH nên $EH=\dfrac{A'X+C'Z}{2}=\dfrac{7}{24}EF$.

Do đó $HF=\dfrac{17}{24}EF$ hay $\dfrac{EH}{HF}=\dfrac{7}{17}$.

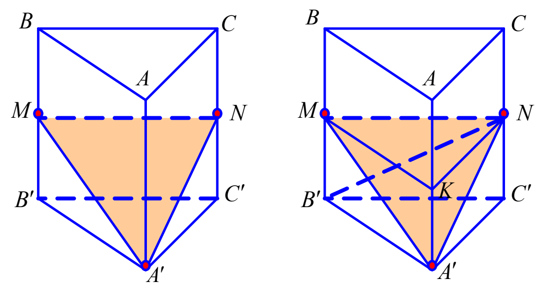
Vậy $\dfrac{V_{A'B'C'D'XYZT}}{V_{XYZTABCD}}=\dfrac{17}{7}$.

Câu 115. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC'. Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, đặt V_1 là thể tích của phần đa diện chứa điểm B, V_2 là phần còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=2$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=3$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $MK \,//\, AB$ suy ra $KN \,//\, AC$. Do M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC' khi đó mặt phẳng (MKN) chia hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ làm hai phần bằng nhau.

Ta có $V_{ABC.A'B'C'}=V_{ABC.MNK}+V_{MNK.A'B'C'}=2V_{MNK.A'B'C'}$.

Mặt khác $V_{MNK.A'B'C'}=V_{N.A'B'C'}+V_{A'.MNK}+V_{N.A'B'M}$ và $V_{N.A'B'C'}=V_{A'.MNK}=V_{N.A'B'M}$

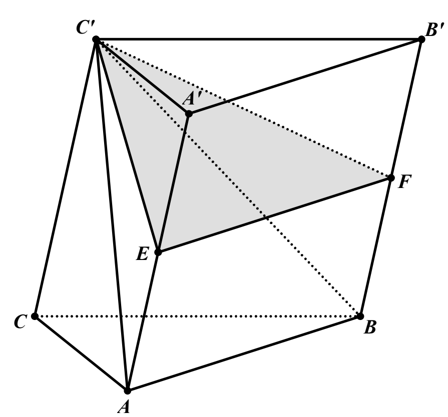
nên $V_2=V_{N.A'B'C'}+V_{N.A'B'M}=2V_{N.A'B'C'}$, $V_1=4V_{N.A'B'C'}$. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=2$.

Câu 116. Xét khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Mặt phẳng đi qua C' và các trung điểm của AA', BB' chia khối lăng trụ thành hai phần có tỉ số thể tích bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



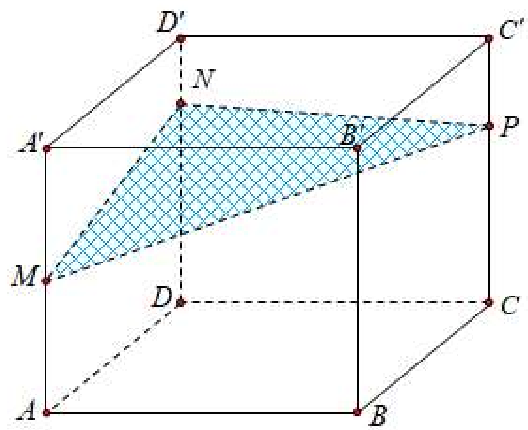
Gọi E, F lần lượt là các trung điểm của AA' và BB' khi đó ta có:

$V_{C'.A'B'FE}=\frac{1}{2}V_{C'.A'B'BA}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{CC'.ABFE}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Vậy mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối lăng trụ thành hai phần có tỉ số thể tích bằng $\frac{1}{2}$.

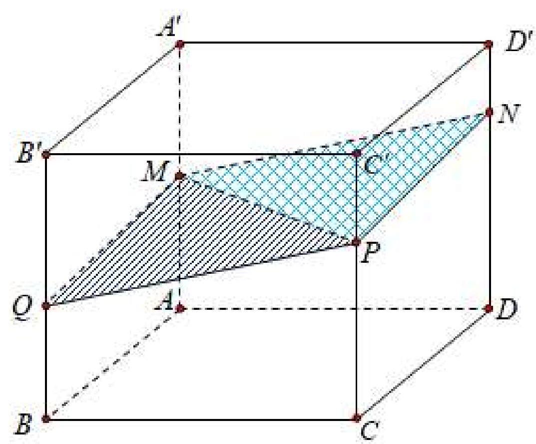
Câu 117. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M=MA$, $DN=3ND'$, $CP=2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{5275}{6}$. **B.** $\frac{8440}{9}$. **C.** $\frac{7385}{18}$. **D.** $\frac{5275}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB'.

Giả sử $\frac{A'M}{AA'}=x$, $\frac{C'P}{CC'}=y$, $\frac{D'N}{DD'}=z$, $\frac{B'Q}{BB'}=t$. Khi đó $x+y=z+t$.

$\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'D'.ABD}}=\frac{x+z+t}{3}\Rightarrow\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}}=\frac{x+z+t}{6}$

$\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{C'B'D'.CBD}} = \frac{y+z+t}{3} \Rightarrow \frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{y+z+t}{6}$

$\Rightarrow \frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2}(x+y)$

$\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$

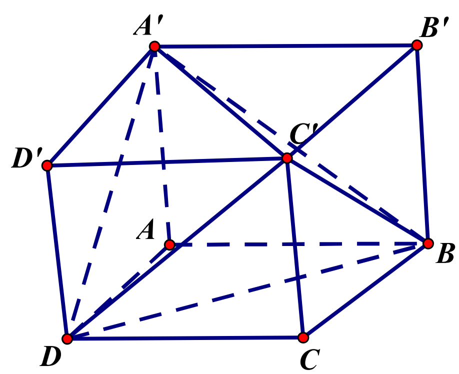
$\Rightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'} = \frac{5}{12}.V_{ABCD.A'D'C'B'} = \frac{5275}{6}$.

Câu 118. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tỉ số thể tích của khối tứ diện $A'C'BD$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

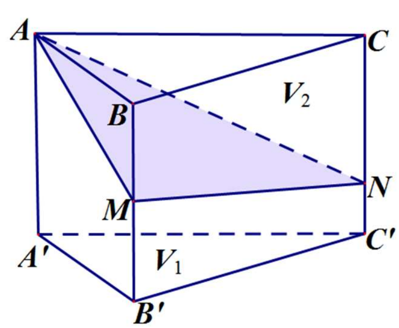
Chọn C



Gọi $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$, ta có $V_{A'C'BD} = V - V_{CDCB} - V_{CA'B'B} - V_{CA'D'D} = V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{6}V = \frac{1}{2}V$.

$V_{A'C'BD} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

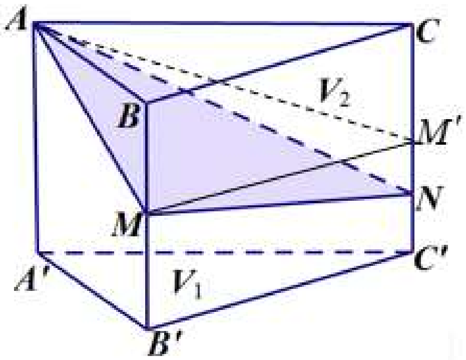
Câu 119. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB', N là điểm trên cạnh CC' sao cho $CN = 3NC'$. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 như hình vẽ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M' là trung điểm của CC', ta có:

$dt_{BCM'M}=\frac{1}{2}dt_{BCC'B'}, dt_{M'MN}=\frac{1}{4}dt_{BCM'M}=\frac{1}{8}dt_{BCC'B'}\Rightarrow dt_{BMNC}=\frac{5}{8}dt_{BCC'B'}$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_{A.BCB'C'}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCB'C'\right)\right).dt_{BCNM}}{\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCB'C'\right)\right).dt_{BCB'C'}}=\frac{5}{8}.$$

$$\frac{V_{A.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A;\left(A'B'C'\right)\right).dt_{A'B'C'}}{d\left(A;\left(A'B'C'\right)\right).dt_{A'B'C'}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{V_{A.BCC'B'}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{V_2}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{5}{8}.\frac{2}{3}=\frac{5}{12}.$$

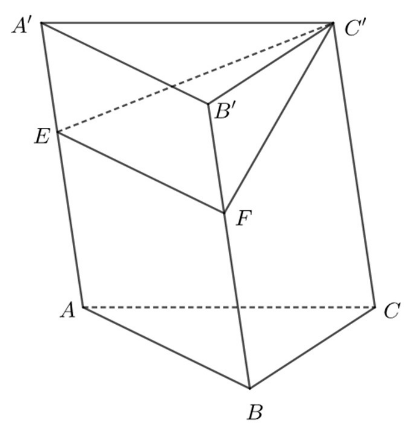
Do $V_{ABC.A'B'C'}=V_1+V_2\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

Câu 120. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$.Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA'=kA'E, BB'=kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $(C'.A'B'FE)$ có thể tích V_1 và khối đa diện (ABCEFC′) có thể tích V_2. Biết rằng $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7}$, tìm k

A. $k=4$. **B.** $k=3$. **C.** $k=1$. **D.** $k=2$.

Lời giải

Chọn B



+) Do khối chóp $C'.A'B'FE$ và khối chóp $C'.A'B'BA$ có chung đường cao hạ từ C' nên

$$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{C'.A'B'BA}}=\frac{S_{A'B'FE}}{S_{A'B'BA}}=\frac{2S_{A'B'E}}{2S_{A'B'A}}=\frac{A'E}{A'A}=\frac{1}{k}\ (1)$$

+) Do khối chóp $C'.ABC$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chung đường cao hạ từ C' và đáy là ΔABC nên $\frac{V_{C'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{V_{C'.A'B'BA}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{2}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{2}{3k}\Rightarrow\frac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{2}{3k}\Rightarrow V_1=\frac{2}{3k}.V_{ABC.A'B'C'}$

+) Đặt $V=V_{ABC.A'B'C'}$ Khi đó $\begin{cases}V_1=\frac{2}{3k}.V\\ V_2=V-V_1=V-\frac{2}{3k}.V\end{cases}$

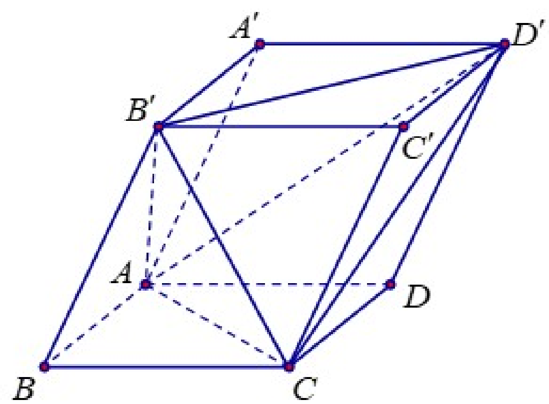
Mà $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7}$ nên $\frac{2}{3k}.V=\frac{2}{7}(V-\frac{2}{3k}.V)\Leftrightarrow\frac{2}{3k}=\frac{2}{7}(1-\frac{2}{3k})\Leftrightarrow\frac{6}{7k}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow 2k=6\Leftrightarrow k=3$

Câu 121. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thể tích là V. Tính thể tích của tứ diện $ACB'D'$ theo V.

A. $\frac{V}{6}$. **B.** $\frac{V}{4}$. **C.** $\frac{V}{5}$. **D.** $\frac{V}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có ngay kết quả sau $V_{ACB'D'}=V-\left(V_{B'.ABC}+V_{C.B'C'D'}+V_{D'.ACD}+V_{A.A'B'D'}\right)$.

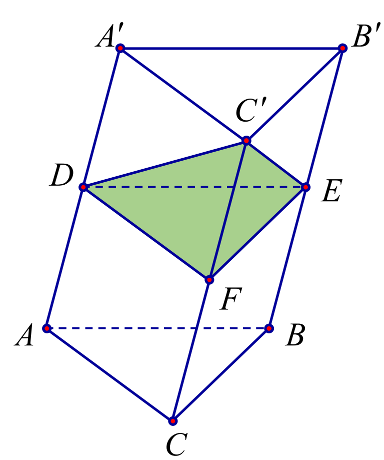
Lưu ý $V_{B'.ABC}=V_{C.B'C'D'}=V_{D'.ACD}=V_{A.A'B'D'}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{3}.\frac{V}{2}\Rightarrow V_{ACB'D'}=V-4.\frac{V}{6}=\frac{V}{3}$.

Câu 122. Cho khối lăng trụ đứng, mặt phẳng (P) đi qua C' và các trung điểm của AA', BB' chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện có tỷ số thể tích bằng k với $k\le 1$. Tìm k.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' và h là độ dài chiều cao của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khi đó ta có

$V_{C'DEF} = \frac{1}{3}.S_{\Delta DEF}.\frac{h}{2} = \frac{1}{6}.S_{\Delta DEF}.h = \frac{1}{6}.V_{ABC.A'B'C'}$.

Mặt khác $V_{A'B'C'DEF} = \frac{1}{2}.V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{C'DEB'A'} + V_{C'DEF} = \frac{1}{2}.V_{ABC.A'B'C'} \Leftrightarrow V_{C'DEB'A'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \Leftrightarrow k = \frac{V_{C'DEB'A'}}{V_{ABCDC'E}} = \frac{1}{2}$.

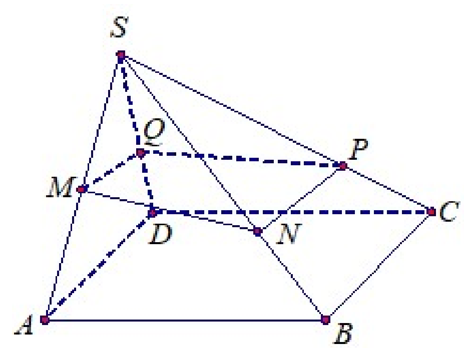
7. KHỐI CHÓP - MỨC 4

Câu 123. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm trên đoạn SB sao cho $SN = 2NB$. Mặt phẳng (R) chứa MN cắt đoạn SD tại Q và cắt đoạn SC tại P. Tính tỉ số $\frac{SP}{SC}$ để thể tích khối đa diện $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị lớn nhất.*

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D



Đặt $\frac{SP}{SC} = x$ $0 < x \le 1$. Ta có $\frac{SM}{SA} + \frac{SP}{SC} = \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD} \Rightarrow \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2} + x - \frac{2}{3} = x - \frac{1}{6}$ $\left(x > \frac{1}{6}\right)$.

Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành nên có $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2V_{S.ACD}$

$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC} = \frac{1}{3}x$; $\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2}x\left(x - \frac{1}{6}\right)$.

Suy ra $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x\left(x - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$.

Xét $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$ với $\frac{1}{6} < x \le 1$; $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \notin \left(\frac{1}{6};1\right]$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{6}$		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3}{8}$

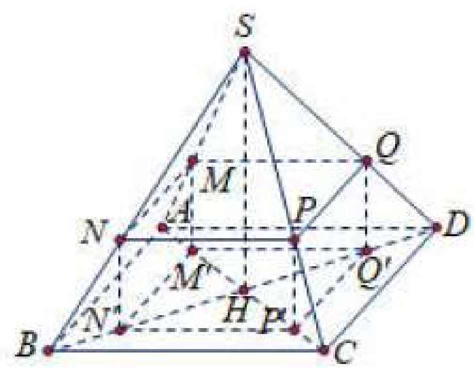
Từ BBT ta có $\max\limits_{\left(\frac{1}{6};1\right]} f(x)=\frac{3}{8}$. Vậy $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{8}$ khi $\frac{SP}{SC}=1$.

Câu 124. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng thay đổi nhưng luôn song song với đáy và cắt các cạnh bên SA,SB,SC,SD lần lượt tại M,N,P,Q. Gọi M',N',P',Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M,N,P,Q lên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $\frac{SM}{SA}=k$ với $k\in[0;1]$.

Xét tam giác SAB có $MN//AB$ nên $\frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA}=k\Rightarrow MN=k.AB$.

Xét tam giác SAD có $MQ//AD$ nên $\frac{MQ}{AD}=\frac{SM}{SA}=k\Rightarrow MQ=k.AD$.

Kẻ đường cao SH của hình chóp. Xét tam giác SAH có:

$MM'//SH$ nên $\frac{MM'}{SH}=\frac{AM}{SA}=\frac{SA-SM}{SA}=1-\frac{SM}{SA}=1-k\Rightarrow MM'=(1-k).SH$.

Ta có: $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}=MN.MQ.MM'=AB.AD.SH.k^2.(1-k)$.

Thể tích khối chóp không đổi nên $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}$ đạt giá trị lớn nhất khi $k^2.(1-k)$ lớn nhất.

Ta có $k^2.(1-k)=\frac{2(1-k).k.k}{2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2-2k+k+k}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$.

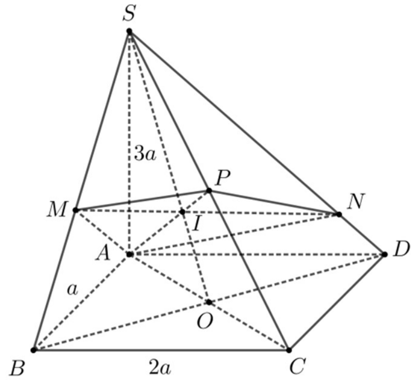
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $2(1-k)=k\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$. Vậy $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$.

Câu 125. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a, AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=3a$. Điểm P là trung điểm của SC. Một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Tính tỉ số $\frac{SM}{SB}$ khi thể tích của khối chóp $S.AMPN$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

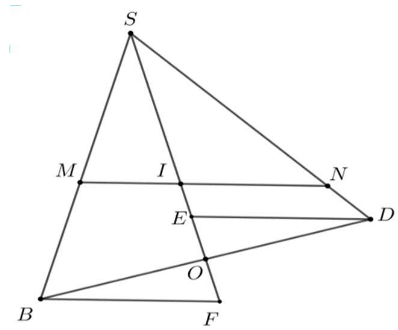


Cách xác định mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SB , SD như hình vẽ. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$ và I là giao điểm AP và MN .

Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}AS.AB.AD=\frac{1}{3}.3a.a.2a=2a^3$,

Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA.SM.SP}{SA.SB.SC}=\frac{1}{2}.\frac{SM}{SC}$; $\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ADC}}=\frac{SA.SN.SP}{SA.SD.SC}=\frac{1}{2}.\frac{SN}{SD}$

Suy ra $V_{S.AMP}=\frac{SM}{4SB}.V_{S.ABCD}$, $V_{S.ANP}=\frac{SN}{4SD}.V_{S.ABCD}$. Khi đó $V_1=V_{S.AMP}+V_{S.ANP}=\left(\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}\right).\frac{a^3}{2}$



Ta có I là trọng tâm tam giác SAC nên $\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$

Từ B,D lần lượt kẻ các đường thẳng song song với MN cắt SO tại E,F . Khi đó hai tam giác $\Delta OED=\Delta OFB$ (g.c.g) suy ra $OE=OF$

Ta có $\frac{SB}{SM}=\frac{SF}{SI}=\frac{SO+OF}{SI}$; $\frac{SD}{SN}=\frac{SE}{SI}=\frac{SO-OE}{SI}$

Từ đó suy ra $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=\frac{2SO}{SI}=3$ suy ra $\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}\geq\frac{4}{\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}}=\frac{4}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SD}\Rightarrow MN//BD\Rightarrow\frac{SM}{SB}=\frac{2}{3}$.

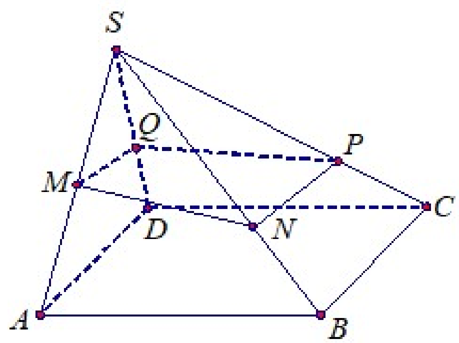
Vậy $V_1=\left(\dfrac{SM}{SB}+\dfrac{SN}{SD}\right).\dfrac{a^3}{2}\ge\dfrac{4}{3}\dfrac{a^3}{2}=\dfrac{2}{3}a^3$. Giá trị nhỏ nhất của V_1 bằng $\dfrac{2}{3}a^3$ khi $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 126. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm trên đoạn SB sao cho $SN=2NB$. Mặt phẳng (R) chứa MN cắt đoạn SD tại Q và cắt đoạn SC tại P. Tính tỉ số $\dfrac{SP}{SC}$ để thể tích khối đa diện $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị lớn nhất.*

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D



Đặt $\dfrac{SP}{SC}=x\ \ 0<x\le 1$. Ta có $\dfrac{SM}{SA}+\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{SN}{SB}+\dfrac{SQ}{SD}\Rightarrow\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{1}{2}+x-\dfrac{2}{3}=x-\dfrac{1}{6}\left(x>\dfrac{1}{6}\right)$.

Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành nên có $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2V_{S.ACD}$

$\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{1}{3}x$; $\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SP}{SC}.\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{1}{2}x\left(x-\dfrac{1}{6}\right)$.

Suy ra $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}}+\dfrac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}}=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{4}x\left(x-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{8}x$.

Xét $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{8}x$ với $\dfrac{1}{6}<x\le 1$; $f'(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{8}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}\notin\left(\dfrac{1}{6};1\right]$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{6}$		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3}{8}$

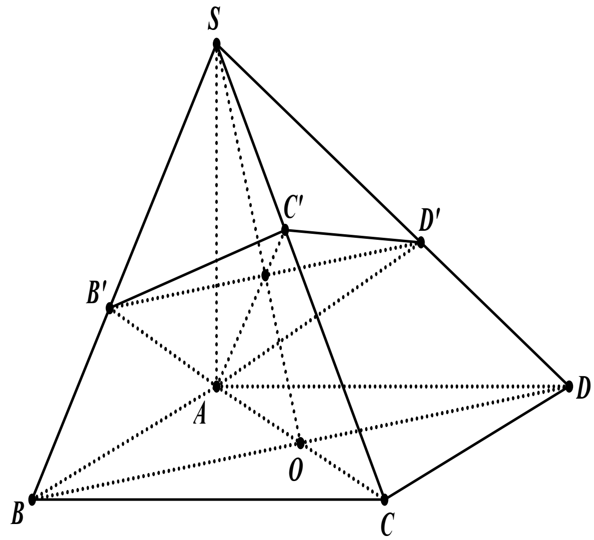
Từ BBT ta có $\max\limits_{\left(\frac{1}{6};1\right]}f(x)=\dfrac{3}{8}$. Vậy $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{3}{8}$ khi $\dfrac{SP}{SC}=1$.

Câu 127. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc $45°$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt trên SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính tỉ số thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\left(\widehat{SB,(ABCD)}\right)=\widehat{SBA}=45^\circ \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow SA=a$.

Mặt khác ΔSAB vuông cân tại A có AB' là đường cao $\Rightarrow B'$ là trung điểm SB.

ΔSAD vuông cân tại A có AD' là đường cao $\Rightarrow D'$ là trung điểm SD.

Mà $SC^2=SA^2+AC^2=3a^2 \Rightarrow SC=\sqrt{3}a.$

Ta có: $CD\perp AD$; $CD\perp SA \Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp AD'$.

$CD\perp AD'$; $AD'\perp SD \Rightarrow AD'\perp(SCD)\Rightarrow AD'\perp SC$ (1).

Chứng minh tương tự ta cũng có: $AB'\perp SC$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow SC\perp(AB'C'D')\Rightarrow SC\perp AC'$.

Xét tam giác vuông SAC có AC' là đường cao nên: $SA^2=SC.SC'\Rightarrow SC'=\dfrac{SA^2}{SC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Đặt $V=V_{S.ABCD}$.

Khi đó: $V_{S.ABC}=V_{S.ADC}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{2}V$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow V_{S.AB'C'}=\dfrac{1}{6}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{12}V$.

$\dfrac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow V_{S.AD'C'}=\dfrac{1}{6}V_{S.ADC}=\dfrac{1}{12}V$.

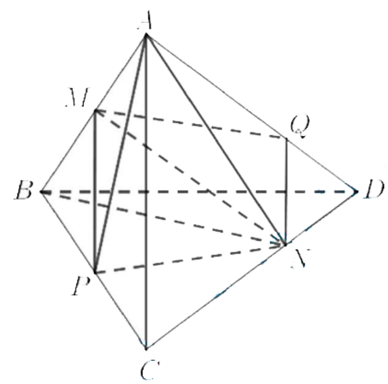
Vậy $\dfrac{V_{SAB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{V_{SAB'C'}+V_{SAC'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{12}V+\frac{1}{12}V}{V}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 128. Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}+2\overrightarrow{ND}=\vec{0}$. Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính tỉ số thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A và khối đa diện còn lại.

A. $\dfrac{11}{18}$. **B.** $\dfrac{7}{18}$. **C.** $\dfrac{7}{11}$. **D.** $\dfrac{11}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi V_A là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A.

Giả sử khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích bằng V_0.

Vì $(\alpha)//AC\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=MP//AC\ (P\in BC)$.

$(\alpha)//AC\Rightarrow(\alpha)\cap(ADC)=NQ//AC\,(Q\in AD)$.

Khối đa diện chứa đỉnh A được chia thành ba khối tứ diện $AMNQ$, $AMNP$, $ACNP$ do vậy $V_A=V_{AMNQ}+V_{AMNP}+V_{ACNP}$.

Xét tam giác ACD, có $QN//AC\Rightarrow\dfrac{AQ}{AD}=\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{2}{3}$.

Ta có: $V_{AMNQ}=\dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AQ}{AD}.V_{ABND}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.V_{ABND}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{DN}{DC}V_0=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}.V_0=\dfrac{1}{9}V_0$.

$V_{AMNP}=\dfrac{AM}{AB}V_{ABNP}=\dfrac{1}{2}V_{ABNP}=\dfrac{1}{2}\dfrac{S_{BNP}}{S_{BCD}}V_0=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}V_0=\dfrac{1}{6}V_0$.

$V_{ACNP}=\dfrac{CN}{CD}.\dfrac{CP}{CB}V_0=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}V_0=\dfrac{1}{3}V_0$.

Suy ra $V_A=\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\right)V_0=\dfrac{11}{18}.V_0$.

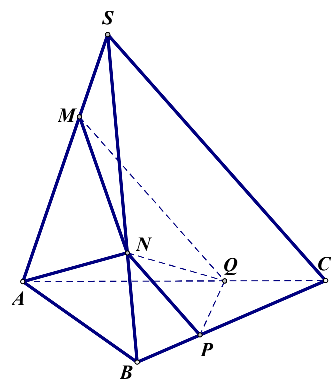
Vậy $\dfrac{V_A}{V_0-V_A}=\dfrac{\frac{11}{18}V_0}{V_0-\frac{11}{18}V_0}=\dfrac{11}{7}$.

Câu 129. Cho khối chóp $S.ABC$ có $M \in SA$, $N \in SB$ sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MS}$, $\overrightarrow{NS} = -2\overrightarrow{NB}$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm M, N và song song với SC chia khối chóp thành hai khối đa diện, có thể tích là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có mặt phẳng (α) cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến $MQ // SC$ $(Q \in AC)$ và cắt mặt phẳng (SBC) theo giao tuyến $NP // SC$ ($P \in BC$). Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với hình chóp là hình thang $MNPQ$.

Gọi $V = V_{S.ABC}$ và $S = S_{\Delta ABC}$.

Ta có: $\frac{QC}{AC} = \frac{1}{3}$, $\frac{PC}{BC} = \frac{2}{3}$ nên $S_{\Delta PQC} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}S$.

Suy ra: $S_{ABPQ} = S - S_{\Delta PQC} = \frac{7}{9}S$.

$V_{N.ABPQ} = \frac{1}{3}.d\left(N,(ABC)\right).S_{ABPQ} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}d\left(S,(ABC)\right).\frac{7}{9}S = \frac{7}{27}V$.

Mặt khác: $\frac{MA}{SA} = \frac{2}{3}, \frac{QA}{CA} = \frac{2}{3}$ nên $S_{\Delta AMQ} = \frac{4}{9}S_{\Delta ASC}$

$V_{N.AMQ} = \frac{1}{3}.d\left(N,(SAC)\right).S_{\Delta AMQ} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}d\left(B,(SAC)\right).\frac{4}{9}S_{\Delta ASC} = \frac{8}{27}V$.

Vậy $V_{MNABPQ} = V_{N.ABPQ} + V_{N.AMQ} = \frac{5}{9}V \Rightarrow V_{SMNPQC} = \frac{4}{9}V$.

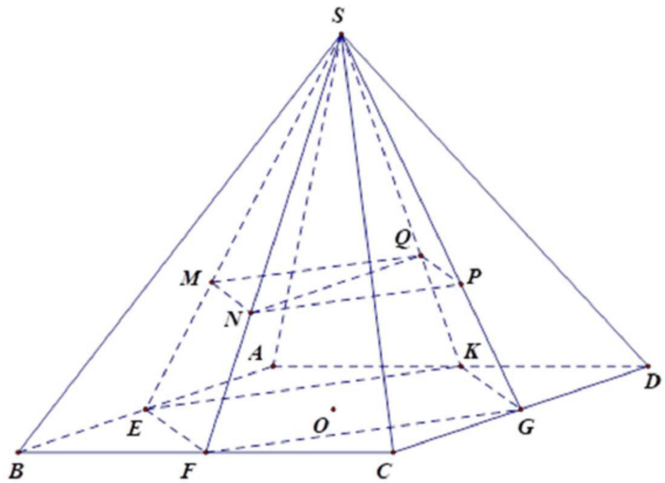
Suy ra $\frac{V_{SMNPQC}}{V_{MNABPQ}} = \frac{4}{5}$.

Câu 130. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành có thể tích là V'. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA. Gọi O là điểm bất kì trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng V. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{27}{2}$. **B.** $\frac{27}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E , F , G , K lần lượt là trung điểm của AB , BC , CD , DA .

Vì M , N lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB , SBC nên $\frac{SM}{SE}=\frac{SN}{SF}=\frac{2}{3}$. Suy ra $MN // FE$ (1). Chứng minh tương tự ta có $PQ // KG$ (2).

Vì E,F lần lượt là trung điểm của AB,BC nên $FE // AC$ (3). Chứng minh tương tự ta có $KG // AC$ (4).

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $MN // PQ$. Suy ra 4 điểm M , N , P , Q đồng phẳng.

Ta có $(MNPQ)//(ABCD)$; $\frac{SM}{ME}=2 \Rightarrow d\left(S,(MNPQ)\right)=2.d\left((MNPQ),(ABCD)\right)$ $=2.d\left(O,(MNPQ)\right)$

$\Rightarrow V_{S.MNPQ}=2V_{O.MNPQ}=2V$.

$+\ \frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.EFK}}=\frac{SM}{SE}\cdot\frac{SN}{SF}\cdot\frac{SQ}{SK}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}\Rightarrow V_{S.MNQ}=\frac{8}{27}V_{S.EFK}$.

$+\ \frac{V_{S.NPQ}}{V_{S.FGK}}=\frac{SN}{SF}.\frac{SP}{SG}.\frac{SQ}{SK}=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{8}{27}\Rightarrow V_{S.NPQ}=\frac{8}{27}V_{S.FGK}$.

$\Rightarrow V_{S.MNQ}+V_{S.NPQ}=\frac{8}{27}V_{S.EFK}+\frac{8}{27}V_{S.FGK}\Leftrightarrow V_{S.MNPQ}=\frac{8}{27}V_{S.EFGK}$.

$\Rightarrow V_{S.EFGK}=\frac{27}{8}V_{S.MNPQ}=\frac{27}{4}V\ (1)$.

Ta có $\frac{S_{\Delta EBF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}BE.BF.\sin\widehat{EBF}}{\frac{1}{2}BA.BC.\sin\widehat{ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow S_{\Delta EBF}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{8}S_{ABCD}$.

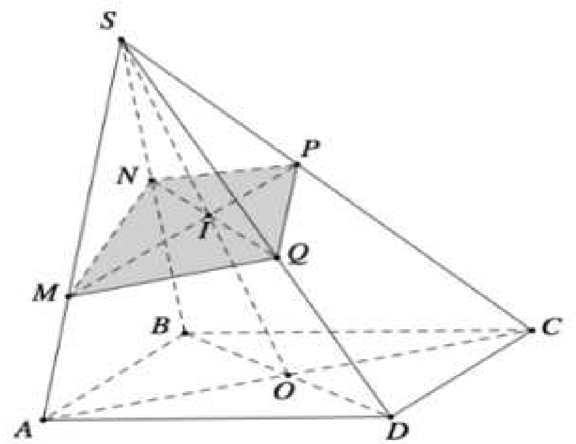
Chứng minh tương tự ta có $S_{\Delta FCG}=S_{\Delta GDK}=S_{\Delta KAE}=\frac{1}{8}S_{ABCD}$.

Khi đó $S_{EFGK}=S_{ABCD}-\left(S_{\Delta EBF}+S_{\Delta FCG}+S_{\Delta GDK}+S_{\Delta KAE}\right)=S_{ABCD}-4S_{\Delta EBF}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Suy ra $\dfrac{V_{S.EFGK}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}.d\left(S,(EFGK)\right).S_{EFGK}}{\frac{1}{3}.d\left(S,(ABCD)\right).S_{ABCD}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{S.ABCD}=2.V_{S.EFGK}\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $V_{S.ABCD}=\dfrac{27}{2}V$ hay $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{27}{2}$.

CÔNG THỨC TÍNH NHANH: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $\dfrac{SA}{SM}=x$, $\dfrac{SB}{SN}=y$, $\dfrac{SC}{SP}=z$, $\dfrac{SD}{SQ}=t$.



Khi đó: $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{x+y+z+t}{4xyzt}$

Áp dụng vào bài toán ta được:

$\Rightarrow \dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.EFGK}}=\dfrac{8}{27}\Rightarrow \dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{4}{27}$

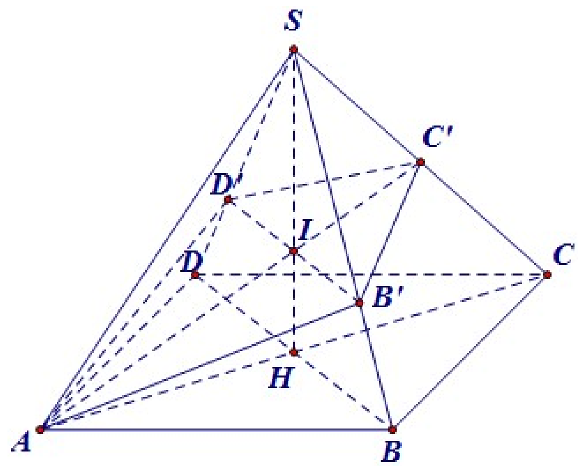
$V_{S.MNPQ}=2V_{O.MNPQ}\Rightarrow \dfrac{V_{O.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{2}{27}\Rightarrow \dfrac{V'}{V}=\dfrac{27}{2}$

Câu 131. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) qua AC' và vuông góc SC cắt SB, SD lần lượt tại B', D'. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm H của hình vuông $ABCD$.

Vì C' là trung điểm của SC và H là trung điểm AC nên $I = AC' \cap SH$ là trọng tâm ΔSAC

$\Rightarrow SI = \frac{2}{3}SH$.

Ta có:

$BD \perp AC$, $BD \perp SH$ $\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ mà $BD \not\subset (P)$; $(P) \perp SC \Rightarrow BD // (P)$.

Vì $BD \subset (SBD)$; $(SBD) \cap (P) = B'D'$ và $BD // (P)$ suy ra $BD // B'D'$.

Mặt khác:

$(P) \cap (SBD) = B'D'$, $I \in AC' \subset (P)$, $I \in SH \subset (SBD) \Rightarrow I \in B'D'$.

Do đó:

$\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SI}{SH} = \frac{2}{3}$.

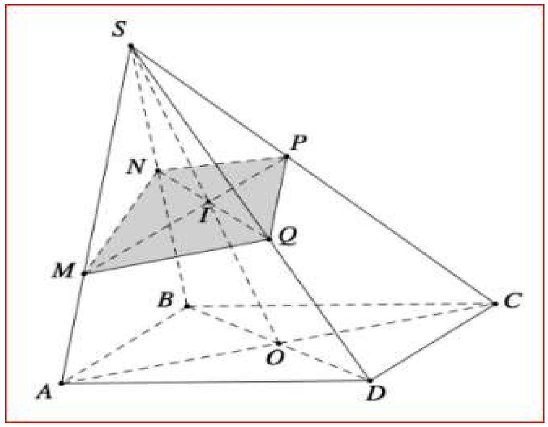
Ta có:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AB'C'}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AC'D'}}{2V_{S.ACD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{1}{2} \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

CÔNG THỨC TÍNH NHANH: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $\frac{SA}{SM} = x$, $\frac{SB}{SN} = y$, $\frac{SC}{SP} = z$, $\frac{SD}{SQ} = t$.



Ta có: $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{x+y+z+t}{4xyzt}$

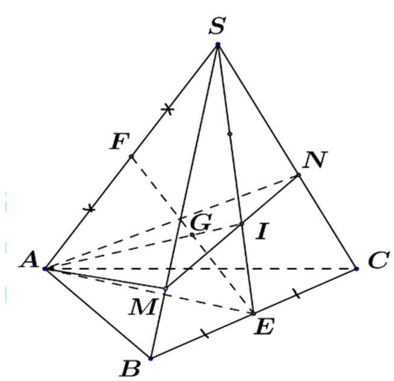
Áp dụng vào bài toán ta có $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{\dfrac{SA}{SA}+\dfrac{SD}{SD'}+\dfrac{SC}{SC'}+\dfrac{SB}{SB'}}{4\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SD}{SD'}\cdot\dfrac{SC}{SC'}\cdot\dfrac{SB}{SB'}}=\dfrac{1+\dfrac{3}{2}+2+\dfrac{3}{2}}{4\cdot1\cdot\dfrac{3}{2}\cdot2\cdot\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}$

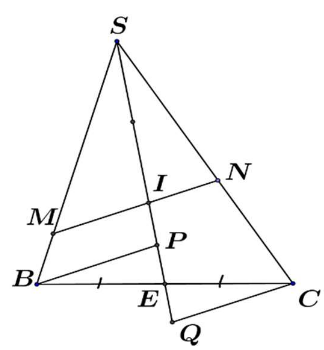
Câu 132. Cho tứ diện $SABC$ có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB ,SC lần lượt tại M , N. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là

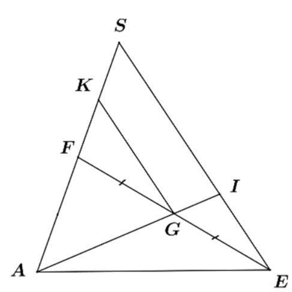
A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A







Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, SA khi đó trung điểm G của EF là trọng tâm của tứ diện $SABC$. Điểm I là giao điểm của AG và SE. Qua I dựng đường thẳng cắt các cạnh SB , SC lần lượt tại M , N. Suy ra (AMN) là mặt phẳng quay quanh AG thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dựng $GK//SE$, $(K \in SA)$ suy ra K là trung điểm FS.

$\Rightarrow \dfrac{KG}{SI}=\dfrac{AK}{AS}=\dfrac{3}{4}$. Mà $\dfrac{KG}{SE}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{SI}{SE}=\dfrac{2}{3}$.

Cách 1:

Dựng $BP//MN$, $CQ//MN$, $(P, Q \in SE)$.

Ta có: $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SI}{SP}$; $\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{SI}{SQ}$.

Ta có: $BP//QC$, $E=PQ\cap BC$ và $EB=EC \Rightarrow \Delta BEP=\Delta CEQ \Rightarrow$ E là trung điểm của PQ

$\Rightarrow SP+SQ=2SE$ (đúng cả trong trường hợp $P\equiv Q\equiv E$).

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=1.\dfrac{SI}{SP}.\dfrac{SI}{SQ}\overset{AM-GM}{\geq}\dfrac{SI^2}{\dfrac{(SP+SQ)^2}{4}}=\dfrac{SI^2}{SE^2}=\left(\dfrac{SI}{SE}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $SP=SQ=SE$. Hay $P\equiv Q\equiv E \Leftrightarrow MN//BC$.

Vậy tỉ số nhỏ nhất là $\dfrac{4}{9}$.

Cách 2:

Đặt $\dfrac{SB}{SM}=x$; $\dfrac{SC}{SN}=y$, với $x>0$, $y>0$.

Ta có: $\overrightarrow{SI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SE}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)=\dfrac{1}{3}\left(x.\overrightarrow{SM}+y.\overrightarrow{SN}\right)=\dfrac{x}{3}.\overrightarrow{SM}+\dfrac{y}{3}.\overrightarrow{SN}$.

Do I, M, N thẳng hàng nên $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1 \Leftrightarrow x+y=3$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{xy}\overset{AM-GM}{\geq}\dfrac{1}{\dfrac{(x+y)^2}{4}}=\dfrac{4}{9}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow MN//BC$.

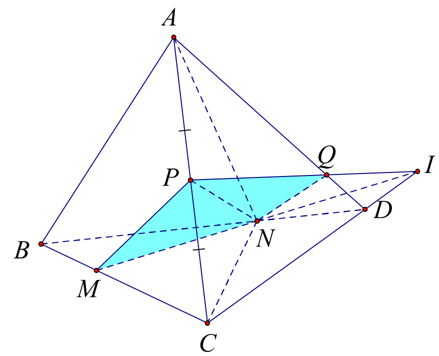
Vậy tỉ số nhỏ nhất là $\dfrac{4}{9}$.

Câu 133. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC=3BM$, $BD=\dfrac{3}{2}BN$, $AC=2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 với $V_1<V_2$. Tính tỉ số $T=\dfrac{V_2}{V_1}$.

A. $T=\dfrac{26}{13}$. **B.** $T=\dfrac{26}{19}$. **C.** $T=\dfrac{26}{21}$. **D.** $T=\dfrac{26}{15}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $V_{ABCD}=V$, $I=MN\cap CD$, $Q=IP\cap AD$ suy ra $Q=AD\cap(MNP)$.

Thiết diện của tứ diện $ABCD$ được cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNQP$.

Có $BD=\frac{3}{2}BN\Rightarrow\frac{NB}{ND}=2$; $BC=3BM\Rightarrow\frac{MC}{MB}=2$ và $AC=2AP\Rightarrow\frac{PC}{PA}=1$; $\frac{AP}{AC}=\frac{1}{2}$.

Áp dụng định lí Menelaus trong các tam giác BCD và ACD ta có:

$\frac{NB}{ND}.\frac{ID}{IC}.\frac{MC}{MB}=1\Rightarrow 2.\frac{ID}{IC}.2=1\Rightarrow\frac{ID}{IC}=\frac{1}{4}$.

Và $\frac{ID}{IC}.\frac{PC}{PA}.\frac{QA}{QD}=1\Rightarrow\frac{1}{4}.1.\frac{QA}{QD}=1\Rightarrow\frac{QA}{QD}=4\Rightarrow\frac{AQ}{AD}=\frac{4}{5}$.

Áp dụng bài toán tỉ số thể tích của hai khối chóp tam giác ta có:

$\frac{V_{ANCD}}{V_{ABCD}}=\frac{ND}{BD}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{ANCD}=\frac{1}{3}V$ và $V_{CBNA}=\frac{2}{3}V$

$\frac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}}=\frac{AN}{AN}.\frac{AP}{AC}.\frac{AQ}{AD}=1.\frac{1}{2}.\frac{4}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow V_{ANPQ}=\frac{2}{5}V_{ANCD}=\frac{2}{15}V$. Suy ra $V_{N.PQDC}=\frac{1}{3}V-\frac{2}{15}V$ $=\frac{1}{5}V$.

$\frac{V_{CMNP}}{V_{CBNA}}=\frac{CM}{CB}.\frac{CN}{CN}.\frac{CP}{CA}=\frac{2}{3}.1.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{CMNP}=\frac{1}{3}V_{CBNA}=\frac{2}{9}V$.

Suy ra thể tích phần thứ nhất là: $V_1=V_{N.PQDC}+V_{CMNP}=\frac{1}{5}V+\frac{2}{9}V=\frac{19}{45}V$.

Do đó thể tích phần còn lại là: $V_2=V-V_1=\frac{26}{45}V$.

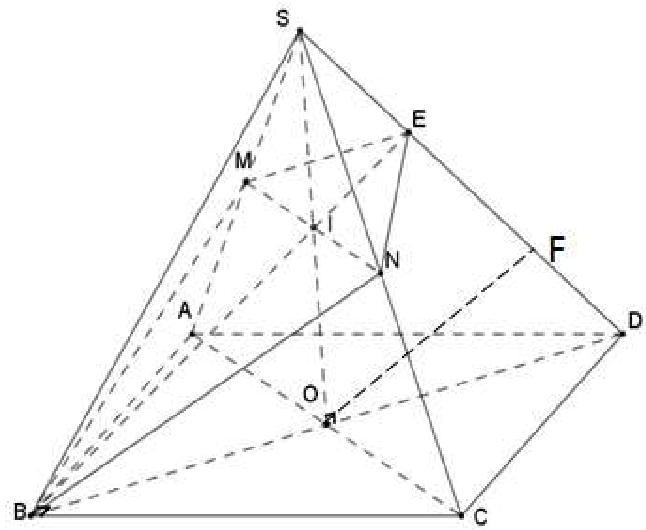
Vậy $T=\frac{V_2}{V_1}=\frac{26}{19}$.

Câu 134. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, SC. Gọi E là giao điểm của SD và mặt phẳng (BMN). Tính thể tích V của khối chóp $O.BMEN$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1:

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $I = MN \cap SO$. Trong mặt phẳng (SBD) gọi $E = BI \cap SD$.

Khi đó $E = SD \cap (BMN)$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC nên MN là đường trung bình tam giác SAC.

Suy ra I là trung điểm SO.

Áp dụng định lý Menelaus tam giác SOD với ba điểm thẳng hàng B, I, E, ta có:

$$\frac{ES}{ED}.\frac{BD}{BO}.\frac{IO}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{ES}{ED}.2.1 = 1 \Leftrightarrow \frac{ES}{ED} = \frac{1}{2}.$$

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$, suy ra $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối $OBMEN$ là $V_{0BMEN} = V_{S.BMEN} = V_{S.BMN} + V_{S.EMN}$ (vì I là trung điểm SO).

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BAC}} = \frac{SB}{SB}.\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{4}V_{S.BAC} = \frac{1}{4}.\frac{1}{3}.SO.\frac{1}{2}.AB.BC = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}.$$

$$\frac{V_{S.EMN}}{V_{S.DAC}} = \frac{SE}{SD}.\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow V_{S.EMN} = \frac{1}{12}V_{S.DAC} = \frac{1}{12}.\frac{1}{3}.SO.\frac{1}{2}.AD.DC = \frac{a^3\sqrt{2}}{144}.$$

$$V_{SBMEN} = V_{S.BMN} + V_{S.EMN} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48} + \frac{a^3\sqrt{2}}{144} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}.$$

Vậy $V_{0BMEN} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Cách 2: Làm trắc nghiệm.

Đặt $\frac{SM}{SA}=x=\frac{1}{2}$; $\frac{SB}{SB}=y=1$; $\frac{SN}{SC}=z=\frac{1}{2}$; $\frac{SE}{SD}=t$.

Điều kiện để bốn điểm B, M, E, N đồng phẳng là:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\Leftrightarrow 2+2=1+\frac{1}{t}\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$.

Ta có $\frac{V_{S.BMEN}}{V_{S.BADC}}=\frac{1}{4}xyzt\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$

$=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.(2+1+2+3)=\frac{1}{6}$.

Suy ra $V_{S.BMEN}=\frac{1}{6}V_{S.BADC}=\frac{1}{6}.\frac{1}{3}.SO.AB.BC=\frac{1}{6}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a.a=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Mà $V_{0BMEN}=V_{S.BMEN}=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Vậy $V_{0BMEN}=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Cách 3:

$V_{0BMEN}=V_{BOMN}+V_{OMNE}$.

Lại có $V_{OMNE}=V_{SMNE}$.

$OM=ON=\frac{a}{2}$; $MN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra tam giác OMN vuông tại O.

$V_{BOMN}=\frac{1}{3}BO.S_{OMN}=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

Kẻ OF // BE . Suy ra $\frac{SI}{SO}=\frac{SE}{SF}=\frac{1}{2}$; $\frac{DF}{DE}=\frac{DO}{DB}=\frac{1}{2}$. Do đó $SE=\frac{1}{3}SD$.

$\frac{V_{SMNE}}{V_{SACD}}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\Rightarrow V_{SMNE}=\frac{1}{12}V_{SACD}=\frac{1}{12}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{144}$.

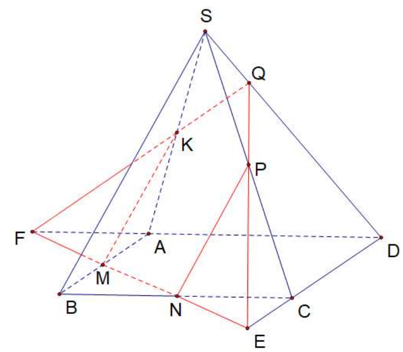
Vậy $V_{0BMEN}=V_{BOMN}+V_{OMNE}=\frac{a^3\sqrt{2}}{48}+\frac{a^3\sqrt{2}}{144}=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Câu 135. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm K thuộc đoạn SA. Biết mặt phẳng (MNK) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $t=\frac{KA}{KS}$.

A. $t=\frac{1}{2}$. **B.** $t=\frac{3}{4}$. **C.** $t=\frac{1}{3}$. **D.** $t=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài MN cắt DA, DC lần lượt tại F, E.

Trong mặt phẳng (SAD), gọi $FK \cap SD = Q$. Trong mặt phẳng (SCD), gọi $QE \cap SC = P$.

Suy ra thiết diện là ngũ giác $MNPQK$ và $MN \,//\, AC \,//\, PK$.

Đặt $h = d\left(S,\left(ABCD\right)\right)$

$$\frac{KA}{KS} = t \Rightarrow \frac{KA}{SA} = \frac{t}{t+1} \Rightarrow d\left(K,\left(ABCD\right)\right) = d\left(P,\left(ABCD\right)\right) = \frac{t}{t+1}.h$$

Ta có: $FA = BN = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \frac{FD}{FA} = 3$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAD, suy ra

$$\frac{QS}{QD}.\frac{FD}{FA}.\frac{KA}{KS} = 1 \Leftrightarrow \frac{QS}{QD}.3.t = 1 \Rightarrow \frac{QS}{QD} = \frac{1}{3t} \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{3t}{3t+1} \Rightarrow d\left(Q,\left(ABCD\right)\right) = \frac{3t}{3t+1}h$$

Mặt khác: $S_{FAM} = S_{NCE} = S_{BMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{8}S_{ABCD} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{9}{8}S_{ABCD}$

Suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S là

$$V = V_{QDEF} - V_{KAMF} - V_{PECN} = \frac{1}{3}\left(\frac{3t}{3t+1}h.\frac{9}{8}S - \frac{t}{t+1}.\frac{1}{8}S - \frac{t}{t+1}.\frac{1}{8}S\right)$$

$$= \frac{1}{3}.\left(\frac{27t}{8\left(3t+1\right)} - \frac{2t}{8\left(t+1\right)}\right).h.S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{27t}{8\left(3t+1\right)} - \frac{2t}{8\left(t+1\right)}\right)V_{ABCD}$$

Phần thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{7}{13}$ phần còn lại suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{13}{20}$ thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$\Rightarrow \frac{27t}{8\left(3t+1\right)} - \frac{2t}{8\left(t+1\right)} = \frac{13}{20} \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Câu 136. Cho tứ diện $SABC$ có trọng tâm là G. Một mặt phẳng qua G cắt các tia SA, SB và SC theo thứ tự tại A', B', C'. Đặt $\frac{SA'}{SA} = m, \frac{SB'}{SB} = n, \frac{SC'}{SC} = p$. Đẳng thức nào sau đây đúng

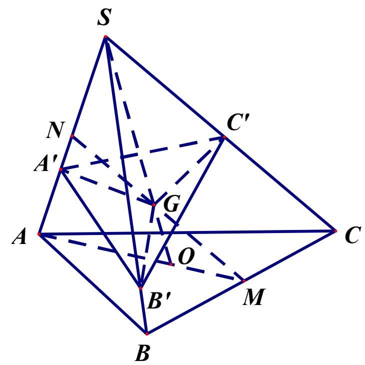
A. $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = 1$.

B. $\frac{1}{mn} + \frac{1}{np} + \frac{1}{pm} = 4$.

C. $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=4$. **D.** $m+n+p=4$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA, O là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó, ta có: $\{G\}=SO\cap MN$.

Xét tam giác SAM có: $\overrightarrow{SG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{SM}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SM}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SM}\right)$

và $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SM}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{SG}\Rightarrow\frac{SG}{SO}=\frac{3}{4}$.

Ta có: $\frac{V_{SA'GC'}}{V_{SAOC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SG}{SO}.\frac{SC'}{SC}=m.\frac{3}{4}.p\Rightarrow V_{SA'GC'}=\frac{3}{4}mnp.\frac{V_{SAOC}}{n}$ (1)

$\frac{V_{SA'GB'}}{V_{SAOB}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SG}{SO}.\frac{SB'}{SB}=m.\frac{3}{4}.n\Rightarrow V_{SA'GB'}=\frac{3}{4}mnp.\frac{V_{SAOB}}{p}$ (2)

$\frac{V_{SB'GC'}}{V_{SBOC}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SG}{SO}.\frac{SC'}{SC}=n.\frac{3}{4}.p\Rightarrow V_{SB'GC'}=\frac{3}{4}mnp.\frac{V_{SBOC}}{m}$ (3)

Cộng (1),(2),(3) vế theo vế ta được:

$V_{SA'B'C'}=\frac{3}{4}mnp\left(\frac{1}{n}.V_{SAOC}+\frac{1}{p}.V_{SAOB}+\frac{1}{m}.V_{SBOC}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}=\frac{3}{4}mnp\left(\frac{1}{n}.\frac{V_{SAOC}}{V_{SABC}}+\frac{1}{p}.\frac{V_{SAOB}}{V_{SABC}}+\frac{1}{m}.\frac{V_{SBOC}}{V_{SABC}}\right)$

$\Leftrightarrow mnp=\frac{3}{4}mnp\left(\frac{1}{n}.\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}+\frac{1}{p}.\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}+\frac{1}{m}.\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{4}{3}=\left[\frac{1}{n}.\frac{d(O;AC)}{d(B;AC)}+\frac{1}{p}.\frac{d(O;AB)}{d(C;AB)}+\frac{1}{m}.\frac{d(O;BC)}{d(A;BC)}\right]\Leftrightarrow\frac{4}{3}=\frac{1}{n}.\frac{1}{3}+\frac{1}{p}.\frac{1}{3}+\frac{1}{m}.\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=4$.

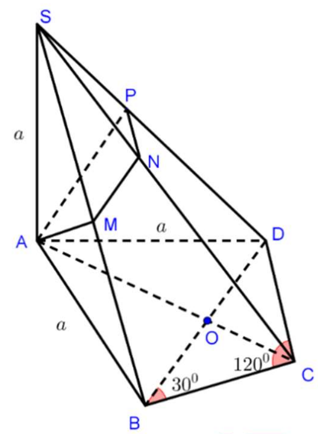
Bình luận: Nếu làm trắc nghiệm, ta chọn mp qua G và cắt SA,SB,SC là mp (NBC),ta có ngay đáp án: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=4.$

Câu 137. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, tam giác ABD đều cạnh a, tam giác BCD cân tại C và $\widehat{BCD}=120^0$, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC cắt SB,SC,SD lần lượt tại M,N,P. Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{42}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{21}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{14}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Giả thiết: ΔBCD cân tại C và $BD=a;\widehat{BCD}=120^0$

$\Rightarrow BD^2=BC^2+CD^2-2BC.CD.\cos\widehat{BCD}$

$\Leftrightarrow a^2=3BC^2\Leftrightarrow BC=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B có $AB=a, BC=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Giả thiết: ΔBCD cân và ΔABD đều.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ có $AC\perp BD$ và $\Delta ABC=\Delta ADC$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC.BD=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.a=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

$\Rightarrow V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Giả thiết: (P) vuông góc với SC cắt SB,SC,SD lần lượt tại M,N,P.

Ta có: $(1)\, AM\perp SB\left(\begin{matrix}\left.\begin{matrix}BC\perp SA\\ BC\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp AM\\ AM\perp SC\end{matrix}\right)$.

Mặt khác ΔSAB vuông cân tại $S\Rightarrow M$ là trung điểm $SB\Rightarrow\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{1}{2}$.

(2) tương tự $\dfrac{SP}{SD}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $SC\perp AN$.

Mặt khác ΔSAC vuông tại A có $SA = a, AC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$SC^2 = SA^2 + AC^2 = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{3}{7}$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{14} \Leftrightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{3}{14}.V_{S.ABC} = \dfrac{3}{14}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{84}$.

$\dfrac{V_{S.APN}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SP}{SD}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{3}{14} \Rightarrow V_{S.APN} = \dfrac{3}{14}V_{S.ADC} = \dfrac{3}{14}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{84}$.

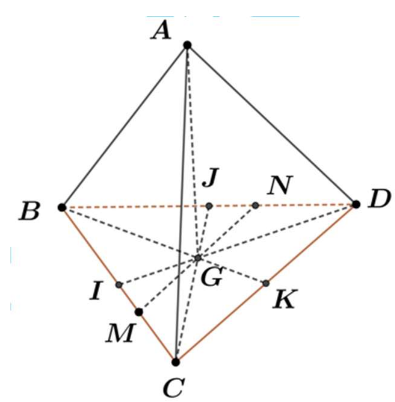
$\Rightarrow V_{S.AMNP} = V_{S.APN} + V_{S.AMN} = 2.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{84} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{42}$.

Câu 138. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho mặt phẳng (AMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (BCD). Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$. Tính $V_1 + V_2$.

A. $\dfrac{17\sqrt{2}}{216}$. **B.** $\dfrac{17\sqrt{2}}{72}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{2}}{144}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1:

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, BD, CD. G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Tứ diện $ABCD$ đều, G là tâm tam giác đề $BCD \Rightarrow AG \perp (BCD)$.

Ta có $(AMN) \perp (BCD) \Rightarrow (AMN) \supset AG \Rightarrow G \in MN$.

Đặt $BM = x, BN = y$ $\left(\dfrac{1}{2} \le x, y \le 1\right)$.

Ta có $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$S_{\triangle BMN} = S_{\triangle BGM} + S_{\triangle BGN} \Rightarrow \dfrac{1}{2}BM.BN.\sin B = \dfrac{1}{2}BM.GI + \dfrac{1}{2}BN.GJ$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}x.y.\sin 60^0 = \dfrac{1}{2}x.\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{1}{2}y.\dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow y = \dfrac{x}{3x-1}$.

Thể tích tứ diện $ABMN$ là: $V_{ABMN}=\frac{1}{3}S_{\triangle BMN}.AG=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{x^2}{3x-1}.\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}.\frac{x^2}{3x-1}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{12}.\frac{x^2}{3x-1}, x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

$$f'\left(x\right)=\frac{3x^2-2x}{\left(3x-1\right)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \left(L\right)\\x=\frac{2}{3}\ \left(N\right)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow V_1=\max_{x\in\left[\frac{1}{2};1\right]}f\left(x\right)=f\left(1\right)=\frac{\sqrt{2}}{24}\quad V_2=\min_{x\in\left[\frac{1}{2};1\right]}f\left(x\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{27}$$

Vậy $V_1+V_2=\frac{17\sqrt{2}}{216}$.

Cách 2:

Gọi I,J,K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC,BD,CD. G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Tứ diện $ABCD$ đều, G là tâm tam giác đề $BCD\Rightarrow AG\perp\left(BCD\right)$.

Ta có $\left(AMN\right)\perp\left(BCD\right)\Rightarrow\left(AMN\right)\supset AG\Rightarrow G\in MN$.

$$AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$V_{ABMN}=\frac{1}{3}S_{\triangle BMN}.AG.$$

Dễ thấy diện tích Tam giác BMN nhỏ nhất khi và chỉ khi tam giác BMN đều, khi đó $MN\,//\,CD$

$$\frac{BM}{BC}=\frac{BG}{BK}=\frac{2}{3}\Rightarrow BM=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BMN_{\min}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Diện tích tam giác BMN lớn nhất khi và chỉ khi $M\equiv C$ hoặc $N\equiv D$

$$\Rightarrow S_{\triangle BMN_{\max}}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Khi đó: $V_1=\frac{1}{3}AG.S_{\triangle BMN_{\max}}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{24}$.

$$V_2=\frac{1}{3}AG.S_{\triangle BMN_{\min}}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{2}}{27}.$$

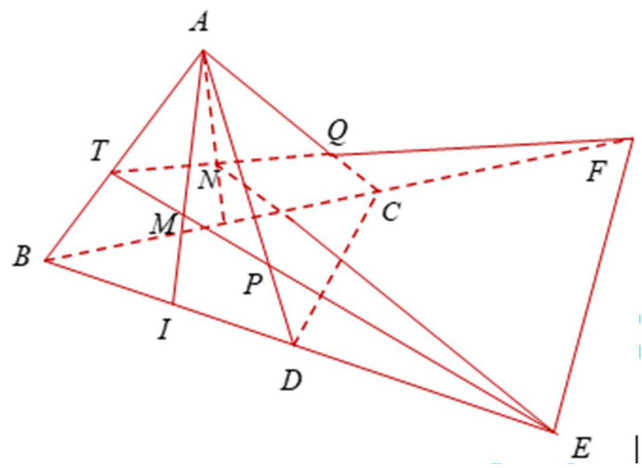
Vậy $V_1+V_2=\frac{17\sqrt{2}}{216}$.

Câu 139. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với B qua điểm D. Mặt phẳng $\left(MNE\right)$ chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{96}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{80}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{320}$. **D.** $\dfrac{9a^3\sqrt{2}}{320}$.

Lời giải

Chọn D



Thể tích khối tứ diện đều cạnh a là $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Gọi $P = ME \cap AD$; $T = ME \cap AB$. Trong mặt phẳng (ABC) đường thẳng TN cắt AC ,BC lần lượt tại Q, F. Khi đó mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện đã cho phần chứa đỉnh A là tứ diện $ATPQ$.

Gọi I là trung điểm BD. Xét ΔAID ta có: $\dfrac{ED}{EI}.\dfrac{MI}{MA}.\dfrac{PA}{PD} = 1$ (định lý Menelaus) $\Rightarrow \dfrac{PA}{PD} = 3$.

Tương tự ta có: $\dfrac{QA}{QC} = 3$

Xét ΔAIB ta có: $\dfrac{EI}{EB}.\dfrac{TB}{TA}.\dfrac{MA}{MI} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{TB}{TA} = \dfrac{2}{3}$.

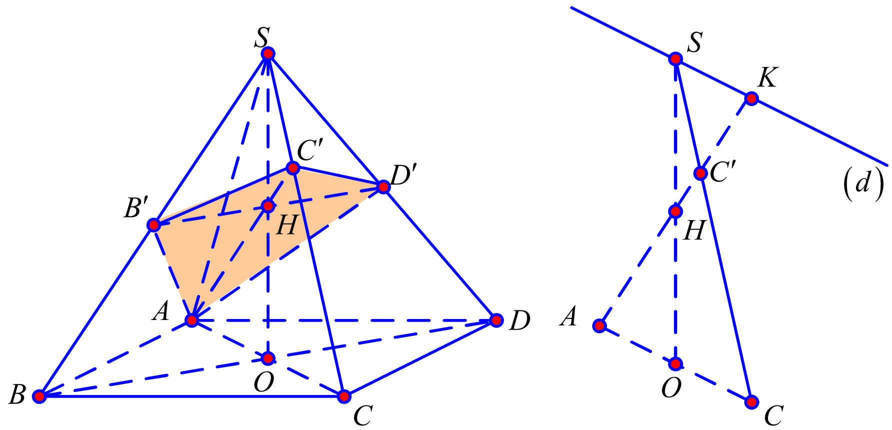
Mặt khác ta có: $\dfrac{V_{ATPQ}}{V_{ABCD}} = \dfrac{AT}{AB}.\dfrac{AP}{AD}.\dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{3}{5}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{27}{80} \Rightarrow V_{ATPQ} = \dfrac{27}{80}.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{9a^3\sqrt{2}}{320}$.

Câu 140. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy là hình bình hành có thể tích bằng V. Lấy điểm B', D' lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD. Mặt phẳng qua $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

A. $\dfrac{V}{3}$. **B.** $\dfrac{2V}{3}$. **C.** $\dfrac{V^3}{3}$. **D.** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD thì $SO \cap B'D' = H$. Khi đó H là trung điểm của SO và $C' = AH \cap SO$.

Trong mặt phẳng (SAC): Ta kẻ $(d)//AC$ và AC' cắt (d) tại K . Khi đó áp dụng tính đồng dạng của các tam giác ta có: $\dfrac{OH}{SH} = \dfrac{OA}{SK} = 1 \Rightarrow SK = OA \Rightarrow \dfrac{SK}{AC} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{SK}{AC} = \dfrac{SC'}{CC'} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$.

Vì $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \dfrac{1}{2}.V_{S.ABCD} = \dfrac{V}{2}$ nên ta có $\dfrac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow V_{S.AB'D'} = \dfrac{1}{8}V$ và

$\dfrac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} \cdot \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{SC'}{SC} \Leftrightarrow V_{S.B'C'D'} = \dfrac{SC'}{SC} \cdot \dfrac{V}{8}$.

Suy ra $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \dfrac{1}{8}V + \dfrac{SC'}{SC} \cdot \dfrac{V}{8} = \dfrac{V}{8}\left(1 + \dfrac{SC'}{SC}\right) = \dfrac{V}{6}$.

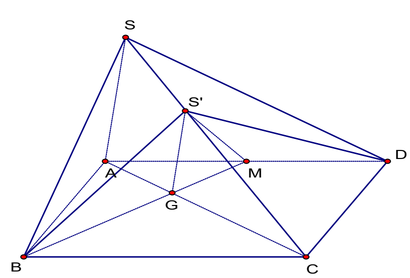
Lưu ý :Có thể sử dụng nhanh công thức $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$

Câu 141. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của AD . Gọi S' là giao của SC với mặt phẳng chứa BM và song song với SA . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S'.BCDM$ và $S.ABCD$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $G = BM \cap AC$. $AM//BC \Rightarrow \Delta AGM \sim \Delta CGB \Rightarrow \dfrac{AG}{GC} = \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{1}{2}$

$\begin{cases} (SAC) \cap (S'BM) = S'G \\ (SAC) \supset SA, SA//(S'BM) \end{cases} \Rightarrow S'G//SA \Rightarrow \dfrac{S'C}{SC} = \dfrac{GC}{AC} = \dfrac{2}{3}$.

Do đó: $\dfrac{d(S',(ABCD)}{d(S,(ABCD))}=\dfrac{S'C}{SC}=\dfrac{2}{3}$.

Ta có $S_{ABM}=\dfrac{1}{2}d(M,AB).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}d(D,AB).AB=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{BCDM}=S_{ABCD}-\dfrac{1}{4}S_{ABCD}=\dfrac{3}{4}S_{ABCD}$.

Do vậy: $V_{S'.BCDM}=\dfrac{1}{3}d(S',(ABCD).S_{BCDM}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{3}d(S,(ABCD)).\dfrac{3}{4}S_{ABCD}$

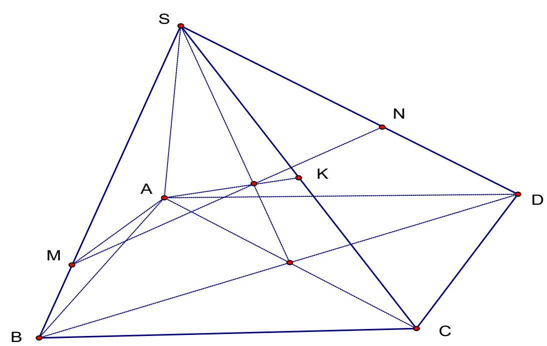
$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}d(S,(ABCD)).S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}\Rightarrow\dfrac{V_{S'BCDM}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 142. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $a=\dfrac{SA}{SA}=1$, $b=\dfrac{SB}{SM}$, $c=\dfrac{SC}{SK}=2$, $d=\dfrac{SD}{SN}$, có $a+c=3$.

Áp dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích: $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{V_{S.AMKN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{a+b+c+d}{4abcd}$, với $a+c=b+d$.

Suy ra: $b+d=3$. Khi đó $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{6}{8bd}=\dfrac{3}{4bd}\geq\dfrac{3}{4\left(\dfrac{b+d}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $b=d=\dfrac{3}{2}$.

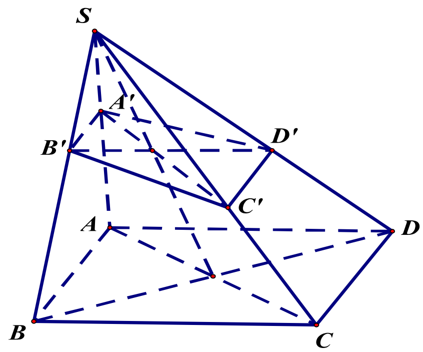
Vậy giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ bằng $\dfrac{1}{3}$ khi $\dfrac{SB}{SM}=\dfrac{SD}{SN}=\dfrac{3}{2}$.

Chứng minh bài toán:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm A', B', C', D' lần lượt nằm trên các cạnh SA, SB, SC, SD. Đặt $a=\dfrac{SA}{SA'}$, $b=\dfrac{SB}{SB'}$, $c=\dfrac{SC}{SC'}$, $d=\dfrac{SD}{SD'}$.

Chứng minh rằng:: $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{a+b+c+d}{4abcd}$ và $a+c=b+d$.

Lời giải



Ta có: $ABCD$ là hình bình hành nên: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD}$.

Khi đó: $\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{abd} \Rightarrow V_{S.A'B'D'} = \dfrac{1}{abd}.V_{S.ABD} = \dfrac{1}{2abd}.V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{bcd} \Rightarrow V_{S.B'C'D'} = \dfrac{1}{bcd}.V_{S.BCD} = \dfrac{1}{2bcd}.V_{S.ABCD}$.

Suy ra: $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'D'} + V_{S.B'C'D'} = \dfrac{1}{2abd}.V_{S.ABCD} + \dfrac{1}{2bcd}.V_{S.ABCD} = \dfrac{(a+c)V_{S.ABCD}}{2abcd}$ (1).

Chứng minh tương tự như trên ta cũng có: $V_{S.A'B'C'D'} = \dfrac{(b+d)V_{S.ABCD}}{2abcd}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $a + c = b + d$.

$V_{S.A'B'C'D'} = \dfrac{(b+d)V_{S.ABCD}}{2abcd} = \dfrac{2(b+d)V_{S.ABCD}}{4abcd} = \dfrac{(a+b+c+d)V_{S.ABCD}}{4abcd}$.

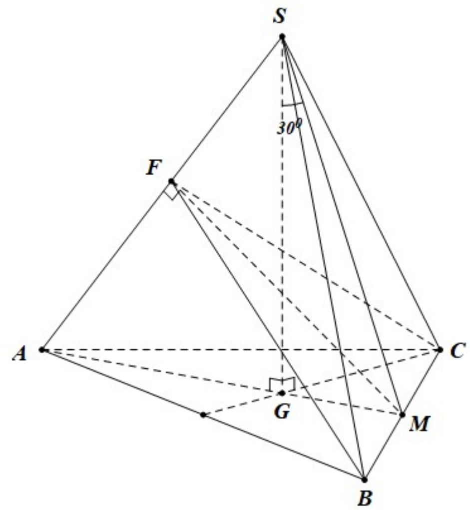
Vậy: $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{a+b+c+d}{4abcd}$.

Câu 143. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, biết góc tạo bởi SG và (SBC) bằng $30°$. Mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích V_1, V_2 trong đó V_1 là phần thể tích chứa điểm S. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 6.   **B.** $\dfrac{1}{6}$.   **C.** $\dfrac{6}{7}$.   **D.** 7.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC, $F = SA \cap (\alpha)$, trong đó (α) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc SA, H là hình chiếu của G lên SM. Ta có: $SA \perp (\alpha)$, $FM \subset (\alpha)$ nên $SA \perp FM$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên SG là đường cao hình chóp ứng với đáy (ABC) và ABC là tam giác đều.

Ta có:

- AM vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao trong tam giác đều nên $AM \perp BC$.
- $SG \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$ nên $SG \perp BC$.
- $AM \cap SG = G$ và $AM, SG \subset (SAM)$.

Suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH$ (vì $GH \subset (SAM)$).

Do đó: $\begin{cases} GH \perp SM \\ GH \perp BC \\ SM \cap BC = M \\ SM, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SBC)$.

Ta lại có: $\begin{cases} SG \cap (SBC) = S \\ SH \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow SH$ là hình chiếu vuông góc của SG lên (SBC).

$\Rightarrow \left(\widehat{SG,(SBC)}\right) = \left(\widehat{SG,SH}\right) = \widehat{GSH} = 30^\circ$.

Giả sử cạnh của tam giác đều ABC là a.

Xét tam giác SGM vuông tại G, ta có: $SG = GM \cot 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác SAG vuông tại G, ta có: $SA = \sqrt{AG^2 + SG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Trong tam giác SAM, ta có: $MF = \dfrac{SG.AM}{SA} = \dfrac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{21}}{6}} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Xét tam giác AFM vuông tại F, ta có: $FA = \sqrt{AM^2 - FM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Suy ra $\dfrac{SF}{SA}=1-\dfrac{FA}{SA}=1-\dfrac{\dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\dfrac{a\sqrt{21}}{6}}=1-\dfrac{6}{7}=\dfrac{1}{7}$.

Mà $\dfrac{V_{S.FBC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SF}{SA}=\dfrac{1}{7}\Rightarrow V_1=V_{S.FBC}=\dfrac{1}{7}V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_2=\dfrac{6}{7}V_{S.ABC}$ (vì $V_{S.ABC}=V_{S.FBC}+V_{FABC}=V_1+V_2$).

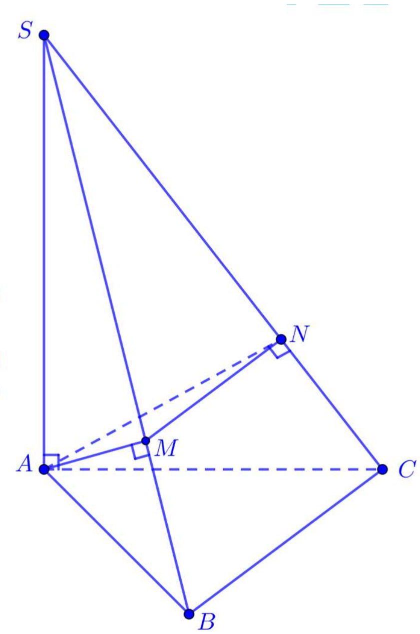
Do đó $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 144. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB,SC. Tính $\dfrac{50V\sqrt{3}}{a^3}$, với V là thể tích khối chóp $A.BCNM$.

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D



Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.2a.\dfrac{1}{2}.a.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác SAB vuông tại A và có AM là đường cao nên

$SM.SB=SA^2\Leftrightarrow\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\dfrac{4a^2}{4a^2+a^2}=\dfrac{4}{5}$.

Tam giác SAC vuông tại A và có AN là đường cao nên

$\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{SA^2}{SC^2}=\dfrac{SA^2}{SA^2+AC^2}=\dfrac{4a^2}{4a^2+a^2}=\dfrac{4}{5}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{4}{5}.\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{25}\Rightarrow V_{S.AMN}=\dfrac{16}{25}V_{S.ABC}$

Suy ra $V = V_{ABCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = V_{S.ABC} - \frac{16}{25}V_{S.ABC} = \frac{9}{25}V_{S.ABC} = \frac{9}{25}.\frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

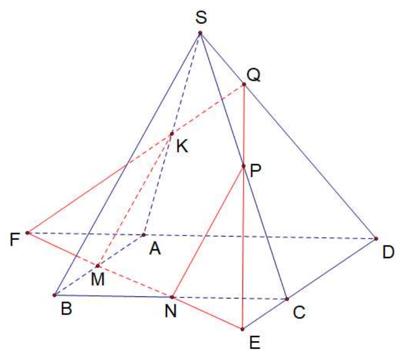
Vậy $\frac{50V\sqrt{3}}{a^3} = 9$.

Câu 145. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, SA. Biết mặt phẳng (MNK) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 $(V_1 < V_2)$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{49}{71}$. **B.** $\frac{17}{67}$. **C.** $\frac{7}{13}$. **D.** $\frac{9}{23}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài MN cắt DA, DC lần lượt tại F, E.

Trong mặt phẳng (SAD), gọi $FK \cap SD = Q$. Trong mặt phẳng (SCD), gọi $QE \cap SC = P$.

Suy ra thiết diện là ngũ giác $MNPQK$ và $MN // AC // PK$.

Đặt $h = d(S,(ABCD)) \Rightarrow d(K,(ABCD)) = d(P,(ABCD)) = \frac{1}{2}h$

Ta có: $FA = BN = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \frac{FD}{FA} = 3$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAD, suy ra

$\frac{QS}{QD}.\frac{FD}{FA}.\frac{KA}{KS} = 1 \Rightarrow \frac{QS}{QD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{3}{4} \Rightarrow d(Q,(ABCD)) = \frac{3}{4}h$

Mặt khác: $S_{FAM} = S_{NCE} = S_{BMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{8}S_{ABCD} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{9}{8}S_{ABCD}$

Suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S là

$V = V_{QDEF} - V_{KAMF} - V_{PECN} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}h.\frac{9}{8}S - \frac{1}{2}h.\frac{1}{8}S - \frac{1}{2}h.\frac{1}{8}S\right)$

$= \frac{1}{3}.\frac{23}{32}.h.S_{ABCD} = \frac{23}{32}V_{ABCD} = V_2$

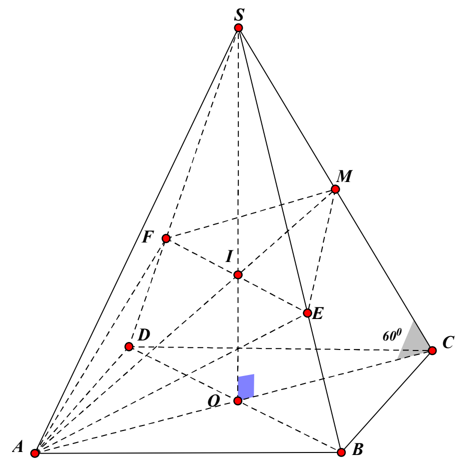
$\Rightarrow V_1 = \frac{9}{32} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{23}$

Câu 146. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60°. Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích khối chóp $S.AEMF$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{27}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn D



$\left(SC,\left(ABCD\right)\right)=\left(SC,OC\right)=\widehat{SCO}=60^\circ$.

Gọi $I=SO\cap AM \Rightarrow I$ là trọng tâm của tam giác SAC.

Ta có $\dfrac{V_{S.AEM}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SE}{SB}.\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}\Leftrightarrow V_{S.AEM}=\dfrac{2}{9}V_{S.ABC}$.

Mà: $V_{S.AEMF}=2V_{S.AEM}$ và $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}$ nên $V_{S.AEMF}=\dfrac{2}{9}.V_{S.ABCD}$ $\quad(1)$

Trong ΔSOC: $\tan 60^\circ=\dfrac{SO}{OC}\Leftrightarrow SO=OC.\tan 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

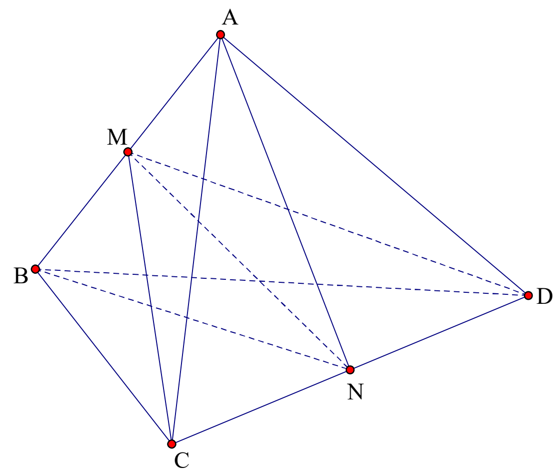
Khi đó $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Thay vào (1): $V_{S.AEMF}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Câu 147. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V với M, N lần lượt là trung điểm AB, CD. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của $MNBC$ và $MNDA$. Tính tỉ lệ $\dfrac{V_1+V_2}{V}$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì M, N lần lượt là trung điểm AB, CD nên ta có: $d\left(A,(MCD)\right) = d\left(B,(MCD)\right); d\left(C,(NAB)\right) = d\left(D,(NAB)\right)$, do đó:

$V_{A.MCD} = V_{B.MCD} = \dfrac{V}{2}; V_1 = V_{MNBC} = V_{C.MNB} = V_{D.MNB} = \dfrac{V_{B.MCD}}{2} = \dfrac{V}{4};$

$V_2 = V_{MNAD} = V_{D.MNA} = V_{C.MNA} = \dfrac{V_{A.MCD}}{2} = \dfrac{V}{4}.$

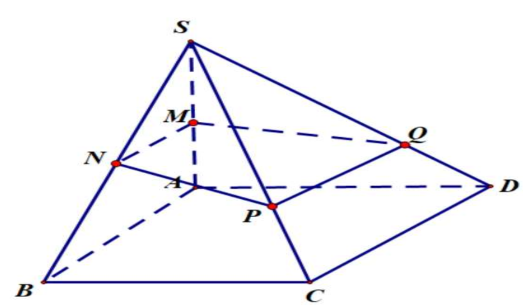
$\Rightarrow \dfrac{V_1 + V_2}{V} = \dfrac{\dfrac{V}{4} + \dfrac{V}{4}}{V} = \dfrac{1}{2}.$

Câu 148. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích $V = 12$. Gọi M, N lần lượt trung điểm $SA, SB; P$ là điểm thuộc cạnh SC sao cho $PS = 2PC$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Tính thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{5}{18}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có PQ//$CD \Rightarrow \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{2}{3}$.

Khi đó ta có: $\dfrac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{SMNP} = \dfrac{1}{12}$V.

$\dfrac{V_{SMPQ}}{V_{SACD}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{SMPQ} = \dfrac{1}{9}V.$

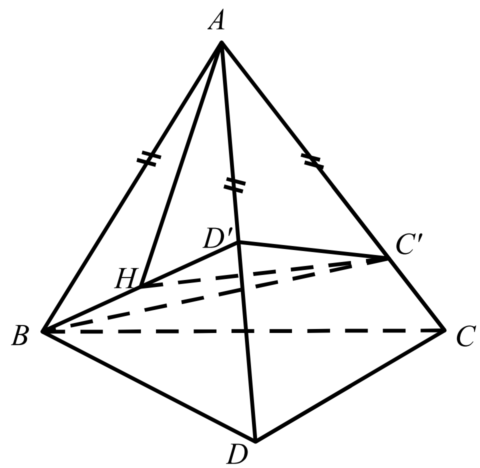
Vậy $V_{S.MNPQ} = \dfrac{7}{36}V = \dfrac{7}{3}$.

Câu 149. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=3, AC=4, AD=6$, $\widehat{BAC}=60^\circ$, $\widehat{CAD}=90^\circ$, $\widehat{BAD}=120^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{27\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C



Lấy các điểm C', D' lần lượt trên cạnh và AC, AD sao cho $AB=AC'=AD'=3$.

Áp dụng định lí Côsin ta có:

$$BD'^2=AB^2+AD'^2-2AB.AD'\cos\widehat{BAD}=9+9-2.9.\left(-\frac{1}{2}\right)=9.3=27\Leftrightarrow BD'=3\sqrt{3}.$$

Tam giác BAC' là tam giác đều nên $BC'=3$, tam giác $D'AC'$ vuông tại A nên $C'D'=3\sqrt{2}$.

Xét tam giác $BD'C'$ có $BD'^2=BC'^2+C'D'^2$, nên tam giác vuông tại C'.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $(BD'C')$, vì $AB=AC'=AD'$ nên $HB=HC'=HD'$.

Mặt khác, tam giác $BD'C'$ vuông tại C' nên H là trung điểm của BD'.

Ta có, $AH=\sqrt{AB^2-\frac{BD'^2}{4}}=\sqrt{9-\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}$.

Thể tích khối tứ diện $ABC'D'$ bằng

$$V_{ABC'D'}=\frac{1}{3}AH.S_{BC'D'}=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.3.3\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có

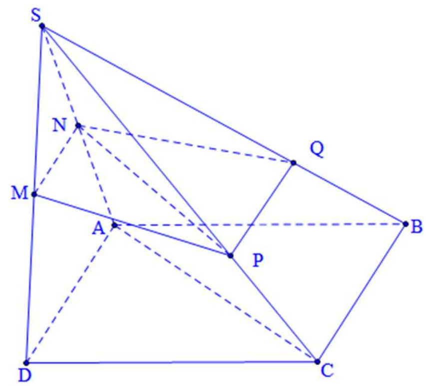
$$\frac{V_{ABC'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{AC'.AD'}{AC.AD}=\frac{3}{4}.\frac{3}{6}=\frac{9}{24}\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{24}{9}V_{ABC'D'}=6\sqrt{2}.$$

Câu 150. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Mặt phẳng (α) chứa MN và cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại Q, P. Đặt $\frac{SQ}{SB}=x$, V_1 là thể tích khối chóp $S.MNPQ$, V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V_1=\frac{1}{2}V$.

A. $x=\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$. **B.** $x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$. **C.** $x=\sqrt{2}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $\begin{cases} (\alpha)\supset MN \\ MN//(SBC) \\ (\alpha)\cap(SBC)=PQ \end{cases}$ nên $MN//PQ$, do đó $\frac{SP}{SC}=\frac{SQ}{SB}=x$.

Ta có: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.x=\frac{x}{4}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{x}{4}.V_{S.ACD}=\frac{x}{4}.\frac{1}{2}.V=\frac{xV}{8}$.

$\frac{V_{S.MQP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SQ}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{2}.x.x=\frac{x^2}{2}\Rightarrow V_{S.MQP}=\frac{x^2}{2}.V_{S.ABC}=\frac{x^2}{2}.\frac{1}{2}V=\frac{x^2V}{4}$.

$\Rightarrow V_{S.MNPQ}=V_1=V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}=\frac{xV}{8}+\frac{x^2V}{4}=\frac{(x+2x^2)V}{8}$.

Do đó: $V_1=\frac{1}{2}V\Leftrightarrow\frac{(x+2x^2)V}{8}=\frac{1}{2}V\Leftrightarrow 2x^2+x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ x=\frac{-1-\sqrt{33}}{4} \end{array}\right.$

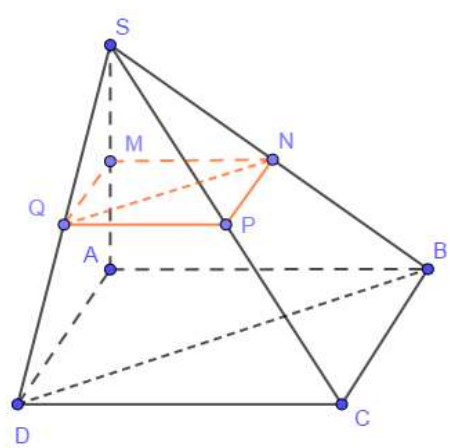
Rõ ràng $x>0$ nên $x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$.

Câu 151. Cho hình chóp $S.ABCD$. có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Thể tích của khối chóp cụt $MNPQ.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{7a^3}{24}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a.a^2=\frac{a^3}{3}$

Theo định lý tỷ số thể tích ta có : $\frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{S.MNQ}=\frac{1}{8}V_{S.ABD}=\frac{1}{8}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{16}.\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{48}$.

Tương tự ta có $V_{S.NPQ}=\frac{1}{8}V_{S.BCD}=\frac{1}{8}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{16}.\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{48}$.

Ta có $V_{S.MNPQ}=V_{S.MNQ}+V_{S.NPQ}=\frac{a^3}{48}+\frac{a^3}{48}=\frac{a^3}{24}$.

$\Rightarrow V_{MNPQ.ABCD}=V_{S.ABCD}-V_{S.MNPQ}=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{24}=\frac{7a^3}{24}$.

Câu 152. Cho khối chóp $S.ABC$. Gọi M là điểm trên cạnh SB, mặt phẳng (P) đi qua A,M và song song với BC chia khối chóp thành hai phần có cùng thể tích. Tìm tỷ số $\frac{SM}{MB}$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $1+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Do mặt phẳng (P) song song với BC nên mặt phẳng (P) cắt cạnh SC tại N và $MN//BC$.

Đặt $\frac{SM}{SB}=x\Rightarrow\frac{SN}{SC}=x\quad(x>0)$.

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=x^2$.

Nên $ycbt\Leftrightarrow\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Do đó $SM=\frac{1}{\sqrt{2}}SB\Rightarrow MB=SB-SM=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}SB$.

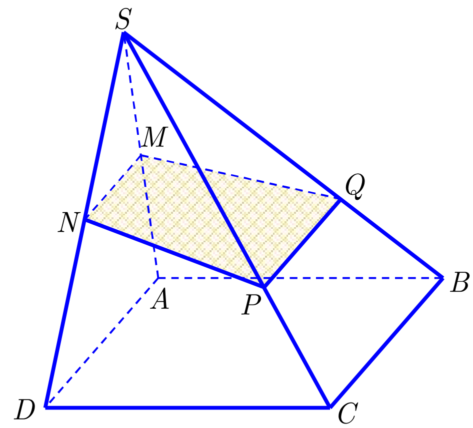
Vậy $\frac{SM}{MB}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

Câu 153. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SD. Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại Q,P. Đặt $\frac{SQ}{SB}=x,V_1$ là thể tích khối chóp $S.MNQP,V$ là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V_1=\frac{1}{2}V$.

A. $x=\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$. **B.** $x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$. **C.** $x=\sqrt{2}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} MN \parallel AD \parallel BC \\ MN \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = PQ \parallel MN \Rightarrow \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SQ}{SB} = x$

Khi đó $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{S.MNQP}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{V_{S.MNQ} + V_{S.NQP}}{V_{S.ABCD}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{V_{S.MNQ}}{2V_{S.ABD}} + \dfrac{V_{S.NQP}}{2V_{S.ABC}}$

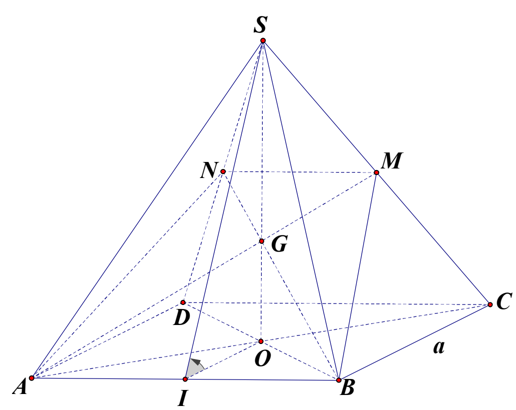
$\Leftrightarrow \dfrac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}} + \dfrac{V_{S.NQP}}{V_{S.ABC}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.x + \dfrac{1}{2}.x.x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (vì $x > 0$)

Câu 154. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC. Mặt phẳng chứa AB và đi qua G cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M và N. Biết mặt bên của hình chóp tạo với đáy một góc bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABMN$ bằng

A. $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **C.** $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{16}$. **D.** $3a^3\dfrac{\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn B



Vì G là trọng tâm tam giác SAC nên AG cắt SC tại trung điểm M của SC, tương tự BG cắt SD tại trung điểm N của SD.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của AB. Suy ra góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SIO} = 60°$. Do đó $SO = OI.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Mặt khác $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}$, ta lại có $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SB}{SB}\cdot\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{S.ABM}=\dfrac{1}{2}.V_{S.ABC}$.

$\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SD}\cdot\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow V_{S.AMN}=\dfrac{1}{4}.V_{S.ACD}$.

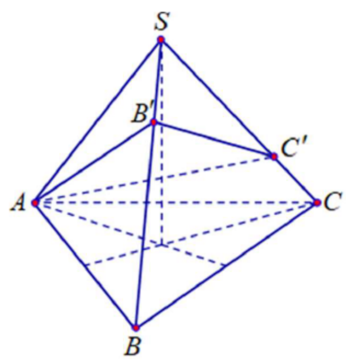
Vậy $V_{S.ABMN}=\dfrac{3}{4}V_{S.ABCD}=\dfrac{3}{4}\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

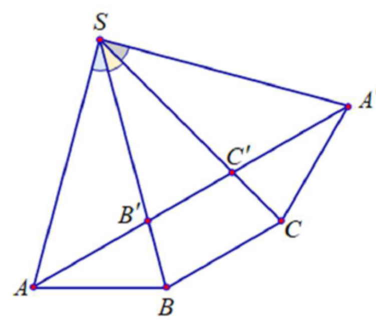
Câu 155. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=30°$ Mặt phẳng (α) qua A và cắt hai cạnh SB, SC tại B', C' sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tính $k=\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}$.

A. $k=2-\sqrt{2}$. **B.** $k=4-2\sqrt{3}$. **C.** $k=\dfrac{1}{4}$. **D.** $k=2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B





Cắt hình chóp theo cạnh SA rồi trải các mặt bên ra ta được hình như hình vẽ (A' là điểm sao cho khi gấp lại thành hình chóp thì trùng với A).
Khi đó chu vi tam giác $AB'C'$ bằng $AB'+B'C'+C'A$ nhỏ nhất khi A, B', C', A' thẳng hàng hay $AB'+B'C'+C'A=AA'$.

Khi đó tam giác SAA' có $\widehat{SAA'}=\widehat{ASB'}+\widehat{B'SC'}+\widehat{C'SA'}=90°$ nên vuông cân tại S và có $SA=a$, $SB'=SC'$, $\widehat{SAB'}=45°$.

Ta có $\dfrac{SA}{\sin 105°}=\dfrac{SB'}{\sin 45°}\Leftrightarrow\dfrac{SB'}{SA}=\dfrac{\sin 45°}{\sin 105°}=\sqrt{3}-1$.

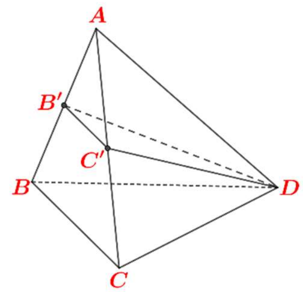
Do đó $k=\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)=4-2\sqrt{3}$.

Câu 156. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện AB’C’D và khối tứ diện ABCD bằng:

A. $\dfrac{1}{8}$ **B.** $\dfrac{1}{6}$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C



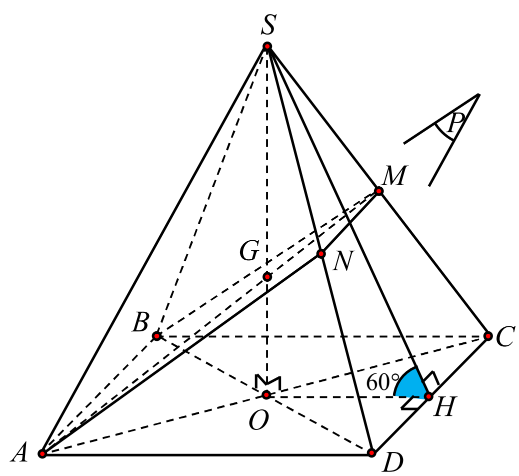
Ta có: $\dfrac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}}=\dfrac{AB'.AC'.AD}{AB.AC.AD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

Câu 157. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Thể tích khối chóp $S.ABMN$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm cạnh CD và O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau

Giả sử $\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{SHO}=60°$

Tam giác SHO vuông tại O có $SO=OH.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác: $\begin{cases}(P)\cap(SCD)=MN\\ AB\subset(P),MN\subset(SCD)\\ AB\,//\,CD\end{cases}\Rightarrow MN\,//\,CD\,//\,AB$

Mà G là trọng tâm tam giác SAC nên G cũng là trọng tâm tam giác $SBD\Rightarrow\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}$.

Ta lại có $\dfrac{V_{SABM}}{V_{SABC}}=\dfrac{SM}{SC}\Rightarrow V_{SABM}=\dfrac{1}{2}V_{SABC}=\dfrac{1}{4}V_{SABCD}$

$\frac{V_{SAMN}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} \Rightarrow V_{SAMN} = \frac{1}{4}V_{SACD} = \frac{1}{8}V_{SABCD}$

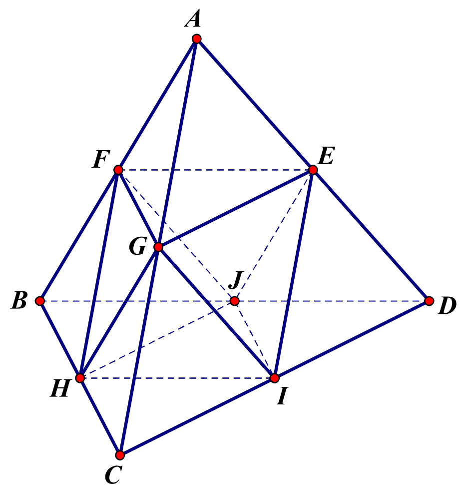
Khi đó $V_{SABMN} = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)V_{SABCD} = \frac{3}{8}V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 158. Cho khối tứ diện có thể tích V. Gọi V' là thể tích khối đa diện có các đỉnh là trung điểm các cạnh của khối tứ diện đã cho. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$. **B.** $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. **C.** $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$. **D.** $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi khối tứ diện đã cho là $ABCD$.
Gọi E, F, G, H, I, J lần lượt là trung điểm của AD, AB, AC, BC, CD, BD.
Khi đó ta có: $V = V' + 4.V_{A.FEG}$.

Mặt khác $V_{A.FEG} = \frac{1}{8}V$.

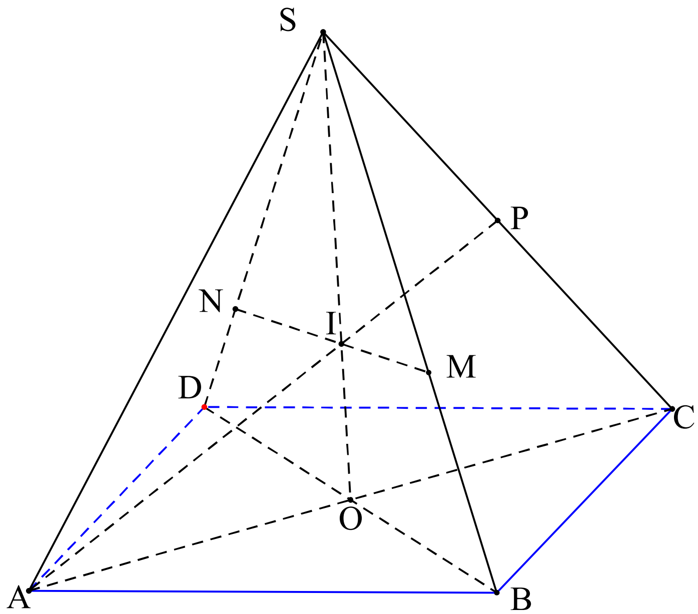
Suy ra $V = V' + \frac{1}{2}V \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Câu 159. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt các cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $\frac{SM}{SB}=x$, $\frac{SN}{SD}=y$, $0<x$, $y\le 1$.

Vì $\frac{SA}{SA}+\frac{SC}{SP}=\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}$ nên $1+2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Rightarrow y=\frac{x}{3x-1}$

Khi đó $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}}+\frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}.\frac{SA}{SA}.\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}+\frac{1}{2}.\frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{2}.y.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.x.\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{4}(x+y)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{x}{3x-1}\right)$

Vì $x>0$, $y>0$ nên $\frac{1}{3}<x<1$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{x}{3x-1}\right)$ trên $\left(\frac{1}{3};1\right]$

Ta có $f'(x)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{(3x-1)^2}\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Bảng biến thiên

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$ bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 160. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V, gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACD, ABD và BCD. Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng

A. $\frac{4V}{9}$. **B.** $\frac{V}{27}$. **C.** $\frac{V}{9}$. **D.** $\frac{4V}{27}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CD, BD.

Ta có $\frac{V_{AMNP}}{V_{AEFI}}=\frac{8}{9}\Rightarrow V_{AMNP}=\frac{8}{9}V_{AEFI}=\frac{2}{9}V$.

$$V_{MNPQ}=\frac{1}{3}d\left(Q,\left(MNP\right)\right).S_{MNP}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}d\left(A,\left(MNP\right)\right).S_{MNP}=\frac{1}{6}d\left(Q,\left(MNP\right)\right).S_{MNP}=\frac{1}{2}V_{AMNP}=\frac{V}{9}$$

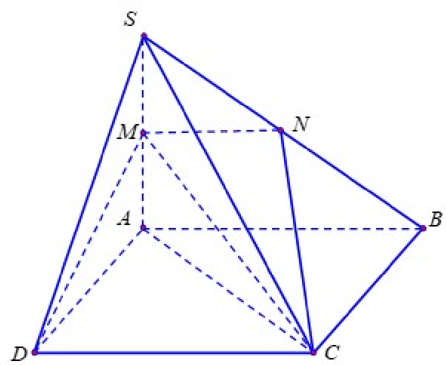
.

Câu 161. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N là trung điểm của SA, SB. Mặt phẳng $MNCD$ chia hình chóp đã cho thành hai phần. tỉ số thể tích hai phần $S.MNCD$ và $MNABCD$ là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B



Ta có $V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$;

và $V_{S.MNC}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SC}{SC}\cdot V_{S.ABC}=\frac{1}{4}V_{S.ABC}$; $V_{S.MCD}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SD}{SD}\cdot\frac{SC}{SC}\cdot V_{S.ACD}=\frac{1}{2}V_{S.ACD}$.

Suy ra $V_{S.MNCD}=V_{S.MNC}+V_{S.MCD}=\frac{3}{4}V_{S.ABC}=\frac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

Đồng thời $V_{MNABCD}=V_{S.ABCD}-V_{S.MNCD}=\frac{5}{8}V_{S.ABCD}$.

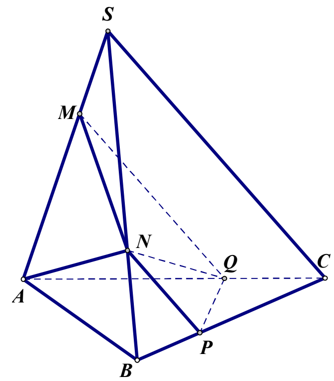
Vậy tỉ số thể tích hai phần $S.MNCD$ và $MNABCD$ là $\frac{3}{5}$.

Câu 162. Cho khối chóp $S.ABC$ có $M\in SA$, $N\in SB$ sao cho $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MS}$, $\overrightarrow{NS}=-2\overrightarrow{NB}$. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ qua hai điểm M, N và song song với SC chia khối chóp thành hai khối đa diện. Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện đó (số bé chia số lớn).

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Ta có mặt phẳng (α) cắt các mặt (SAC) theo giao tuyến $MQ \| SC$ và cắt mặt (SBC) theo giao tuyến $NP \| SC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với hình chóp là hình thang $MNPQ$.

Do $V_{MNABPQ} = V_{N.ABPQ} + V_{N.AMQ}$, gọi $V = V_{S.ABC}$ và $S = S_{\Delta ABC}$ ta có:

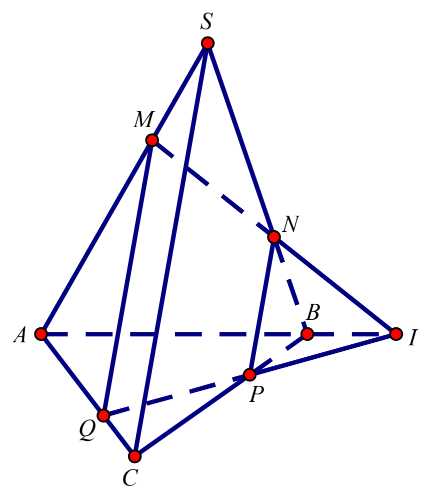
$V_{N.ABPQ} = \frac{1}{3}.d\left(N,(ABC)\right).S_{ABPQ} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}d\left(S,(ABC)\right)\left(S - \frac{1}{3}.\frac{2}{3}S\right) = \frac{7}{27}V$.

$V_{N.AMQ} = \frac{1}{3}.d\left(N,(SAC)\right).S_{\Delta AMQ} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}d\left(B,(SAC)\right).\frac{4}{9}S_{\Delta ASC} = \frac{8}{27}V$.

Vậy $V_{MNABPQ} = V_{N.ABPQ} + V_{N.AMQ} = \frac{5}{9}V \Rightarrow V_{SMNPQC} = \frac{4}{9}V$.

Suy ra $\frac{V_{SMNPQC}}{V_{MNABPQ}} = \frac{4}{5}$.

Cách 2:



Gọi $I = MN \cap AB$,Áp dụng định lý Me-ne-la-us cho tam giác SAB, ta có

$$\frac{MS}{MA}\cdot\frac{IA}{IB}\cdot\frac{NB}{NS} = 1 \Rightarrow \frac{IB}{IA} = \frac{1}{4}.$$

Áp dụng định lý Me-ne-la-us cho tam giác ΔAMI, ta có: $\frac{BI}{BA}\cdot\frac{SA}{SM}\cdot\frac{NM}{NI} = 1 \Leftrightarrow \frac{NM}{NI} = 1$.

Tương tự ta có: $\frac{PI}{PQ} = 1$. Vì $MQ // SC \Rightarrow \frac{AM}{AS} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{3}$.

Khi đó: $\frac{V_{I.BNP}}{V_{I.AMQ}}=\frac{IB}{IA}\cdot\frac{IN}{IM}\cdot\frac{IP}{IQ}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}\Rightarrow V_{AMQ.NBP}=\frac{15}{16}.V_{I.AMQ}$.

Mà $\frac{V_{M.AIQ}}{V_{S.ABC}}=\frac{d\left(M;(ABC)\right)}{d\left(S;(ABC)\right)}\cdot\frac{S_{AIQ}}{S_{ABC}}$ với $\frac{d\left(M;(ABC)\right)}{d\left(S;(ABC)\right)}=\frac{MA}{SA}=\frac{2}{3}$ và $\frac{S_{AIQ}}{S_{ABC}}=\frac{AI}{AB}\cdot\frac{AQ}{AC}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$.

Suy ra $V_{AMQ.NBP}=\frac{15}{16}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot V_{S.ABC}=\frac{5}{9}V_{S.ABC}$.

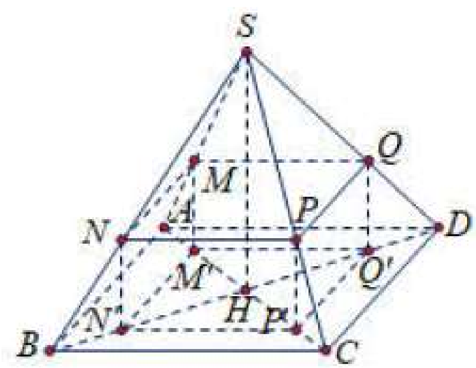
Vậy tỉ số thể tích cần tìm là: $\frac{1-\frac{5}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{4}{5}$.

Câu 163. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng thay đổi nhưng luôn song song với đáy và cắt các cạnh bên SA,SB,SC,SD lần lượt tại M,N,P,Q. Gọi M',N',P',Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M,N,P,Q lên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $\frac{SM}{SA}=k$ với $k\in[0;1]$.

Xét tam giác SAB có $MN//AB$ nên $\frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA}=k\Rightarrow MN=k.AB$.

Xét tam giác SAD có $MQ//AD$ nên $\frac{MQ}{AD}=\frac{SM}{SA}=k\Rightarrow MQ=k.AD$.

Kẻ đường cao SH của hình chóp. Xét tam giác SAH có:

$MM'//SH$ nên $\frac{MM'}{SH}=\frac{AM}{SA}=\frac{SA-SM}{SA}=1-\frac{SM}{SA}=1-k\Rightarrow MM'=(1-k).SH$.

Ta có: $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}=MN.MQ.MM'=AB.AD.SH.k^2.(1-k)$.

Thể tích khối chóp không đổi nên $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}$ đạt giá trị lớn nhất khi $k^2.(1-k)$ lớn nhất.

Ta có $k^2.(1-k)=\frac{2(1-k).k.k}{2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2-2k+k+k}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$.

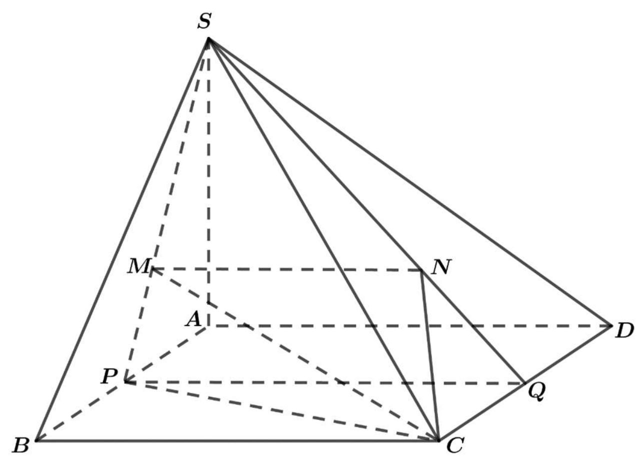
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $2(1-k)=k\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$. Vậy $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$.

Câu 164. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, có $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, SCD. Tính thể tích khối tứ diện $S.MNC$.

A. $\frac{1}{27}a^3$. **B.** $\frac{2}{27}a^3$. **C.** $\frac{1}{13}a^3$. **D.** $\frac{2}{13}a^3$.

Lời giải

Chọn B



+Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của cạnh AB, CD.

+Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{2}{3}a^3$.

+Vì M, N lần lượt là trong tâm tam giác SAB, SCD $\Rightarrow \frac{SM}{SP} = \frac{SN}{SQ} = \frac{2}{3}$.

+Ta xét: $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.PQC}} = \frac{SM}{SP}.\frac{SN}{SQ}.\frac{SC}{SC} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow V_{S.MNC} = \frac{4}{9}V_{S.PQC}$. (1)

+Ta xét: $\frac{V_{S.PQC}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}.SA.S_{\Delta PQC}}{\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}} = \frac{S_{\Delta PQC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow V_{S.PQC} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$. (2)

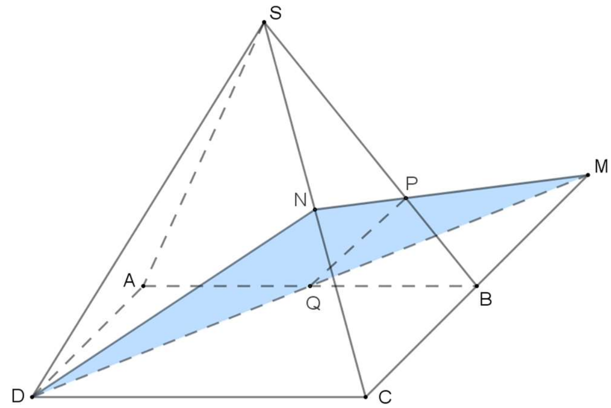
+Từ (1), (2) $\Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{1}{9}V_{S.ABCD} = \frac{2}{27}a^3$.

Câu 165. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B, N là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (MDN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ số thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S và khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $\frac{7}{12}$. **D.** $\frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $P = MN \cap SB$. Tam giác SMC có MN và SB là các đường trung tuyến nên P là trọng tâm của tam giác SMC.

Gọi $Q = MD \cap AB$, do $AD // BM$, $AD = BM$ nên tứ giác $ADBM$ là hình bình hành suy ra Q là trung điểm của MD.

Ta có:

$$V_{BCDQPN} = V_{M.CDN} - V_{M.BQP} = V_{M.CDN} - \frac{MB}{MC}\frac{MQ}{MD}\frac{MP}{MN}.V_{M.CDN} = \left(1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\right)V_{M.CDN} = \frac{5}{6}V_{M.CDN}.$$

Mà: $V_{M.CDN} = V_{N.MCD} = \frac{S_{MCD}}{S_{ABCD}}.\frac{d\left(N,\left(ABCD\right)\right)}{d\left(S,\left(ABCD\right)\right)}.V_{S.ABCD} = \frac{\frac{1}{2}CD.CM}{CD^2}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Do đó: $V_{BCDQPN} = \frac{5}{12}V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_{SANPQD} = V_{S.ABCD} - V_{BCDQNP} = \frac{7}{12}V_{S.ABCD}$.

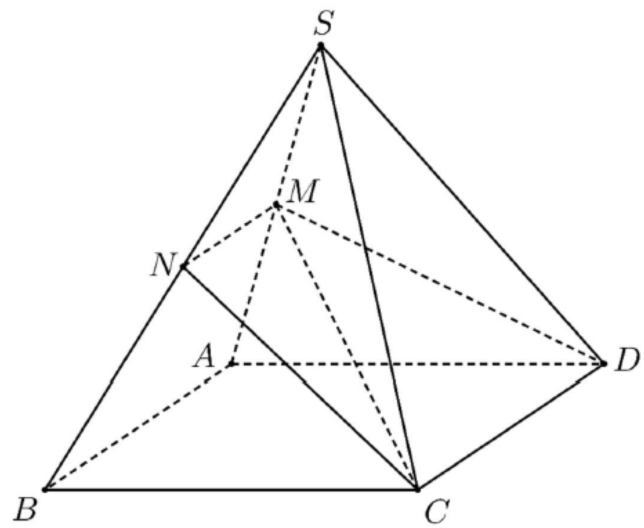
Vậy tỉ số thể tích cần tính: $\frac{V_{SANPQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{7}{12}$.

Câu 166. Cho hình chóp $S.ABCD$ có M, N là trung điểm của SA, SB. Mặt phẳng $\left(MNCD\right)$ chia hình chóp đã cho thành hai phần. Tỉ số thể tích khối chóp $S.MNCD$ và khối đa diện $MNABCD$ là:

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{1}{4}V_{S.ABC} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$

$\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SD} = \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MCD} = \frac{1}{2}V_{S.ACD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

Khi đó: $V_{S.MNCD} = V_{S.MNC} + V_{S.MCD} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_{MNABCD} = V_{S.ABCD} - V_{S.MNCD} = \frac{5}{8}V_{S.ABCD}$.

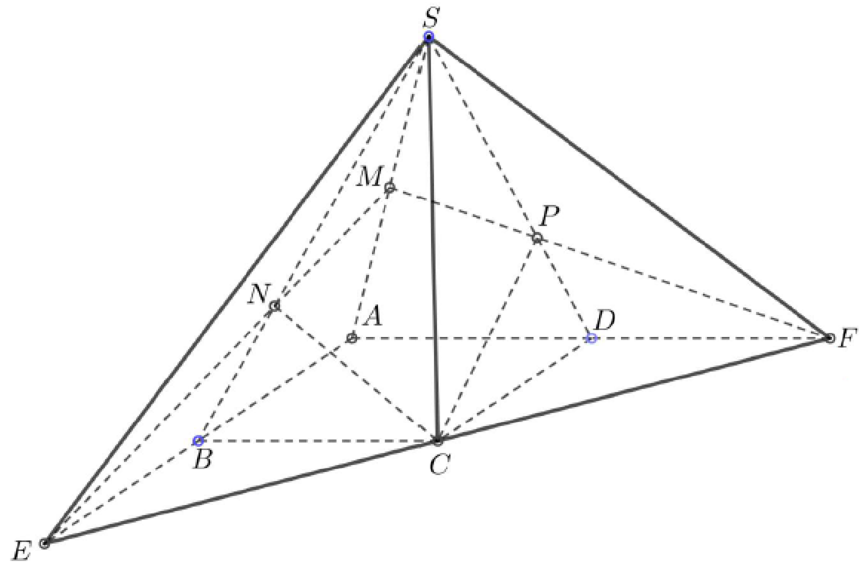
Vậy $\frac{V_{S.MNCD}}{V_{MNABCD}} = \frac{3}{5}$.

Câu 167. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm cạnh SA, các điểm E,F lần lượt là điểm đối xứng của A qua B và D. Mặt phẳng (MEF) cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại các điểm N,P. Tính tỉ số thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ và $S.AEF$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có ΔSAE; ΔSAF có N, P lần lượt là trọng tâm vì nó giao điểm của hai đường trung tuyến.

Vì vậy $\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{SP}{SD}=\dfrac{2}{3}$ và có $C\in EF$.

Ta có $\dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{S.MNC}=\dfrac{1}{3}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{6}V_{S.ABCD}$.

Tương tự ta có $\dfrac{V_{S.MPC}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SP}{SD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{S.MPC}=\dfrac{1}{3}V_{S.ADC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{6}V_{S.ABCD}$.

Do đó $V_{S.MNCP}=\dfrac{1}{6}V_{S.ABCD}+\dfrac{1}{6}V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

Mặt khác $V_{ABCDMNP}=V_{S.ABCD}-V_{S.MNCP}$ nên $V_{ABCDMNP}=\dfrac{2}{3}V_{S.ABCD}$ (1).

Ta lại có B, D lần lượt là trung điểm của AE, AF nên $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta EBC}$ và $S_{\Delta ADC}=S_{\Delta FCD}$.

Suy ra $S_{\Delta AEF}=2S_{ABCD}$.

Mà $V_{S.AEF}=\dfrac{1}{3}d\left(S,\left(ABCD\right)\right).S_{\Delta AEF}$ nên $V_{S.AEF}=\dfrac{1}{3}d\left(S,\left(ABCD\right)\right).2S_{\Delta ABCD}=2V_{S.ABCD}$ (2).

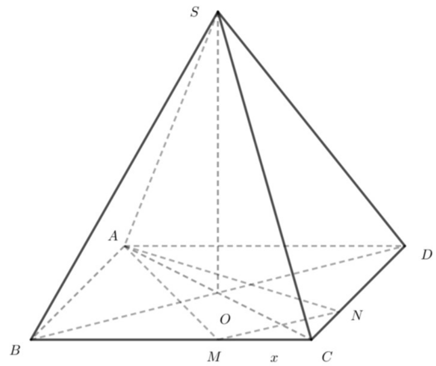
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{V_{ABCDMNP}}{V_{S.AEF}}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 168. **(Quốc Học Huế_Lần 1_2020)** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho MN luôn bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $SAMN$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\dfrac{4-\sqrt{2}}{24}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $V_{SAMN} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{\Delta AMN}$.

Đặt $CM = x, (0 < x < 1)$.

Ta có: $BM = 1 - x;\ CN = \sqrt{MN^2 - CM^2} = \sqrt{1-x^2};\ DN = 1 - \sqrt{1-x^2}$

$$S_{\Delta AMN} = S_{ABCD} - S_{\Delta ABM} - S_{\Delta ADN} - S_{\Delta CMN} = 1 - \frac{1}{2}.1.(1-x) - \frac{1}{2}.1.\left(1-\sqrt{1-x^2}\right) - \frac{1}{2}.x.\sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}\right), (0 < x < 1)$.

Có: $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + 2x^2 - x - 1}{2\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = -2x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1 - x^2 = \left(-2x^2 + x + 1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x\left(2x^2 - 1\right)(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

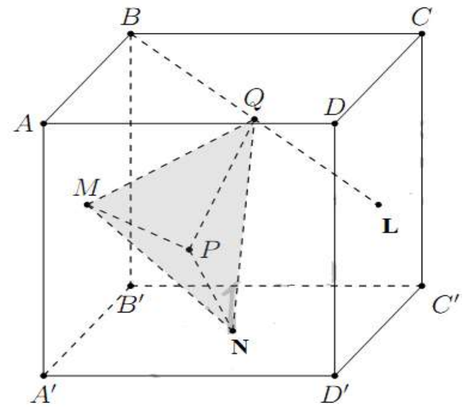
Do đó, $\left(S_{\Delta AMN}\right)_{\min} = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}$ đạt được khi $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\left(V_{SAMN}\right)_{\min} = \dfrac{1}{3}SO.\left(S_{\Delta AMN}\right)_{\min} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{2\sqrt{2}-1}{4} = \dfrac{4-\sqrt{2}}{24}$.

8. KHỐI LĂNG TRỤ - MỨC 4

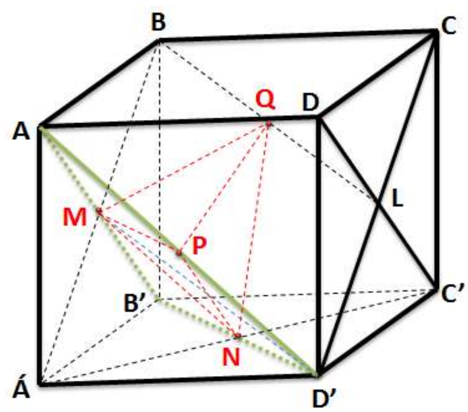
Câu 169. **(Đề Thi Thử Trường Chuyên KHTN_HN_2020)** Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 1. Gọi M, N, P, L lần lượt là tâm các hình vuông $ABB'A'$; $A'B'C'D'$; $ADD'A'$ và $CDD'C'$. Gọi Q là trung điểm của BL. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ (tham khảo hình vẽ).

A. $\dfrac{1}{24}$. **B.** $\dfrac{1}{16}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{27}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{27}$.



Lời giải

Chọn A



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh $1 \Rightarrow A'C = \sqrt{3}$.

$BL // MD' \subset (AB'D') \Rightarrow BL // (AB'D') \Rightarrow d(Q,(MNP)) = d(B,(AB'D')) = d(A,(AB'D'))$

$= \dfrac{1}{3}A'C = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $\Delta AB'D'$ đều $\Rightarrow S_{\Delta AB'D'} = (\sqrt{2})^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\Delta MNP} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta AB'D'} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

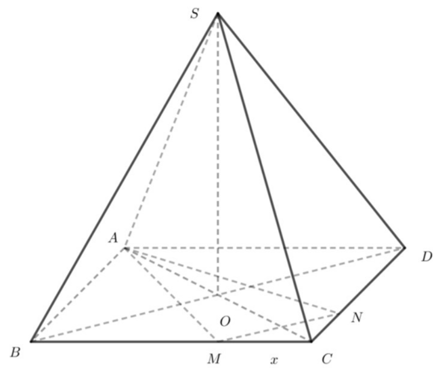
$V_{Q.MNP} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta MNP}.d(Q,(MNP)) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{8}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{24} \Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 170. **(Quốc Học Huế_Lần 1_2020)** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho MN luôn bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $SAMN$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\dfrac{4-\sqrt{2}}{24}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $V_{SAMN} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{\Delta AMN}$.

Đặt $CM = x, (0 < x < 1)$.

Ta có: $BM = 1 - x; CN = \sqrt{MN^2 - CM^2} = \sqrt{1-x^2}; DN = 1 - \sqrt{1-x^2}$

$S_{\Delta AMN} = S_{ABCD} - S_{\Delta ABM} - S_{\Delta ADN} - S_{\Delta CMN} = 1 - \dfrac{1}{2}.1.(1-x) - \dfrac{1}{2}.1.\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) - \dfrac{1}{2}.x.\sqrt{1-x^2}$

$= \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}\right), (0 < x < 1)$.

Có: $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + 2x^2 - x - 1}{2\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = -2x^2 + x + 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1 - x^2 = \left(-2x^2 + x + 1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x\left(2x^2 - 1\right)(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên:

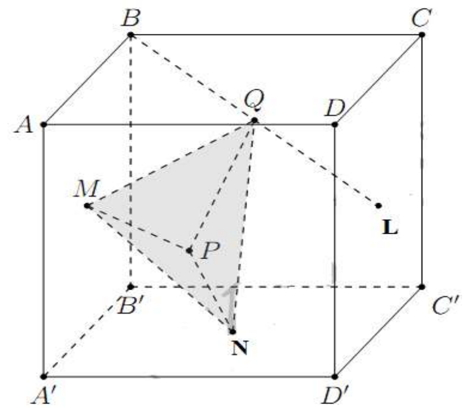
x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Do đó, $\left(S_{\Delta AMN}\right)_{\min} = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}$ đạt được khi $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\left(V_{SAMN}\right)_{\min}=\frac{1}{3}SO.\left(S_{\Delta AMN}\right)_{\min}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{2\sqrt{2}-1}{4}=\frac{4-\sqrt{2}}{24}$.

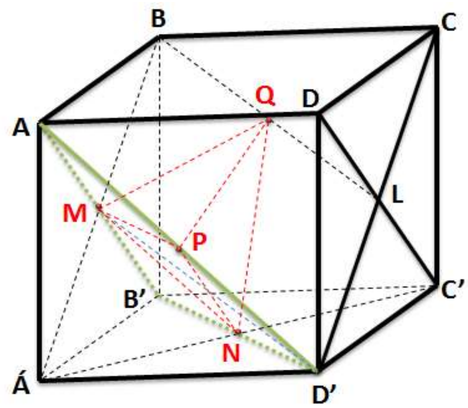
Câu 171. **(Đề Thi Thử Trường Chuyên KHTN_HN_2020)** Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 1. Gọi M,N,P,L lần lượt là tâm các hình vuông $ABB'A'$; $A'B'C'D'$; $ADD'A'$ và $CDD'C'$. Gọi Q là trung điểm của BL. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ (tham khảo hình vẽ).

A. $\frac{1}{24}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{27}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{27}$.



Lời giải

Chọn A



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh $1\Rightarrow A'C=\sqrt{3}$.

$BL//MD'\subset\left(AB'D'\right)\Rightarrow BL//\left(AB'D'\right)\Rightarrow d\left(Q,\left(MNP\right)\right)=d\left(B,\left(AB'D'\right)\right)=d\left(A,\left(AB'D'\right)\right)$

$=\frac{1}{3}A'C=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $\Delta AB'D'$ đều $\Rightarrow S_{\Delta AB'D'}=\left(\sqrt{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S_{\Delta MNP}=\frac{1}{4}S_{\Delta AB'D'}=\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

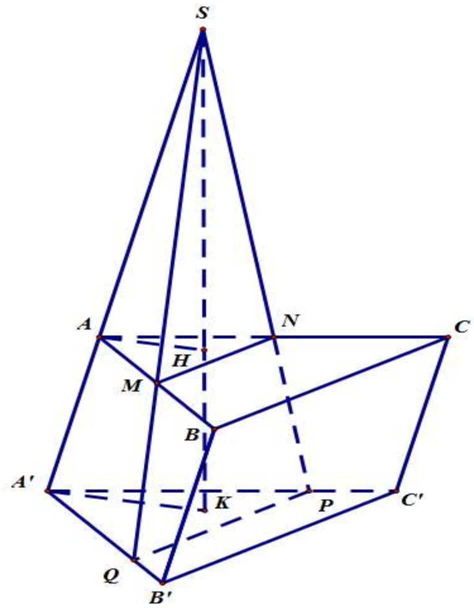
$V_{Q.MNP}=\frac{1}{3}S_{\Delta MNP}.d\left(Q,\left(MNP\right)\right)=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{24}\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 172. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và diện tích đáy bằng 8. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC và P, Q lần lượt thuộc các cạnh $A'C'$, $A'B'$ sao cho $\frac{A'P}{A'C'}=\frac{A'Q}{A'B'}=\frac{3}{4}$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, A', M, N, P và Q bằng

A. 18. **B.** 19. **C.** 27. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B



+) Vì M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, $AC \Rightarrow MN\ //\ BC$.

+) P, Q lần lượt thuộc các cạnh $A'C'$, $A'B'$ sao cho $\dfrac{A'P}{A'C'}=\dfrac{A'Q}{A'B'}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow QP\ //\ B'C'$.

+) Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $BC\ //\ B'C'$.

Do đó $MN\ //\ QP \Rightarrow$ 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Ta có $(ABB'A')\cap(ACC'A')=AA'$, $(ABB'A')\cap(MNPQ)=MQ$, $(ACC'A')\cap(MNPQ)=NP$

$\Rightarrow$ 3 đường thẳng AA', MQ, NP đồng quy hoặc đôi một song song.

Hơn nữa, vì $AM\ //\ A'Q$ và $AM=\dfrac{1}{2}AB<\dfrac{3}{4}AB=\dfrac{3}{4}A'B'=A'Q$ nên AA' cắt MQ. Do đó AA', MQ, NP đồng quy tại S.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.A'QP}}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SM}{SQ}.\dfrac{SN}{SP}$.

Mà $AM\ //\ A'Q$, $AN\ //\ A'P$ nên $\dfrac{SA}{SA'}=\dfrac{SM}{SQ}=\dfrac{SN}{SP}=\dfrac{AM}{A'Q}=\dfrac{\frac{1}{2}AB}{\frac{3}{4}A'B'}=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra, $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.A'QP}}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SM}{SQ}.\dfrac{SN}{SP}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}\Rightarrow V_{S.AMN}=\dfrac{8}{27}V_{S.A'QP}$.

Gọi V là thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, A', M, N, P, Q. Khi đó:

$V=V_{S.A'QP}-V_{S.AMN}=V_{S.A'QP}-\dfrac{8}{27}V_{S.A'QP}=\dfrac{19}{27}V_{S.A'QP}$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của S lên các mặt phẳng (AMN), $(A'QP)$.

Do $(AMN)\ //\ (A'QP)$ nên S, H, K thẳng hàng. Suy ra HK là chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Hơn nữa, $\dfrac{SH}{SK}=\dfrac{SA}{SA'}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow SH=\dfrac{2}{3}SK \Rightarrow HK=SK-SH=SK-\dfrac{2}{3}SK=\dfrac{1}{3}SK\Rightarrow SK=3HK$.

Theo đầu bài $HK=6$ nên $SK=3HK=18$.

Lại có, $\dfrac{S_{\Delta A'QP}}{S_{\Delta A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}A'Q.A'P.\sin A'}{\frac{1}{2}A'B'.A'C'.\sin A'}=\dfrac{A'Q}{A'B'}.\dfrac{A'P}{A'C'}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}\Rightarrow S_{\Delta A'QP}=\dfrac{9}{16}S_{\Delta A'B'C'}$.

Theo đầu bài $S_{\Delta A'B'C'}=8$ nên $S_{\Delta A'QP}=\dfrac{9}{16}S_{\Delta A'B'C'}=\dfrac{9}{2}$. Do đó $V_{S.A'QP}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta A'QP}.SK=\dfrac{1}{3}.\dfrac{9}{2}.18=27$.

Vậy $V=\dfrac{19}{27}V_{S.A'QP}=\dfrac{19}{27}.27=19$.

Bài toán trên có thể tổng quát hơn như sau: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC và P, Q lần lượt thuộc các cạnh $A'C'$, $A'B'$ sao cho $\dfrac{A'P}{A'C'}=\dfrac{A'Q}{A'B'}=k\ (0<k<1)$. Tính thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, A', M, N, P, Q theo V.

Lời giải:

Gọi V' là thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, A', M, N, P, Q.

Ta xét các trường hợp:

+) Với $k<\dfrac{1}{2}$, giải tương tự như trên ta được công thức $V'=\left(\dfrac{4k^2+2k+1}{12}\right).V$.

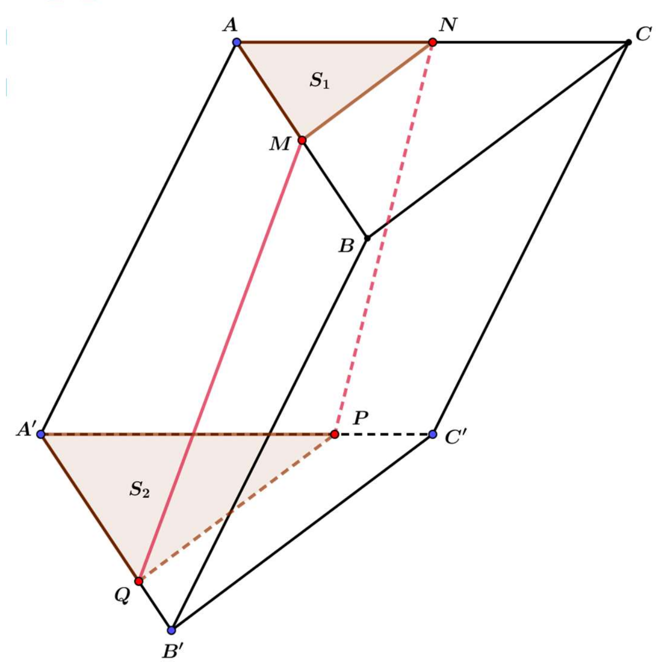
+) Với $k>\dfrac{1}{2}$, giải tương tự như trên ta được công thức $V'=\left(\dfrac{4k^2+2k+1}{12}\right).V$.

+) Với $k=\dfrac{1}{2}$, dễ thấy $V'=\dfrac{V}{4}\Rightarrow$ công thức $V'=\left(\dfrac{4k^2+2k+1}{12}\right).V$ **đúng**.

$\boxed{\text{Vậy: } V'=\left(\dfrac{4k^2+2k+1}{12}\right).V}$

<u>Cách khác:</u>

+ Ta có hình vẽ:



+ Theo đề ta có: $S_0 = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A'B'C'} = 8$.

+ Do $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_1 = S_{\Delta AMN} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 .S_{\Delta ABC} = 2$.

+ Do $\dfrac{A'Q}{A'B'} = \dfrac{A'P}{A'C'} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow S_2 = S_{\Delta A'PQ} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 .S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{9}{2}$.

+ Hình chóp cụt $AMNA'QP$ có chiều cao h và hai đáy là S_1, S_2 nên thể tích V được tính bởi công thức

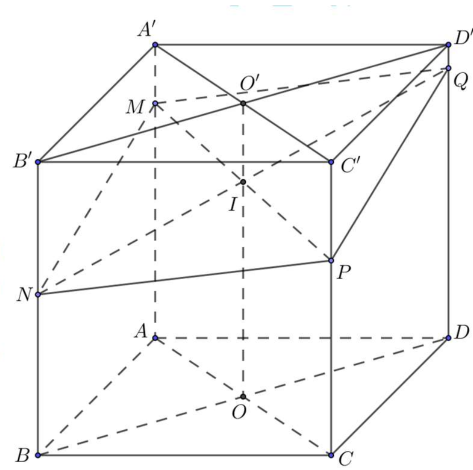
$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1.S_2}\right) = \frac{6}{3}\left(2 + \frac{9}{2} + \sqrt{2.\frac{9}{2}}\right) = 19.$$

Câu 173. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{3}{4}$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối đa diện $MNPQABCD$ và $MNPQA'B'C'D'$. Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{31}{9}$. **B.** $\dfrac{9}{31}$. **C.** $\dfrac{40}{9}$. **D.** $\dfrac{40}{31}$.

Lời giải

Chọn A



Lấy O, O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Gọi $I = OO' \cap MP \Rightarrow NI \cap DD' = Q$. Vậy $DD' \cap (MNP) = Q$.

Đặt $\dfrac{AM}{AA'} = x$; $\dfrac{BN}{BB'} = y$; $\dfrac{CP}{CC'} = z$ và $\dfrac{DQ}{DD'} = w$.

Ta có: $MA + PC = NB + QD = 2OI$ nên $x + z = y + w$.

Mặt khác ta có $\dfrac{V_{MNPQ.ABCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \dfrac{V_{ABC.MNP} + V_{ACD.MPQ}}{2V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} + \dfrac{V_{ACD.MPQ}}{V_{ACD.A'C'D'}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+y+z}{3} + \frac{x+z+w}{3}\right) = \frac{1}{6}(2x + y + 2z + w) = \frac{x+z}{2} = \frac{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{31}{40}.$$

Suy ra $V_{MNPQ.ABCD} = \dfrac{31}{40} V_{ABCD.A'B'C'D'}$

Lại có $V_{MNPQ.A'B'C'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{MNPQ.ABCD} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - \dfrac{31}{40}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{9}{40}V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

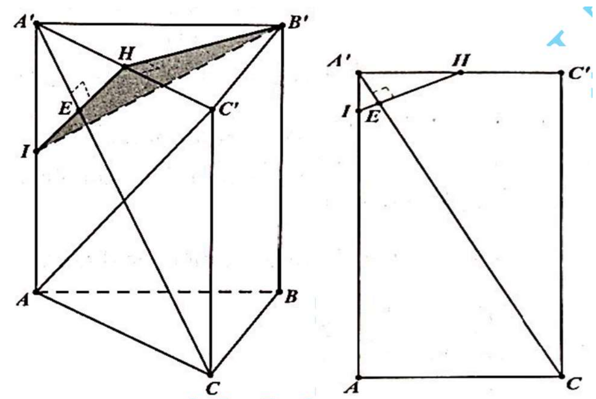
Vậy khi đó $V_1 = \dfrac{31}{40}V_{ABCD.A'B'C'D'}$, $V_2 = \dfrac{9}{40}V_{ABCD.A'B'C'D'}$, suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{31}{9}$.

Câu 174. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{47}$. **B.** $\dfrac{1}{23}$. **C.** $\dfrac{1}{11}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $A'C'$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} B'H \perp AC \\ B'H \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow B'H \perp (ACC'A') \Rightarrow B'H \perp A'C$.

Trong $mp(ACC'A')$, kẻ $HE \perp A'C, HE \cap AA' = I$.

Vậy mặt phẳng (P) cắt lăng trụ là mặt phẳng $(B'HI)$.

$\Delta A'EH$ đồng dạng $\Delta A'C'C$.

$$\Rightarrow \frac{A'E}{A'H} = \frac{A'C'}{A'C} \Rightarrow A'E = \frac{A'H.A'C'}{A'C} = \frac{\frac{a}{2}.a}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$

$\Delta A'IH$ đồng dạng $\Delta C'A'C$.

$$\Rightarrow \frac{IH}{A'C} = \frac{A'H}{C'C} \Rightarrow IH = \frac{A'H.A'C}{C'C} = \frac{\frac{a}{2}.a\sqrt{5}}{2a} = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

$$\Rightarrow S_{A'IH} = \frac{1}{2}A'E.IH = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{5}}{10}\right).\left(\frac{a\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{a^2}{16}.$$

Thể tích khối chóp $V_1 = V_{B'.A'HI} = \dfrac{1}{3}.B'H.S_{A'HI} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{16} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích phần còn lại $V_2 = V_{ABC.A'B'C'} - V_1$

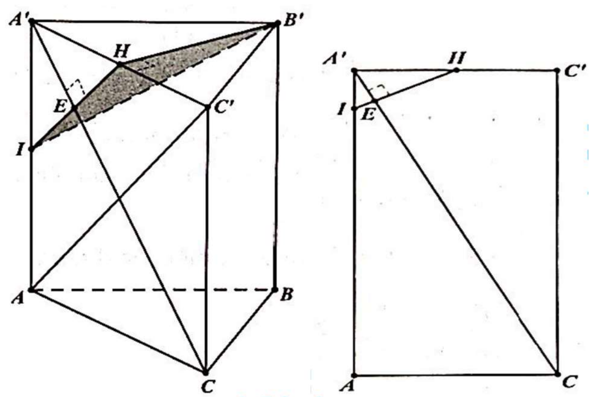
$=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}=\dfrac{47a^3\sqrt{3}}{96}\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{47}$.

Câu 175. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{47}$. **B.** $\dfrac{1}{23}$. **C.** $\dfrac{1}{11}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $A'C'$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} B'H\perp AC \\ B'H\perp AA' \end{array}\right\}\Rightarrow B'H\perp\left(ACC'A'\right)\Rightarrow B'H\perp A'C$.

Trong $mp\left(ACC'A'\right)$, kẻ $HE\perp A'C, HE\cap AA'=I$.

Vậy mặt phẳng (P) cắt lăng trụ là mặt phẳng $\left(B'HI\right)$.

$\Delta A'EH$ đồng dạng $\Delta A'C'C$.

$\Rightarrow \dfrac{A'E}{A'H}=\dfrac{A'C'}{A'C}\Rightarrow A'E=\dfrac{A'H.A'C'}{A'C}=\dfrac{\frac{a}{2}.a}{a\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$.

$\Delta A'IH$ đồng dạng $\Delta C'A'C$.

$\Rightarrow \dfrac{IH}{A'C}=\dfrac{A'H}{C'C}\Rightarrow IH=\dfrac{A'H.A'C}{C'C}=\dfrac{\frac{a}{2}.a\sqrt{5}}{2a}=\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

$\Rightarrow S_{A'IH}=\dfrac{1}{2}A'E.IH=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{10}\right).\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{4}\right)=\dfrac{a^2}{16}$.

Thể tích khối chóp $V_1=V_{B'.A'HI}=\dfrac{1}{3}.B'H.S_{A'HI}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{16}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích phần còn lại $V_2=V_{ABC.A'B'C'}-V_1$

$=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}=\dfrac{47a^3\sqrt{3}}{96}\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{47}$.

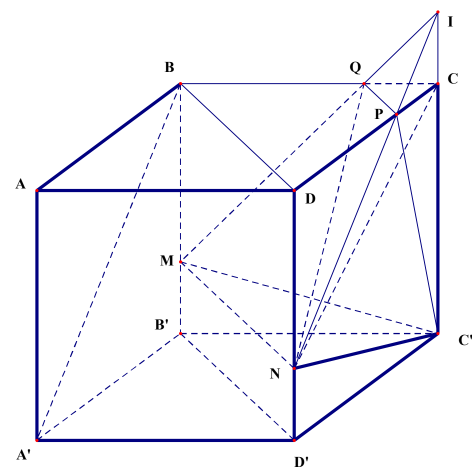
Câu 176. **[TT-SGD-HA-TINH-19-20]** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' sao cho $MB=2MB'$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AC' cắt các cạnh DD', DC, BC lần lượt tại N, P, Q. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện CPQMNC'. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$

A. $\frac{35}{162}$ **B.** $\frac{11}{162}$ **C.** $\frac{33}{162}$ **D.** $\frac{13}{162}$

Câu 177. **[TT-SGD-HA-TINH-19-20]** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' sao cho $MB=2MB'$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AC' cắt các cạnh DD',DC,BC lần lượt tại N,P,Q. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện $CPQMNC'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$

A. $\frac{35}{162}$ **B.** $\frac{11}{162}$ **C.** $\frac{33}{162}$ **D.** $\frac{13}{162}$

Lời giải



Gọi a là cạnh của hình lập phương, ta có $V=a^3$.
Vì $(BDA')\perp AC'$nên $(\alpha)//(BDA')$, do đó ta có $MQ//B'C$; $NP//CD'$.
Gọi I là giao điểm CC', MQ, NP (3 đường thẳng này đồng quy). Ta có $V_1=V_{I.MNC'}-V_{L.CPQ}$.

Mặt khác $V_{I.MNC'}=V_{M.IC'N}=\frac{1}{3}d(M;(CDD'C')).S_{IC'N}=\frac{1}{3}a.\frac{1}{2}.a.\frac{4}{3}a=\frac{2}{9}a^3$

$V_{I.CPQ}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a}{3}.\frac{a}{3}.\frac{a}{3}=\frac{a^3}{162}$

Vậy $V_1=V_{I.MNC'}-V_{L.CPQ}=\frac{2}{9}a^3-\frac{a^3}{162}=\frac{35}{162}a^3\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\frac{35}{162}$

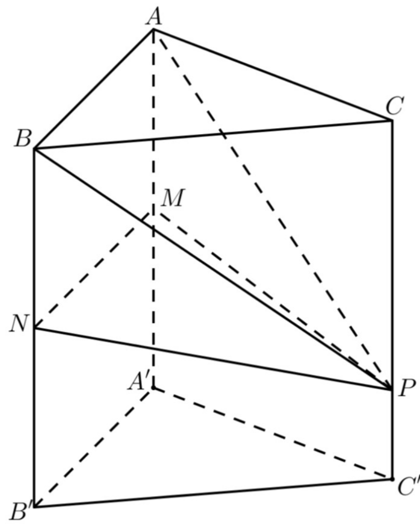
Câu 178. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2020. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA'; BB' và điểm P nằm trên cạnh CC' sao cho $PC=3PC'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng:

A. $\frac{2020}{3}$. **B.** $\frac{5353}{3}$. **C.** $\frac{2525}{3}$. **D.** $\frac{3535}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $V=V_{ABC.A'B'C'}=2020$.



Ta có $V_{C'.ABC}=\frac{1}{3}d\left(C';\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC}=\frac{V}{3}\Rightarrow V_{C'.ABB'A'}=\frac{2}{3}V$.

Lại có $\frac{V_{P.ABC}}{V_{C'.ABC}}=\frac{\frac{1}{3}.d\left(P;\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC}}{\frac{1}{3}.d\left(C';\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC}}=\frac{d\left(P;\left(ABC\right)\right)}{d\left(C';\left(ABC\right)\right)}=\frac{PC}{CC'}=\frac{3}{4}\Rightarrow V_{P.ABC}=\frac{1}{4}V$.

Ta có $\frac{V_{P.ABNM}}{V_{C'.ABB'A'}}=\frac{\frac{1}{3}.d\left(P;\left(ABB'A'\right)\right).S_{ABNM}}{\frac{1}{3}.d\left(C;\left(ABB'A'\right)\right).S_{ABB'A'}}$.

Mà $d\left(P;\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C;\left(ABB'A'\right)\right)$ và $S_{ABNM}=\frac{1}{2}S_{ABB'A'}$.

Suy ra $\frac{V_{P.ABNM}}{V_{C'.ABB'A'}}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{P.ABNM}=\frac{1}{3}V$.

Vậy $V_{ABC.MNP}=V_{P.ABNM}+V_{P.ABC}=\frac{7}{12}V=\frac{3535}{3}$.

Cách 2: Dùng công thức giải nhanh

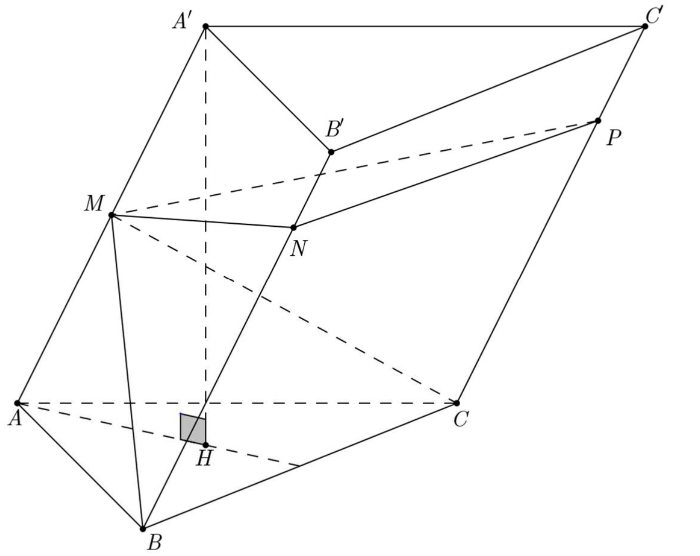
Ta có: $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)\Rightarrow V_{ABC.MNP}=\frac{2020}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{3535}{3}$.

Câu 179. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy bằng $60°$ và A' cách đều 3 điểm A, B, C. Gọi M là trung điểm của AA'; $N\in BB'$ thỏa mãn $NB=4NB'$ và $P\in CC'$ sao cho $PC=3PC'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{41a^3\sqrt{3}}{240}$. **C.** $\frac{23a^3\sqrt{3}}{144}$. **D.** $\frac{19a^3\sqrt{3}}{240}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi V là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P.

V_1 là thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC. Vì điểm A' cách đều các điểm A, B, C nên $A'H \perp (ABC)$.

Hơn nữa $AA' \cap (ABC) = A$ nên $(AA',(ABC)) = \widehat{A'AH} = 60°$.

Suy ra $A'H = AH.\tan 60° = \frac{a}{\sqrt{3}}\tan 60° = a$

Do đó $V_1 = S_{ABC}.A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt)

Mà $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.A'H = \frac{V_1}{3} \Rightarrow V_{A'.BCC'B'} = \frac{2V_1}{3}$.

Từ $\begin{cases} NB = 4NB' \\ PC = 3PC' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NB = \frac{4}{5}BB' \\ PC = \frac{3}{4}CC' = \frac{3}{4}BB' \end{cases}$

Suy ra $S_{BCPN} = \frac{1}{2}(NB + PC)d(BB',CC') = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}BB' + \frac{3}{4}BB'\right)d(BB',CC')$

$= \frac{31}{40}BB'.d(BB',CC') = \frac{31}{40}.S_{BCC'B'}$.

$\Rightarrow V_{M.BCPN} = \frac{31}{40}V_{M.BCC'B'} = \frac{31}{40}V_{A'.BCC'B'} = \frac{31}{60}V_1$.

Và $V_{M.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.\frac{1}{2}A'H = \frac{1}{2}V_{A'.ABC} = \frac{1}{6}V_1$ (vì M là trung điểm của AA').

Vậy thể tích cần tìm là $V = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} = \frac{41}{60}V_1 = \frac{41a^3\sqrt{3}}{240}$ (đvtt).

Cách 2: Dùng công thức giải nhanh

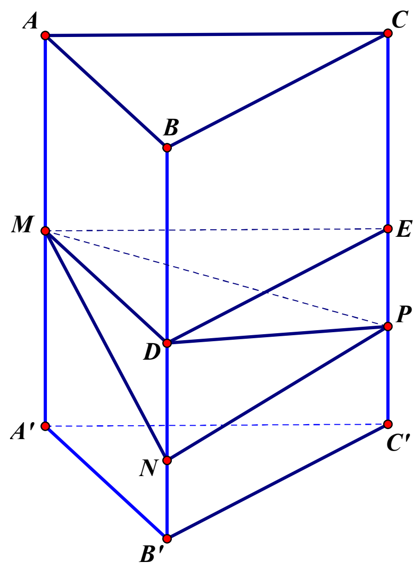
Ta có: $\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AM}{AA'}+\dfrac{BN}{BB'}+\dfrac{CP}{CC'}\right)\Rightarrow V_{ABC.MNP}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{41a^3\sqrt{3}}{240}$.

Câu 180. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi M là trung điểm của AA'; N thuộc cạnh BB' sao cho $NB=4NB'$ và P thuộc cạnh CC' sao cho $PC=3PC'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P theo V bằng:

A. $\dfrac{101}{180}V$. **B.** $\dfrac{5}{8}V$. **C.** $\dfrac{41}{60}V$. **D.** $\dfrac{5}{7}V$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1. Tự luận

Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BB', CC'.

Ta có $V_{ABCMNP}=V_{ABCMDE}+V_{M.DEPN}=\dfrac{1}{2}V+V_{M.DEP}+V_{M.PDN}$.

$DN=DB'-NB'=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)BB'=\dfrac{3}{10}BB'\Rightarrow S_{PDN}=\dfrac{3}{20}S_{BCC'B'}$

$\Rightarrow V_{M.DPN}=\dfrac{1}{3}d\left(M,(BCC'B')\right).S_{PDN}=\dfrac{1}{3}d\left(A,(BCC'B')\right).\dfrac{3}{20}S_{BCC'B'}=\dfrac{3}{20}V_{A.BCC'B'}=\dfrac{3}{20}.\dfrac{2}{3}V=\dfrac{1}{10}V$

$EP=EC'-PC'=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)CC'=\dfrac{1}{4}CC'\Rightarrow S_{DEP}=\dfrac{1}{8}S_{BCC'B'}$

$\Rightarrow V_{M.DEP}=\dfrac{1}{3}d\left(M,(BCC'B')\right).S_{DEP}=\dfrac{1}{3}d\left(A,(BCC'B')\right).\dfrac{1}{8}S_{BCC'B'}=\dfrac{1}{8}V_{A.BCC'B'}=\dfrac{1}{8}.\dfrac{2}{3}V=\dfrac{1}{12}V$

Vậy $V_{ABCMNP}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)V=\frac{41}{60}V$.

Cách 2: Dùng công thức giải nhanh

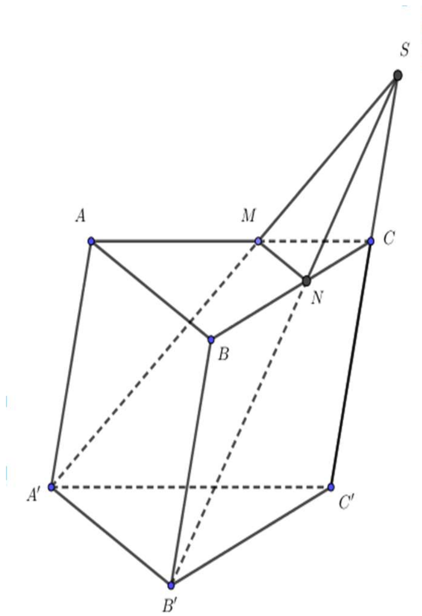
Ta có: $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)\Rightarrow V_{ABC.MNP}=\frac{V}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\right)=\frac{41}{60}V$.

Câu 181. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M,N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA,CB sao cho MN song song với AB và $\frac{CM}{CA}=k$. Mặt phẳng $(MNB'A')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai phần có thể tích V_1 (phần chứa điểm C) và V_2 sao cho $\frac{V_1}{V_2}=2$. Khi đó giá trị của k là

A. $k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



+ Vì ba mặt phẳng $(MNB'A'),(ACC'A'),(BCC'B')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt $A'M,B'N,CC'$ và $A'M,CC'$ không song song nên $A'M,B'N,CC'$ đồng qui tại S.

Ta có $k=\frac{CM}{CA}=\frac{MN}{AB}=\frac{MN}{A'B'}=\frac{SM}{SA'}=\frac{SN}{SB'}=\frac{SC}{SC'}$

+ Từ đó $V_{S.MNC}=k^3V_{S.A'B'C'}\Rightarrow V_1=V_{MNC.A'B'C'}=\left(1-k^3\right)V_{S.A'B'C'}$.

+ Mặt khác $\frac{V_{ABC.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{3CC'}{SC'}=\frac{3\left(SC'-SC\right)}{SC'}=3\left(1-k\right)\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\frac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\left(1-k\right)}$

Suy ra $V_1=\left(1-k^3\right)\frac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\left(1-k\right)}=\frac{\left(k^2+k+1\right).V_{ABC.A'B'C'}}{3}$.

+ Vì $\frac{V_1}{V_2}=2$ nên $V_1=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}\Rightarrow\frac{k^2+k+1}{3}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(k>0)$.

Vậy $k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.