



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



LÝ THUYẾT.

I. VECTO PHÁP TUYẾN VÀ CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẪNG.

1. Định nghĩa.

Cho mặt phẳng (α) .

Nếu vec-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là **vec-tơ pháp tuyến** của (α) .

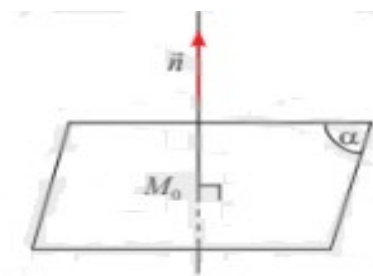


Nếu hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là **cặp vec-tơ chỉ phương** của (α) .

2. Chú ý.

Nếu $\vec{n}$ là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

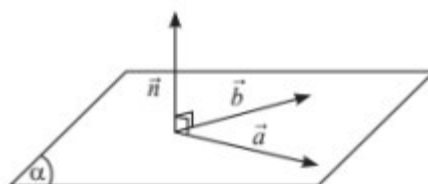
Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vec-tơ pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng đó.



II. XÁC ĐỊNH VEC-TƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG KHI BIẾT MỘT CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG

1. Định lý.

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vec-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vec-tơ chỉ phương thì (α) nhận vec-tơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ làm vec-tơ pháp tuyến.



2. Chú ý.

Vec-tơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ được gọi là *tích có hướng của hai vec-tơ*

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$ thường được kí hiệu $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Tương tự, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$ và

$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3$. Như vậy: $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.

Hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa.

Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát của mặt phẳng**.

2. Nhận xét.

Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

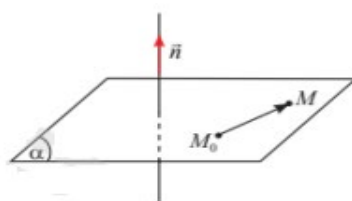
Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

$N(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

3. Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng cơ bản

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vec-tơ pháp tuyến

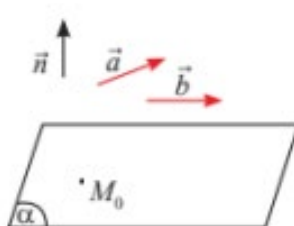


Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{hay } Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vec-tơ chỉ phương

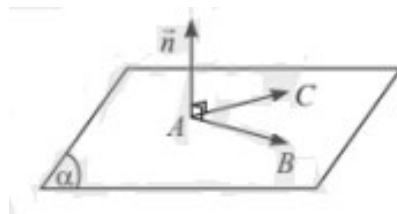


Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp vec-tơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$, ta thực hiện như sau:

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng



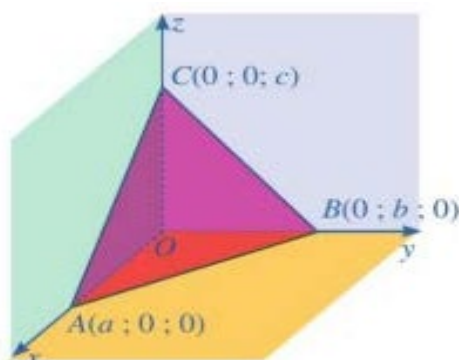
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

Tìm cặp vec-tơ chỉ phương, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn



Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Chú ý.

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

(α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

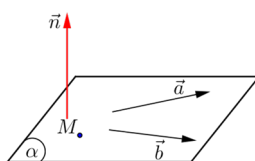
DẠNG 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG KHI BIẾT MỘT ĐIỂM VÀ VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA NÓ.

Phương pháp

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$ có dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \text{ (với } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0).$$

Nếu mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ thì (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2]$



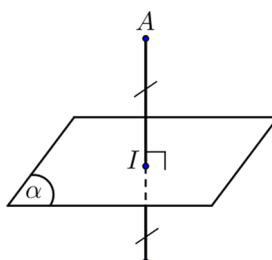
Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) **trung trực** đoạn thẳng AB

Bước 1: Vectơ pháp tuyến của mặt (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.

Bước 2: Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB .

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm I và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.



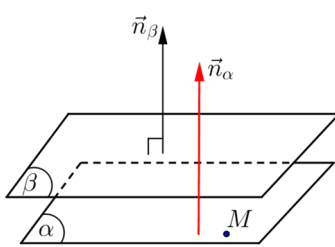
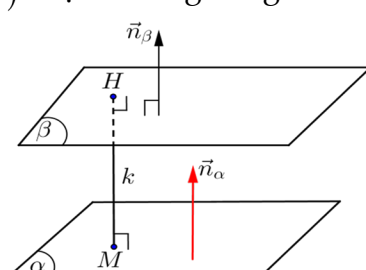
- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 0; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; -1; 2)$.
- Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(0; 1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 1; 0)$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(-1; 1; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1; -2; 2)$
- Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là?

- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$ và $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là?
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;-1;1)$, $B(3;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là.
- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;6;-7)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB là.
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của $C'D$.

DẠNG 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với 1 mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước.

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
(1) Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$. 	⌘ Cách 1: » Véc tơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_{(\beta)} = (A; B; C)$. » Mặt phẳng (α) qua điểm M. ⌘ Cách 2: » Do $(\alpha) // (\beta) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D \neq D'$) » Thay điểm M vào $(\alpha) \Rightarrow D' = ? \Rightarrow (\alpha)$.
(2) Song song $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và cách (P) một khoảng bằng k. 	» Vì $(\alpha) // (P) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D \neq D'$). » Vì (α) cách (P) một khoảng bằng k $\Rightarrow d((\alpha); (P)) = k \xrightarrow{M \in (\alpha)} d(M; (P)) = k$ $\Leftrightarrow \frac{ D - D' }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = k \Rightarrow D' = ?$ » Có $D' \Rightarrow$ phương trình mặt (P) hoàn chỉnh.

- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;1;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x - 3z + 1 = 0$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;3;1)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x + 3y - 2z + 2 = 0$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi điểm $M(3; -1; -2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z + 4 = 0$.

DẠNG 3: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (α) ĐI QUA 3 ĐIỂM A, B, C KHÔNG THẲNG HÀNG.

Phương pháp

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A; B; C$ không thẳng hàng.

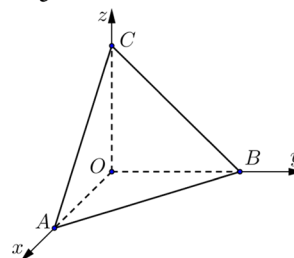
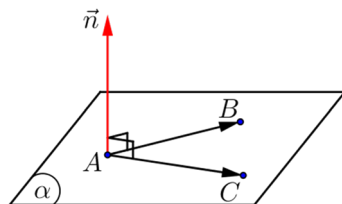
Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Phương trình mặt phẳng (P) là phương trình mặt chắn, tức mặt phẳng (P) đi qua

$A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$ có dạng: $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$



Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

a) Với ba điểm $A(-1; 0; 3), B(2; -1; 1), C(1; -1; 0)$.

b) Với ba điểm $A(1; 0; 2), B(-2; 3; 1), C(3; 2; 1)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

a) Với ba điểm $M(2; 0; 0), N(0; -1; 0), P(0; 0; 2)$.

b) Với ba điểm $M(0; -2; 0), N(3; 0; 0), P(0; 0; -3)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 0; -2), B(1; 1; 1), C(0; -1; 2)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; -1; -1), C(5; -1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

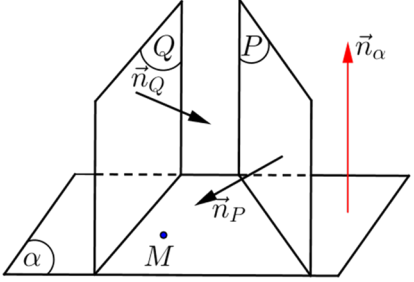
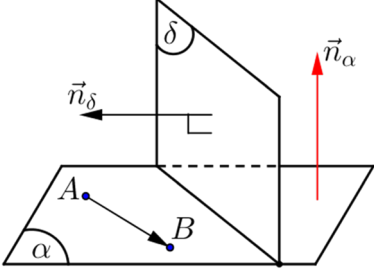
Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2; 3; 5), B(3; 2; 4)$ và $C(4; 1; 2)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 1; 4), B(2; 7; 9), C(0; 9; 13)$.

DẠNG 4: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (α) QUA HAI ĐIỂM A, B VÀ VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG (β) . VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (α) QUA ĐIỂM A VÀ VUÔNG GÓC VỚI HAI MẶT PHẪNG $(\alpha), (\beta)$.

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và $\perp 2$ mặt $(P): Ax + By + Cz + D = 0$, $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$. 	» Tìm cặp vectơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(P)}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Hoặc bài toán sẽ gặp: “Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P): Ax + By + Cz + D = 0; (Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$”
Loại	Phương pháp
Qua điểm $A; B$ và vuông góc $(\delta): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Tìm cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(\delta)}]$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(\delta)}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm A.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1; 2; -2), B(2; -1; 4)$ và vuông góc với $(\beta): x - 2y - z + 1 = 0$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1), B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Câu 21: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1); B(1; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua $A; B$ và vuông góc với (P) .

- Câu 22:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;-2;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+2y-3z+1=0$ và $(R): 2x-3y+z+1=0$.
- Câu 23:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng qua O , đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là
- Câu 24:** Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0, (\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:
- Câu 25:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0, (Q): x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là
- Câu 26:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

Dạng 6: Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) và cách $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$ một khoảng k cho trước.

Phương pháp:

1. Trên mặt phẳng (β) chọn 1 điểm M .
2. Do $(\alpha) // (\beta)$ nên (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D'=0$ ($D' \neq D$).
3. Sử dụng công thức khoảng cách $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = k$ để tìm D' .

- Câu 27:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và cách (Q) một khoảng bằng 3.
- Câu 28:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách mặt phẳng $(\alpha): 3x-y+2z-3=0$ một khoảng bằng $\sqrt{14}$.
- Câu 29:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) với (Q) song song với (P) và khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{7}{3}$ là.
- Câu 30:** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x+y-z+3=0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.
- Câu 31:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và (P) cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng bằng 3.
- Câu 32:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x-2y+4z-1=0$ và cách điểm $M(-1;3;1)$ là một khoảng bằng 2.

- Câu 33:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 2x - y + 2z - 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; 3)$.
Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với (Q) và cách A một khoảng bằng 4.

DẠNG 7. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Phương pháp

Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ như sau

Bước 1: Tìm $M_0(x_0; y_0; z_0)$; viết phương trình mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

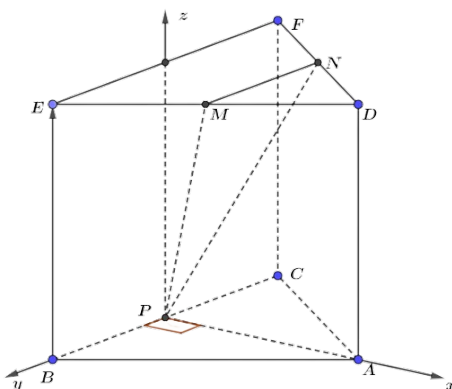
Bước 2: Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

$$\text{theo công thức } d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Lưu ý: $d(M_0, (Oxy)) = \sqrt{(z_0)^2}$ $d(M_0, Ox) = \sqrt{(y_0)^2 + (z_0)^2}$

- Câu 34:** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) .

- Câu 35:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$, $AB = 6$, $AD = 2$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm DE , DF , BC . Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) .



DẠNG 8. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI HAI MẶT PHẪNG

Phương pháp

Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:

Mặt phẳng $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$,

Ta có các vị trí tương đối sau:

	Mặt phẳng (P)
Mặt phẳng (Q)	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ Mặt (P) cắt mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ Mặt (P) song song mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ Mặt (P) trùng mặt (Q)
	$A.A' + B.B' + C.C' = 0$ Mặt (P) vuông góc mặt (Q)

Câu 36: Cho ba mặt phẳng $(P_1): 2x - y - 2z + 1 = 0$, $(P_2): 4x - 2y - 4z + 4 = 0$, $(P_3): x + 4y - z + 1 = 0$.

Chứng minh $(P_1) \parallel (P_2)$ và $(P_1) \perp (P_3)$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $(\beta): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau khi nào?

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) . Phương trình của (P) là?



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



LÝ THUYẾT.

I. VECTO PHÁP TUYẾN VÀ CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẪNG.

1. Định nghĩa.

Cho mặt phẳng (α) .

Nếu vec-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là **vec-tơ pháp tuyến** của (α) .

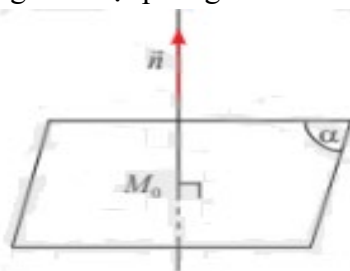


Nếu hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là **cặp vec-tơ chỉ phương** của (α) .

2. Chú ý.

Nếu $\vec{n}$ là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

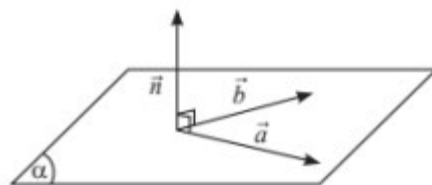
Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vec-tơ pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng đó.



II. XÁC ĐỊNH VEC-TƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG KHI BIẾT MỘT CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG

1. Định lý.

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vec-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vec-tơ chỉ phương thì (α) nhận vec-tơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ làm vec-tơ pháp tuyến.



2. Chú ý.

Vec-tơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ được gọi là **tích có hướng của hai vec-tơ**

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$ thường được kí hiệu $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Tương tự, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$ và

$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3$. Như vậy:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa.

Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát của mặt phẳng**.

2. Nhận xét.

□ Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

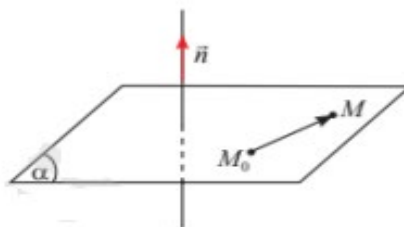
o Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

o $N(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

□ Mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

3. Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng cơ bản

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vec-tơ pháp tuyến

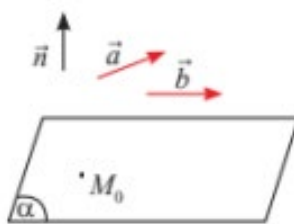


Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

hay $Ax + By + Cz + D = 0$ với $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vec-tơ chỉ phương

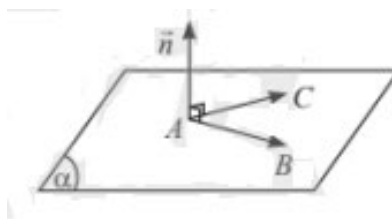


Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp vec-tơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$, ta thực hiện như sau:

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng



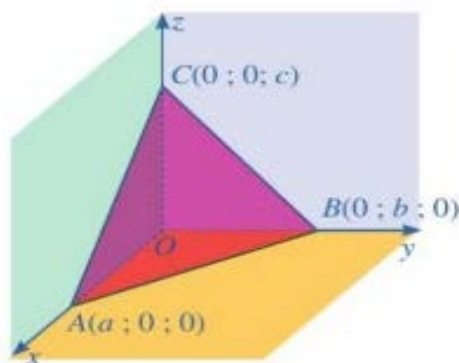
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

Tìm cặp vec-tơ chỉ phương, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn



Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Chú ý.

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

(α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

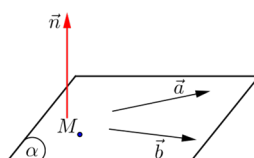
DẠNG 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG KHI BIẾT MỘT ĐIỂM VÀ VECTO PHÁP TUYẾN CỦA NÓ.

Phương pháp

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$ có dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \text{ (với } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0).$$

Nếu mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ thì (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2]$



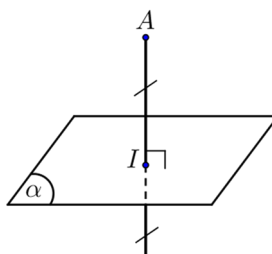
Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) **trung trực** đoạn thẳng AB

Bước 1: Vectơ pháp tuyến của mặt (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.

Bước 2: Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB .

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm I và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.



Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-1;2)$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-1;2)$ có phương trình là:
 $1(x-1)-1(y-0)+2(z+2)=0 \Leftrightarrow x-y+2z+3=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $x-y+2z+3=0$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(0;1;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;1;0)$.

Lời giải

Vậy phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(0;1;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;1;0)$ có dạng:
 $-2(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+y-1=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(-1;1;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-1;-2;2)$

Lời giải

Mặt phẳng đi qua $A(-1;1;1)$, có vtpt $\vec{n}(1;2;-2)$, suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là
 $-1(x+1)-2(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow -x-2y+2z-1=0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là?

Lời giải

Ta có: $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-2;1;0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng:

$$-2(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+y-1=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$ và $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là?

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC}(-1; -2; 2)$.

Do mặt phẳng vuông góc với đường thẳng BC nên mặt phẳng có một vtpt $\vec{n}(1; 2; -2)$.

Mặt phẳng đi qua $A(-1; 1; 1)$, có vtpt $\vec{n}(1; 2; -2)$, suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; -1; 1)$, $B(3; 1; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB nên $I(1; 0; 1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có vtpt là $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (4; 2; 0) = 2(2; 1; 0)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2(x-1) + 1(y-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 6; -7)$ và $B(3; 2; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB là.

Lời giải

Mặt phẳng trung trực đoạn AB đi qua trung điểm $I(2; 4; -3)$ của đoạn AB và nhân $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 8)$ làm vector pháp tuyến có phương trình:

$$2(x-2) - 4(y-4) + 8(z+3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4z + 18 = 0$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1; 3; -2)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng cắt tia Ox tại $A(a; 0; 0)$, cắt tia Oy tại $B(0; b; 0)$, cắt tia Oz tại $C(0; 0; c)$ có dạng là $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (với $a > 0, b > 0, c > 0$).

$$\text{Theo đề: } \frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{2} \\ c = 2b \end{cases}.$$

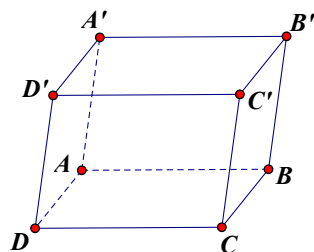
$$\text{Vì } M(1; 3; -2) \text{ nằm trên mặt phẳng } (P) \text{ nên ta có: } \frac{1}{\frac{b}{2}} + \frac{3}{b} + \frac{-2}{2b} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 4.$$

Khi đó $a = 2, c = 8$.

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng } (P) \text{ là: } \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y + z - 8 = 0.$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $D(0; 0; 1)$, $A'(1; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của $C'D$.

Lời giải



Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (3; 0; 1)$; $\overrightarrow{AA'} = (4; 2; 3)$.

$$\text{Mà } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (10; 4; 4) \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 3 \\ y = 4 - 0 \\ z = 4 - 0 \end{cases} \Rightarrow C'(13; 4; 4).$$

$$\text{Khi đó mặt phẳng trung trực của } C'D: \begin{cases} \text{qua } I\left(\frac{13}{2}; 2; \frac{5}{2}\right) \\ \vec{n} = \overrightarrow{C'D} = (13; 4; 3) \end{cases}$$

$$\text{có phương trình là } 13\left(x - \frac{13}{2}\right) + 4\left(y - 2\right) + 3\left(z - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 13x + 4y + 3z - 100 = 0.$$

DẠNG 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với 1 mặt phẳng (β) : $Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước.



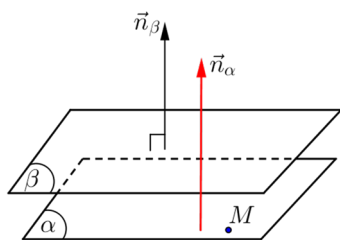
Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại

Phương pháp

(1) Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song (β) : $Ax + By + Cz + D = 0$.



⌘ **Cách 1:**

» Véc tơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_{(\beta)} = (A; B; C)$.

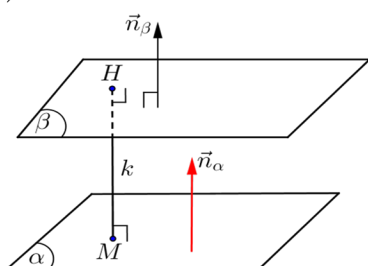
» Mặt phẳng (α) qua điểm M .

⌘ **Cách 2:**

» Do $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D \neq D'$)

» Thay điểm M vào $(\alpha) \Rightarrow D' = ? \Rightarrow (\alpha)$.

(2) Song song $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và cách (P) một khoảng bằng k .



» Vì $(\alpha) \parallel (P) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D \neq D'$).

» Vì (α) cách (P) một khoảng bằng k

$$\Rightarrow d((\alpha); (P)) = k \xrightarrow{M \in (\alpha)} d(M; (P)) = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = k \Rightarrow D' = ?$$

» Có $D' \Rightarrow$ phương trình mặt (P) hoàn chỉnh.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;1;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x - 3z + 1 = 0$.

Lời giải:

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): 2x - 3z + 1 = 0$ nên mặt phẳng (P) có phương trình dạng: $2x - 3z + D = 0$ ($D \neq 1$).

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;1;3)$ nên thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng phải thỏa mãn. Ta được: $2 \cdot 0 - 3 \cdot 3 + D = 0 \Leftrightarrow D = 9$ (thỏa mãn $D \neq 1$).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $2x - 3z + 9 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;3;1)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x + 3y - 2z + 2 = 0$.

Lời giải:

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x + 3y - 2z + 2 = 0$ nên mặt phẳng (P) có phương trình dạng: $(Q): x + 3y - 2z + D = 0$ ($D \neq 2$).

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;3;1)$ nên thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng phải thỏa mãn. Ta được: $-2 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + D = 0 \Leftrightarrow D = -5$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $(Q): x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z + 4 = 0$.

Lời giải

Vì $(Q) // (P)$ nên $(Q): 3x - y + 2z + m = 0$ ($m \neq 4$).

Mà $M(3;-1;-2) \in (P) \Rightarrow m = -6$ (thỏa mãn).

Vậy $(Q): 3x - y + 2z - 6 = 0$.

DẠNG 3: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (α) ĐI QUA 3 ĐIỂM A, B, C KHÔNG THẲNG HÀNG.

Phương pháp

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A; B; C$ không thẳng hàng.

Bước 1: Tìm cặp vector chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vector pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vector pháp tuyến $\vec{n}$.

Phương trình mặt phẳng (P) là phương trình mặt chắn, tức mặt phẳng (P) đi qua

$$A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c) \text{ có dạng: } (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

a) Với ba điểm $A(-1; 0; 3), B(2; -1; 1), C(1; -1; 0)$.

b) Với ba điểm $A(1; 0; 2), B(-2; 3; 1), C(3; 2; 1)$.

Lời giải

a) Với ba điểm $A(-1; 0; 3), B(2; -1; 1), C(1; -1; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -1; -2); \overrightarrow{AC} = (2; -1; -3)$

Mặt phẳng (ABC) có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}] = (-1; -5; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-(x+1) - 5y + z - 3 = 0 \Leftrightarrow -x - 5y + z - 4 = 0$

b) Với ba điểm $A(1; 0; 2), B(-2; 3; 1), C(3; 2; 1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1), \overrightarrow{AC} = (2; 2; -1)$.

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -5; -12)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-x - 5y - 12z + 25 = 0 \Leftrightarrow x + 5y + 12z - 25 = 0$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

a) Với ba điểm $M(2; 0; 0), N(0; -1; 0), P(0; 0; 2)$.

b) Với ba điểm $M(0; -2; 0), N(3; 0; 0), P(0; 0; -3)$.

Lời giải

a) Với ba điểm $M(2; 0; 0), N(0; -1; 0), P(0; 0; 2)$.

Ta có: $M(2;0;0), N(0;-1;0), P(0;0;2) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow x - 2y + z - 2 = 0$

b) Với ba điểm $M(0;-2;0), N(3;0;0), P(0;0;-3)$.

Ta có: $M(0;-2;0), N(3;0;0), P(0;0;-3) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-3} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 2x - 3y - 2z - 6 = 0$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;0;-2), B(1;1;1), C(0;-1;2)$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0;1;3), \overrightarrow{AC} = (-1;-1;4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (7;-3;1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ta có

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \text{ nên } \vec{n} \text{ cùng phương với } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].$$

Chọn $\vec{n} = (7;-3;1)$ ta được phương trình mặt phẳng (ABC) là: $7(x-1) - 3(y-0) + 1(z+2) = 0$
 $\Leftrightarrow 7x - 3y + z - 5 = 0$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;-1;-1), C(5;-1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-1;-1), \overrightarrow{AC} = (4;-1;1), \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2;-3;5).$$

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $2x + 3y - 5z - 2 = 0$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2; 3; 5), B(3; 2; 4)$ và $C(4; 1; 2)$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \subset (ABC)$ nên (ABC) sẽ nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ làm một vector pháp tuyến.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;-1), \overrightarrow{AC} = (2;-2;-3)$ suy ra $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; 0)$.

Hiển nhiên (ABC) đi qua $A(2; 3; 5)$ nên ta có phương trình của (ABC) là

$$1(x-2) + 1(y-3) + 0(z-5) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;1;4), B(2;7;9), C(0;9;13)$.

Lời giải

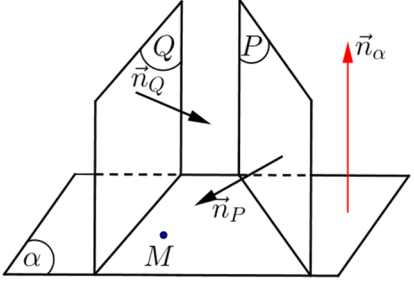
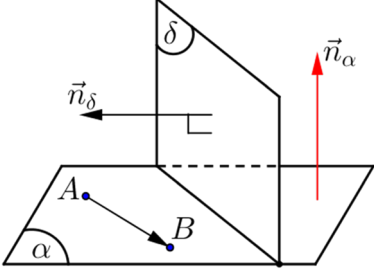
Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;6;5), \overrightarrow{AC} = (-1;8;9)$.

(ABC) đi qua $A(1;1;4)$ có vtpt $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (14;-14;14) = 14(1;-1;1)$ có dạng
 $x - y + z - 4 = 0$.

DẠNG 4: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (α) QUA HAI ĐIỂM A, B VÀ VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG (β) . VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (α) QUA ĐIỂM A VÀ VUÔNG GÓC VỚI HAI MẶT PHẪNG $(\alpha), (\beta)$.

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và $\perp 2$ mặt $(P): Ax + By + Cz + D = 0,$ $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0.$ 	» Tìm cặp vectơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(P)}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Hoặc bài toán sẽ gặp: “Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P): Ax + By + Cz + D = 0; (Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$”
Loại	Phương pháp
Qua điểm $A; B$ và vuông góc $(\delta): Ax + By + Cz + D = 0.$ 	» Tìm cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n} = [AB; \vec{n}_{(\delta)}]$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [AB; \vec{n}_{(\delta)}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm A.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1; 2; -2), B(2; -1; 4)$ và vuông góc với $(\beta): x - 2y - z + 1 = 0$.

Lời giải:

Có $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 6)$

Mặt phẳng (β) có VTPT là $\vec{n}_\beta = (1; -2; -1)$.

Mặt phẳng (α) chứa A, B và vuông góc với (β) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là:

$\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_\beta] = (15; 7; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $15x + 7z + 1 - 27 = 0$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$ và $\overrightarrow{n_p} = (1; -3; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n_p}] = (0; 8; 12)$ cùng phương $\vec{u} = (0; 2; 3)$.

Khi đó, mặt phẳng (Q) qua $A(2;4;1)$ và có VTPT là $\vec{u} = (0; 2; 3)$.

$$\Rightarrow (Q): 2y + 3z - 11 = 0.$$

Câu 21: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;1;-1); B(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua $A; B$ và vuông góc với (P) .

Lời giải

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2)$.

Mặt phẳng (P) nhận VTPT là $\vec{n}(1; 2; -1)$. Khi đó mặt phẳng (Q) nhận VTPT là

$$\vec{n_1} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}] = (-3; 1; -1).$$

Mặt phẳng (Q) qua $A; B$ và vuông góc với (P) thì nhận $\vec{n_1} = (-3; 1; -1)$ làm VTPT và đi qua $A(2;1;-1)$. Phương trình mặt phẳng (Q) là: $-3(x - 2) + y - 1 - (z + 1) = 0$.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $3x - y + z - 4 = 0$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1; -2; 5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + 2y - 3z + 1 = 0$ và $(R): 2x - 3y + z + 1 = 0$.

Lời giải:

VTPT của (Q) là $\vec{n_Q}(1; 2; -3)$, VTPT của (R) là $\vec{n_R}(2; -3; 1)$.

Ta có $[\vec{n_Q}, \vec{n_R}] = (-7; -7; -7)$ nên mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}(1; 1; 1)$ là một VTPT và (P) đi qua điểm $M(-1; -2; 5)$ nên có phương trình là: $x + y + z - 2 = 0$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng qua O , đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

Lời giải

Mặt phẳng (α) có một vector pháp tuyến là $\vec{n_1} = (3; -2; 2)$.

Mặt phẳng (β) có một vector pháp tuyến là $\vec{n_2} = (5; -4; 3)$.

Giả sử mặt phẳng (γ) có vector pháp tuyến là $\vec{n}$.

Do mặt phẳng (γ) vuông góc với cả (α) và (β) nên ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{n_1} \\ \vec{n} \perp \vec{n_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (2; 1; -2).$$

Mặt phẳng (γ) đi qua $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;1;-2)$ có phương trình là:
 $2x + y - 2z = 0$.

Câu 24: Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0, (\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

Lời giải

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_\alpha = (3; -2; 2), \vec{n}_\beta = (5; -4; 3)$.

$$\Rightarrow [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (2; 1; -2)$$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O , VTPT $\vec{n} = (2; 1; -2)$: $2x + y - 2z = 0$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0, (Q): x - z + 2 = 0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là

Lời giải

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -3; 2), (Q)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; 0; -1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là

$$[\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (3; 3; 3) = 3(1; 1; 1).$$

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α) đi qua điểm $M(3; 0; 0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3; 0; 0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 1)$ nên (α) có phương trình:
 $x + y + z - 3 = 0$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

Lời giải

Gọi mặt phẳng phải tìm là (P) . Khi đó véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n}_P = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; 1; -2)$.
 . Phương trình của (P) là $2x + y - 2z = 0$.

Dạng 6: Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) và cách $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ một khoảng k cho trước.

Phương pháp:

1. Trên mặt phẳng (β) chọn 1 điểm M .
2. Do $(\alpha) // (\beta)$ nên (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D' \neq D$).
3. Sử dụng công thức khoảng cách $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = k$ để tìm D' .

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và cách (Q) một khoảng bằng 3.

Lời giải:

Trên mặt phẳng (Q): $x + 2y - 2z + 1 = 0$ chọn điểm $M(-1; 0; 0)$.

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng: $x + 2y - 2z + D = 0$ với $D \neq 1$.

$$\text{Vì } d((P), (Q)) = 3 \Leftrightarrow d(M, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-1 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |-1 + D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -8 \\ D = 10 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x + 2y - 2z - 8 = 0$ và $x + 2y - 2z + 10 = 0$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách mặt phẳng (α): $3x - y + 2z - 3 = 0$ một khoảng bằng $\sqrt{14}$.

Lời giải

Vì (P) // (α) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $3x - y + 2z + D = 0, (D \neq -3)$.

$$\text{Lấy } M(x; y; z) \in (P). \text{ Khi đó } d(M, (\alpha)) = \frac{|3x - y + 2z - 3|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Leftrightarrow |3x - y + 2z - 3| = 14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z - 3 = 14 \\ 3x - y + 2z - 3 = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z - 17 = 0 \\ 3x - y + 2z + 11 = 0 \end{cases}$$

Vậy có hai phương trình của (P): $3x - y + 2z - 17 = 0; 3x - y + 2z + 11 = 0$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z - 10 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) với (Q) song song với (P) và khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{7}{3}$ là.

Lời giải

Vì (Q) song song với (P) nên phương trình mặt phẳng (Q) có dạng

$$(Q): x + 2y + 2z + c = 0$$

Lấy $M \in (P) \Rightarrow M(0; 0; 5) \Rightarrow d(M, (Q)) = \frac{7}{3}$. Khi đó ta có

$$d(M, (Q)) = \frac{|2.5 + c|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} 10 + c = 7 \\ 10 + c = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ c = -17 \end{cases}$$

Vậy ta có các mặt phẳng (Q) là

$$(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0; (Q): x + 2y + 2z - 17 = 0$$

Câu 30: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng (β): $x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi mặt phẳng (α) cần tìm.

Vì (α) // (β) nên phương trình (α) có dạng: $x + y - z + c = 0$ với $c \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lấy điểm $I(-1; -1; 1) \in (\beta)$.

Vì khoảng cách từ (α) đến (β) bằng $\sqrt{3}$ nên ta có:

$$d(I,(\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|-1-1-1+c|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|c-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=6 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện } c \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{)}.$$

Vậy phương trình (α) là: $x+y-z+6=0$; $x+y-z=0$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và (P) cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải:

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng: $x+2y-2z+D=0$ với $D \neq 1$.

$$\text{Vì } d(M,(P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|1-4-2+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |-5+D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D=-4 \\ D=14 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x+2y-2z-4=0$ và $x+2y-2z+14=0$.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x-2y+4z-1=0$ và cách điểm $M(-1;3;1)$ là một khoảng bằng 2.

Lời giải

(P) có dạng: $(P): x-2y+4z+c=0 (c \neq -1)$

$$d(M,(P)) = \frac{|-1-6+4+c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{|c-3|}{\sqrt{21}}$$

$$d(M,(P)) = 2 = \frac{|c-3|}{\sqrt{21}} \Rightarrow |c-3| = 2\sqrt{21} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3+2\sqrt{21} \\ c=3-2\sqrt{21} \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $(P): x-2y+4z+3+2\sqrt{21}=0$ hay $(P): x-2y+4z+3-2\sqrt{21}=0$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 2x-y+2z-3=0$ và điểm $A(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với (Q) và cách A một khoảng bằng 4.

Lời giải

Vì $(P) // (Q)$ nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $2x-y+2z+D=0, (D \neq -3)$.

$$\text{Ta có: } d(A,(P)) = \frac{|2.1-2+2.3+D|}{3} = 4 \Leftrightarrow |D+6| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D=6 \\ D=-18 \end{cases}.$$

Vậy có hai phương trình của $(P): 2x-y+2z-18=0; 2x-y+2z+6=0$.

DẠNG 7. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Phương pháp

Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ như sau

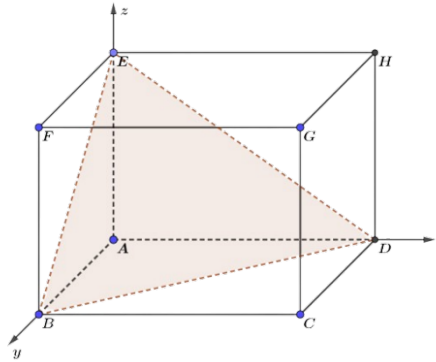
Bước 1: Tìm $M_0(x_0; y_0; z_0)$; viết phương trình mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

Bước 2: Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ theo công thức $d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Lưu ý: $d(M_0, (Oxy)) = \sqrt{(z_0)^2}$ $d(M_0, Ox) = \sqrt{(y_0)^2 + (z_0)^2}$

Câu 34: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) .

Lời giải



Ta có $A(0;0;0)$, $\overrightarrow{AE} = (0;0;1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1;0;0)$.

Đặt $M(a;b;c)$, suy ra $\overrightarrow{AM} = (a;b;c)$.

Đề cho $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CD}$, ta được $\begin{cases} a+0=-3 \\ b+0=0 \\ c+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$. Suy ra $M(-3;0;-1)$.

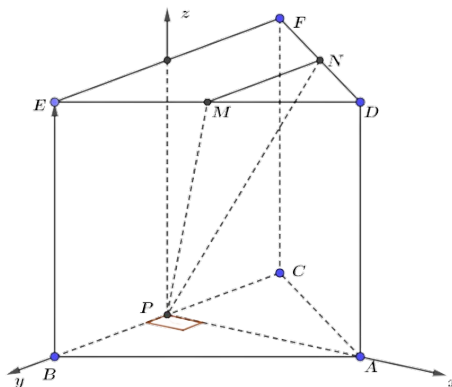
Mặt phẳng (EBD) , phương trình theo đoạn chắn là $x + y + z - 1 = 0$.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) bằng

$$d(M; (EBD)) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-3 + 0 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy khoảng cách bằng $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Câu 35: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$, $AB = 6$, $AD = 2$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm DE , DF , BC . Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) .



Lời giải

Ta có $P(0;0;0)$, $A(3\sqrt{3};0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;-3;0)$, $E(0;3;2)$, $F(0;-3;2)$, $D(3\sqrt{3};0;2)$

Suy ra $M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};2\right)$, $N\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2};2\right)$.

Ta có $[\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}] = \left(6;0;\frac{-9\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \vec{n} = (4;0;-3\sqrt{3})$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $4x - 3\sqrt{3}z = 0$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm cạnh $AC, IB \Rightarrow I\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2};0\right)$, $J\left(\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SI} + 2\overrightarrow{SB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{SJ} = \vec{0} \Leftrightarrow S \equiv J$.

Do đó $S\left(\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4};0\right)$.

Vậy khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) bằng $d = 3\sqrt{3}$.

DẠNG 8. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI HAI MẶT PHẪNG

Phương pháp

Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:

Mặt phẳng $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$,

Ta có các vị trí tương đối sau:

	Mặt phẳng (P)
Mặt phẳng (Q)	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ Mặt (P) cắt mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ Mặt (P) song song mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ Mặt (P) trùng mặt (Q)
	$A.A' + B.B' + C.C' = 0$ Mặt (P) vuông góc mặt (Q)

Câu 36: Cho ba mặt phẳng $(P_1): 2x - y - 2z + 1 = 0$, $(P_2): 4x - 2y - 4z + 4 = 0$, $(P_3): x + 4y - z + 1 = 0$. Chứng minh $(P_1) \parallel (P_2)$ và $(P_1) \perp (P_3)$.

Lời giải

VTPT của ba mặt phẳng là $\vec{n}_1 = (2; -1; -2)$, $\vec{n}_2 = (4; -2; -4)$, $\vec{n}_3 = (1; 4; -1)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} \vec{n}_1 = \frac{1}{2} \cdot \vec{n}_2 \\ 1 \neq \frac{1}{2} \cdot 4 \end{cases} \text{ nên } (P_1) \parallel (P_2).$$

Vì $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_3$ (do $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 0$) nên $(P_1) \perp (P_3)$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $(\beta): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau khi nào?

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = (m^2; -1; m^2 - 2)$; $\vec{n}_{(\beta)} = (2; m^2; -2)$.

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{n}_{(\beta)} \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(\beta)} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m^2 - 2(m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow |m| = 2.$$

Vậy $|m| = 2$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) . Phương trình của (P) là?

Lời giải

$$(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0.$$

$$(P) \parallel (ABC) \Rightarrow (P): 6x + 3y + 2z + m = 0 \quad (m \neq -12).$$

$$(P) \text{ cách đều } D \text{ và mặt phẳng } (ABC) \Rightarrow d(D, (P)) = d(A, (P))$$

$$\Leftrightarrow \frac{|6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + m|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + m|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} \Leftrightarrow |36 + m| = |12 + m| \Leftrightarrow \begin{cases} 36 + m = 12 + m \\ 36 + m = -12 - m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = -24 \text{ (nhận)}.$$

Vậy phương trình của (P) là $6x + 3y + 2z - 24 = 0$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 LỰA CHỌN.

- Câu 1:** (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oxy) là
A. $z = 0$. **B.** $x = 0$. **C.** $y = 0$. **D.** $x + y = 0$
- Câu 2:** Câu 25 (101-2023) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là.
A. $x = 0$. **B.** $z = 0$. **C.** $x + y + z = 0$. **D.** $y = 0$.
- Câu 3:** (MĐ 102-2022) Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oyz) là:
A. $x = 0$. **B.** $x + y + z = 0$. **C.** $z = 0$. **D.** $y = 0$.
- Câu 4:** (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z - 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?
A. $\vec{n}_{(P)} = (-3; 1; 2)$. **B.** $\vec{n}_{(P)} = (3; -1; 2)$. **C.** $\vec{n}_{(P)} = (3; 1; 2)$. **D.** $\vec{n}_{(P)} = (3; 1; -2)$.
- Câu 5:** (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -2x + 5y + z - 3 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?
A. $\vec{n}_2 = (-2; 5; 1)$. **B.** $\vec{n}_1 = (2; 5; 1)$. **C.** $\vec{n}_4 = (2; 5; -1)$. **D.** $\vec{n}_3 = (2; -5; 1)$.
- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?
A. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$. **B.** $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$. **C.** $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. **D.** $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của (P) , biết $\vec{a} = (-1; -2; -2)$, $\vec{b} = (-1; 0; -1)$ là cặp vector chỉ phương của (P) ?
A. $\vec{n} = (2; 1; 2)$. **B.** $\vec{n} = (2; -1; -2)$. **C.** $\vec{n} = (2; 1; -2)$. **D.** $\vec{n} = (-2; 1; -2)$.
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; 1), B(-1; 4; 1), C(3; -2; 5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vector pháp tuyến của của mặt phẳng (ABC) ?
A. $(1; 2; 2)$. **B.** $(8; -16; 16)$. **C.** $(-1; 2; -2)$. **D.** $(1; 4; 4)$.
- Câu 9:** (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua O và nhận vector $\vec{n} = (2; -1; 4)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là
A. $2x + y - 4z + 1 = 0$. **B.** $2x + y - 4z = 0$. **C.** $2x - y + 4z = 0$. **D.** $2x - y + 4z + 1 = 0$.

- Câu 10: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua O và nhận vectơ $\vec{n} = (1; 2; -3)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là
A. $x + 2y - 3z + 1 = 0$. **B.** $x - 2y + 3z + 1 = 0$. **C.** $x - 2y + 3z = 0$. **D.** $x + 2y - 3z = 0$.
- Câu 11: (Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.
A. $x - 2y + 3z + 12 = 0$. **B.** $x - 2y - 3z - 6 = 0$. **C.** $x - 2y + 3z - 12 = 0$. **D.** $x - 2y - 3z + 6 = 0$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 3; -1)$ là:
A. $(\alpha): 2x + 3y - z - 2 = 0$. **B.** $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$.
C. $(\alpha): 2x - y + 3z - 2 = 0$. **D.** $(\alpha): 2x - y + 3z + 2 = 0$.
- Câu 13: (Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ và $C(0; 0; -2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:
A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$. **B.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$. **C.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. **D.** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$.
- Câu 14: (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ và $C(0; 0; 4)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là
A. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$. **B.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$. **C.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1$. **D.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-4} = 1$.
- Câu 15: (Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:
A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$. **B.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. **C.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$. **D.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$.
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $M(-2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 3)$ là
A. $3x + 6y - 2z - 6 = 0$. **B.** $2x + y - 3z - 1 = 0$. **C.** $3x + 6y - 2z = 0$. **D.** $3x + 6y - 2z + 6 = 0$.
- Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(-1; 1; 3)$, $B(2; -1; 3)$, $C(2; 2; -1)$ là.
A. $8x + 12y + 9z - 31 = 0$. **B.** $8x + 12y + 9z + 31 = 0$.
C. $8x - 12y + 9z - 31 = 0$. **D.** $8x + 12y - 9z + 31 = 0$.
- Câu 18: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; 1)$ và $B(1; 2; 3)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc AB có phương trình là
A. $x + 2y + 2z - 11 = 0$. **B.** $x + 2y + 2z - 2 = 0$. **C.** $x + 2y + 4z - 4 = 0$. **D.** $x + 2y + 4z - 17 = 0$.
- Câu 19: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 0)$ và $B(3; 2; 1)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là
A. $2x + 2y + z - 2 = 0$. **B.** $4x + 2y + z - 17 = 0$.
C. $4x + 2y + z - 4 = 0$. **D.** $2x + 2y + z - 11 = 0$.

- Câu 20:** (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$, $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là
A. $3x+2z+1=0$. **B.** $x+2y-2z+1=0$. **C.** $x+2y-2z-1=0$. **D.** $3x+2z-1=0$.
- Câu 21:** (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-3z+1=0$. Mặt phẳng qua A và song song với (P) có phương trình là:
A. $2x+y-3z-7=0$. **B.** $2x+y-3z+7=0$. **C.** $2x+y-3z-1=0$. **D.** $2x+y-3z+1=0$.
- Câu 22:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z+1=0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là
A. $x+2y+3z-5=0$. **B.** $x+2y+3z+5=0$. **C.** $x+2y-3z-7=0$. **D.** $x+2y-3z+7=0$.
- Câu 23:** (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+3z+1=0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là:
A. $x+2y+3z+2=0$. **B.** $x-2y+3z-6=0$. **C.** $x-2y+3z+6=0$. **D.** $x+2y+3z-2=0$.
- Câu 24:** (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α) ?
A. $Q(3;3;0)$. **B.** $N(2;2;2)$. **C.** $P(1;2;3)$. **D.** $M(1;-1;1)$.
- Câu 25:** (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?
A. $P(0;0;-5)$. **B.** $M(1;1;6)$. **C.** $Q(2;-1;5)$. **D.** $N(-5;0;0)$.
- Câu 26:** (Mã 104 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là
A. $3x-y-z=0$. **B.** $3x+y+z-6=0$. **C.** $x+y+2z-6=0$. **D.** $6x-2y-2z-1=0$.
- Câu 27:** (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là
A. $x+y+z-3=0$. **B.** $2x-y+z+2=0$. **C.** $2x+y+z-4=0$. **D.** $2x-y+z-2=0$.
- Câu 28:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?
A. $x+y+3z-9=0$. **B.** $x+y-3z+3=0$. **C.** $x+y-3z-8=0$. **D.** $x-y-3z+3=0$.
- Câu 29:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+y+2z-3=0$ là.
A. $2x+4y-3z-8=0$. **B.** $2x+4y-3z=0$. **C.** $2x+4y-3z+8=0$. **D.** $2x-4y-3z=0$.
- Câu 30:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+2z-3=0$ và $(R): x-y-z+4=0$ là.
A. $x+3y-2z+9=0$. **B.** $2x+y-2z-9=0$. **C.** $x+3y-2z-9=0$. **D.** $2x+y-2z+9=0$.

- Câu 31:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .
- A.** $2y+3z-11=0$. **B.** $2x-3y-11=0$. **C.** $x-3y+2z-5=0$. **D.** $3y+2z-11=0$.
- Câu 32:** Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0, (\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:
- A.** $2x-y-2z=0$. **B.** $2x+y-2z=0$. **C.** $2x-y+2z=0$. **D.** $2x+y-2z+1=0$.
- Câu 33:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(2;1;-2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x-2y+z-8=0$ là
- A.** $x-z-4=0$. **B.** $x-z+4=0$. **C.** $2x+y-2z-4=0$. **D.** $2x+y-2z+4=0$.
- Câu 34:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z-5=0, (R): 2x-y+z-1=0$ là
- A.** $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.
C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z-22=0$.
- Câu 35:** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;-1;1), N(2;1;2)$ và song song với trục Oz có phương trình là
- A.** $x+2y+z=0$. **B.** $2x-y-3=0$. **C.** $x+2y+z-6=0$. **D.** $2x-y+5=0$.
- Câu 36:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+11=0$ và hai điểm $A(1;0;-2), B(-1;-1;3)$. Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là
- A.** $3x+14y+4z+5=0$. **B.** $2x-y+2z-2=0$.
C. $2x-y+2z+2=0$. **D.** $3x+14y+4z-5=0$.
- Câu 37:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+3=0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (α) ?
- A.** $(\alpha_1): -2x+y-3z=0$. **B.** $(\alpha_2): x+5y+z-2=0$.
C. $(\alpha_3): 4x-2y+7=0$. **D.** $(\alpha_4): x+2y-z+1=0$.
- Câu 38:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+3=0$. Mặt phẳng nào sau đây song song với mặt phẳng (α) ?
- A.** $(\alpha_1): -2x+y-3z=0$. **B.** $(\alpha_2): x+5y+z-2=0$.
C. $(\alpha_3): 4x-2y+7=0$. **D.** $(\alpha_4): x+2y-z+1=0$.
- Câu 39:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .
- A.** $d = \frac{5}{9}$. **B.** $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$. **C.** $d = \frac{5}{29}$. **D.** $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

- Câu 40:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 4 = 0$. Khoảng cách từ điểm $M(3; 1; -2)$ đến mặt phẳng (P) bằng
- A. 2. B. $\frac{1}{3}$. C. 1. D. 3.
- Câu 41:** Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $M(1; 2; -3)$ đến $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ là
- A. 3. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{11}{3}$.
- Câu 42:** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x - y + z = 0$ và $2x - y + z - 7 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng
- A. 7. B. $7\sqrt{6}$. C. $6\sqrt{7}$. D. $\frac{7}{\sqrt{6}}$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 LỰA CHỌN.

- Câu 1:** (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oxy) là
- A.** $z = 0$. **B.** $x = 0$. **C.** $y = 0$. **D.** $x + y = 0$

Lời giải

Mặt phẳng Oxy có vectơ pháp tuyến là $(0; 0; 1)$ và đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ nên có phương trình là $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

- Câu 2:** **Câu 25 (101-2023)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là.
- A.** $x = 0$. **B.** $z = 0$. **C.** $x + y + z = 0$. **D.** $y = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình là: $y = 0$.

- Câu 3:** (MĐ 102-2022) Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oyz) là:
- A.** $x = 0$. **B.** $x + y + z = 0$. **C.** $z = 0$. **D.** $y = 0$.

Lời giải

Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oyz) là: $x = 0$.

- Câu 4:** (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A.** $\vec{n}_{(P)} = (-3; 1; 2)$. **B.** $\vec{n}_{(P)} = (3; -1; 2)$. **C.** $\vec{n}_{(P)} = (3; 1; 2)$. **D.** $\vec{n}_{(P)} = (3; 1; -2)$.

Lời giải

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}_{(P)} = (3; -1; 2)$.

- Câu 5:** (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -2x + 5y + z - 3 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A.** $\vec{n}_2 = (-2; 5; 1)$. **B.** $\vec{n}_1 = (2; 5; 1)$. **C.** $\vec{n}_4 = (2; 5; -1)$. **D.** $\vec{n}_3 = (2; -5; 1)$.

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của $(P): -2x + 5y + z - 3 = 0$ là $\vec{n}_P = (-2; 5; 1)$

- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A.** $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$. **B.** $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$. **C.** $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. **D.** $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$.

Lời giải

Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$ là $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P) , biết $\vec{a} = (-1; -2; -2)$, $\vec{b} = (-1; 0; -1)$ là cặp vectơ chỉ phương của (P) ?

- A.** $\vec{n} = (2; 1; 2)$. **B.** $\vec{n} = (2; -1; -2)$. **C.** $\vec{n} = (2; 1; -2)$. **D.** $\vec{n} = (-2; 1; -2)$.

Lời giải

Ta có $[\vec{a}; \vec{b}] = (2; 1; -2)$, nên vectơ $\vec{n} = (2; 1; -2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) .

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; 1), B(-1; 4; 1), C(3; -2; 5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vector pháp tuyến của của mặt phẳng (ABC) ?

- A.** $(1; 2; 2)$. **B.** $(8; -16; 16)$. **C.** $(-1; 2; -2)$. **D.** $(1; 4; 4)$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4; 2; 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0; -4; 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (8; 16; 16).$$

Câu 9: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua O và nhận vector $\vec{n} = (2; -1; 4)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là

- A.** $2x + y - 4z + 1 = 0$. **B.** $2x + y - 4z = 0$. **C.** $2x - y + 4z = 0$. **D.** $2x - y + 4z + 1 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng đi qua O và nhận vector $\vec{n} = (2; -1; 4)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là $2(x-0) - 1(y-0) + 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 4z = 0$.

Câu 10: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua O và nhận vectơ $\vec{n} = (1; 2; -3)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

- A.** $x + 2y - 3z + 1 = 0$. **B.** $x - 2y + 3z + 1 = 0$.
C. $x - 2y + 3z = 0$. **D.** $x + 2y - 3z = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng đi qua O và nhận vectơ $\vec{n} = (1; 2; -3)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

Câu 11: (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

- A.** $x - 2y + 3z + 12 = 0$. **B.** $x - 2y - 3z - 6 = 0$. **C.** $x - 2y + 3z - 12 = 0$. **D.** $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là $1(x-1) - 2(y-2) + 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 3; -1)$ là:

A. $(\alpha): 2x + 3y - z - 2 = 0.$

B. $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0.$

C. $(\alpha): 2x - y + 3z - 2 = 0.$

D. $(\alpha): 2x - y + 3z + 2 = 0.$

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$

Do đó $2(x - 2) + 3(y + 1) - 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - z + 2 = 0$

Câu 13: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ và $C(0; 0; -2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1.$

B. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1.$

C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1.$

D. $\frac{x}{-3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1.$

Lời giải

$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ hay $(ABC): \frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1.$

Câu 14: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ và $C(0; 0; 4)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$

B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$

C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1.$

D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-4} = 1.$

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$

Câu 15: (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1.$

B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1.$

C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1.$

D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0.$

Lời giải

Ta có: $M(2; 0; 0), N(0; -1; 0), P(0; 0; 2) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $M(-2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 3)$ là

A. $3x + 6y - 2z - 6 = 0.$ **B.** $2x + y - 3z - 1 = 0.$

C. $3x + 6y - 2z = 0.$

D. $3x + 6y - 2z + 6 = 0.$

Lời giải

Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình mặt (MNP) là

$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 6y - 2z + 6 = 0.$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(-1;1;3)$, $B(2;-1;3)$, $C(2;2;-1)$ là.

A. $8x+12y+9z-31=0$.

B. $8x+12y+9z+31=0$.

C. $8x-12y+9z-31=0$.

D. $8x+12y-9z+31=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) nhận $\overrightarrow{AB}=(3;-2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(3;1;-4)$ làm cặp vector chỉ phương nên có một vector pháp tuyến là $\vec{n}=[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]= (8;12;9)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $A(-1;1;3)$ và nhận $\vec{n}=(8;12;9)$ làm một vector pháp tuyến nên có phương trình: $8(x+1)+12(y-1)+9(z-3)=0 \Leftrightarrow 8x+12y+9z-31=0$.

Câu 18: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;1)$ và $B(1;2;3)$.

Mặt phẳng đi qua A và vuông góc AB có phương trình là

A. $x+2y+2z-11=0$. **B.** $x+2y+2z-2=0$. **C.** $x+2y+4z-4=0$. **D.** $x+2y+4z-17=0$.

Lời giải

(P) qua $A(0;0;1)$ và có VTPT $\overrightarrow{AB}=(1;2;2)$

$\Rightarrow (P): x+2y+2(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): x+2y+2z-2=0$.

Câu 19: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(3;2;1)$.

Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $2x+2y+z-2=0$. **B.** $4x+2y+z-17=0$.

C. $4x+2y+z-4=0$. **D.** $2x+2y+z-11=0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;0)$ nhận vector $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$ làm vector pháp tuyến là: $2(x-1)+2(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-2=0$.

Câu 20: (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$, $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $3x+2z+1=0$. **B.** $x+2y-2z+1=0$. **C.** $x+2y-2z-1=0$. **D.** $3x+2z-1=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm.

$\vec{n}=-\overrightarrow{BC}=(1;2;-2)$ cũng là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x+2y-2z+1=0$.

Câu 21: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-3z+1=0$. Mặt phẳng qua A và song song với (P) có phương trình là:

A. $2x+y-3z-7=0$. **B.** $2x+y-3z+7=0$. **C.** $2x+y-3z-1=0$. **D.** $2x+y-3z+1=0$.

Lời giải

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm. Do $(Q) \parallel (P)$ nên $\vec{n}_Q = \vec{n}_P = (2;1;-3)$. Phương trình mặt phẳng $(Q): 2(x-1)+(y-2)-3(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3z-7=0$.

- Câu 22:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là
- A.** $x + 2y + 3z - 5 = 0$. **B.** $x + 2y + 3z + 5 = 0$. **C.** $x + 2y - 3z - 7 = 0$. **D.** $x + 2y - 3z + 7 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng song song với (P) có phương trình dạng $x + 2y - 3z + d = 0$ ($d \neq 1$), do mặt phẳng này qua $A(1; -1; 2)$ nên $1 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$. Vậy mặt phẳng đó có phương trình $x + 2y - 3z + 7 = 0$

- Câu 23:** (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z + 1 = 0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là:
- A.** $x + 2y + 3z + 2 = 0$. **B.** $x - 2y + 3z - 6 = 0$. **C.** $x - 2y + 3z + 6 = 0$. **D.** $x + 2y + 3z - 2 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) có phương trình là: $x - 2y + 3z + d = 0$ ($d \neq 1$).

Vì mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(1; 2; -1)$ nên ta có: $1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x - 2y + 3z + 6 = 0$.

- Câu 24:** (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α) ?

- A.** $Q(3; 3; 0)$. **B.** $N(2; 2; 2)$. **C.** $P(1; 2; 3)$. **D.** $M(1; -1; 1)$.

Lời giải

Ta có: $1 - 1 + 1 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow M(1; -1; 1)$ là điểm không thuộc (α) .

- Câu 25:** (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A.** $P(0; 0; -5)$. **B.** $M(1; 1; 6)$. **C.** $Q(2; -1; 5)$. **D.** $N(-5; 0; 0)$.

Lời giải

Ta có $1 - 2 \cdot 1 + 6 - 5 = 0$ nên $M(1; 1; 6)$ thuộc mặt phẳng (P) .

- Câu 26:** (Mã 104 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là
- A.** $3x - y - z = 0$. **B.** $3x + y + z - 6 = 0$. **C.** $x + y + 2z - 6 = 0$. **D.** $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (-6; 2; 2)$ và đi qua trung điểm $I(1; 1; 2)$ của đoạn thẳng AB . Do đó, phương trình mặt phẳng đó là:

$$-6(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0.$$

- Câu 27:** (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 0)$ và $B(3; 0; 2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là
- A.** $x + y + z - 3 = 0$. **B.** $2x - y + z + 2 = 0$. **C.** $2x + y + z - 4 = 0$. **D.** $2x - y + z - 2 = 0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Suy ra $I(1;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; 2)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm I của AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vtpt, nên có phương trình là $(\alpha): 2x - y + z - 2 = 0$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

A. $x + y + 3z - 9 = 0$. **B.** $x + y - 3z + 3 = 0$. **C.** $x + y - 3z - 8 = 0$. **D.** $x - y - 3z + 3 = 0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó, (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2;1;2)$ và nhận vector $\overrightarrow{IA} = (-1; -1; 3)$ làm vector pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là $-x - y + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 3 = 0$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + y + 2z - 3 = 0$ là.

A. $2x + 4y - 3z - 8 = 0$. **B.** $2x + 4y - 3z = 0$. **C.** $2x + 4y - 3z + 8 = 0$. **D.** $2x - 4y - 3z = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = (1;1;2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (-1;2;2)$ và $\vec{n}_{(Q)} = (1;1;2)$. Do đó (P) có vector pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(Q)}] = (2;4;-3)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;0)$ và nhận $\vec{n}_{(P)} = (2;4;-3)$ làm một vector pháp tuyến nên có phương trình: $2(x-2) + 4(y+1) - 3(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - 3z = 0$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + y + 2z - 3 = 0$ và $(R): x - y - z + 4 = 0$ là.

A. $x + 3y - 2z + 9 = 0$. **B.** $2x + y - 2z - 9 = 0$. **C.** $x + 3y - 2z - 9 = 0$. **D.** $2x + y - 2z + 9 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) , (R) có một vector pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_{(Q)} = (1;1;2)$ và $\vec{n}_{(R)} = (1;-1;-1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Q) và (R) nên có cặp vector chỉ phương là $\vec{n}_{(Q)} = (1;1;2)$ và $\vec{n}_{(R)} = (1;-1;-1)$. Do đó (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(R)}] = (1;3;-2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và nhận $\vec{n}_{(P)} = (1;3;-2)$ làm một vector pháp tuyến nên có phương trình: $1(x-2) + 3(y-1) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 2z - 9 = 0$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

- A.** $2y+3z-11=0$. **B.** $2x-3y-11=0$. **C.** $x-3y+2z-5=0$. **D.** $3y+2z-11=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vector pháp tuyến của mp (P) là $\overrightarrow{n_p}=(1;-3;2)$.

Từ giả thiết suy ra $\vec{n}=[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}]= (0;8;12)$ là vector pháp tuyến của mp (Q) .

Mp (Q) đi qua điểm $A(2;4;1)$ suy ra phương trình tổng quát của mp (Q) là:

$$0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0.$$

Câu 32: Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0, (\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

- A.** $2x-y-2z=0$. **B.** $2x+y-2z=0$. **C.** $2x-y+2z=0$. **D.** $2x+y-2z+1=0$.

Lời giải

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;-2;2), \overrightarrow{n_\beta}=(5;-4;3)$.

$$\Rightarrow [\overrightarrow{n_\alpha}; \overrightarrow{n_\beta}] = (2;1;-2)$$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O , VTPT $\vec{n}=(2;1;-2): 2x+y-2z=0$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(2;1;-2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x-2y+z-8=0$ là

- A.** $x-z-4=0$. **B.** $x-z+4=0$.
C. $2x+y-2z-4=0$. **D.** $2x+y-2z+4=0$.

Lời giải

Trục Oy có một vector chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$. Mặt phẳng (Q) một vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(2;1;-2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên có cặp vector chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$ và $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;1)$. Do đó (P) có vector pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)}=[\vec{j}; \vec{n}_{(Q)}] = (1;0;-1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(2;1;-2)$ và nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;0;-1)$ làm một vector pháp tuyến nên có phương trình: $1(x-2)+0(y-1)-1(z+2)=0 \Leftrightarrow x-z-4=0$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z-5=0, (R): 2x-y+z-1=0$ là

- A.** $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.
C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z-22=0$.

Lời giải

+ Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) và (R) lần lượt là $\begin{cases} \vec{n}_Q = (1; 1; 3) \\ \vec{n}_R = (2; -1; 1) \end{cases}$.

+ $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \\ \vec{n}_P \perp \vec{n}_R \end{cases} \Rightarrow VTPT \vec{n}_P = [\vec{n}_Q, \vec{n}_R] = (4; 5; -3).$

+ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2; 1; -3)$ và véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (4; 5; -3)$ có phương trình $4(x-2) + 5(y-1) - 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1; -1; 1)$, $N(2; 1; 2)$ và song song với trục Oz có phương trình là

A. $x + 2y + z = 0$. **B.** $2x - y - 3 = 0$. **C.** $x + 2y + z - 6 = 0$. **D.** $2x - y + 5 = 0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN}(1; 2; 1); \vec{k}(0; 0; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \vec{k}] = (2; -1; 0)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; -1; 1)$ có véc tơ pháp tuyến $(2; -1; 0)$ là :

$$2(x-1) - 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0.$$

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 11 = 0$ và hai điểm $A(1; 0; -2), B(-1; -1; 3)$. Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $3x + 14y + 4z + 5 = 0$. **B.** $2x - y + 2z - 2 = 0$. **C.** $2x - y + 2z + 2 = 0$. **D.** $3x + 14y + 4z - 5 = 0$.

Lời giải

Gọi $\vec{n}_P, \vec{n}_Q$ lần lượt là vector pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 5), \vec{n}_P = (2; -1; 2)$.

Vì (Q) đi qua A, B và $(Q) \perp (P)$ nên $\vec{n}_Q \perp \overrightarrow{AB}, \vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$, chọn $\vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P] = (3; 14; 4)$.

Do đó phương trình của (Q) là

$$3(x-1) + 14(y-0) + 4(z+2) = 0 \text{ hay } 3x + 14y + 4z + 5 = 0.$$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (α) ?

A. $(\alpha_1): -2x + y - 3z = 0$. **B.** $(\alpha_2): x + 5y + z - 2 = 0$. **C.** $(\alpha_3): 4x - 2y + 7 = 0$. **D.** $(\alpha_4): x + 2y - z + 1 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3 = 0$ có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 0)$.

Mặt phẳng $(\alpha_4): x + 2y - z + 1 = 0$ có VTPT $\vec{n}_4 = (1; 2; -1)$.

Vì $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_4 = 2.1 + (-1).2 + 0.(-1) = 0$ nên $(\alpha_4) \perp (\alpha)$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây song song với mặt phẳng (α) ?

A. $(\alpha_1): -2x + y - 3z = 0$.

B. $(\alpha_2): x + 5y + z - 2 = 0$.

C. $(\alpha_3): 4x - 2y + 7 = 0$.

D. $(\alpha_4): x + 2y - z + 1 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3 = 0$ có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 0)$.

Mặt phẳng $(\alpha_3): 4x - 2y + 7 = 0$ có VTPT $\vec{n}_3 = (4; -2; 0)$.

Vì $\vec{n}_\alpha = 2\vec{n}_3$ và $3 \neq 2 \cdot 7$ nên $(\alpha_3) \parallel (\alpha)$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

A. $d = \frac{5}{9}$.

B. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

C. $d = \frac{5}{29}$.

D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Khoảng cách d từ A đến (P) là $d(A, (P)) = \frac{|3x_A + 4y_A + 2z_A + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{|3 - 8 + 6 + 4|}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow d(A, (P)) = \frac{5}{\sqrt{29}}$

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 4 = 0$. Khoảng cách từ điểm $M(3; 1; -2)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Khoảng cách từ điểm $M(3; 1; -2)$ đến mặt phẳng (P) :

$$d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $M(1; 2; -3)$ đến $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ là

A. 3.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải

$$d(M, (P)) = \frac{|1 + 4 - 6 - 10|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{11}{3}$$

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x - y + z = 0$ và $2x - y + z - 7 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 7.

B. $7\sqrt{6}$.

C. $6\sqrt{7}$.

D. $\frac{7}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $O(0;0;0)$.

Do mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và

(Q) bằng: $d((P), (Q)) = d(O, (Q)) = \frac{|-7|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (1;6;5)$
- b) Mặt phẳng (ABC) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;1)$
- c) $(ABC): x - y + z - 4 = 0$
- d) $O \in (ABC)$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1); B(1;-2;3); C(2;-1;2)$.

- a) Ba điểm A, B, C đã cho thẳng hàng.
- b) Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C đã cho.
- c) Mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;3)$.
- d) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình là

$(P): x - 2y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): 2x - 4y + 6z + 1 = 0$.

- a) Các vector pháp tuyến của hai mặt phẳng trên cùng phương.
- b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) đều đi qua điểm $M(1;1;2)$.
- c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.
- d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là:
 $4x + 8y + 12z - 5 = 0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có VTPT $\vec{n} = (4;0;-5)$.

- a) Mặt phẳng (P) có phương trình là $4x - 5z + 4 = 0$.
- b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;5)$.
- c) Mặt phẳng $(Q): 4x - 5z + 4 = 0$ song song với (P) .
- d) Cho điểm $A(-2;1;3)$. Khi đó $d(A, (P)) = \frac{19}{\sqrt{41}}$.

- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-3)$ và các $\vec{u}=(-1;-2;5)$, $\vec{v}=(3;-1;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và nhận $\vec{u}, \vec{v}$ làm cặp vector chỉ phương.
- Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(9;13;7)$.
 - Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 9x+13y+7z-2=0$.
 - Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;-3)$.
 - Mặt phẳng (R) đi qua M song song với (α) có phương trình $x+2y+5z+18=0$.
- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt ba trục tọa độ tại các điểm A, B, C khác gốc tọa độ O sao cho tam giác ABC có trục tâm M .
- Hình chiếu của điểm M trên trục Ox là $H(-2;0;0)$.
 - Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;3)$.
 - Phương trình mặt phẳng (P) là $2x-y-3z+14=0$
 - Mặt phẳng $(Q): x-y+z-3=0$ vuông góc với (P)
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình là $(P): x+y-z+1=0$ và $(Q): x-y+z-5=0$.
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.
 - Điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) có tọa độ là $M(0;-3;0)$.
 - Mặt phẳng (α) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a,b,-2)$. Khi đó $a+b=-2$.
 - Phương trình mặt phẳng (R) song song và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng $\sqrt{3}$ là: $x+y-z+2=0$.
- Câu 8:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+1=0$. (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .
- Mọi mặt phẳng có phương trình dạng $x+2y-z+m=0$ (m là tham số thực) đều song song với (α) .
 - (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x-3y-4z=0$.
 - (P) có phương trình dạng $ax+by+cz+d=0$ với $\frac{a}{d}=\frac{1}{5}$.
 - (P) đi qua điểm $M(1;2;-1)$.
- Câu 9:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+1=0$
- Mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (Oxy) có phương trình dạng $z-2=0$.
 - Mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình dạng $4x-2y-3=0$
 - Mặt phẳng đi qua A và song song với mp (α) có khoảng cách đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{5}$.
 - Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn OA và song song với (α) . Hình chiếu của điểm A trên mp (P) là điểm $H(-1;\frac{1}{2};2)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-3;1)$, $B(1;0;-1)$, $C(3;1;2)$, $D(1;0;-1)$.

- a) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y - 3 = 0$.
- b) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng trung trực của BC có phương trình là $2x + y + 3z - 4 = 0$.
- c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trọng tâm của ΔABC và song song với mp $(\beta): z - 2 = 0$.

Khoảng cách từ điểm A đến (α) bằng $\frac{1}{3}$.

- d) Mặt phẳng đi qua điểm D và song song với mặt phẳng (ABC) có phương trình là $11x - y - 7z - 18 = 0$

Câu 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-2)$ và các mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 1 = 0$, $(\beta): x + 2y - 2z + 5 = 0$.

- a) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với (α) . Giao điểm của (P) và trục Ox là $I(8;0;0)$.
- b) Mặt phẳng song song và cách đều 2 mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình là $(\alpha): x + 2y - 2z + 2 = 0$.
- c) Mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng (β) có phương trình là $x + 2y - 2z + 11 = 0$.
- d) Gọi H là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (α) . Mặt phẳng đi qua điểm H và song song với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là $9x + 7 = 0$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$ $(Q): 3x - y + z - 5 = 0$ và $(R): 2x + 4y - mz - 2 = 0$.

- a) $(P) // (Q)$
- b) (α) qua O và song song (P) có phương trình là $(\alpha): x + 2y - z = 0$
- c) $(P) // (R)$ khi và chỉ khi $m = 2$
- d) $(P) \perp (R)$ khi và chỉ khi $m = -10$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho $M(-2;-4;3)$ và $(P): 2xy + 2z3 = 0$, $(Q): 2xy + 2z6 = 0$.

- a) $d(M, (P)) = 2$
- b) M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)
- c) $d((P), (Q)) = 1$
- d) (α) song song và cách (Q) một khoảng bằng 2 có phương trình là $(\alpha): 2x - y + 2z - 9 = 0$

- Câu 14:** Cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 5 = 0$; $(Q): 4x - 2y + 4z + 1 - m = 0$ và điểm $M(2;1;5)$.
- Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8}{3}$.
 - Khi $m = 0$, khoảng cách M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9}{2}$.
 - Khi $m = 3$, khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.
 - Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.
- Câu 15:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z - 6 = 0$.
- Véc tơ $\vec{n} = (1;2;2)$ là một vector pháp tuyến của (α) .
 - Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2y + 2z + 15 = 0$
 - Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y = 0$.
 - Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A, O, M thẳng hàng thì tọa độ $M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right)$.
- Câu 16:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-2); B(2;1;2); C(3;-2;1)$.
- Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overline{AB}, \overline{AC}]$.
 - Phương trình mặt phẳng (P) là $13x + 5y - 2z + 27 = 0$.
 - Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và nhận $\overline{BC}$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: $1(x+1)x - 3(y+2) - 1(z-2) = 0$.
 - Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $E; F; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên trục $Ox; Oy; Oz$ có phương trình $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$.
- Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;3), B(3;0;2), C(0;-2;1)$.
- Các điểm A, B, C không thẳng hàng.
 - Mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến là $\vec{a} = (1;4;5)$.
 - Mặt phẳng (ABC) chứa điểm $M(1;2;2)$.
 - Mặt phẳng (P) đi qua A, B và cách C một khoảng lớn nhất có phương trình $3x + 2y + z - 11 = 0$.
- Câu 18:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$.
- Phương trình mặt phẳng (ABC) là $3x + y + 5z - 10 = 0$.
 - Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện.
 - Mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có một vector pháp tuyến là $\vec{a} = (4;-2;7)$.
 - Có 2 mặt phẳng đi qua 2 điểm A, B sao cho khoảng cách từ C và D đến mặt phẳng đó bằng nhau. Cả 2 mặt phẳng này đều đi qua điểm $M(1;2;1)$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;0;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z = 0$.

- a) Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2;1;-2)$ và đi qua A .
- b) Phương trình mặt phẳng qua A và song song (P) là $2x + y - 2z + 6 = 0$.
- c) Mặt phẳng qua gốc toạ độ O , điểm A và vuông góc (P) có phương trình là $2x - 2y + z = 0$.
- d) Có tất cả hai mặt phẳng song song với (P) và có khoảng cách đến A bằng 2.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$

- a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (3;3;2)$.
- b) Mặt phẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là $x - y = 0$.
- c) Mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có phương trình là $x + y - 3z + 2 = 0$.
- d) Gọi $M(a;b;c) \in (Oyz)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất, khi đó $3(a+b)+c=5$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): (4-a)x - (a+3)y + z + 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 3x - 4y + z + 3 = 0$.

- a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với nhau khi $a = 1$.
- b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) vuông góc với nhau khi $a = 2$.
- c) Không có giá trị nào của a để hai mặt phẳng trên trùng nhau.
- d) Mặt phẳng vuông góc với cả hai mặt phẳng trên có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;-7)$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;3;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 5 = 0$.

- a) Mặt phẳng (β) có phương trình $2x + y + z - 3 = 0$ đi qua điểm M và song song mặt phẳng (α) .
- b) Mặt phẳng (γ) có phương trình $x - 3y - z + 2024 = 0$ vuông góc với mặt phẳng (α) .
- c) Mặt phẳng (P) đi qua điểm M , song song trục Ox và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình là $y + z - 1 = 0$.
- d) Có hai mặt phẳng song song mặt phẳng (α) và cách điểm M một khoảng bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): -2x + y + 4z - 3 = 0$

- a) Mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) .
- b) Mặt phẳng (R) có phương trình $14x + 8y + 5z - 2 = 0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- c) Mặt phẳng $(\alpha): 2x - 6y + 4z - 9 = 0$ song song mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$ và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 1.
- d) Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1), B(2;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = (8;4;3)$.

Câu 24: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$, $(Q): -x+2y-2z+1=0$.

- a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.
- b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) .
- b) Khoảng cách $d(A, (Q)) = 2$.
- c) Gọi điểm $B(x_0; y_0; z_0) \in (Q)$ sao cho khoảng cách AB ngắn nhất, khi đó ta có $x_0 + y_0 + z_0 = 43$.

Câu 25: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$, $(Q): 2x-2y+z-5=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(2;0;1)$.

- a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.
- b) Khoảng cách $d(A, (Q)) = 4$.
- c) Khoảng cách $d(P, (Q)) = 6$.
- d) Cho biết điểm $C \in (P)$ và đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (P) góc 30° . Khi đó ta có khoảng cách $BC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (1;6;5)$

b) Mặt phẳng (ABC) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;1)$

c) $(ABC): x - y + z - 4 = 0$

d) $O \in (ABC)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) $\overrightarrow{AB} = (1;6;5)$.

$A(1;1;4), B(2;7;9) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1;6;5)$.

ĐÚNG.

b) Mặt phẳng (ABC) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;1)$.

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (14; -14; 14) = 14(1; -1; 1)$ nên (ABC) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; 1)$.

ĐÚNG.

c) $(ABC): x - y + z - 4 = 0$

(ABC) đi qua $A(1;1;4)$ có vtpt $\vec{n} = (1;-1;1)$ nên có phương trình $x - y + z - 4 = 0$.

ĐÚNG.

d) $O \in (ABC)$.

Tọa độ O không thỏa phương trình (ABC) nên $O \notin (ABC)$.

SAI.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1); B(1;-2;3); C(2;-1;2)$.

a) Ba điểm A, B, C đã cho thẳng hàng.

b) Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C đã cho.

c) Mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 3)$.

d) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Ta có: $\vec{AB} = (0; -3; 2)$; $\vec{AC} = (1; -2; 1)$ và $\frac{0}{1} \neq \frac{-3}{-2} \Rightarrow \vec{AB}; \vec{AC}$ không cùng phương. Do đó ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy a) **Sai**.

b) Ta có ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên tồn tại một mặt duy nhất qua ba điểm này. Vậy b) **Sai**.

c) Ta có: VTPT $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (1; 2; 3)$. Vậy c) **Đúng**.

d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và nhận vector $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm một vector pháp tuyến là: $1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$ hay $(ABC): x + y + z - 6 = 0$.

Vậy d) **Đúng**.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình là

$(P): x - 2y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): 2x - 4y + 6z + 1 = 0$.

a) Các vector pháp tuyến của hai mặt phẳng trên cùng phương.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) đều đi qua điểm $M(1; 1; 2)$.

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$4x + 8y + 12z - 5 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Ta có: một VTPT $\vec{n}_P = (1; -2; 3)$, một VTPT $\vec{n}_Q = (2; -4; 6)$ và $\vec{n}_Q = 2\vec{n}_P \Rightarrow \vec{n}_P; \vec{n}_Q$ cùng phương. Vậy a) **Đúng**.

b) Ta có $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow (P) // (Q)$. Do đó hai mặt phẳng (P) và (Q) không có điểm chung.

Vậy b) **Sai**.

c) Ta có $(P) // (Q)$.

Lấy điểm $N(1; 1; 0) \in (P) \Rightarrow d((P), (Q)) = d(N, (Q)) = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2}} = \frac{\sqrt{14}}{28}$.

Vậy c) **Sai**.

d) Ta có $(P) // (Q)$. Lấy $N(1; 1; 0) \in (P); P\left(1; 0; -\frac{1}{2}\right) \in (Q)$. Gọi I là trung điểm

$MN \Rightarrow I\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. Ycbt $\Rightarrow (R)$ qua I và nhận vector $\vec{n}(1; 2; 3)$ làm một vector pháp tuyến là:

$1(x-1) + 2\left(y-\frac{1}{2}\right) + 3\left(z+\frac{1}{4}\right) = 0$ hay $(R): 4x + 8y + 12z - 5 = 0$.

Vậy d) **Đúng**.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có VTPT $\vec{n} = (4;0;-5)$.

a) Mặt phẳng (P) có phương trình là $4x - 5z + 4 = 0$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;5)$.

c) Mặt phẳng $(Q): 4x - 5z + 4 = 0$ song song với (P) .

d) Cho điểm $A(-2;1;3)$. Khi đó $d(A, (P)) = \frac{19}{\sqrt{41}}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng.

Phương trình mặt phẳng $(P): 4(x+1) + 0(y-2) - 5(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5z + 4 = 0$.

b) Sai.

Thay điểm M vào phương trình mặt phẳng $(P): 4x - 5z + 4 = 0$ ta thấy không thỏa mãn

c) sai.

$(Q) \equiv (P)$

d) Đúng.

$$d(A, (P)) = \frac{|4 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{19}{\sqrt{41}}$$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-3)$ và các $\vec{u} = (-1;-2;5)$, $\vec{v} = (3;-1;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và nhận $\vec{u}, \vec{v}$ làm cặp vector chỉ phương.

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (9;13;7)$.

b) Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 9x + 13y + 7z - 2 = 0$.

c) Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;-3)$.

d) Mặt phẳng (R) đi qua M song song với (α) có phương trình $x + 2y + 5z + 18 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) Đúng.

Mặt phẳng (α) nhận $\vec{u}, \vec{v}$ làm cặp vector chỉ phương nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q = [\vec{u}, \vec{v}] = (9;13;7)$.

b) Sai.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 9(x-2)+13y+7(z+3)=0 \Leftrightarrow 9x+13y+7z+2=0$.

c) Sai.

Thay điểm $M(1;-2;-3)$ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): 9x+13y+7z+2=0$ ta thấy không thỏa mãn.

d) Sai.

Mặt phẳng có dạng $(R): 9x+13y+7z+d=0 (d \neq 2)$

Vì mặt phẳng qua $M(1;-2;-3)$ nên thay vào ta suy ra $d=38 (t/m)$

Vậy phương trình mặt phẳng $(R): 9x+13y+7z+38=0$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt ba trục tọa độ tại các điểm A, B, C khác gốc tọa độ O sao cho tam giác ABC có trục tâm M .

a) Hình chiếu của điểm M trên trục Ox là $H(-2;0;0)$.

b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;3)$.

c) Phương trình mặt phẳng (P) là $2x-y-3z+14=0$

d) Mặt phẳng $(Q): x-y+z-3=0$ vuông góc với (P)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng.

b) Đúng.

Do tứ diện $OABC$ vuông tại O và $H(-2;0;0)$ là trục tâm nên $OH \perp (ABC)$, hay $OH \perp (P)$

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{HO}=(2;-1;3)$.

c) Sai.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(-2;1;3)$ có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{HO}=(2;-1;3)$ là:

$$2(x+2)-(y-1)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-3z+14=0$$

d) Đúng.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(1;-1;1)$.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(2;-1;-3)$.

$$\Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1.2 + (-1).(-1) + 1.(-3) = 0.$$

$$\Rightarrow (P) \perp (Q)$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình là

$(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$.

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

b) Điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) có tọa độ là $M(0; -3; 0)$.

c) Mặt phẳng (α) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a, b, -2)$. Khi đó $a + b = -2$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) song song và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng $\sqrt{3}$ là: $x + y - z + 2 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Ta có: một VTPT $\vec{n}_P = (1; 1; -1)$, một VTPT $\vec{n}_Q = (1; -1; 1)$ và $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ hai mặt phẳng (P) và (Q) không vuông góc với nhau. Vậy a) **Sai**.

b) Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$.

Theo giả thiết: $d(M(P)) = d(M(Q)) \Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-y-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -3 \Rightarrow M(0; -3; 0)$.

Vậy b) **Đúng**.

c) Ta có: một VTPT $\vec{n}_P = (1; 1; -1)$, một VTPT $\vec{n}_Q = (1; -1; 1)$

$$\begin{cases} (\alpha) \perp (P) \\ (\alpha) \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_P \\ \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_Q \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (0; -2; -2) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2.$$

Vậy c) **Đúng**.

d) Ta có $(R) // (P) \Rightarrow (R): x + y - z + m = 0$, với $m \neq 1$. Lấy $M(0; 0; 1) \in (P)$.

$$d((P), (R)) = \sqrt{3} \Rightarrow d(M, (R)) = \frac{|m-1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Có hai mặt phẳng (R) thỏa mãn: $(R_1): x + y - z + 4 = 0; (R_2): x + y - z - 2 = 0$.

Vậy d) **Sai**.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z + 1 = 0$. (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .

a) Mọi mặt phẳng có phương trình dạng $x + 2y - z + m = 0$ (m là tham số thực) đều song song với (α) .

b) (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - 3y - 4z = 0$.

c) (P) có phương trình dạng $ax + by + cz + d = 0$ với $\frac{a}{d} = \frac{1}{5}$.

d) (P) đi qua điểm $M(1; 2; -1)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) **Sai**

Nếu $m = 1$ thì mặt phẳng đó sẽ trùng với mặt phẳng (α) .

b) **Đúng**

+) Do $(P) // (\alpha) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_p = (1; 2; -1)$. VTPT $\vec{n}_q = (2; -3; -4)$.

+) Ta có: $\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 1.2 + 2.(-3) + (-1).(-4) = 0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$.

c) **Đúng**

Do $(P) // (\alpha) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_p = (1; 2; -1)$ và (P) đi qua điểm $A(2; -3; 1)$

$$\Rightarrow (P): 1.(x-2) + 2.(y+3) - 1.(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow (P): x + 2y - z + 5 = 0 \Rightarrow a = 1; d = 5 \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{1}{5}.$$

d) **Sai**

Theo trên ta biết $(P): x + 2y - z + 5 = 0$

Thay tọa độ điểm $M(1; 2; -1)$ vào pt của (P) ta được: $1 + 2.2 - (-1) + 5 = 0$ (vô lí).

Vậy (P) không đi qua M .

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 1; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 1 = 0$

a) Mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (Oxy) có phương trình dạng $z - 2 = 0$.

b) Mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình dạng $4x - 2y - 3 = 0$

c) Mặt phẳng đi qua A và song song với mp (α) có khoảng cách đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{5}$.

d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn OA và song song với (α) . Hình chiếu của điểm A trên mp (P) là điểm $H\left(-1; \frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) **Đúng.**

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm. Do $(Q) // (Oxy) \Rightarrow \vec{n}_q = \vec{k} = (0; 0; 1)$

$$\Rightarrow (Q): 0.(x+2) + 0.(y-1) + 1.(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow (Q): z - 2 = 0.$$

b) **Sai.**

Dễ thấy mặt phẳng đã cho song song với (α) nhưng không đi qua điểm A (vì khi thay tọa độ điểm A vào phương trình mặt phẳng thì không thỏa mãn: $4.(-2) - 2.1 - 3 = 0$ (vô lí))

c) **Đúng**

Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm.

+) Do $(R) // (\alpha) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_r = (2; -1; 0)$ và (R) đi qua điểm $A(-2; 1; 2)$

$$\Rightarrow (R): 2.(x+2) - 1.(y-1) + 0.(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow (R): 2x - y + 5 = 0.$$

$$+) d(O;(P)) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}.$$

d) Đúng.

$$+) \text{ Trung điểm của } OA \text{ là điểm } I\left(-1; \frac{1}{2}; 1\right)$$

$$+) \text{ Do } (P) // (\alpha) \Rightarrow \vec{n}_p = (2; -1; 0) \text{ và } (P) \text{ qua } I$$

$$\Rightarrow (P): 2 \cdot (x+1) - 1 \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) + 0 \cdot (z-1) = 0$$

$$\Rightarrow (P): 4x - 2y + 5 = 0$$

$$+) \text{ Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng qua } A \text{ và vuông góc với } (P) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Gọi } H \text{ là giao điểm của } \Delta \text{ và } (P). \text{ Xét phương trình: } 4 \cdot (-2 + 4t) - 2 \cdot (1 - 2t) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Thay } t = \frac{1}{4} \text{ vào phương trình } \Delta \text{ ta được tọa độ điểm } H\left(-1; \frac{1}{2}; 2\right).$$

$$\text{Vậy hình chiếu của điểm } A \text{ trên } (P) \text{ là điểm } H\left(-1; \frac{1}{2}; 2\right).$$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -3; 1)$, $B(1; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$, $D(1; 0; -1)$.

a) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y - 3 = 0$.

b) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng trung trực của BC có phương trình là $2x + y + 3z - 4 = 0$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trọng tâm của ΔABC và song song với mp $(\beta): z - 2 = 0$.

Khoảng cách từ điểm A đến (α) bằng $\frac{1}{3}$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm D và song song với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$11x - y - 7z - 18 = 0$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Sai

$$\text{Gọi } (P) \text{ là mp cần tìm. Do } (P) // (Oxz) \Rightarrow \vec{n}_p = \vec{j} = (0; 1; 0)$$

$$\text{Và } (P) \text{ đi qua điểm } A(2; -3; 1) \Rightarrow (P): 0 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y+3) + 0 \cdot (z-1) = 0$$

$$\Rightarrow (P): y + 3 = 0$$

b) Đúng

$$+) \text{ Trung điểm } BC \text{ là } I\left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (2; 1; 3)$$

$$\Rightarrow \text{mp trung trực của } BC \text{ là } (Q): 2.(x-2)+1.\left(y-\frac{1}{2}\right)+3.\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow (Q): 2x+y+3z-6=0.$$

+) Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm. Do $\Rightarrow (R): 2.(x-2)+1.(y+3)+3.(z-1)=0$

$$\Rightarrow (R): 2x+y+3z-4=0 \text{ dễ thấy } (R) \parallel (Q)$$

c) Đúng.

+) Trọng tâm ΔABC là điểm $G\left(2; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

+) Do $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (0; 0; 1)$ và (α) đi qua điểm G

$$\Rightarrow (\alpha): 0.(x-2)+0.\left(y+\frac{2}{3}\right)+1.\left(z-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow (\alpha): 3z-2=0.$$

+) $d(A;(\alpha)) = \frac{|3.1-2|}{\sqrt{0^2+0^2+3^2}} = \frac{1}{3}.$

d) Sai

+) $\vec{AB} = (-1; 3; -2), \vec{AC} = (1; 4; 1) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_{ABC} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (11; -1; -7)$

+) Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm. Do $(Q) \parallel (ABC) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_Q = \vec{n}_{ABC} = (11; -1; -7)$ và (Q) đi qua điểm $D(1; 0; -1) \Rightarrow (Q): 11.(x-1)-1.(y-0)-7.(z+1)=0$

$$\Rightarrow (Q): 11x-y-7z-18=0$$

Nhận thấy tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình (Q) (vì: $11.2-1.(-3)-7.1-18=0$) nên mp (Q) chính là mp (ABC) .

Câu 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 2; -2)$ và các mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z-1=0$, $(\beta): x+2y-2z+5=0$.

a) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với (α) . Giao điểm của (P) và trục Ox là $I(8; 0; 0)$.

b) Mặt phẳng song song và cách đều 2 mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình là $(\alpha): x+2y-2z+2=0$.

c) Mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng (β) có phương trình là $x+2y-2z+11=0$.

d) Gọi H là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (α) . Mặt phẳng đi qua điểm H và song song với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là $9x+7=0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng.

+) $(P): 1.(x-0)+2.(y-2)-2.(z+2)=0 \Leftrightarrow (P): x+2y-2z-8=0.$

+) Thay $y = 0, z = 0$ vào phương trình $(P) \Rightarrow x = 8$. Vậy (P) cắt trục Ox tại $I(8;0;0)$.

b) Đúng.

+) Trên (α) lấy điểm $M(1;0;0)$, trên (β) lấy điểm $N(-5;0;0)$. Trung điểm MN là $E(-2;0;0)$.

+) Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm $\Rightarrow (P)$ đi qua E và song song với (α)

$$\Rightarrow (P): 1 \cdot (x+2) + 2 \cdot (y-0) - 2 \cdot (z-0) = 0$$

$$\Rightarrow (P): x + 2y - 2z + 2 = 0.$$

c) Đúng.

+) Trên (α) lấy điểm $M(1;0;0)$, trên (β) lấy điểm $N(-5;0;0)$. Gọi F là điểm đối xứng với M qua $N \Rightarrow F(-11;0;0)$.

+) Gọi (Q) là mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng $(\beta) \Rightarrow (Q)$ đi qua F

và song song với $(\alpha) \Rightarrow (Q): 1 \cdot (x+11) + 2 \cdot (y-0) - 2 \cdot (z-0) = 0$

$$\Rightarrow (Q): x + 2y - 2z + 11 = 0.$$

d) Đúng.

+) Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$.

+) Ta có $H = \Delta \cap (\alpha)$. Xét phương trình: $t + 2 \cdot (2 + 2t) - 2 \cdot (-2 - 2t) - 1 = 0$

$$\Rightarrow t = -\frac{7}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; -\frac{4}{9}\right).$$

+) Gọi (R) là mặt phẳng đi qua điểm H và song song với mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow \vec{n}_R = \vec{i} = (1;0;0)$

$$\Rightarrow (R): 1 \cdot \left(x + \frac{7}{9}\right) + 0 \cdot \left(y - \frac{4}{9}\right) + 0 \cdot \left(z + \frac{4}{9}\right) = 0 \Rightarrow (R): 9x + 7 = 0.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$
 $(Q): 3x - y + z - 5 = 0$ và $(R): 2x + 4y - mz - 2 = 0$.

a) $(P) // (Q)$

b) (α) qua O và song song (P) có phương trình là $(\alpha): x + 2y - z = 0$

c) $(P) // (R)$ khi và chỉ khi $m = 2$

d) $(P) \perp (R)$ khi và chỉ khi $m = -10$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) $(P) // (Q)$

(P) có VTPT $\vec{n}_1 = (1;2;-1)$, (Q) có VTPT $\vec{n}_2 = (3;-1;1)$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ nên } (P) \perp (Q).$$

SAI.

b) (α) qua O và song song (P) có phương trình là $(\alpha): x + 2y - z = 0$.

$$(\alpha) // (P) \text{ nên } (\alpha): x + 2y - z + D = 0.$$

$$O \in (\alpha) \Rightarrow D = 0. \text{ Vậy } (\alpha): x + 2y - z = 0$$

ĐÚNG.

c) $(P) // (R)$ khi $m = 2$.

$$(R) \text{ có VTPT } \vec{n}_3 = (2; 4; -m).$$

$$(P) // (R) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_3 \\ -1 \neq k(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = \frac{1}{2} \\ k \neq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (vô lý).}$$

Vậy không có giá trị của m .

SAI.

d) $(P) \perp (R)$ khi $m = -10$.

$$(P) \perp (R) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-m) = 0 \Leftrightarrow m = -10.$$

ĐÚNG.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho $M(-2; -4; 3)$ và $(P): 2xy + 2z - 3 = 0$, $(Q): 2xy + 2z - 6 = 0$.

a) $d(M, (P)) = 2$

b) M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)

c) $d((P), (Q)) = 1$

d) (α) song song và cách (Q) một khoảng bằng 2 có phương trình là $(\alpha): 2x - y + 2z - 9 = 0$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) $d(M, (P)) = 2$

$$d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

SAI.

b) M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$d(M, (Q)) = \frac{|2 \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 0 \Rightarrow M \in (Q)$$

SAI.

c) $d((P), (Q)) = 1$.

$$d((P), (Q)) = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

ĐÚNG.

d) (α) song song và cách (Q) một khoảng bằng 2 có phương trình là $(\alpha): 2x - y + 2z - 9 = 0$.

$(\alpha) \parallel (Q)$ nên $(\alpha): 2x - y + 2z + D = 0$.

$$d((\alpha), (Q)) = 2 \Leftrightarrow d(M, (\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 3 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2 \Leftrightarrow D = 0$$

Vậy $(\alpha): (P): 2x - y + 2z = 0$

SAI.

Câu 14: Cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 5 = 0$; $(Q): 4x - 2y + 4z + 1 - m = 0$ và điểm $M(2; 1; 5)$.

a) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8}{3}$.

b) Khi $m = 0$, khoảng cách M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9}{2}$.

c) Khi $m = 3$, khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.

d) Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8}{3}$.

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến mặt phẳng } (P): d(M; (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}.$$

ĐÚNG.

b) Với $m = 0$ thì khoảng cách M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9}{2}$.

Với $m = 0$ thì $(Q): 4x - 2y + 4z + 1 = 0$.

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến mặt phẳng } (Q): d(M; (Q)) = \frac{|4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{9}{2}.$$

ĐÚNG.

c) Với $m = 3$ thì khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.

Với $m = 3$ thì $(Q): 4x - 2y + 4z - 2 = 0 \Leftrightarrow (Q): 2x - y + 2z - 1 = 0$.

$$\text{Chọn } N(0; -5; 0) \in (P). \text{ Vì } (P) \parallel (Q) \text{ nên } d((P); (Q)) = d(N; (Q)) = \frac{|2 \cdot 0 - (-5) + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{4}{3}.$$

SAI.

d) Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.

$$\text{khoảng cách từ } M \text{ đến mặt phẳng } (Q) \text{ bằng } 1 \Leftrightarrow d(M; (Q)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|4.2 - 2.1 + 4.5 + 1 - m|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|27 - m|}{6} = 1 \Leftrightarrow |27 - m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 27 - m = 6 \\ 27 - m = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 21 \\ m = 33 \end{cases}.$$

Vậy tổng các giá trị của m bằng $21 + 33 = 54$.

SAI.

Câu 15: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z - 6 = 0$.

a) Véc tơ $\vec{n} = (1; 2; 2)$ là một vector pháp tuyến của (α) .

b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2y + 2z + 15 = 0$

c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y = 0$.

d) Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A, O, M thẳng hàng thì tọa độ $M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng.

Theo định nghĩa véc tơ $\vec{n} = (1; 2; 2)$ là một vector pháp tuyến của (α) .

b) Sai.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) nên:

$$\vec{n}_\beta = (1; 2; 2), \text{ do đó } (\beta) \text{ có phương trình: } x - 1 + 2(y - 2) + 2(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 15 = 0.$$

c) Đúng.

Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α)

$$\text{nên } \begin{cases} \vec{n}_\beta \perp \vec{OA} = (1; 2; 5) \\ \vec{n}_\beta \perp \vec{n} = (1; 2; 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\beta = [\vec{OA}, \vec{n}] = (-6; 3; 0) = -3(2; -1; 0), \text{ do đó } (\beta) \text{ có phương trình:}$$

$$2x - y = 0.$$

d) Đúng.

Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A, O, M thẳng hàng

$$\text{Do } M \in (\alpha): x = 6 - 2y - 2z \Rightarrow M(6 - 2b - 2c; b; c)$$

Vì A, O, M thẳng hàng nên

$$\overrightarrow{OM}(6-2b-2c; b; c) = k \cdot \overrightarrow{OA} = (k; 2k; 5k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2b-2c = k \\ b = 2k \\ c = 5k \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{5} \\ c = 2 \Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right) \\ k = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -2); B(2; 1; 2); C(3; -2; 1)$.

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

b) Phương trình mặt phẳng (P) là $13x + 5y - 2z + 27 = 0$.

c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: $1(x+1)x - 3(y+2) - 1(z-2) = 0$.

d) Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $E; F; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên trục $Ox; Oy; Oz$ có phương trình $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng.

$$\text{Vì } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -1; 4) \\ \overrightarrow{AC} = (2; -4; 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq k \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}_p = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (13; 5; -2).$$

b) Sai.

Phương trình mặt phẳng (P) là $13(x-1) + 5(y-2) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 13x + 5y - 2z - 27 = 0$.

c) Sai.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và nhận $\overrightarrow{BC} = (1; -3; -1)$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: $1(x-1)x - 3(y-2) - 1(z+2) = 0$.

d) Đúng.

Tọa độ ba điểm $E(1; 0; 0); F(0; 2; 0); K(0; 0; -2)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(1; 2; -2)$

lên trục, nên mặt phẳng (EFK) có phương trình $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; 3), B(3; 0; 2), C(0; -2; 1)$.

a) Các điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{a} = (1; 4; 5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) chứa điểm $M(1; 2; 2)$.

d) Mặt phẳng (P) đi qua A, B và cách C một khoảng lớn nhất có phương trình $3x + 2y + z - 11 = 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1), \overrightarrow{AC} = (-2; -3; -2)$.

Vì $\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-3}$ nên $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC}$.

Suy ra các điểm A, B, C không thẳng hàng.

Đúng.

b) Ta có một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-1; 4; -5)$.

Vì $\vec{n}$ không cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{a} = (1; 4; 5)$ không là vector pháp tuyến của (ABC) .

Sai.

c) Ta có mặt phẳng (ABC) qua điểm $A(2; 1; 3)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 4; -5)$ nên có phương trình $x - 4y + 5z - 13 = 0$.

Vì $1 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 - 13 = -10 \neq 0$ nên $M \notin (ABC)$.

Sai.

d) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên mặt phẳng (P) và đường thẳng AB .

Ta có $CH = d(C, (P)) \leq CK \Rightarrow d(C, (P))$ lớn nhất khi $H \equiv K$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (ABC)

Ta có $\vec{n}_P = [\vec{n}, \overrightarrow{AB}] = (-9; -6; -3)$

Suy ra $(P): 3x + 2y + z - 11 = 0$.

Đúng.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 2; 1), B(-2; 1; 3), C(2; -1; 1)$ và $D(0; 3; 1)$.

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $3x + y + 5z - 10 = 0$.

b) Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện.

c) Mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có một vector pháp tuyến là $\vec{a} = (4; -2; 7)$.

d) Có 2 mặt phẳng đi qua 2 điểm A, B sao cho khoảng cách từ C và D đến mặt phẳng đó bằng nhau. Cả 2 mặt phẳng này đều đi qua điểm $M(1; 2; 1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; -3; 0)$ suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (6; 2; 10)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $3x + y + 5z - 10 = 0$.

Đúng.

b) Ta có $3 \cdot 0 + 3 + 5 \cdot 1 - 10 = -2 \neq 0$ nên $D \notin (ABC)$.

Do đó bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện.

Đúng.

c) Ta có mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-8; -4; -14)$.

Vì $\vec{n}$ không cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{a} = (4; -2; 7)$ không là vectơ pháp tuyến của (P) .

Sai.

d) Trường hợp 1: (P) qua hai điểm A, B và song song với CD , khi đó:

(P) có vectơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-8; -4; -14)$ và $A \in (P) \Rightarrow (P): 4x + 2y + 7z - 15 = 0$.

Vì $4.1 + 2.2 + 7.1 - 15 = 0$ nên $M \in (P)$.

Trường hợp 2: (Q) qua hai điểm A, B cắt CD tại trung điểm I của đoạn CD .

Ta có $I(1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AI}(0; -1; 0)$, vectơ pháp tuyến của (Q) là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (2; 0; 3)$ nên phương trình $(Q): 2x + 3z - 5 = 0$.

Vì $2.1 + 3.1 - 5 = 0$ nên $M \in (Q)$.

Đúng.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z = 0$.

a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$ và đi qua A .

b) Phương trình mặt phẳng qua A và song song (P) là $2x + y - 2z + 6 = 0$.

c) Mặt phẳng qua gốc toạ độ O , điểm A và vuông góc (P) có phương trình là $2x - 2y + z = 0$.

d) Có tất cả hai mặt phẳng song song với (P) và có khoảng cách đến A bằng 2.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Thay toạ độ điểm $A(-1; 0; 2)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $-2 - 4 = 0$ (vô lý).

Vậy a) **SAI**.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song (P) , suy ra (α) có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -2)$.

Phương trình (α) là: $2(x+1) + 1(y-0) - 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 6 = 0$.

Vậy b) **ĐÚNG**.

c) Gọi (β) là mặt phẳng qua O, A và vuông góc (P) . Ta có $\vec{n}_p = (2; 1; -2), \overrightarrow{OA} = (-1; 0; 2)$.

(β) có VTPT là $\vec{n}_\beta = [\vec{n}_p, \overrightarrow{OA}] = (2; -2; 1)$.

Phương trình của (β) là: $2(x-0) - 2(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z = 0$.

Vậy c) **ĐÚNG**.

d) Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $2x + y - 2z + d = 0$.

Ta có $d(A, (Q)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2(-1) + 0 - 2.2 + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow |d - 6| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} d - 6 = 6 \\ d - 6 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 12(n) \\ d = 0(l) \end{cases}$.

Vậy có đúng một mặt phẳng thoả ycbt, suy ra d) **SAI**.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3)$

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (3; 3; 2)$.

- b) Mặt phẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là $x - y = 0$.
- c) Mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có phương trình là $x + y - 3z + 2 = 0$.
- d) Gọi $M(a; b; c) \in (Oyz)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất, khi đó $3(a + b) + c = 5$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Suy ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (3; 3; 2)$.

Vậy a) **ĐÚNG**.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua C và vuông góc với AB .

(α) có VTPT là $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0) = -2(1; -1; 0)$.

Phương trình của (α) là $1(x - 0) - 1(y - 0) + 0(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$.

Vậy b) **ĐÚNG**.

c) Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có VTPT của (β) là: $\vec{n}_\beta = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}] = (4; 4; -12) = 4(1; 1; -3)$.

Phương trình của (β) là: $1(x - 2) + 1(y - 0) - 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z - 2 = 0$.

Vậy c) **SAI**.

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có $G\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$.

Vì $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MG}|$, suy ra $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|_{\min} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}|_{\min}$.

Mà $M \in Oyz \Rightarrow M$ phải là hình chiếu của G lên $Oyz \Rightarrow M\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$.

$\Rightarrow 3(a + b) + c = 2 + 1 = 3$.

Vậy d) **SAI**.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): (4 - a)x - (a + 3)y + z + 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 3x - 4y + z + 3 = 0$.

- a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với nhau khi $a = 1$.
- b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) vuông góc với nhau khi $a = 2$.
- c) Không có giá trị nào của a để hai mặt phẳng trên trùng nhau.
- d) Mặt phẳng vuông góc với cả hai mặt phẳng trên có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; -7)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Khi $a = 1$, ta có $\vec{n}_P = (3; -4; 1)$ và $\vec{n}_Q = (3; -4; 1)$. Vì $\vec{n}_P = \vec{n}_Q$ và $1 \neq 0$ nên $(P) // (Q)$.

b) Khi $a = 2$, ta có $\vec{n}_P = (2; -5; 1)$ và $\vec{n}_Q = (3; -4; 1)$. Vì $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 2 \cdot 3 + (-5) \cdot (-4) + 1 \cdot 1 = 27 \neq 0$ nên (P) và (Q) không vuông góc với nhau.

- c) Hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau khi $\frac{4-a}{3} = \frac{-(a+3)}{-4} = \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$. Vì $1 \neq \frac{1}{3}$ nên không có giá trị nào của a để hai mặt phẳng trên trùng nhau.
- d) Ta có: $\vec{n}_P \cdot \vec{n} = (4-a) \cdot 1 + (a+3) \cdot 1 - 7 = 0$ và $\vec{n}_Q \cdot \vec{n} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 7 = 0$. Vậy $\vec{n} = (1; -1; -7)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 3; -2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 5 = 0$.

- a, Mặt phẳng (β) có phương trình $2x + y + z - 3 = 0$ đi qua điểm M và song song mặt phẳng (α) .
- b, Mặt phẳng (γ) có phương trình $x - 3y - z + 2024 = 0$ vuông góc với mặt phẳng (α) .
- c, Mặt phẳng (P) đi qua điểm M , song song trục Ox và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình là $y + z - 1 = 0$.
- d, Có hai mặt phẳng song song mặt phẳng (α) và cách điểm M một khoảng bằng $2\sqrt{6}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a, Sai

Mặt phẳng (β) song song mặt phẳng (α) có phương trình dạng: $2x + y - z + d = 0$ ($d \neq 5$)

Do mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(1; 3; -2)$ nên ta có: $2 + 3 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$

Vậy mặt phẳng (β) cần tìm là $2x + y - z - 7 = 0$

b, Đúng

Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -1)$

Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (γ) là $\vec{n}_\gamma = (1; -3; -1)$

Ta có $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\gamma = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) = 0$ nên $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\gamma$

Vậy mặt phẳng (γ) vuông góc với mặt phẳng (α) .

c, Đúng

Mặt phẳng (P) song song trục Ox và vuông góc với mặt phẳng (α) nên có cặp vector chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$ và $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -1)$.

Do đó mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = [\vec{i}, \vec{n}_\alpha] = (0; 1; 1)$

Mặt phẳng (P) qua điểm $M(1; 3; -2)$ và có vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (0; 1; 1)$ nên có phương trình là: $0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z+2) = 0 \Leftrightarrow y + z - 1 = 0$.

d, Sai

Gọi mặt phẳng song song mặt phẳng (α) và cách điểm M một khoảng bằng $2\sqrt{6}$ là mặt phẳng (Q) .

Phương trình mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (α) có dạng: $2x + y - z + e = 0$ ($e \neq 5$)

Mặt phẳng (Q) cách điểm M một khoảng bằng $2\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow d(M, mp(Q)) = 2\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 3 + 2 + e|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow |7 + e| = 12$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 + e = 12 \\ 7 + e = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = 5 \\ e = -19 \end{cases}$$

Với $e = 5$ loại

Với $e = -19$ nhận

Vậy chỉ có một mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): -2x + y + 4z - 3 = 0$

a, Mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) .

b, Mặt phẳng (R) có phương trình $14x + 8y + 5z - 2 = 0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

c, Mặt phẳng $(\alpha): 2x - 6y + 4z - 9 = 0$ song song mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$ và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 1.

d, Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = (8;4;3)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a, Sai

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q = (-2; 1; 4)$

Vì hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$ và $\vec{n}_Q = (-2; 1; 4)$ của hai mặt phẳng (P) và (Q) không cùng phương. Do đó mặt phẳng (P) không song song mặt phẳng (Q) .

b, Đúng

Mặt phẳng (R) cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có cặp vectơ chỉ phương là

$$\vec{n}_P = (1; -3; 2) \text{ và } \vec{n}_Q = (-2; 1; 4)$$

Do đó mặt phẳng (R) có một vectơ pháp tuyến là $[\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-14; -8; -5)$ hay chọn

$$\vec{n}_R = (14; 8; 5)$$

Vậy mặt phẳng (R) có phương trình $14x + 8y + 5z - 2 = 0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

c, Sai

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = (2; -6; 4)$

Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_\alpha = 2.\vec{n}_P \\ -9 \neq 2.(-1) \end{cases}$ nên mặt phẳng (α) song song mặt phẳng (P)

Lấy điểm $M(1; 0; 0)$ thuộc mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$.

$$\text{Lại có } d(M, mp(\alpha)) = \frac{|2.1 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

Nên mặt phẳng (α) cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng $\frac{\sqrt{14}}{4}$

d, Đúng

Ta có: $\vec{AB} = (1; -2; 0)$ và vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q = (-2; 1; 4)$

Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(2; -2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên có cặp vec tơ chỉ phương là $\vec{AB}$ và $\vec{n}_Q$. Do đó mặt phẳng (β) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = [\vec{n}_Q, \vec{AB}] = (8; 4; 3)$.

Câu 24: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; 1; 1)$ và hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$, $(Q): -x + 2y - 2z + 1 = 0$.

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) .

b) Khoảng cách $d(A, (Q)) = 2$.

c) Gọi điểm $B(x_0; y_0; z_0) \in (Q)$ sao cho khoảng cách AB ngắn nhất, khi đó ta có $x_0 + y_0 + z_0 = 43$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng

Ta có $\vec{n}_1(1; -2; 2)$ và $\vec{n}_2(-1; 2; -2)$ là các vec tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng. Rõ ràng chúng cùng phương nhau (vì $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$).

Mặt khác ta có $(-3) \neq -1.1$ là các hệ số tự do của phương trình tổng quát của 2 mặt phẳng tương ứng.

Từ đó ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Đúng

Thay tọa độ điểm A vào phương trình của (P) ta thấy thỏa mãn $3 - 2 + 2 - 3 = 0$, nên A thuộc (P) .

c) Sai

$$\text{Ta có: } d(A, (Q)) = \frac{|-1.3 + 2.1 - 2.1 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2}{3}.$$

d) Sai

Do $B(x_0; y_0; z_0) \in (Q)$ sao cho khoảng cách AB ngắn nhất nên B chính là hình chiếu vuông góc của A trên (Q) .

Gọi d là đường thẳng đi qua $A(3;1;1)$ và vuông góc với (Q) , ta có phương trình tham số của d là:

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Giao điểm B của d và (Q) có tham số t thỏa mãn:

$$-(3-t) + 2(1+2t) - 2(1-2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 9t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{9}. \text{ Khi đó ta được } B\left(\frac{25}{9}; \frac{13}{9}; \frac{5}{9}\right).$$

$$\text{Vậy } x_0 + y_0 + z_0 = \frac{25+13+5}{9} = \frac{43}{9}.$$

Câu 25: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 1 = 0$, $(Q): 2x - 2y + z - 5 = 0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(2;0;1)$.

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Khoảng cách $d(A, (Q)) = 4$.

c) Khoảng cách $d(P, (Q)) = 6$.

d) Cho biết điểm $C \in (P)$ và đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (P) góc 30° . Khi đó ta có khoảng cách $BC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) Đúng

Ta có $\vec{n}_1(2; -2; 1)$ và $\vec{n}_2(2; -2; 1)$ là các véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng. Rõ ràng chúng cùng phương nhau (vì $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$).

Mặt khác ta có $1 \neq -5$ là các hệ số tự do của phương trình tổng quát của 2 mặt phẳng tương ứng. Từ đó ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Sai

$$\text{Ta có: } d(A, (Q)) = \frac{|0 - 2 + 1 - 5|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2.$$

c) Sai

Ta thấy $A(0;1;1)$ thuộc (P) vì tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) : $2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 = 0$.

Vậy có $(P) \parallel (Q)$ và $A \in (P)$ nên $d(P, (Q)) = d(A, (Q)) = 2$.

d) Sai

Ta thấy $B(2;0;1)$ thuộc (Q) vì tọa độ điểm B thỏa mãn phương trình mặt phẳng (Q) : $2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 5 = 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P) , ta có $BH = d(B, (P)) = d(A, (Q)) = 2$.

Vì góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (P) bằng 30° nên suy ra góc $\widehat{BCH} = 30^\circ$.

Do $C \in (P)$ nên xét tam giác BHC vuông tại H có $BH = 2$, $\widehat{BCH} = 30^\circ$, đó đó ta có

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BC = \frac{BH}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{0,5} = 4.$$



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

- Câu 1:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;0;0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 1 = 0$ có dạng $-x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c - 3d$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC có dạng $x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c + d$.
- Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$ và 2 vector $\vec{a} = (1;-3;2)$, $\vec{b} = (-1;-1;2)$. Một mặt phẳng (Q) chứa điểm A và nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương có phương trình là $ax + by + cz - 3 = 0$. Tính $a + b + c$.
- Câu 4:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;-2), B(-3;1;1), C(5;5;-5)$ có dạng $ax + by + cz + 5 = 0$, khi đó giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax + y - z + d = 0$. Hãy tính $a + d$.
- Câu 6:** Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z - 7 = 0$, Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) có dạng $\frac{a}{b}$ tối giản; $a; b \in \mathbb{Z}$. Tính $T = 2a - b$?
- Câu 7:** Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z + 2 = 0$. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cách A một khoảng 1 có dạng $(\alpha): x - by + cz + d = 0$. Khi đó $S = 3b - c + d$?
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $S = 2a - b$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng (P) qua $A(2;1;-3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x - y + 2z - 1 = 0$ có dạng $x - y + az + b = 0$ Tính giá trị biểu thức $S = a - b$.
- Câu 10:** Trong gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình dạng $x + ay + bz + c = 0$. Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c$.

- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 27 = 0$ qua hai điểm $A(3; 2; 1)$ và $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 0; 0); B(0; 0; 2)$ và cắt tia Oy tại điểm C sao cho thể tích khối chóp $OABC$ bằng 2. Biết điểm $S(-1; 6; m)$ thuộc (P) , thì m bằng bao nhiêu?
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz + 2 = 0$. Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 0), B(3; 4; -2)$ và $(P): x - y + z - 4 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) , có dạng $(Q): ax + by + cz + 2 = 0$. Tính $T = a + b + c$.
- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 1; 0), M(3; 0; 1)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC) , (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng -7 và cách điểm $A(2, -3, 4)$ một khoảng bằng 3. Tính tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) (biết hoành độ của vector pháp tuyến của (P) bằng 1).
- Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m; 0; 0), N(0; n; 0), P(0; 0; p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3, m, n, p$ là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) . (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Câu 18:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất.
- Câu 19:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6), B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.
- Câu 20:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4), B(-3; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng
- Câu 21:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?
- Câu 22:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3), B(3; 4; 4)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .
- Câu 23:** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua hai điểm $A(1; 2; 0), B(4; 1; 2)$ và cách đều hai điểm $C(-2; 1; -1), D(0; -3; 1)$ có dạng $ax + by + cz + 1 = 0 (a < 0)$. Tính $P = a + b + c$.

- Câu 24:** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1; -2; -2)$, vuông góc với mặt phẳng (Oxz) đồng thời khoảng cách từ điểm $B(3; 1; -3)$ đến (P) bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x + by + cz + d = 0$ ($d \neq 0$). Tính $P = 3b + 2c - d$.
- Câu 25:** Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; 3)$ là trực tâm của ΔABC với A, B, C là ba điểm lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz (khác gốc tọa độ). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có dạng $mx + ny + pz - 14 = 0$, ($m, n, p \in \mathbb{Z}$). Khi đó $m + n + p$ bằng
- Câu 26:** Trong hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, biết $b, c > 0$, phương trình mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Tính $M = c + b$ biết $(ABC) \perp (P)$, $d[O; (ABC)] = \frac{1}{3}$.
- Câu 27:** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 5 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm A, B , đồng thời vuông góc (P) là $2x - ay - bz + c = 0$. Giá trị của biểu thức $a + 2b + 3c$ bằng
- Câu 28:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + by + cz + d = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + 2y + 3z + 4 = 0$ và chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + 3y + z - 7 = 0$, $(Q): x - y + z + 1 = 0$. Khi đó d bằng
- Câu 29:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 4)$, $B(6; -3; 0)$ và mặt phẳng (P) sao cho $d(B; (P)) = 2d(A; (P))$, (P) cắt AB tại $I(a; b; c)$ nằm trên đoạn thẳng AB . Tính $S = a + b + c$.
- Câu 30:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Mặt phẳng $(P): x + Ay + Bz + C = 0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tính tổng $A + B + C$.
- Câu 31:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 2)$ và $B(-2; 1; -3)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 1$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;0;0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 1 = 0$ có dạng $-x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c - 3d$.

Lời giải

Trả lời: -2,5

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Do $(P) // (\alpha) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_P = \vec{n}_\alpha = (2; -1; 0)$.

Và (P) đi qua điểm $M \Rightarrow (P): 2 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y+0) + 0 \cdot (z+0) = 0$

$$\Rightarrow (P): 2x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow -x + \frac{1}{2}y + 1 = 0.$$

$$\text{Vậy } b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 1 \Rightarrow b + c - 3d = -2,5.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC có dạng $x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c + d$.

Lời giải

Trả lời: -9

Mặt phẳng vuông góc với BC có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1; -2; -5)$.

Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC là $1(x-2) - 2(y-1) - 5(z+1) = 0$ hay $x - 2y - 5z - 5 = 0$.

$$\text{Vậy } b = -2, c = -2, d = -5 \Rightarrow b + c + d = -9.$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$ và 2 vectơ $\vec{a} = (1; -3; 2)$, $\vec{b} = (-1; -1; 2)$. Một mặt phẳng (Q) chứa điểm A và nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương có phương trình là $ax + by + cz - 3 = 0$. Tính $a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{b}, \vec{a}] = (4; 4; 4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là

$$4(x-2)+4(y-0)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow 4x-8+4y+4z-4=0$$

$$\Leftrightarrow 4x+4y+4z-12=0 \Leftrightarrow x+y+z-3=0$$

Suy ra $a=b=c=1$. Vậy $a+b+c=3$.

Câu 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;-2), B(-3;1;1), C(5;5;-5)$ có dạng $ax+by+cz+5=0$, khi đó giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 7

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB}=(-4;1;3), \overrightarrow{AC}=(4;5;-3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]=(-18;0;-24).$$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có một vector pháp tuyến

$$\vec{n}=-\frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]= (3;0;4) \text{ là: } 3(x-1)+4(z+2)=0 \Leftrightarrow 3x+4z+5=0.$$

Suy ra $a=3, b=0, c=4$.

Vậy $a+b+c=7$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy tính $a+d$.

Lời giải

Trả lời: 2

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB}=(2;-3;-1); \overrightarrow{AC}=(-2;0;-2).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\right)=(6;6;-6).$$

Chọn $\vec{n}=\frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]= (1;1;-1)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Ta có pt $mp(ABC)$ là:

$$x+y-1-z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z+1=0. \text{ Vậy } a+d=1+1=2$$

Câu 6: Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z-7=0$, Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) có dạng $\frac{a}{b}$ tối giản; $a; b \in \mathbb{Z}$. Tính $T=2a-b$?

Lời giải

Trả lời: 13

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) :

$$d(M;(\alpha))=\frac{|2.1-2.2+(-1)-7|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{8}{3}=\frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=3 \end{cases}.$$

Vậy $T=2a-b=13$.

Câu 7: Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z+2=0$. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cách A một khoảng 1 có dạng $(\beta): x-by+cz+d=0$. Khi đó $S=3b-c+d$?

Lời giải

Trả lời: 12

Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) nên mặt phẳng (β) có dạng:
 $x - 2y + 2z + d = 0; (d \neq 2).$

Khoảng cách từ M đến (β) bằng 1 $\Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 2(-1) + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow |d - 5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 8 \\ d = 2 \end{cases} (l).$

Do đó: $(\beta): x - 2y + 2z + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \\ d = 8 \end{cases}.$

Vậy $S = 3 \cdot 2 - 2 + 8 = 12$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(a; b; 1)$ thuộc mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $S = 2a - b$.

Lời giải

Trả lời: 2

Vì $M \in (P)$ nên $2a - b + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2a - b = 2$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng (P) qua $A(2; 1; -3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x - y + 2z - 1 = 0$ có dạng $x - y + az + b = 0$ Tính giá trị biểu thức $S = a - b$.

Lời giải

Trả lời: -3

Vì $(P) // (Q): x - y + 2z - 1 = 0$, nên VTPT của $(Q): \vec{n}_{(Q)} = (1; -1; 2)$ cũng là VTPT của (P) .

Ta có mặt phẳng (P) qua $A(2; 1; -3)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 2)$

Nên phương trình mặt phẳng (P) là: $1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z + 3) = 0$ hay $x - y + 2z + 5 = 0$

Suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a - b = 2 - 5 = -3$.

Câu 10: Trong gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $B(1; 0; 4)$, $C(0; -2; -1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình dạng $x + ay + bz + c = 0$. Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; -2; -5)$.

Mặt phẳng qua $A(2; -1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng BC nhận vector $\overrightarrow{BC} = (-1; -2; -5)$ là một vector pháp tuyến nên có phương trình là $-(x - 2) - 2(y + 1) - 5(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow -x - 2y - 5z + 5 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -5 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 2$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 27 = 0$ qua hai điểm $A(3; 2; 1)$ và $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: -12

Cách 1:

$$\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 1), \vec{n}_{(Q)} = (3; 1; 1).$$

(P) qua hai điểm $A(3; 2; 1), B(-3; 5; 2)$ và vuông góc mặt phẳng (Q) , nên (P) có cặp vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 1), \vec{n}_{(Q)} = (3; 1; 1)$.

Suy ra (P) có VTPT $\vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(Q)}] = (2; 9; -15)$, và qua điểm $A(3; 2; 1)$.

$$\text{Phương trình } (P): 2x + 9y - 15z - 4 = 0 \Leftrightarrow 6x + 27y - 45z - 12 = 0.$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c = -12.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } \vec{n}_{(P)} = (a; b; c), \vec{n}_{(Q)} = (3; 1; 1).$$

Mặt phẳng (P) qua hai điểm $A(3; 2; 1)$ và $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q)

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 27 \\ -3a + 5b + 2c = 27 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 27 \\ c = -45 \end{cases}. \text{ Vậy } S = a + b + c = -12.$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 0; 0); B(0; 0; 2)$ và cắt tia Oy tại điểm C sao cho thể tích khối chóp $OABC$ bằng 2. Biết điểm $S(-1; 6; m)$ thuộc (P) , thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $C(0; y; 0) \in Oy$ với $y > 0$;

Ta có: $OA = 1, OB = 2, OC = y$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc;

$$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{3} y.$$

$$\text{Giả thiết } \Rightarrow \frac{1}{3} y = 2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow C(0; 6; 0).$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{6} + \frac{z}{2} = 1.$$

$$\text{Điểm } S(-1; 6; m) \text{ thuộc } (P) \Leftrightarrow \frac{-1}{1} + \frac{6}{6} + \frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz + 2 = 0$. Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.

Lời giải

Trả lời: 2

Vec-tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; 2; -1)$; $\vec{n}_{(\beta)} = (2; 4; -m)$

Để (α) và (β) song song với nhau thì: $\vec{n}_{(\alpha)} = k \cdot \vec{n}_{(\beta)} (k \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{m}{-1} \Rightarrow m = 2$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 0)$, $B(3; 4; -2)$ và $(P): x - y + z - 4 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) , có dạng $(Q): ax + by + cz + 2 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -2) = 2(1; 1; -1)$.

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -1; 1)$.

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_p] = (0; -4; -4) = -4(0; 1; 1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): y + z - 2 = 0 \Leftrightarrow -y - z + 2 = 0 \Rightarrow T = a + b + c = -2$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 1; 0), M(3; 0; 1)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC) , (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 1,73

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1); \overrightarrow{AC} = (-2; 0; -2)$.

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6; 6; -6)$.

Chọn $\vec{n} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; -1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + y - 1 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0$.

$d(M, (ABC)) = \frac{|3 + 0 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3} \approx 1,73$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng -7 và cách điểm $A(2, -3, 4)$ một khoảng bằng 3. Tính tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) (biết hoành độ của vector pháp tuyến của (P) bằng 1).

Lời giải

Trả lời: 175

$(P) // (Q): 2x - 4y + 4z + 3 = 0 \Rightarrow (P): 2x - 4y + 4z + D = 0 (D \neq 3)$

$d(A, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|4 + 12 + 16 + D|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{|D + 32|}{6} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -14 \\ D = -50 \end{cases}$

$\Rightarrow (P): 2x - 4y + 4z - 14 = 0; 2x - 4y + 4z - 50 = 0$.

Vì hoành độ của vectơ pháp tuyến của (P) bằng 1 nên phương trình của các mặt phẳng cần tìm là: $x - 2y + 2z - 7 = 0; x - 2y + 2z - 25 = 0$.

Khi đó tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) là $(-7) \cdot (-25) = 175$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m; 0; 0), N(0; n; 0), P(0; 0; p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3, m, n, p$ là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) . (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,58

Phương trình mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$.

Theo bất đẳng thức Bunhia-Copsky ta có:

$$(m^2 + n^2 + p^2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq \frac{9}{m^2 + n^2 + p^2} = 3$$

Khi đó: $d(O; (P)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu bằng xảy ra khi $m = n = p = 1$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến (MNP) bằng $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $d(A, (P)) = \frac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2 + 1 + m^2}} = \sqrt{\frac{(3m-1)^2}{2(m^2 - m + 1)}}$.

Xét $f(m) = \frac{(3m-1)^2}{2(m^2 - m + 1)} \Rightarrow f'(m) = \frac{(5-m)(3m-1)}{2(m^2 - m + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = 5 \end{cases}$.

m	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		5	$+\infty$	
$f'(m)$		-	0	+	0	-
$f(m)$	$\frac{9}{2}$			$\frac{14}{3}$		$\frac{9}{2}$

Vậy $\max d(A, (P)) = \sqrt{\frac{14}{3}}$ khi $m = 5$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

Lời giải

Trả lời: 3

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 5$

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b + 6c - 2 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2c \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Bán kính của đường tròn giao tuyến là } r = \sqrt{R^2 - [d(I; (P))]^2} = \sqrt{25 - [d(I; (P))]^2}$$

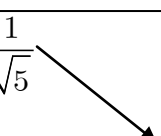
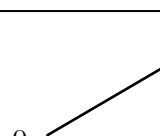
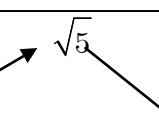
Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I; (P))$ lớn nhất

$$\text{Ta có } d(I, (P)) = \frac{|a + 2b + 3c - 2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 - 2c + 4 + 3c - 2|}{\sqrt{(2 - 2c)^2 + 2^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{(c + 4)^2}{5c^2 - 8c + 8}}$$

$$\text{Xét } f(c) = \sqrt{\frac{(c + 4)^2}{5c^2 - 8c + 8}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-48c^2 - 144c + 192}{(5c^2 - 8c + 8)^2 \sqrt{\frac{(c + 4)^2}{5c^2 - 8c + 8}}}$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{1}{\sqrt{5}}$						
			0		$\sqrt{5}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $d(I; (P))$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c = 1 \Rightarrow a = 0, b = 2 \Rightarrow a + b + c = 3$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4), B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

Lời giải

Trả lời: 135

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ suy ra $I(-1; 1; 1)$

$$IA^2 = 27; IB^2 = 12; d(I, (P)) = 3$$

$$2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 5\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 = 5MI^2 + 90$$

Mà $2MA^2 + 3MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

Suy ra $MI \geq d(I, (P)) = 3$

Vậy $2MA^2 + 3MB^2 \geq 5.9 + 90 = 135$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

Lời giải

Trả lời: 3

Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo bài mặt phẳng (P) đi qua $M(1;1;2)$ và $OA = OB = OC$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 & (1) \\ |a| = |b| = |c| & (2) \end{cases} \text{ Ta có: } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = c = -b \\ b = c = -a \end{cases}$$

- Với $a = b = c$ thay vào (1) được $a = b = c = 4$

- Với $a = b = -c$ thay vào (1) được $0 = 1$ (loại).

- Với $a = c = -b$ thay vào (1) được $a = c = -b = 2$.

- Với $b = c = -a$ thay vào (1) được $b = c = -a = 2$.

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn bài toán là:

$$(P_1): \frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1; (P_2): \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1; (P_3): \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3), B(3;4;4)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải

Trả lời: 1

$$\text{Ta có } \overline{AB} = (2;2;1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \quad (1).$$

$$\text{Khoảng cách từ } A \text{ đến mặt phẳng } (P): d(A, (P)) = \frac{|2.1 + 2 + m.3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \quad (2).$$

$$\text{Để } AB = d(A, (P)) \Rightarrow 3 = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \Leftrightarrow 9(5 + m^2) = 9(m + 1)^2 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua hai điểm $A(1;2;0), B(4;1;2)$ và cách đều hai điểm $C(-2;1;-1), D(0;-3;1)$ có dạng $ax + by + cz + 1 = 0$ ($a < 0$). Tính $P = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Mp (α) cách đều hai điểm C, D khi và chỉ khi $CD // (\alpha)$ hoặc (α) đi qua trung điểm I của CD .

Trường hợp 1: $(\alpha) // CD$.

$$\overrightarrow{AB} = (3; -1; 2), \overrightarrow{CD} = (2; -4; 2).$$

Vì mặt phẳng (α) qua hai điểm A, B và song song với CD nên (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (6; -2; -10)$.

Mà mp (α) qua điểm $A(1; 2; 0)$ nên phương trình của mặt phẳng (α) là:
 $6(x-1) - 2(y-2) - 10z = 0 \Leftrightarrow 6x - 2y - 10z - 2 = 0 \Leftrightarrow -3x + y + 5z + 1 = 0$ (thỏa mãn).

$$\text{Vậy } P = a + b + c = -3 + 1 + 5 = 3.$$

Trường hợp 2: (α) đi qua trung điểm $I(-1; -1; 0)$ của CD .

$$\overrightarrow{AB} = (3; -1; 2), \overrightarrow{AI} = (-2; -3; 0).$$

Mặt phẳng (α) qua điểm $A(1; 2; 0)$ và có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (6; -4; -11)$.

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (α) là: $6(x-1) - 4(y-2) - 11z = 0 \Leftrightarrow 6x - 4y - 11z + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow 3x - 2y - \frac{11}{2}z + 1 = 0$ (loại vì $a > 0$).

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1; -2; -2)$, vuông góc với mặt phẳng (Oxz) đồng thời khoảng cách từ điểm $B(3; 1; -3)$ đến (P) bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x + by + cz + d = 0$ ($d \neq 0$). Tính $P = 3b + 2c - d$.

Lời giải

Trả lời: 46

Giả sử mặt phẳng cần lập có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Oxz) : $y = 0$ nên $\overrightarrow{n_{(P)}} \cdot \overrightarrow{n_{(Oxz)}} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

(P) đi qua điểm $A(1; -2; -2) \Rightarrow (P): a(x-1) + c(z+2) = 0 \Leftrightarrow ax + cz - a + 2c = 0$.

$$d(B; (P)) = \frac{|2a - c|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow 5(2a - c)^2 = 9(a^2 + c^2) \Leftrightarrow 11a^2 - 20ac - 4c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ 11a = -2c \end{cases}$$

Với $a = 2c$ chọn $c = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow (P): 2x + z = 0$ (loại).

Với $11a = -2c$ chọn $a = 2 \Rightarrow c = -11 \Rightarrow (P): 2x - 11z - 24 = 0$ (thỏa mãn).

$$\text{Vậy } P = 3b - 2c - d = 0 - 2(-11) - (-24) = 46.$$

Câu 25: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; 3)$ là trực tâm của ΔABC với A, B, C là ba điểm lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz (khác gốc tọa độ). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có dạng $mx + ny + pz - 14 = 0$, ($m, n, p \in \mathbb{Z}$). Khi đó $m + n + p$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6

Giả sử $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}(1-a; 2; 3); \overrightarrow{BH}(1; 2-b; 3); \overrightarrow{BC}(0; -b; c); \overrightarrow{AC}(-a; 0; c)$$

Do H là trực tâm tam giác ABC nên ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì $H \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Do đó, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{2b}{3} \\ \frac{1}{2b} + \frac{2}{b} + \frac{9}{2b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 7 \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{14} + \frac{y}{7} + \frac{3z}{14} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Vậy $m + n + p = 6$.

Câu 26: Trong hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, biết $b, c > 0$, phương trình mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Tính $M = c + b$ biết $(ABC) \perp (P)$, $d[O; (ABC)] = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Trả lời: 1

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có:

$$(ABC) \perp (P) \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c.$$

$$d[O; (ABC)] = \frac{|-1|}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9 = 1 + 2\left(\frac{1}{b}\right)^2, (b = c).$$

$$\Leftrightarrow b = \pm \frac{1}{2}, \text{ do } b, c > 0 \text{ nên } b = c = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } M = c + b = 1.$$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 2; 0), B(1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 5 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm A, B , đồng thời vuông góc (P) là $2x - ay - bz + c = 0$. Giá trị của biểu thức $a + 2b + 3c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 24

Gọi $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B , đồng thời vuông góc (P) . Khi đó, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ và $\vec{n} \perp \vec{n}_p$ với $\overrightarrow{AB}(2; -1; 3)$ và $\vec{n}_p(1; -2; 3)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Suy ra, chọn $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_p] = (3; -3; -3)$. Do đó, $\vec{n}_Q(1; -1; -1)$ cũng là vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) . Mà mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(-1; 2; 0)$ nên có phương trình là $(x+1)-(y-2)-z=0 \Leftrightarrow x-y-z+3=0 \Leftrightarrow 2x-2y-2z+6=0$.

Suy ra $a=2, b=2, c=6$ nên $a+2b+3c=24$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+by+cz+d=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x+2y+3z+4=0$ và chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x+3y+z-7=0$, $(Q): x-y+z+1=0$. Khi đó d bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có VTPT của $(\beta), (P), (Q)$ lần lượt là $\vec{n}_1(1; 2; 3), \vec{n}_2(1; 3; 1), \vec{n}_3(1; -1; 1)$.

Khi đó $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_1, [\vec{n}_2, \vec{n}_3]] = (-8; 16; -8) = -8(1; -2; 1)$.

Gọi $A(x; y; z) \in d$ là giao tuyến của (P) và (Q) , khi đó tọa độ điểm A thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x+3y+z-7=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$$
. Cho $x=0$ ta có $\begin{cases} 3y+z-7=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$, khi đó $A(0; 2; 1)$

Do (α) chứa giao tuyến của (P) và (Q) nên (α) đi qua $A(0; 2; 1)$.

Phương trình $(\alpha): x-2(y-2)+z-1=0 \Leftrightarrow x-2y+z+3=0$. Vậy $d=3$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 4)$, $B(6; -3; 0)$ và mặt phẳng (P) sao cho $d(B; (P)) = 2d(A; (P))$, (P) cắt AB tại $I(a; b; c)$ nằm trên đoạn thẳng AB . Tính $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 7

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên mặt phẳng (P)

Suy ra $BK = d(B; (P)), AH = d(A; (P))$

Do $AH \perp (P); BK \perp (P)$ nên $AH \parallel BK$

Suy ra A, H, K, B đồng phẳng.

Ta có $\triangle IKB \sim \triangle IHA$ (góc – góc)

Suy ra $\frac{BI}{AI} = \frac{BK}{AH} = \frac{d(B; (P))}{d(A; (P))} = 2$

$\Rightarrow BI = 2AI$

Mà I thuộc đoạn AB nên $\overrightarrow{BI} = -2\overrightarrow{AI}$

Ta có $\overrightarrow{BI}(a-6; b+3; c), \overrightarrow{AI}(a-2; b-3; c-4)$

$$\overrightarrow{BI} = -2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6 = -2(a-2) \\ b+3 = -2(b-3) \\ c = -2(c-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{3} \\ b = 1 \\ c = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 7.$$

Vậy $S = 7$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng $(P): x + Ay + Bz + C = 0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tính tổng $A + B + C$.

Lời giải

Trả lời: 2

Vì (P) chứa trục Oz nên luôn có $d(M; (P)) \leq d(M; Oz)$.

Suy ra $d(M; (P))$ đạt giá trị lớn nhất bằng $d(M; Oz) = MH$, với H là hình chiếu của M trên trục Oz .

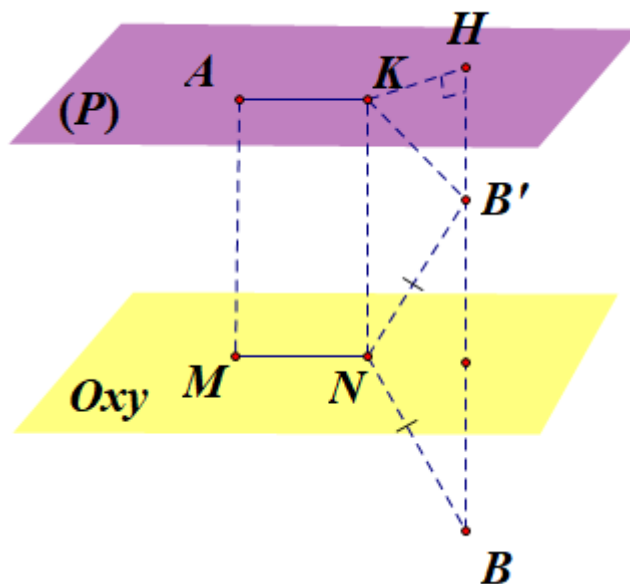
Ta có $H(0;0;3)$. Vậy (P) đi qua $H(0;0;3)$, có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MH}(-1;-2;0)$.

$$(P): -x - 2y = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow A = 2; B = C = 0 \Rightarrow A + B + C = 2$$

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(-2;1;-3)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 1$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6,08



Ta thấy A, B nằm khác phía đối với mặt phẳng (Oxy)

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-3;2)$ và song song với (Oxy) nên $(P): z = 2$

Gọi H là hình chiếu của B lên $(P) \Rightarrow H(-2;1;2)$

Gọi K thuộc (P) là điểm sao cho $AMNK$ là hình bình hành

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua $(Oxy) \Rightarrow B'(-2;1;3)$

Ta có: $|AM - BN| = |AM - B'N| = |KN - B'N| \leq KB' \quad (1)$

Mà $KB' = \sqrt{B'H^2 + HK^2} \leq \sqrt{B'H^2 + (HA + AK)^2} \quad (2)$

Ta có: $B'H = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1,$

$HA = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5,$

$AK = MN = 1$ (vì $AMNK$ là hình bình hành)

Theo (1) và (2) ta có: $|AM - BN| \leq KB' \leq \sqrt{1^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} \approx 6,08.$

Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ là $\sqrt{37} \approx 6,08.$



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



LÝ THUYẾT.

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

1. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng.

Véc-tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .

Chú ý.

Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một véc-tơ chỉ phương.

Nếu $\vec{u}$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của Δ .

2. Phương trình tham số của đường thẳng.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số, $t \in \mathbb{R}$).

Chú ý.

o Với các số a, b, c không đồng thời bằng 0, hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ xác định

một đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

o Từ phương trình tham số của đường thẳng, mỗi giá trị của tham số tương ứng với một điểm thuộc đường thẳng đó và ngược lại.

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ với a, b, c là các số khác 0. Hệ phương trình

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

4. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

Trong không $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1; z_1)$ và $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Đường thẳng A_1A_2 có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Đường thẳng A_1A_2 có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Trong trường hợp $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ thì đường thẳng A_1A_2 có phương trình chính tắc là

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2)$ và tương ứng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1 \in \Delta_2$.

$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1 \in \Delta_2$.

$$\Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \perp [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 0. \end{cases}$$

Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq 0$.

Chú ý.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ và có phương trình tham số

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \\ z = z_1 + c_1t \end{cases} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2s \\ y = y_2 + b_2s \\ z = z_2 + c_2s \end{cases}$$

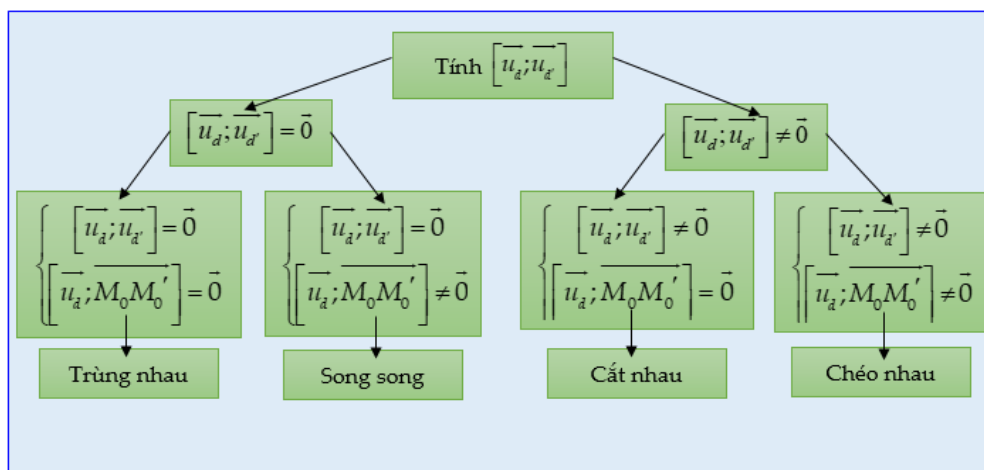
Xét hệ phương trình hai ẩn t, s :
$$\begin{cases} x_1 + a_1t = x_2 + a_2s \\ y_1 + b_1t = y_2 + b_2s \\ z_1 + c_1t = z_2 + c_2s \end{cases} (*)$$
. Khi đó

$\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.

$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.

Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.

Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương và hệ $(*)$ vô nghiệm.



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

1. Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vectơ $\vec{m} = k \cdot \vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

2. Phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ (hệ số trước t).

3. Phương trình chính tắc $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ (hệ số ở mẫu).

4. Nhận xét:

- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước tham số t .
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 + 8t \\ y = -6 + 11t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Một vectơ chỉ phương của d là

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$ có một vectơ chỉ phương là

Câu 4: Trong không gian cho hệ trục $Oxyz$, đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{-z-1}{4}$. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là:

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) là

- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 3 = 0$. Vector nào sau đây là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, gọi đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 3y + z = 0$; $(\beta): x + y - z + 4 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ ?
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 3 = 0$ và $(Q): x + y - 1 = 0$. Giao tuyến của (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y + z + 1 = 0$ và $(\beta): x + 2y + 3z + 4 = 0$. Một vectơ chỉ phương của Δ có tọa độ là
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'(\sqrt{3}; -1; 1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA' = 1$ (C không trùng với O). Biết vector $\vec{u} = (a; b; 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T = a^2 + b^2$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 2)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương có tọa độ là

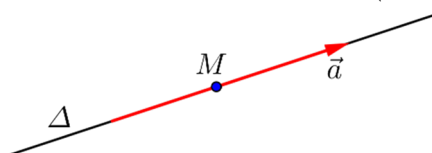
DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại

Qua M , có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a; b; c)$



Phương pháp

$$\gg \text{Phương trình } \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ nếu } \{a; b; c\} \neq 0.$$

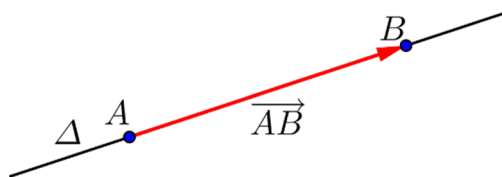
Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại

Qua hai điểm A và B .



Phương pháp

Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua.

Nhận $\vec{AB}$ làm VTCP $\rightarrow \vec{u} = \vec{AB}$.

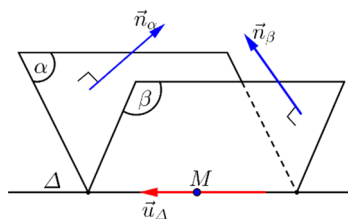
Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại

Giao tuyến của hai mặt phẳng
 $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và
 $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$



Phương pháp

Cho 1 trong 3 ẩn $x; y; z = 0$ để tìm 2 ẩn còn lại

$$x = 0 \longrightarrow \begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow M(0; ?; ?)$$

Vecto chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta]$.

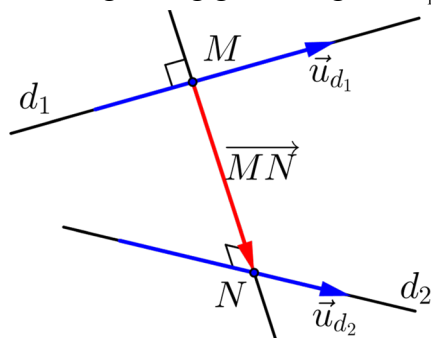
Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại

Là đường vuông góc chung của d_1 và d_2



Phương pháp

Gọi $\begin{cases} M \in d_1 \\ N \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} (?)$ (tọa độ theo $t; k$).

MN là đường vuông góc chung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ? \\ k = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(?) \\ N(?) \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} qua \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}$

Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3; -1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 5; -7)$ là

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3; -1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 5; -7)$ là

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; 3; -2)$ và nhận vectơ $\vec{u} = (1; -1; 5)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và nhận vectơ $\vec{u} = (2; 4; -3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(-3; -1; 2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 3; -2)$ là

- Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$ phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;3)$ là
- Câu 18:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;1)$, $C(0;2;3)$. Phương trình đường thẳng d đi qua A và song song với đường thẳng BC là
- Câu 19:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;-3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là
- Câu 20:** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x - 2y + z + 1 = 0$.
- Câu 21:** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1;3)$ và song song với đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1}$ có phương trình là
- Câu 22:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 2z - 1 = 0$. Đường thẳng Δ qua M và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình là
- Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(-3;4;1)$ vuông góc với d và nằm trong (P) là
- Câu 24:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 1 = 0$, $(Q): 2x - y + 2z - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) là
- Câu 25:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;1)$, $B(-1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc với hai đường thẳng AB và d có phương trình là
- Câu 26:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-4;-2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M , cắt trục Oy và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là
- Câu 27:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;1;2)$. Đường thẳng (Δ) đi qua M , vuông góc và cắt trục Ox có phương trình là.
- Câu 28:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;1)$ và hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình $x - 3z + 1 = 0$, $2y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và song song với mặt phẳng $(P), (Q)$ có phương trình là
- Câu 29:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$, $(d_2): \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$. Đường

vuông góc chung của hai đường thẳng đã cho có phương trình là

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -2x + 2y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y - 3z - 3 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình là

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 . Đường thẳng Δ có phương trình là

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$, $d': \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) , vuông góc với d và cắt d' có phương trình là

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;1), B(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 1 = 0$. Đường thẳng d đi qua điểm A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1;a;b)$. Khi đó $a + 2b$ bằng.

DẠNG 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \text{ và } M_0(x_0; y_0; z_0) \in d;$$

$$d': \begin{cases} x = x'_0 + a'_1 t' \\ y = y'_0 + a'_2 t' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = z'_0 + a'_3 t' \end{cases} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3).$$

Khi đó:

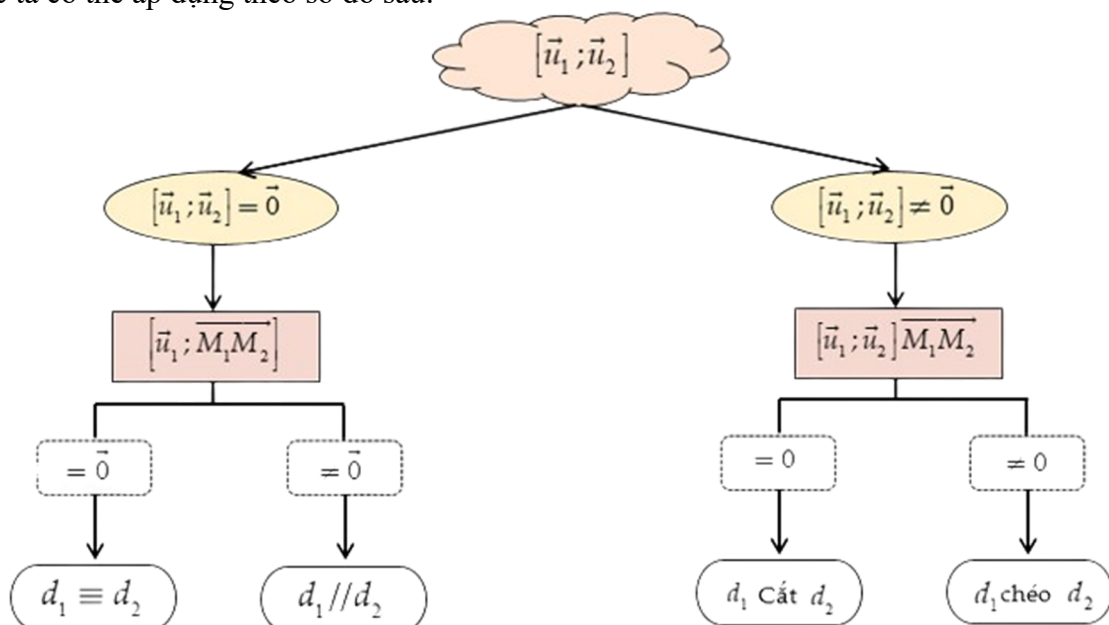
» $d // d' \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương và $M_0 \notin d'$.

» d trùng $d' \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương và $M_0 \in d'$

» $d \cap d' \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn t, t' sau:
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$$
 có đúng một nghiệm.

» d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương và
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$$
 vô nghiệm.

Hoặc ta có thể áp dụng theo sơ đồ sau:



Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và $d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

b) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d': \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}$

c) $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ và $d': \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$

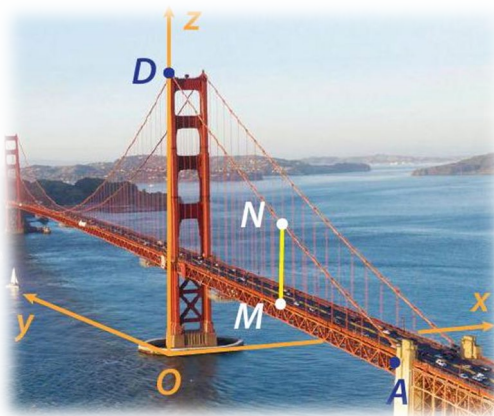
Câu 40: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2, 5; 15)$ và $(21; 27, 5; 10)$



a) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

b) Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Câu 41: Cầu Cổng Vàng (*The Golden Gate Bridge*) ở Mỹ. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là bộ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz , trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227m, điểm A cách mặt nước 75m và cách trục Oz 343m.



(nguồn ảnh: <https://www.goldengate.org/assets/1/6/ggb-exhibit-chapter-statistics.pdf>).

Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75m và MN song song với cột trụ.

a) Tính độ dài MN , biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230m.

b) Người ta có thể dùng đoạn dây dài 100m để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



LÝ THUYẾT.

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

1. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng.

Véc-tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .

Chú ý.

Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một véc-tơ chỉ phương.

Nếu $\vec{u}$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của Δ .

2. Phương trình tham số của đường thẳng.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số, $t \in \mathbb{R}$).

Chú ý.

o Với các số a, b, c không đồng thời bằng 0, hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ xác định

một đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

o Từ phương trình tham số của đường thẳng, mỗi giá trị của tham số tương ứng với một điểm thuộc đường thẳng đó và ngược lại.

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ với a, b, c là các số khác 0. Hệ phương trình

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

4. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1; z_1)$ và $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Đường thẳng A_1A_2 có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Đường thẳng A_1A_2 có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Trong trường hợp $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ thì đường thẳng A_1A_2 có phương trình chính tắc là

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2)$ và tương ứng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó

$\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1 \notin \Delta_2$.

$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1 \in \Delta_2$.

Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \perp [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 0. \end{cases}$

Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq 0$.

Chú ý.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ và có phương trình tham số

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \\ z = z_1 + c_1t \end{cases} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2s \\ y = y_2 + b_2s \\ z = z_2 + c_2s \end{cases}$$

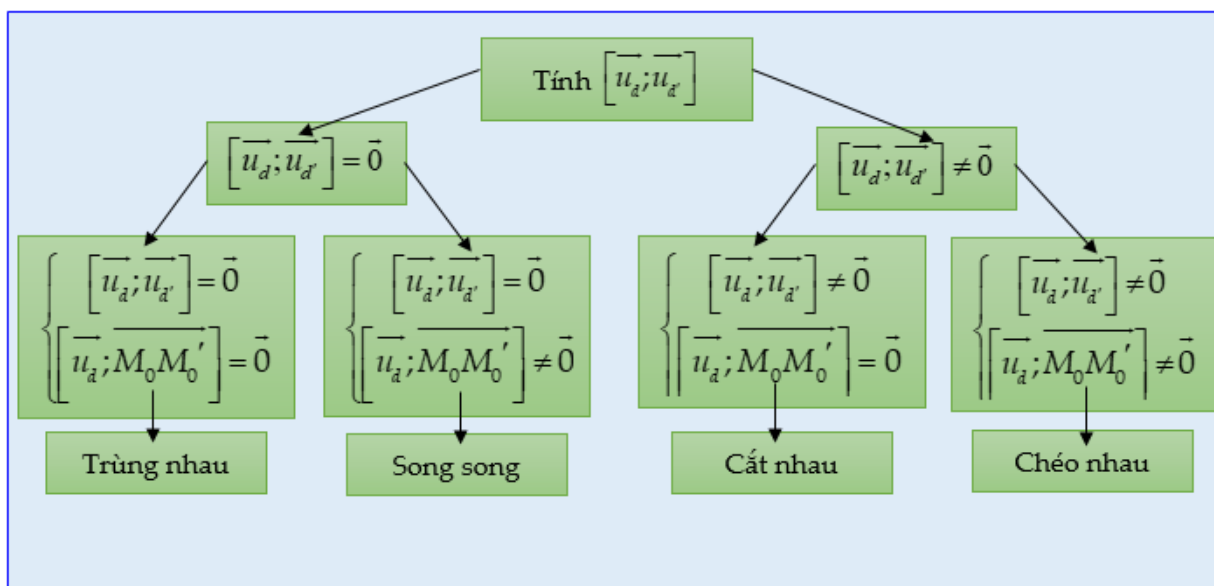
Xét hệ phương trình hai ẩn t, s :
$$\begin{cases} x_1 + a_1t = x_2 + a_2s \\ y_1 + b_1t = y_2 + b_2s \\ z_1 + c_1t = z_2 + c_2s \end{cases} (*)$$
. Khi đó

$\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.

$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.

Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ (*) có nghiệm duy nhất.

Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương và hệ (*) vô nghiệm.



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

1. Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vectơ $\vec{m} = k.\vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

2. Phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ (hệ số trước t).

3. Phương trình chính tắc $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ (hệ số ở mẫu).

4. Nhận xét:

- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước tham số t .
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(1; -2; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (-1; 2; 1)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 + 8t \\ y = -6 + 11t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Một vectơ chỉ phương của d là

Lời giải

Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (8; 11; 2)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$ có một vectơ chỉ phương là

Lời giải

Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$ có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u} = (2; -1; -2)$

Câu 4: Trong không gian cho hệ trục $Oxyz$, đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{-z-1}{4}$. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là:

Lời giải

Đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{-z-1}{4} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{-4}$.

Suy ra đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là: $\vec{u}(2; 3; -4)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) là

Lời giải

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{u} = (1; 1; -1)$.

Do $\Delta \perp (P)$ nên $\vec{u} = (1; 1; -1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 3 = 0$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(2; 1; -1)$.

Suy ra $\vec{t}(4; 2; -2)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (P) .

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, gọi đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 3y + z = 0$; $(\beta): x + y - z + 4 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ ?

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = (1; -3; 1)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\vec{n}_\beta = (1; 1; -1)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; 2; 4)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 3 = 0$ và $(Q): x + y - 1 = 0$. Giao tuyến của (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là

Lời giải

$(P): x - 2y + z - 3 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -2; 1)$;

$(Q): x + y - 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; 1; 0)$

Khi đó giao tuyến của (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-1; 1; 3)$

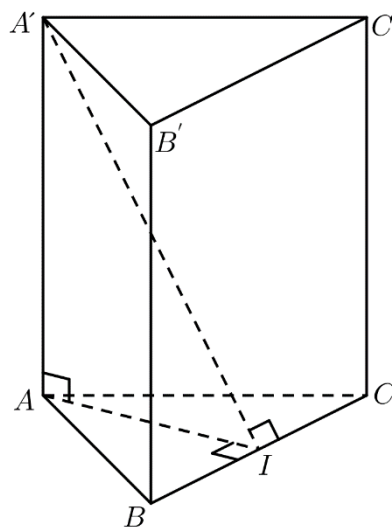
Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y + z + 1 = 0$ và $(\beta): x + 2y + 3z + 4 = 0$. Một vectơ chỉ phương của Δ có tọa độ là

Lời giải

Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{U}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (1; -2; 1)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'(\sqrt{3}; -1; 1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA' = 1$ (C không trùng với O). Biết vectơ $\vec{u} = (a; b; 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T = a^2 + b^2$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC ; do tam giác ABC đều nên $AI \perp BC \Rightarrow A'I \perp BC \Rightarrow I$ là hình chiếu của A' trên BC . Vì $B, C \in Oz$ nên I là hình chiếu của A' trên $Oz \Rightarrow I(0; 0; 1)$.

Ta có $\vec{A'I} = (-\sqrt{3}; 1; 0) \Rightarrow A'I = 2$.

Trong tam giác vuông $AA'I$, ta có $AI = \sqrt{A'I^2 - AA'^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

Vì tam giác ABC đều nên $BC = \frac{2}{\sqrt{3}} AI = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2 \Rightarrow CI = 1$.

Gọi $C(0; 0; c) \in Oz$. Do $CI = 1; I(0; 0; 1); C \neq O \Rightarrow C(0; 0; 2) \Rightarrow \vec{A'C} = (-\sqrt{3}; 1; 1)$.

Mà $\vec{u} = (a; b; 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$ nên $\overrightarrow{A'C}$ và $\vec{u}$ cùng phương.

$$\text{Suy ra } \frac{a}{-\sqrt{3}} = \frac{b}{1} = \frac{2}{1} \Rightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{3} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = (-2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 16.$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 2)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương có tọa độ là

Lời giải

Gọi $I = \Delta \cap d$.

$$\Rightarrow I = (1+t; 2+t; 3+t).$$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = (-t; -t; -1-t)$ là một vectơ chỉ phương của Δ .

Véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_p = (1; -1; 1)$.

$$\text{Vì } \Delta // (P) \Rightarrow \overrightarrow{IM} \perp \vec{n}_p \Rightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \vec{n}_p = 0.$$

$$\Leftrightarrow 1(-t) - 1(-t) + 1(-1-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = \vec{u}_\Delta = (1; 1; 0).$$

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

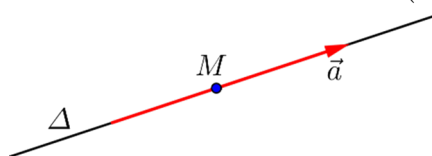
Phương pháp

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại

Phương pháp

Qua M , có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a; b; c)$



$$\gg \text{Phương trình } \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ nếu } \{a; b; c\} \neq 0.$$

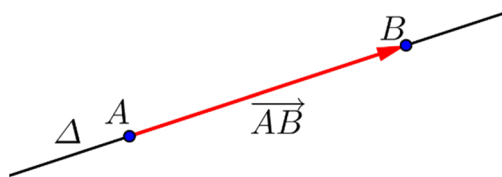
► **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại

Qua hai điểm A và B .



Phương pháp

Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua.

Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP $\rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Phương pháp

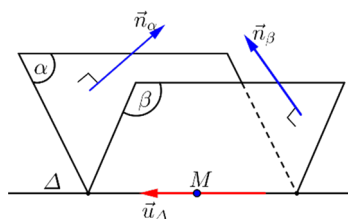
Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại

Giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và

$(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$



Phương pháp

Cho 1 trong 3 ẩn $x; y; z = 0$ để tìm 2 ẩn còn lại

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow M(0; ?; ?)$$

Vecto chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta]$.

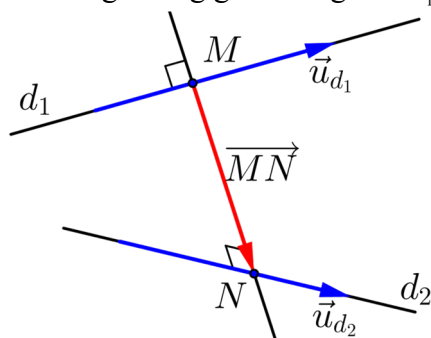
Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại

Là đường vuông góc chung của d_1 và d_2



Phương pháp

Gọi $\begin{cases} M \in d_1 \\ N \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN}(?)$ (tọa độ theo $t; k$).

MN là đường vuông góc chung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ? \\ k = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(?) \\ N(?) \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} qua \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}$.

Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3; -1; 2)$ và có

vector chỉ phương $\vec{u} = (4; 5; -7)$ là

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3; -1; 2)$ và có vector chỉ phương

$$\vec{u} = (4; 5; -7) \text{ là } \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 + 5t \\ z = 2 - 7t \end{cases}.$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3; -1; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (4; 5; -7)$ là

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3; -1; 2)$ và có vector chỉ phương

$$\vec{u} = (4; 5; -7) \text{ là } \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 + 5t \\ z = 2 - 7t \end{cases}.$$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; 3; -2)$ và nhận vector $\vec{u} = (1; -1; 5)$ làm vector chỉ phương có phương trình tham số là

Lời giải

$$\text{Ta có phương trình tham số của đường thẳng là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + 5t \end{cases}.$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và nhận vector $\vec{u} = (2; 4; -3)$ làm vector chỉ phương có phương trình chính tắc là

Lời giải

Đường thẳng đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và nhận vector $\vec{u} = (2; 4; -3)$ làm vector chỉ phương có phương trình là $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-3}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(-3; -1; 2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (4; 3; -2)$ là

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-3; -1; 2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (4; 3; -2)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x+3}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 1; -1)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 3)$ là

Lời giải

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;3)$ là

là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;1)$, $C(0;2;3)$. Phương trình đường thẳng d đi qua A và song song với đường thẳng BC là

Lời giải

Đường thẳng d song song với đường thẳng BC nên nhận $\overrightarrow{BC} = (2;1;2)$ làm VTCP.

Phương trình đường thẳng d có dạng
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;-3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;0;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có véc tơ chỉ phương:

$\vec{u}_d = \vec{n}_p = (1;-2;0)$, nên có phương trình:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = -3 \end{cases}$$

Câu 20: Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x - 2y + z + 1 = 0$.

Lời giải

d đi qua $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x - 2y + z + 1 = 0$.

Suy ra d đi qua $A(1;2;3)$ và nhận $\vec{n}_{(\alpha)} = (1;-2;1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số d là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1;3)$ và song song với đường thẳng

$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1}$ có phương trình là

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1;3)$ và song song với đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1}$

có véc tơ chỉ phương: $\vec{u}_d = \vec{u}_{d_1} = (2;1;-1)$, nên có phương trình:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 2z - 1 = 0$. Đường thẳng Δ qua M và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình là

Lời giải

Ta có: $\Delta \perp (\alpha) \Rightarrow \text{vtcp } \vec{u}_\Delta = \text{vtpt } \vec{n}_\alpha = (2; -3; 2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ qua M có vtcp $\vec{u}_\Delta = (2; -3; 2)$ là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{2}$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(-3; 4; 1)$ vuông góc với d và nằm trong (P) là

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \Delta \perp d \Rightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \\ \Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_P \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{n}_P] = (2; 0; -4) = 2(1; 0; -2)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(-3; 4; 1)$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (1; 0; -2)$ là $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 1 = 0$, $(Q): 2x - y + 2z - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) là

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} = (2; 2; 1) \\ \vec{n}_{(Q)} = (2; -1; 2) \end{cases}$ và $[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (5; -2; -6)$. Vì đường thẳng d song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) , nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; -2; -6)$.

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$ nên có phương trình: $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-6}$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -1; 1)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc với hai đường thẳng AB và d có phương trình là

Lời giải

Ta có: $\vec{u} = (-2; 1; 3)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d ; $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 2)$.

Suy ra $[\vec{u}, \overrightarrow{AB}] = (7; 2; 4)$, khi đó đường thẳng $d: \begin{cases} \text{qua } A(1; -1; 1) \\ \text{có VTCP } \vec{u}_d = (7; 2; 4) \end{cases}$ nên phương trình

đường thẳng $d: \frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-4; -2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M , cắt trục Oy và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

Lời giải

$$\text{Gọi } N = \Delta \cap Oy \Rightarrow N(0; b; 0)$$

$$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = \vec{MN} = (4; b+2; -3)$$

$$\text{Vì } \Delta \perp d \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 4 + b + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow b = -3$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ đi qua điểm } M \text{ có VTCP } \vec{u}_{\Delta} = (4; -1; -3) = -(-4; 1; 3)$$

$$\Delta: \begin{cases} x = -4 - 4t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 1; 2)$. Đường thẳng (Δ) đi qua M , vuông góc và cắt trục Ox có phương trình là.

Lời giải

$$\text{Trục } Ox \text{ có VTCP } \vec{u} = (1; 0; 0).$$

$$\text{Gọi } A(a; 0; 0) \in Ox, \text{ ta có } \vec{AM} = (3-a; 1; 2)$$

$$\text{Do } \Delta \perp Ox \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3-a = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\text{Ta có } \Delta \text{ có VTCP } \vec{AM} = (0; 1; 2) \text{ và đi qua điểm } M(3; 0; 0) \text{ có phương trình là: } \begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 1)$ và hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình $x - 3z + 1 = 0$, $2y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và song song với mặt phẳng $(P), (Q)$ có phương trình là

Lời giải

$$\vec{n}_{(P)} = (1; 0; -3), \vec{n}_{(Q)} = (0; 2; 2) \Rightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{n}_{(Q)}] = (6; -2; 2).$$

$$\text{Phương trình } d \text{ là } \frac{x+5}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1} \text{ vì tọa độ điểm } A \text{ thỏa mãn và có véc tơ chỉ phương cùng phương } \vec{u}_d = (6; -2; 2).$$

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

Lời giải

$$\text{+) VTCP của } \Delta, \Delta' \text{ lần lượt là } \vec{u} = (3; 2; 1) \text{ và } \vec{v} = (1; 3; -2); [\vec{u}, \vec{v}] = (-7; 7; 7)$$

+) Vì d vuông góc với Δ và Δ' nên $\vec{u}_d = (-1; 1; 1)$.

+) d đi qua $M(-1; 1; 3)$ nên $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$, $(d_2): \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là

Lời giải

Gọi d vuông góc chung của hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.

Ta có vector chỉ phương của đường thẳng $(d_1), (d_2)$ lần lượt là $\vec{u}_1 = (3; 2; -2)$; $\vec{u}_2 = (2; 2; -1)$.

Ta có vector chỉ phương của đường thẳng d lần lượt là $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; -1; 2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và (d_1) .

Khi đó vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{u}_1] = (2; -10; -7)$.

Lấy điểm $M(1; -1; 2) \in d_1$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua điểm và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; -10; -7)$ có phương trình là $2(x-1) - 10(y+1) - 7(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 10y - 7z + 2 = 0$.

Gọi N là giao điểm của d_2 và (P) . Do $N \in d_2$ nên gọi $N(4+2t; 4+2t; -3-t)$.

Mà $N \in (P) \Rightarrow 2(4+2t) - 10(4+2t) - 7(-3-t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow N(2; 2; -2)$.

Khi đó đường thẳng đi qua điểm $N(2; 2; -2)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 2)$.

Phương trình đường thẳng d là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases}$. Đường

vuông góc chung của hai đường thẳng đã cho có phương trình là

Lời giải

Ta có VTCP của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$ và $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$.

Gọi $M \in d_1 \Rightarrow M(2a; 1-a; -2+a)$ và $N \in d_2 \Rightarrow N(-1+2t; 1+t; 3)$.

Khi đó $\overrightarrow{MN} = (2t-2a-1; t+a; 5-a)$.

Để thỏa mãn thì $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-6a=-3 \\ 5t-3a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ a=1 \end{cases}$.

Khi đó $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; 4)$ và $M(2; 0; -1)$ và đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là MN có

$$\text{phương trình } \Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -2x + 2y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

Lời giải

Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) cắt và vuông góc với đường thẳng d có véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{u}_d]$

$$\text{Với } \vec{n}_P = (-2; 2; 1), \vec{u}_d = (3; 1; 2) \Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (3; 7; -8)$$

Tọa độ giao điểm của (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x + 2y + z - 3 = 0 \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(1+3t) + 2(1+t) + (3+2t) - 3 = 0 \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $(1; 1; 3)$ và có VTCP $\vec{u} = (3; 7; -8)$ dạng:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-8}$$

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y - 3z - 3 = 0$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}; d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Đường thẳng } \Delta \text{ nằm trong mặt phẳng } (P) \text{ đồng thời}$$

cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

Lời giải

$$\text{Ta có } d_1: \begin{cases} x = 2a \\ y = 1 - a \\ z = -2 + a \end{cases}. \text{ Gọi } A = \Delta \cap d_1 = (P) \cap d_1.$$

$$\text{Suy ra } 2(1-a) - 3(-2+a) - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ suy ra } A(2; 0; -1).$$

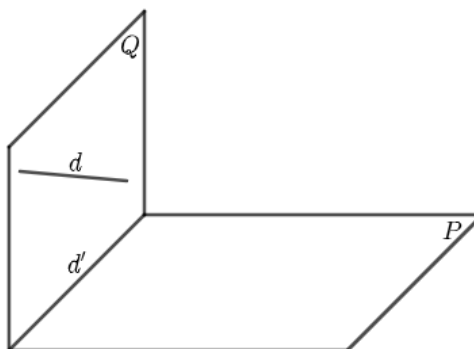
$$\text{Ta có } d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Gọi } B = \Delta \cap d_2 = (P) \cap d_2.$$

$$\text{Suy ra } 2(1+t) - 3 \cdot 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ suy ra } B(3; 3; 1).$$

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 2)$ suy ra $AB: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình là

Lời giải



Đường thẳng d có vectơ chỉ phương: $\vec{u}_d = (1; 1; -1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến: $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; 1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) , ta có $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}] = (3; -2; 1)$.

Vì (Q) chứa d nên (Q) qua điểm $M(0; 1; 2)$ thuộc d . Khi đó phương trình của (Q) là: $3x - 2y + z = 0$.

Gọi d' là hình chiếu của d trên (P) , ta có d' là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$

$\Rightarrow \vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (4; 2; -8)$, chọn $\vec{u}_{d'} = (2; 1; -4)$. Loại A, D.

Cho $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y + z - 4 = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$.

Vậy điểm $A(0; 1; 2)$ là điểm chung của $(P), (Q)$ do đó nằm trên d' .

Vậy phương trình d' là: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) và cắt cả hai

đường thẳng d_1, d_2 . Đường thẳng Δ có phương trình là

Lời giải

Gọi $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$. Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $A = (\alpha) \cap d_1, B = (\alpha) \cap d_2$

Vì $A \in d_1 \Rightarrow A(-2+t; 2+t; -t)$, mà $A \in (\alpha)$ nên $-4 + 2t - 4 - 2t + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 7$

$\Rightarrow A(5; 9; -7)$

Vì $B \in d_2 \Rightarrow B(2t'; 3+t'; 1)$, mà $B \in (\alpha)$ nên $4t' - 6 - 2t' - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow t' = 3 \Rightarrow B(6; 6; 1)$.

Khi đó đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1; -3; 8)$ và đi qua điểm $B(6; 6; 1)$. Do

đó phương trình Δ là $\frac{x-6}{1} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-1}{8}$

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$, $d': \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) , vuông góc với d và cắt d' có phương trình là

Lời giải

Gọi $A = \Delta \cap d'$. Suy ra $A = (P) \cap d'$.

Tọa độ giao điểm của d' và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = t \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2; 0)$$

Vì Δ nằm trong (P) nên $\vec{n}_P(2; -1; 2) \perp \vec{u}_\Delta$.

Vì Δ vuông góc với d nên $\vec{u}_d(2; 3; 2) \perp \vec{u}_\Delta$.

Khi đó: $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P; \vec{u}_d] = (-8; -2; 7)$.

Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\frac{x-1}{-8} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{7}$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 3; -2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng

Lời giải

Vì $A \in d_1 \Rightarrow A(1+a; 2+3a; a)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(-1-b; 1+2b; 2+4b)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (a-2; 3a-1; a+2)$; $\overrightarrow{MB} = (-b-4; 2b-2; 4b+4)$.

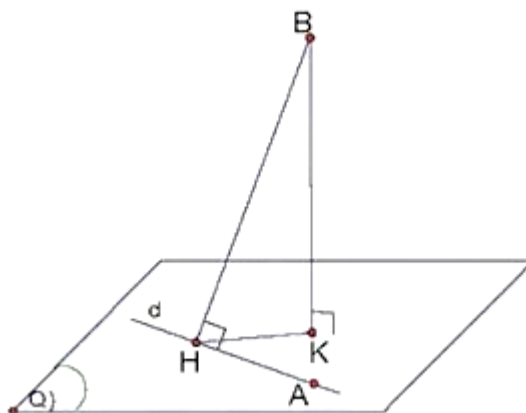
Vì $M, A, B \in d$ nên chúng thẳng hàng, do đó tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2 = k(-4-b) \\ 3a-1 = k(2b-2) \\ a+2 = k(4b+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A(-2; -1; 2), B(-4; -2; 4).$$

Vậy $AB = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;1), B(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 1 = 0$. Đường thẳng d đi qua điểm A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1;a;b)$. Khi đó $a + 2b$ bằng.

Lời giải



Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $A(0;2;1)$ và song song với $(P) \Rightarrow \vec{n}_Q = \vec{n}_P = (2; -1; 0)$.

Phương trình mặt phẳng $(Q): 2x - y + 2 = 0$.

Vì đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) nên $d \subset (Q)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên đường thẳng d và mặt phẳng (Q) .

Khi đó $d(B; (d)) = BH \geq BK$. Suy ra $d(B; (d))_{\min} = BK \Leftrightarrow H \equiv K$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua B và vuông góc với mặt phẳng $(Q) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{n}_P = (2; -1; 0)$.

Phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$. Lấy $H(1 + 2t; 2 - t; 3) \in \Delta$.

Vì $H \in (Q)$ nên $2(1 + 2t) - 2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{5}$.

Suy ra $H\left(\frac{1}{5}; \frac{12}{5}; 3\right)$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; 2\right) = \frac{1}{5}(1; 2; 10)$.

Suy ra một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d = (1; 2; 10) \Rightarrow a = 2, b = 10$.

Vậy $a + 2b = 2 + 2 \cdot 10 = 22$.

DẠNG 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \text{ và } M_0(x_0; y_0; z_0) \in d;$$

$$d': \begin{cases} x = x'_0 + a'_1 t' \\ y = y'_0 + a'_2 t' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = z'_0 + a'_3 t' \end{cases} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3).$$

Khi đó:

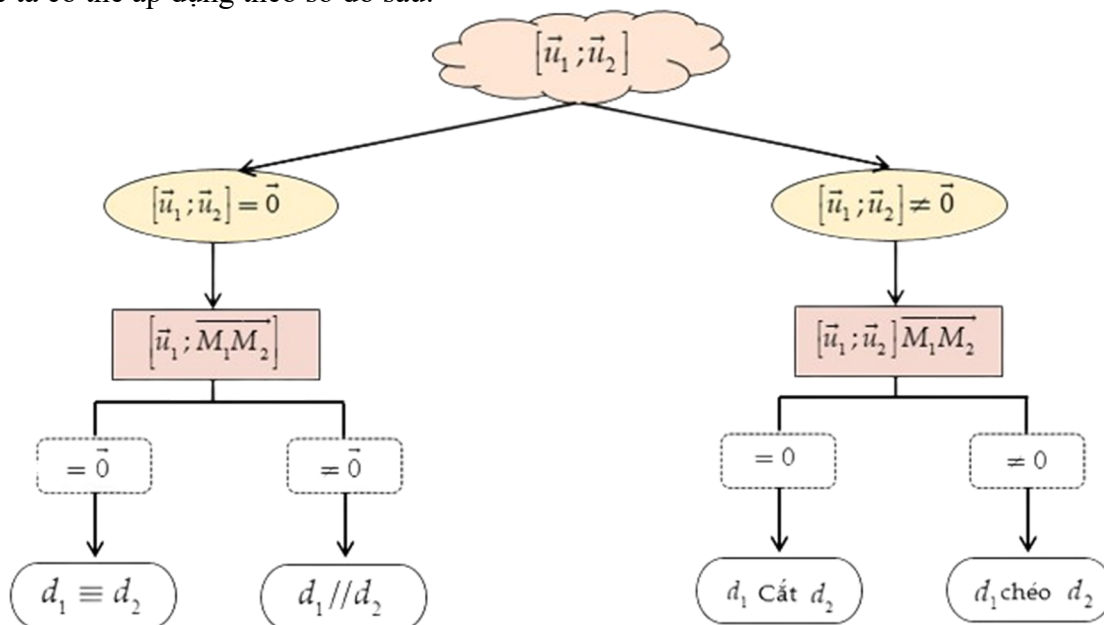
» $d // d' \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương và $M_0 \notin d'$.

» d trùng $d' \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương $M_0 \in d'$

» $d \cap d' \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn t, t' sau:
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$$
 có đúng một nghiệm.

» d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương và
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$$
 vô nghiệm.

Hoặc ta có thể áp dụng theo sơ đồ sau:



Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và $d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ và } d': \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}$$

$$\text{c) } d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \text{ và } d': \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$$

Lời giải

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ và } d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$$

Ta có các vector chỉ phương của d và d' lần lượt là $\vec{a} = (1; 2; -1)$ và $\vec{a}' = (2; 4; -2)$.

Vì $\vec{a}' = 2\vec{a}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ cùng phương.

$\Rightarrow d$ và d' song song với nhau hoặc trùng nhau.

Xét điểm $M(1; 0; 3) \in d$, ta có $M \notin d'$ nên $d // d'$.

$$\text{b) } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ và } d': \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Ta có d và d' lần lượt nhận $\vec{a} = (2; 3; 1)$ và $\vec{a}' = (3; 2; 2)$ là các vector chỉ phương.

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$d' \text{ qua } M(1; -2; -1); \text{ có VTCP } \vec{a}' = (3; 2; 2) \text{ nên có phương trình là: } d': \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} 1 + 2t = 1 + 3t' \\ -1 + 3t = -2 + 2t' \\ 5 + t = -1 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{5} \\ t' = -\frac{2}{5} \\ 5 + t = -1 + 2t' \end{cases} \Rightarrow \text{Hệ vô nghiệm}$$

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

$$\text{c) } d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \text{ và } d': \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$$

Ta có: d đi qua $M(0; 1; 0)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (1; -1; 2)$;

d' đi qua $M'(1; 2; -2)$ và có vector chỉ phương $\vec{a}' = (5; 1; -2)$.

Nên phương trình tham số của d và d' lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 + 5t' \\ y = 2 + t' \\ z = -2 - 2t' \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} t = 1 + 5t' \\ 1 - t = 2 + t' \\ 2t = -2 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 5t' = 1 \\ -t - t' = 1 \\ 2t + 2t' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ t' = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{hệ có nghiệm duy nhất}$$

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Câu 40: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2,5; 15)$ và $(21; 27,5; 10)$



- Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.
- Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Lời giải

- Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

Ta có: $A(3; 2,5; 15)$, $B(21; 27,5; 10) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (18; 15; -5)$

Phương trình tham số đường thẳng AB là:
$$\begin{cases} x = 3 + 18t \\ y = 2,5 + 15t \\ z = 15 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Vậy phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline là
$$\begin{cases} x = 3 + 18t \\ y = 2,5 + 15t \\ z = 15 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

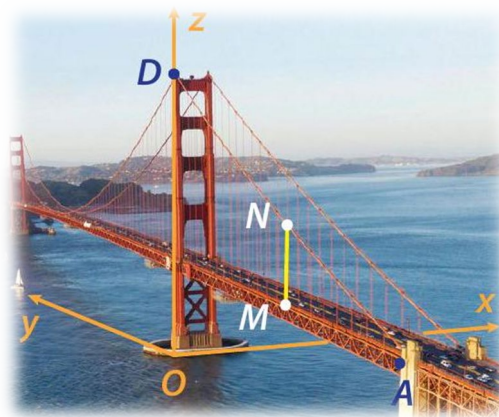
- Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Khi du khách ở độ cao 12 mét $\Rightarrow z = 12 \Rightarrow 15 - 5t = 12 \Rightarrow t = \frac{3}{5}$

Thay $t = \frac{3}{5}$ vào phương trình đường thẳng AB ta được
$$\begin{cases} x = 13,8 \\ y = 11,5 \\ z = 12 \end{cases} \Rightarrow C(13,8; 11,5; 12)$$

Vậy tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét là $C(13,8; 11,5; 12)$.

Câu 41: Cầu Cổng Vàng (*The Golden Gate Bridge*) ở Mỹ. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là bộ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz , trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227m, điểm A cách mặt nước 75m và cách trục Oz 343m.



(nguồn ảnh: <https://www.goldengate.org/assets/1/6/ggb-exhibit-chapter-statistics.pdf>).

Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước $75m$ và MN song song với cột trụ.

a) Tính độ dài MN , biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $230m$.

b) Người ta có thể dùng đoạn dây dài $100m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $148m$ không? Vì sao?

Lời giải

a) Tính độ dài MN , biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $230m$.

Ta có $A \in Oyz$ và A cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz $343m \Rightarrow A(0; 343; 75)$

Điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $227m \Rightarrow D(0; 0; 227)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (0; -343; 152)$$

$$\Rightarrow \text{phương trình đường thẳng } AD \text{ là } \begin{cases} x = 0 \\ y = -343t \\ z = 227 + 152t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Vì $N \in AD \Rightarrow N(0; -343t; 227 + 152t)$

Điểm M trên thành cầu, M cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz một khoảng bằng $230m$ nên tọa độ điểm M là $M(0; 230; 75)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0; -343t - 230; 152 + 152t)$$

$$MN \text{ song song với cột trụ} \Rightarrow MN \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow -343t - 230 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{230}{343}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0; 0; \frac{17176}{343} \right) \Rightarrow MN = \frac{17176}{343}$$

b) Người ta có thể dùng đoạn dây dài $100m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $148m$ không? Vì sao?

Điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $148m$

$$\Rightarrow M(0; 148; 75) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0; -343t - 148; 152 + 152t)$$

$$MN // Oz \Rightarrow MN \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow -343t - 148 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{148}{343}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0; 0; \frac{29640}{343} \right) \Rightarrow MN = \frac{29640}{343} \approx 86,41m.$$

Vậy có thể dùng đoạn dây dài $100m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $148m$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$. Vector nào dưới đây là một chỉ phương của d
- A. $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$. B. $\vec{u}_2 = (1; 2; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (1; -2; 3)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.
- Câu 2:** (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vector chỉ phương là:
- A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$ B. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$ C. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$ D. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$
- Câu 3:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d
- A. $\vec{u}_3 = (3; -1; -2)$. B. $\vec{u}_4 = (4; 2; 3)$. C. $\vec{u}_2 = (4; -2; 3)$. D. $\vec{u}_1 = (3; 1; 2)$.
- Câu 4:** (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vector nào dưới đây là vector chỉ phương của đường thẳng d
- A. $\vec{u} = (1; 3; -2)$. B. $\vec{u} = (2; 5; 3)$. C. $\vec{u} = (2; -5; 3)$. D. $\vec{u} = (1; 3; 2)$.
- Câu 5:** (Mã 103 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{2}$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của d ?
- A. $\vec{u}_4 = (1; 3; 2)$. B. $\vec{u}_3 = (-2; 1; 3)$. C. $\vec{u}_1 = (-2; 1; 2)$. D. $\vec{u}_2 = (1; -3; 2)$.
- Câu 6:** (MĐ 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc d
- A. $P(2; 1; -1)$. B. $M(1; 2; 3)$. C. $Q(1; 1; 1)$. D. $N(1; -2; 3)$.
- Câu 7:** (Mã 101 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?
- A. $Q(4; -2; 1)$. B. $N(4; 2; 1)$. C. $P(2; 1; -3)$. D. $M(2; 1; 3)$.

Câu 8: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- A. $M(3;1;5)$. B. $N(3;1;-5)$. C. $P(2;2;-1)$. D. $Q(2;2;1)$.

Câu 9: (Mã đề 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ?$$

- A. $N(1;5;2)$ B. $Q(-1;1;3)$ C. $M(1;1;3)$ D. $P(1;2;5)$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $Q(2;-1;2)$ B. $M(-1;-2;-3)$ C. $P(1;2;3)$ D. $N(-2;1;-2)$

Câu 11: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2;4;5)$. Phương trình của d là:

- A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$

Câu 12: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2;2;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5;2;-3)$. Phương trình của d là:

- A. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$

Câu 13: Câu 27 (101-2023) Trong không gian $Oxyz$ phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;3)$ là

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$. B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$.
C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

Câu 14: Câu 27 (102-2023) Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;-1;2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4;3;-2)$ là

- A. $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}$. B. $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-2}$.
C. $\frac{x+3}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-2}$. D. $\frac{x+4}{-3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

Câu 15: Câu 31 (101-2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Câu 16: Câu 32 (102-2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 5 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 17: Câu 35 (103-2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 5 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 18: (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(3;0;1), C(2;2;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}$
B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$
D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$

Câu 19: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 4z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$
B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{1}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{4}$
D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{4}$

Câu 20: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{1}$
B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}$
C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$
D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;-1)$ và $B(2;-1;1)$ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;1)$ và $N(3;1;-2)$. Đường thẳng MN có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{-3}$.

Câu 24: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;1;0)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$. **C.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-3;5)$, $B(2;-1;7)$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-7}{2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{-2}$.

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{-2}$.

Câu 26: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường

thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases}$?

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$

Câu 27: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(3;4;-1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

D. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-1}$.

Câu 28: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;1;2)$ và $C(2;3;1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$.

C. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{3}$.

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$.

Câu 29: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(3;1;0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.

B. $\frac{z+1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

Câu 30: (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2)$, $B(1;2;1)$, $C(3;2;0)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1-t \\ y=4t \\ z=2+2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=4 \\ z=2+2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=2+t \\ y=4+4t \\ z=4+2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=1-t \\ y=2-4t \\ z=2-2t \end{cases}$.

Câu 31: (Mã 101 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0), B(2;0;2), C(2;-1;3), D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxz) là.

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = 3 + t \end{cases}$

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $N(-1;5;2)$ và song song với trục $x'Ox$

A. $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$
B. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 + t \\ z = 2 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$
C. $\begin{cases} x = -t \\ y = 5t \\ z = 2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$
D. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 + t \\ z = 2 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$

Câu 34: (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3); B(-1;4;1)$

và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d ?

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$
B. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$
D. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng nào dưới đây đi qua $A(3;5;7)$ và song song với

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -7 + 4t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 5t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$ và đường thẳng

$\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và song song với Δ .

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$.

C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}$.

Câu 37: (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Đường thẳng đi qua A , cắt trục Oy và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$

Câu 39: (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là.

A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$ **C.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$

Câu 41: (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4t \\ z = -3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Câu 42: (Mã 123 2017) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Câu 43: (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-t \\ z=2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2+3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases}$

Câu 44: (TK 2020-2021) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là:

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$. B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}$. B. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$. C. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$. D. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 46: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-z+3=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình

A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{13}$. B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{1}$. C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{1}$. D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{13}$.

Câu 47: (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$, $(Q): x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3-t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3-2t \end{cases}$

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d': \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$ có vị trí

tương đối là:
A. cắt nhau. B. chéo nhau. C. song song. D. trùng nhau.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$,

$d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. có vị trí tương đối là:

A. cắt nhau. B. chéo nhau. C. song song. D. trùng nhau.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ_1 có
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}$$
 trong các đường thẳng

dưới đây đường thẳng nào vuông góc với Δ_1 là:

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 6 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 3t \end{cases}$

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$,

$\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Câu 52: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng $d:$

$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có phương

trình là

A. $3x + 2y - z + 1 = 0$. **B.** $2x - 2y + 3z - 17 = 0$.

C. $3x + 2y - z - 1 = 0$. **D.** $2x - 2y + 3z + 17 = 0$.

Câu 53: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1;-1)$ và

vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ có phương trình là

A. $2x + 2y + z + 3 = 0$. **B.** $x - 2y - z = 0$. **C.** $2x + 2y + z - 3 = 0$. **D.** $x - 2y - z - 2 = 0$.

Câu 54: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;1;-2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-3}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $x + 2y - 3z - 9 = 0$. **B.** $x + y - 2z - 6 = 0$. **C.** $x + 2y - 3z + 9 = 0$. **D.** $x + y - 2z + 6 = 0$.

Câu 55: (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$

$d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương

trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 ?

A. $2x - y + 2z + 13 = 0$

B. $2x + y + 2z - 22 = 0$

C. $2x - y + 2z - 13 = 0$

D. $2x - y + 2z + 22 = 0$

Câu 56: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;0;2)$ và chứa trục hoành có phương trình là

- A.** $y = 0$. **B.** $x = 0$. **C.** $z = 0$. **D.** $x + y + z = 1$.

Câu 57: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, hãy viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3} \text{ và tạo với mặt phẳng } (P): 2x - z + 1 = 0 \text{ góc } 90^\circ.$$

- A.** $(\alpha): x + 5y + 2z = 0$. **B.** $(\alpha): x - 7y - 2z = 0$.
C. $(\alpha): x - 5y + 2z = 0$. **D.** $(\alpha): x + 7y + 2z = 0$.

Câu 58: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-6}{-2}$;

$$d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{3}. \text{ Phương trình mặt phẳng } (P) \text{ chứa } d_1 \text{ và song song với } d_2 \text{ là}$$

- A.** $(P): x + 8y + 5z + 16 = 0$. **B.** $(P): x + 8y + 5z - 16 = 0$.
C. $(P): 2x + y - 6 = 0$. **D.** $(P): x + 4y + 3z - 12 = 0$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$. Vector nào dưới đây

là một chỉ phương của d

- A. $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$. B. $\vec{u}_2 = (1; 2; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (1; -2; 3)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.

Lời giải

Từ phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ ta có $\vec{u}_3 = (1; -2; 3)$ là một vector chỉ phương của d .

Câu 2: (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vector chỉ phương

là:

- A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$ B. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$ C. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$ D. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$

Lời giải

$d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$.

Câu 3: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}$.

Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d

- A. $\vec{u}_3 = (3; -1; -2)$. B. $\vec{u}_4 = (4; 2; 3)$. C. $\vec{u}_2 = (4; -2; 3)$. D. $\vec{u}_1 = (3; 1; 2)$.

Lời giải

Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_2 = (4; -2; 3)$.

Câu 4: (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vector nào dưới đây là vector chỉ phương của đường thẳng d

- A.** $\vec{u} = (1; 3; -2)$. **B.** $\vec{u} = (2; 5; 3)$. **C.** $\vec{u} = (2; -5; 3)$. **D.** $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

Lời giải

Dựa vào phương trình đường thẳng suy ra một vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; -5; 3)$

- Câu 5:** (Mã 103 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{2}$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của d ?

- A.** $\vec{u}_4 = (1; 3; 2)$. **B.** $\vec{u}_3 = (-2; 1; 3)$. **C.** $\vec{u}_1 = (-2; 1; 2)$. **D.** $\vec{u}_2 = (1; -3; 2)$.

Lời giải

Đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{2}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; -3; 2)$.

- Câu 6:** (MĐ 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc d

- A.** $P(2; 1; -1)$. **B.** $M(1; 2; 3)$. **C.** $Q(1; 1; 1)$. **D.** $N(1; -2; 3)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm các đáp án vào $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$ ta được:

Với $P(2; 1; -1) \Rightarrow d: \frac{2-2}{1} = \frac{1-1}{-2} = \frac{-1+1}{3} = 0$ (thỏa mãn).

- Câu 7:** (Mã 101 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- A.** $Q(4; -2; 1)$. **B.** $N(4; 2; 1)$. **C.** $P(2; 1; -3)$. **D.** $M(2; 1; 3)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm $P(2; 1; -3)$ vào $d: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$ ta được

$$\frac{2-2}{4} = \frac{1-1}{-2} = \frac{-3+3}{1} \Leftrightarrow 0 = 0 = 0 \text{ đúng. Vậy điểm } P \in (d).$$

- Câu 8:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- A.** $M(3; 1; 5)$. **B.** $N(3; 1; -5)$. **C.** $P(2; 2; -1)$. **D.** $Q(2; 2; 1)$.

Lời giải

Ta có $\frac{3-3}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{-5+5}{-1} = 0$ nên điểm $N(3; 1; -5) \in d$.

- Câu 9:** (Mã đề 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ?$$

A. $N(1;5;2)$

B. $Q(-1;1;3)$

C. $M(1;1;3)$

D. $P(1;2;5)$

Lời giải

Cách 1. Dựa vào lý thuyết: Nếu d qua $M(x_0; y_0; z_0)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ thì

phương trình đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
, ta chọn đáp án **B**

Cách 2. Thay tọa độ các điểm M vào phương trình đường thẳng d , ta có:

$$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 2 = 5 + t \\ 5 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -3 \text{ (Vô lý)} \\ t = 1 \end{cases}$$
. Loại đáp án **A.**

Thay tọa độ các điểm N vào phương trình đường thẳng d , ta có:

$$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 5 = 5 + t \\ 2 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$
. Nhận đáp án **B.**

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(2; -1; 2)$

B. $M(-1; -2; -3)$

C. $P(1; 2; 3)$

D. $N(-2; 1; -2)$

Lời giải

Câu 11: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (-2; 4; 5)$. Phương trình của d là:

A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$

Lời giải

Vì đường thẳng d đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (-2; 4; 5)$ nên phương

trình của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$$

Câu 12: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 2; 1)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (5; 2; -3)$. Phương trình của d là:

A. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$

Lời giải

Ta có:

Phương trình đường thẳng d có $\begin{cases} VTCP: \vec{u} = (5; 2; -3) \\ Qua: M(2; 2; 1) \end{cases}$

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Câu 13: Câu 27 (101-2023) Trong không gian $Oxyz$ phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 1; -1)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 3)$ là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$. **B.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. **D.** $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 1; -1)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 3)$ là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$.

Câu 14: Câu 27 (102-2023) Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(-3; -1; 2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 3; -2)$ là

A. $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}$. **B.** $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-2}$.

C. $\frac{x+3}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-2}$. **D.** $\frac{x+4}{-3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-3; -1; 2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 3; -2)$ có phương trình chính tắc là $\frac{x+3}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

Câu 15: Câu 31 (101-2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Lời giải

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y + z = 0$ nên nhận vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$ của (P) là vector chỉ phương.

Mặt khác đường thẳng đi qua $A(1; 2; -1)$ nên ta có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 16: Câu 32 (102-2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 5 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Lời giải

Đường thẳng đi qua $A(1; -1; 1)$ và vuông góc với $(P): 2x + 3y + z - 5 = 0$ nhận vector pháp tuyến

của (P) là $\vec{n} = (2; 3; 1)$ làm vector chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Câu 17: Câu 35 (103-2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 5 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Lời giải

Do đường thẳng cần tìm vuông góc với (P) nên nhận vector pháp tuyến $\vec{u} = \vec{n}_p = (2; 3; 1)$ làm vector chỉ phương.

Đường thẳng đi qua $A(1; -1; 1)$ có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 1)$ có dạng: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 18: (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(3; 0; 1), C(2; 2; -2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}$. B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$. C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 0; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 4; 2)$.

Đường thẳng đi qua $A(1; 2; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nhận $\vec{u} = (1; 2; 1)$ làm một vector chỉ phương có phương trình là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 19: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 3; 2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 4z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{4}$.

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{4}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1; -2; 4)$.

Gọi d là đường thẳng qua $M(-1;3;2)$ và vuông góc với (P) .

Vì $d \perp (P)$ nên d nhận vector $\vec{n}_p = (1;-2;4)$ làm vector chỉ phương.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{4}$.

Câu 20: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z+1=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{1}$.

B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}$.

C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$.

Lời giải

$(P): x-3y+2z+1=0 \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (1;-3;2)$

Đường thẳng đi qua M và vuông góc với $(P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1;-3;2) \\ \text{Qua } M(2;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;-1)$ và $B(2;-1;1)$ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = -1+2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 1+2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+2t \\ z = 2-t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = -t \end{cases}$

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (1;-3;2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng, nó đi qua điểm $A(1;2;-1)$ nên có

phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = -1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$

Lời giải

Đường thẳng MN nhận $\vec{MN} = (2;2;-2)$ hoặc $\vec{u}(1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương nên ta loại ngay phương án A, B và C.

Thay tọa độ điểm $M(1;0;1)$ vào phương trình ở phương án D ta thấy thỏa mãn.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;1)$ và $N(3;1;-2)$. Đường thẳng MN có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{-3}$.

Lời giải

Đường thẳng MN có một vectơ chỉ phương là $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = (2; -1; -3)$ và đi qua điểm $M(1; 2; 1)$

nên có phương trình là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

Câu 24: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(1; 1; 0)$ và $N(3; 2; -1)$. Đường thẳng MN có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (2; 1; -1)$

Đường thẳng MN đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{MN}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; -3; 5)$, $B(2; -1; 7)$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-7}{2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{-2}$.

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{-2}$.

Lời giải

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; -3; 5)$, $B(2; -1; 7)$ có một VTCP là $\overrightarrow{BA} = (-1; -2; -2)$,

Suy ra PTCT là $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{-2}$.

Câu 26: Trong không gian tọa độ Oxyz, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$?

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$

Lời giải

Do đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ đi qua điểm $M(1; 0; -2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(2; 3; 1)$ nên có

phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$.

- Câu 27:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(3;4;-1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là
- A. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$. B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$. **C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$.** D. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua A và song song với BC nhận $\overrightarrow{BC} = (2;3;-1)$ làm một véc tơ chỉ phương.

Phương trình của đường thẳng d : $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

- Câu 28:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;1;2)$ và $C(2;3;1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là
- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$.** B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$. C. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{3}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$.

Lời giải

Gọi d là phương trình đường thẳng qua $A(1;2;0)$ và song song với BC .

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1;2;-1) \Rightarrow d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$.

- Câu 29:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(3;1;0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là:
- A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. B. $\frac{z+1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. **C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$.** D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

Lời giải

Đường thẳng đi qua $A(1;1;0)$, song song với BC nên nhận $\overrightarrow{BC} = (2;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương do đó có phương trình là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$.

- Câu 30:** (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2)$, $B(1;2;1)$, $C(3;2;0)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là
- A. $\begin{cases} x=1-t \\ y=4t \\ z=2+2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=4 \\ z=2+2t \end{cases}$. **C. $\begin{cases} x=2+t \\ y=4+4t \\ z=4+2t \end{cases}$.** D. $\begin{cases} x=1-t \\ y=2-4t \\ z=2-2t \end{cases}$

Lời giải

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) nhận vectơ pháp tuyến của (BCD) là vectơ chỉ phương

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2;0;-1)$, $\overrightarrow{BD} = (0;-1;2)$

$\Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_{BCD} = [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (-1;-4;-2)$

Khi đó ta loại đáp án A và B

Thay điểm $A(1;0;2)$ vào phương trình ở phương án C ta có $\begin{cases} 1 = 2 + t \\ 0 = 4 + 4t \\ 2 = 4 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$.

Suy ra đường thẳng có phương trình tham số ở phương án C đi qua điểm A nên C là phương án đúng

Câu 31: (Mã 101 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0), B(2;0;2), C(2;-1;3), D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (0; -1; 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = (-4; -3; -1)$$

Đường thẳng qua $C(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình

$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Điểm $E(-2; -4; 2)$ thuộc đường thẳng trên, suy ra đường thẳng cần tìm trùng với đường thẳng

có phương trình $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Chọn đáp án đúng là đáp án C

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxz) là.

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = 3 + t \end{cases}$

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxz) nhận véc tơ $\vec{j} = (0; 1; 0)$ làm véc tơ chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $N(-1;5;2)$ và song song với trục $x'Ox$

A. $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} .$ **B.** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 + t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} .$ **C.** $\begin{cases} x = -t \\ y = 5t \\ z = 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} .$ **D.** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 + t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} .$

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $N(-1;5;2)$ và song song với trục $x'Ox$ nhận véc tơ $\vec{i} = (1;0;0)$ làm véc tơ chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

Câu 34: (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3); B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d ?

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ **B.** $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ **C.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ **D.** $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$

Lời giải

Trung điểm của AB là $I(0;1;-1)$

$d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ có VTCP là $\vec{u}(1;-1;2)$ nên đường thẳng Δ cần tìm cũng có VTCP $\vec{u}(1;-1;2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng nào dưới đây đi qua $A(3;5;7)$ và song song với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -7 + 4t \end{cases} .$ **B.** $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 7 + 4t \end{cases} .$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases} .$ **D.** $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 5t \\ z = 4 + 7t \end{cases} .$

Lời giải

Đường thẳng song song với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ nên có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2;3;4)$,

suy ra loại câu B, **D.**

Ta thấy tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình đáp án **C.**

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$ và đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}). \text{Viết phương trình đường thẳng đi qua } M \text{ và song song với } \Delta.$$

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}.$

B. $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}.$

C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-4}.$

D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}.$

Lời giải

Đường thẳng song song với $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ nên có một vector chỉ phương $\vec{u} = (-1; 1; -4)$

, suy ra loại đáp án **A**.

Lần lượt thay tọa độ điểm M vào đáp án B, C, D ta

Câu 37: (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi $M = \Delta \cap Ox$. Suy ra $M(a; 0; 0)$.

$$\overrightarrow{AM} = (a-1; -2; -3).$$

$$d \text{ có VTCP: } \vec{u}_d = (2; 1; -2).$$

$$\text{Vì } \Delta \perp d \text{ nên } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2a - 2 - 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -1.$$

Vậy Δ qua $M(-1; 0; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{AM} = (-2; -2; -3) = -(2; 2; 3)$ nên Δ có phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}.$$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Đường thẳng đi qua A , cắt trục Oy và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , cắt trục Oy và vuông góc với đường thẳng d .

Gọi $B = \Delta \cap Oy$.

$$B \in Oy \Rightarrow B(0; b; 0) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (1; 1-b; 3).$$

Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = (1; 2; 1)$.

$$\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2b + 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (1; -2; 3).$$

Đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{BA} = (1; -2; 3)$ làm vector chỉ phương nên loại các phương án A, B, **C**.

Do đó chọn phương án **D**.

Câu 39: (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là.

A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

Lời giải

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ

$$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2} \text{ có VTCP } \vec{u} = (1; -2; 2).$$

Gọi $M(0; m; 0) \in Oy$, ta có $\overrightarrow{AM} = (-2; m-1; -3)$

$$\text{Do } \Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2 - 2(m-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$$

$$\text{Ta có } \Delta \text{ có VTCP } \overrightarrow{AM} = (-2; -4; -3) \text{ nên có phương trình } \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng d có phương trình:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}. \text{ Viết phương trình đường thẳng } \Delta \text{ đi qua } A, \text{ vuông góc và cắt } d.$$

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Đường thẳng } d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \text{ có véc tơ chỉ phương } \vec{u} = (1; 1; 2)$$

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d , nên nhận véc tơ chỉ phương của d là vectơ pháp tuyến $(P): 1(x-1) + y + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 5 = 0$

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $d \Rightarrow B(1+t; t; -1+2t)$

$$\text{Vì } B \in (P) \Leftrightarrow (1+t) + t + 2(-1+2t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow B(2; 1; 1)$$

Ta có đường thẳng Δ đi qua A và nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng

$$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Cách 2:

Gọi $d \cap \Delta = B \Rightarrow B(1+t; t; -1+2t)$

$\overrightarrow{AB} = (t; t; -3+2t)$, Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_d} = (1; 1; 2)$

Vì $d \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t+t+2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -1)$. Ta có đường thẳng Δ đi qua $A(1; 0; 2)$ và nhận véc tơ $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 41: (Mã 103 2018) Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4t \\ z = -3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Lời giải

$$d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d .

$$\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_P}] = (-1; 4; 3)$$

Gọi A là giao điểm của d và (P) . Tọa độ A là nghiệm của phương trình:

$$(-1+2t) + (-t) - (-2+2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow A(3; -2; 2)$$

Phương trình Δ qua $A(3; -2; 2)$ có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta} = (-1; 4; 3)$ có dạng: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

Câu 42: (Mã 123 2017) Trong không gian Oxyz cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Lời giải

+) VTCP của Δ, Δ' lần lượt là $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (1; 3; -2)$; $[\vec{u}, \vec{v}] = (-7; 7; 7)$

+) Vì d vuông góc với Δ và Δ' nên $\vec{u}_d = (-1; 1; 1)$.

+) d đi qua $M(-1; 1; 3)$ nên $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Câu 43: (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Lời giải

Ta có $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Gọi $M = \Delta \cap (P) \Rightarrow M \in \Delta \Rightarrow M(t; 2t-1; t+1)$

$M \in (P) \Rightarrow t - 2(2t-1) - (t+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 1; 2)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; -2; -1)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ

$\Rightarrow$ Đường thẳng d nhận $\frac{1}{2}[\vec{n}, \vec{u}] = (0; -1; 2)$ làm véc tơ chỉ phương và $M(1; 1; 2) \in d$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Câu 44: (TK 2020-2021) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là:

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Lời giải

Gọi $A(2a+1, a, -2a-1)$ và $B(b+2, 2b, -b-1)$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng d cần tìm với d_1, d_2 . Ta có $\overrightarrow{AB} = (b-2a+1, 2b-a, -b+2a)$ nên để $d \perp (P)$ thì

$$\frac{b-2a+1}{2} = \frac{2b-a}{2} = \frac{-b+2a}{-1}.$$

Giải ra được $(a;b) = (0;1)$ nên $\overrightarrow{AB} = (2;2;-1)$ và $A(1;0;-1), B(3;2;-2)$. Từ đó viết được

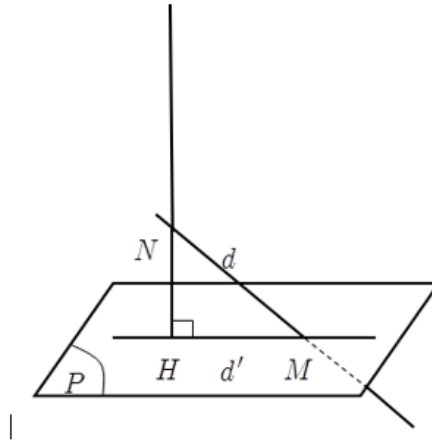
$$(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng

$(P): x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}$. **B.** $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$. **C.** $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$. **D.** $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Lời giải



Mặt phẳng (P) có một vec tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_p} = (1;2;1)$.

Gọi M là giao điểm của d và (P) .

$$M \in d \Rightarrow M(m; m+1; -m+2).$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow m+2(m+1)+(-m+2)-4=0 \Leftrightarrow m=0. \text{ Suy ra } M(0;1;2).$$

Lấy $N(1;2;1) \in d$.

Gọi Δ là đường thẳng qua N và vuông góc với (P) .

Suy ra đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_p} = (1;2;1)$.

$$\text{Do đó phương trình đường thẳng } \Delta \text{ là: } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của Δ và (P) .

$$H \in \Delta \Rightarrow H(1+h; 2+2h; 1+h).$$

$$H \in (P) \Leftrightarrow 1+h+2(2+2h)+(1+h)-4=0 \Leftrightarrow 6h+2=0 \Leftrightarrow h=-\frac{1}{3}. \text{ Suy ra } H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3} \right)$.

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P) .

Suy ra đường thẳng d' qua $M(0;1;2)$ có một vector chỉ phương là $\overrightarrow{u_{d'}} = 3\overrightarrow{MH} = (2;1;-4)$.

Vậy phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên (P) là: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

Câu 46: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$

và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 3 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình

A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{13}$. **B.** $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{1}$. **C.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{13}$.

Lời giải

Đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ có một vector chỉ phương $\vec{u}_d = (1;1;2)$ và đi qua $M(-1;0;1)$.

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (2;1;-1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) thì (α) có một vector pháp tuyến là

$\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}] = (-3;5;-1)$

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): -3(x+1) + 5(y-0) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y + z + 2 = 0$.

Gọi $d \cap (P) = A$. Ta có $A \in d \Rightarrow A(-1+t; t; 2t+1)$.

$A \in (P)$ nên $2(-1+t) + t - 1 - 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Suy ra $A(-1;0;1)$.

Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (P) , nên có $\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{n}_{(P)}] = (4;5;13)$ và đi qua $A(-1;0;1)$.

Phương trình của đường thẳng $d': \frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{13}$.

Câu 47: (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$, $(Q): x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

A. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2 \\ z = 3-t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 2 \\ z = -3-t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2 \\ z = 3+2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3-2t \end{cases}$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} = (1; 1; 1) \\ \vec{n}_{(Q)} = (1; -1; 1) \end{cases}$ và $[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (2; 0; -2)$. Vì đường thẳng d song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) , nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -1)$.

Đường thẳng d đi qua $A(1; -2; 3)$ nên có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d': \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ có vị trí

tương đối là:

A. cắt nhau.

B. chéo nhau.

C. song song.

D. trùng nhau.

Lời giải

d có VTCP $\vec{u} = (-2; 1; 3)$ và đi qua $M(1; -2; 4)$

d' có VTCP $\vec{u}' = (1; -1; 3)$ và đi qua $M'(-1; 0; -2)$

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{MM'} = (-2; 2; -6)$$

$$[\vec{u}, \vec{u}'] = (6; 9; 1) \neq \vec{0} \text{ và } [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$

Suy ra d cắt d' .

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$,

$d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. có vị trí tương đối là:

A. cắt nhau.

B. chéo nhau.

C. song song.

D. trùng nhau.

Lời giải

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \vec{u}_1 = (2; 1; -2); d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{u}_2 = (-2; -1; 2)$$

$$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2 \Rightarrow d_1 // d_2 \vee d_1 \equiv d_2$$

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ_1 có $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}$ trong các đường thẳng

dưới đây đường thẳng nào vuông góc với Δ_1 là:

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 6 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 3t \end{cases}$

Lời giải

Đường thẳng Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (0; 0; 3)$.

Mà $\vec{u}_c = (4; 2; 0)$, Ta có: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_c = 0 \Leftrightarrow 0.4 + 0.2 + 3.0 = 0 \Leftrightarrow \Delta_1 \perp \Delta_c$

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

A. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 1+3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 3+t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = 3+t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1-t \\ z = 3+t \end{cases}$

Lời giải

+) VTCP của Δ, Δ' lần lượt là $\vec{u} = (3;2;1)$ và $\vec{v} = (1;3;-2)$; $[\vec{u}, \vec{v}] = (-7;7;7)$

+) Vì d vuông góc với Δ và Δ' nên $\vec{u}_d = (-1;1;1)$.

+) d đi qua $M(-1;1;3)$ nên $d: \begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 3+t \end{cases}$.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG SAU KHI HỌC XONG PT ĐƯỜNG THẲNG

Câu 52: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

A. $3x+2y-z+1=0$.

B. $2x-2y+3z-17=0$.

C. $3x+2y-z-1=0$.

D. $2x-2y+3z+17=0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng d .

Ta có: $\vec{n}_P = \vec{u}_d = (3;2;-1)$ là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Phương trình mặt phẳng (P) là: $3(x-2)+2(y+2)-1(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-z+1=0$.

Câu 53: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ có phương trình là

A. $2x+2y+z+3=0$.

B. $x-2y-z=0$.

C. $2x+2y+z-3=0$.

D. $x-2y-z-2=0$.

Lời giải

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ thì Δ có một vec-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;2;1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Có $\Delta \perp (\alpha)$, nên $\vec{u} = (2;2;1)$ là một vec-tơ pháp tuyến của (α) .

Mặt phẳng (α) qua điểm $M(1;1;-1)$ và có một vec-tơ pháp tuyến $\vec{u} = (2;2;1)$.

Nên phương trình (α) là $2x+2y+z-3=0$.

Câu 54: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;1;-2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-3}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

- A.** $x+2y-3z-9=0$. **B.** $x+y-2z-6=0$. **C.** $x+2y-3z+9=0$. **D.** $x+y-2z+6=0$.

Lời giải

Mặt phẳng đi qua $M(1;1;-2)$ và vuông góc với d nhận véc tơ $\vec{n}(1;2;-3)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình: $x-1+2(y-1)-3(z+2)=0 \Leftrightarrow x+2y-3z-9=0$

Câu 55: (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+t \\ z=2 \end{cases}$

$d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-3z=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 ?

- A.** $2x-y+2z+13=0$ **B.** $2x+y+2z-22=0$
C. $2x-y+2z-13=0$ **D.** $2x-y+2z+22=0$

Lời giải:

Tọa độ giao điểm của d_1 và (P) là $A(4;-1;2)$

Mặt phẳng cần tìm đi qua A và nhận $\vec{u}_2(2;-1;2)$ làm VTCP có phương trình $2x-y+2z-13=0$.

Câu 56: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;0;2)$ và chứa trục hoành có phương trình là

- A.** $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $z=0$. **D.** $x+y+z=1$.

Lời giải

Với $O(0;0;0)$, ta $\overrightarrow{OA}=(0;0;2); \vec{i}=(1;0;0)$.

Mặt phẳng (P) chứa Ox và đi qua A nên có VTPT: $\vec{n}=[\overrightarrow{OA}, \vec{i}]= (0,2,0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $2(y-0)=0 \Leftrightarrow y=0$.

Câu 57: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, hãy viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng

$d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$ và tạo với mặt phẳng $(P): 2x-z+1=0$ góc 90° .

- A.** $(\alpha): x+5y+2z=0$. **B.** $(\alpha): x-7y-2z=0$.
C. $(\alpha): x-5y+2z=0$. **D.** $(\alpha): x+7y+2z=0$.

Lời giải

d đi qua $O(0;0;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(1;-1;-3)$.

(P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;0;-1)$.

Vì (α) chứa d và vuông góc với (P) nên $\vec{u}_{(\alpha)}=[\vec{u}_d; \vec{n}_{(P)}]=(1;-5;2)$

Vậy $(\alpha): x - 5y + 2z = 0$.

Câu 58: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-6}{-2}$;

$d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

A. $(P): x + 8y + 5z + 16 = 0$.

B. $(P): x + 8y + 5z - 16 = 0$.

C. $(P): 2x + y - 6 = 0$.

D. $(P): x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Lời giải

Phương trình tham số $d_1: \begin{cases} x = 2 + 2t_1 \\ y = -2 + t_1, (t_1 \in \mathbb{R}). \\ z = 6 - 2t_1 \end{cases}$

d_1 đi qua điểm $M(2; -2; 6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$.

Phương trình tham số $d_2: \begin{cases} x = 4 + t_2 \\ y = -2 - 2t_2, (t_2 \in \mathbb{R}). \\ z = -1 + 3t_2 \end{cases}$

d_2 đi qua điểm $N(4; -2; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -2; 3)$.

Vì (P) chứa d_1 và song song với d_2 ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -8; -5)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; -2; 6)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (-1; -8; -5)$ nên phương trình mặt phẳng $(P): x + 8y + 5z - 16 = 0$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 3)$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + y - 2z + 6 = 0$. Gọi B là điểm thuộc (P) sao cho đường thẳng AB cắt và vuông góc với d .

a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -1; 0)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

c) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB có tọa độ $(1; 2; 5)$.

d) Hoành độ của điểm B là 8.

Câu 2: Trong $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$.

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 0; -2)$.

b) Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) cắt nhau.

c) Gọi $H = d \cap (P) \Rightarrow H = (1; -1; 1)$.

d) Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 3; -2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$;

$d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B .

a) Điểm A thay đổi thuộc d_1 thì $A(1+a; 2+3a; a)$ với $a \in \mathbb{R}$.

b) $\vec{AM} = 2\vec{BM}$.

c) $OB = \sqrt{6}$.

d) Phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0; -1; 2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng Δ đi qua M và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A và B .

- a) Đường thẳng d_1 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$.
- b) Đường thẳng vuông góc với cả d_1 và d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (-2; 0; 1)$.
- c) Trung điểm của AB là $I\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}; -4\right)$.
- d) Điểm $N(9; -10; 18)$ thuộc đường thẳng Δ .

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 2; -1)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc d_1 và d_2 .

- a) $A(-1+2t; -1+t; 2-t)$ và $B(1-s; 2+s; 3+3s)$, với $t, s \in \mathbb{R}$.
- b) Đường thẳng AB đi qua M thì $A(1; 0; 1)$.
- c) Đường thẳng AB đi qua M thì AB có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$.
- d) Đường thẳng AB đi qua M thì $AB = 3$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -6)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A và B .

- a) M là điểm thuộc đường thẳng d_2 .
- b) Mặt phẳng (α) chứa d_1 và đi qua điểm M có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (-7; -1; 3)$.
- c) Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 6)$.
- d) Đường thẳng Δ đi qua điểm $N(2; -1; -6)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

- a) Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u}(1; 1; 2)$.
- b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d có phương trình tổng quát là $x + y + 2z - 1 = 0$.
- c) Hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d là điểm $H(1; 0; -1)$.
- d) Phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d có dạng: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$

Câu 8: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và điểm $A(1; 3; -1)$.

a) Đường thẳng Δ đi qua $M(1; 0; -1)$.

b) Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và trục Ox . Khi đó $\sin \alpha$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d là điểm $H(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c = 5$.

d) Đường thẳng d đi qua điểm A , cắt và vuông góc với đường thẳng Δ đi qua $M(-1; 2; 1)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 3)$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

a) Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1(1; 2; 0)$.

b) Có hai điểm N thuộc đường thẳng d sao cho $MN = 3\sqrt{2}$.

c) Đường thẳng d_1 đi qua A vuông góc với trục Ox và đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương $\vec{v}(0; 1; 1)$.

d) Đường thẳng Δ đi qua M , cắt và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(2; 1; -1)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với d có phương trình tổng quát là $2x + by + cz + d = 0$. Khi đó $b + c + d = -5$.

c) Gọi M' là điểm đối xứng với M qua d . Khi đó $M'(1; 0; -2)$.

d) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng d .
 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{a} = \frac{z}{b}$. Khi đó $a + b = -6$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$.

a) Vectơ có tọa độ $(2; -1; 2)$ là một vectơ chỉ phương của d .

b) Vectơ có tọa độ $(1; 1; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

c) Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là điểm $A(3; -2; 2)$.

d) Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình

tham số là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$.

- Vector có tọa độ $(1; -2; -1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- Vector có tọa độ $(0; -1; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d .
- Vector có tọa độ $(0; -1; 2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng nằm trong (P) và vuông góc với d .
- Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình

tham số là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y + z = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{2}$.

- Điểm $M(1; 0; 3)$ là một điểm thuộc đường thẳng d .
- Đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) .
- Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là điểm $A(1; 0; -2)$.
- Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình

tham số là $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 4 - 7t \end{cases}$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$.

- Điểm $M(-2; -1; 2)$ là một điểm thuộc mặt phẳng (P) .
- Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm $N(4; -8; 0)$.
- Vector có tọa độ $(5; 0; 5)$ là một vector đồng thời vuông góc với vector chỉ phương của đường thẳng d và vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình

tham số là $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 6 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$.

- Mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 6 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}(1; 1; -1)$.
- Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$ có vector chỉ phương $\vec{u}(1; -4; 0)$.
- Đường thẳng d cắt (α) .
- Hình chiếu vuông góc của d trên (α) có phương trình là $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{5}$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

a) Điểm $N(0; 2; 0)$ thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .

c) Phương trình tham số của d là
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -4 - 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + t \end{cases}$$

d) Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

$$d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{2}.$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

a) Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $A(1; -1; 1)$

b) Điểm $N(1, 2, -1)$ thuộc đường thẳng d .

c) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(1; 1; 1)$.

d) Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}.$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ cho $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng (Oxy) .

a) Điểm $M(2; 3; 1)$ thuộc đường thẳng (d) .

b) Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1; 0; 0)$.

c) Đường thẳng $d': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$ là hình chiếu của đường thẳng d trên (Oxy) .

d) Điểm $N(3; 1; 0)$ thuộc đường thẳng d' .

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t, t \in \mathbb{R}, \\ z = 2 - t \end{cases}$ cắt mặt phẳng

$(P): x + y + z - 3 = 0$ tại điểm I . Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta \perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Gọi $M(a; b; c)$ là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng Δ (với $a + b > c$).

a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

b) Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta} = (-3; 2; 1)$.

c) $IM = d(M, \Delta)$

d) $a + b + c = 3$

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Gọi H là hình chiếu của A đến d . Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

a) Hình chiếu của A đến d có tọa độ là $(7; -5; 2)$.

b) Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH \perp (\alpha)$.

c) (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-1; 1; -1)$.

d) Phương trình mặt phẳng (α) là $x + y - z = 3$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và điểm $M(2; -2; -5)$.

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 là $\vec{u}_1 = (6; 2; 4)$.

b) Điểm $A(-4; 4; 0)$ thuộc đường thẳng d_2 .

c) Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình

tham số là $\begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}$.

d) Điểm $N(a, b, c) \in d_2$ và độ dài MN là ngắn nhất. Khi đó $a + b + c = 2$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 0), B(-1; 0; 1)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$.

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (-2; -2; 2)$.

b) Đường thẳng d và mặt phẳng (P) song song với nhau.

c) Đường thẳng d' đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = -3t \end{cases}$

d) Một điểm M thay đổi trên đường thẳng d thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MA + MB$ là $\sqrt{6}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 1 = 0$.

- a) Δ là đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d . Khi đó, $N(3;1;-3)$ là một điểm thuộc đường thẳng Δ .
- b) Gọi Q là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Tọa độ của điểm Q là $Q(9;-6;-7)$
- c) $F(3;0;1)$ là một điểm thuộc đường thẳng d và thỏa mãn $OF = \sqrt{10}$.
- d) Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d . Tọa độ điểm B là $B(0;3;-2)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua $M(-1;1;1)$ và đối xứng với Δ qua mặt phẳng (Oxy) .

- a) Δ giao mặt phẳng (Oxy) tại $A(2;4;0)$
- b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}(-1;1;-1)$
- c) Phương trình đường thẳng $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$
- d) d đi qua điểm $B(0;4;2)$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$. Đường thẳng d đi qua $M(3;-3;4)$ và đối xứng với Δ qua mặt phẳng (Oxz) .

- a) d giao mặt phẳng (Oxz) tại $A(1;0;3)$
- b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}(-1;1;-1)$
- c) Phương trình đường thẳng $(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{1}$
- d) d đi qua điểm $B(-1;3;2)$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;-1)$ và điểm $N(0;1;1)$. Đường thẳng d đi qua điểm M và điểm N' với N' là điểm đối xứng của điểm N qua mặt phẳng (Oxy) . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Điểm $N'(0;0;-1)$.
- b) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1;-1;0)$.
- c) Phương trình đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$$
- d) Đường thẳng d giao với mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 1 = 0$ tại điểm N' .

- Câu 27:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $\Delta_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$
- Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.
 - Đường thẳng Δ_1 và trục Ox chéo nhau.
 - Đường thẳng Δ_2 trùng với đường thẳng $\Delta_3: \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{4}$.
 - Đường thẳng Δ_2 và trục Oy cắt nhau.
- Câu 28:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng: $(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $(d_2): \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$, $(d_3): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$.
- Đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.
 - d_3 vuông góc với d_1 .
 - Ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng nằm trong một mặt phẳng.
 - Có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3
- Câu 29:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = -2t' \\ y = -5 + 3t' \\ z = 4 + t' \end{cases}$.
- Đường thẳng d và $\Delta: \frac{x-5}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-1}$ song song với nhau.
 - d và d' chéo nhau.
 - d và d' vuông góc.
 - Với mọi giá trị khác 0 của tham số m thì d và $\Delta': \begin{cases} x = 1 + 2mt \\ y = 2 - 2mt \\ z = mt \end{cases}$ song song.
- Câu 30:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;0;-1)$. Gọi d_2 là đường thẳng đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (a;1;2)$.
- Đường thẳng d_2 và trục Ox chéo nhau.
 - Khi $a = 0$ thì $d_1 \perp d_2$.
 - Đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau khi và chỉ khi $a = 0$.
 - Với $a \neq 0$ thì d_1 và d_2 chéo nhau.

Câu 31: Trong không gian cho mặt phẳng $(P): x + 2y + mz + 1 = 0$ và đường thẳng

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{2}.$$

- Khi $m = 1$ thì đường thẳng (d) song song với (P) .
- Khi $m = 3$ thì đường thẳng (d) cắt (P) tại một điểm.
- Khi $m = 3$ thì đường thẳng (d) cắt (P) tại một điểm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .
- Khi $m = -\frac{a}{b}$ thì đường thẳng (d) song song với (P) . Khi đó $a + b = 6$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x + 4y + m^2z - 8 = 0$ và đường thẳng

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-m}{-1}.$$

- Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; -1)$ và đi qua điểm $M(0; 0; m)$.
- Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 2; m)$.
- Khi $m = 0$ thì đường thẳng (d) cắt và vuông góc với mặt phẳng (P) tại một điểm.
- Khi $m = -\frac{a}{b}$ thì đường thẳng (d) song song với (P) . Khi đó $a^2 + b^2 = 5$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

- Điểm $M(1; 3; 2)$ nằm trên đường thẳng d .
- Một VTCP của d là $\vec{u}(1; 3; 2)$
- Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.
- Đường thẳng d và đường thẳng $d': \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ là hai đường chéo nhau.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1}$.

- Điểm $M(3; -4; 1)$ nằm trên đường thẳng d .
- Một VTCP của d là $\vec{u}(-3; 4; -1)$
- Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 5 - 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

d) Đường thẳng Δ song song với d và cắt cả hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ có phương trình là $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho $M(2;1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

a) Điểm $M(1;-1;1)$ nằm trên đường thẳng d .

b) Một VTCP của d là $\vec{u}(2;1;-1)$

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

d) Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d thì phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$

Câu 36: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

a) Điểm $M(1;3;-2)$ nằm trên đường thẳng d .

b) Một VTCP của d là $\vec{u}(-1;1;-2)$.

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

d) Phương trình đường vuông góc chung của d và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ là

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-2}.$$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{3-y}{2} = \frac{z+4}{2}$.

a) Đường thẳng d qua điểm $M(1;2;0)$.

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{v} = (1;2;2)$.

c) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -6 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

d) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-2}{6}$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$.

- a) Vector $\vec{u} = (2; 3; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng (d) .
- b) Vector $\vec{u}_1 = (-4; -6; 2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng (d) .
- c) Đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(9; 10; 0)$.
- d) Phương trình chính tắc của đường thẳng (d) là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{-1}$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

- a) Điểm $M(7; -3; -1)$ thuộc đường thẳng d .
- b) Điểm $N(-1; 1; -5)$ thuộc đường thẳng d .
- c) Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (4; -2; 3)$ là một vector chỉ phương.
- d) Đường thẳng d nhận $\vec{v} = (-4; 2; -3)$ là một vector chỉ phương.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 2t \\ z = -3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

- a) Điểm $M(2; 2; -3)$ thuộc đường thẳng d .
- b) Khi $t = -2$ đường thẳng d đi qua điểm A có tọa độ $(12; -4; -3)$.
- c) Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (-5; 2; 0)$ là một vector chỉ phương.
- d) Điểm $N(7; -2; 3)$ không nằm trên đường thẳng d .

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{1}$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-1}.$$

- a) Đường thẳng d qua điểm $M(1; -2; 4)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 1)$.
- b) Đường thẳng Δ qua điểm $N(-5; 2; -2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{v} = (2; -1; -1)$.
- c) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t' \\ y = -t' \\ z = -2 - t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$.
- d) Đường thẳng d và đường thẳng Δ vuông góc và cắt nhau.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{3-y}{2} = \frac{z+4}{2}$.

a) Đường thẳng d qua điểm $M(1;2;0)$.

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{v} = (1;2;2)$.

c) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -6 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

d) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-2}{6}$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

a) Điểm $M(1;2;-1)$ thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2;-1;1)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d là: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

d) Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d là: $H(3;1;0)$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;-2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

a) Điểm $N(-1;-2;2)$ thuộc đường thẳng Δ .

b) Đường thẳng đi qua M, N có một vector chỉ phương là: $\vec{u} = (2;3;-4)$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

d) Hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng Δ là: $H(a;b;c)$, khi đó $a+b+c = -\frac{1}{3}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(1;0;2)$.

a) Điểm $B(2;1;-1)$ không thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1;0;1)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;0;2)$, đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$.

d) $M(a;b;c)$ là một điểm nằm trên đường thẳng d và cách điểm A một khoảng có độ dài bằng $\sqrt{26}$. Khi $b > 0$ thì $a+b+c = 3$.

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;0;2)$, $N(2;2025;2026)$ và đường thẳng d có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2024}{1} = \frac{z-2024}{2}$.

a) Điểm M và N cùng thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{a} = (1; 2024; 2024)$.

c) Đường thẳng d' đi qua điểm M và N có phương trình là: $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}$.

d) Đường thẳng qua M , đồng thời vuông góc và cắt d có phương trình là:
$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+4}{-2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-3}{1}$.

a) Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d có một vector chỉ phương là: $\vec{u}_{\Delta} = (4; -2; 4)$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Điểm $K(3;5;2)$ thuộc vào đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d .

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-1;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

a) Hình chiếu vuông góc của A xuống đường thẳng d có tọa độ là: $H(3;-2;4)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống đường thẳng d khi đó: $AH = \sqrt{29}$.

c) Điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là: $M(2;-3;5)$.

d) Gọi M là điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d khi đó: $OM = \sqrt{30}$ với O là gốc tọa độ.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$. Gọi Δ

là đường thẳng đi qua M , vuông góc với d và cắt Oz .

a) Một vector chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-3; 0; 1)$.

b) Đường thẳng Δ có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{-3} = y = \frac{z-1}{1}$.

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm $K(4;-1;0)$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;0;4)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , vuông góc và cắt d .

a) Một vectơ chỉ phương của Δ là $(1;1;-1)$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;3;1)$.

c) Đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

d) Đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=-4-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-2t \\ y=3-2t \\ z=1-3t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=6+2t' \\ y=3+2t' \\ z=7+9t' \end{cases}$.

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3;1)$.

b) Đường thẳng d' đi qua điểm $B(6;3;7)$.

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

d) Cosin góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\frac{35}{\sqrt{1513}}$.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và

$d': \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

a) Đường thẳng d có vtcp $\vec{u} = (2;1;4)$.

b) Đường thẳng d' có vtcp $\vec{u}' = (3;2;1)$.

c) Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau.

d) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=-mt \\ y=2-3t \\ z=1+(2m+1)t \end{cases}$ và $d: \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2m} = \frac{z-2}{3}$.

với $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;2;1)$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $B(-3;1;2)$.

c) Đường thẳng Δ có vtcp $\vec{u}_{\Delta} = (m;3;2m+1)$.

d) $m = -3$ thì $\Delta \perp d$.

Câu 54: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có phương trình tham số lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = 5 - t' \\ z = 4 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

a) Phương trình chính tắc của d là: $\frac{x+2}{7} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$.

b) Phương trình chính tắc của d' là: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-4}{-1}$.

c) Hai đường thẳng d và d' trùng nhau.

d) Hai đường thẳng d và d' không có điểm chung.

Câu 55: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$ và đường thẳng $\Delta_2: \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 13 + 3t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$.

a) $\vec{u}_1 = (-1; 2; 4)$, $\vec{u}_2 = (2; 3; -1)$ lần lượt là một vector chỉ phương của Δ_1, Δ_2 .

b) $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

d) Đường vuông góc chung d của Δ_1 và Δ_2 có phương trình là $\frac{x-\frac{8}{2}}{7} = \frac{y-\frac{17}{14}}{-1} = \frac{z-\frac{69}{14}}{1}$.

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$, $\Delta_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

Xét các vector $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$ và $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$.

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0; 3; -3)$ và có $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$ là một vector chỉ phương.

b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4; -2; 4)$ và có $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$ là một vector chỉ phương.

c) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; -5; -3)$.

d) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Câu 57: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 3 = 0$.

a) Điểm $M(1; -2; 3)$ thuộc Δ .

b) Vector $\vec{u} = (2; -1; -2)$ là một vector chỉ phương của Δ .

c) Đường thẳng đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và vuông góc với (P) có phương trình là $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -3 - 2t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$.

d) Đường thẳng đi qua điểm $N(2; 3; -1)$, vuông góc với Δ và song song với (P) có phương trình là $\frac{x-2}{7} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+1}{4}$.

Câu 58: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;-2)$, đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ và mặt phẳng

$$(P): x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;3)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (-2;2;1)$.

b) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .

c) Điểm $H(2;-1;2)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng Δ .

d) Điểm $Q\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P) .

Câu 59: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;-2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

a) Điểm $N(-1;-2;2)$ thuộc đường thẳng Δ .

b) Đường thẳng đi qua M, N có một vector chỉ phương là: $\vec{u} = (2;3;-4)$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

d) Hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng Δ là: $H(a;b;c)$, khi đó $a+b+c = -\frac{1}{3}$.

Câu 60: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;0;2)$, $N(2;2025;2026)$ và đường thẳng d có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2024}{1} = \frac{z-2024}{2}$.

a) Điểm M và N cùng thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{a} = (1;2024;2024)$.

c) Đường thẳng d' đi qua điểm M và N có phương trình là: $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}$.

d) Đường thẳng qua M , đồng thời vuông góc và cắt d có phương trình là: $\begin{cases} x = 3-t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Câu 61: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+4}{-2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-3}{1}$.

a) Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d có một vector chỉ phương là: $\vec{u}_\Delta = (4;-2;4)$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 3-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Điểm $K(3;5;2)$ thuộc vào đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d .

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Câu 62: Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x=1 \\ y=2-3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=3+4t \end{cases}$, $\Delta_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{2}$ và

mặt phẳng $(P) : x+3y-2z+1=0$.

a) Vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a} = (1; -3; 4)$

b) Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 3; -2)$

c) Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (3; -3; 2)$

d) Đường thẳng d_3 qua $A(1; -1; 2)$, cắt và vuông góc với trục Oz có vector chỉ phương là $\vec{u}_3 = (-1; -1; 0)$

Câu 63: Trong không gian $Oxyz$, Hai máy bay cùng xuất phát từ hai phi trường, trên màn hình radar của trạm điều khiển (với đơn vị trên ba trục chính theo đơn vị km), sau khi xuất phát t giờ ($t \geq 0$),

vị trí của máy bay số một được xác định bởi công thức $\begin{cases} x=20+2t \\ y=20+t \\ z=-10-t \end{cases}$, vị trí máy bay số hai có tọa

độ là $(30+t'; 20+t'; -10-t')$

a) Côsin góc giữa hai máy bay số một và máy bay số hai là $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

b) Sau 10 giờ kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất

c) Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường (đứng ở vị trí ban đầu) thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20; 20; -10)$

d) Sau 5 giờ thì vị trí tọa độ máy bay số 2 trong không gian là $(35; 25; -10)$

Câu 64: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ với tốc độ là $4,5 \text{ m/s}$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).



a) Phương trình tham số của đường cáp là:
$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Giả sử sau thời gian $t(\text{s})$ kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M . Khi đó tọa độ điểm

M là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quãng đường AB dài 800 m .

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30° .



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 3)$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + y - 2z + 6 = 0$. Gọi B là điểm thuộc (P) sao cho đường thẳng AB cắt và vuông góc với d .

a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -1; 0)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

c) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB có tọa độ $(1; 2; 5)$.

d) Hoành độ của điểm B là 8.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; -1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Gọi $M(2+t; -1+2t; -t)$ là giao điểm đường thẳng d và đường thẳng AB .

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t; 2t; -t-3)$

$$\overrightarrow{AM} \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot t + 2 \cdot 2t + (-1) \cdot (-t-3) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Khi đó: $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{1}{2}; -1; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \vec{u} = (1; 2; 5)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB .

Đường thẳng AB có phương trình là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$

$$\text{Tọa độ của } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 5t \\ 3x + y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 8 \end{cases}.$$

Vậy $B(3;1;8)$.

Vậy hoành độ của điểm B là 3.

Câu 2: Trong $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$.

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 0; -2)$.

b) Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) cắt nhau.

c) Gọi $H = d \cap (P) \Rightarrow H = (1; -1; 1)$.

d) Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; 2; 1)$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 1; 3)$

Vì $\vec{n}_p \cdot \vec{u}_d = 7 \neq 0$ nên đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) cắt nhau.

Gọi $H = d \cap (P) \Rightarrow$ Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H = (1; 1; 1).$$

Vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d nên đường thẳng Δ đi qua điểm H và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_p, \vec{u}_d] = (5; -1; -3)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$;

$d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B .

a) Điểm A thay đổi thuộc d_1 thì $A(1+a; 2+3a; a)$ với $a \in \mathbb{R}$.

b) $\vec{AM} = 2\vec{BM}$.

c) $OB = \sqrt{6}$.

d) Phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng

$$+ A \in d_1 \Rightarrow A(1+a; 2+3a; a).$$

$$+ B \in d_2 \Rightarrow B(-1-b; 1+2b; 2+4b)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} = (2-a; 1-3a; -2-a), \overrightarrow{BM} = (4+b; 2-2b; -4-4b)$$

Vì A, B và M thẳng hàng nên $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{BM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-a = k(4+b) \\ 1-3a = k(2-2b) \\ -2-a = k(-4-4b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4k+kb = 2 \\ 3a+2k-2kb = 1 \\ a-4k-4kb = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ k = \frac{1}{2} \\ bk = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ k = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } A(1; 2; 0), B(-1; 1; 2).$$

b) Sai vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BM}$.

c) Đúng vì $OB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

d) Đúng

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 0)$ và có một vector chỉ phương $\overrightarrow{BA} = (2; 1; -2)$ có phương trình

$$\text{chính tắc là } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0; -1; 2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng Δ đi qua M và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A và B .

a) Đường thẳng d_1 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$.

b) Đường thẳng vuông góc với cả d_1 và d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (-2; 0; 1)$.

c) Trung điểm của AB là $I\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}; -4\right)$.

d) Điểm $N(9; -10; 18)$ thuộc đường thẳng Δ .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $H(1; -2; 3)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$.

b) Đúng

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $K(-1; 4; 2)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2; -1; 4)$.

Đường thẳng vuông góc với d_1, d_2 có một vector chỉ phương là $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2; 1; 0)$.

c) Sai

Ta có $\Delta \cap d_1 = A(t_1+1; -t_1-2; 2t_1+3)$ và $\Delta \cap d_2 = B(2t_2-1; -t_2+4; 4t_2+2)$.

$$\overrightarrow{MA} = (t_1+1; -t_1-1; 2t_1+1); \overrightarrow{MB} = (2t_2-1; -t_2+5; 4t_2).$$

$$\text{Ta có: } M, A, B \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 1 = k(2t_2 - 1) \\ -t_1 - 1 = k(-t_2 + 5) \\ 2t_1 + 1 = 4kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ kt_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ t_2 = -4 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{9}{2}; -\frac{11}{2}; 10\right), B(-9; 8; -14).$$

$$\text{Suy ra } I\left(-\frac{9}{4}; \frac{5}{4}; -2\right).$$

d) Đúng

Đường thẳng Δ đi qua $M(0; -1; 2)$, một VTCP là $\overrightarrow{BM} = (9; -9; 16)$ có phương trình chính tắc là $\Delta: \frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$. Đường thẳng này đi qua $N(9; -10; 18)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 2; -1)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc d_1 và d_2 .

a) $A(-1+2t; -1+t; 2-t)$ và $B(1-s; 2+s; 3+3s)$, với $t, s \in \mathbb{R}$.

b) Đường thẳng AB đi qua M thì $A(1; 0; 1)$.

c) Đường thẳng AB đi qua M thì AB có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

d) Đường thẳng AB đi qua M thì $AB = 3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng $A(-1+2t; -1+t; 2-t)$; $B(1-s; 2+s; 3+3s)$.

b) Đúng

$$\overrightarrow{MA} = (2t-4; t-3; -t+3), \overrightarrow{MB} = (-s-2; s; 3s+4)$$

$$AB \text{ đi qua } M \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-4 = k(-s-2) \\ t-3 = ks \\ -t+3 = k(3s+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ s=-1 \\ k=2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A(1; 0; 1), B(2; 1; 0).$$

c) Sai vì AB có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -1)$ không cùng phương $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

d) Sai vì $AB = \sqrt{3}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -6)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A và B .

a) M là điểm thuộc đường thẳng d_2 .

- b) Mặt phẳng (α) chứa d_1 và đi qua điểm M có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (-7; -11; 3)$.
- c) Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 6)$.
- d) Đường thẳng Δ đi qua điểm $N(2; -1; -6)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai vì điểm $M(2; -1; -6) \notin d_2$

b) Đúng

Đường thẳng d_1 qua $I(1; 1; -1)$ và có một vector chỉ phương $\vec{n}_1 = (2; -1; 1)$.

Ta có $\vec{IM} = (1; -2; -5)$.

Mặt phẳng (α) có một vector pháp tuyến là $[\vec{IM}, \vec{u}_1] = (-7; -11; 3) = \vec{n}$.

c) Đúng

+ A thuộc d_1 : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ nên $A(1+2t; 1-t; -1+t)$.

+ B thuộc d_2 : $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ nên $B(-2+3t'; -1+t'; 2+2t')$.

Suy ra $\vec{MA} = (2t-1; 2-t; 5+t)$, $\vec{MB} = (-4+3t'; t'; 8+2t')$.

Ta có, A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{MA} = k\vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-1 = k(-4+3t') \\ 2-t = k(t') \\ 5+t = k(8+2t') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=2 \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra $A(3; 0; 0)$, $B(4; 1; 6)$

Suy ra $\vec{AB} = (1; 1; 6)$ là một vector chỉ phương của Δ và $\vec{AB} = \vec{u}$.

d) Đúng

Đường thẳng Δ qua $A(3; 0; 0)$ có một vector chỉ phương $\vec{AB} = (1; 1; 6)$ có phương trình chính tắc là $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{6}$. Đường thẳng Δ đi qua $N(2; -1; -6)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng d có phương trình:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1; 1; 2)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d có phương trình tổng quát là $x + y + 2z - 1 = 0$.

c) Hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d là điểm $H(1; 0; -1)$.

d) Phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d có dạng: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;1;2)$ **Mệnh đề a) đúng.**

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;1;2)$.

Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là $x + y + 2z - 5 = 0$.

Mệnh đề b) sai.

c) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;1;2)$.

Gọi $H(t+1;t;2t-1)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d . Ta có

$$\vec{AH}(t;t;2t-3) \text{ và } \vec{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2;1;1)$$

Mệnh đề c) Sai.

d) Gọi $d \cap \Delta = B \Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$

$$\vec{AB} = (t;t;-3+2t), \text{ Đường thẳng } d \text{ có VTCP là } \vec{u_d} = (1;1;2)$$

$$\text{Vì } d \perp \Delta \text{ nên } \vec{AB} \perp \vec{u_d} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow t + t + 2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra $\vec{AB} = (1;1;-1)$. Ta có đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$ và nhận véc tơ $\vec{AB} = (1;1;-1)$ là

$$\text{véc tơ chỉ phương có dạng } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Mệnh đề d) đúng.

Câu 8: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;3;-1)$.

a) Đường thẳng Δ đi qua $M(1;0;-1)$.

b) Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và trục Ox . Khi đó $\sin \alpha$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d là điểm $H(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c=5$.

d) Đường thẳng d đi qua điểm A , cắt và vuông góc với đường thẳng Δ đi qua $M(-1;2;1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) Đường thẳng Δ đi qua $M(1;0;-1)$. **Mệnh đề a) đúng.**

b) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;-1;1)$.

Trục Ox có một véc tơ chỉ phương là $\vec{i}(1;0;0)$.

$$\text{Ta có } \cos(\Delta; Ox) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin(\Delta; Ox) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Mệnh đề b) sai.

c) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;-1;1)$.

Gọi $H(t+1; -t; t-1)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d . Ta có

$$\vec{AH}(t; -t-3; t) \text{ và}$$

$$\vec{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3t+3=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(0; 1; -2) \Rightarrow a+b+c=-1.$$

Mệnh đề c) sai.

d) Gọi B là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ .

Vì $B \in \Delta$ nên tọa độ $B(1+t; -t; -1+t)$. Khi đó $\vec{BA}=(-t; t+3; -t)$.

Đường thẳng Δ có một vec tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1; -1; 1)$.

$$d \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{BA} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{BA} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Suy ra $\vec{BA}=(1; 2; 1)$.

Do đó đường thẳng d đi qua điểm A và nhận $\vec{BA}$ làm vector chỉ phương có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{1}$. Khi đó $M(-1; 2; 1)$ không thuộc d .

Mệnh đề d) sai.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 3)$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

a) Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1(1; 2; 0)$.

b) Có hai điểm N thuộc đường thẳng d sao cho $MN=3\sqrt{2}$.

c) Đường thẳng d_1 đi qua A vuông góc với trục Ox và đường thẳng d có một vec tơ chỉ phương $\vec{v}(0; 1; 1)$.

d) Đường thẳng Δ đi qua M , cắt và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=3-t \end{cases} (t \text{ là tham số}).$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1(2; -1; 1)$. **Mệnh đề a) sai.**

b) Vì $N \in d$ nên tọa độ $B(1+2a; 2-a; a)$.

Ta có:

$$MN = \sqrt{(2a)^2 + (3-a)^2 + (a-3)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 6a^2 - 12a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow N_1(1; 2; 0) \\ a=2 \Rightarrow N_2(5; 0; 2) \end{cases}$$

Có hai điểm N thuộc đường thẳng d sao cho $MN=3\sqrt{2}$.

Mệnh đề b) đúng.

c) Đường thẳng d có một vec tơ chỉ phương là $\vec{u}(1; -1; 1)$.

Trục Ox có một véc tơ chỉ phương là $\vec{i}(1;0;0)$.

Đường thẳng d_1 đi qua A vuông góc với trục Ox và đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương $\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{i} \end{bmatrix} = (0;1;1)$.

Mệnh đề c) đúng.

d) Gọi $I = d \cap \Delta \Rightarrow I(1+2t; 2-t; t)$. Khi đó đường thẳng Δ đi qua 2 điểm I và M nên có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{IM} = (-2t; -3+t; 3-t)$.

Mặt khác $d \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(-2t) - 1(-3+t) + 1(3-t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; -1; 3)$ và có véc tơ chỉ phương

$$\overrightarrow{IM} = (-2; -2; 2) \text{ có phương trình là: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 3-t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

Mệnh đề d) đúng.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(2;1;-1)$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với d có phương trình tổng quát là $2x + by + cz + d = 0$. Khi đó $b + c + d = -5$

c) Gọi M' là điểm đối xứng với M qua d . Khi đó $M'(1;0;-2)$.

d) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng d . $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{a} = \frac{z}{b}$. Khi đó $a + b = -6$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(2;1;-1)$. **Mệnh đề a) đúng.**

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với d có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2;1;-1)$. Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là $2(x-2) + y - 1 - z = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 5 = 0$.

$$\text{Do } (P) \text{ có phương trình tổng quát là } 2x + by + cz + d = 0. \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \Rightarrow b + c + d = -5 \\ d = -5 \end{cases}$$

Mệnh đề b) đúng.

c) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;-1;1)$.

Gọi $H(2b+1; -1+b; -b)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng d .

Ta có $\vec{MH}(2b-1; b-2; -b)$.

Do $\vec{MH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2a-1) + 1(a-2) + a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{7}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{-2}{3}\right)$.

M' là điểm đối xứng với M qua d . Khi đó H là trung điểm $MM' \Rightarrow M'\left(\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Mệnh đề c) sai.

d) Gọi $N(1+2t; -1+t; -t)$ là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng d

Lúc đó đường thẳng Δ nhận $\vec{MN}(-1+2t; -2+t; -t)$ làm vector chỉ phương.

Mặt khác Δ vuông góc với đường thẳng d nên ta có: $2(2t-1) + t - 2 + t = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$.

Với $t = \frac{2}{3}$ đường thẳng Δ nhận $\vec{MN}\left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ hoặc $\vec{u}(1; -4; 2)$ làm vtcp.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$. Do đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{a} = \frac{z}{b}$.

Khi đó $a+b=-6$.

Mệnh đề d) đúng.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$.

a) Vector có tọa độ $(2; -1; 2)$ là một vector chỉ phương của d .

b) Vector có tọa độ $(1; 1; 1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

c) Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là điểm $A(3; -2; 2)$.

d) Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình

$$\text{tham số là } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đ.

b) S. Vector có tọa độ $(1; 1; -1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

c) Đ.

Gọi A là giao điểm của d và (P) . Tọa độ A là nghiệm của phương trình:

$$(-1+2t) + (-t) - (-2+2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow A(3; -2; 2)$$

d) Đ.

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d suy ra một vectơ chỉ phương của Δ là

$$\vec{u}_{\Delta} = [\vec{u}_d, \vec{n}_P] = (-1; 4; 3). \text{ Phương trình } \Delta \text{ qua } A(3; -2; 2) \text{ có vtcp } \vec{u}_{\Delta} = (-1; 4; 3) \text{ là: } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$.

- a) Vectơ có tọa độ $(1; -2; -1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
 b) Vectơ có tọa độ $(0; -1; 1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .
 c) Vectơ có tọa độ $(0; -1; 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng nằm trong (P) và vuông góc với d .
 d) Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình

tham số là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Đ.

b) S.

c) Đ.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; -2; -1)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1; 2; 1)$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với Δ

$\Rightarrow$ Đường thẳng d nhận $\frac{1}{2}[\vec{n}, \vec{u}] = (0; -1; 2)$ làm một véc tơ chỉ phương.

d) S.

Gọi $M = d \cap (P) \Rightarrow M \in d \Rightarrow M(t; 2t-1; t+1) \quad M \in (P) \Rightarrow t - 2(2t-1) - (t+1) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 1; 2)$ không thuộc đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y + z = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{2}$.

- a) Điểm $M(1; 0; 3)$ là một điểm thuộc đường thẳng d .
 b) Đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) .
 c) Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là điểm $A(1; 0; -2)$.
 d) Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình

tham số là $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 4 - 7t \end{cases}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) S. Vì $\frac{1-1}{1} = \frac{0}{-2} \neq \frac{3+3}{2}$ nên $M(1; 0; 3) \notin d$

b) Đ.

Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}_d = (1; -2; 2)$ và mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_p = (3; 1; 1)$. Hai vectơ không cùng phương nên d không vuông góc với (P) .

c) S.

Gọi $A = \Delta \cap d$ thì $A = (P) \cap d \Rightarrow A(1; 0; -3)$

d) Đ.

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d . Do Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d] = (4; -5; -7)$

Gọi $A = \Delta \cap d$ thì $A = (P) \cap d \Rightarrow A(1; 0; -3)$. Vậy phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 0 - 5t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 4 - 7t \end{cases}.$$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

a) Điểm $M(-2; -1; 2)$ là một điểm thuộc mặt phẳng (P) .

b) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm $N(4; -8; 0)$.

c) Vectơ có tọa độ $(5; 0; 5)$ là một vectơ đồng thời vuông góc với vectơ chỉ phương của đường thẳng d và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

d) Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình

$$\text{tham số là } \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đ. Vì $2 \cdot (-2) + (-1) - 2 \cdot 2 + 9 = 0$ nên $M(-2; -1; 2)$ là một điểm thuộc mặt phẳng (P) .

b) S. Vì, tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (Oxy) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -9 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) Đ.

$$[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}] = (5; 0; 5)$$

d) Đ.

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d . $\begin{cases} \Delta \perp d \\ \Delta \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{u}_d \\ \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{n}_{(P)} \end{cases}$,

$[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}] = (5; 0; 5)$. Do đó một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_{\Delta} = (1; 0; 1)$. Gọi $A = \Delta \cap d$ thì $A = (P) \cap d \Rightarrow A(0; -1; 4)$. Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}.$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 6 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}.$$

a) Mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 6 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; 1; -1)$.

b) Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; -4; 0)$.

c) Đường thẳng d cắt (α) .

d) Hình chiếu vuông góc của d trên (α) có phương trình là $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{5}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) **Đúng**

Mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 6 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; 1; -1)$.

b) **Sai**

Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; 3; 5)$.

c) **Sai**

Vì $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 0$ nên $d \parallel (\alpha)$.

d) **Đúng**

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên $(\alpha) \Rightarrow d' \perp d$.

Lấy $A(1; -4; 0) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α) .

Suy ra phương trình đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Gọi A' là hình chiếu của A lên (α) thì $A' = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow A'(0; -5; 1)$.

Đường thẳng d' là đường thẳng đi qua $A'(0; -5; 1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; 3; 5)$ có phương trình là $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{5}$.

Câu 16: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

a) Điểm $N(0; 2; 0)$ thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .

c) Phương trình tham số của d là
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -4 - 2t, t \in R. \\ z = -1 + t \end{cases}$$

d) Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là
$$d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{2}.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng

Thay tọa độ $N(0;2;0)$ vào d thỏa mãn phương trình đường thẳng d .

b) Sai.

$$\vec{n}_P(1;1;-1); \vec{u}_d = (1;-1;1)$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d = 1.1 + (-1).1 + 1.(-1) = -2 \neq 0$$

Vậy đường thẳng d không song song với mặt phẳng (P)

c) Sai.

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 2t, t \in R. \\ z = -1 + t \end{cases}$$

d) Đúng.

Gọi $M = (-2 + 2t; 4 - 2t; -1 + t)$

là giao điểm của d và $(P) \Rightarrow (-2 + 2t) + (4 - 2t) - (-1 + t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M = (2; 0, 1).$

+) Mặt phẳng (P) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1; 1; -1)$. Điểm $N = (0; 2; 0) \in d$.

Gọi Δ là đường thẳng qua $N(0, 2; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \Delta$ nhận vector $\vec{n}_p = (1; 1; -1)$ làm vector chỉ phương. Suy ra phương trình của Δ là:

$$(\Delta): \frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = c \\ y = 2 + c, c \in R. \\ z = -c \end{cases} \text{Goi } M' = (c; 2 + c; -c) \text{ là giao điểm của } \Delta$$

với mặt phẳng $(P) \Rightarrow c + (2 + c) - (-c) - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow M' \left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3} \right).$$

+) $\overline{MM'} = \left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3} \right)$, đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P)

nên d' chính là đường thẳng MM' , suy ra d' đi qua $M(2; 0, 1)$ và nhận vector

$\vec{u} = -3\overline{MM'} = (7; -5; 2)$ làm vector chỉ phương nên phương trình của d' là:

$$d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{2}.$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

- a) Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $A(1; -1; 1)$
- b) Điểm $N(1, 2, -1)$ thuộc đường thẳng d .
- c) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(1; 1; 1)$.
- d) Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) **Sai.**

Gọi $A = d \cap (P)$.

$$A \in d \Rightarrow A(t, -1+2t; 2-t).$$

$$A \in (P) \Rightarrow t + (-1+2t) + (2-t) - 3 = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow A(1; 1; 1).$$

b) **Sai.**

Thay tọa độ $N(1, 2, -1)$ vào d không thỏa mãn phương trình đường thẳng d .

c) **Đúng.**

d) **Đúng.**

Lấy điểm $M(0; -1; 2) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) . Khi đó Δ có

$$\text{phương trình tham số là } \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Gọi $B = \Delta \cap (P)$.

$$B \in \Delta \Rightarrow B(t; -1+t; 2+t).$$

$$B \in (P) \Rightarrow t + (-1+t) + (2+t) - 3 = 0 \Rightarrow 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow B\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là đường thẳng AB đi qua điểm

$$A(1; 1; 1) \text{ và có một vector chỉ phương } \vec{u} = -3 \cdot \overrightarrow{AB} = -3 \cdot \left(\frac{-1}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{5}{3}\right) = (1; 4; -5) \text{ nên có phương}$$

$$\text{trình chính tắc là } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}.$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ cho $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng (Oxy) .

a) Điểm $M(2; 3; 1)$ thuộc đường thẳng (d) .

b) Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1; 0; 0)$.

c) Đường thẳng $d' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$ là hình chiếu của đường thẳng d trên (Oxy) .

d) Điểm $N(3;1;0)$ thuộc đường thẳng d' .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) **Sai.**

Thay tọa độ điểm $M(2;3;1)$ vào đường thẳng d không thỏa mãn.

b) **Sai.**

Mặt phẳng (Oxy) có vecto pháp tuyến là $\vec{k}(0;0;1)$.

c) **Đúng.**

Mỗi điểm $M(x;y;z)$ thuộc d có hình chiếu trên (Oxy) là điểm $M'(x;y;0)$ thuộc d' với d' là hình chiếu của d trên (Oxy) .

Vậy d' có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$.

d) **Đúng.**

Thay điểm $N(3;1;0)$ vào đường thẳng d' thỏa mãn.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t, t \in \mathbb{R}, \\ z = 2 - t \end{cases}$ cắt mặt phẳng

$(P): x + y + z - 3 = 0$ tại điểm I . Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta \perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Gọi $M(a;b;c)$ là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng Δ (với $a + b > c$).

a) Đường thẳng d có một vecto chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;-1)$.

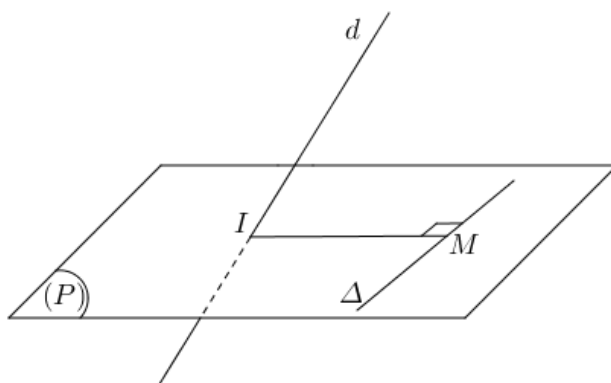
b) Đường thẳng Δ có một vecto chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta} = (-3;2;1)$.

c) $IM = d(M, \Delta)$

d) $a + b + c = 3$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng



(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$ và d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -1)$.
 $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1; 1; 1)$.

Vì $\Delta \subset (P)$; $\Delta \perp d \Rightarrow \Delta$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}, \vec{u}] = (-3; 2; 1)$.

M là hình chiếu của I trên Δ nên M thuộc mặt phẳng (Q) đi qua I và vuông góc với Δ .

Mặt phẳng (Q) nhận $\vec{u}_{\Delta} = (-3; 2; 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên ta có phương trình của (Q) : $-3(x-1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z = 0$.

Gọi $d_1 = (P) \cap (Q) \Rightarrow d_1$ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = [\vec{u}_{\Delta}, \vec{n}] = (1; 4; -5)$ và d_1 đi qua I , phương

$$\text{trình của } d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

Mặt khác $M \in \Delta \Rightarrow M \in (P) \Rightarrow M \in d_1$.

Giả sử $M(1+t; 1+4t; 1-5t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (t; 4t; -5t)$.

Ta có: $IM = \sqrt{42} \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 16t^2 + 25t^2} = \sqrt{42} \Leftrightarrow t = \pm 1$.

+) Với $t = 1 \Rightarrow M(2; 5; -4)$.

+) Với $t = -1 \Rightarrow M(0; -3; 6)$.

Vì $M(a; b; c)$ (với $a+b > c$) nên $M(2; 5; -4)$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Gọi H là hình chiếu của A đến d . Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

a) Hình chiếu của A đến d có tọa độ là $(7; -5; 2)$.

b) Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH \perp (\alpha)$.

c) (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-1; 1; -1)$.

d) Phương trình mặt phẳng (α) là $x + y - z = 3$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

Gọi H là hình chiếu của A đến d . Khi đó $H(2-t; -1+2t; 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1-t; 2t; 1+t)$.

Do $AH \perp d \Rightarrow -(-1-t) + 2 \cdot 2t + 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$. Vậy $H\left(\frac{7}{3}; \frac{-5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH \perp (\alpha)$.

Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Vậy $(\alpha): 1(x-2) + 1(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và điểm

$M(2; -2; -5)$.

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 là $\vec{u}_1 = (6; 2; 4)$.

b) Điểm $A(-4; 4; 0)$ thuộc đường thẳng d_2 .

c) Đường thẳng d đi qua gốc toạ độ và vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình

tham số là $\begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}$.

d) Điểm $N(a, b, c) \in d_2$ và độ dài MN là ngắn nhất. Khi đó $a + b + c = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 là $\vec{u} = (3; 1; 2) = \frac{1}{2} \cdot (6; 2; 4) = \frac{1}{2} \vec{u}_1$.

b) Sai

Thay toạ độ điểm $A(-4; 4; 0)$ vào phương trình đường thẳng d_2 ta thấy không thoả mãn. Vậy điểm $A(-4; 4; 0)$ không thuộc đường thẳng d_2 .

c) Sai

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (3; 1; 2)$

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d

Vì $\begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \Rightarrow \vec{u} = (-3; 7; 1)$

Mà d đi qua điểm $O(0;0;0)$ nên có PTTS là
$$\begin{cases} x = -3t \\ y = 7t \\ z = t \end{cases}.$$

d) Đúng

Vì $N \in d_2$ nên tọa độ điểm N có dạng $N(1+2t; -1+t; -t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

$$MN = \sqrt{(2t-1)^2 + (1+t)^2 + (5-t)^2} = \sqrt{6(t-1)^2 + 21} \geq \sqrt{21}.$$

Do đó MN ngắn nhất bằng $\sqrt{21}$ khi $t=1$ khi $N(3;0;-1) \Rightarrow a+b+c=2$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;0), B(-1;0;1)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$.

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (-2; -2; 2)$.

b) Đường thẳng d và mặt phẳng (P) song song với nhau.

c) Đường thẳng d' đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+3t \\ z = -3t \end{cases}$$

d) Một điểm M thay đổi trên đường thẳng d thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MA + MB$ là $\sqrt{6}$.

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Lời giải

a) Đúng

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p = (1;1;-1) = \frac{1}{2}(-2;-2;2) = \frac{1}{2}\vec{n}$.

b) Sai

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p = (1;1;-1)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-1;1)$

Ta có $\vec{n}_p \cdot \vec{u} = 1.1 + 1.(-1) + 1.(-1) \neq 0 \Rightarrow \vec{n}_p, \vec{u}$ không vuông góc. Vậy đường thẳng d và mặt phẳng (P) không song song với nhau.

c) Đúng

Đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ nên ta chọn vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1;1;-1) = \frac{1}{3}(3;3;-3)$ làm vectơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = -3t \end{cases}$$

d) Sai

Phương trình tham số của đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Vì $M \in d \Rightarrow M(t; 1-t; 1+t)$

Khi đó:

$$\overline{MA} = (1-t; t; -1-t) \Rightarrow MA = \sqrt{3t^2 + 2} \text{ và } \overline{MB} = (-1-t; -1+t; -t) \Rightarrow MB = \sqrt{3t^2 + 2},$$

Do đó $T = MA + MB = 2\sqrt{3t^2 + 2} \geq 2\sqrt{2}$.

Suy ra $T_{\min} = 2\sqrt{2}$ khi $t = 0 \Rightarrow M = (0; 1; 1)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 1 = 0$.

a) Δ là đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d . Khi đó, $N(3; 1; -3)$ là một điểm thuộc đường thẳng Δ .

b) Gọi Q là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Tọa độ của điểm Q là $Q(9; -6; -7)$

c) $F(3; 0; 1)$ là một điểm thuộc đường thẳng d và thỏa mãn $OF = \sqrt{10}$.

d) Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d . Tọa độ điểm B là $B(0; 3; -2)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; -1)$ và song song với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Suy ra $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

Vì $\frac{3-1}{2} \neq \frac{1-2}{1} \neq \frac{-3+1}{-1}$ nên $N(3; 1; -3)$ là không thuộc đường thẳng Δ .

b) Q là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

$$Q \in d \Rightarrow Q(2t+1; t-1; -t+2).$$

$$Q \in (P) \Rightarrow 2t+1+t-1+2(-t+2)+1=0 \Leftrightarrow t=-5$$

$$\Rightarrow Q(-9; -6; 7)$$

c) $F \in d \Rightarrow F(2u+1; u-1; -u+2)$

$$OF = \sqrt{10} \Leftrightarrow (2u+1)^2 + (u-1)^2 + (2-u)^2 = 10 \Leftrightarrow 6u^2 - 2u - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{2}{3} \\ u = 1 \end{cases}$$

Với $u = \frac{2}{3}, F\left(\frac{7}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Với $u = 1, F(3; 0; 1)$.

d) Ta gọi AB cắt d tại điểm $M(1+2m; -1+m; 2-m) \in d$.

$\overrightarrow{AM}(2m; m-3; 3-m)$, theo yêu cầu bài toán AB vuông góc d , ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow 2.2m + m - 3 + m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2; -2; 2).$$

Đường thẳng AB đi qua A nhận $\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} = (1; -1; 1)$ là một VTCP, ta có phương trình AB là

$$AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}. \text{ Gọi } B(1+t; 2-t; -1+t) \in AB$$

Lại có điểm $B \in (P) \Rightarrow 1+t+2-t+2(-1+t)+1=0 \Rightarrow t=-1$. Vậy $B(0; 3; -2)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua $M(-1; 1; 1)$ và đối xứng với Δ qua mặt phẳng (Oxy) .

a) Δ giao mặt phẳng (Oxy) tại $A(2; 4; 0)$

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}(-1; 1; -1)$

c) Phương trình đường thẳng $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

d) d đi qua điểm $B(0; 4; 2)$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Vì Δ cắt mặt phẳng $(Oxy): z=0$ tại $A(2; 4; 0)$ nên đường thẳng d đi qua A, M có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(2; 3; -1)$.

Vậy phương trình $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

$$\frac{0+1}{2} \neq \frac{4-1}{3} \neq \frac{2-1}{-1} \Rightarrow B(0; 4; 2) \notin d$$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$. Đường thẳng d đi qua $M(3; -3; 4)$ và đối xứng với Δ qua mặt phẳng (Oxz) .

a) d giao mặt phẳng (Oxz) tại $A(1; 0; 3)$

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}(-1; 1; -1)$

c) Phương trình đường thẳng $(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{1}$

d) d đi qua điểm $B(-1; 3; 2)$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Vì Δ cắt mặt phẳng $(Oxz): y=0$ tại $A(1;0;3)$ nên đường thẳng d đi qua A, M có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(2;-3;1)$

Vậy phương trình $(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{1}$

Ta có: $\frac{-1-3}{2} = \frac{3+3}{-3} = \frac{2-4}{1} \Rightarrow B(-1;3;2) \in d$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;-1)$ và điểm $N(0;1;1)$. Đường thẳng d đi qua điểm M và điểm N' với N' là điểm đối xứng của điểm N qua mặt phẳng (Oxy) . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Điểm $N'(0;0;-1)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;-1;0)$.

c) Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-1 \end{cases}$.

d) Đường thẳng d giao với mặt phẳng $(P): x+2y+z-1=0$ tại điểm N' .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai. Điểm $N'(0;1;-1)$

b) Đúng. Vector chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{N'M} = (1;-1;0)$.

c) Đúng. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;-1)$ và có vtcp $\vec{u}=(1;-1;0)$

nên có phương trình là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-1 \end{cases}$.

d) Đúng.

Đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-1 \end{cases}$ giao với mặt phẳng $(P): x+2y+z-1=0$ nên ta được:

$1+t+2(-t)-1-1=0 \Rightarrow t=-1$. Suy ra giao điểm là $N'(0;1;-1)$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $\Delta_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$

a) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

b) Đường thẳng Δ_1 và trục Ox chéo nhau.

c) Đường thẳng Δ_2 trùng với đường thẳng $\Delta_3: \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{4}$.

d) Đường thẳng Δ_2 và trục Oy cắt nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng. Đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cùng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 4)$, điểm $A(1; -2; 3) \in \Delta_1$ và $A \notin \Delta_2$ nên Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

b) Đúng. Đường thẳng chứa trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$, không cùng phương với $\vec{u}$. Giả sử Δ_1 và trục Ox có điểm chung thì điểm chung là $M(m; 0; 0)$. Dễ thấy $M \notin \Delta_1$. Vậy Δ_1 và trục Ox không có điểm chung. Do đó Δ_1 và trục Ox chéo nhau.

c) Sai. Điểm $B(-2; -2; 4) \in \Delta_3$ và $B \notin \Delta_2$

d) Sai. Giả sử Δ_2 và Oy có điểm chung thì điểm chung là $N(0; n; 0)$. Dễ thấy $N \notin \Delta_2$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng: $(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $(d_2): \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$, $(d_3): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

a) Đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.

b) d_3 vuông góc với d_1 .

c) Ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng nằm trong một mặt phẳng.

d) Có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng. Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(3; -1; -1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -2; 1)$. Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$. Do $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ và $M_1 \notin d_1$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.

b) Sai. Đường thẳng d_3 có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_3 = (2; 1; 1)$ và $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 \neq 0$.

c) Sai. Dễ thấy $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_3$ không cùng phương. Giả sử d_1 và d_3 có điểm chung A thì $A(3+a; -1-2a; -1+a)$ (do $A \in d_1$), suy ra $\frac{3+a}{1} = \frac{-1-2a}{-2} = \frac{-1+a}{1}$ (vô nghiệm), do đó d_1 và d_3 chéo nhau.

d) Đúng. Gọi $B = mp(d_1, d_2) \cap d_3$ thì có vô số đường thẳng đi qua B và cắt cả d_1, d_2 .

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = -2t' \\ y = -5 + 3t' \\ z = 4 + t' \end{cases}$.

a) Đường thẳng d và $\Delta: \frac{x-5}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-1}$ song song với nhau.

b) d và d' chéo nhau.

c) d và d' vuông góc.

d) Với mọi giá trị khác 0 của tham số m thì d và Δ' :
$$\begin{cases} x = 1 + 2mt \\ y = 2 - 2mt \\ z = mt \end{cases}$$
 song song.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) **Sai.** Hai đường này trùng nhau vì có cùng vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$ và cùng đi qua $M(5; -2; 2)$.

b) **Đúng.** Ta thấy hai vector chỉ phương của hai đường thẳng này là $\vec{u} = (2; -2; 1)$, $\vec{u}' = (-2; 3; 1)$ không cùng phương và hệ
$$\begin{cases} 1 + 2t = -2t' \\ 2 - 2t = -5 + 3t' \\ t = 4 + t' \end{cases}$$
 vô nghiệm.

c) **Sai.** Vì $\vec{u} \cdot \vec{u}' \neq 0$.

d) **Sai.** Vì khi đó d và Δ' trùng nhau.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1; 0; -1)$. Gọi d_2 là đường thẳng đi qua điểm A và có vector chỉ phương $\vec{v} = (a; 1; 2)$.

a) Đường thẳng d_2 và trục Ox chéo nhau.

b) Khi $a = 0$ thì $d_1 \perp d_2$.

c) Đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau khi và chỉ khi $a = 0$.

d) Với $a \neq 0$ thì d_1 và d_2 chéo nhau.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) **Sai.** Vì $\vec{i} = (1; 0; 0)$ và $\vec{v} = (a; 1; 2)$ không cùng phương với mọi a và nếu d_2 có điểm chung với Ox thì $d_2 \subset (Oxz)$, mà điều này không thể xảy ra do $\vec{v} \cdot \vec{j} = 1 \neq 0$

b) **Đúng.** d_1 nhận $\vec{u} = (1; -2; 1)$ làm vector chỉ phương và d_2 nhận $\vec{v} = (a; 1; 2)$ làm vector chỉ phương

nên $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

c) **Đúng.** Phương trình tham số của đường thẳng d_1 là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$
 Phương trình tham số đường

thẳng d_2 qua điểm A và có vector chỉ phương $\vec{v} = (a; 1; 2)$ là d_2 :
$$\begin{cases} x = 1 + at' \\ y = 0 + t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$$

Đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 khi và chỉ khi hệ phương trình
$$\begin{cases} 1 + t = 1 + at' \\ 2 - 2t = 0 + t' \\ 3 + t = -1 + 2t' \end{cases}$$
 có đúng một

nghiệm.

Ta có:
$$\begin{cases} 1 + t = 1 + at' \\ 2 - 2t = 0 + t' \\ 3 + t = -1 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - at' = 0 \\ -2t - t' = -2 \\ t - 2t' = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 2 \\ 0 - a \cdot 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 2 \\ a = 0 \end{cases}$$
 Vậy $a = 0$.

d) **Đúng.** Vì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương với mọi a , đồng thời hai đường thẳng chỉ có điểm chung khi $a = 0$

Câu 31: Trong không gian cho mặt phẳng $(P): x + 2y + mz + 1 = 0$ và đường thẳng

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{2}.$$

a. Khi $m = 1$ thì đường thẳng (d) song song với (P) .

b. Khi $m = 3$ thì đường thẳng (d) cắt (P) tại một điểm.

c. Khi $m = 3$ thì đường thẳng (d) cắt (P) tại một điểm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

d. Khi $m = -\frac{a}{b}$ thì đường thẳng (d) song song với (P) . Khi đó $a + b = 6$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Mặt phẳng (P) có một vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; m)$, đường thẳng (d) có một vecto chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

a. Khi $m = 1$ thì mặt phẳng (P) có một vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$. Ta thấy $\vec{u}$ và $\vec{n}$ cùng phương nên $(d) \perp (P)$.

b. Khi $m = 3$ thì mặt phẳng (P) có một vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 3)$. Ta thấy $\vec{u} \cdot \vec{n} = 16$ nên đường thẳng (d) cắt (P) tại một điểm.

c. Khi $m = 3$ thì mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z + 1 = 0$. Giải hệ $\begin{cases} x + 2y + 3z + 1 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{2} \end{cases}$ ta được

nghiệm $(x; y; z) = (1; 2; -2)$, do đó (d) cắt (P) tại một điểm $M = (1; 2; -2)$, điểm này không nằm trên mp (Oxy) .

d. Đường thẳng (d) song song với $(P) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 5 + m = 0 \Leftrightarrow m = -5$. Thử lại ta thấy khi $m = 5$ thì điểm $M(1; 2; -2) \in (d)$ nhưng $M \notin (P)$ nên (d) song song với (P) . Vậy ta có $a = 5; b = 1$ và $a + b = 6$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x + 4y + m^2z - 8 = 0$ và đường thẳng

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-m}{-1}.$$

a. Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; -1)$ và đi qua điểm $M(0; 0; m)$.

b. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 2; m)$.

c. Khi $m = 0$ thì đường thẳng (d) cắt và vuông góc với mặt phẳng (P) tại một điểm.

d. Khi $m = -\frac{a}{b}$ thì đường thẳng (d) song song với (P) . Khi đó $a^2 + b^2 = 5$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; 4; m^2)$, đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; -1)$.

a. Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; -1)$ và đi qua điểm $M(0; 0; m)$.

b. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4; 4; m^2)$.

c. Khi $m = 0$ thì mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; 4; 0)$. Ta thấy $\vec{u} \cdot \vec{n} = 4$ và hai vectơ $\vec{n}; \vec{u}$ không cùng phương nên đường thẳng (d) cắt (P) tại một điểm nhưng (d) và (P) không vuông góc.

d. Đường thẳng (d) song song $(P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Xét điểm $M \in (P) \Rightarrow m^3 = 8 \Leftrightarrow m = 2$. Do đó $m = 2$ thì (d) nằm trên (P) . Vậy $m = -2$ thì (d) song song với (P) . Ta được $a = 2; b = 1$ và $a^2 + b^2 = 5$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

a) Điểm $M(1;3;2)$ nằm trên đường thẳng d .

b) Một VTCP của d là $\vec{u}(1;3;2)$

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-t \\ z = 2+2t \end{cases}$.

d) Đường thẳng d và đường thẳng $d': \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = -1-3t \end{cases}$ là hai đường chéo nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Tọa độ điểm $M(1;3;2)$ thỏa mãn phương trình $d \rightarrow$ Mệnh đề **đúng**.

b) VTCP của d là không phải $\vec{u}(1;3;2)$. $\rightarrow$ Mệnh đề **sai**.

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-t \\ z = 2+2t \end{cases}$.

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t' \\ y = 3-t' \\ z = 2+2t' \end{cases}$$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1+t' = 1+t \\ 3-t' = 3-t \\ 2+2t' = 2+2t \end{cases}$ hệ có vô số nghiệm nên $d \equiv \Delta \rightarrow$ Mệnh đề **sai**.

d) Đường thẳng d và đường thẳng $d': \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = -1-3t \end{cases}$ là hai đường chéo nhau.

d đi qua điểm $M(1;3;2)$, có VTCP $\vec{u}(1;-1;2)$, d' đi qua $N(0;0;-1)$, có VTCP $\vec{u}'(-3;1;-1)$.

Ta có $[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MN} = 21 \neq 0$ nên d và d' chéo nhau $\rightarrow$ Mệnh đề **đúng**.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1}$.

a) Điểm $M(3;-4;1)$ nằm trên đường thẳng d .

b) Một VTCP của d là $\vec{u}(-3;4;-1)$

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -4+3t \\ y = 5-4t \\ z = -2+t \end{cases}$.

d) Đường thẳng Δ song song với d và cắt cả hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ có phương trình là $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Tọa độ điểm $M(3; -4; 1)$ không thỏa mãn phương trình d . $\rightarrow$ Mệnh đề **sai**.

b) Ta có $\vec{u}(-3; 4; -1) = - (3; -4; 1) \rightarrow$ Mệnh đề **đúng**.

c) Đường thẳng d trùng với đường thẳng Δ . $\rightarrow$ Mệnh đề **sai**.

d) Đường thẳng Δ song song với d và cắt cả hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ có phương trình là $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{1}$.

Gọi M, N là giao điểm của Δ và d_1, d_2 .

$$\text{Khi đó M, N thuộc } d_1, d_2 \text{ nên } \begin{cases} x_M = 1 + 3t \\ y_M = -1 + t \\ z_M = 2 + 2t \end{cases}, \begin{cases} x_N = -2 + 2t' \\ y_N = 3 + 4t' \\ z_N = t' \end{cases}.$$

Vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{MN} = (-3 + 2t' - 3t; 4 + 4t' - t; -2 + t' - 2t)$

Δ song song với $d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1}$ nên $\frac{-3 + 2t' - 3t}{3} = \frac{4 + 4t' - t}{-4} = \frac{-2 + t' - 2t}{1}$

Giải hệ ta được $t' = -1; t = -\frac{4}{3}$. Vậy $N(-4; -1; -1), M\left(-3; -\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Vậy $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{1} \rightarrow$ Mệnh đề **đúng**.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

a) Điểm $M(1; -1; 1)$ nằm trên đường thẳng d .

b) Một VTCP của d là $\vec{u}(2; 1; -1)$

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

d) Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d thì phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Tọa độ điểm $M(1; -1; 1)$ không thỏa mãn phương trình d . $\rightarrow$ Mệnh đề **sai**.

b) Một VTCP của d là $\vec{u}(2; 1; -1) \rightarrow$ Mệnh đề **đúng**.

c) Đường thẳng d trùng với đường thẳng Δ . $\rightarrow$ Mệnh đề **sai**.

d) Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , cắt và vuông góc với d thì phương trình đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$$

PTTS của d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d , đường thẳng Δ cần tìm là đường thẳng MH .

Vì H thuộc d nên $H(1+2t; -1+t; -t)$ suy ra $\overrightarrow{MH} = (2t-1; -2+t; -t)$.

Vì $MH \perp d$ và d có 1 VTCP là $\vec{u} = (2; 1; -1)$ nên $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$. Do đó $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Vậy PTTS của Δ là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases} \rightarrow$ Mệnh đề **đúng**.

Câu 36: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

a) Điểm $M(1; 3; -2)$ nằm trên đường thẳng d .

b) Một VTCP của d là $\vec{u}(-1; 1; -2)$.

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

d) Phương trình đường vuông góc chung của d và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ là

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-2}.$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Tọa độ điểm $M(1; 3; -2)$ không thỏa mãn phương trình d . $\rightarrow$ Mệnh đề **sai**.

b) $\vec{u}(-1; 1; -2) \nearrow \swarrow \vec{u}' = (1; -1; 2)$ là một VTCP của đường thẳng $d \rightarrow$ Mệnh đề **Đúng**.

c) Đường thẳng d trùng với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \rightarrow$ Mệnh đề **sai**.

d) Phương trình đường vuông góc chung của d và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ là

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-2}.$$

Gọi: $\Delta \cap d_1 = M(1+t'; 3-t'; 2+2t')$, $\Delta \cap d_2 = N(-3t; t; -1-3t)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-3t-1-t'; t-3+t'; -3-3t-2t').$$

d_1, d_2 lần lượt có 2 vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$, $\vec{u}_2 = (-3; 1; -3)$.

Vì Δ là đường vuông góc chung của $d_1; d_2$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t' - 10t = 4 \\ 10t' + 19t = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow M(2; 2; 4), N(3; -1; 2), \overrightarrow{MN} = (1; -3; -2).$$

Vậy phương trình $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-2}$. $\rightarrow$ Mệnh đề **đúng**.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{3-y}{2} = \frac{z+4}{2}$.

a) Đường thẳng d qua điểm $M(1; 2; 0)$.

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{v} = (1; 2; 2)$.

c) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -6 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

d) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-2}{6}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) sai vì:

Thay $M(1; 2; 0)$ vào đường thẳng d , ta có $\frac{1+1}{1} \neq \frac{3-2}{2} \Rightarrow M(1; 2; 0) \notin d$.

b) sai vì $d: \frac{x+1}{1} = \frac{3-y}{2} = \frac{z+4}{2}$ được viết lại $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{2}$ do đó đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Dễ thấy $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương.

c) đúng vì $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{2}$ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$ và đi qua điểm

$N(-2; 5; -6)$ suy ra phương trình tham số $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -6 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

d) sai vì đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{2}$ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$ và đi qua điểm $A(-1; 3; -4)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{v} = (3; -6; 6) = -3\vec{u}$.

Thay tọa độ điểm $N(-2; 5; -6)$ vào phương trình của Δ , ta được

$$\frac{-2-2}{3} = \frac{5+3}{-6} = \frac{-6-2}{6} \text{ phương trình nghiệm đúng, suy ra } A \in \Delta.$$

Vậy $d \equiv \Delta$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$.

a) Vector $\vec{u} = (2; 3; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng (d) .

b) Vector $\vec{u}_1 = (-4; -6; 2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng (d) .

c) Đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(9; 10; 0)$.

d) Phương trình chính tắc của đường thẳng (d) là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{-1}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) đúng: từ phương trình (d) ta có $\vec{u} = (2; 3; -1)$ là một vector chỉ phương của (d) .

b) đúng: $\vec{u}_1 = (-4; -6; 2) = -2(2; 3; -1) = -2\vec{u}$ nên $\vec{u}_1$ cũng là một vector chỉ phương của (d) .

c) đúng: $(Oxy): z = 0$, từ phương trình của (d) ta có $4 - t = 0 \Leftrightarrow t = 4$, thay vào (d) ta được $A(9; 10; 0)$.

d) sai: từ phương trình tham số của (d) ta suy ra phương trình chính tắc của (d) là $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

a) Điểm $M(7; -3; -1)$ thuộc đường thẳng d .

b) Điểm $N(-1; 1; -5)$ thuộc đường thẳng d .

c) Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (4; -2; 3)$ là một vector chỉ phương.

d) Đường thẳng d nhận $\vec{v} = (-4; 2; -3)$ là một vector chỉ phương.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) sai vì thay $M(7; -3; -1)$ vào đường thẳng d , ta có

$$\begin{cases} 7 = 3 + 4t \\ -3 = -1 - 2t \\ -1 = -2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M(7; -3; -1) \notin d.$$

b) đúng vì thay $N(-1; 1; -5)$ vào đường thẳng d , ta có

$$\begin{cases} -1 = 3 + 4t \\ 1 = -1 - 2t \\ -5 = -2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M(7; -3; -1) \in d.$$

c) đúng vì một vector chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ là $\vec{u} = (4; -2; 3)$.

d) đúng vì $\vec{v} = (-4; 2; -3) = -\vec{u}$ nên $\vec{v}$ cũng là một vector chỉ phương của d .

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 2t \\ z = -3 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

a) Điểm $M(2; 2; -3)$ thuộc đường thẳng d .

b) Khi $t = -2$ đường thẳng d đi qua điểm A có tọa độ $(12; -4; -3)$.

c) Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (-5; 2; 0)$ là một vector chỉ phương.

d) Điểm $N(7; -2; 3)$ không nằm trên đường thẳng d .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) sai vì:

$$\text{Thay } M(2; 2; -3) \text{ vào đường thẳng } d, \text{ ta có } \begin{cases} 2 = 2 - 5t \\ 2 = 2t \\ -3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2; 2; -3) \notin d.$$

b) đúng vì:

Khi thay $t = -2$ vào phương trình tham số của d , ta được:

$$\begin{cases} x = 2 - 5 \cdot (-2) = 12 \\ y = 2 \cdot (-2) = -4 \\ z = -3 \end{cases} \quad \text{Vậy } A(12; -4; -3) \in d$$

c) đúng vì từ phương trình tham số ta có $\vec{v} = (-5; 2; 0)$ là một vector chỉ phương của d và $\vec{v} = (5; -2; 0) = -(-5; 2; 0)$ do đó $\vec{u} = (-5; 2; 0)$ cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng d .

d) đúng vì đường thẳng d luôn đi qua điểm có cao độ bằng -3 , ta có $z_N = 3 \Rightarrow N \notin d$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{1}$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-1}$.

a) Đường thẳng d qua điểm $M(1; -2; 4)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 1)$.

b) Đường thẳng Δ qua điểm $N(-5; 2; -2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{v} = (2; -1; -1)$.

c) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và đường thẳng Δ có phương

trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t' \\ y = -t' \\ z = -2 - t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$.

d) Đường thẳng d và đường thẳng Δ vuông góc và cắt nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) đúng vì dựa vào phương trình chính tắc ta thấy đường thẳng d qua điểm $M(1; -2; 4)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 1)$.

b) sai vì: $\frac{-5+1}{2} = \frac{2}{-1} \neq \frac{-2+2}{-1}$ do đó điểm N không thuộc đường thẳng Δ .

c) đúng vì từ phương trình $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{1} = t$ suy ra $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Và từ phương trình $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-1} = t'$ suy ra $\begin{cases} x = -1 + 2t' \\ y = -t' \\ z = -2 - t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$

d) sai vì

Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 1)$ và đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{v} = (2; -1; -1)$

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$ do đó $d \perp \Delta$.

Gọi A là giao điểm (nếu có) của d và Δ , tọa độ A là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} 1 + 2t = -1 + 2t' \\ -2 + 3t = -t' \\ 4 + t = -2 - t' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 2t' = -2 & (1) \\ 3t + t' = 2 & (2) \\ t + t' = -6 & (3) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t' = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Khi đó $t + t' = \frac{3}{2}$ không thỏa mãn (3). Vậy hai đường thẳng d và Δ vuông góc nhưng không cắt nhau.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{3-y}{2} = \frac{z+4}{2}$.

a) Đường thẳng d qua điểm $M(1;2;0)$.

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{v} = (1;2;2)$.

c) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -6 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

d) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-2}{6}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) sai vì:

Thay $M(1;2;0)$ vào đường thẳng d , ta có $\frac{1+1}{1} \neq \frac{3-2}{2} \Rightarrow M(1;2;0) \notin d$.

b) sai vì $d: \frac{x+1}{1} = \frac{3-y}{2} = \frac{z+4}{2}$ được viết lại $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{2}$ do đó đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;2)$. Dễ thấy $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương.

c) đúng vì $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{2}$ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;2)$ và đi qua điểm

$N(-2;5;-6)$ suy ra phương trình tham số $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -6 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

d) sai vì đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{2}$ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;2)$ và đi qua điểm $A(-1;3;-4)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{v} = (3;-6;6) = -3\vec{u}$.

Thay tọa độ điểm $N(-2;5;-6)$ vào phương trình của Δ , ta được

$$\frac{-2-2}{3} = \frac{5+3}{-6} = \frac{-6-2}{6} \text{ phương trình nghiệm đúng, suy ra } A \in \Delta.$$

Vậy $d \equiv \Delta$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

- a) Điểm $M(1; 2; -1)$ thuộc đường thẳng d .
 b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$.
 c) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d là: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$.
 d) Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d là: $H(3; 1; 0)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) đúng: Thay tọa độ điểm $M(1; 2; -1)$ vào phương trình đường thẳng d ta được:

$$\begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ 2 = 2 - t \\ -1 = -1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2; -1) \in d.$$

b) đúng: Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

c) sai: Đường thẳng Δ qua A và song song với đường thẳng d nên có một vector chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \vec{u} = (2; -1; 1)$. Suy ra phương trình đường thẳng Δ : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

d) đúng: H là hình chiếu vuông góc của A lên $d \Rightarrow H \in d$ nên $H(1+2t; 2-t; -1+t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (2t; 3-t; -3+t)$, $AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2.2t - 1.(3-t) + 1.(-3+t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $H(3; 1; 0)$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; -2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

- a) Điểm $N(-1; -2; 2)$ thuộc đường thẳng Δ .
 b) Đường thẳng đi qua M, N có một vector chỉ phương là: $\vec{u} = (2; 3; -4)$.
 c) Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$.
 d) Hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng Δ là: $H(a; b; c)$, khi đó $a + b + c = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) sai: Thay tọa độ điểm $N(-1; -2; 2)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\frac{-1-1}{1} = \frac{-2-2}{2} \neq \frac{2+2}{-1} \Rightarrow N \notin \Delta.$$

b) đúng: Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-2; -3; 4) = -(2; 3; -4)$. Đường thẳng qua M, N có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; -4)$.

c) đúng: Đường thẳng d qua M và song song với đường thẳng Δ nên có một vector chỉ phương $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta = (1; 2; -1)$. Suy ra phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

d) sai: H là hình chiếu vuông góc của M lên Δ . Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -2-t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$
 Mà $H \in \Delta \Rightarrow H(1+t; 2+2t; -2-t)$.

Ta có: $\vec{MH} = (t; 1+2t; -t)$, $MH \perp d \Rightarrow \vec{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1.t + 2.(1+2t) - 1.(-t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$.

Do đó $H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Vậy $a+b+c = \frac{1}{3}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = -2+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(1; 0; 2)$.

a) Điểm $B(2; 1; -1)$ không thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; 1)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 0; 2)$, đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$.

d) $M(a; b; c)$ là một điểm nằm trên đường thẳng d và cách điểm A một khoảng có độ dài bằng $\sqrt{26}$. Khi $b > 0$ thì $a+b+c = 3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) đúng: Thay tọa độ điểm $B(1; 2; -1)$ vào phương trình đường thẳng d ta được:

$$\begin{cases} 2 = 2+t \\ 1 = t \\ -1 = -2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow B(1; 2; -1) \notin d.$$

b) sai: Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

c) sai: Gọi $H = d \cap \Delta \Rightarrow H \in d$ nên $H(2+t; t; -2+t)$. Ta có: $\vec{AH} = (1+t; t; -4+t)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ . Mà $\Delta \perp d \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1.(1+t) + 1.t + 1.(-4+t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{AH} = (2; 1; -3)$. Suy ra $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-3}$.

d) sai: Ta có $M \in d \Rightarrow M(2+t; t; -2+t)$ nên $\vec{AM} = (1+t; t; -4+t)$.

$$AM = \sqrt{26} \Leftrightarrow \sqrt{(1+t)^2 + t^2 + (-4+t)^2} = \sqrt{26} \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = 3 \text{ mà } b > 0 \\ \Rightarrow t > 0. \text{ Vậy } M(5;3;1) \Rightarrow a+b+c=9.$$

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;0;2)$, $N(2;2025;2026)$ và đường thẳng d có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2024}{1} = \frac{z-2024}{2}$.

a) Điểm M và N cùng thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{a} = (1;2024;2024)$.

c) Đường thẳng d' đi qua điểm M và N có phương trình là: $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}$.

d) Đường thẳng qua M , đồng thời vuông góc và cắt d có phương trình là:
$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) sai: Thay tọa độ điểm $M(3;0;2)$ vào phương trình đường thẳng d ta được: $\frac{3-1}{1} \neq \frac{0-2024}{1} \neq \frac{2-2024}{2} \Rightarrow M \notin d$. Thay tọa độ điểm N vào phương trình đường thẳng d ta

được: $\frac{2-1}{1} = \frac{2025-2024}{1} = \frac{2026-2024}{2} \Rightarrow N \in d$.

b) sai: Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u}_d = (1;1;2)$. Dễ thấy $\vec{u}_d, \vec{a}$ không cùng phương.

c) sai: Ta có: $\vec{MN} = (-1;2025;2024)$. Đường thẳng d' qua M, N nên có một vector chỉ phương $\vec{u}_{d'} = (-1;2025;2024)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d' : $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{2025} = \frac{z-2}{2024}$.

d) đúng: Phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2024 + t \\ z = 2024 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi Δ là đường thẳng qua M , đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d .

Gọi $H = d \cap \Delta \Rightarrow H \in d$ nên $H(1+t;2024+t;2024+2t)$.

Ta có: $\vec{MH} = (t-2;2024+t;2022+2t)$, $MH \perp d \Rightarrow \vec{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$.

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (t-2) + 1 \cdot (2024+t) + 2 \cdot (2022+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1011 \Rightarrow \vec{MH} = (-1013;1013;0).$$

Chọn $\vec{u}_\Delta = (-1;1;0)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ nên phương trình tham số của

đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+4}{-2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-3}{1}$.

a) Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u}_\Delta = (4; -2; 4)$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

c) Điểm $K(3;5;2)$ thuộc vào đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d .

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-2; -3; 1)$.

Đường thẳng Δ đi qua A và song song với d nhận $\vec{u}_d = (-2; -3; 1)$ làm một vectơ chỉ phương, nên đường thẳng Δ có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ hoặc } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Khi đó ta có

a): **Sai** vì một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-2; -3; 1)$.

b): **Đúng** vì đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

c): **Đúng** vì thay tọa độ điểm $K(3;5;2)$ vào phương trình đường thẳng Δ thỏa mãn.

d): **Đúng** vì đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-1;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

a) Hình chiếu vuông góc của A xuống đường thẳng d có tọa độ là: $H(3;-2;4)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống đường thẳng d khi đó: $AH = \sqrt{29}$.

c) Điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là: $M(2;-3;5)$.

d) Gọi M là điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d khi đó: $OM = \sqrt{30}$ với O là gốc tọa độ.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d ta có $H(1+2t; -1-t; 3+t)$.

$$\Rightarrow \vec{AH} = (-3+2t; -t; t)$$

d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(-3+2t) + t + t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3; -2; 4)$.

♦ Gọi M là điểm đối xứng của A qua d thì M là điểm đối xứng của A qua H .

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = 2x_H - x_A = 2 \\ y_M = 2y_H - y_A = -3 \\ z_M = 2z_H - z_A = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2; -3; 5).$$

Khi đó ta có

a): Đúng vì hình chiếu vuông góc của A xuống đường thẳng d có tọa độ là: $H(3; -2; 4)$.

b): Sai vì hình chiếu vuông góc của A xuống đường thẳng d có tọa độ là: $H(3; -2; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (1; 1; 1) \Rightarrow AH = \sqrt{3}$.

c): Đúng vì điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là: $M(2; -3; 5)$.

d): Sai vì điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là: $M(2; -3; 5) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (2; -3; 5) \Rightarrow OM = \sqrt{38}$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 0; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , vuông góc với d và cắt Oz .

a) Một vector chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-3; 0; 1)$.

b) Đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

c) Đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{-3} = y = \frac{z-1}{1}$.

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm $K(4; -1; 0)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

Gọi $N = \Delta \cap Oz \Rightarrow N \in Oz \Rightarrow N(0; 0; c)$.

Δ đi qua M và N nên Δ có 1 vector chỉ phương là: $\overrightarrow{MN} = (-1; 0; c-1)$.

d có 1 vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 3)$.

Δ vuông góc với $d \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3(c-1) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{4}{3}$.

Suy ra Δ có 1 vector chỉ phương $\vec{u}_\Delta = 3\overrightarrow{MN} = (-3; 0; 1)$.

Vậy Δ có phương trình $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Khi đó ta có

a): Đúng vì một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-3; 0; 1)$.

b): Đúng vì đường thẳng Δ có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c): Sai vì đường thẳng Δ không tồn tại phương trình chính tắc do $\vec{u} = (-3; 0; 1)$.

d): Sai vì thay tọa độ điểm $K(4; -1; 0)$ vào phương trình đường thẳng Δ không thỏa mãn.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 0; 4)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , vuông góc và cắt d .

a) Một vectơ chỉ phương của Δ là $(1; 1; -1)$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; 3; 1)$.

c) Đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

d) Đường thẳng Δ có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

Phương trình tham số của đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi $M = d \cap \Delta \Rightarrow M(-1+t; t; 1+2t)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = (t; t; 2t-3)$ là một VTCP của đường thẳng Δ .

Theo đề bài $\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot t + 1 \cdot t + 2(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1; 1; -1)$.

Phương trình đường thẳng Δ qua $A(-1; 0; 4)$ và có một VTCP $\overrightarrow{AM} = (1; 1; -1)$ là:

$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$ hoặc $\Delta: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Khi đó ta có

a): Đúng vì một vectơ chỉ phương của Δ là $(1; 1; -1)$.

b): Đúng vì thay tọa độ điểm $A(2; 3; 1)$ vào phương trình đường thẳng Δ thỏa mãn.

c): Đúng vì đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

d): Sai vì đường thẳng Δ có phương trình:
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 6 + 2t' \\ y = 3 + 2t' \\ z = 7 + 9t' \end{cases}$.

- a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3;1)$.
 b) Đường thẳng d' đi qua điểm $B(6;3;7)$.
 c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.
 d) Cosin góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\frac{35}{\sqrt{1513}}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) đúng: Khi $t = 0$ thì $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ nên đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3;1)$.

b) đúng: Khi $t' = 0$ thì $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases}$ nên đường thẳng d' đi qua điểm $B(6;3;7)$.

c) sai:

d đi qua điểm $A(2;3;1)$, có vtcp $\vec{a} = (-2; -2; -3)$.

d' đi qua điểm $B(6;3;7)$, có vtcp $\vec{b} = (2; 2; 9)$.

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (-12; 12; 0)$; $\vec{AB} = (4; 0; 6) \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{AB} = -48 \neq 0$ nên d và d' chéo nhau.

d) đúng: $\cos(d; d') = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{35}{\sqrt{1513}}$.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và

$$d': \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}.$$

- a) Đường thẳng d có vtcp $\vec{u} = (2; 1; 4)$.
 b) Đường thẳng d' có vtcp $\vec{u}' = (3; 2; 1)$.
 c) Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau.
 d) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) đúng: Đường thẳng d có vtcp $\vec{u} = (2; 1; 4)$.

b) sai: Đường thẳng d' có vtcp $\vec{u}' = (3; -2; 1)$.

c) sai: $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 8 \neq 0$ nên hai đường thẳng d và d' không vuông góc với nhau.

d) đúng:

d có VTCP $\vec{u} = (2; 1; 4)$ và đi qua $M(1; 7; 3)$.

d' có VTCP $\vec{u'} = (3; -2; 1)$ và đi qua $M'(6; -1; -2)$.

$\overrightarrow{MM'} = (5; -8; -5)$ và $[\vec{u}, \vec{u'}] = (9; 10; -7) \neq \vec{0}$.

Ta có: $[\vec{u}, \vec{u'}}] \cdot \overrightarrow{MM'} = 5.9 + (-8).10 + (-5).(-7) = 0$.

Suy ra d cắt d' .

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -mt \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + (2m + 1)t \end{cases}$ và $d: \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2m} = \frac{z-2}{3}$.

với $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0; 2; 1)$.
- b) Đường thẳng d đi qua điểm $B(-3; 1; 2)$.
- c) Đường thẳng Δ có vtcp $\vec{u}_\Delta = (m; 3; 2m + 1)$.
- d) $m = -3$ thì $\Delta \perp d$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) đúng: Khi $t = 0$ thì $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ nên đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0; 2; 1)$.

b) đúng: Đường thẳng d đi qua điểm $B(-3; 1; 2)$.

c) sai: Đường thẳng Δ có vtcp $\vec{u}_\Delta = (-m; -3; 2m + 1)$.

d) đúng:

Ta có các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng là $\vec{u}_\Delta = (-m; -3; 2m + 1)$, $\vec{u}_d = (-1; 2m; 3)$.

Δ và d vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}_d = 0$

$$\Leftrightarrow (-m) \cdot (-1) + (-3) \cdot 2m + (2m + 1) \cdot 3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow m - 6m + 6m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -3$$

Câu 54: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có phương trình tham số lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } d': \begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = 5 - t' \\ z = 4 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

a) Phương trình chính tắc của d là: $\frac{x+2}{7} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$.

b) Phương trình chính tắc của d' là: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-4}{-1}$.

c) Hai đường thẳng d và d' trùng nhau.

d) Hai đường thẳng d và d' không có điểm chung.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) sai: Phương trình chính tắc của d là: $\frac{x-7}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$.

b) đúng: Phương trình chính tắc của d' là: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-4}{-1}$.

c) đúng:

Đường thẳng d đi qua điểm $M(7;3;2)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-2;1;1)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(3;5;4)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}' = (2;-1;-1)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (-4;2;2) = 2\vec{u} = -2\vec{u}'$. Do đó hai đường thẳng d và d' trùng nhau.

d) sai: Do hai đường thẳng d và d' trùng nhau nên chúng có vô số điểm chung.

Câu 55: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$ và đường thẳng $\Delta_2: \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 13 + 3t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$.

a) $\vec{u}_1 = (-1;2;4)$, $\vec{u}_2 = (2;3;-1)$ lần lượt là một vector chỉ phương của Δ_1, Δ_2 .

b) $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

d) Đường vuông góc chung d của Δ_1 và Δ_2 có phương trình là $\frac{x-\frac{8}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{y-\frac{17}{-1}}{\frac{14}{-1}} = \frac{z-\frac{69}{1}}{\frac{14}{1}}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) đúng: Từ phương trình của $\Delta_1; \Delta_2$ ta có $\vec{u}_1 = (-1;2;4)$ là VTCP của Δ_1 và $\vec{u}_2 = (2;3;-1)$ là VTCP của Δ_2 .

b) đúng: Ta có $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = 0$ nên $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

c) sai: Do $\Delta_1 \perp \Delta_2$ nên Δ_1 và Δ_2 cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 5-t=9+2t' \\ -3+2t=13+3t' \\ 4t=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+2t'=-4 \\ 2t-3t'=16 \\ 4t+t'=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{20}{7} \\ t'=-\frac{24}{7} \\ 4t+t'=1 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

Do đó Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

d) đúng: Gọi $M = d \cap \Delta_1; N = d \cap \Delta_2$. Ta có $M \in \Delta_1; N \in \Delta_2$ nên $M(5-t; -3+2t; 4t); N(9+2t'; 13+3t'; 1-t')$ (với $t; t' \in \mathbb{R}$).
 $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (t+2t'+4; -2t+3t'+16; -4t-t'+1)$.

Hơn nữa $d \perp \Delta_1$ và $d \perp \Delta_2$ nên ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)(t+2t'+4)+2(-2t+3t'+16)+4(-4t-t'+1)=0 \\ 2(t+2t'+4)+3(-2t+3t'+16)+(-1)(-4t-t'+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21t+32=0 \\ 14t'+55=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{32}{21} \\ t'=-\frac{55}{14} \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{7}{3}; \frac{7}{6}; -\frac{7}{6}\right) \Rightarrow \vec{u}_3 = (2; -1; 1)$ là VTCP của d và $N\left(\frac{8}{7}; \frac{17}{14}; \frac{69}{14}\right) \in d$.

Vậy d có phương trình là $\frac{x-\frac{8}{7}}{2} = \frac{y-\frac{17}{14}}{-1} = \frac{z-\frac{69}{14}}{1}$.

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$, $\Delta_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

Xét các vectơ $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$ và $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$.

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0; 3; -3)$ và có $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$ là một vectơ chỉ phương.

b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4; -2; 4)$ và có $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$ là một vectơ chỉ phương.

c) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; -5; -3)$.

d) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Do $\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$ Nên Δ_1 đi qua điểm $M_1(0; 3; -3)$ và có $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$ là một vectơ chỉ phương. Suy ra **a) Đúng**.

b) Do $\Delta_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$ Nên Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4; -2; 4)$ và có $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$ là một vectơ chỉ phương. Suy ra **b) Đúng**.

c) Do $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 5; 3)$. Suy ra **c) Sai**.

d) $\overrightarrow{M_1M_2} = (-4; -5; 7) \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 4 - 25 + 21 = 0$ suy ra hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không chéo nhau. Suy ra **d) Sai**.

Câu 57: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+t \\ z=3+2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x-3y+z-3=0$.

a) Điểm $M(1; -2; 3)$ thuộc Δ .

b) Vectơ $\vec{u} = (2; -1; -2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ .

c) Đường thẳng đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và vuông góc với (P) có phương trình là
$$\begin{cases} x=2+t' \\ y=-3-2t' \\ z=1+3t' \end{cases}$$

d) Đường thẳng đi qua điểm $N(2;3;-1)$, vuông góc với Δ và song song với (P) có phương trình là $\frac{x-2}{7} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+1}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) đúng: Từ phương trình của $\Delta: \begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+t \\ z=3+2t \end{cases}$ ta có $M(1;-2;3) \in \Delta$.

b) đúng: Từ phương trình của $\Delta: \begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+t \\ z=3+2t \end{cases}$ ta có $\vec{u}_1 = (-2;1;2)$ là một VTCP của Δ . Suy ra

$\vec{u} = -\vec{u}_1 = (2;-1;-2)$ cũng là một VTCP của Δ .

c) sai: Đường thẳng $d_1 \perp (P)$ nên d_1 nhận VTPT $\vec{n} = (2;-3;1)$ của (P) làm VTCP. Hơn nữa

d_1 đi qua $M(1;-2;3)$ nên d_1 có phương trình là $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=-2-3t' \\ z=3+t' \end{cases}$.

d) đúng: Đường thẳng $d_2 \perp \Delta$ và $d_2 \parallel (P)$ nên d_2 nhận $\vec{u}_2 = [\vec{u}_1, \vec{n}] = (7;6;4)$ làm VTCP. Hơn nữa d_2 đi qua điểm $N(2;3;-1)$ nên d_2 có phương trình là $\frac{x-2}{7} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+1}{4}$.

Câu 58: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;-2)$, đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x-2y+2z-3=0$.

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;3)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (-2;2;1)$.

b) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .

c) Điểm $H(2;-1;2)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng Δ .

d) Điểm $Q\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P) .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) đúng: Từ phương trình của $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ ta có $A(0;1;3) \in \Delta$ và $\vec{u} = (-2;2;1)$ là một vector

chỉ phương của Δ .

b) sai: Ta có $\vec{n} = (1;-2;2)$ là một VTPT của (P) , $\vec{u} = (-2;2;1)$ là một vector chỉ phương của Δ .

.

Do $\frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{2} \neq \frac{2}{1}$ nên hai vector $\vec{n}$ và $\vec{u}$ không cùng phương. Do đó Δ không vuông góc với (P) .

Cách khác: Ta có $\sin(\Delta, (P)) = \frac{|(-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{9} \Rightarrow (\Delta, (P)) \neq 90^\circ$.

Do đó Δ không vuông góc với (P) .

c) đúng: Ta thấy tọa độ của $H(2; -1; 2)$ thỏa mãn phương trình đường thẳng Δ (ứng với $t = -1$) nên $H \in \Delta$.

Hơn nữa $\overrightarrow{MH} = (1; -1; 4)$; $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0$ (với $\vec{u} = (-2; 2; 1)$ là vectơ chỉ phương của Δ) nên $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$, suy ra $MH \perp \Delta$.

Vậy điểm $H(2; -1; 2)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng Δ .

d) đúng: Thay tọa độ của điểm Q vào phương trình mặt phẳng (P) , ta thấy $\frac{5}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 3 = 0$ nên $Q \in (P)$.

Hơn nữa $\overrightarrow{MQ} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$; $\overrightarrow{MQ} = \frac{2}{3}(1; -2; 2) = \frac{2}{3}\vec{n}$ (với $\vec{n} = (1; -2; 2)$ là VTPT của (P)) nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\vec{n}$ cùng phương. Suy ra $MQ \perp (P)$.

Vậy điểm $Q\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P) .

Câu 59: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; -2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

a) Điểm $N(-1; -2; 2)$ thuộc đường thẳng Δ .

b) Đường thẳng đi qua M, N có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u} = (2; 3; -4)$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

d) Hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng Δ là: $H(a; b; c)$, khi đó $a + b + c = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) sai: Thay tọa độ điểm $N(-1; -2; 2)$ vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\frac{-1-1}{1} = \frac{-2-2}{2} \neq \frac{2+2}{-1} \Rightarrow N \notin \Delta.$$

b) đúng: Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-2; -3; 4) = -(2; 3; -4)$. Đường thẳng qua M, N có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; -4)$.

c) đúng: Đường thẳng d qua M và song song với đường thẳng Δ nên có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta = (2; 3; -4)$. Suy ra phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-4}$.

d) sai: H là hình chiếu vuông góc của M lên Δ . Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 - t \end{cases}. \text{ Mà } H \in \Delta \Rightarrow H(1+t; 2+2t; -2-t).$$

Ta có: $\overrightarrow{MH} = (t; 1+2t; -t)$, $MH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot t + 2 \cdot (1+2t) - 1 \cdot (-t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$.

Do đó $H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Vậy $a+b+c = \frac{1}{3}$.

Câu 60: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;0;2)$, $N(2;2025;2026)$ và đường thẳng d có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2024}{1} = \frac{z-2024}{2}$.

a) Điểm M và N cùng thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{a} = (1; 2024; 2024)$.

c) Đường thẳng d' đi qua điểm M và N có phương trình là: $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}$.

d) Đường thẳng qua M , đồng thời vuông góc và cắt d có phương trình là: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) sai: Thay tọa độ điểm $M(3;0;2)$ vào phương trình đường thẳng d ta được:

$\frac{3-1}{1} \neq \frac{0-2024}{1} \neq \frac{2-2024}{2} \Rightarrow M \notin d$. Thay tọa độ điểm N vào phương trình đường thẳng d ta được: $\frac{2-1}{1} = \frac{2025-2024}{1} = \frac{2026-2024}{2} \Rightarrow N \in d$.

b) sai: Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 1; 2)$. Dễ thấy $\vec{u}_d, \vec{a}$ không cùng phương.

c) sai: Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1; 2025; 2024)$. Đường thẳng d' qua M, N nên có một vector chỉ phương $\vec{u}_{d'} = (-1; 2025; 2024)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d' : $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{2025} = \frac{z-2}{2024}$.

d) đúng: Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2024 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2024 + 2t \end{cases}$.

Gọi Δ là đường thẳng qua M , đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d .

Gọi $H = d \cap \Delta \Rightarrow H \in d$ nên $H(1+t; 2024+t; 2024+2t)$.

Ta có: $\overrightarrow{MH} = (t-2; 2024+t; 2022+2t)$, $MH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$.

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (t-2) + 1 \cdot (2024+t) + 2 \cdot (2022+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1011 \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (-1013; 1013; 0).$$

Chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (-1; 1; 0)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nên phương trình tham số của

$$\text{đường thẳng } \Delta \text{ là: } \begin{cases} x = 3-t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 61: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+4}{-2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-3}{1}$.

a) Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{u_\Delta} = (4; -2; 4)$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 3-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Điểm $K(3; 5; 2)$ thuộc vào đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d .

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (-2; -3; 1)$.

Đường thẳng Δ đi qua A và song song với d nhận $\overrightarrow{u_d} = (-2; -3; 1)$ làm một vectơ chỉ phương, nên đường thẳng Δ có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2-3t \\ z = 3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 3-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ hoặc } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Khi đó ta có

a): Sai vì một vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u} = (-2; -3; 1)$.

b): Đúng vì đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 3-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

c): Đúng vì thay tọa độ điểm $K(3; 5; 2)$ vào phương trình đường thẳng Δ thoả mãn.

d): Đúng vì đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$

Câu 62: Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + 4t \end{cases}$, $\Delta_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{2}$ và

mặt phẳng $(P) : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

a) Vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a} = (1; -3; 4)$

b) Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 3; -2)$

c) Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (3; -3; 2)$

d) Đường thẳng d_3 qua $A(1; -1; 2)$, cắt và vuông góc với trục Oz có vector chỉ phương là $\vec{u}_3 = (-1; -1; 0)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a} = (1; -3; 4)$.

Vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a} = (0; -3; 4)$.

SAI.

b) Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 3; -2)$

Mặt phẳng (P) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{u} = (1; 3; -2)$.

Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) nên có 1 vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 3; -2)$.

ĐÚNG.

c) Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (3; -3; 2)$

Mặt phẳng (Oxy) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Đường thẳng Δ_2 có vector chỉ phương là $\vec{v} = (3; -3; 2)$

Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vector chỉ phương là

$$\vec{u}_2 = [\vec{v}, \vec{k}] = (-3; 3; 0) = -3(1; -1; 0)$$

SAI.

d) Đường thẳng d_3 qua $A(1; -1; 2)$, cắt và vuông góc với trục Oz có vector chỉ phương là $\vec{u}_3 = (-1; -1; 0)$

Gọi $H = d_3 \cap Oz$. Ta có $\begin{cases} d_3 \perp Oz \\ A \in d_3 \end{cases}$,

Suy ra H là hình chiếu của A lên $Oz \Rightarrow H(0; 0; 2)$.

Vậy đường thẳng d_3 có 1 vector chỉ phương là $\overrightarrow{AH} = (-1; 1; 0)$.

SAI.

Câu 63: Trong không gian $Oxyz$, Hai máy bay cùng xuất phát từ hai phi trường, trên màn hình radar của trạm điều khiển (với đơn vị trên ba trục chính theo đơn vị km), sau khi xuất phát t giờ ($t \geq 0$),

vị trí của máy bay số một được xác định bởi công thức
$$\begin{cases} x = 20 + 2t \\ y = 20 + t \\ z = -10 - t \end{cases}$$
, vị trí máy bay số hai có tọa độ là $(30 + t'; 20 + t'; -10 - t')$

a) Côsin góc giữa hai máy bay số một và máy bay số hai là $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

b) Sau 10 giờ kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất

c) Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường (đứng ở vị trí ban đầu) thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20; 20; -10)$

d) Sau 5 giờ thì vị trí tọa độ máy bay số 2 trong không gian là $(35; 25; -10)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Côsin góc giữa hai máy bay số một và máy bay số hai là $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

Giả sử đường bay của máy bay số 1 là $(\Delta_1): \begin{cases} x = 20 + 2t \\ y = 20 + t \\ z = -10 - t \end{cases}$ có $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$ và đường bay của

máy bay số 2 thỏa $(30 + t'; 20 + t'; -10 - t') \in (\Delta_2) \begin{cases} x = 30 + t' \\ y = 20 + t' \\ z = -10 - t' \end{cases}$ có $\vec{u}_2 = (1; 1; -1)$

Ta có: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$

ĐÚNG.

b) Sau 10 giờ kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất.

Sau bao lâu kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất?

Kể từ thời điểm xuất phát, để hai máy bay gần nhau nhất thì hai máy bay phải gần tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2

Ta có: $\Delta_1 \cap \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 20 + 2t = 30 + t' \\ 20 + t = 20 + t' \\ -10 - t = -10 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' = 10 \\ t - t' = 0 \\ t - t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t' = 10 \end{cases}$

Vậy sau 10 giờ thì hai máy bay gần nhau nhất.

ĐÚNG.

c) Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường (đứng ở vị trí ban đầu) thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20; 20; -10)$

Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường thì thời điểm lúc đó là 0 giờ $\Rightarrow t = 0$ thay

$$(\Delta_1): \begin{cases} x = 20 + 2t \\ y = 20 + t \\ z = -10 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 20 \\ z = -10 \end{cases} \text{ thì vị trí tọa độ của máy bay là } (20; 20; -10)$$

ĐÚNG.

d) Sau 5 giờ thì vị trí tọa độ máy bay số 2 trong không gian là $(35; 25; -10)$

Sau 5 giờ thì vị trí tọa độ máy bay số 2 trong không gian nên $t' = 5$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = 30 + 5 \\ y = 20 + 5 \\ z = -10 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 25 \\ z = -15 \end{cases}, \text{ vậy vị trí tọa độ máy bay số 2 trong không gian là } (35; 25; -15)$$

SAI.

Câu 64: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ với tốc độ là $4,5 \text{ m/s}$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).



a) Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

b) Giả sử sau thời gian $t(s)$ kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M . Khi đó tọa độ điểm

$$M \text{ là } M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$$

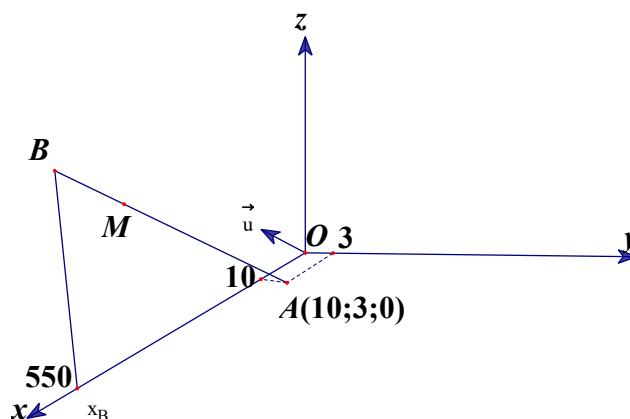
c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quãng đường AB dài 800 m .

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30° .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$



a) Phương trình tham số của đường cáp là:
$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình tham số của đường cáp là:
$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

ĐÚNG.

b) Giả sử sau thời gian $t(s)$ kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M . Khi đó tọa độ điểm

M là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$.

Do tốc độ di chuyển của cabin là $4,5\text{m/s}$ nên độ dài $AM = 4,5t(\text{m})$. Vì vậy $|\overrightarrow{AM}| = 4,5t$ với $t \geq 0$.

Ta có $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{u}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ với $k > 0$.

Suy ra $|\overrightarrow{AM}| = k|\vec{u}| = k\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3k \Rightarrow 3k = 4,5t \Rightarrow k = \frac{3t}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3t}{2}\vec{u} = \left(3t; -3t; \frac{3t}{2}\right)$

Gọi tọa độ điểm M là $M(x_M; y_M; z_M)$.

Vì $\overrightarrow{AM} = \left(3t; -3t; \frac{3t}{2}\right)$ nên
$$\begin{cases} x_M = 3t + x_A \\ y_M = -3t + y_A \\ z_M = \frac{3t}{2} + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3t + 10 \\ y_M = -3t + 3 \\ z_M = \frac{3t}{2} \end{cases}.$$

Vậy điểm M có tọa độ là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$.

ĐÚNG.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quãng đường AB dài 800m .

Do $x_B = 550$ nên $3t + 10 = 550 \Rightarrow t = 180(s)$.

Do đó điểm $B(550; -537; 270)$.

Vậy $AB = \sqrt{(550 - 10)^2 + (-537 - 3)^2 + (270 - 0)^2} = \sqrt{656100} = 810(\text{m})$.

SAI.

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30° .

Đường thẳng AB có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$ và (Oxy) có một vector pháp tuyến

$$\vec{k} = (0; 0; 1). \text{ Do đó ta có: } \sin(AB, (Oxy)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{k}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{k}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $(AB, (Oxy)) \approx 19^\circ$.

SAI.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(-1;3;1)$, $N(-2;1;-2)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;-1;2)$, $S(1;2;-3)$. Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua bao nhiêu điểm trong số các điểm đã cho?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và các điểm $M(-1;3;1)$, $N(-2;1;-2)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;-1;2)$, $S(1;2;-3)$. Có mấy điểm không thuộc đường thẳng (d) cho trước?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2mt \\ z = 2 + t \end{cases}; m, t \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị tham số m để 2 đường thẳng $d_1; d_2$ vuông góc nhau.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và $d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$ có tọa độ là $M(a;b;c)$. Xác định giá trị $a+b+c$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;3;-2)$, $B(1;1;5)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm A, B có dạng $\begin{cases} x = a \\ y = b - 2t \\ z = -2 + ct \end{cases}$. Tính $a+b+c$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-6}{5}$ có dạng $\begin{cases} x = a + 4t \\ y = -2 + bt \\ z = 1 + ct \end{cases}$. Tính $a+b+2c$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;3;5)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-3z+1=0$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có dạng $\begin{cases} x=1+at \\ y=b+t \\ z=5+ct \end{cases}$. Tính $3a+b+c$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x=t \\ y=-1-4t \\ z=6+6t \end{cases} \text{ và } d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}.$$

Phương trình chính tắc của đường thẳng d_3 qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với cả d_1, d_2 có dạng

$$\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{b} = \frac{z-a}{c}. \text{ Tính } a+b+c.$$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng (Δ) qua $M(2;3;1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P):2x-y+2z-7=0$ và $(Q):x+3y-2z+3=0$ có dạng

$$\begin{cases} x=a+bt \\ y=3+6t \\ z=c+dt \end{cases}; t \in \mathbb{R}. \text{ Tính } 2a+b+c+d.$$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$, $B(2;b;c)$, mặt phẳng $(\alpha):x+3y-2z+5=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Khi đó, để đường thẳng d đi qua hai điểm A, B , song song với mặt phẳng (α) và vuông góc với đường thẳng Δ thì $b+c$ bằng:

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):ax+by+cz+10=0$. Biết mặt phẳng (α) chứa hai

$$\text{đường thẳng } d: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \\ z=-t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x=-1+2t' \\ y=4+2t' \\ z=-1-t' \end{cases}. \text{ Khi đó } a+b+c \text{ bằng:}$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) và $B(3;a;2a)$. Biết mặt phẳng (α) chứa hai đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x=-1+5t \\ y=2-4t \\ z=3+3t \end{cases} \text{ và đường thẳng } d': \begin{cases} x=2+5t \\ y=-4t \\ z=5+3t \end{cases}. \text{ Khi đó để điểm } B \text{ thuộc mặt phẳng } (\alpha)$$

thì giá trị của a bằng:

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt ở điểm $M(1;2;-2)$ và vật quan sát đặt ở điểm $N(-2;0;2)$. Một tấm bia chắn đường truyền của ánh sáng có dạng hình tròn với tâm $O(0;0;0)$, bán kính bằng 4 và đặt trong mặt phẳng Oxy . Tọa độ điểm chắn tầm nhìn của người đó là $D(a;b;c)$. Tính $a.b+c$ bằng:

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-4)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1 . Đường thẳng AH có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1;b;c)$ với $b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $b+c$ bằng

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$ có hình chiếu vuông góc trên các trục Ox , Oy , Oz là B , C , D . Gọi H là trực tâm tam giác BCD . Phương trình chính tắc của đường thẳng OH có dạng $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{6}$. Khi đó $a+b$ bằng

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y-2z+5=0$. Điểm $A(a;b;c)$ có hoành độ dương thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tính tổng $a+b-c$?

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=4+t \\ y=-4-t \\ z=6+2t \end{cases}; d_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-11}{4} = \frac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt d_1, d_2 lần lượt ở B, C . Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$

Câu 18: Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8;-19;6m+4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu vận động viên có bắn trúng hồng tâm.



Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vector chỉ phương là $\vec{u} = (0;-2;6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Giả sử sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M . Gọi tọa độ $M(a;b;c)$. Tính $a+3b+c$.



Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, nhà công vụ của một trạm hải đăng nằm trên mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và phương trình trạm hải đăng là đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Người ta muốn làm một con đường Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với trạm hải đăng. Giả sử phương trình đường thẳng Δ có dạng $\frac{x-1}{a} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-d}{c}$. Hỏi có bao nhiêu số trong các số a, b, c, d chia hết cho 3



Câu 21: Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$ hai con đường đó thuộc hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$; $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$.



Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = -5+t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 0 \\ y = 4-2t' \\ z = 5+3t' \end{cases}$.

Đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d' đi qua điểm $K(6; m; n)$. Tính $m+n$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (Oyz) có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; b; c)$. Tính $b+c$.

- Câu 24:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; -4)$. Tính $a+b$
- Câu 25:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(0;-1;3)$. Đường thẳng d đi qua A và song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất. Biết đường thẳng d nhận $\vec{u} = (2; a; b)$ làm vectơ chỉ phương. Tính $a.b$
- Câu 26:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;1)$, $B(2;-2;1)$, $C(4;2;3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đường thẳng d đi qua điểm $M(a; b; -1)$, khi đó $a+b$ bằng
- Câu 27:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là: $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0;5;3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1;1;0)$ thuộc đường thẳng AC . Biết vectơ $\vec{u} = (a; b; 3)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AC . Tính $a+b$ bằng



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(-1;3;1)$, $N(-2;1;-2)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;-1;2)$, $S(1;2;-3)$. Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua bao nhiêu điểm trong số các điểm đã cho?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: $M(-1;3;1), P(1;2;3) \in (d)$;

$N(-2;1;-2), Q(2;-1;2), S(1;2;-3) \notin (d)$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và các điểm $M(-1;3;1)$,

$N(-2;1;-2)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;-1;2)$, $S(1;2;-3)$. Có mấy điểm không thuộc đường thẳng (d) cho trước?

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có: $M(-1;3;1), P(1;2;3) \in (d)$;

$N(-2;1;-2), Q(2;-1;2), S(1;2;-3) \notin (d)$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2mt \\ z = 2 + t \end{cases}; m, t \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị tham số m để 2 đường thẳng $d_1; d_2$ vuông góc nhau.

Lời giải

Trả lời: $m = 1$

Đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-1; -2; 1)$ và $\vec{u}_2 = (-3; 2m; 1)$

Để 2 đường thẳng $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow -1(-3) + (-2)2m + 1.1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và

$$d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}, \text{ có tọa độ là } M(a; b; c). \text{ Xác định giá trị } a + b + c.$$

Lời giải

Trả lời: 28

Gọi $M = d \cap d'$, do $M \in d \Rightarrow M(-3 + 2t; -2 + 3t; 6 + 4t)$

$$M \in d' \Rightarrow \begin{cases} -3 + 2t = 5 + t' \\ -2 + 3t = -1 - 4t' \\ 6 + 4t = 20 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -2 \end{cases} \Rightarrow M(3; 7; 18)$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 3; -2)$, $B(1; 1; 5)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi

qua hai điểm A, B có dạng $\begin{cases} x = a \\ y = b - 2t \\ z = -2 + ct \end{cases}$. Tính $a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 11

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; -2; 7)$

Đường thẳng AB đi qua $A(1; 3; -2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (0; -2; 7)$ làm vectơ chỉ phương có phương

trình là: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3; -2; 1)$ và

song song với đường thẳng $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-6}{5}$ có dạng $\begin{cases} x = a + 4t \\ y = -2 + bt \\ z = 1 + ct \end{cases}$. Tính $a + b + 2c$.

Lời giải

Trả lời: 10

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(3; -2; 1)$ và nhận vectơ $\vec{u} = (4; -3; 5)$ làm vectơ chỉ

phương có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 3; 5)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3z + 1 = 0$. Phương

trình tham số của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có dạng $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = b + t \\ z = 5 + ct \end{cases}$. Tính

$3a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 6

Một vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}(2;1;-3)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $M(1;3;5)$ và vuông góc với (P) thì vec tơ chỉ phương của d là $\vec{u}(2;1;-3)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$ và

$d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d_3 qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với cả d_1, d_2 có dạng $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{b} = \frac{z-a}{c}$. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: 28

Đường d_1 có VTCP $\vec{a} = (1;-4;6)$; d_2 có VTCP $\vec{b} = (2;1;-5)$.

Vì d_3 vuông góc với $d_1; d_2$ nên có vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}] = (14;17;9)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d_3 là: $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng (Δ) qua $M(2;3;1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 7 = 0$ và $(Q): x + 3y - 2z + 3 = 0$ có dạng

$$\begin{cases} x = a + bt \\ y = 3 + 6t ; t \in \mathbb{R} \\ z = c + dt \end{cases} \text{ Tính } 2a + b + c + d.$$

Lời giải

Trả lời: 8

Mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 7 = 0$ có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2, -1, 2)$

Mặt phẳng $(Q): x + 3y - 2z + 3 = 0$ có vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1, 3, -2)$

Vì $(\Delta) // (P)$ và $(\Delta) // (Q)$ nên vector chỉ phương của (Δ) là $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (-4; 6; 7)$

Phương trình tham số của đường thẳng (Δ)
$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 6t ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 7t \end{cases}$$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$, $B(2; b; c)$, mặt phẳng $(\alpha): x + 3y - 2z + 5 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Khi đó, để đường thẳng d đi qua hai điểm A, B , song song với mặt phẳng (α) và vuông góc với đường thẳng Δ thì $b+c$ bằng:

Lời giải

Trả lời: -1

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n} = (1; 3; -2)$.

Đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u} = (3; 2; 1)$.

Vì đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) và vuông góc với đường thẳng Δ nên VTCP của d là $\vec{u}_d = [\vec{n}, \vec{u}] = (7; -7; -7)$ hay $\vec{u}_d = (-1; 1; 1)$.

Phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A , song song với mặt phẳng (α) và vuông góc với đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Vì $B \in d$ nên: $\frac{2-1}{-1} = \frac{b+2}{1} = \frac{c-3}{1} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$.

Vậy $b+c = -1$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + 10 = 0$. Biết mặt phẳng (α) chứa hai

đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2+2t \\ z = -t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = -1+2t' \\ y = 4+2t' \\ z = -1-t' \end{cases}$. Khi đó $a+b+c$ bằng:

Lời giải

Trả lời: -1

$d: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2+2t \\ z = -t \end{cases}$ có VTCP là $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$.

$d': \begin{cases} x = -1+2t' \\ y = 4+2t' \\ z = -3+t' \end{cases}$ có VTCP là $\vec{u}_{d'} = (2; 2; 1)$.

Gọi $A = d \cap d' \Rightarrow \begin{cases} -1+t = -1+2t' \\ 2+2t = 4+2t' \\ -t = -3-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2t' = 0 \\ 2t-2t' = 2 \\ -t-t' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow A(1; 6; -2)$.

Vì mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng d và d' nên (α) có VTPT là

$\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = (4; -3; -2)$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 4(x-1) - 3(y-6) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 2z + 10 = 0$

$\Rightarrow a+b+c+d = 4 + (-3) + (-2) = -1$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) và $B(3; a; 2a)$. Biết mặt phẳng (α) chứa hai đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \text{ và đường thẳng } d': \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -4t \\ z = 5 + 3t \end{cases}. \text{ Khi đó để điểm } B \text{ thuộc mặt phẳng } (\alpha)$$

thì giá trị của a bằng:

Lời giải

Trả lời: 4

$$d: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \text{ có VTCP là } \vec{u} = (5; -4; 3) \text{ và đi qua điểm } A(-1; 2; 3).$$

$$d': \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -4t \\ z = 5 + 3t \end{cases} \text{ có VTCP là } \vec{u} = (5; -4; 3) \text{ và đi qua điểm } B(2; 0; 5).$$

$$\overrightarrow{AB} = (3; -2; 2)$$

Vì mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và d' nên (α) có VTPT là

$$\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = (2; 1; -2).$$

Phương trình mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}_{(\alpha)} = (2; 1; -2)$ và đi qua điểm $A(-1; 2; 3)$ là:

$$2(x+1) + (y-2) - 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 6 = 0$$

$$B \in (\alpha) \Rightarrow 2.3 + a - 2.2a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt ở điểm $M(1; 2; -2)$ và vật quan sát đặt ở điểm $N(-2; 0; 2)$. Một tấm bia chắn đường truyền của ánh sáng có dạng hình tròn với tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính bằng 4 và đặt trong mặt phẳng Oxy . Tọa độ điểm chắn tầm nhìn của người đó là $D(a; b; c)$. Tính $a.b + c$ bằng:

Lời giải

Trả lời: 16

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = (-3; -2; 4) \Rightarrow MN = \sqrt{29}.$$

Phương trình đường thẳng MN đi qua điểm $N(-2; 0; 2)$ và có VTCP là $\overrightarrow{MN} = (-3; -2; 4)$ là:

$$\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}.$$

Mặt phẳng (Oxy) : $z = 0$

$$\text{Tọa độ điểm chắn tầm nhìn của người đó là } D(a; b; 0) \Rightarrow 2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

$$\Rightarrow D(4; 4; 0).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MD} = (3; 2; 2) \Rightarrow MD = \sqrt{17}.$$

Vì $MD < MN \Rightarrow D$ nằm giữa M và N .

$$\Rightarrow D(4; 4; 0) \text{ là điểm chắn tầm nhìn của người đó}$$

Vậy $a.b+c=16$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-4)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1 . Đường thẳng AH có một vector chỉ phương là $\vec{u}=(1;b;c)$ với $b,c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có phương trình tham số của d_1 là
$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases}.$$

Đường thẳng d_1 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1=(1;-1;2)$

Điểm $H \in d_1$ nên $H(2+t;1-t;-1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(2+t;-1-t;3+2t)$.

Vì H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1 nên $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_1 = 0$ hay

$$(2+t) \cdot 1 + (-1-t) \cdot (-1) + (3+2t) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 6t+9=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{2}$$

Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Vì $a,b,c \in \mathbb{Z}$ nên đường thẳng AH có một vector chỉ phương là $\vec{u} = 2\overrightarrow{AH} = (1;1;0)$.

Vậy $b+c=1+0=1$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$ có hình chiếu vuông góc trên các trục Ox , Oy , Oz là B , C , D . Gọi H là trực tâm tam giác BCD . Phương trình chính tắc của đường thẳng OH có dạng $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{6}$. Khi đó $a+b$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $B(2;0;0)$, $C(0;-3;0)$, $D(0;0;5)$.

Mặt phẳng (BCD) có phương trình $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{5} = 1$ hay $15x-10y+6z-60=0$.

H là trực tâm tam giác BCD nên $OH \perp (BCD)$. Do đó OH có một vector chỉ phương $\vec{u}=(15;-10;6)$.

Vậy phương trình chính tắc của OH là $\frac{x}{15} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{6}$. Suy ra $a=15; b=-10 \Rightarrow a+b=15-10=5$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y-2z+5=0$. Điểm $A(a;b;c)$ có hoành độ dương thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tính tổng $a+b-c$?

Lời giải

Trả lời: 1

Điểm A có hoành độ dương thuộc đường thẳng d , tọa độ A là $(2t; -t; -1+t)$ với $t > 0$.

Khoảng cách từ A đến (α) bằng 3 nên ta có: $\frac{|2t - 2(-t) - 2(-1+t) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t+7|}{3} = 3 \Leftrightarrow |2t+7| = \pm 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -8 (L) \\ t = 1 (TM) \end{cases}$$

Vậy tọa độ A là $(2; -1; 0) \Rightarrow a+b-c = 2-1-0=1$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 4+t \\ y = -4-t \\ z = 6+2t \end{cases}; d_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-11}{4} = \frac{z-5}{2}$. Đường

thẳng d đi qua $A(5; -3; 5)$ cắt d_1, d_2 lần lượt ở B, C . Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$

Lời giải

Trả lời: 0,5

$B \in d_1 \Rightarrow B(4+t; -4-t; 6+2t)$. Phương trình tham số $d_2: \begin{cases} x = 5+2s \\ y = 11+4s \\ z = 5+2s \end{cases}$

$C \in d_2 \Rightarrow C(5+2s; 11+4s; 5+2s)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (-1+t; -1-t; 2t+1); \overrightarrow{AC} = (2s; 4s+14; 2s)$

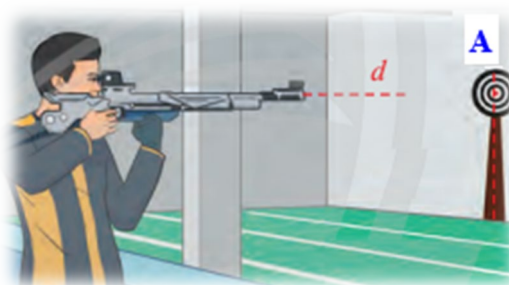
Do A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 2ks \\ -t-1 = 4ks+14k \\ 2t+1 = 2ks \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ s = -3 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} = 0,5$

Câu 18: Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết

trục d của nòng súng có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8; -19; 6m+4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu vận động viên có bắn trúng hồng tâm.



Lời giải

Trả lời: -6

Để vận động viên có bắn trúng hồng tâm thì trục d phải đi qua hồng tâm. Ta thay điểm $A(8; -19; 6m + 4)$ vào phương trình trục d :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5} \Leftrightarrow \frac{8-1}{1} = \frac{-19-2}{-3} = \frac{6m+4-3}{-5} = 7 \Leftrightarrow 6m = -36 \Leftrightarrow m = -6.$$

Vậy $m = -6$ thì vận động viên bắn trúng hồng tâm.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2; 1; 5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0; -2; 6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Giả sử sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M . Gọi tọa độ $M(a; b; c)$. Tính $a + 3b + c$.



Lời giải

Trả lời: 6

Phương trình tham số của đường cáp là: $d: \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 - 2k \\ z = 5 + 6k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Do tốc độ chuyển động của cabin là 4 m/s nên độ dài $AM = 4t$ (m).

Vì vậy sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M thì $AM = 4.5 = 20$ (m).

Vì $M \in d \Rightarrow M(-2; 1 - 2k; 5 + 6k)$

$\overrightarrow{AM}(0; -2k; 6k)$. Do 2 vectơ $\overrightarrow{AM}; \vec{u}$ cùng hướng $k > 0$

$AM = 20 \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + 4k^2 + 36k^2} = 20 \Leftrightarrow 40k^2 = 400 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{10}$

Vì $k > 0 \Rightarrow k = \sqrt{10}$.

Vậy tọa độ $M(-2; 1 - 2\sqrt{10}; 5 + 6\sqrt{10})$. Khi đó $a + 3b + c = -2 + 3(1 - 2\sqrt{10}) + 5 + 6\sqrt{10} = 6$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, nhà công vụ của một trạm hải đăng nằm trên mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và phương trình trạm hải đăng là đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Người ta muốn làm một con đường Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với trạm hải đăng. Giả sử phương trình đường thẳng Δ có dạng $\frac{x-1}{a} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-d}{c}$. Hỏi có bao nhiêu số trong các số a, b, c, d chia hết cho 3



Lời giải

Trả lời: 1

Ta có $\vec{u}_\Delta = (2; 1; 3)$ là VTCP của d và $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; 1)$ là VTPT của (P) .

Gọi $A = d \cap \Delta$. Do $\Delta \subset (P)$ nên $A = d \cap (P)$.

$$\text{Suy ra tọa độ } A \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1; 1).$$

Gọi $\vec{u}_\Delta$ là véc-tơ chỉ phương của Δ . Lại có: $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \end{cases}$ ta chọn

$$\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d] = (5; -1; -3).$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3} \Rightarrow a=5; b=1; c=-3; d=1$

Vậy có 1 số chia hết cho 3.

Câu 21: Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$ hai con đường đó thuộc hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$; $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$.



Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

Trả lời: 2,45

Ta có AB ngắn nhất khi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 .

Gọi $A(2+a; 2+a; -a) \in d_1; B(2+b; -1+2b; -3b) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b-a; 2b-a-3; -3b+a)$.

d_1, d_2 lần lượt có các véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1} = (1; 1; -1)$ và $\vec{u}_{d_2} = (1; 2; -3)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1(b-a) + 1(2b-a-3) - 1(-3b+a) = 0 \\ 1(b-a) + 2(2b-a-3) - 3(-3b+a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6b-3a-3=0 \\ 14b-6a-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; 1; 1) \\ B(2; -1; 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1; -2; -1)$$

Do đó $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6} \simeq 2,45$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = -5+t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 0 \\ y = 4-2t' \\ z = 5+3t' \end{cases}$.

Đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d' đi qua điểm $K(6; m; n)$. Tính $m+n$.

Lời giải

Trả lời: -7

Giả sử AB là đường vuông góc chung của d và d' với $A \in d, B \in d'$.

Ta có $\vec{u}_d = (1; 0; 1), \vec{u}_{d'} = (0; -2; 3)$

$$\begin{cases} A(1+t; 0; -5+t) \\ B(0; 4-2t'; 5+3t') \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (t+1; 2t'-4; t-3t'-10).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} d \perp AB \\ d' \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ \vec{u}_{d'} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1) + (t-3t'-10) = 0 \\ -2(2t'-4) + 3(t-3t'-10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(4; 0; -2) \\ B(0; 6; 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (4; -6; -4) \Rightarrow \vec{u} = (-2; 3; 2) \text{ là một vector chỉ phương của đường thẳng}$$

AB .

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB: \frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}.$$

$$\text{Đường thẳng } AB \text{ đi qua } K(6; m; n) \text{ nên } \frac{6-4}{-2} = \frac{m}{3} = \frac{n+2}{2} \Rightarrow m = -3, n = -4.$$

Vậy $m+n = -7$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (Oyz) có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; b; c)$. Tính $b+c$.

Lời giải

Trả lời: -1

Gọi $A = d \cap (Oyz)$, tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow A(0; -1; 2).$$

Lấy điểm $B(1; 1; 1) \in (d)$.

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua $(Oyz) \Rightarrow B'(-1; 1; 1)$.

Do đó đường thẳng d' là đường thẳng qua $A(0; -1; 2)$ nhận $\overrightarrow{AB'} = (-1; 2; -1)$ làm vector chỉ phương. Khi đó, $\vec{u} = (1; b; c)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB'} = (-1; 2; -1) \Rightarrow \vec{u} = (1; -2; 1) \Rightarrow b + c = -2 + 1 = -1$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; -4)$. Tính $a + b$

Lời giải

Trả lời: 3

Tọa độ giao điểm A của d và (P) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow A(0; 1; 2).$$

Lấy điểm $B(1; 2; 1) \in d$. Gọi H là hình chiếu của B trên (P) .

$$\text{Phương trình } BH: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Do $H = BH \cap (P)$ nên tọa độ điểm H thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên $(P) \Rightarrow d'$ đi qua A và H

$\Rightarrow d'$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -4) = (a; b; -4)$.

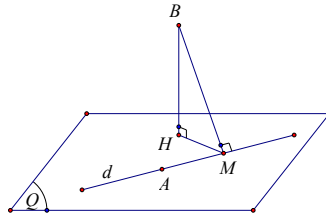
Vậy $a + b = 3$.

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(0; -1; 3)$. Đường thẳng d đi qua A và song song với mặt phẳng (P) sao cho

khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất. Biết đường thẳng d nhận $\vec{u} = (2; a; b)$ làm vector chỉ phương. Tính $a.b$

Lời giải

Trả lời: 0



Gọi (Q) là mặt phẳng chứa điểm A và song song với mặt phẳng (P) .

Vì d đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) nên d nằm trong mặt phẳng (Q) .

Gọi H, M lần lượt là hình chiếu của B trên mặt phẳng (Q) và đường thẳng d . Khi đó $d(B, d) = BM$.

Ta luôn có $BM \geq BH$ vậy BM nhỏ nhất $\Leftrightarrow BM = BH \Leftrightarrow M \equiv H$ hay đường thẳng d đi qua điểm A và H .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm B và vuông góc với mặt phẳng $(Q) \Rightarrow \Delta$ có phương trình:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Ta có: $H \in \Delta \Rightarrow H(t; -1 - 2t; 3 + 2t)$.

Mà $H \in (Q) \Leftrightarrow t - 2(-1 - 2t) + 2(3 + 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 1; 1)$.

d có vector chỉ phương $\overrightarrow{AH} = (2; 1; 0) \Rightarrow \vec{u} = (2; a; b) = (2; 1; 0)$.

Vậy $a.b = 0$

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 0; 1), B(2; -2; 1), C(4; 2; 3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đường thẳng d đi qua điểm $M(a; b; -1)$, khi đó $a + b$ bằng

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2; 0), \overrightarrow{AC} = (2; 2; 2)$.

VTPT $\vec{n}_{(ABC)} = (-4; 0; 4) = -4(1; 0; -1)$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC): x - z - 1 = 0$ (1)

Gọi M là trung điểm AB , suy ra $M(2; -1; 1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB . Khi đó $(\alpha): y + 1 = 0$ (2)

Gọi N là trung điểm AC , suy ra $N(3; 1; 2)$.

Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn AC . Khi đó $(\beta): x + y + z - 6 = 0$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta có hệ
$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Suy ra tọa độ $I(4; -1; 3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 \\ z = 3 - t \end{cases}.$$

Đường thẳng d đi qua điểm $M(a; b; -1)$ suy ra $t = 4 \Rightarrow M(8; -1; -1)$.

Suy ra $a + b = 7$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là: $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0; 5; 3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1; 1; 0)$ thuộc đường thẳng AC . Biết vector $\vec{u} = (a; b; 3)$ là vector chỉ phương của đường thẳng AC . Tính $a + b$ bằng

Lời giải

Trả lời: 1

Phương trình tham số của đường phân giác trong góc A :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 6 - 4t \\ z = 6 - 3t \end{cases} (d)$$

Gọi D là điểm đối xứng với M qua (d) . Khi đó $D \in AC \Rightarrow$ đường thẳng AC có một vector chỉ phương là $\overrightarrow{ND}$.

* Ta xác định điểm D .

Gọi K là giao điểm MD với (d) . Ta có $K(t; 6 - 4t; 6 - 3t)$; $\overrightarrow{MK} = (t; 1 - 4t; 3 - 3t)$.

Ta có $\overrightarrow{MK} \perp \vec{u}_d$ với $\vec{u}_d = (1; -4; -3)$ nên $t - 4(1 - 4t) - 3(3 - 3t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

$K\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{9}{2}\right)$. K là trung điểm MD nên
$$\begin{cases} x_D = 2x_K - x_M \\ y_D = 2y_K - y_M \\ z_D = 2z_K - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 3 \\ z_D = 6 \end{cases} \text{ hay } D(1; 3; 6).$$

Một vector chỉ phương của AC là $\overrightarrow{DN} = (0; -2; -6)$. Hay $\vec{u} = (0; 1; 3)$ là vector chỉ phương.

Vậy $a + b = 0 + 1 = 1$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

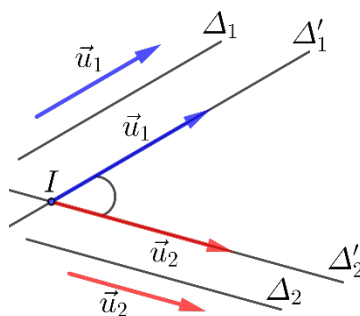


LÝ THUYẾT.

I. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c), \vec{u}' = (a'; b'; c')$. Khi đó:

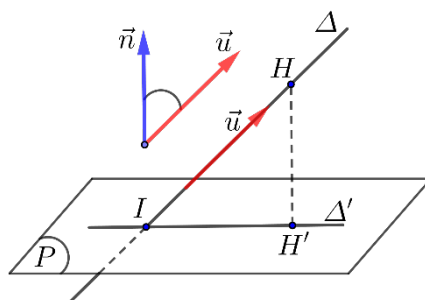
$$\cos(\Delta, \Delta') = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u}') \right| = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$



II. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó:

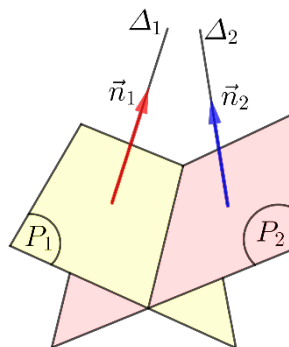
$$\sin(\Delta; (P)) = \left| \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



III. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ tương ứng có các vector pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C), \vec{n}' = (A'; B'; C')$. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) , kí hiệu là $((P); (Q))$, được tính theo công thức:

$$\cos((P); (Q)) = \left| \cos(\vec{n}; \vec{n}') \right| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Phương pháp

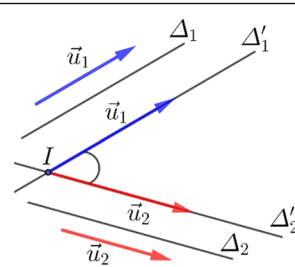
Trong không gian $Oxyz$,

Loại

Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

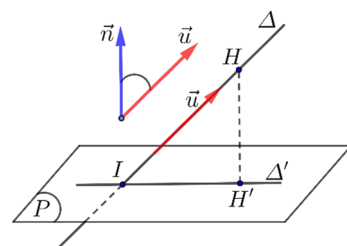
$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Hình vẽ



Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó, ta có:

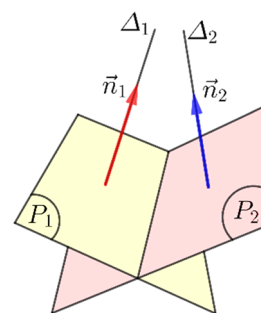
$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là

$\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1), (P_2)) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



DẠNG 1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, tính cosin của góc giữa trục Oz và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1} \text{ (đơn vị độ)}$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = -1 + 2s \\ z = 1 + s \end{cases} \text{ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười, đơn vị độ)}$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, Gọi S là tập hợp các giá trị m để đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = -2 + mt \\ z = 1 - t \end{cases}$ tạo với

$$\text{đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 - s \\ z = 1 + 2ms \end{cases} \text{ một góc } 60^\circ. \text{ Tính tích giá trị của các phần tử trong tập } S.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O , thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1; -2; 1)$ một khoảng nhỏ nhất. Khi đó cosin của góc giữa d và trục tung bằng bao nhiêu?

DẠNG 2: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng

$$(P): x - y + 3 = 0. \text{ Tính số đo góc giữa đường thẳng } d \text{ và mặt phẳng } (P).$$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa trục Oz và mặt phẳng $(P): x - y + \sqrt{2}z + 2024 = 0$.

Câu 8: Trên một sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ trục tọa độ $Oxyz$. Biết tia sáng có phương trình

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases} \text{ và mặt sàn sân khấu là mặt phẳng } (P) \text{ có phương trình } y = 0. \text{ Tính góc giữa tia}$$

sáng và mặt sàn sân khấu.



Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$,

$$d_2: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}. \text{ Lập phương trình mặt phẳng } (P) \text{ chứa đường thẳng } d_1 \text{ tạo với đường thẳng } d_2$$

một góc 45° .

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 1 = 0$ và đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1+2t \end{cases}. \text{ Lập phương trình của đường thẳng } \Delta \text{ đi qua } M(0; -1; 1), \text{ cắt } d \text{ và tạo với}$$

mp (P) một góc α với $\sin \alpha = \frac{1}{12}$.

DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

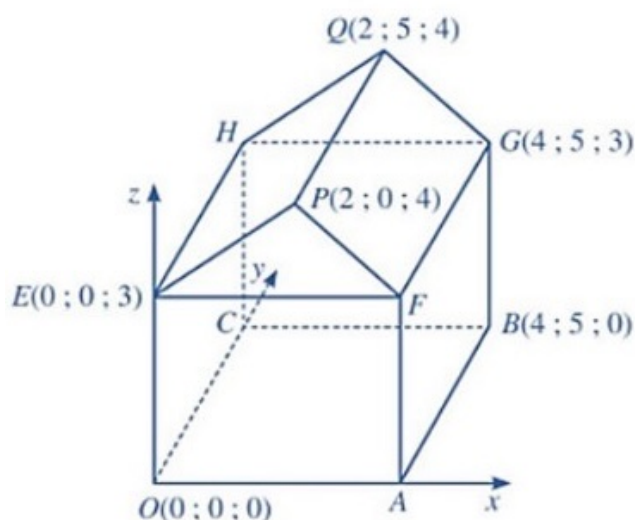
Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x - y - 4 = 0$. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 2x - y + 5z + 2 = 0$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) .

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng (Q) . Biết hình chiếu của gốc O lên (Q) là điểm $H(2; -1; 0)$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; 1; 0)$, $P(0; 0; 1)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) .

Câu 15: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết các tọa độ cho như hình vẽ. Tính độ dốc của mái nhà, tức góc tạo bởi mái nhà so với nền nhà (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



DẠNG 4: TỌA ĐỘ HÓA BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- Câu 16:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $3a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$.
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) .
- Câu 18:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = a\sqrt{6}$. Tính giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .
- Câu 19:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .
- Câu 20:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

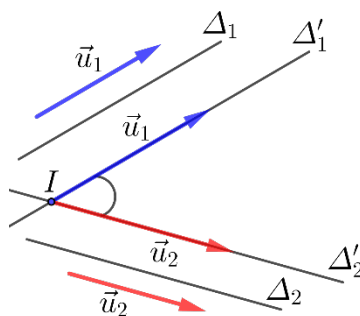


LÝ THUYẾT.

I. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c), \vec{u}' = (a'; b'; c')$. Khi đó:

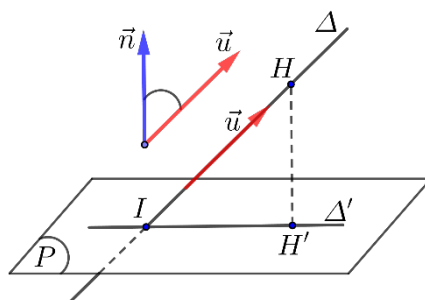
$$\cos(\Delta, \Delta') = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u}') \right| = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$



II. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó:

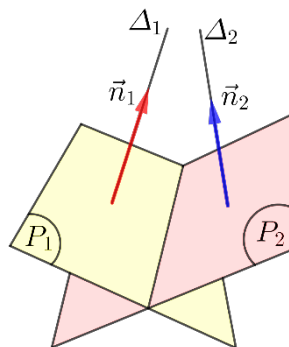
$$\sin(\Delta; (P)) = \left| \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



III. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ tương ứng có các vector pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C), \vec{n}' = (A'; B'; C')$. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) , kí hiệu là $((P); (Q))$, được tính theo công thức:

$$\cos((P); (Q)) = \left| \cos(\vec{n}; \vec{n}') \right| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Phương pháp

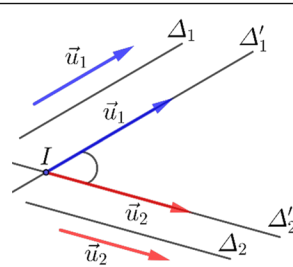
Trong không gian $Oxyz$,

Loại

Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

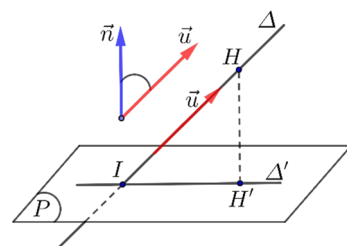
$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Hình vẽ



Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó, ta có:

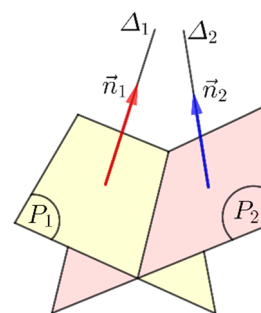
$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là

$\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1), (P_2)) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



DẠNG 1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, tính cosin của góc giữa trục Oz và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Lời giải

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

$$\text{Khi đó } \cos(Oz; \Delta) = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{u}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}. \text{ (đơn vị độ)}$$

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 1; -1)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -2; -1)$.

$$\text{Khi đó } \cos(d; \Delta) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 0.$$

Vậy $(d, \Delta) = 90^\circ$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = -1 + 2s \\ z = 1 + s \end{cases} \text{ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười, đơn vị độ)}$$

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 1; 0)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (2; 2; 1)$.

$$\text{Khi đó } \cos(d; \Delta) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy $(d, \Delta) \approx 19,5^\circ$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, Gọi S là tập hợp các giá trị m để đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = -2 + mt \\ z = 1 - t \end{cases}$ tạo với

$$\text{đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 - s \\ z = 1 + 2ms \end{cases} \text{ một góc } 60^\circ. \text{ Tính tích giá trị của các phần tử trong tập } S.$$

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (m; m; -1)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -1; 2m)$.

$$(d; \Delta) = 60^\circ \Leftrightarrow \cos(d; \Delta) = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1.m + (-1).m + 2m.(-1)|}{\sqrt{m^2 + m^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (2m)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m|}{\sqrt{2m^2 + 1} \cdot \sqrt{4m^2 + 2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4|m| = \sqrt{2} \cdot (2m^2 + 1)$$

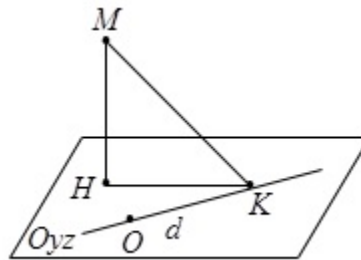
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2\sqrt{2}m + 1 = 0 \\ 2m^2 + 2\sqrt{2}m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Do đó $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

Tích các giá trị của tập S là $-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O , thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1; -2; 1)$ một khoảng nhỏ nhất. Khi đó cosin của góc giữa d và trục tung bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oyz) và trên đường thẳng d .

Ta có: $d(M, d) = MK \geq MH = 1$, $H(0; -2; 1)$.

Suy ra $d(M, d)$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$. Khi đó d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{OH} = (0; -2; 1)$.

$$\cos(d, Oy) = \frac{|\overrightarrow{OH} \cdot \vec{j}|}{|\overrightarrow{OH}| |\vec{j}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

DẠNG 2: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x - y + 3 = 0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Lời giải

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -1; 0)$.

(d) có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 2; 1)$.

$$\sin(d, (P)) = \frac{|1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là 60° .

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa trục Oz và mặt phẳng $(P): x - y + \sqrt{2}z + 2024 = 0$.

Lời giải

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -1; \sqrt{2})$.

Trục Oz có vector chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\sin(Oz, (P)) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 1|}{\sqrt{0+0+1} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa trục Oz và mặt phẳng (P) là 45° .

Câu 8: Trên một sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ trục tọa độ $Oxyz$. Biết tia sáng có phương trình

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases} \text{ và mặt sàn sân khấu là mặt phẳng } (P) \text{ có phương trình } y = 0. \text{ Tính góc giữa tia}$$

sáng và mặt sàn sân khấu.



Lời giải

(P) có vector pháp tuyến $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

(d) có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 1; 0)$.

$$\sin(d, (P)) = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{0+1+0} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa tia sáng và sân khấu là 45° .

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$,

$$d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}. \text{ Lập phương trình mặt phẳng } (P) \text{ chứa đường thẳng } d_1 \text{ tạo với đường thẳng } d_2$$

một góc 45° .

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Vector chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1 = (2; -2; -1)$ và $\vec{u}_2 = (1; 0; -1)$.

(P) chứa đường thẳng d_1 nên $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 2a - 2b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - 2b$

$$\sin(d_2, (P)) = \frac{|\vec{u}_2 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_2| \cdot |\vec{n}|} = \sin 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |a - c| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a - 2a + 2b)^2 = a^2 + b^2 + (2a - 2b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 + b^2 + 4b^2 - 8ab + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 2a.$$

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = 2; c = -2$, suy ra (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -2)$.

Lấy $M(1; 2; -1) \in d_1 \Rightarrow M \in (P)$.

Phương trình mặt phẳng (P) cần tìm là

$$1(x - 1) + 2(y - 2) - 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z - 7 = 0.$$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - 2y + z + 1 = 0$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Lập phương trình của đường thẳng Δ đi qua $M(0; -1; 1)$, cắt d và tạo với

mp(P) một góc α với $\sin \alpha = \frac{1}{12}$.

Lời giải

Gọi $N = \Delta \cap d$. Do $N \in d \Rightarrow N(1 - t; t; 1 + 2t)$.

Đường thẳng Δ có vtcp $\overrightarrow{MN} = (1 - t; 1 + t; 2t)$.

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_{(P)} = (2; -2; 1)$.

Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mp(P).

$$\text{Khi đó ta có } \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} \Leftrightarrow \frac{|-2t|}{3 \cdot \sqrt{6t^2 + 2}} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{29}}{29} \\ t = -\frac{\sqrt{29}}{29} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{\sqrt{29}}{29} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{29 - \sqrt{29}}{29}; \frac{29 + \sqrt{29}}{29}; \frac{2\sqrt{29}}{29} \right).$$

$$\text{Do } \Delta \text{ đi qua } M(0; -1; 1) \text{ nên có phương trình } \begin{cases} x = (29 - \sqrt{29})t \\ y = -1 + (29 + \sqrt{29})t \\ z = 1 + 2\sqrt{29}t \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -\frac{\sqrt{29}}{29} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{29 + \sqrt{29}}{29}; \frac{29 - \sqrt{29}}{29}; \frac{-2\sqrt{29}}{29} \right).$$

Do Δ đi qua $M(0; -1; 1)$ nên có phương trình
$$\begin{cases} x = (29 + \sqrt{29})t \\ y = -1 + (29 - \sqrt{29})t \\ z = 1 - 2\sqrt{29}t \end{cases}$$

DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x - y - 4 = 0$. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

VTPT của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là: $\vec{n}_1 = (2; -1; 2)$, $\vec{n}_2 = (1; -1; 0)$.

Ta có $\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + (-1)(-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ((P), (Q)) = 45^\circ$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 2x - y + 5z + 2 = 0$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) .

Lời giải

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p = (1; -2; 2)$, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_q = (2; -1; 5)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{n}_q) \right| = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p| |\vec{n}_q|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2)(-1) + 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{14}{3\sqrt{30}}$$

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng (Q) . Biết hình chiếu của gốc O lên (Q) là điểm $H(2; -1; 0)$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

Từ giả thiết, suy ra $\vec{OH} = (2; -1; 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) .

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_p = (1; -1; -2)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Ta có $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{OH}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + (-1)(-1) + (-2)(0)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; 1; 0)$, $P(0; 0; 1)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) .

Lời giải

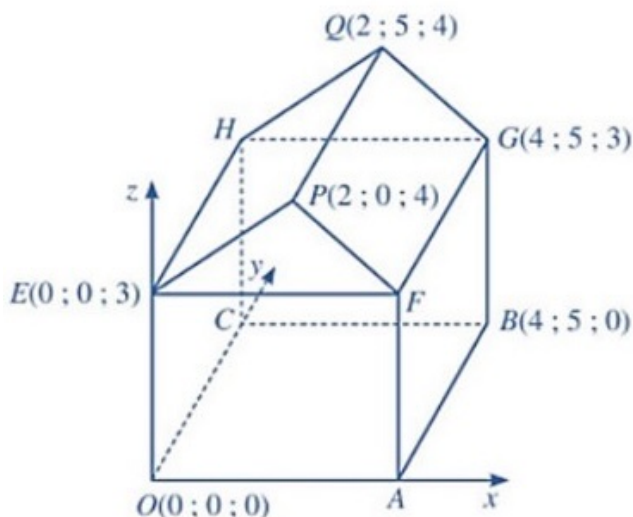
Mặt phẳng (MNP) có một VTPT là $\vec{n} = [\vec{MN}; \vec{MP}] = (1; 1; 1)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (Oxy) .

Ta có $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|1.0 + 1.0 + 1.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 15: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết các tọa độ cho như hình vẽ. Tính độ dốc của mái nhà, tức góc tạo bởi mái nhà so với nền nhà (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Độ dốc của mái nhà, tức là số đo của góc tạo bởi hai mặt lần lượt là $(OABC)$ và $(FGQP)$.

Mặt phẳng $(FGQP)$ có một VTPT là $\vec{n} = [\vec{QP}; \vec{QG}] = (5; 0; 10).$

Mặt phẳng $(OABC)$ chính là mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0; 0; 1).$

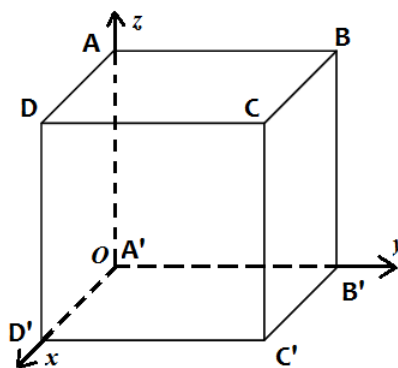
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(FGHE)$ và $(Oxy).$

Ta có $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|5.0 + 0.0 + 10.1|}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 10^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$ Do đó $\varphi \approx 26,6^\circ$

DẠNG 4: TỌA ĐỘ HÓA BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $3a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ $O \equiv A', Ox \equiv A'D', Oy \equiv A'B', Oz \equiv A'A.$

Khi đó: $A'(0;0;0), D'(3a;0;0), B'(0;3a;0), C'(3a;3a;0),$

$$A(0;0;3a), D(3a;0;3a), B(0;3a;3a), C(3a;3a;3a).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (0;3a;0), \overrightarrow{A'D} = (3a;0;3a), \overrightarrow{A'A} = (0;0;3a), \overrightarrow{A'C'} = (3a;3a;0).$$

$$[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D}] = (3a^2;0;-3a^2).$$

Chọn $\vec{n}_1 = (1;0;-1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'CD)$.

$$[\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C}] = (-3a^2;3a^2;0).$$

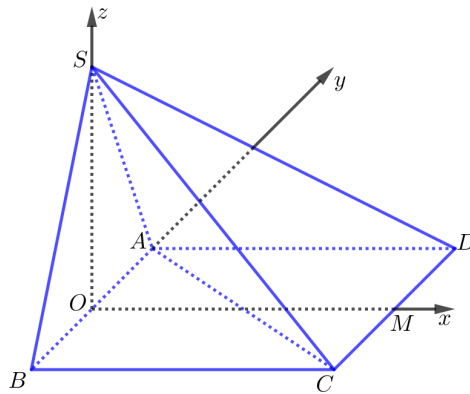
Chọn $\vec{n}_2 = (-1;1;0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ là:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) .

Lời giải



Gọi O, M lần lượt là trung điểm của AB, CD . Vì SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Chuẩn hóa cho $a = 1$

Xét hệ trục $Oxyz$ có $O(0;0;0), M(2;0;0), A(0;1;0), S(0;0;\sqrt{3})$. Khi đó $C(2;-1;0), D(2;1;0)$.

Suy ra $\overrightarrow{SA} = (0;1;-\sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (2;-2;0), \overrightarrow{SC} = (2;-1;-\sqrt{3}), \overrightarrow{CD} = (0;2;0)$.

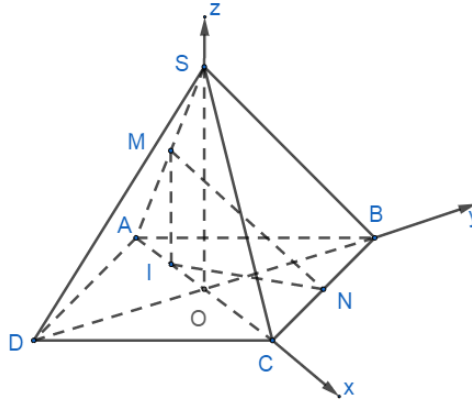
Mặt phẳng (SAC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC}] = (-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; -2)$.

Mặt phẳng (SAD) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{CD}] = (2\sqrt{3}; 0; 4)$.

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{7}.$$

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = a\sqrt{6}$. Tính giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO .

$$\text{Khi đó } CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét $\triangle CNI$ có: $CN = a$, $\widehat{NCI} = 45^\circ$.

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{2} - 2a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle MIN \text{ vuông tại } I \text{ nên } MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{6a^2 - \frac{10a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Mà } MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = a\sqrt{14}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ: (chuẩn hóa cho $a = 1$)

$$\text{Ta có: } O(0;0;0), B(0;\sqrt{2};0), D(0;-\sqrt{2};0), C(\sqrt{2};0;0), N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right),$$

$$A(-\sqrt{2};0;0), S(0;0;\sqrt{14}), M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{14}}{2}\right).$$

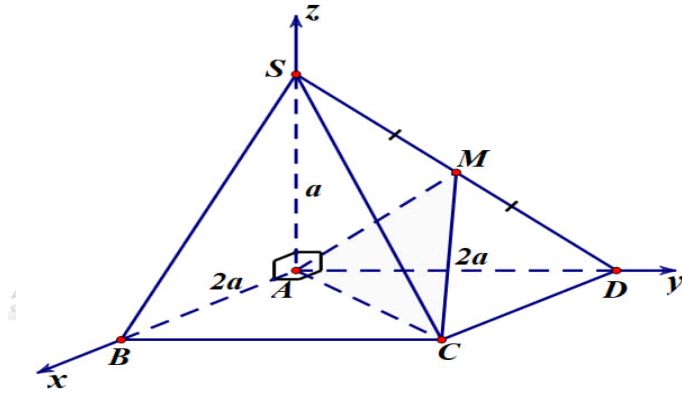
$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{14}}{2}\right), \overrightarrow{SB} = (0;\sqrt{2};-\sqrt{14}), \overrightarrow{SD} = (0;-\sqrt{2};-\sqrt{14}).$$

$$\text{Vectơ pháp tuyến mặt phẳng } (SBD): \vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}] = (-4\sqrt{7}; 0; 0).$$

$$\text{Suy ra } \sin(MN, (SBD)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-4\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}|}{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O$, như hình vẽ:

Khi đó ta có:

$$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), S(0;0;a), M\left(0;a;\frac{a}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{SB} = (2a;0;-a), \overrightarrow{SC} = (2a;2a;-a), \overrightarrow{MA} = \left(0;-a;-\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{MC} = \left(2a;a;-\frac{a}{2}\right).$$

$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (2a^2;0;4a^2) \text{ và } \vec{n}_2 = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}] = (a^2;-a^2;2a^2).$$

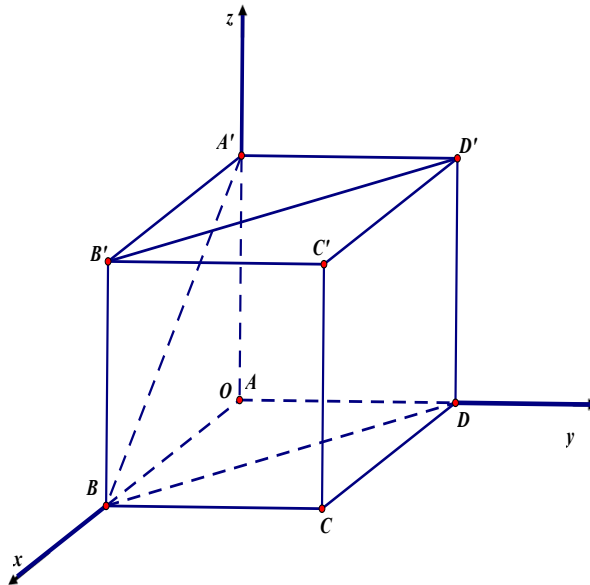
Gọi α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

$$\begin{aligned} \text{ta có } \cos \alpha &= \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2a^2 \cdot a^2 + 4a^2 \cdot 2a^2|}{\sqrt{(2a^2)^2 + (4a^2)^2} \cdot \sqrt{(a^2)^2 + (-a^2)^2 + (2a^2)^2}} \\ &= \frac{10a^4}{\sqrt{20 \cdot 6 \cdot (a^4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{30}}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \left(\frac{\sqrt{30}}{5} \right)^2 - 1 = \frac{5}{25}. \text{ Suy ra } \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.

Lời giải



+) Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(2a;0;0), C(2a;2a;0), D(0;2a;0), A'(0;0;2a), B'(2a;0;2a), C'(2a;2a;2a), D'(0;2a;2a)$.

+) Ta thấy $OC \perp (BB'D'D)$ và $\overrightarrow{OC} = (2a;2a;0)$ nên suy ra mặt phẳng $(BB'D'D)$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;0)$.

+) Đường thẳng $A'B$ có vector chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (2a;0;-2a)$ ta chọn $\vec{u} = (1;0;-1)$.

+) Ta có $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-6}{4}$. Góc

giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 60° D. 45° .

Câu 2: Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính $\cos$ in của góc giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, $d_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{9}$.

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 0. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 3: Tính $\cos$ in góc giữa đường thẳng d với trục Ox biết $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 1 = 0$.

Góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 2 = 0$. $\cos$ in của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

- A. $-\frac{\sqrt{78}}{9}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{\sqrt{78}}{9}$.

- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng
- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 9:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x + 8y + 10z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{5}$. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là
- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .
- Câu 10:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 1 = 0$. Tính góc hợp bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P) .
- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .
- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2 = 0$, $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Góc giữa (P) và (Q) là
- A. 120° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .
- Câu 12:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$, mặt phẳng $(Q): x - 3y + 5z - 2 = 0$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là
- A. $\frac{\sqrt{35}}{7}$. B. $-\frac{\sqrt{35}}{7}$. C. $\frac{5}{7}$. D. $-\frac{5}{7}$.
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): 8x - 4y - 8z - 11 = 0$ và $(Q): \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$.
- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{3}$.
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 11 = 0$ bằng bao nhiêu?
- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .
- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và $(Q): x - 3y + 5z - 2 = 0$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là
- A. $\frac{\sqrt{35}}{7}$. B. $-\frac{\sqrt{35}}{7}$. C. $\frac{5}{7}$. D. $-\frac{5}{7}$.

- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$, $(\beta): x + 2y - z + 2 = 0$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .
- A. $\varphi = 120^\circ$. B. $\varphi = 30^\circ$. C. $\varphi = 90^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$.
- Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$, tính góc φ giữa mặt phẳng $(P): x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0$ và $(Oxz): y = 0$.
- A. $\varphi = 135^\circ$. B. $\varphi = 45^\circ$. C. $\varphi = 90^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$.
- Câu 18:** Trong không gian $Oxyz$, gọi φ là góc giữa mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(Oxy): z = 0$. Tính $\cos \varphi$.
- A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{3}{\sqrt{14}}$. C. $\frac{3}{14}$. D. $\frac{3}{5}$.
- Câu 19:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 4x + my + mz + 1 = 0$ và $(Q): x - y - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 60° ?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 20:** Trong không gian $Oxyz$, xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + my + 2mz + 4 = 0$ và $(\beta): 6x - y - z + 3 = 0$ vuông góc với nhau.
- A. $m = 3$. B. $m = 4$. C. $m = -3$. D. $m = -4$.
- Câu 21:** Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0;0;0), B(0;1;0), C(1;1;0), A'(0;0;1)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$.
- A. $\varphi = 135^\circ$. B. $\varphi = 45^\circ$. C. $\varphi = 90^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$.
- Câu 22:** Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0;0;0), B(0;1;0), C(1;1;0), A'(0;0;1)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(A'BC)$.
- A. $\varphi = 135^\circ$. B. $\varphi = 45^\circ$. C. $\varphi = 90^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$.
- Câu 23:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a, CD = DA = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .
- A. $\frac{3\sqrt{15}}{15}$. B. $\frac{2\sqrt{15}}{15}$. C. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$.
- Câu 24:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .
- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $-\frac{2\sqrt{15}}{3}$. C. $-\frac{2\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$.
- Câu 25:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy là 60° . Gọi M là trung điểm BC . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng $A'C$ và AM .
- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

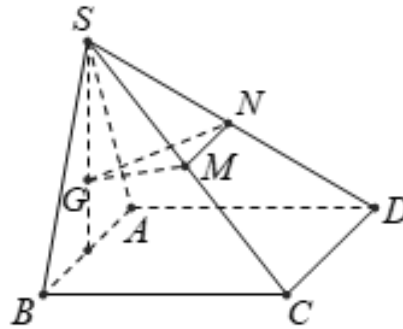
Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30° . Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC . Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN) .

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



- A. $\frac{2\sqrt{39}}{39}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. D. $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $AB = 2a$, $AD = 3a$ và $SA = 2a$. Cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

- A. $-\frac{5}{\sqrt{221}}$. B. $\frac{5}{\sqrt{221}}$. C. $\frac{3}{\sqrt{221}}$. D. $-\frac{3}{\sqrt{221}}$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0;10;0)$ với vận tốc $\vec{v} = (150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



- A. 10° . B. 12° . C. 11° . D. 9° .



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$, $\Delta_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-6}{4}$. Góc

giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng

A. 30° .

B. 90° .

C. 60°

D. 45° .

Lời giải

Ta có VTCP của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\vec{a}_1(2; -3; 2)$ và $\vec{a}_2(1; -2; 4) \Rightarrow \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$

Vậy góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90° .

Câu 2: Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính $\cos$ in của góc giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, $d_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{9}$.

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

d_1 có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$.

d_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (3; 3; 9)$.

Ta có $\cos(d_1, d_2) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + 9^2}} = 0$.

Câu 3: Tính $\cos$ in góc giữa đường thẳng d với trục Ox biết $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

VTCP $\vec{u}_d = (2; 1; 1)$, VTCP của trục Ox là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Vậy $\cos(d, Ox) = \left| \cos(\vec{u}_d, \vec{i}) \right| = \frac{|2 + 0 + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$
- A. 45° . B. 30° . C. 60° . **D. 90° .**

Lời giải

VTCP $\vec{u}_{d_1} = (1; -1; 2)$, VTCP $\vec{u}_{d_2} = (-1; 1; 1)$

Ta có $\cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}) \right| = \frac{|1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = 0$

Vậy $(d_1, d_2) = 90^\circ$.

- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 1 = 0$.

Góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

- A. 30° . **B. 45° .** C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Ta có $\vec{u}_d = (5; 1; 0)$ và $\vec{n}_{(P)} = (3; -2; 0)$

Khi đó $\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}) \right| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 2 = 0$. Cosin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng
- A. $-\frac{\sqrt{78}}{9}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. **D. $\frac{\sqrt{78}}{9}$.**

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 2)$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Ta có $\sin(\Delta, (\alpha)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \cos(\Delta, (\alpha)) = \frac{\sqrt{78}}{9}$.

- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng
- A. 30° .** B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Mp (P) có một VTPT $\vec{n}_p = (2; -1; -1)$. Mp (Q) có một VTPT $\vec{n}_q = (1; 0; -1)$.

$$\text{Ta có } \cos[(P), (Q)] = |\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q)| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|2+0+1|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } [(P), (Q)] = 30^\circ.$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Mặt phẳng } (MNP) \text{ có một VTPT là } \vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = (1;1;1).$$

$$\text{Mặt phẳng } (Oxy) \text{ có một VTPT là } \vec{k} = (0;0;1).$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (Oxy) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x + 8y + 10z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{5}$. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A. 90° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 30° .

Lời giải

$$\text{Mặt phẳng } (P) \text{ có một VTPT là } \vec{n} = (6;8;10).$$

$$\text{Đường thẳng } d \text{ có một VTCP là } \vec{u} = (3;4;5).$$

$$\text{Ta có } \vec{n} = 2\vec{u} \Rightarrow d \perp (P) \text{ nên góc giữa đường thẳng } d \text{ và mặt phẳng } (P) \text{ là } 90^\circ.$$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng

$$(P): 3x - 2y + 1 = 0. \text{ Tính góc hợp bởi đường thẳng } d \text{ và mặt phẳng } (P).$$

A. 45° . **B.** 30° . **C.** 90° . **D.** 60° .

Lời giải

$$\text{Đường thẳng } d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases} \text{ có một vector chỉ phương } \vec{u} = (5;1;0).$$

$$\text{Mặt phẳng } (P): 3x - 2y + 1 = 0 \text{ có vector pháp tuyến } \vec{n} = (3;-2;0).$$

Gọi α là góc hợp bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

$$\text{Khi đó: } \sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0|}{\sqrt{5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra: } \alpha = 45^\circ.$$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2 = 0$, $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Góc giữa (P) và (Q) là

- A.** 120° . **B.** 30° . **C.** 90° . **D.** 60° .

Lời giải

$(P): x - 2y - z + 2 = 0$ có VTPT $\vec{n}_P = (1; -2; -1)$.

$(Q): 2x - y + z + 1 = 0$ có VTPT $\vec{n}_Q = (2; -1; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) , ta có

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_P; \vec{n}_Q) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$, mặt phẳng $(Q): x - 3y + 5z - 2 = 0$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là

- A.** $\frac{\sqrt{35}}{7}$. **B.** $-\frac{\sqrt{35}}{7}$. **C.** $\frac{5}{7}$. **D.** $-\frac{5}{7}$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_P = (1; 2; -2)$, $\vec{n}_Q = (1; -3; 5)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| |\vec{n}_Q|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \frac{15}{3\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): 8x - 4y - 8z - 11 = 0$ và $(Q): \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$.

- A.** $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

+ Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_{(P)} = (8; -4; -8)$, $\vec{n}_{(Q)} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$.

+ Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 11 = 0$ bằng bao nhiêu?

- A.** 45° . **B.** 30° . **C.** 90° . **D.** 60° .

Lời giải

Ta có $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt (P) nên $OH \perp (P)$.

Do đó (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; -2)$.

(Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (1; -1; 0)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos \left(\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)} \right) \right| = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $((P), (Q)) = 45^\circ$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và $(Q): x - 3y + 5z - 2 = 0$.
Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là

A. $\frac{\sqrt{35}}{7}$.

B. $-\frac{\sqrt{35}}{7}$.

C. $\frac{5}{7}$.

D. $-\frac{5}{7}$.

Lời giải

+ Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; -2)$, $\vec{n}_{(Q)} = (1; -3; 5)$.

+ Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \frac{15}{3\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$, $(\beta): x + 2y - z + 2 = 0$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .

A. $\varphi = 120^\circ$.

B. $\varphi = 30^\circ$.

C. $\varphi = 90^\circ$.

D. $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; -1; 2)$; $\vec{n}_{(\beta)} = (1; 2; -1)$.

Góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(\beta)}|}{|\vec{n}_{(\alpha)}| \cdot |\vec{n}_{(\beta)}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, tính góc φ giữa mặt phẳng $(P): x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0$ và $(Oxz): y = 0$.

A. $\varphi = 135^\circ$.

B. $\varphi = 45^\circ$.

C. $\varphi = 90^\circ$.

D. $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1; -\sqrt{2}; 1)$; $\vec{n}_{(Oxz)} = (0; 1; 0)$.

Góc φ giữa hai mặt phẳng (P) và (Oxz) là :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Oxz)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Oxz)}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, gọi φ là góc giữa mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(Oxy): z = 0$.
Tính $\cos \varphi$.

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{3}{\sqrt{14}}$.

C. $\frac{3}{14}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; 3)$; $\vec{n}_{(Oxz)} = (0; 0; 1)$.

Góc φ giữa hai mặt phẳng (P) và (Oxy) là :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Oxy)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Oxy)}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 4x + my + mz + 1 = 0$ và $(Q): x - y - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 60° ?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(P)} = \vec{n}_1 = (4; m; m)$; $\vec{n}_{(Q)} = \vec{n}_2 = (1; -1; 0)$.

$$\text{Khi đó: } \cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|4 - m|}{\sqrt{2m^2 + 16} \cdot \sqrt{2}} = \frac{|4 - m|}{2\sqrt{m^2 + 8}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|4 - m|}{2\sqrt{m^2 + 8}} \Leftrightarrow m^2 + 8 = (4 - m)^2 \Leftrightarrow 8 = 16 - 8m \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + my + 2mz + 4 = 0$ và $(\beta): 6x - y - z + 3 = 0$ vuông góc với nhau.

- A.** $m = 3$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = -4$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = (2; m; 2m)$; $\vec{n}_{(\beta)} = (6; -1; -1)$.

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(\beta)} = 0 \Leftrightarrow 12 - m - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0; 0; 0), B(0; 1; 0), C(1; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$.

- A.** $\varphi = 135^\circ$. **B.** $\varphi = 45^\circ$. **C.** $\varphi = 90^\circ$. **D.** $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$, do đó mặt phẳng (ABC) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = \overrightarrow{AA'} = (0; 0; 1)$.

Mặt phẳng $(A'BC)$ có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (0; 1; -1)$ và $\overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1)$.

Suy ra $(A'BC)$ có vector pháp tuyến là $[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}] = (0; -1; -1)$. Do đó $\vec{n}_2 = (0; 1; 1)$ cũng là vector pháp tuyến của $(A'BC)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$.

$$\text{Khi đó: } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0; 0; 0), B(0; 1; 0), C(1; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(A'BC)$.

- A.** $\varphi = 135^\circ$. **B.** $\varphi = 45^\circ$. **C.** $\varphi = 90^\circ$. **D.** $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải

Ta có $A'ACC'$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, do đó $C'(1;1;1)$.

Mặt phẳng (ABC') có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0;1;0)$ và $\overrightarrow{AC'} = (1;1;1)$.

Suy ra (ABC') có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}] = (1;0;-1)$.

Mặt phẳng $(A'BC)$ có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (0;1;-1)$ và $\overrightarrow{A'C} = (1;1;-1)$.

Suy ra $(A'BC)$ có vector pháp tuyến là $[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}] = (0;-1;-1)$. Do đó $\vec{n}_2 = (0;1;1)$ cũng là vector pháp tuyến của $(A'BC)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(A'BC)$.

Khi đó: $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a, CD = DA = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

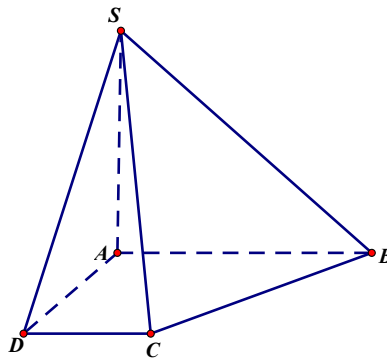
A. $\frac{3\sqrt{15}}{15}$.

B. $\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

C. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O(0;0;0), D(a;0;0), B(0;2a;0), S(0;0;2a)$, thì $C(a;a;0)$

Ta có $\overrightarrow{SB} = (0;2a;-2a), \overrightarrow{SC} = (a;a;-2a), \overrightarrow{SD} = (a;0;-2a)$,

$[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (-2a^2; -2a^2; -2a^2), [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}] = (-2a^2; 0; -a^2)$.

Suy ra mặt phẳng (SBC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1;1;1)$, mặt phẳng (SCD) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2;0;1)$.

Ta có $\cos((SBC), (SCD)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|3|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

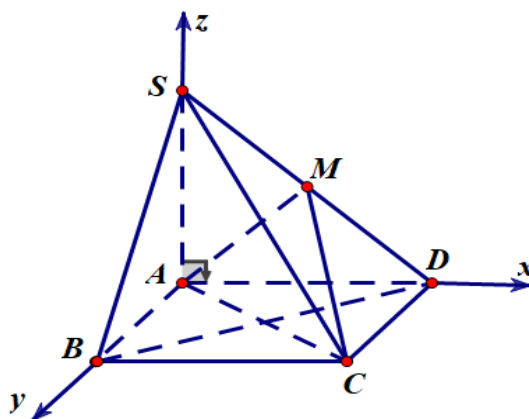
A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $-\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

C. $-\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ và chuẩn hóa cho $a = 1$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;2)$

Ta có M là trung điểm $SD \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, $C(1;1;0)$.

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), \overrightarrow{AC} = (1; 1; 0), [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}] = \left(-1; 1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (AMC) \text{ có một vtpt } \vec{n} = (-2; 2; 1)$$

$$\overrightarrow{SB} = (0; 1; -2), \overrightarrow{SC} = (1; 1; -2), [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (0; 2; 1) \Rightarrow (SBC) \text{ có một vtpt } \vec{k} = (0; 2; 1)$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) thì $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{Do } \tan \alpha > 0 \text{ nên } \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy là 60° . Gọi M là trung điểm BC . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng $A'C$ và AM .

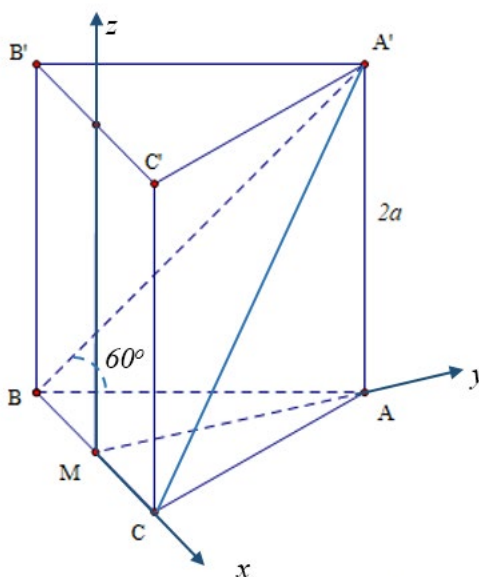
A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



$$\text{Ta có: } AB = AC = BC = \frac{2a}{\tan 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow MC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

$$\text{Khi đó: } M(0;0;0), A(0;a;0), C\left(\frac{a}{\sqrt{3}};0;0\right), A'(0;a;2a).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{A'C} = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}; -a; -2a\right) \Rightarrow A'C = \frac{4a}{\sqrt{3}}.$$

$$\overrightarrow{AM} = (0; -a; 0) \Rightarrow AM = a.$$

$$\text{Khi đó có } \cos(A'C, AM) = \frac{|\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{A'C}| |\overrightarrow{AM}|} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30° . Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC . Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN) .

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}.$

B. $\frac{1}{\sqrt{5}}.$

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}.$

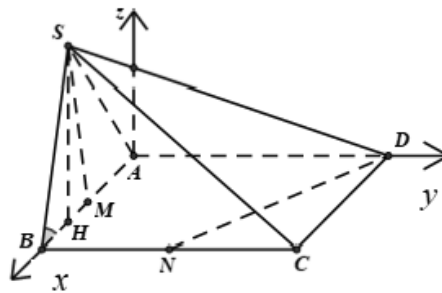
D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

Lời giải

Giả sử cạnh đáy có độ dài là 1.

$$\text{Trong } (SAB), \text{ kẻ } SH \perp AB \text{ tại } H. \text{ Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ sau đây.



$$\text{Tam giác } SAB \text{ vuông tại } S \text{ có: } SB = AB \cdot \cos \widehat{SBA} = 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SBH \text{ vuông tại } H \text{ có: } BH = SB \cdot \cos \widehat{SBH} = \frac{3}{4} \text{ và } SH = BH \cdot \sin \widehat{SBA} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$AH = AB - BH = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow S\left(\frac{1}{4}; 0; \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), D(0; 1; 0), N\left(1; \frac{1}{2}; 0\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SM} = \left(\frac{1}{4}; 0; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{DN} = \left(1; -\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow \cos(SM, DN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

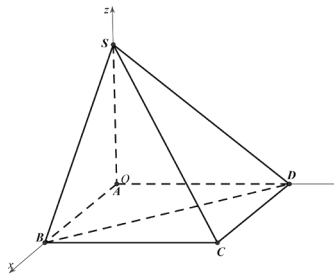
A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$.

B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải



Cho $a = 1$.

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó, ta có:

$$A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; \sqrt{3}; 0), S(0; 0; 1), C(1; \sqrt{3}; 0).$$

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-1; \sqrt{3}; 0)$, nên đường thẳng BD có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; \sqrt{3}; 0)$.

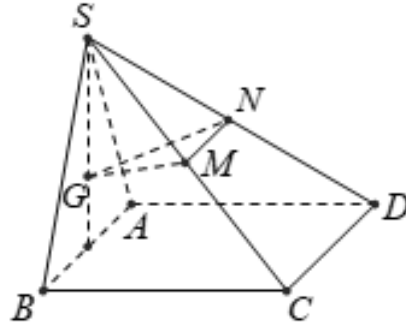
$$\text{Ta có } \overrightarrow{SB} = (1; 0; -1), \overrightarrow{BC} = (0; \sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}).$$

Như vậy, mặt phẳng (SBC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



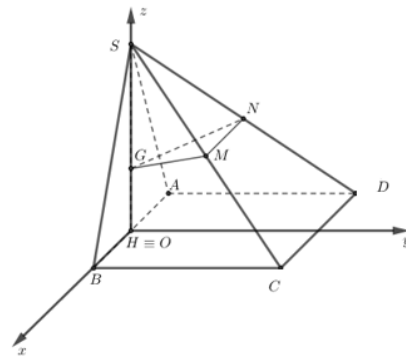
A. $\frac{2\sqrt{39}}{39}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

D. $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải



Cho $a = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó

$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right); A\left(\frac{-1}{2};0;0\right); B\left(\frac{1}{2};0;0\right); C\left(\frac{1}{2};1;0\right); D\left(\frac{-1}{2};1;0\right)$$

$$\text{suy ra } G\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$, mặt phẳng (GMN) có vectơ pháp

$$\text{tuyến là } \vec{n} = [\vec{GM}; \vec{GN}] = \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{24}; \frac{1}{4}\right).$$

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (GMN) \text{ và } (ABCD), \text{ ta có } \cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $AB = 2a$, $AD = 3a$ và $SA = 2a$. Cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

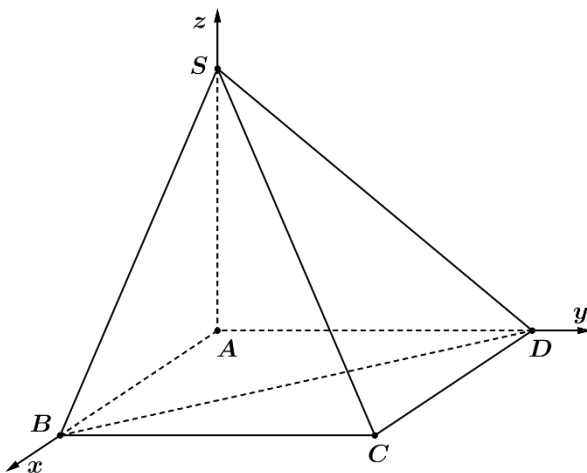
A. $-\frac{5}{\sqrt{221}}$.

B. $\frac{5}{\sqrt{221}}$.

C. $\frac{3}{\sqrt{221}}$.

D. $-\frac{3}{\sqrt{221}}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $A \equiv O$.

Ta có $B(2a; 0; 0), D(0; 3a; 0), S(0; 0; 2a)$ và $C(2a; 3a; 0)$.

Suy ra $\overrightarrow{SC} = (2a; 3a; -2a)$ và $\overrightarrow{BD} = (-2a; 3a; 0)$.

Hai đường thẳng SC và BD có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u} = (2; 3; -2)$ và $\vec{v} = (-2; 3; 0)$.

$$\text{Vậy } \cos(SC, BD) = \frac{|\vec{u}, \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{5}{\sqrt{221}}.$$

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0; 10; 0)$ với vận tốc $\vec{v} = (150; 150; 40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



A. 10° .

B. 12° .

C. 11° .

D. 9° .

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng biểu thị cho hướng chuyển động bay lên của máy bay.

Ta có Δ nhận vectơ $\vec{v} = (150; 150; 40) = 10(15; 15; 4)$ làm vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oxy) .

$$\text{Suy ra } \sin \varphi = |\cos(\vec{v}, \vec{n})| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|15 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{15^2 + 15^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{466}}.$$

Vậy góc nâng của máy bay là $\varphi \approx 11^\circ$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN



IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x - y + 2 = 0$, $(Q): x + y - z - 3 = 0$, $(R): x + y + 2z - 1 = 0$.

- a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 0.
- b) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 0° .
- c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (R) bằng 0.
- d) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) bằng 1.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có ba điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$.

- a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0.
- b) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90° .
- c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{3}{7}$.
- d) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{10\sqrt{3}}{21}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $d: \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$.

- a) Điểm $A(0;2;1)$ không thuộc đường thẳng Δ .
- b) Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}_d = (3;2;2)$.
- c) Hai đường thẳng Δ và d chéo nhau.
- d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ và d . Khi đó $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{38}}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có phương trình chính tắc lần lượt là:

$$d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{5} = \frac{z-15}{6} \text{ và } d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

a) Phương trình tham số của d là:
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 5t \\ z = 15 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Phương trình tham số của d' là:
$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = 3 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

d) Góc giữa đường thẳng d và d' là 35° .

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng (P) có phương

trình $2x + y + z - 1 = 0$.

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (3; 4; -3)$.

b) $\sin(\Delta, (P)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Góc giữa Δ và (P) là: 30° .

d) Giao điểm của Δ và (P) là: $M(3; 4; -3)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $3x + 6y - 3z + 2024 = 0$.

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-1; -2; 1)$.

b) Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

c) Góc giữa Δ và (P) là: 90° .

d) Lấy tùy ý hai điểm phân biệt $A, B \in \Delta$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên (P) . Khi đó $A'B' = 2024$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng (P) có phương

trình $2x + y - 3z - 1 = 0$.

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (2; 0; -3)$.

b) Góc giữa Δ và (P) là: 150° .

c) Không có điểm chung nào giữa Δ và (P) .

d) Hình chiếu của $M(1; 2; -1)$ lên (P) là: $N(1; 2; 1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \\ z=3-t \end{cases}$ và đường thẳng

$$\Delta_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

a) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc Δ_1 và điểm $N(2;-2;1)$ thuộc Δ_2 .

b) $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{2\sqrt{154}}{77}.$

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

d) Đường thẳng d đi qua điểm $N(2;3;-1)$ đồng thời cắt và vuông góc với Δ_2 có phương trình

là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-71} = \frac{z+1}{25}.$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2024}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2025}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$. Xét các vector $\vec{u}=(2;1;-2)$, $\vec{n}=(2;2;-1)$.

a) $\vec{u}$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

b) $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

c) $\cos(\Delta, (P)) = \frac{8}{9}.$

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-t \\ y=3+t \\ z=4 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$.

a) Vector $\vec{n}=(1;-2;2)$ là một vector pháp tuyến của (P) .

b) Điểm $M(0;4;4)$ thuộc Δ .

c) Góc giữa Δ và (P) bằng 60° .

d) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;4;4)$, song song với (P) và tạo với Δ một góc 45° có phương trình là $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{2}.$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=3-2t \\ y=1+2t \\ z=-5+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x+y-5=0$.

a) Vector $\vec{u}=(-2;2;1)$ là một vector chỉ phương của Δ .

b) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Oyz) bằng 45° .

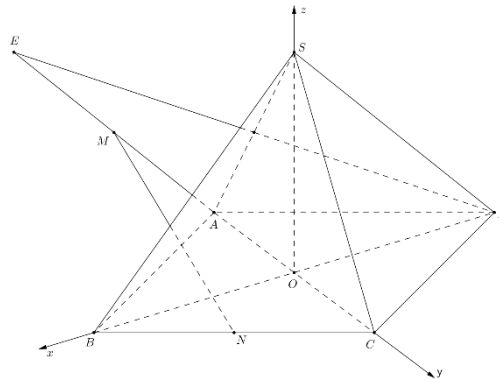
c) Đường thẳng đi qua $N(2;3;-4)$ và song song với Δ có phương trình là $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{1}.$

d) Đường thẳng d vuông góc Δ và tạo với (P) một góc 45° có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1=(1;-2;4)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - z - 2 = 0$.

- a) Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.
- b) Góc giữa Δ và (P) là: 60° .
- c) Chỉ có một điểm chung duy nhất giữa Δ và (P) .
- d) Mọi điểm thuộc Δ có hình chiếu lên (P) là chính nó.

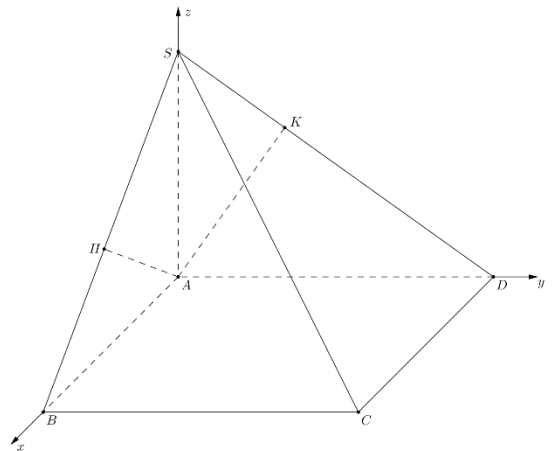
Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng $\sqrt{2}$, $SO = 1$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm của SA . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên.



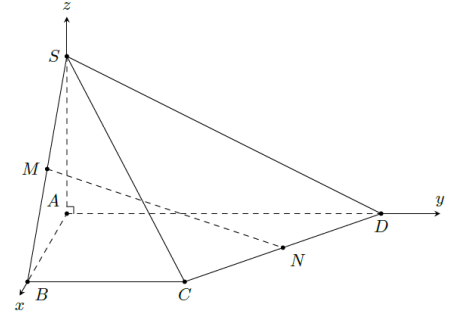
- a) Tọa độ điểm A là $(0; -1; 0)$.
- b) Mặt phẳng đáy có phương trình $x + y = 0$.
- c) Hai đường thẳng MN và BD vuông góc với nhau.
- d) Giá trị sin của góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy bằng $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, SA vuông góc với mặt đáy và có độ dài bằng 2. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên.

- a) Tọa độ điểm C là $(1; 1; 1)$.
- b) Phương trình đường thẳng SC là $x = y = \frac{z-2}{-2}$.
- c) Góc giữa đường thẳng AC và SB là 30° .
- d) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) là 60° .

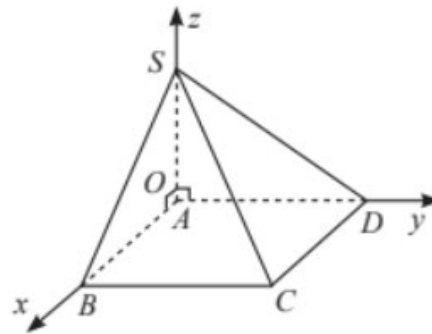


Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên.



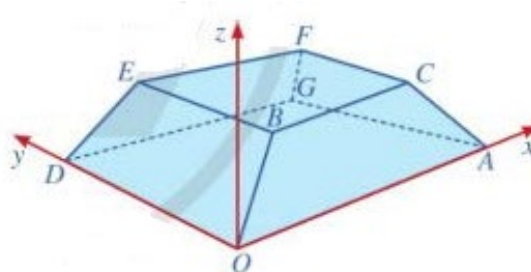
- Tọa điểm C là $(1;1;0)$.
- Góc tạo bởi đường thẳng SB và AC là 60° .
- Cô-sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là $\frac{\sqrt{55}}{10}$.
- Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là 30° .

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = 5a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (chọn $a = 1$) như hình bên.



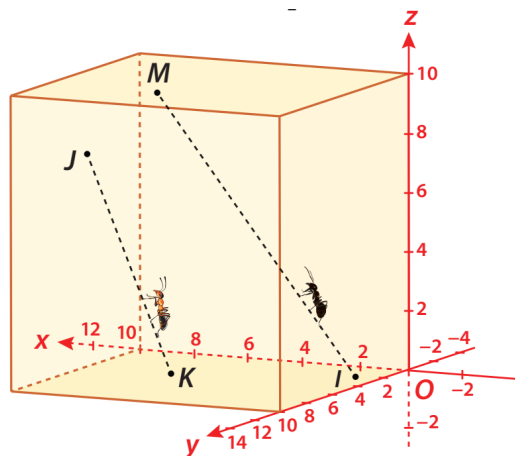
- Toạ độ $A \equiv O(0;0;0), B(2;0;0), S(0;0;3), D(0;5;0), C(2;5;0)$.
- Phương trình mặt phẳng $(SBD): \frac{x}{2} - \frac{y}{5} - \frac{z}{3} = 1$
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{30}{19}$.
- Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm S, A, C, D là $R = \frac{\sqrt{38}}{2}$.

Câu 17: Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100m$, chiều rộng $OD = 60m$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$.



- Toạ độ điểm $A(100;0;0), D(0;60;0), G(100;60;0)$.
- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(OBED)$ là $\vec{n} = (4;0;5)$
- Phương trình mặt phẳng $(OBED)$ là: $4x - 5z = 0$.
- $d(G, (OBED)) \approx 60,5m$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ cho trước (1 đơn vị = 1 cm), có một chú kiến vàng và một chú kiến đen bò trên hai sợi dây thẳng khác nhau. Giả sử tại thời điểm t (tính bằng phút), kiến vàng ở tại vị trí $(2+2t; 1-t; 2+t)$ trên đường thẳng d_1 . Cùng thời điểm đó, kiến đen ở tại vị trí $(7-t; 2-t; -36+3t)$ trên đường thẳng d_2 .



- Tại thời điểm $t = 1$, kiến vàng có tọa độ $(4; 0; 3)$. kiến đen có tọa độ $B(6; 1; 33)$.
- Tại thời điểm $t = 1$, khoảng cách giữa hai chú kiến khoảng 36,07 cm.
- Khoảng cách giữa hai chú kiến nhỏ nhất là $\sqrt{833}$.
- Tại thời điểm $t = 7$ thì khoảng cách giữa hai chú kiến là nhỏ nhất.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN



IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x - y + 2 = 0$, $(Q): x + y - z - 3 = 0$, $(R): x + y + 2z - 1 = 0$.

- a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 0.
- b) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 0° .
- c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (R) bằng 0.
- d) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) bằng 1.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng. Ta có $\vec{n}_P = (1; -1; 0)$, $\vec{n}_Q = (1; 1; -1)$.

$$\cos((P);(Q)) = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 0.$$

b) Sai. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 90° .

c) Đúng. Ta có $\vec{n}_Q = (1; 1; -1)$, $\vec{n}_R = (1; 1; 2)$.

$$\cos((Q);(R)) = \frac{|\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_R|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}_R|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = 0$$

d) Sai. Ta có $\vec{n}_P = (1; -1; 0)$, $\vec{n}_R = (1; 1; 2)$.

$$\cos((P);(R)) = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_R|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = 0.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có ba điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$.

- a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0.
- b) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90° .

c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{3}{7}$.

d) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{10\sqrt{3}}{21}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng. Bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow \cos((SAB);(ABC)) = 0$.

b) Đúng. Bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow ((SAB);(ABC)) = 90^\circ$.

c) Sai. Ta có: $(SBC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow (SBC): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Suy ra $\vec{n}_{(SBC)} = (6;3;2)$.
 (ABC) có $\vec{n}_{(ABC)} = \vec{SA} = (0;0;3)$

$$\cos((SBC);(ABC)) = \frac{|\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{n}_{(SBC)}|}{|\vec{n}_{(ABC)}| \cdot |\vec{n}_{(SBC)}|} = \frac{|6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{2}{7}.$$

d) Sai. Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_{(SBC)} = (6;3;2) \\ \vec{n}_{(P)} = (1;1;1) \end{cases}$

$$\text{Nên } \cos((SBC);(P)) = \frac{|\vec{n}_{(SBC)} \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{n}_{(SBC)}| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} = \frac{|6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{11\sqrt{3}}{21}.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $d: \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$.

a) Điểm $A(0;2;1)$ không thuộc đường thẳng Δ .

b) Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}_d = (3;2;2)$.

c) Hai đường thẳng Δ và d chéo nhau.

d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ và d . Khi đó $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{38}}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

* Phương án a) sai: Khi $t = 0$ thì $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ nên điểm $A(0;2;1)$ thuộc đường thẳng Δ .

* Phương án b) sai: Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}_d = (-3;2;2)$.

* Phương án c) đúng:

Δ đi qua điểm $A(0;2;1)$, có vtcp $\vec{u}_\Delta = (1;-3;2)$.

d đi qua điểm $B(1;0;2)$, có vtcp $\vec{u}_d = (-3;2;2)$.

Ta có: $[\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d] = (-10; -8; -7)$; $\vec{AB} = (1; -2; 1) \Rightarrow [\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d] \cdot \vec{AB} = -1 \neq 0$ nên Δ và d chéo nhau.

* Phương án **d)** sai:

Ta có các vecto chỉ phương của hai đường thẳng là $\vec{u}_\Delta = (1;-3;2)$, $\vec{u}_d = (-3;2;2)$.

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d) \right| = \frac{|\vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{u}_\Delta| \cdot |\vec{u}_d|} = \frac{|1 \cdot (-3) + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{238}}.$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có phương trình chính tắc lần lượt là:

$$d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{5} = \frac{z-15}{6} \text{ và } d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

a) Phương trình tham số của d là:
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 5t \\ z = 15 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Phương trình tham số của d' là:
$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = 3 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

d) Góc giữa đường thẳng d và d' là 35° .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) đúng: Phương trình tham số của d là:
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 5t \\ z = 15 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) đúng: Phương trình tham số của d' là:
$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = 3 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

c) sai:

Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;5;6)$.

Đường thẳng d' có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}' = (1;1;1)$. Suy ra d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét } \begin{cases} 3 + 2t = 1 + t' \\ 7 + 5t = 2 + t' \\ 15 + 6t = 3 + t' \end{cases}; t, t' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' = -2 \\ 5t - t' = -5 \\ 6t - t' = -12 \end{cases}; t, t' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -7 \\ 6t - t' = -12 \end{cases}; t, t' \in \mathbb{R}.$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Do đó hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

d) sai: Góc giữa đường thẳng d và d' là:

$$\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}') \right| = \frac{|2.1 + 5.1 + 6.1|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{195}}.$$

Suy ra $(d, d') \approx 21^\circ$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - t \end{cases}$ và mặt phẳng (P) có phương

trình $2x + y + z - 1 = 0$.

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (3; 4; -3)$.

b) $\sin(\Delta, (P)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Góc giữa Δ và (P) là: 30° .

d) Giao điểm của Δ và (P) là: $M(3; 4; -3)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) sai:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 2; -1)$

b) sai:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 2; -1)$, một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; 1; 1)$

. Khi đó $\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|1.2 + 2.1 + (-1).1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$.

c) đúng:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 2; -1)$, một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; 1; 1)$

. Khi đó $\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|1.2 + 2.1 + (-1).1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$.

Vậy $(\Delta, (P)) = 30^\circ$.

d) sai:

Ta có $2.3 + (-4) + (-3) - 1 = -2 \neq 0$ nên $M(3; 4; -3) \notin (P)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $3x + 6y - 3z + 2024 = 0$.

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-1; -2; 1)$.

b) Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

c) Góc giữa Δ và (P) là: 90° .

d) Lấy tùy ý hai điểm phân biệt $A, B \in \Delta$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên (P) . Khi đó $A'B' = 2024$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

* Phương án **a)** đúng:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-1; -2; 1)$.

* Phương án **b)** đúng:

Một véc tơ chỉ phương của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

* Phương án **c)** đúng:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-1; -2; 1)$, một véc tơ pháp tuyến của (P) là

$$\vec{n} = (1; 2; -1). \text{ Khi đó } \sin(\Delta, (P)) = \frac{|(-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 1.$$

Vậy $(\Delta, (P)) = 90^\circ$.

* Phương án **d)** sai:

Vì $\Delta \perp (P)$ nên A' trùng B' . Do đó $A'B' = 0$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng (P) có phương

trình $2x + y - 3z - 1 = 0$.

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (2; 0; -3)$.

b) Góc giữa Δ và (P) là: 150° .

c) Không có điểm chung nào giữa Δ và (P) .

d) Hình chiếu của $M(1; 2; -1)$ lên (P) là: $N(1; 2; 1)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) sai:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (2; 1; -3)$.

b) sai:

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không thể lớn hơn 90° .

c) sai:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (2; 1; -3)$, một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; 1; -3)$

$$\text{. Khi đó } \sin(\Delta, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = 1.$$

Do đó $(\Delta, (P)) = 90^\circ$. Vậy có điểm chung giữa Δ và (P) .

d) sai:

Ta có $\Delta \perp (P)$, $M(1; 2; -1) \in \Delta$ và $\overrightarrow{MN} = (0; 0; 2)$ không cùng phương với $\vec{n} = (2; 1; -3)$ nên đáp án sai.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \\ z=3-t \end{cases}$ và đường thẳng

$$\Delta_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

a) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc Δ_1 và điểm $N(2;-2;1)$ thuộc Δ_2 .

b) $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{2\sqrt{154}}{77}.$

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

d) Đường thẳng d đi qua điểm $N(2;3;-1)$ đồng thời cắt và vuông góc với Δ_2 có phương trình

là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-71} = \frac{z+1}{25}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) đúng: Từ phương trình của Δ_1, Δ_2 ta có $M(1;2;3) \in \Delta_1$ và $N(2;-2;1) \in \Delta_2$.

b) sai: Ta có $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{154}}{77}.$

c) sai: Ta có $\vec{u}_1 = (1;3;-1)$ là VTCP của Δ_1 ; $\vec{u}_2 = (-2;1;3)$ là VTCP của Δ_2 ; $M(1;2;3) \in \Delta_1$ và $N(2;-2;1) \in \Delta_2 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (1;-4;-2).$

Do đó $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (10;-1;7) \neq \vec{0}$; $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} = 10 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) + 7 \cdot (-2) = 0$. Suy ra Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

d) đúng: Gọi $P = d \cap \Delta_2$. Ta có $P \in \Delta_2 \Rightarrow P(-2t+2; t-2; 3t+1)$ (với $t \in \mathbb{R}$)
 $\Rightarrow \overrightarrow{NP} = (-2t; t-5; 3t+2)$. Hơn nữa $N \in d, P \in d$ và $d \perp \Delta_2$ nên $\overrightarrow{NP} \perp \vec{u}_2$
 $\Rightarrow \overrightarrow{NP} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow (-2t) \cdot (-2) + (t-5) \cdot 1 + (3t+2) \cdot 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{14}.$

Do đó $\overrightarrow{NP} = \left(\frac{1}{7}; -\frac{71}{14}; \frac{25}{14}\right) \Rightarrow \vec{u}_3 = (2;-71;25)$ là VTCP của d .

Vậy d có phương trình là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-71} = \frac{z+1}{25}.$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2024}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2025}{-2}$ và mặt phẳng

$(P): 2x+2y-z+1=0$. Xét các vector $\vec{u} = (2;1;-2)$, $\vec{n} = (2;2;-1)$.

a) $\vec{u}$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

b) $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

c) $\cos(\Delta, (P)) = \frac{8}{9}.$

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Do $\Delta: \frac{x-2024}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2025}{-2}$ nên $\vec{u} = (2; 1; -2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ . Suy ra **a) Đúng**.

b) Do $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$ nên $\vec{n} = (2; 2; -1)$ là một vector pháp tuyến của đường thẳng (P) . Suy ra **b) Đúng**.

$$\text{c) Ta có } \sin(\Delta, (P)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{9}$$

$$\cos^2(\Delta, (P)) = 1 - \sin^2(\Delta, (P)) = 1 - \frac{64}{81} = \frac{17}{81} \Rightarrow \cos(\Delta, (P)) = \frac{\sqrt{17}}{9}. \text{ Suy ra c) Sai}$$

d) Từ ý c) suy ra $(\Delta, (P)) \approx 63^\circ$. Suy ra **d) Đúng**.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$.

a) Vector $\vec{n} = (1; -2; 2)$ là một vector pháp tuyến của (P) .

b) Điểm $M(0; 4; 4)$ thuộc Δ .

c) Góc giữa Δ và (P) bằng 60° .

d) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; 4; 4)$, song song với (P) và tạo với Δ một góc 45° có phương trình là $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) đúng: Từ phương trình của $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ ta có $\vec{n} = (1; -2; 2)$ là một vector pháp tuyến của (P) .

b) đúng: Từ phương trình của $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases}$ cho $t = 1$ ta được $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$. Do đó $M(0; 4; 4) \in \Delta$.

c) sai: Ta có $\sin(\Delta, (P)) = \frac{|(-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Do đó $(\Delta, (P)) = 45^\circ$.

d) đúng: Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ (với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$) là một VTCP của d . Do $d \parallel (P)$ nên $\vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow a - 2b + 2c = 0 \Rightarrow 2c = 2b - a$ (*).

$$\text{Hơn nữa } (d, \Delta) = 45^\circ \text{ nên } \cos(d, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|-a + b|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |b - a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$\Leftrightarrow (b-a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = -2ab \Leftrightarrow (2c)^2 = -8ab$. Thay (*) vào ta được $(2b-a)^2 = -8ab \Leftrightarrow (2b+a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2b$. Thay vào (*) ta được $c = 2b$.

Do đó $\vec{u} = (-2b; b; 2b)$ (với $b \neq 0$). Suy ra $\vec{u}_1 = \frac{1}{b}\vec{u} = (-2; 1; 2)$ cũng là một VTCP của d .

Hơn nữa d đi qua điểm $M(0; 4; 4)$ nên d có phương trình là $\frac{x}{-2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-4}{2}$.

Do đó ta có $N(2; 3; 2) \in d$ nên $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{2}$ cũng là phương trình của d .

(Có thể kiểm tra tính đúng, sai của d) bằng cách sử dụng phương trình $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{2}$ để kiểm tra thỏa mãn giả thiết $M(0; 4; 4) \in d$; $d \parallel (P)$ và $(d, \Delta) = 45^\circ$).

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 5 = 0$.

a) Vectơ $\vec{u} = (-2; 2; 1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ .

b) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Oyz) bằng 45° .

c) Đường thẳng đi qua $N(2; 3; -4)$ và song song với Δ có phương trình là $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{1}$.

d) Đường thẳng d vuông góc Δ và tạo với (P) một góc 45° có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -2; 4)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) đúng: Từ phương trình của $\Delta: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 + t \end{cases}$ ta có $\vec{u} = (-2; 2; 1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ .

b) đúng: $(P): x + y - 5 = 0$; $(Oyz): x = 0$ nên ta có $\cos((P), (Oyz)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $((P), (Oyz)) = 45^\circ$.

c) đúng: Đường thẳng $\Delta_1 \parallel \Delta$ nên Δ_1 nhận $\vec{u} = (-2; 2; 1)$ làm VTCP. Hơn nữa Δ_1 đi qua $N(2; 3; -4)$ nên có phương trình là $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{1}$.

d) sai: Gọi $\vec{u}_1 = (a; b; c)$ (với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$) là một VTCP của d . Do $d \perp \Delta$ nên $\vec{u}_1 \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -2a + 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2a - 2b$ (*).

Hơn nữa $(d, (P)) = 45^\circ$ nên $\sin(d, (P)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Leftrightarrow |a+b| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow c^2 = 2ab$. Thay (*) vào ta được
 $(2a-2b)^2 = 2ab \Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$ (**).

Nếu $b = 0 \Rightarrow a = 0; c = 0$ (không thỏa mãn).

Nếu $b \neq 0$, ta có (**) $\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$, thay vào (*) ta được $c = 2b$. Do đó $\vec{u}_1 = (2b; b; 2b)$ (với $b \neq 0$).

Với $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a$, thay vào (*) ta được $c = -2a$. Do đó $\vec{u}_1 = (a; 2a; -2a)$ (với $a \neq 0$).

Vậy $\vec{u}_1 = (1; -2; 4)$ không là một VTCP của d .

Cách khác: Giả sử $\vec{u}_1 = (1; -2; 4)$ là một VTCP của d . Khi đó

$$\sin(d, (P)) = \frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{42}} \Rightarrow (d, (P)) \neq 45^\circ \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Vậy $\vec{u}_1 = (1; -2; 4)$ không là một VTCP của d .

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng (P) có phương

trình $x + 2y - z - 2 = 0$.

a) Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

b) Góc giữa Δ và (P) là: 60° .

c) Chỉ có một điểm chung duy nhất giữa Δ và (P) .

d) Mọi điểm thuộc Δ có hình chiếu lên (P) là chính nó.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) đúng:

Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

b) sai:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 1; 3)$, một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$

. Khi đó $\sin(\Delta, (P)) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}} = 0$.

Do đó $(\Delta, (P)) = 0^\circ$.

c) sai:

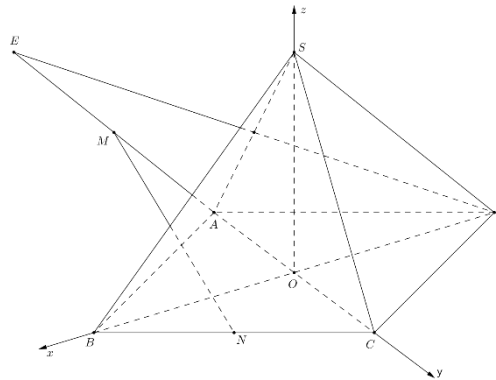
Ta xét $M(1;2;3)$ và $N(0;1;0)$, dễ thấy
$$\begin{cases} M \in \Delta \\ M \in (P) \\ N \in \Delta \\ N \in (P) \end{cases}$$
 do đó giữa Δ và (P) có nhiều hơn hai

điểm chung.

d) đúng:

Vì mọi điểm thuộc Δ đều thuộc (P) nên mọi điểm thuộc Δ có hình chiếu lên (P) là chính nó.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng $\sqrt{2}$, $SO=1$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm của SA . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên.



- Tọa điểm A là $(0;-1;0)$.
- Mặt phẳng đáy có phương trình $x+y=0$.
- Hai đường thẳng MN và BD vuông góc với nhau.
- Giá trị sin của góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy bằng $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$. Suy ra $A(0;-1;0)$.

b) Mặt phẳng đáy là mặt phẳng (Oxy) , do đó phương trình mặt phẳng đáy là $z=0$.

c) $OA=OB=OC=OD=1 \Rightarrow B(1;0;0), C(0;1;0), D(-1;0;0)$.

N là trung điểm $BC \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

$S(0;0;1), A(0;-1;0) \Rightarrow$ tọa độ trung điểm SA là $\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

E đối xứng D qua trung điểm $SA \Rightarrow E(1;-1;1)$.

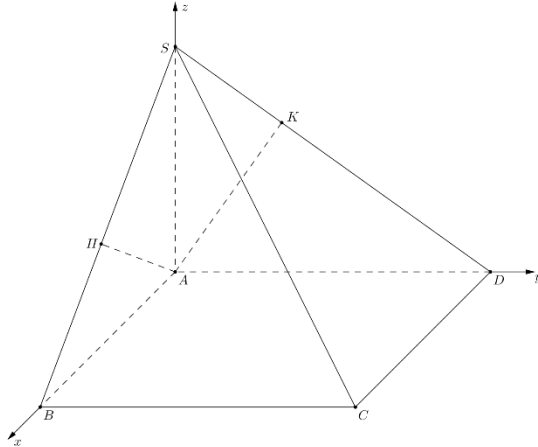
M là trung điểm $AE \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BD} = (-2; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$.

d) $\overrightarrow{MN} = \left(0; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$, mặt phẳng đáy có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$

$$\Rightarrow \sin(MN, (ABCD)) = \cos(\overrightarrow{MN}, \vec{n}) = \frac{\left|0 \cdot 0 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, SA vuông góc với mặt đáy và có độ dài bằng 2. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên.



a) Tọa độ điểm C là $(1; 1; 1)$.

b) Phương trình đường thẳng SC là $x = y = \frac{z-2}{-2}$.

c) Góc giữa đường thẳng AC và SB là 30° .

d) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) là 60° .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Vì $C \in (Oxy)$, $CB = CD = 1$ nên $C(1; 1; 0)$.

b) $S(0; 0; 2) \Rightarrow \overrightarrow{SC} = (1; 1; -2)$.

Đường thẳng SC đi qua $S(0; 0; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{SC} = (1; 1; -2)$

$$\Rightarrow SC: x = y = \frac{z-2}{-2}.$$

c) $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 0)$, $B(1; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{SB} = (1; 0; -2)$.

$$\text{Suy ra } \cos(AC, SB) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow (AC, SB) \approx 71^\circ 34'.$$

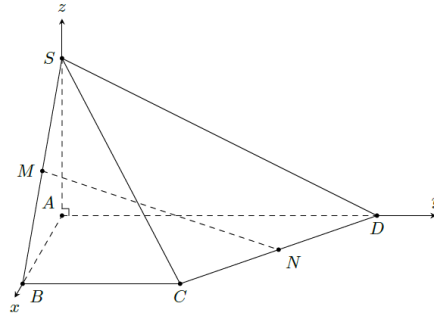
d) Ta có $BC \perp SA, BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$. Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Tương tự, ta cũng có $AK \perp SC$. Do đó, $SC \perp (AHK)$ hay vectơ pháp tuyến của (AHK) là $\vec{n}_{(AHK)} = \vec{SC} = (1; 1; -2)$. Ta lại có $\vec{SD} = (0; 1; -2)$.

$$\text{Suy ra } \sin(SD, (AHK)) = \left| \cos(\vec{SD}, \vec{SC}) \right| = \left| \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-2)(-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

Vậy $(SD, (AHK)) \approx 65^\circ 54'$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên.



- a) Tọa độ điểm C là $(1; 1; 0)$.
- b) Góc tạo bởi đường thẳng SB và AC là 60° .
- c) Cô-sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là $\frac{\sqrt{55}}{10}$.
- d) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là 30° .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Vì $C \in (Oxy)$, $AB = BC = a$ nên $C(a; a; 0)$

b) Chuẩn hóa $a = 1$ thì $C(1; 1; 0)$, $S(0; 0; 1)$, $B(1; 0; 0) \Rightarrow \vec{SB} = (1; 0; -1)$; $\vec{AC} = (1; 1; 0)$.

$$\text{Suy ra } \cos(SB, AC) = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (SB, AC) = 60^\circ.$$

c) M là trung điểm $SB \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, N là trung điểm $CD \Rightarrow N\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

$$\text{Suy ra } \vec{MN} = \left(0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ta có } \vec{AS} = (0; 0; 1), \vec{AC} = (1; 1; 0) \Rightarrow \vec{n}_{(SAC)} = [\vec{AS}, \vec{AC}] = (-1; 1; 0).$$

$$\sin(MN, (SAC)) = \left| \cos(\vec{MN}, \vec{n}_{(SAC)}) \right| = \frac{\left| 0 \cdot (-1) + \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

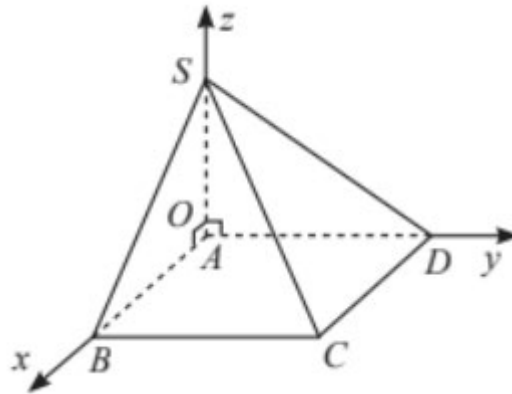
$$\Rightarrow \cos(MN, (SAC)) = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10}.$$

d) Ta có $\overrightarrow{BS} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (0; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(SBC)}} = [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}] = (-1; 0; -1)$.

Suy ra $\cos((SBC), (SAC)) = \frac{|(-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) bằng 60° .

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = 5a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (chọn $a = 1$) như hình bên.



a) Tọa độ $A \equiv O(0; 0; 0), B(2; 0; 0), S(0; 0; 3), D(0; 5; 0), C(2; 5; 0)$.

b) Phương trình mặt phẳng $(SBD): \frac{x}{2} - \frac{y}{5} - \frac{z}{3} = 1$

c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{30}{19}$.

d) Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm S, A, C, D là $R = \frac{\sqrt{38}}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng. Ta có $A \equiv O(0; 0; 0), B(2; 0; 0), S(0; 0; 3), D(0; 5; 0), C(2; 5; 0)$.

b) Sai. $(SBD): \frac{x}{2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1$

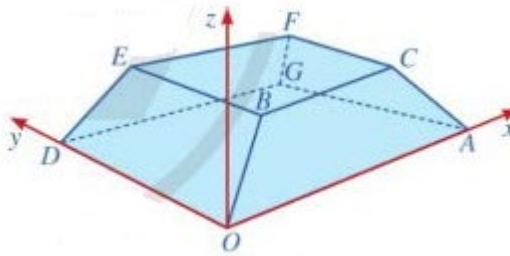
c) Đúng. $d(A, (SBD)) = \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{30}{19}$.

d) Đúng. Gọi mặt cầu cần tìm có dạng $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, đi qua bốn

điểm S, A, C, D , nên ta có hệ
$$\begin{cases} 9 - 6c + d = 0 \\ d = 0 \\ 4 + 25 - 4a - 10b + d = 0 \\ 25 - 10b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{5}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}.$$

Nên tâm mặt cầu là $I\left(1; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{38}}{2}$.

Câu 17: Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cắt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100m$, chiều rộng $OD = 60m$ và tọa độ điểm $B(10; 10; 8)$.



- a) Tọa độ điểm $A(100; 0; 0), D(0; 60; 0), G(100; 60; 0)$.
- b) Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(OBED)$ là $\vec{n} = (4; 0; 5)$
- c) Phương trình mặt phẳng $(OBED)$ là: $4x - 5z = 0$.
- d) $d(G, (OBED)) \approx 60,5m$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng. Gắn hình chóp cắt $OAGD.BCFE$ vào hệ trục $Oxyz$, ta có:

$$O(0; 0; 0), A(100; 0; 0), D(0; 60; 0) \Rightarrow G(100; 60; 0).$$

b) Sai. $\vec{OD} = (0; 60; 0), \vec{OB} = (10; 10; 8)$. Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(OBED)$ là $\vec{n} = [\vec{OD}, \vec{OB}] = (480; 0; -600) = 120(4; 0; -5)$

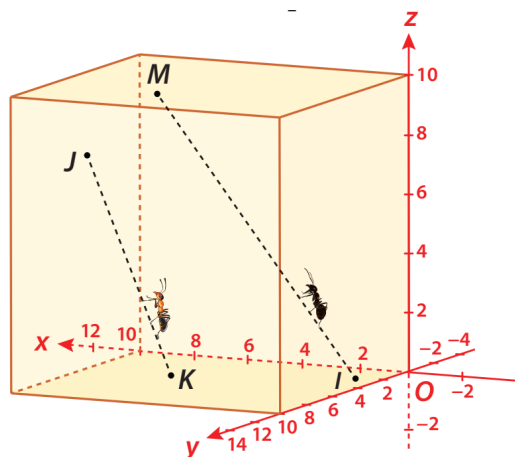
c) Đúng. Phương trình mặt phẳng $(OBED)$ đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (4; 0; -5)$ là: $4x - 5z = 0$.

d) Sai. Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ là:

$$d(G, (OBED)) = \frac{|4 \cdot 100 - 5 \cdot 0|}{\sqrt{16 + 25}} = \frac{400\sqrt{41}}{41} \approx 62,5m.$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ cho trước (1 đơn vị = 1 cm), có một chú kiến vàng và một chú kiến đen bò trên hai sợi dây thẳng khác nhau. Giả sử tại thời điểm t (tính bằng phút), kiến vàng ở tại vị

trí $(2+2t; 1-t; 2+t)$ trên đường thẳng d_1 . Cùng thời điểm đó, kiến đen ở tại vị trí $(7-t; 2-t; -36+3t)$ trên đường thẳng d_2 .



- a) Tại thời điểm $t = 1$, kiến vàng có toạ độ $(4; 0; 3)$. kiến đen có toạ độ $B(6; 1; -33)$.
 b) Tại thời điểm $t = 1$, khoảng cách giữa hai chú kiến khoảng $36,07 \text{ cm}$.
 c) Khoảng cách giữa hai chú kiến nhỏ nhất là $\sqrt{833}$.
 d) Tại thời điểm $t = 7$ thì khoảng cách giữa hai chú kiến là nhỏ nhất.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai. Tại thời điểm $t = 1$ kiến vàng ở vị trí $A(4; 0; 3)$, kiến đen ở vị trí $B(6; 1; -33)$.

b) Đúng. Suy ra khoảng cách giữa hai chú kiến là $AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + 36^2} = \sqrt{1301} \approx 36,07 \text{ cm}$

c) Đúng. Ở thời điểm t kiến vàng ở vị trí $M(2+2t; 1-t; 2+t)$, kiến đen ở vị trí $N(7-t; 2-t; -36+3t)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(3t-5)^2 + 1 + (2t-38)^2} = \sqrt{13t^2 - 182t + 1470} = \sqrt{13(t-7)^2 + 833} \geq \sqrt{833}$$

vì $(t-7)^2 \geq 0, \forall t$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 7$. Vậy ở phút thứ 7 thì khoảng cách giữa hai chú kiến là nhỏ nhất.

d) Đúng. Vậy ở phút thứ 7 thì khoảng cách giữa hai chú kiến là nhỏ nhất.



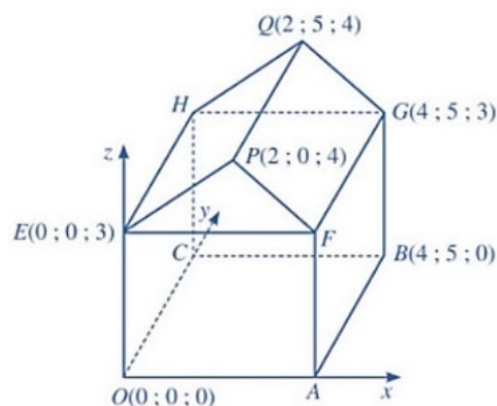
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

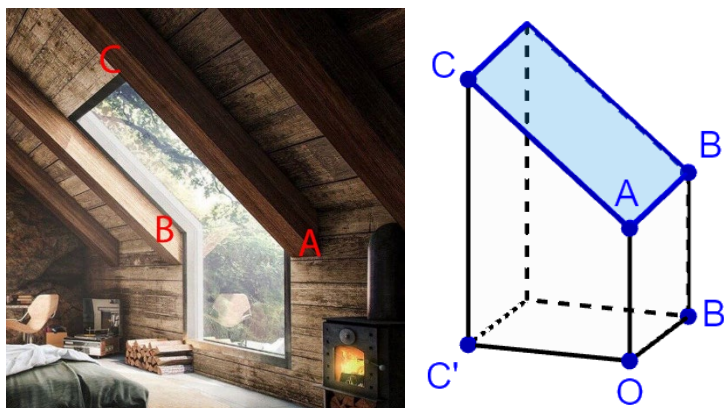


HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

- Câu 1:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x - y - 4 = 0$. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) (đơn vị độ).
- Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 2x - y + 5z + 2 = 0$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng (Q) . Biết hình chiếu của gốc O lên (Q) là điểm $H(2; -1; 0)$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, góc (tính theo đơn vị độ) giữa hai mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 5 = 0$ và $(Q): 2x + y + z - 2 = 0$ bằng.
- Câu 5:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - z - 3 = 0$ và mặt phẳng (Q) , biết hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (Q) là điểm $H(2; 2; -1)$. Khi đó góc (tính theo đơn vị độ) giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng.
- Câu 6:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2 = 0$ và mặt phẳng $(Q): (m + 3)x + my + mz + 5 = 0$, biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 30° , khi đó giá trị của m bằng
- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; 1; 0)$, $P(0; 0; 1)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 8:** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết các tọa độ cho như hình vẽ. Tính độ dốc của mái nhà, tức góc tạo bởi mái nhà so với nền nhà (đơn vị độ, làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Câu 9: Một căn gác có chiếc cửa sổ trời như hình vẽ. Tính góc (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần mười) giữa mặt nghiêng của chiếc cửa sổ trời với mặt sàn. Biết rằng khi mặt trời chiếu vuông góc với mặt sàn thì hình chiếu của chiếc cửa sổ là một hình vuông có cạnh 1,5 m và chiều cao so với mặt sàn của các điểm A, B, C lần lượt là 1,2 m, 1,3 m và 2,4 m (xem hình vẽ minh họa). (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Câu 10: Một ngôi nhà gồm hai phần mái dốc số 1 và số 2 (tham khảo hình vẽ bên dưới), Biết rằng số đo của các cạnh $AB = 3\text{m}$, $BO = 2\text{m}$, $OC = 4\text{m}$, $CD = 3\text{m}$ và độ dốc của mái số 1 bằng 45° , độ dốc mái số 2 bằng 30° . Giả sử các mặt bên của tòa nhà vuông góc với nhau, khi đó góc (tính theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần mười) giữa hai mặt phẳng (ABO) và (CDO) bằng



Câu 11: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$, $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 1-t \end{cases}$. Gọi φ là góc

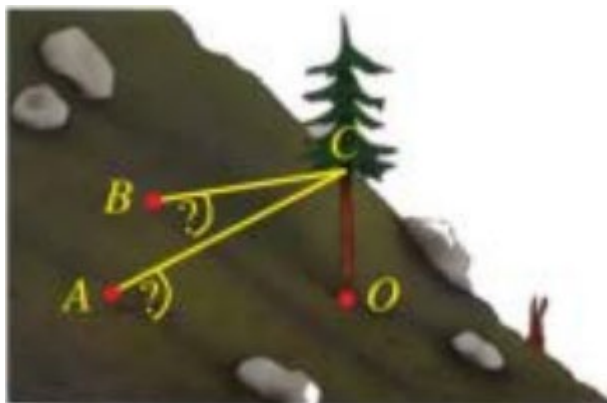
giữa hai đường thẳng d_1, d_2 . Giá trị $\cos \varphi$ có dạng $\frac{a\sqrt{5}}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$).

Tính giá trị biểu thức $P = b - 3a$?

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác ABC là $I(a; b; c)$. Tính tổng $a + b + c$?

- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và $(P): -x + 2y + 2z + 5 = 0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 0; -1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc nhỏ nhất. Vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; c)$. Tính tổng $a + 2b - 3c$?
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0; 1; 0); B(1; 0; 0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60° . Tính tổng $a + b + c$? (Làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , thỏa mãn điều kiện, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) . (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)
- Câu 16:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Tính $\sin \alpha$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 18:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) . Tính $\sin \varphi$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 19:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$, cạnh bên $SA = 10a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) có tan bằng (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 20:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Cosin của góc giữa MN và (SAC) là (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông tại B , $AB = 1, BC = \sqrt{3}$, ΔSAC đều, mặt phẳng (SAC) vuông với đáy. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Giá trị của $\cos \alpha$ bằng (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 22:** Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 4m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 8m; 8,8m; 9,6m. Biết đáy bể là phẳng. Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là (làm tròn tới hàng phần mười)(độ)

- Câu 23:** Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm gốc O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0;0;0)$, $A(5;-3;1)$, $B(-3;-4;2)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $C(0;0;5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Khi đó, góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



- Câu 24:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $3a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$. (đơn vị độ)
- Câu 25:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 26:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = a\sqrt{6}$. Tính giá trị $\sin$ của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 27:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính $\tan$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 28:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.
- Câu 29:** Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $(\widehat{AD, BC}) = 60^\circ$. Tính Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)
- Câu 30:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = 2a$; $AB = a$. Gọi N, M lần lượt là trung điểm của DC và BC , tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM và MN . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 31:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- Câu 32:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$; $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 33:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 34:** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$, $AA' = \frac{\sqrt{61}}{2}$. Hình chiếu của B' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC , M là trung điểm cạnh $A'B'$. Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 35:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết khoảng cách giữa AB và $B'C$ bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa BC và AB' bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa AC và BD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi M là trung điểm $B'C$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (BMD) và $(B'AD)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x - y - 4 = 0$. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) (đơn vị độ).

Lời giải

Trả lời: 45

VTPT của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là: $\vec{n}_1 = (2; -1; 2)$, $\vec{n}_2 = (1; -1; 0)$.

$$\text{Ta có } \cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + (-1)(-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ((P), (Q)) = 45^\circ.$$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 2x - y + 5z + 2 = 0$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,85

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p = (1; -2; 2)$, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_q = (2; -1; 5)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{n}_q) \right| = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p| |\vec{n}_q|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2)(-1) + 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{14}{3\sqrt{30}}.$$

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng (Q) . Biết hình chiếu của gốc O lên (Q) là điểm $H(2; -1; 0)$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,55

Từ giả thiết, suy ra $\vec{OH} = (2; -1; 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) .

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_p = (1; -1; -2)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{OH}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + (-1)(-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, góc (tính theo đơn vị độ) giữa hai mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 5 = 0$ và $(Q): 2x + y + z - 2 = 0$ bằng.

Lời giải

Trả lời: 60

$$\text{Ta có: } \cos((P), (Q)) = \frac{|1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra: $((P), (Q)) = 60^\circ$.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - z - 3 = 0$ và mặt phẳng (Q) , biết hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (Q) là điểm $H(2; 2; -1)$. Khi đó góc (tính theo đơn vị độ) giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng.

Lời giải

Trả lời: 45

Ta có: $\vec{n}_P = (1; 0; -1)$, $\vec{n}_Q = \vec{OH} = (2; 2; -1)$.

$$\text{Suy ra: } \cos((P), (Q)) = \frac{|1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra: $((P), (Q)) = 45^\circ$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2 = 0$ và mặt phẳng $(Q): (m+3)x + my + mz + 5 = 0$, biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 30° , khi đó giá trị của m bằng

Lời giải

Trả lời: -1

Ta có: $\vec{n}_P = (1; -1; 0)$, $\vec{n}_Q = (m+3; m; m)$.

$$\text{Suy ra: } \cos((P), (Q)) = \frac{|m+3-m|}{\sqrt{(m+3)^2 + m^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{3m^2 + 6m + 9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 9 = 6 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy $m = -1$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; 1; 0)$, $P(0; 0; 1)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,58

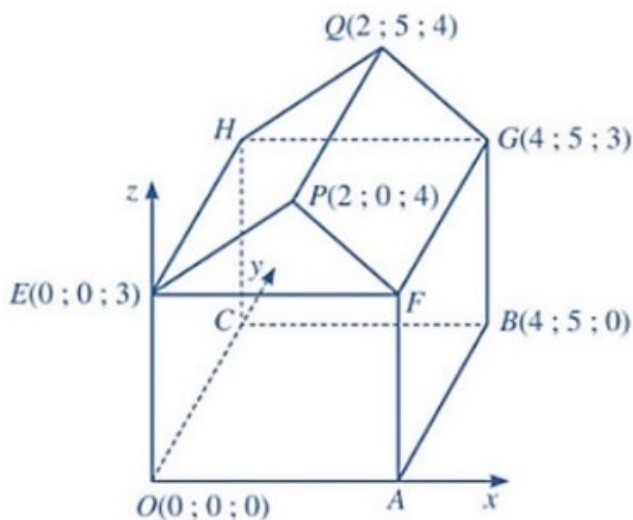
Mặt phẳng (MNP) có một VTPT là $\vec{n} = [\vec{MN}; \vec{MP}] = (1; 1; 1)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (Oxy) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|1.0 + 1.0 + 1.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 8: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết các toạ độ cho như hình vẽ. Tính độ dốc của mái nhà, tức góc tạo bởi mái nhà so với nền nhà (đơn vị độ, làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Trả lời: 26,6

Độ dốc của mái nhà, tức là số đo của góc tạo bởi hai mặt lần lượt là $(OABC)$ và $(FGQP)$.

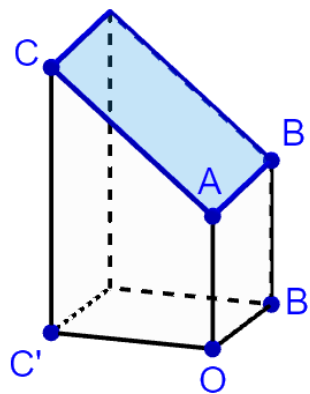
Mặt phẳng $(FGQP)$ có một VTPT là $\vec{n} = [\vec{QP}; \vec{QG}] = (5; 0; 10)$.

Mặt phẳng $(OABC)$ chính là mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(FGHE)$ và (Oxy) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|5.0 + 0.0 + 10.1|}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 10^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ Do đó } \varphi \approx 26,6^\circ$$

Câu 9: Một căn gác có chiếc cửa sổ trời như hình vẽ. Tính góc (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần mười) giữa mặt nghiêng của chiếc cửa sổ trời với mặt sàn. Biết rằng khi mặt trời chiếu vuông góc với mặt sàn thì hình chiếu của chiếc cửa sổ là một hình vuông có cạnh 1,5 m và chiều cao so với mặt sàn của các điểm A, B, C lần lượt là 1,2 m, 1,3 m và 2,4 m (xem hình vẽ minh họa). (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 38,8

Gọi O, B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên sàn nhà.

Ta gán trục tọa độ như sau: Tia Ox trùng với OB' , Oy trùng với OC' , Oz trùng với OA , mỗi đơn vị trên trục tọa độ ứng với 10 cm trong thực tế. Khi đó ta có tọa độ của các điểm như sau:

$$O(0;0;0), A(0;0;12), B(15;0;13), C(0;15;24) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(15;0;1), \overrightarrow{AC}(0;15;12).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-15; -180; 225).$$

$$\text{Mặt nghiêng của cửa sổ có vectơ pháp tuyến: } \vec{n}_2 = \frac{1}{15} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -12; 15)$$

Mặt sàn trùng với mặt phẳng Oxy suy ra có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (0;0;1)$.

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|15|}{\sqrt{(-1)^2 + (-12)^2 + 15^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{3\sqrt{370}}{74}$$

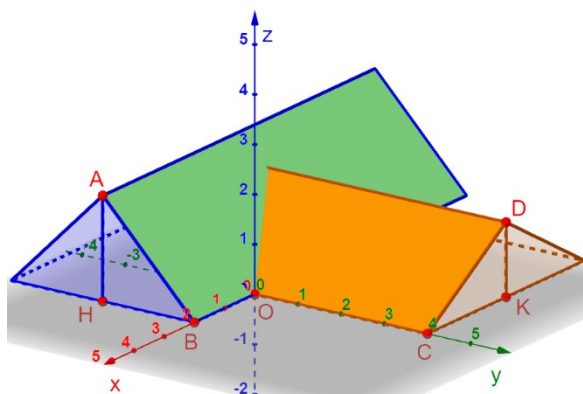
$$\Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \approx 38,8^\circ.$$

Câu 10: Một ngôi nhà gồm hai phần mái dốc số 1 và số 2 (tham khảo hình vẽ bên dưới), Biết rằng số đo của các cạnh $AB = 3\text{m}$, $BO = 2\text{m}$, $OC = 4\text{m}$, $CD = 3\text{m}$ và độ dốc của mái số 1 bằng 45° , độ dốc mái số 2 bằng 30° . Giả sử các mặt bên của tòa nhà vuông góc với nhau, khi đó góc (tính theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần mười) giữa hai mặt phẳng (ABO) và (CDO) bằng



Lời giải

Trả lời: 52,2



Ta gán trục tọa độ như sau: Tia Ox trùng với OB , Oy trùng với OC , Oz trùng với trục thẳng đứng, mỗi đơn vị trên trục tọa độ ứng với 1 m trong thực tế. Khi đó ta có tọa độ của các điểm như sau:

$$O(0;0;0), B(2;0;0), C(0;4;0) \Rightarrow \overrightarrow{BO} = (-2;0;0), \overrightarrow{CO} = (0;-4;0)$$

Do độ dốc của mái 1 (màu xanh) là 45°

$$\Rightarrow HB = AB \cdot \cos 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}; AH = AB \cdot \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A\left(2; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \left(0; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Do độ dốc của mái 2 (màu cam) là 30°

$$\Rightarrow KC = CD \cdot \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}; DK = CD \cdot \sin 45^\circ = \frac{3}{2} \Rightarrow D\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 4; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}] = (0; 3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}) \Rightarrow \vec{n}_1 = (0; 1; 1)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD}] = (-6; 0; -6\sqrt{3}) \Rightarrow \vec{n}_2 = (1; 0; \sqrt{3}).$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2+\sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \approx 52,2^\circ.$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}, d_2: \begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$. Gọi φ là góc

giữa hai đường thẳng d_1, d_2 . Giá trị $\cos \varphi$ có dạng $\frac{a\sqrt{5}}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$).

Tính giá trị biểu thức $P = b - 3a$?

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có $\vec{u}_{d_1} = (-1; 2; 2), \vec{u}_{d_2} = (2; 0; -1)$

$$\text{Khi đó } \cos \varphi = \frac{|\vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2}|}{|\vec{u}_{d_1}| |\vec{u}_{d_2}|} = \frac{|-1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

Vậy $a = 4, b = 15 \Rightarrow b - 3a = 15 - 3 \cdot 4 = 3$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác ABC là $I(a; b; c)$. Tính tổng $a + b + c$?

Lời giải

Trả lời: 4

Ta có: Ta có phương trình đường thẳng AC là $\begin{cases} x=1-5t \\ y=2+5t \\ z=-1+6t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Gọi I là chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác $ABC \Rightarrow I(1-5t; 2+5t; -1+6t).$

Lại có $\overrightarrow{BA} = (-1; 3; -4), \overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2), \overrightarrow{BI} = (-5t-1; 5t+3; 6t-4).$

Vì I là chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác nên ABC :

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}) &= \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BI}|} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BI}|} \\ &\Leftrightarrow \frac{5t+1+15t+9+16-24t}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-4)^2}} = \frac{30t+6+40t+24+12t-8}{\sqrt{(-6)^2+8^2+2^2}} \Leftrightarrow \frac{-4t+26}{\sqrt{26}} = \frac{82t+22}{\sqrt{104}} \\ &\Leftrightarrow -8t+52 = 82t+22 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right). \\ \text{Vậy } a &= -\frac{2}{3}, b = \frac{11}{3}, c = 1 \Rightarrow a+b+c = -\frac{2}{3} + \frac{11}{3} + 1 = 4 \end{aligned}$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $(P): -x+2y+2z+5=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc nhỏ nhất. Vector chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; c)$. Tính tổng $a+2b-3c$?

Lời giải

Trả lời: 9

Giả sử đường thẳng d cắt đường thẳng Δ_1 tại B , ta có: $B(1+2t; 2+t; -2-t) \in \Delta_1$.

Đường thẳng d có VTCP là: $\overrightarrow{AB} = (2t+2; t+2; -t-1)$, mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (-1; 2; 2)$.

Gọi φ là góc giữa d và Δ_2 , ta có: $\sin \varphi = \frac{|-2t-2+2t+4-2t-2|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} = \frac{|2t|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} \geq 0, \Rightarrow d$

tạo với đường thẳng Δ_2 một góc φ nhỏ nhất khi $\varphi = 0^\circ$ hay $\sin \varphi = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$.

Vậy $a = 2, b = 2, c = -1 \Rightarrow a+2b-3c = 2+2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 9$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz-1=0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0); B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60° . Tính tổng $a+b+c$? (Làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,59

Mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B nên ta có: $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$

Và (P) tạo với (Oyz) một góc 60° nên $\cos((P); (Oyz)) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \quad (*)$

Thay $a=b=1$ vào phương trình $(*)$ được: $\sqrt{2+c^2} = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2}$

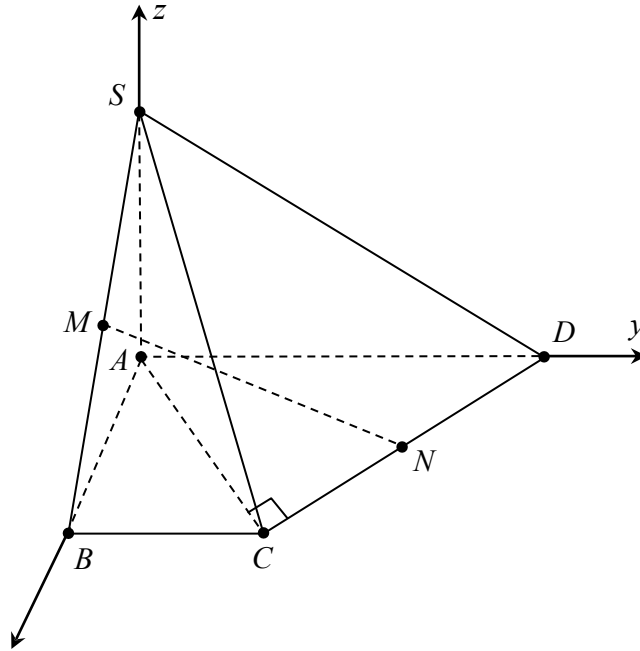
Khi đó: $a+b+c = 2-\sqrt{2} \approx 0,59$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , thỏa mãn điều kiện, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) . (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,74

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Chọn đơn vị là a

Có $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1), M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$.

Vecto chỉ phương của $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = (0; 3; -1)$

Vecto pháp tuyến của (SAC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}] = (1; -1; 0)$

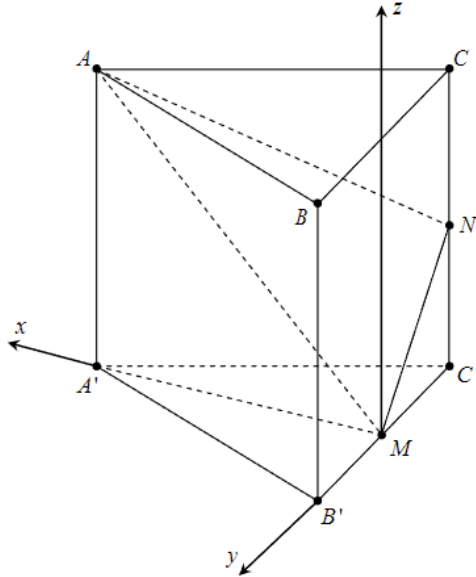
Vậy $\sin(MN, (SAC)) = \frac{|3|}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

Suy ra: $\cos(MN, (SAC)) = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10} \approx 0,74$

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,43



Chọn hệ toạ độ $Oxyz$ trong không gian như hình vẽ, gốc toạ độ O trùng với điểm M .

$$\text{Ta có } MB' = MC' = A'B' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$MA' = A'B' \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

$$\Rightarrow M(0;0;0), N\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right), A\left(\frac{a}{2}; 0; a\right).$$

(ABC) có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.

$$\overrightarrow{MA} = \left(\frac{a}{2}; 0; a\right) \text{ cùng phương với } \vec{u}_1 = (1;0;2).$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right) \text{ cùng phương với } \vec{u}_2 = (0; -\sqrt{3}; 1).$$

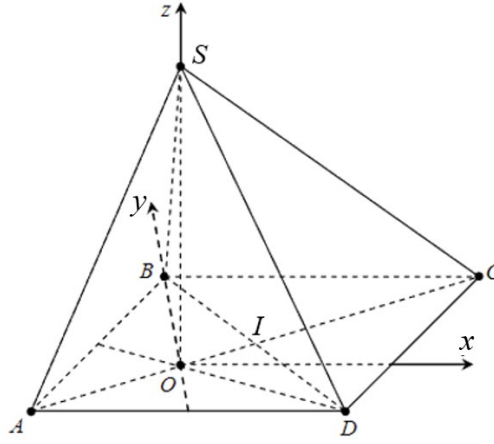
$$\Rightarrow (AMN) \text{ có một vector pháp tuyến } \vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3}).$$

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (AMN) \text{ và } (ABC), \text{ ta có } \cos \alpha = \left| \cos(\vec{k}, \vec{n}) \right| = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Tính $\sin \alpha$.
(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,75



Vì $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác ABD là tam giác đều.

$SA = SB = SD$ nên S nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABD , khi đó $SO \perp (ABD)$.

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian sao cho $O(0;0;0)$, $B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$, $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{15}}{6}\right)$.

$$\text{Suy ra } D\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right), C\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = (1; 0; 0), \overrightarrow{BS} = \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{15}}{6}\right).$$

Ta có $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = \left(0; -\frac{\sqrt{15}}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, suy ra $\vec{n} = (0; -\sqrt{15}; -2\sqrt{3})$ là vector pháp tuyến của (SBC) .

.

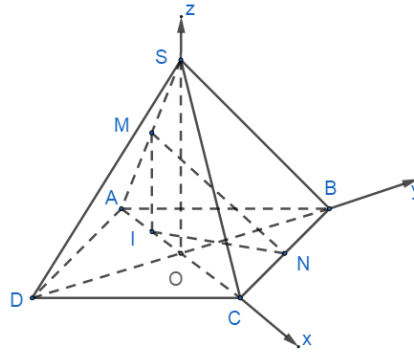
$$\overrightarrow{SD} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{\sqrt{15}}{6}\right) \text{ suy ra } \vec{u} = (3; -\sqrt{3}; -\sqrt{15}) \text{ là vector chỉ phương của } SD.$$

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{|3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}|}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{27}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) . Tính $\sin \varphi$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,58



Gọi I là hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO .

$$\text{Khi đó } CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Xét } \triangle CNI \text{ có: } CN = \frac{a}{2}, \widehat{NCI} = 45^\circ.$$

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Xét } \triangle MIN \text{ vuông tại } I \text{ nên } MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{5a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

$$\text{Mà } MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

$$\text{Ta có } O(0;0;0), B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), D\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), N\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right),$$

$$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{14}}{2}\right), M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{14}}{4}\right).$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right), \overrightarrow{SB} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right), \overrightarrow{SD} = \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right).$$

$$\text{Ta có } [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}] = (-\sqrt{7}; 0; 0) \text{ suy ra mặt phẳng } (SBD) \text{ có vector pháp tuyến } \vec{n} = (1, 0, 0).$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{MN}|} = \frac{\left|1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{1} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

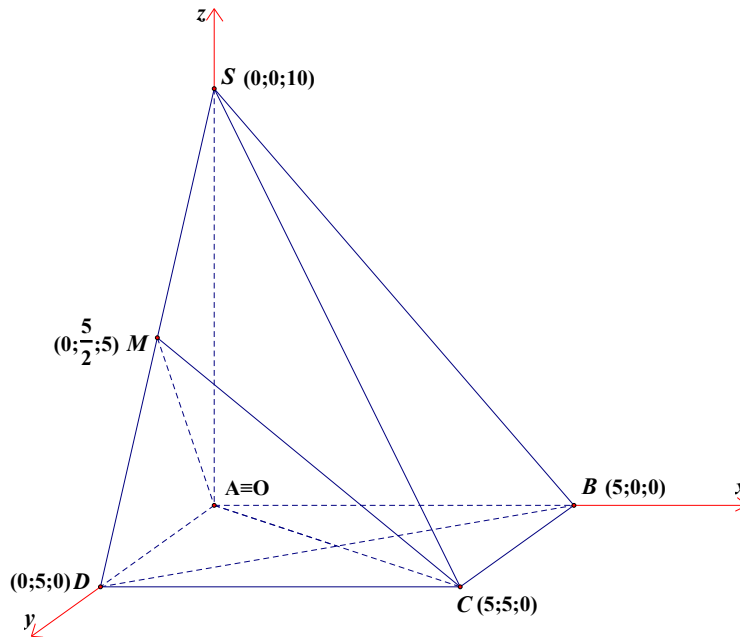
Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$, cạnh bên $SA = 10a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) có tan bằng (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,89

Chuẩn hóa với $a = 1$.

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sau:



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

$$A(0;0;0); D(0;5;0); B(5;0;0); C(5;5;0); S(0;0;10); M\left(0; \frac{5}{2}; 5\right).$$

$$\overrightarrow{BC} = (0;5;0), \overrightarrow{BS} = (-5;0;10).$$

$$[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = (50;0;25) \Rightarrow \text{một vectơ pháp tuyến của } (SBC) \text{ là } \vec{n}_1 = (2;0;1).$$

$$\overrightarrow{AC} = (5;5;0), \overrightarrow{AM} = \left(0; \frac{5}{2}; 5\right).$$

$$[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = \left(25; -25; \frac{25}{2}\right) \Rightarrow \text{một vectơ pháp tuyến của } (AMC) \text{ là } \vec{n}_2 = (2; -2; 1).$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

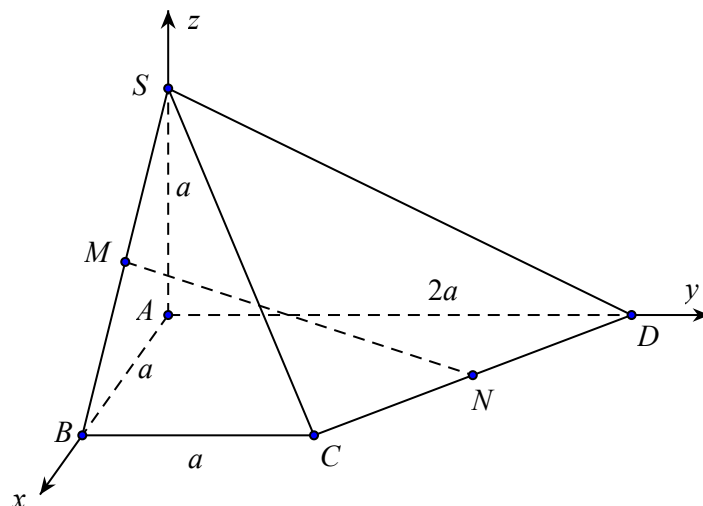
$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{3\sqrt{5}}.$$

$$\text{Suy ra: } \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^2} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89.$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB , CD . Cosin của góc giữa MN và (SAC) là (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,74



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, với $O \equiv A$.

Tọa độ các đỉnh của hình chóp là : $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$, $S(0;0;a)$.

$$\Rightarrow M\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right).$$

Ta có: $-\frac{1}{a}\overrightarrow{SA} = (0;0;1) = \vec{u}$; $\frac{1}{a}\overrightarrow{SC} = (1;1;-1) = \vec{v}$.

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-1;1;0)$.

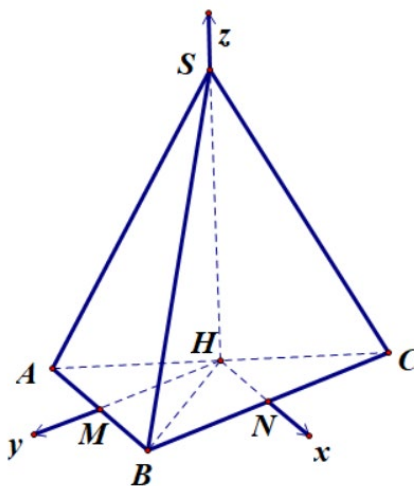
Lại có: $\frac{2}{a}\overrightarrow{MN} = (0;3;-1) = \vec{w}$.

Gọi α là góc giữa MN và (SAC) ta có: $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{w}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{55}}{10} \approx 0,74$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ vuông tại B , $AB=1, BC=\sqrt{3}$, $\triangle SAC$ đều, mặt phẳng (SAC) vuông với đáy. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Giá trị của $\cos \alpha$ bằng (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,12



Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB, BC .

$$(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp HM, SH \perp HN.$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow HM \perp HN.$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow AC = 2 \Rightarrow SH = \sqrt{3}.$$

$$HM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}; HN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như sau: $H(0;0;0); S(0;0;\sqrt{3}); M\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right); N\left(\frac{1}{2};0;0\right), B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$$\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right) \quad \overrightarrow{BN} = \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{BS} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right) \quad \overrightarrow{BS} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$$

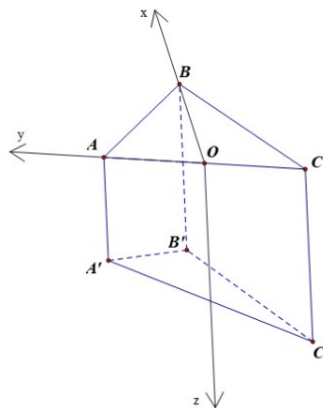
$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS}] = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \vec{n}_2 = [\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BS}] = \left(-\frac{3}{2}; 0; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{\left| -\frac{3}{16} \right|}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{16}} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{16}}} = \frac{\sqrt{65}}{65} \approx 0,12.$$

Câu 22: Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 4m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 8m; 8,8m; 9,6m. Biết đáy bể là phẳng. Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là (làm tròn tới hàng phần mười)(độ)

Lời giải

Trả lời: 21,8



Gọi 3 điểm ở trên mặt nước lần lượt là A, B, C và ba điểm tương ứng ở đáy bể là A', B', C' sao cho $AA' = 8m, BB' = 8,8m, CC' = 9,6m$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, O là trung điểm của AC

$$\text{Ta có } A(0;2;0), B(2\sqrt{3};0;0), C(0;-2;0), A'(0;2;8), B'(2\sqrt{3};0;8,8), C'(0;-2;9,6).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'B'} = (2\sqrt{3}; -2; 0,8), \overrightarrow{A'C'} = (0; -4; 1,6).$$

$$\text{Có } [\overline{A'B'}, \overline{A'C'}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0,8 \\ -4 & 1,6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0,8 & 2\sqrt{3} \\ 1,6 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \right) = \left(0; \frac{-16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3} \right).$$

Mặt phẳng đáy bể là mặt phẳng $(A'B'C')$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (0; \frac{-16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3})$.

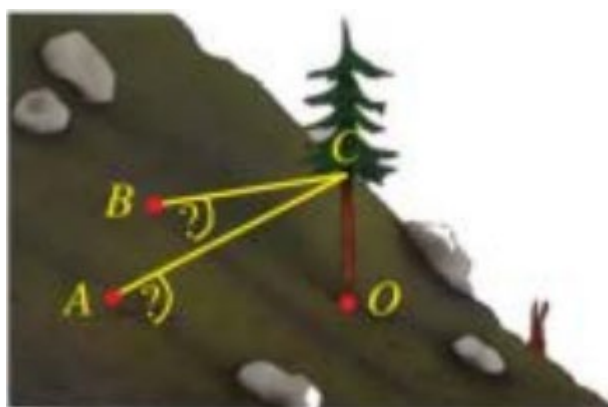
Mặt phẳng nằm ngang (mặt nước) chính là mặt phẳng $(Oxy) : z = 0$ có một vector pháp tuyến là: $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng đáy và mặt nước. Khi đó:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}; \vec{k}) \right| = \frac{|-8\sqrt{3}|}{\sqrt{\left(\frac{-16\sqrt{3}}{5}\right)^2 + (-8\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}.$$

Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là (làm tròn tới hàng phần chục): 21,8 (độ).

Câu 23: Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm gốc O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0;0;0)$, $A(5;-3;1)$, $B(-3;-4;2)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $C(0;0;5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Khi đó, góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



Lời giải

Trả lời: 37

Ta có $\overline{OA} = (5; -3; 1)$, $\overline{OB} = (-3; -4; 2)$ nên

$$[\overline{OA}, \overline{OB}] = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \right) = (-2; -13; -11).$$

Suy ra vector $\vec{n} = [\overline{OA}, \overline{OB}] = (-2; -13; -11)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (OAB) .

Mặt khác $\overline{CA} = (5; -3; -4)$ nên ta có

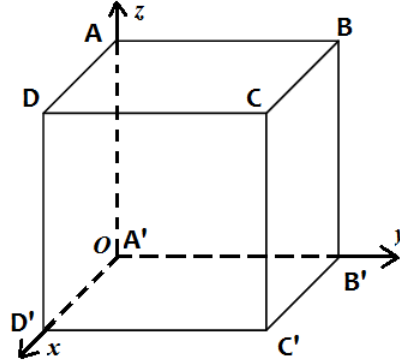
$$\sin(CA, (OAB)) = \left| \cos(\overline{CA}, \vec{n}) \right| = \frac{|\overline{CA} \cdot \vec{n}|}{|\overline{CA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-13) + (-4) \cdot (-11)|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-13)^2 + (-11)^2}} = \frac{73}{70\sqrt{3}}$$

Suy ra $(CA, (OAB)) \approx 37^\circ$. Vậy góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi khoảng 37° .

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $3a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$. (đơn vị độ)

Lời giải

Trả lời: 60



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc tọa độ $O \equiv A'$, $Ox \equiv A'D'$, $Oy \equiv A'B'$, $Oz \equiv A'A$.

Khi đó: $A'(0;0;0)$, $D'(3a;0;0)$, $B'(0;3a;0)$, $C'(3a;3a;0)$,

$A(0;0;3a)$, $D(3a;0;3a)$, $B(0;3a;3a)$, $C(3a;3a;3a)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (0;3a;0)$, $\overrightarrow{A'D'} = (3a;0;3a)$, $\overrightarrow{A'A} = (0;0;3a)$, $\overrightarrow{A'C'} = (3a;3a;0)$.

$[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}] = (3a^2; 0; -3a^2)$.

Chọn $\vec{n}_1 = (1;0;-1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'CD)$.

$[\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C'}] = (-3a^2; 3a^2; 0)$.

Chọn $\vec{n}_2 = (-1;1;0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

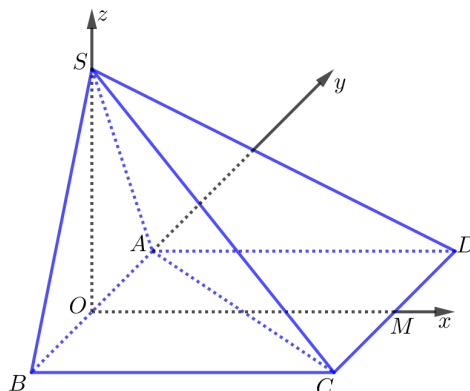
Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ là:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,71



Gọi O, M lần lượt là trung điểm của AB, CD . Vì SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Chuẩn hóa cho $a = 1$

Xét hệ trục $Oxyz$ có $O(0;0;0), M(2;0;0), A(0;1;0), S(0;0;\sqrt{3})$. Khi đó $C(2;-1;0), D(2;1;0)$.

Suy ra $\overrightarrow{SA} = (0;1;-\sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (2;-2;0), \overrightarrow{SC} = (2;-1;-\sqrt{3}), \overrightarrow{CD} = (0;2;0)$.

Mặt phẳng (SAC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC}] = (-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; -2)$.

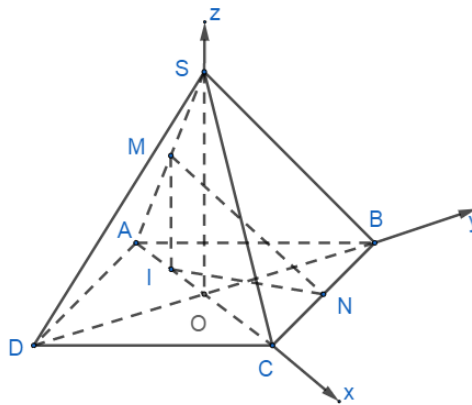
Mặt phẳng (SAD) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{AD}] = (2\sqrt{3}; 0; 4)$.

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{7}.$$

Câu 26: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = a\sqrt{6}$. Tính giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,58



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO .

$$\text{Khi đó } CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét $\triangle CNI$ có: $CN = a$, $\widehat{NCI} = 45^\circ$.

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{2} - 2 \cdot a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle MIN \text{ vuông tại } I \text{ nên } MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{6a^2 - \frac{10a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Mà } MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = a\sqrt{14}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ: (chuẩn hóa cho $a = 1$)

Ta có: $O(0;0;0)$, $B(0;\sqrt{2};0)$, $D(0;-\sqrt{2};0)$, $C(\sqrt{2};0;0)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$,

$A(-\sqrt{2};0;0)$, $S(0;0;\sqrt{14})$, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SB} = (0;\sqrt{2};-\sqrt{14})$, $\overrightarrow{SD} = (0;-\sqrt{2};-\sqrt{14})$.

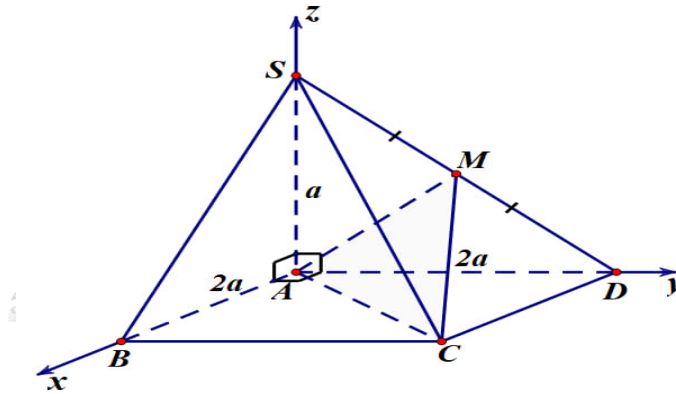
Vectơ pháp tuyến mặt phẳng (SBD) : $\vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}] = (-4\sqrt{7}; 0; 0)$.

Suy ra $\sin(MN, (SBD)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-4\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}|}{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,45



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O$, như hình vẽ:

Khi đó ta có:

$A(0;0;0)$, $B(2a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $C(2a;2a;0)$, $S(0;0;a)$, $M\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{SB} = (2a;0;-a)$, $\overrightarrow{SC} = (2a;2a;-a)$, $\overrightarrow{MA} = \left(0;-a;-\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{MC} = \left(2a;a;-\frac{a}{2}\right)$.

$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (2a^2; 0; 4a^2)$ và $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}] = (a^2; -a^2; 2a^2)$.

Gọi α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

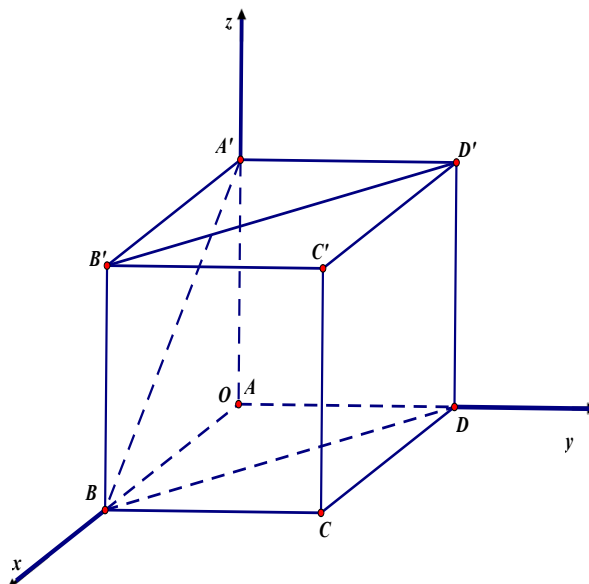
ta có $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2a^2 \cdot a^2 + 4a^2 \cdot 2a^2|}{\sqrt{(2a^2)^2 + (4a^2)^2} \cdot \sqrt{(a^2)^2 + (-a^2)^2 + (2a^2)^2}}$
 $= \frac{10a^4}{\sqrt{20 \cdot 6 \cdot (a^4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{30}}$.

$$\text{Mà } \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \left(\frac{\sqrt{30}}{5} \right)^2 - 1 = \frac{5}{25}. \text{ Suy ra } \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.

Lời giải

Trả lời: 0,5



+) Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(2a;0;0), C(2a;2a;0), D(0;2a;0), A'(0;0;2a), B'(2a;0;2a), C'(2a;2a;2a), D'(0;2a;2a)$.

+) Ta thấy $OC \perp (BB'D'D)$ và $\overrightarrow{OC} = (2a; 2a; 0)$ nên suy ra mặt phẳng $(BB'D'D)$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 0)$.

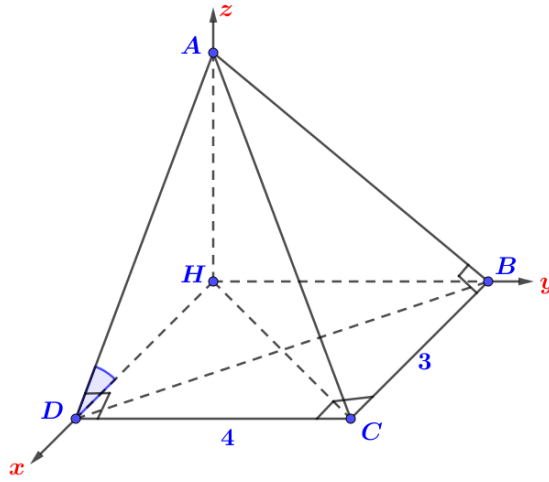
+) Đường thẳng $A'B$ có vector chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (2a; 0; -2a)$ ta chọn $\vec{u} = (1; 0; -1)$.

$$\text{+) Ta có } \sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = 3, CD = 4, \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ, (\widehat{AD, BC}) = 60^\circ$. Tính Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 0,3



Gọi H là chân đường cao của tứ diện $ABCD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HB. (1)$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HD. (2)$$

Mà $\widehat{BCD} = 90^\circ$.

Từ đây ta suy ra $HBCD$ là hình chữ nhật.

Mặt khác: $(\widehat{AD, BC}) = (\widehat{AD, HD}) = \widehat{ADH} = 60^\circ$. Suy ra: $AH = HD \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục $Oxyz \equiv H.DBA$ như hình vẽ.

Ta có: $H(0;0;0)$, $A(0;0;3\sqrt{3})$, $B(0;4;0)$, $D(3;0;0)$, $C(3;4;0)$

$$\overrightarrow{AD} = (3;0;-3\sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (3;4;-3\sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (0;4;-3\sqrt{3}).$$

Gọi $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ lần lượt là một véc tơ pháp tuyến của (ABC) và (ABD) .

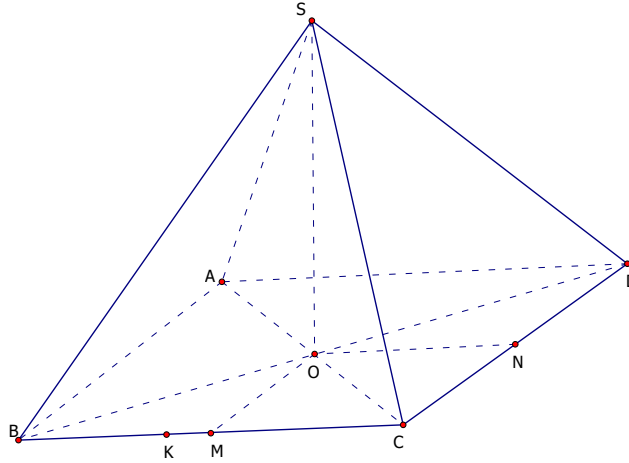
$$\text{Suy ra: } \vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -9\sqrt{3}; -12); \vec{n}_2 = [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] = (12\sqrt{3}; 0; 12).$$

$$\text{Vậy } \cos((ABC), (ADC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|0 \cdot 12\sqrt{3} - 9\sqrt{3} \cdot 0 - 12 \cdot 12|}{\sqrt{0^2 + (-9\sqrt{3})^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{(12\sqrt{3})^2 + 0^2 + (12)^2}} = \frac{2\sqrt{43}}{43}$$

Câu 30: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = 2a$; $AB = a$. Gọi N , M lần lượt là trung điểm của DC và BC , tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM và MN . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,18



$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $OM \equiv Ox$, $ON \equiv Oy$, $OS \equiv Oz$

$$\text{Khi đó } S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{14}}{2}\right); M\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right); N\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$$

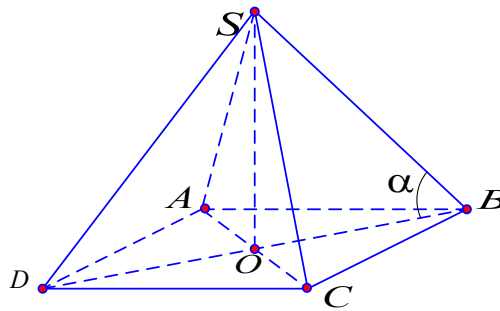
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SM} = \left(\frac{a}{2}; 0; -\frac{a\sqrt{14}}{2}\right); \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\cos(SM, MN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{MN}|} = \frac{\sqrt{30}}{30}$$

Câu 31: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,14



Góc giữa SB và mặt đáy là góc $\widehat{SBO} = 60^\circ$

$$SO = \tan 60. OB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $OC \equiv Ox$, $OB \equiv Oy$, $OS \equiv Oz$.

$$\text{Khi đó } S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{2}\right); B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right); C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right); D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

$$\text{Suy ra vector pháp tuyến của mặt phẳng } (SBC) \text{ là } \vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = \left(\frac{-\sqrt{3}a^2}{2}; -\frac{\sqrt{3}a^2}{2}; -\frac{a^2}{2}\right)$$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (SDC) là $\vec{a} = [\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SC}] = \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{2}; -\frac{\sqrt{3}a^2}{2}; \frac{a^2}{2} \right)$

Do đó cosin góc giữa hai mặt phẳng trên là $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{1}{7}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$; $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

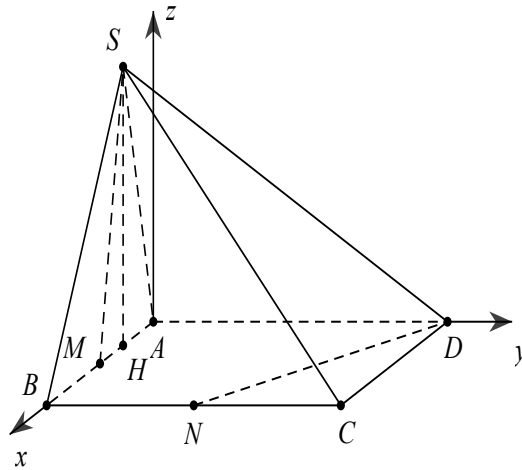
Lời giải

Trả lời: 0,45

Gọi H là hình chiếu của S lên $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow SA \perp SB \Rightarrow AH = \frac{SA^2}{AB} = \frac{a}{2}$, $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm:



$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), H\left(\frac{a}{2};0;0\right), S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), M(a;0;0), N(2a;a;0)$

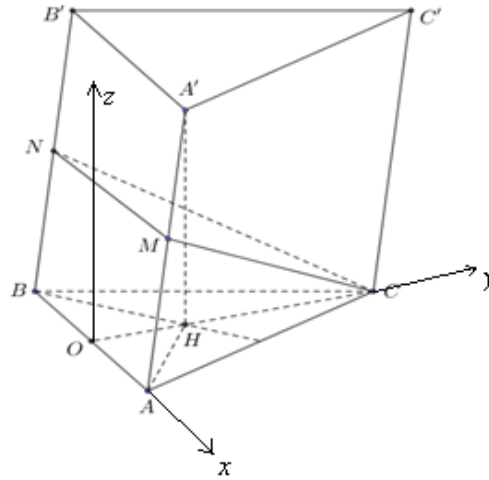
Vì $\overrightarrow{SM} = \left(\frac{a}{2};0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{DN} = (2a;-a;0) \Rightarrow \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN} = a^2$.

Vậy $\cos(SM, DN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{a^2}{a \cdot a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,89



Gọi O là trung điểm của AB . Gắn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$ như hình và không mất tính tổng quát ta chọn $a = 1$, khi đó ta có:

$$A\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), H\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right)$$

$$A'H = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Dễ thấy (ABC) có vtpt $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$.

$$M \text{ là trung điểm } AA' \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right), N \text{ là trung điểm } BB' \Rightarrow N\left(-\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = (-1; 0; 0), \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{4}; -\frac{5\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

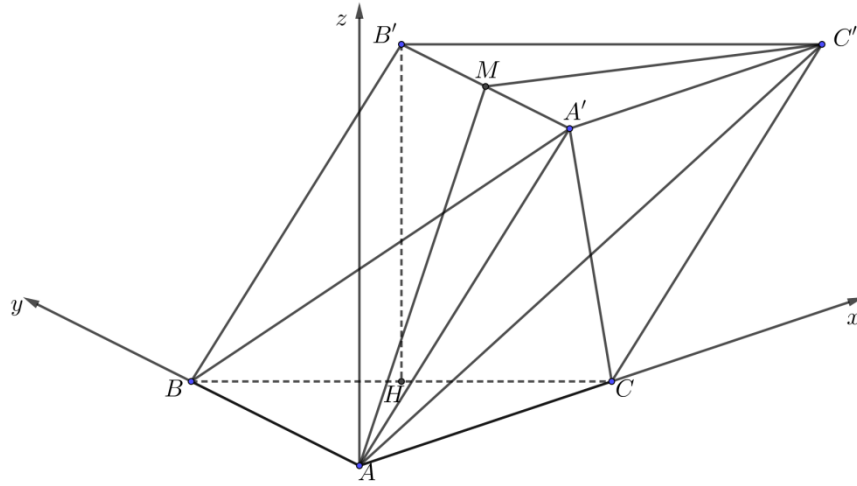
$$\Rightarrow (CMN) \text{ có vtpt } \vec{n}_2 = \left(0; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}(0; 2\sqrt{2}; 5)$$

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Câu 34: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$, $AA' = \frac{\sqrt{61}}{2}$. Hình chiếu của B' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC , M là trung điểm cạnh $A'B'$. Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,59



Gọi H là trung điểm BC .

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$

Xét tam giác $B'BH$ vuông tại H : $B'H = \sqrt{BB'^2 - BH^2} = 3$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có A trùng với O như hình vẽ

Với $A(0;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(4;0;0) \Rightarrow H\left(2;\frac{3}{2};0\right)$ là trung điểm $BC \Rightarrow B'\left(2;\frac{3}{2};3\right)$

Do $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow A'\left(2;-\frac{3}{2};3\right)$; $C'\left(6;-\frac{3}{2};3\right) \Rightarrow M(2;0;3)$

$\overrightarrow{AM} = (2;0;3)$; $\overrightarrow{AC'} = \left(6;-\frac{3}{2};3\right)$ nên vector pháp tuyến (MAC') là $\vec{n}_{(MAC')} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC'}]$
 $= \left(\frac{9}{2}; 12; -3\right)$

$\overrightarrow{A'B} = \left(-2; \frac{9}{2}; -3\right)$; $\overrightarrow{A'C} = \left(2; \frac{3}{2}; -3\right)$ nên vector pháp tuyến $(A'BC)$ là $\vec{n}_{(A'BC)} = [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}]$
 $= (-9; -12; -12)$

Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$.

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{(MAC')} \cdot \vec{n}_{(A'BC)}|}{|\vec{n}_{(MAC')}| \cdot |\vec{n}_{(A'BC)}|} = \frac{\left|\frac{9}{2} \cdot (-9) + 12 \cdot (-12) - 3 \cdot (-12)\right|}{\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 12^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2 + (-12)^2}} = \frac{33}{\sqrt{3157}}.$$

Câu 35: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết khoảng cách giữa AB và $B'C$ bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$,

khoảng cách giữa BC và AB' bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa AC và BD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm $B'C$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (BMD) và $(B'AD)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

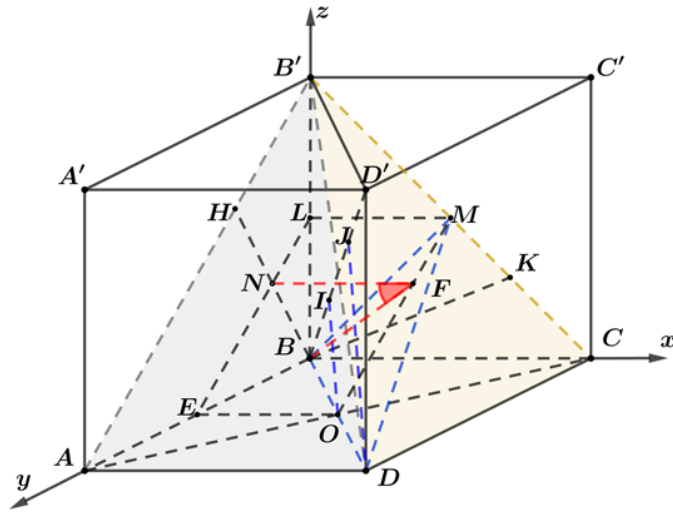
Trả lời: 0,89

Đặt $BA = x$, $BC = y$, $BB' = z$. Gọi O là tâm $ABCD$.

Ta có $AB \parallel (B'DC) \Rightarrow d(AB, B'C) = d(AB, (B'DC)) = d(B, (B'DC))$.

Ta dễ dàng chứng minh được $(B'DC) \perp (BB'C'C)$ và cắt nhau theo giao tuyến $B'C$.

Kẻ $BK \perp B'C \Rightarrow BK \perp (B'DC)$, hay $d(AB, B'C) = BK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Xét $\triangle BB'C$ vuông tại B , ta có $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BB'^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{5}{4a^2}$ (1).

Lại có $BC \parallel (B'AD) \Rightarrow d(BC, AB') = d(BC, (B'AD)) = d(B, (B'AD))$.

Ta dễ dàng chứng minh được $(B'AD) \perp (BB'A'A)$ và cắt nhau theo giao tuyến AB' . Kẻ

$BH \perp AB' \Rightarrow BH \perp (B'AD)$, hay $d(BC, AB') = BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét $\triangle BB'A$ vuông tại B , ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BB'^2} \Leftrightarrow \frac{5}{4a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $x = y$, hay $ABCD$ là hình vuông.

Ta dễ dàng chứng minh $AC \perp (BB'D'D)$. Kẻ $OI \perp BD'$, suy ra $AC \perp OI$, hay OI là đoạn

vuông góc chung của AC và BD' , suy ra $d(AC, BD') = OI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $(BB'D'D)$, kẻ $DJ \parallel OI (J \in BD) \Rightarrow DJ = 2OI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ (vì OI là đường trung bình $\triangle BDD'$).

Xét $\triangle BDD'$ vuông tại D , ta có $\frac{1}{DJ^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{DD'^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4a^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{z^2}$ (3).

Giải (2), (3) ta được $x = a, z = 2a$. Chuẩn hóa cho $a = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với: $B(0;0;0)$, $B'(0;0;2)$, $C(1;0;0)$, $A(0;1;0)$, $D(1;1;0)$

M là trung điểm $B'C$, suy ra $M\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

+) Ta có $\overrightarrow{B'A} = (0; 1; -2)$, $\overrightarrow{B'D} = (1; 1; -2)$, $[\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'D}] = (0; -2; -1)$.

Suy ra mặt phẳng $(B'AD)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 2; 1)$.

+) Ta có $\overrightarrow{BM} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, $\overrightarrow{BD} = (1; 1; 0)$, $[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BD}] = \left(-1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Suy ra mặt phẳng (BMD) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}' = (-2; 2; 1)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (BMD) và $(B'AD)$, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

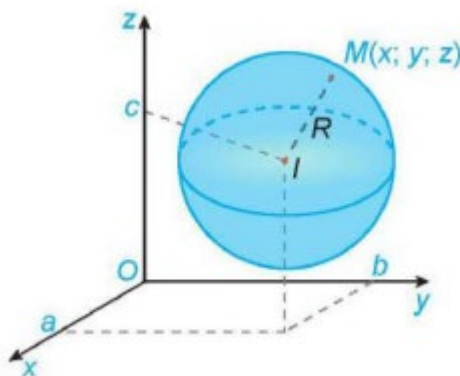


LÝ THUYẾT.

I. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Mặt cầu tâm I bán kính R ($R > 0$) là tập hợp các điểm trong không gian cách I một khoảng bằng R .

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R . Phương trình mặt cầu (S) là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.



Chú ý:

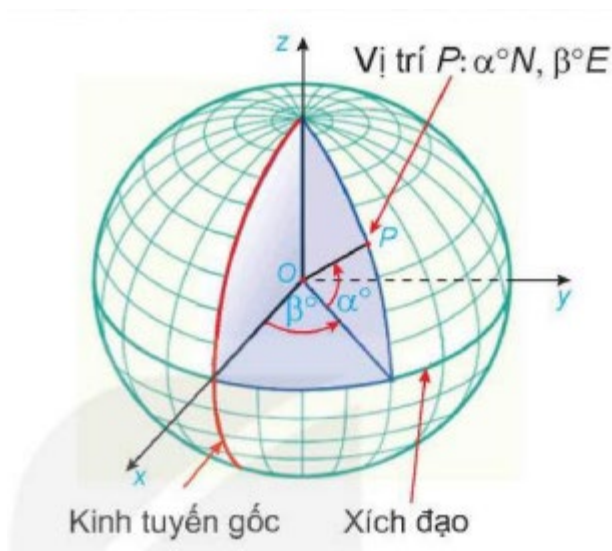
Điểm $M(x; y; z)$ nằm trong mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < R^2$.

Điểm $M(x; y; z)$ nằm ngoài mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 > R^2$.

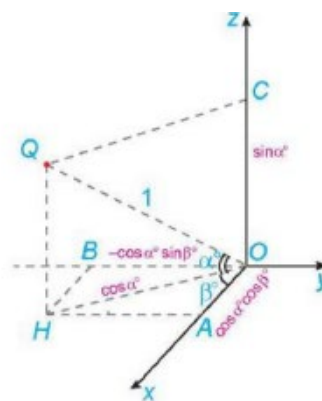
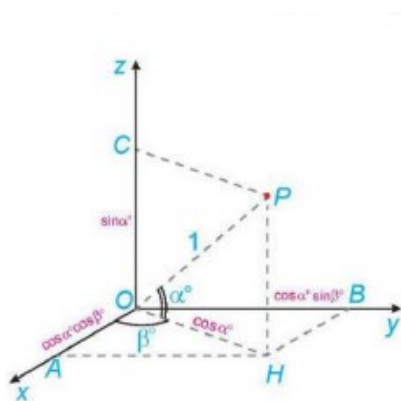
Nhận xét. Với a, b, c, d là các hằng số, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có thể viết lại thành $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$ và là phương trình của một mặt cầu (S) khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Khi đó, (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm Trái Đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực Bắc N , tia Oy giao với xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trên thực tế. Như vậy, trong không gian $Oxyz$, phương trình bề mặt trái đất có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Nếu biết vĩ độ và kinh độ của một vị trí trên mặt đất thì tọa độ của nó trong không gian cũng dễ dàng xác định và ngược lại. Chẳng hạn, vị trí P có vĩ độ, kinh độ tương ứng $\alpha^\circ N, \beta^\circ E$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) có tọa độ $P(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; \cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$, vị trí Q có vĩ độ, kinh độ tương ứng $\alpha^\circ N, \beta^\circ W$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) có tọa độ $Q(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; -\cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$.



Ví dụ: Tính khoảng cách trên mặt đất từ vị trí $P: 10^\circ N, 15^\circ E$ đến vị trí $Q: 80^\circ N, 70^\circ E$.

Lời giải

Ta có

$$P(\cos 10^\circ \cos 15^\circ; \cos 10^\circ \sin 15^\circ; \sin 10^\circ), Q(\cos 80^\circ \cos 70^\circ; \cos 80^\circ \sin 70^\circ; \sin 80^\circ).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{OP} = (\cos 10^\circ \cos 15^\circ; \cos 10^\circ \sin 15^\circ; \sin 10^\circ), \overrightarrow{OQ} = (\cos 80^\circ \cos 70^\circ; \cos 80^\circ \sin 70^\circ; \sin 80^\circ).$$

Do đó

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos 10^\circ \cos 15^\circ \cos 80^\circ \cos 70^\circ + \cos 10^\circ \sin 15^\circ \cos 80^\circ \sin 70^\circ + \sin 10^\circ \sin 80^\circ \approx 0,2691.$$

Vì P, Q thuộc mặt đất nên $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$.

$$\text{Do đó } \cos \widehat{POQ} = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} \approx 0,2691. \text{ Suy ra } \widehat{POQ} \approx 74,3893^\circ.$$

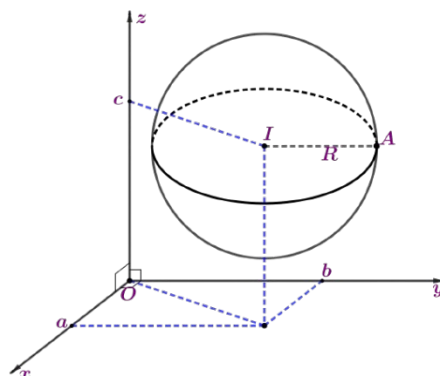
Vì đường tròn tâm O đi qua P, Q có bán kính 1 và chu vi là $2\pi \approx 6,2832$, nên cung nhỏ $\widehat{PQ}$ của đường tròn có độ dài xấp xỉ bằng $\frac{74,3893}{360} \cdot 6,2832 \approx 1,2983$.

Do 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trên thực tế, nên khoảng cách trên mặt đất giữa hai điểm P, Q xấp xỉ là $1,2983 \cdot 6371 \approx 8271,4693 \text{ (km)}$.

PHẦN KIẾN THỨC BỔ SUNG VÀ CHÚ Ý SỬ DỤNG TRONG QUÁ TRÌNH LÀM BÀI TẬP

1. Phương trình mặt cầu

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
Xác Định	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 về phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.



2. Vị trí tương đối

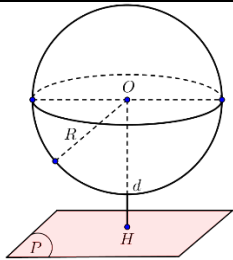
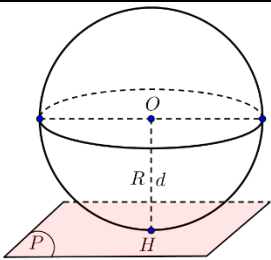
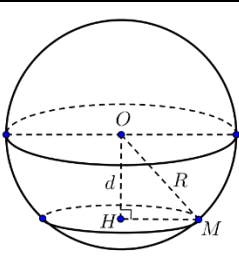
a) Giữa mặt cầu và điểm:

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M và $S(I; R)$. Khi đó:

Mặt cầu	Điểm		
	Nằm ngoài	Nằm trên	Nằm trong
	$\Leftrightarrow IM \cap (S) = H$	$\Leftrightarrow IM \cap (S) = M \equiv H$	$\Leftrightarrow IM \cap (S) = \emptyset$
	$IM > R$	$IM = R$	$IM < R$

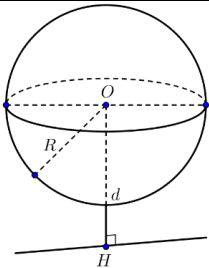
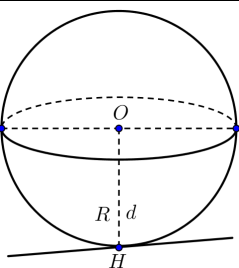
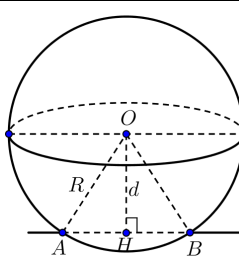
b) Giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $S(I; R)$. Khi đó:

Mặt phẳng			
	Không cắt $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = \{M\}$	Cắt theo giao tuyến là đường tròn $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = C(I'; r)$
	$d(I; (\alpha)) > R$	$d(I; (\alpha)) = R$ $\Leftrightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm M .	$d(I; (\alpha)) < R$ $\Leftrightarrow (\alpha)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r . $R = \sqrt{r^2 + d^2(I; (\alpha))}$.
Mặt cầu			

c) Giữa mặt cầu và đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và $S(I; R)$. Khi đó:

Đường thẳng			
	Không cắt $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{H\}$	Cắt tại hai điểm A; B $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{A; B\}$
	$d(I; \Delta) > R$	$d(I; \Delta) = R$ $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	$d(I; \Delta) < R$ $\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I; \Delta)}$
Mặt cầu			

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÂM – BÁN KÍNH – NHẬN BIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương pháp

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
Nhận xét		(1) Hệ số trước x, y, z bằng nhau và bằng 1. (2) Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1. (3) Vế phải là hằng số dương.	(1) Hệ số trước x^2, y^2, z^2 bằng nhau và bằng 1. (2) Phương trình đầy đủ x^2, y^2, z^2 (3) Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$
Xác Định	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

 Định nghĩa $S(I; R) = \{M \mid IM = R > 0\}$.

 Cho hai điểm A, B cố định.

Nếu $MA \perp MB$ thì tập hợp điểm M là mặt cầu (S) có tâm I là trung điểm AB và bán kính

$$R = \frac{AB}{2}$$

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ tâm và bán kính các mặt cầu sau:

a) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. **b)** $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 25$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 12y - 6z - 10 = 0$. Tìm bán kính của mặt cầu (S) .

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$

(3) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

(4) $(x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu và mặt cầu đầy nhận $I(-1; 1; 0)$ làm tâm?

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

(2) $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$

(3) $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1$

(4) $(x + y)^2 = 2xy - z^2 - 1$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu?

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ không là phương trình mặt cầu vì $x^2 + y^2 + z^2 + 1 > 0 \forall x; y; z$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - m = 0$ có bán kính $R = 4$.
Tìm giá trị m .

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1; 2; -3)$ và $R = 4$

Ta có $4 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 - (-m)} = \sqrt{16 + m}$ hay $m = 2$.

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 10m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-3)x - 2(m+1)y + 2mz + m^2 + 7 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; -1)$ và $B(0; 6; 0)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì M thuộc một mặt cầu (S) . Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2)$; $B(3; -3; 3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Tính độ dài OM lớn nhất.

Câu 12: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 4$

b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = (-2)^2$

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + z - 1 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 9y + 5z + 1 = 0$

f) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - 4y + 6z - 1 = 0$

g) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 9 = 0$

h) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - z + \frac{5}{4} = 0$

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các phương trình dưới đây là phương trình mặt cầu

- a) $(x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = m$
- b) $(x-m)^2 + (y-2m)^2 + z^2 = 9$
- c) $x^2 + y^2 + z^2 = -m$
- d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + z - m^2 = 0$
- e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 9my + 3z - m = 0$
- f) $2x^2 + my^2 + 2z^2 - 2x - 2my + mz - 1 = 0$
- g) $x^2 + y^2 + z^2 - mx - 2y - m = 0$
- h) $x^2 + y^2 + z^2 - x - mz - 8m = 0$

DẠNG 2. MẶT CẦU CÓ TÂM VÀ ĐI QUA MỘT ĐIỂM

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R .	Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm I và bán kính R . Phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
Tâm $I(a; b; c)$ và qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.	>> Bán kính mặt cầu $R = IM = \overrightarrow{IM} = \sqrt{(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2}$. >> Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IM$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

- a) Tâm $I(-1; 2; -3)$, bán kính $R = 3$
- b) Tâm $I(0; -4; 1)$ đường kính bằng 4.

Câu 15: Lập phương trình mặt cầu (S) với:

- a) Tâm $I(-1; 3; 0)$ và bán kính $R = 3$.
- b) Bán kính $R = \sqrt{10}$ và tâm $I(2; -3; 4)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình mặt cầu

- a) Với tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5$.
- b) Với tâm $I(0; 0; 3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Câu 17: Lập phương trình mặt (S) với tâm I và đi qua điểm A .

- a) Với $I(2; -1; 3)$, $A(3; -4; 4)$
- b) Với $A(2; -1; 3)$, $I(3; -4; 4)$

Câu 18: Lập phương trình mặt (S) với

- a) tâm $I(3; -2; 1)$ và đi qua điểm $C(-2; 3; 1)$.
- b) tâm $I(-2; 3; 1)$ và đi qua điểm $C(3; -2; 1)$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

- a) Tâm $I(-1; 2; 1)$ đi qua gốc tọa độ.
- b) Tâm $I(1; 2; 3)$ đi qua điểm $A(1; 1; 2)$.

DẠNG 3. MẶT CẦU CÓ ĐƯỜNG KÍNH

Phương

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Nhận $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$ làm đường kính	» Gọi I là tâm mặt cầu (S) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN $\Rightarrow I\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}; \frac{z_M + z_N}{2}\right)$. » Bán kính mặt cầu $R = \frac{MN}{2} = IM$.

Câu 20: Lập phương trình mặt (S)

a) Đường kính AB với $A(1;3;2)$, $B(3;5;0)$.

b) Đường kính MN với $M(0;-3;4)$, $N(2;3;0)$.

Câu 21: Lập phương trình mặt (S) :

a) đường kính AB với $A(3;-4;5)$, $B(-5;2;1)$.

b) đường kính MN với $M(3;2;1)$, $B(1;2;3)$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{AO} = (-1;-2;3)$ và $\overrightarrow{BO} = (-7;-4;-5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

DẠNG 4. MẶT CẦU QUA 4 ĐIỂM KHÔNG ĐỒNG PHẪNG

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Đi qua 4 điểm $A; B; C; D$ không đồng phẳng	» Gọi $I(a; b; c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm. » Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $\Leftrightarrow IA = IB = IC = ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow \text{tọa độ } I.$ » Mặt cầu có tâm và bán kính

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2;2;2)$, $N(4;0;2)$, $P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là?

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D , biết rằng: $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$ và $D(0;0;0)$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D , biết rằng: $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$.

DẠNG 5. MẶT CẦU CÓ TÂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG/MẶT PHẪNG

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I \in (P)$ và đi qua $A; B; C$. Với $(P): \alpha.x + \beta.y + \gamma.z + \delta = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. ✂ Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in (P) \Rightarrow \alpha.a + \beta.b + \gamma.c + \delta = 0$ (1). » Mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A; B; C$ $\Leftrightarrow IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 & (2) \\ IA^2 = IC^2 & (3) \end{cases}$ » Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow I$ là thỏa hệ: $\begin{cases} \alpha.a + \beta.b + \gamma.c + \delta = 0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Rightarrow \text{tọa độ } I.$ » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.
Tâm $I \in d$ và đi qua $A; B$. Với $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc d là các trục $Ox; Oy; Oz$. ✂ Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in d \Rightarrow I(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. » Viết $\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB}$ theo t và tính độ dài $\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IB}$ » Mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A; B$ $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} \Rightarrow t = ?.$ » Từ $t = ? \Rightarrow$ tọa độ I. » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1;2;3), B(2;0;-2)$, và có tâm nằm trên trục Ox . Viết phương trình mặt cầu (S) ?

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu qua 2 điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm I thuộc $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$?

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz) .

DẠNG 6. MẶT CẦU TIẾP XÚC ĐƯỜNG THẲNG/MẶT PHẪNG

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (P). Với $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. ✂ Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	>> Bán kính mặt cầu $R = \begin{cases} d(I;(\alpha)) = \frac{ Aa + Bb + Cc + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & \text{Tiếp xúc } (\alpha) \\ d(I;(Oxy)) = \sqrt{z_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oxy) \\ d(I;(Oxz)) = \sqrt{y_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oxz) \\ d(I;(Oyz)) = \sqrt{x_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oyz) \end{cases}$ >> Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;(\alpha))$.
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với Δ. Với $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc Δ là các trục $Ox; Oy; Oz$. ✂ Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	>> Bán kính mặt cầu $R = \begin{cases} d(I;\Delta) = \frac{ \vec{u}; \overrightarrow{MI} }{ \vec{u} } & \text{Tiếp xúc } \Delta \\ d(I;Ox) = \sqrt{y_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc } Ox \\ d(I;Oy) = \sqrt{x_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc } Oy \\ d(I;Oz) = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} & \text{Tiếp xúc } Oz \end{cases}$ >> Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;\Delta)$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) .

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc trục Oy .

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I thuộc đường thẳng d sao cho mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Oz và có bán kính bằng 2.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu đi qua điểm $B(1;3;0)$ và tiếp xúc với (Oyz) tại $M(0;3;-2)$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;-4), B(2;3;4), C(3;5;7)$. Tìm phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với BC .

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho $B(1;1;9), C(1;4;0)$. Mặt cầu (S) đi qua B và tiếp xúc với (Oxy) tại C có phương trình là?

- Câu 37:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ .
- Câu 38:** Trong không gian $Oxyz$, hãy lập phương trình mặt cầu (S) có tâm là $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.
- Câu 39:** Trong không gian $Oxyz$, hãy lập phương trình mặt cầu (S) có tâm là $I(1; -2; 3)$ và trục Ox cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.
- Câu 40:** Trong không gian $Oxyz$, hãy lập phương trình mặt cầu (S) có tâm là $I(1; 0; 3)$ và $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I .
- Câu 41:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.
- Câu 42:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 7 = 0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Viết phương trình mặt cầu (S) .
- Câu 43:** Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $A; B, C$ và tâm I của (S) nằm trên mặt phẳng (α)
- Biết $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0); C(2; 0; 1)$ và mặt phẳng (α) trùng với mặt phẳng (Oxy) .
 - Biết $A(2; 0; 1), B(1; 0; 0); C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x + y + z - 2 = 0$.
- Câu 44:** Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm $A; B$ và tâm I của (S) nằm trên đường thẳng d
- Biết điểm $A(0; 1; 3), B(2; 2; 1)$ và đường thẳng d trùng với trục Ox
 - Biết điểm $A(0; 1; 3), B(2; 2; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.
- Câu 45:** Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm $A; B$ và tâm I của (S) nằm trên đường thẳng d
- Biết $A(1; 3; 1), B(3; 2; 2)$ và đường thẳng d trùng với trục Oz .
 - Biết $A(-2; 4; 1), B(2; 0; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.
- Câu 46:** Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm $A; B$ và tâm I của (S) nằm trên đường thẳng d
- Biết điểm $A(1; -2; 1), B(-1; 2; 1)$ và đường thẳng d trùng với trục Ox
 - Biết điểm $A(0; 1; 3), B(2; 2; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.

Câu 47: Cho đường thẳng $\Delta \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}$ và hai mặt phẳng $(P) \ x + y + z - 9 = 0$; $(Q) \ x + y + z - 3 = 0$ Lập

phương trình mặt cầu (S) tâm I nằm trên đường thẳng Δ và mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) ?

Câu 48: Cho đường thẳng $\Delta \begin{cases} x = 2t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases}$ và hai mặt phẳng $(P) \ x = 0$; $(Q) \ y = 0$. Lập phương trình mặt

cầu (S) tâm I nằm trên đường thẳng Δ và mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) ?

Câu 49: Trong mp $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có bán kính nhỏ nhất.

Câu 50: Trong mp $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có bán kính nhỏ nhất. Xác định bán kính của mặt cầu (S)

DẠNG 7. BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6; -2; 4)$.

a) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

b) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5; 2; -2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

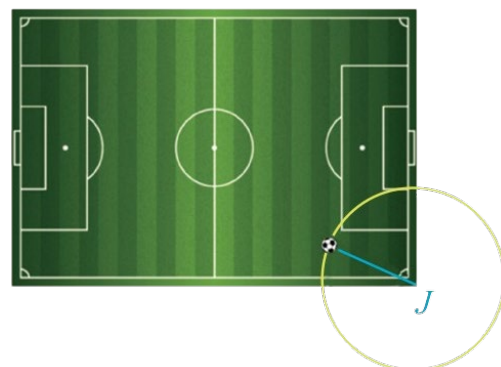
c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6; 0; 3)$.

Câu 52: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S): (x-32)^2 + (y-50)^2 + (z-8)^2 = 100$ (đơn vị độ dài tính theo mét).

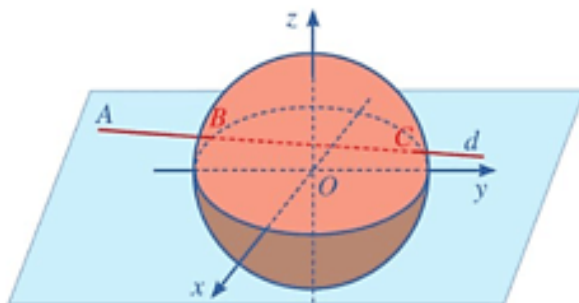
a) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

c) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J .



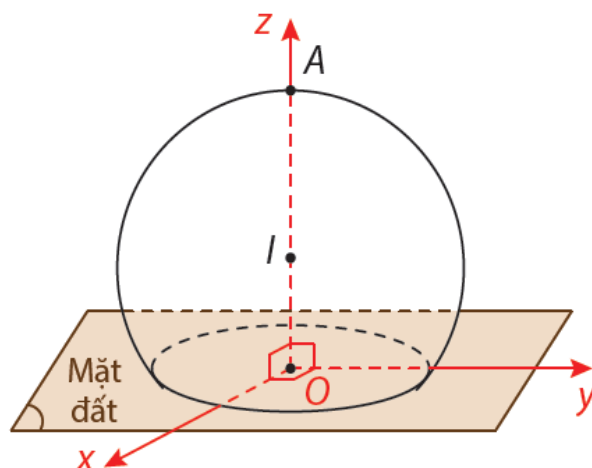
Câu 53: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km . Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Hãy xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.



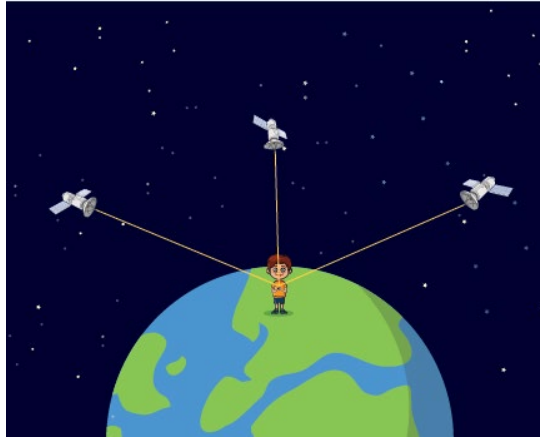
Câu 54: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km . Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21;35;50)$ đến vị trí $D(5121;658;0)$ hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).



Câu 55: Ericsson Globe (Thụy Điển) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020), với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m , nó có đủ chỗ ngồi cho $16\,000$ khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc $13\,850$ khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I , đường kính 110 m và $OI = 85\text{ m}$ như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.



Câu 56: Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4 \cdot 10^6 m$. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An $3 \cdot 10^6 m$, vệ tinh thứ hai đang cách An $4 \cdot 10^6 m$ và vệ tinh thứ ba đang cách An $5 \cdot 10^6 m$. Biết rằng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước với O là tâm Trái Đất ($1 \text{ đơn vị} = 10^6 m$), tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì tọa độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4; 4; 6)$, $I_2(8; 4; 3)$ và $I_3(4; 9; 3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn An (làm tròn đến hàng đơn vị).





PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

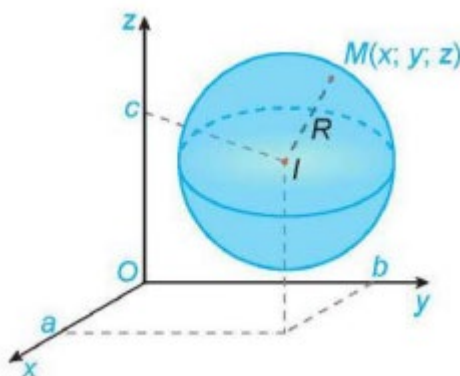


LÝ THUYẾT.

I. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Mặt cầu tâm I bán kính R ($R > 0$) là tập hợp các điểm trong không gian cách I một khoảng bằng R .

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R . Phương trình mặt cầu (S) là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.



Chú ý:

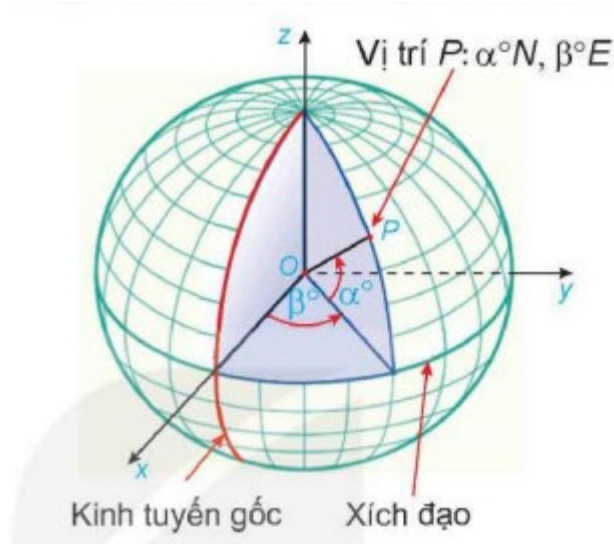
Điểm $M(x; y; z)$ nằm trong mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < R^2$.

Điểm $M(x; y; z)$ nằm ngoài mặt cầu (S) nếu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 > R^2$.

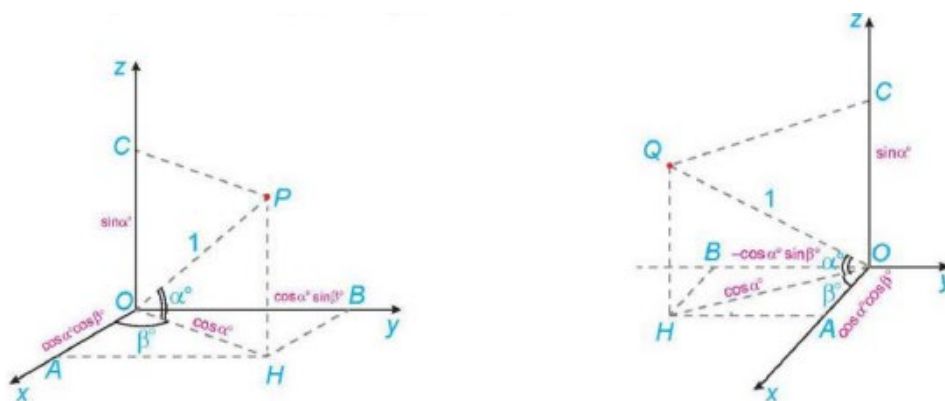
Nhận xét. Với a, b, c, d là các hằng số, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có thể viết lại thành $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$ và là phương trình của một mặt cầu (S) khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Khi đó, (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm Trái Đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực Bắc N , tia Oy giao với xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trên thực tế. Như vậy, trong không gian $Oxyz$, phương trình bề mặt trái đất có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Nếu biết vĩ độ và kinh độ của một vị trí trên mặt đất thì tọa độ của nó trong không gian cũng dễ dàng xác định và ngược lại. Chẳng hạn, vị trí P có vĩ độ, kinh độ tương ứng $\alpha^\circ N, \beta^\circ E$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) có tọa độ $P(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; \cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$, vị trí Q có vĩ độ, kinh độ tương ứng $\alpha^\circ N, \beta^\circ W$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) có tọa độ $Q(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; -\cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$.



Ví dụ: Tính khoảng cách trên mặt đất từ vị trí $P: 10^\circ N, 15^\circ E$ đến vị trí $Q: 80^\circ N, 70^\circ E$.

Lời giải

Ta có

$$P(\cos 10^\circ \cos 15^\circ; \cos 10^\circ \sin 15^\circ; \sin 10^\circ), Q(\cos 80^\circ \cos 70^\circ; \cos 80^\circ \sin 70^\circ; \sin 80^\circ).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{OP} = (\cos 10^\circ \cos 15^\circ; \cos 10^\circ \sin 15^\circ; \sin 10^\circ), \overrightarrow{OQ} = (\cos 80^\circ \cos 70^\circ; \cos 80^\circ \sin 70^\circ; \sin 80^\circ).$$

Do đó

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos 10^\circ \cos 15^\circ \cos 80^\circ \cos 70^\circ + \cos 10^\circ \sin 15^\circ \cos 80^\circ \sin 70^\circ + \sin 10^\circ \sin 80^\circ \approx 0,2691.$$

Vì P, Q thuộc mặt đất nên $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$.

Do đó $\cos \widehat{POQ} = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{OP \cdot OQ} \approx 0,2691$. Suy ra $\widehat{POQ} \approx 74,3893^\circ$.

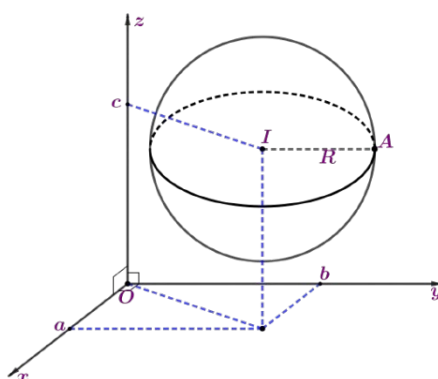
Vì đường tròn tâm O đi qua P, Q có bán kính 1 và chu vi là $2\pi \approx 6,2832$, nên cung nhỏ $\widehat{PQ}$ của đường tròn có độ dài xấp xỉ bằng $\frac{74,3893}{360} \cdot 6,2832 \approx 1,2983$.

Do 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trên thực tế, nên khoảng cách trên mặt đất giữa hai điểm P, Q xấp xỉ là $1,2983 \cdot 6371 \approx 8271,4693$ (km).

PHẦN KIẾN THỨC BỔ SUNG VÀ CHÚ Ý SỬ DỤNG TRONG QUÁ TRÌNH LÀM BÀI TẬP

1. Phương trình mặt cầu

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
Xác Định	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.



2. Vị trí tương đối

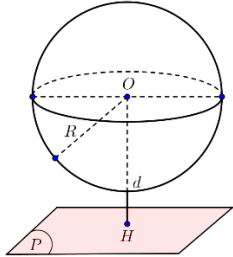
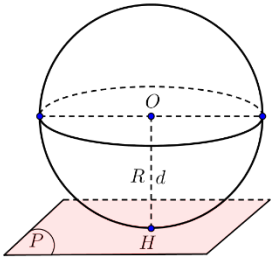
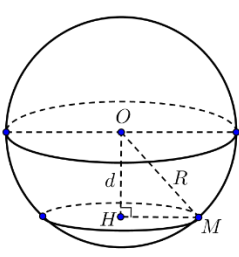
a) Giữa mặt cầu và điểm:

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M và $S(I; R)$. Khi đó:

		Điểm		
Mặt cầu	Nằm ngoài	Nằm trên	Nằm trong	
	$\Leftrightarrow IM \cap (S) = H$	$\Leftrightarrow IM \cap (S) = M \equiv H$	$\Leftrightarrow IM \cap (S) = \emptyset$	
	$IM > R$	$IM = R$	$IM < R$	

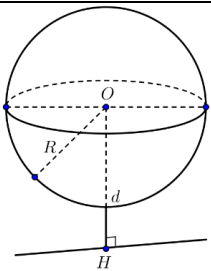
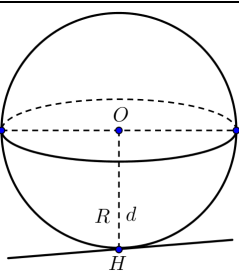
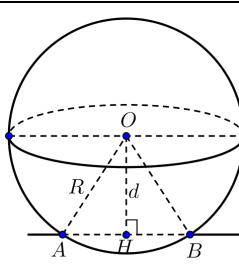
b) Giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $S(I; R)$. Khi đó:

Mặt phẳng			
	Không cắt $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = \{M\}$	Cắt theo giao tuyến là đường tròn $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = C(I'; r)$
Mặt cầu	$d(I; (\alpha)) > R$	$d(I; (\alpha)) = R$ $\Leftrightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm M .	$d(I; (\alpha)) < R$ $\Leftrightarrow (\alpha)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r . $R = \sqrt{r^2 + d^2(I; (\alpha))}$.
			

c) Giữa mặt cầu và đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và $S(I; R)$. Khi đó:

Đường thẳng			
	Không cắt $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{H\}$	Cắt tại hai điểm A; B $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{A; B\}$
Mặt cầu	$d(I; \Delta) > R$	$d(I; \Delta) = R$ $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	$d(I; \Delta) < R$ $\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I; \Delta)}$
			

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÂM – BÁN KÍNH – NHẬN BIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương pháp

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
Nhận xét		(1) Hệ số trước x, y, z bằng nhau và bằng 1. (2) Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1. (3) Vế phải là hằng số dương.	(1) Hệ số trước x^2, y^2, z^2 bằng nhau và bằng 1. (2) Phương trình đầy đủ x^2, y^2, z^2 (3) Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$
Xác Định	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

📌 Định nghĩa $S(I; R) = \{M \mid IM = R > 0\}$.

📌 Cho hai điểm A, B cố định.

Nếu $MA \perp MB$ thì tập hợp điểm M là mặt cầu (S) có tâm I là trung điểm AB và bán kính

$$R = \frac{AB}{2}$$

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ tâm và bán kính các mặt cầu sau:

a) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. b) $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$

Lời giải

a) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$.

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ là $I(1; -2; 3)$ và $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 - (-2)} = 4$

b) $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$

Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$ có tọa độ tâm $I(1; -2; 0)$ và $R = 3$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 25$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1; -3; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{25} = 5$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1; 2; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 - (-2)} = 4$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 12y - 6z - 10 = 0$. Tìm bán kính của mặt cầu (S) .

Lời giải

Mặt cầu $(S): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 12y - 6z - 10 = 0$

Khi đó ta được phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 3z - 5 = 0$ có tâm $I\left(1; -3; \frac{3}{2}\right)$ và

bán kính là $R = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-5)} = \frac{\sqrt{69}}{2}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$

(3) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

(4) $(x + y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu và mặt cầu đầy nhận $I(-1; 1; 0)$ làm tâm?

Lời giải

(1) $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy$

$2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - z^2 + 2x - 1 - 2xy$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 0$ không là phương trình mặt cầu.

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$

Kiểm tra: $1^2 + (-1)^2 = 2 > 0$ là phương trình mặt cầu, có tâm $I(1; -1; 0)$.

(3) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

Kiểm tra: $(-1)^2 + 1^2 - 1 = 1 > 0$ là phương trình mặt cầu, có tâm $I(-1; 1; 0)$.

(4) $(x + y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$

$(x + y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - z^2 - 1 + 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 1 = 0$

Kiểm tra: $(-2)^2 - (-1) = 5 > 0$ là phương trình mặt cầu, có tâm $I(-2; 0; 0)$.

Vậy, phương trình là phương trình mặt cầu và nhận

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

(2) $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$

$$(3) \quad 2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1$$

$$(4) \quad (x + y)^2 = 2xy - z^2 - 1$$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu?

Lời giải

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ có tâm $I(1; 0; 0)$ và $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ là phương trình mặt cầu.

$$(2) \quad x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$$

$x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$ không là phương trình mặt cầu vì hệ số trước z^2 khác hệ số trước x^2 và y^2 .

$$(3) \quad 2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1$$

$$2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - z^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2x + 1 = 0 \text{ không là phương trình mặt cầu.}$$

$$(4) \quad (x + y)^2 = 2xy - z^2 - 1$$

$$(x + y)^2 = 2xy - z^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 2xy - z^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 \text{ không là phương trình mặt cầu vì } x^2 + y^2 + z^2 + 1 > 0 \forall x; y; z.$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - m = 0$ có bán kính $R = 4$. Tìm giá trị m .

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1; 2; -3)$ và $R = 4$

$$\text{Ta có } 4 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 - (-m)} = \sqrt{16 + m} \text{ hay } m = 2.$$

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 10m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu.

Lời giải

$$\text{Ta có } a = -2m, b = -m, c = m, d = 10m^2 - 28.$$

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 10m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 + (-m)^2 + m^2 - (10m^2 - 28) > 0$$

$$\Leftrightarrow -4m^2 + 28 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{7} < m < \sqrt{7}.$$

Khi đó các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-\sqrt{7} < m < \sqrt{7}$ là $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Vậy có 5 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-3)x - 2(m+1)y + 2mz + m^2 + 7 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Lời giải

Ta có $a = m - 3$, $b = m + 1$, $c = -m$, $d = m^2 + 7$

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m - 3)x - 2(m + 1)y + 2mz + m^2 + 7 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - d \leq 0 &\Leftrightarrow (m - 3)^2 + (m + 1)^2 + (-m)^2 - (m^2 + 7) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3. \end{aligned}$$

Vậy $m \in [1; 3]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; -1)$ và $B(0; 6; 0)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì M thuộc một mặt cầu (S) . Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-x; -y; -1 - z)$ và $\overrightarrow{MB} = (-x; 6 - y; -z)$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6y + y^2 + z + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6y + z = 0.$$

Khi đó theo dạng mặt cầu thì ta có: $a = 0, b = 3, c = -\frac{1}{2}$ và $d = 0$.

$$\text{Xét } a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{37}{4} > 0.$$

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu có tâm $I\left(0; 3; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2)$; $B(3; -3; 3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Tính độ dài OM lớn nhất.

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$.

$$\text{Ta có } \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA = 2MB \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$$

$$\Leftrightarrow 9[(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2] = 4[(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0 \Leftrightarrow (x + 6)^2 + (y - 6)^2 + (z + 6)^2 = 108.$$

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6; 6; -6)$ và bán kính $R = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

$$\text{Do đó } OM \text{ lớn nhất bằng } OI + R = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-6)^2} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

Câu 12: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 4$

b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = (-2)^2$

- c) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
 d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + z - 1 = 0$
 e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 9y + 5z + 1 = 0$
 f) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
 g) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 9 = 0$
 h) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - z + \frac{5}{4} = 0$

Lời giải

- a) Là phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; -2)$, bán kính $R = 2$.
 b) Là phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 0)$, bán kính $R = 2$.
 c) Không phải là phương trình mặt cầu vì vế phải bằng 0.
 d) Ta có: $a = 1; b = 1; c = -\frac{1}{2}; d = -1$.

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{13}{4} > 0$ suy ra phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm

$$I\left(1; 1; -\frac{1}{2}\right), \text{ bán kính } R = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

- e) Ta có:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 9y + 5z + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + \frac{5}{3}z + \frac{1}{3} = 0$$

Do đó $a = -1; b = \frac{3}{2}; c = -\frac{5}{6}; d = \frac{1}{3} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{65}{18} > 0$ suy ra phương trình đã

cho là phương trình mặt cầu tâm $I\left(-1; \frac{3}{2}; -\frac{5}{6}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{130}}{6}$.

- f) Phương trình $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - 4y + 6z - 1 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu vì các hệ số của x^2, y^2, z^2 không giống nhau.
 g) Ta có: $a = 2; b = 1; c = 0; d = 9$.

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 - d = -4 < 0$ suy ra phương trình đã cho không là phương trình mặt cầu.

- h) Ta có: $a = -1; b = 0; c = \frac{1}{2}; d = \frac{5}{4}$.

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ suy ra phương trình đã cho không là phương trình mặt cầu.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các phương trình dưới đây là phương trình mặt cầu

- a) $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = m$
 b) $(x - m)^2 + (y - 2m)^2 + z^2 = 9$
 c) $x^2 + y^2 + z^2 = -m$

- d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + z - m^2 = 0$
 e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 9my + 3z - m = 0$
 f) $2x^2 + my^2 + 2z^2 - 2x - 2my + mz - 1 = 0$
 g) $x^2 + y^2 + z^2 - mx - 2y - m = 0$
 h) $x^2 + y^2 + z^2 - x - mz - 8m = 0$

Lời giải

- a) Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow m > 0$.
 b) Với mọi số thực m , phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.
 c) Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.
 d) Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + m^2 > 0 \Leftrightarrow$ thoả mãn với mọi số thực m .

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 9my + 3z - m = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3my + z - \frac{m}{3} = 0$

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 1^2 + \left(\frac{3m}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{m}{3} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4}m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{5}{4} > 0 \Leftrightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm.

- f) Phương trình $2x^2 + my^2 + 2z^2 - 2x - 2my + mz - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu $\Rightarrow m = 2$.

Thử lại: Với $m = 2$ phương trình trở thành: $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + z - \frac{1}{2} = 0$.

Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ suy ra đây là phương trình mặt cầu.

Vậy $m = 2$ thì phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

g) Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1^2 + m > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + m + 1 > 0 \Leftrightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm.

h) Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1^2 + 8m > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + 8m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -16 + 6\sqrt{7} \\ m < -16 - 6\sqrt{7} \end{cases}$

DẠNG 2. MẶT CẦU CÓ TÂM VÀ ĐI QUA MỘT ĐIỂM

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R .	Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm I và bán kính R . Phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
Tâm $I(a; b; c)$ và qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.	>> Bán kính mặt cầu $R = IM = \overrightarrow{IM} = \sqrt{(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2}$. >> Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IM$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

- a) Tâm $I(-1; 2; -3)$, bán kính $R = 3$ b) Tâm $I(0; -4; 1)$ đường kính bằng 4.

Lời giải

- a) Tâm $I(-1; 2; -3)$, bán kính $R = 3$

Phương trình mặt cầu tâm $I(-1; 2; -3)$, bán kính $R = 3$ là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$

- b) Tâm $I(0; -4; 1)$ đường kính bằng 4.

Đường kính của mặt cầu bằng 4 nên bán kính $R = 2$

Phương trình của mặt cầu tâm $I(0; -4; 1)$ là $x^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 15: Lập phương trình mặt cầu (S) với:

- a) Tâm $I(-1; 3; 0)$ và bán kính $R = 3$.

- b) Bán kính $R = \sqrt{10}$ và tâm $I(2; -3; 4)$.

Lời giải

- a) Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(-1; 3; 0) \\ R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9.$$

- b) Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2; -3; 4) \\ R = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 10.$$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình mặt cầu

- a) Với tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5$.

- b) Với tâm $I(0; 0; 3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Lời giải

- a) Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(1; -2; 3) \\ R = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

b) Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(0; 0; 3) \\ R = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5.$$

Câu 17: Lập phương trình mặt (S) với tâm I và đi qua điểm A .

a) Với $I(2; -1; 3)$, $A(3; -4; 4)$

b) Với $A(2; -1; 3)$, $I(3; -4; 4)$

Lời giải

a) Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2; -1; 3) \\ \text{Đi qua } A(3; -4; 4) \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2; -1; 3) \\ R = IA = \sqrt{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 11.$$

a) Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(3; -4; 4) \\ \text{Đi qua } A(2; -1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(3; -4; 4) \\ R = IA = \sqrt{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-4)^2 = 11.$$

Câu 18: Lập phương trình mặt (S) với

a) tâm $I(3; -2; 1)$ và đi qua điểm $C(-2; 3; 1)$.

b) tâm $I(-2; 3; 1)$ và đi qua điểm $C(3; -2; 1)$.

Lời giải

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ có phương trình có dạng:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = R^2.$$

Điểm $C(-2; 3; 1) \in (S)$ điều kiện là:

$$(-2-3)^2 + (3+2)^2 + (1-1)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 50.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 50$.

b) Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 1)$ có phương trình có dạng:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = R^2.$$

Điểm $C(3; -2; 1) \in (S)$ điều kiện là:

$$(3+2)^2 + (-2-3)^2 + (1-1)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 50.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 50$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

- a)** Tâm $I(-1; 2; 1)$ đi qua gốc tọa độ. **b)** Tâm $I(1; 2; 3)$ đi qua điểm $A(1; 1; 2)$.

Lời giải

- a)** Tâm $I(-1; 2; 1)$ đi qua gốc tọa độ.

Bán kính của mặt cầu là $R = IO = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(-1; 2; 1)$ qua O là $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

- b)** Tâm $I(1; 2; 3)$ đi qua điểm $A(1; 1; 2)$.

Bán kính của mặt cầu là $R = IA = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(1; 2; 3)$ qua $A(1; 1; 2)$ là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

DẠNG 3. MẶT CẦU CÓ ĐƯỜNG KÍNH

Phương

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Nhận $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$ làm đường kính	>> Gọi I là tâm mặt cầu (S) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN $\Rightarrow I\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}; \frac{z_M + z_N}{2}\right)$. >> Bán kính mặt cầu $R = \frac{MN}{2} = IM$.

Câu 20: Lập phương trình mặt (S)

- a)** Đường kính AB với $A(1; 3; 2)$, $B(3; 5; 0)$.

- b)** Đường kính MN với $M(0; -3; 4)$, $N(2; 3; 0)$.

Lời giải

- a)** Ta có: $M(x; y; z) \in (S)$

$\overrightarrow{MA} = (1-x; 3-y; 2-z)$, $\overrightarrow{MB} = (3-x; 5-y; -z)$.

Đường kính $AB \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

$\Leftrightarrow (1-x) \cdot (3-x) + (3-y) \cdot (5-y) + (2-z) \cdot (-z) = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 2z + 18 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

- b)** Gọi $A(x; y; z) \in (S)$

$\overrightarrow{MA} = (x; y+3; z-4)$, $\overrightarrow{NA} = (x-2; y-3; z)$.

Đường kính $MN \Leftrightarrow MA \perp NA \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NA} = 0$.

$$\Leftrightarrow x.(x-2) + (y+3).(y-3) + (z-4).z = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 14.$$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Câu 21: Lập phương trình mặt (S):

a) đường kính AB với $A(3;-4;5), B(-5;2;1)$.

b) đường kính MN với $M(3;2;1), N(1;2;3)$.

Lời giải

a) Ta có

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(-1;-1;3) \\ R = \sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 29.$$

b) Ta có

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;2;2) \\ R = \sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8.$$

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB $= \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{6} \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}.$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;-1).$$

Phương trình mặt cầu cần tìm: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 0.$

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho hai vecto $\overrightarrow{AO} = (-1;-2;3)$ và $\overrightarrow{BO} = (-7;-4;-5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AO}(-1;-2;3) \Rightarrow A(1;2;-3); \overrightarrow{BO}(-7;-4;-5) \Rightarrow B(7;4;5).$

Phương trình mặt cầu đường kính AB thì tâm là trung điểm của AB $\Rightarrow I(4;3;1)$

$$\text{Bán kính } R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(7-1)^2 + (4-2)^2 + (5+3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{104}}{2}$$

Phương trình mặt cầu $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 26$

Vậy phương trình mặt cầu (S) $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 26$

DẠNG 4. MẶT CẦU QUA 4 ĐIỂM KHÔNG ĐỒNG PHẪNG

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Đi qua 4 điểm $A; B; C; D$ không đồng phẳng	» Gọi $I(a; b; c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm. » Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $\Leftrightarrow IA = IB = IC = ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow \text{tọa độ } I.$ » Mặt cầu có tâm và bán kính

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2; 2; 2), N(4; 0; 2), P(4; 2; 0)$ và $Q(4; 2; 2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là?

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

Vì $M, N, P, Q \in (S)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4a + 4b + 4c + d = 0 \\ 4^2 + 0^2 + 2^2 + 8a + 4c + d = 0 \\ 4^2 + 2^2 + 0^2 + 8a + 4b + d = 0 \\ 4^2 + 2^2 + 2^2 + 8a + 4b + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 8 \end{cases} \Rightarrow I(3; 1; 1) \text{ là tâm mặt cầu } (S).$$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2), D(2; 2; 2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Vì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên tọa độ các điểm $A, B, C, D \in (S)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 4 + 4a + d = 0 \\ 4 + 4b + d = 0 \\ 4 + 4c + d = 0 \\ 12 + 4a + 4b + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D , biết rằng: $A(-1; 0; 0), B(0; 0; 2), C(0; -3; 0)$ và $D(0; 0; 0)$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì A, B, C, D thuộc (S) nên ta có:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 1 + 2a + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 + x + 3y - 2z = 0$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D , biết rằng: $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases} 18 - 6a - 6b + d = 0 \\ 18 - 6a - 6c + d = 0 \\ 18 - 6b - 6c + d = 0 \\ 27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 6b + d = -18 \\ -6a - 6c + d = -18 \\ -6b - 6c + d = -18 \\ -6a - 6b - 6c + d = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

DẠNG 5. MẶT CẦU CÓ TÂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG/MẶT PHẪNG

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I \in (P)$ và đi qua $A; B; C$. Với $(P): \alpha.x + \beta.y + \gamma.z + \delta = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. ✎ Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in (P) \Rightarrow \alpha.a + \beta.b + \gamma.c + \delta = 0 \quad (1)$. » Mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A; B; C$ $\Leftrightarrow IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 & (2) \\ IA^2 = IC^2 & (3) \end{cases}$ » Từ $(1); (2)$ và $(3) \Rightarrow I$ là thỏa hệ: $\begin{cases} \alpha.a + \beta.b + \gamma.c + \delta = 0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Rightarrow \text{tọa độ } I.$ » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.
Tâm $I \in d$ và đi qua $A; B$. Với $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc d là các trục $Ox; Oy; Oz$. ✎ Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in d \Rightarrow I(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. » Viết $\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB}$ theo t và tính độ dài $\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IB}$ » Mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A; B$ $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} \Rightarrow t = ?$ » Từ $t = ? \Rightarrow$ tọa độ I. » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1; 2; 3), B(2; 0; -2)$, và có tâm nằm trên trục Ox . Viết phương trình mặt cầu (S) ?

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc trục Ox nên tâm có dạng $I(x; 0; 0)$.

Vì mặt cầu đi qua $A(1; 2; 3), B(2; 0; -2)$, nên $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + 4 + 9 = (2-x)^2 + 4 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow IA = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29}.$$

Do đó phương trình mặt cầu là $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu qua 2 điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$ và có tâm I thuộc $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$?

Lời giải

$$\text{Vì mặt cầu có tâm } I \text{ thuộc } \Delta \text{ nên } I(2t; 1+t; -t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (2t; 1+t; -t) \\ \overrightarrow{IB} = (1-2t; t; -2+t) \end{cases}.$$

Vì mặt cầu đi qua hai điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$, nên $IA = IB$

$$\Leftrightarrow (2t)^2 + (1+t)^2 + (-t)^2 = (1-2t)^2 + (t)^2 + (-2+t)^2$$

$$\Leftrightarrow 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow IA = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = 7.$$

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2; 3; 3), B(-1; 1; 2), C(4; 2; 2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz) .

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên tâm có dạng $I(0; b; c)$.

Vì mặt cầu đi qua ba điểm $A(-2; 3; 3), B(-1; 1; 2), C(4; 2; 2)$ nên ta có:

$$IA = IB = IC = R \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + (3-b)^2 + (3-c)^2 = 1 + (1-b)^2 + (2-c)^2 \\ 1 + (1-b)^2 + (2-c)^2 = 16 + (2-b)^2 + (2-c)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40 + 9 - 6c + c^2 = 65 + 4 - 4c + c^2 \\ b = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c = 20 \\ b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -10 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow I(0; 9; -10), R = IA = \sqrt{4 + 36 + 169} = \sqrt{209}.$$

Phương trình mặt cầu là $x^2 + (y-9)^2 + (z+10)^2 = 209$.

DẠNG 6. MẶT CẦU TIẾP XÚC ĐƯỜNG THẲNG/MẶT PHẲNG

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (P). Với $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. ✂ Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	>> Bán kính mặt cầu $R = \begin{cases} d(I;(\alpha)) = \frac{ Aa + Bb + Cc + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & \text{Tiếp xúc } (\alpha) \\ d(I;(Oxy)) = \sqrt{z_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oxy) \\ d(I;(Oxz)) = \sqrt{y_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oxz) \\ d(I;(Oyz)) = \sqrt{x_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oyz) \end{cases}$ >> Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;(\alpha))$.
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với Δ. Với $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc Δ là các trục $Ox; Oy; Oz$. ✂ Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	>> Bán kính mặt cầu $R = \begin{cases} d(I;\Delta) = \frac{ \vec{u}; \overrightarrow{MI} }{ \vec{u} } & \text{Tiếp xúc } \Delta \\ d(I;Ox) = \sqrt{y_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc } Ox \\ d(I;Oy) = \sqrt{x_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc } Oy \\ d(I;Oz) = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} & \text{Tiếp xúc } Oz \end{cases}$ >> Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;\Delta)$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) .

Lời giải

Do mặt cầu (S) tiếp xúc $(Oxy) \Rightarrow R = d(I;(Oxy)) = \sqrt{z_I^2} = \sqrt{(1)^2} = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc trục Oy .

Lời giải

Gọi M là hình chiếu của I trên Oy nên tọa độ điểm $M(0;1;0)$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM = \sqrt{13}$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I thuộc đường thẳng d sao cho mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Oz và có bán kính bằng 2.

Lời giải

Ta có: đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$ nên $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+2t \\ z=-2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Vì điểm $I \in d$ nên gọi tọa độ điểm $I(1+t; -2+2t; -2t)$.

Gọi M là hình chiếu của I trên Oz nên tọa độ điểm $M(0; 0; -2t)$ và $\overrightarrow{MI} = (1+t; -2+2t; 0)$

$$|\overrightarrow{MI}| = \sqrt{5t^2 - 6t + 5}.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S) , ta có: $R = d(M; Oz) = \sqrt{5t^2 - 6t + 5}$

$$R = 2 \Rightarrow \sqrt{5t^2 - 6t + 5} = 2 \Rightarrow 5t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; -2; 0) \\ M(\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}; \frac{2}{5}) \end{cases}$$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4 \text{ và } \left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{5}\right)^2 = 4$$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu đi qua điểm $B(1; 3; 0)$ và tiếp xúc với (Oyz) tại $M(0; 3; -2)$.

Lời giải

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu (S) .

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) tại $M(0; 3; -2)$

Nên hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0; b; c)$ trùng với M .

Do đó $b=3, c=-2$ và $I(a; 3; -2)$.

$$IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + 4 = a^2 \Leftrightarrow -2a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; 3; -2\right).$$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; -4), B(2; 3; 4), C(3; 5; 7)$. Tìm phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với BC .

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (1; 5; 8), \overrightarrow{BC} = (1; 2; 3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}] = (-1; 5; -3)$$

$$\text{Mặt cầu có tâm là } A \text{ và tiếp xúc với } BC \Rightarrow R = d[A; (BC)] = \frac{|[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}]|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Vậy phương trình mặt cầu tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{5}{2}$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho $B(1;1;9)$, $C(1;4;0)$. Mặt cầu (S) đi qua B và tiếp xúc với (Oxy) tại C có phương trình là?

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S) .

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại $C(1;4;0)$

Nên hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oxy) là $H(a;b;0)$ trùng với C .

Do đó $a=1, b=4$ và $I(1;4;c)$.

$$IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow 3^2 + (c-9)^2 = c^2 \Leftrightarrow -18c + 90 = 0 \Leftrightarrow c = 5.$$

Vậy phương trình mặt cầu tìm là: $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ .

Lời giải

Ta có $\vec{u}_\Delta = (2;1;-1)$, $M(-1;2;-3) \in \Delta$. Ta có $\vec{IM} = (-2;4;-6)$, $[\vec{IM}; \vec{u}_\Delta] = (2;-14;-10)$

$$\text{Ta có } R = d(M, \Delta) = \frac{|\vec{IM} \cdot \vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_\Delta|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-14)^2 + (-10)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 5\sqrt{2}.$$

Vậy $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, hãy lập phương trình mặt cầu (S) có tâm là $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d , ta có $H(-2+2t; t; 1+t)$.

Khi đó $\vec{IH} = (-3+2t; -2+t; 2+t)$, vector chỉ phương của d là $\vec{u}_d = (2;1;1)$.

Vì $IH \perp \vec{u}_d$ nên $\vec{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(-3+2t) + (-2+t) + (2+t) = 0 \Leftrightarrow -6+6t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Do đó $H(0;1;2)$.

Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với d tại H có bán kính $R = IH = \sqrt{11}$.

Vậy $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 11$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, hãy lập phương trình mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-2;3)$ và trục Ox cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi M là hình chiếu của I trên $Ox \Rightarrow M(1;0;0)$.

Ta có: $IM = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$, $AM = \frac{AB}{2} = \sqrt{3}$.

Xét $\triangle IMA$ vuông tại M : $IA = \sqrt{IM^2 + AM^2} = \sqrt{13+3} = 4 \Rightarrow R = 4$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, hãy lập phương trình mặt cầu (S) có tâm là $I(1;0;3)$ và $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I .

Lời giải

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;2)$ và điểm $P(1;-1;1) \in d$.

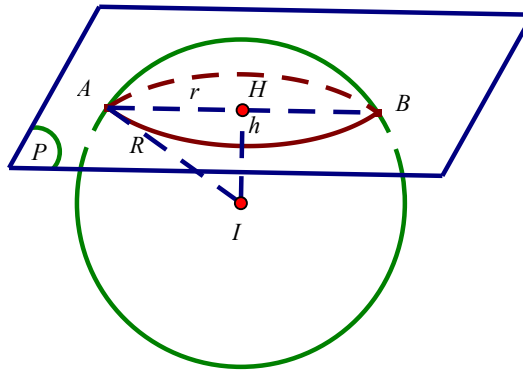
Ta có: $\vec{IP} = (0;-1;-2) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{IP}] = (0;-4;2)$. Suy ra: $d(I; d) = \frac{||[\vec{u}, \vec{IP}]||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

Vì $\triangle IAB$ vuông cân tại I nên $R = IA = \sqrt{2} \cdot d(I; d) = \frac{\sqrt{40}}{3}$.

Vậy $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{40}{9}$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

Lời giải



Gọi h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) ta có:

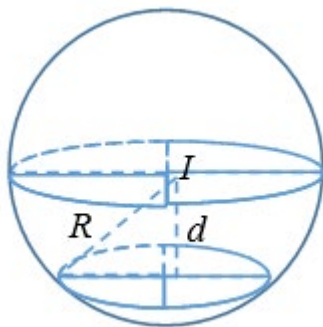
$$h = d(I; (P)) = \frac{|-1-4-2-2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3.$$

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Viết phương trình mặt cầu (S) .

Lời giải



Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$$d = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3.$$

Đường tròn giao tuyến có đường kính bằng 8 nên bán kính đường tròn là $r = 4$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{d^2 + r^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Câu 43: Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $A; B; C$ và tâm I của (S) nằm trên mặt phẳng (α)

a) Biết $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0); C(2; 0; 1)$ và mặt phẳng (α) trùng với mặt phẳng (Oxy) .

b) Biết $A(2; 0; 1), B(1; 0; 0); C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x + y + z - 2 = 0$.

Lời giải

a) Gọi tâm $I(a; b; c)$ và (S) có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0).$$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $A; B; C$ và tâm I của (S) nằm trên mặt phẳng (α) nên

$$\begin{cases} 1^2 - 2a + d = 0 \\ 1^2 - 2b + d = 0 \\ 2^2 + 1^2 - 4a - 2c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + d = -1 \\ -4a + d = -5 \\ -2b + d = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = 5 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 5 = 0$

b) Gọi tâm $I(a; b; c)$ và (S) có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0).$$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $A; B; C$ và tâm I của (S) nằm trên mặt phẳng (α) nên

$$\begin{cases} 2^2 + 1^2 - 4a - 2c + d = 0 \\ 1^2 - 2a + d = 0 \\ 1^2 + 1^2 + 1^2 - 2a - 2b - 2c + d = 0 \\ a + b + c - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a & -2c + d = -5 \\ -2a & + d = -1 \\ -2a - 2b - 2c + d = -3 \\ a & + b + c = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2a - 1 \\ -4a - 2c + 2a - 1 = -5 \\ -2a - 2b - 2c + 2a - 1 = -3 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a & -2c = -4 \\ & -2b - 2c = -2 \\ a & + b + c = 2 \\ d = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

Câu 44: Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm $A; B$ và tâm I của (S) nằm trên đường thẳng d

a) Biết điểm $A(0;1;3), B(2;2;1)$ và đường thẳng d trùng với trục Ox

b) Biết điểm $A(0;1;3), B(2;2;1)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

Vì $I \in d$ nên $I(1+2t; 2-t; 3-2t)$.

$$IA^2 = (1+2t)^2 + (2-t-1)^2 + (3-2t-3)^2 = 9t^2 + 2t + 2.$$

$$IB^2 = (1+2t-2)^2 + (2-t-2)^2 + (3-2t-1)^2 = 9t^2 - 4t + 5.$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB \Rightarrow IA^2 = IB^2 \Rightarrow 9t^2 + 2t + 2 = 9t^2 - 4t + 5 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow I\left(2; \frac{3}{2}; 2\right); R^2 = IA^2 = \frac{21}{4}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{21}{4}$.

Câu 45: Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm $A; B$ và tâm I của (S) nằm trên đường thẳng d

a) Biết $A(1;3;1), B(3;2;2)$ và đường thẳng d trùng với trục Oz .

b) Biết $A(-2;4;1), B(2;0;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

Lời giải

a) Vì $I \in Oz$ nên $I(0;0;z)$.

Vì mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB \Rightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Rightarrow 1^2 + 3^2 + (z-1)^2 = 3^2 + 2^2 + (z-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2z = 6$$

$$\Leftrightarrow z = 3.$$

Suy ra $I(0;0;3); R^2 = IA^2 = 14$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$.

b) Vì $I \in d$ nên $I(1+2t; -2-t; 3-2t)$.

$$IA^2 = (1+2t+2)^2 + (-2-t-4)^2 + (3-2t-1)^2 = (3+2t)^2 + (-t-6)^2 + (2-2t)^2 = 9t^2 + 16t + 49.$$

$$IB^2 = (1+2t-2)^2 + (-2-t)^2 + (3-2t-3)^2 = (2t-1)^2 + (-t-2)^2 + (-2t)^2 = 9t^2 + 5.$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB \Rightarrow IA^2 = IB^2 \Rightarrow 9t^2 + 16t + 49 = 9t^2 + 5 \Leftrightarrow t = \frac{-11}{4}$.

$$\Rightarrow I\left(\frac{-9}{2}; \frac{3}{4}; \frac{17}{2}\right); R^2 = IA^2 = \frac{1169}{16}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có phương trình là $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{1169}{16}$.

Câu 46: Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm $A; B$ và tâm I của (S) nằm trên đường thẳng d

a) Biết điểm $A(1; -2; 1), B(-1; 2; 1)$ và đường thẳng d trùng với trục Ox

b) Biết điểm $A(0; 1; 3), B(2; 2; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.

Lời giải

Vì $I \in Ox$ nên $I(x; 0; 0)$.

Vì mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB \Rightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Rightarrow (1-x)^2 + (-2)^2 + 1^2 = (-1-x)^2 + 2^2 + 1^2$$

$$\Leftrightarrow 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Suy ra $I(0;0;0); R^2 = IA^2 = 6$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

Vì $I \in d$ nên $I(1+2t; 2-t; 3-2t)$.

$$IA^2 = (1+2t)^2 + (2-t-1)^2 + (3-2t-3)^2 = 9t^2 + 2t + 2.$$

$$IB^2 = (1+2t-2)^2 + (2-t-2)^2 + (3-2t-1)^2 = 9t^2 - 4t + 5.$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB \Rightarrow IA^2 = IB^2 \Rightarrow 9t^2 + 2t + 2 = 9t^2 - 4t + 5 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$

$$\Rightarrow I\left(2; \frac{3}{2}; 2\right); R^2 = IA^2 = \frac{21}{4}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{21}{4}.$

Câu 47: Cho đường thẳng $\Delta \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$ và hai mặt phẳng $(P) \ x+y+z-9=0; (Q) \ x+y+z-3=0$ Lập

phương trình mặt cầu (S) tâm I nằm trên đường thẳng Δ và mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) ?

Lời giải

Giao điểm của đường thẳng Δ và (P) là $A(2;3;4).$

Giao điểm của đường thẳng Δ và (Q) là $B(0;1;2).$

Vì $(P) \parallel (Q)$ nên tâm I là trung điểm của AB . Tọa độ của $I(1;2;3).$

Bán kính mặt cầu (S) là $R = d_{(I,(P))} = \sqrt{3}.$

Phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3.$

Câu 48: Cho đường thẳng $\Delta \begin{cases} x=2t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases}$ và hai mặt phẳng $(P) \ x=0; (Q) \ y=0.$ Lập phương trình mặt

cầu (S) tâm I nằm trên đường thẳng Δ và mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) ?

Lời giải

Khoảng cách tâm I đến hai mặt phẳng (P) và (Q) là bằng nhau nên ta có $|x|=|y| \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=-y \end{cases}$

Tâm I nằm trên đường thẳng Δ nên ta có

$$\text{TH1: Tọa độ tâm } I \text{ là nghiệm hệ } \begin{cases} x=2t \\ y=2-t \\ z=1+t \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{4}{3} \\ z=\frac{5}{3} \\ t=\frac{2}{3} \end{cases} \text{ nên } I\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

Bán kính mặt cầu (S) là $R = d_{(I, (P))} = \frac{4}{3}$ Phương trình mặt cầu (S) là:

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

TH2: Tọa độ tâm I là nghiệm hệ
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \\ z = -1 \\ t = -2 \end{cases} \text{ nên } I(-4; 4; -1).$$

Bán kính mặt cầu (S) là $R = d_{(I, (P))} = 4$ Phương trình mặt cầu (S) là:

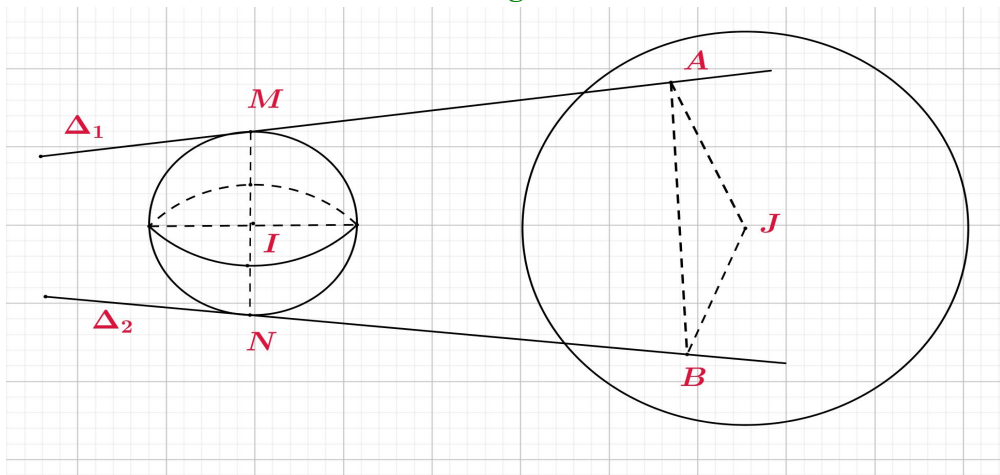
$$(x + 4)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 16.$$

Vậy có 2 mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ và

$$(x + 4)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 16$$

Câu 49: Trong mp $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải



Ta có

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 4 + 3t_1 \\ y = 1 - t_1 \\ z = -5 - 2t_1 \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = 2 + 3t_2 \\ y = -3 + 3t_2 \\ z = t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

Gọi $\vec{u}_1(3; -1; -2), \vec{u}_2(1; 3; 1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng.

$$\text{Gọi } M \in \Delta_1 \Rightarrow M(4 + 3t_1; 1 - t_1; -5 - 2t_1)$$

$$N \in \Delta_2 \Rightarrow N(2 + t_2; 3t_2 - 3; t_2)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = (t_2 - 3t_1 - 2; 3t_2 + t_1 - 4; t_2 + 2t_1 + 5)$$

$$\text{MN là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t_1 + t_2 = -6 \\ 2t_1 + 11t_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MN} = (2; -2; 4) \Rightarrow MN = 2\sqrt{6}$$

Giả sử (S) là mặt cầu tâm J đường kính d tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tại A, B.

Khi đó $JA + JB \geq AB$. Hay $d \geq AB \geq MN \Rightarrow d \geq MN$.

Vậy đường kính d nhỏ nhất khi $d = MN$. Suy ra mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất $r = \sqrt{6}$.

Với $t_1 = -1, M(1; 2; -3), t_2 = 1, N(3; 0; 1)$

Tâm I là trung điểm của MN. Khi đó, tâm $I(2; 1; -1)$

Phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 6$

Câu 50: Trong mp $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có bán kính nhỏ nhất. Xác định bán kính của mặt cầu (S)

Lời giải

Ta có

$$\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + 2t_1 \\ y = -1 + t_1 \\ z = -1 + 2t_1 \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + 2t_2 \\ y = 1 + 2t_2 \\ z = 1 + t_2 \end{cases}, (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

Gọi $\vec{u}_1(2; 1; 2), \vec{u}_2(2; 2; 1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng.

Gọi $M \in \Delta_1 \Rightarrow M(-1 + 2t_1; -1 + t_1; -1 + 2t_1)$

$N \in \Delta_2 \Rightarrow N(1 + 2t_2; 1 + 2t_2; 1 + t_2)$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (2t_2 - 2t_1 + 2; 2t_2 - t_1 + 2; t_2 - 2t_1 + 2)$

MN là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9t_1 + 8t_2 = -10 \\ -8t_1 + 9t_2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{10}{17} \\ t_2 = -\frac{10}{17} \end{cases}$

Suy ra $M\left(\frac{3}{17}; \frac{-7}{17}; \frac{3}{17}\right), N\left(\frac{-3}{17}; \frac{-3}{17}; \frac{7}{17}\right), \overrightarrow{MN} = \left(\frac{-6}{17}; \frac{4}{17}; \frac{4}{17}\right)$

Mặt cầu có tâm $I\left(0; \frac{-5}{17}; \frac{5}{17}\right)$, bán kính $R = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{17}}{17}$

DẠNG 7. BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6; -2; 4)$.



- a) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.
- b) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5;2;-2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.
- c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6;0;3)$.

Lời giải

- a) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

Trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6;-2;4)$.

Do đó gọi mặt cầu (S) có tâm $I(6;-2;4)$ và bán kính $R = 3$ nên có phương trình:

$$(S): (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 9.$$

- b) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5;2;-2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

Ta có: $\overrightarrow{IM} = (-1; 4; -6) \Rightarrow IM = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{53} \text{ km} > R = 3 \text{ km}.$

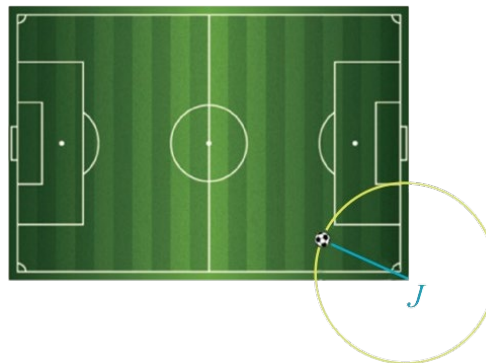
$\Rightarrow$ Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó không thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

- c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6;0;3)$.

Ta có: $\overrightarrow{IN} = (0; 2; -1) \Rightarrow IN = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \text{ km} < R = 3 \text{ km}.$

$\Rightarrow$ Điểm N nằm trong mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 52: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S): (x-32)^2 + (y-50)^2 + (z-8)^2 = 100$ (đơn vị độ dài tính theo mét).



- a) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
- b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.
- c) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J .

Lời giải

a) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

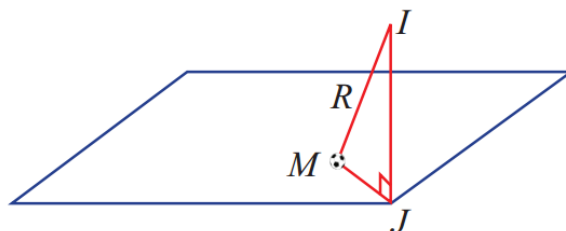
Mặt cầu (S) có phương trình: $(S): (x-32)^2 + (y-50)^2 + (z-8)^2 = 100$ nên có tâm $I(32;50;8)$ và bán kính $R = \sqrt{100} = 10$.

b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

Trong không gian $Oxyz$, mặt sân có phương trình $z = 0$ trùng với mặt phẳng tọa độ (Oxy) , suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(32;50;8)$ xuống mặt sân có tọa độ $J(32;50;0)$.

c) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J .

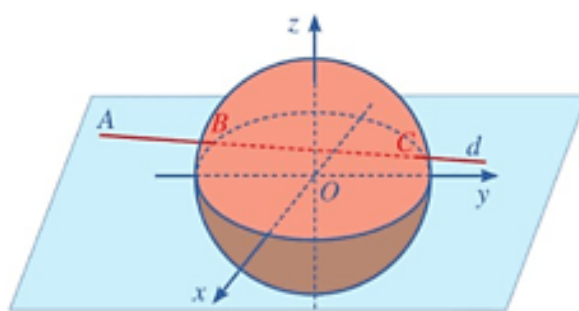
Trong tam giác vuông IJM , ta có: $\vec{JI} = (0;0;8) \Rightarrow IJ = 8, IM = R = 10$.



Suy ra: $JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là $6m$.

Câu 53: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với $1km$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát $417km$ sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Hãy xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.



Hình 44

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(-688;-185;8)$ và nhận $\vec{u} = (91;75;0)$ làm

$$\text{vectơ chỉ phương là } \begin{cases} x = -688 + 91t \\ y = -185 + 75t \\ z = 8 \end{cases}$$

Gọi B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa. Vì $B \in d \Rightarrow B(-688 + 91t; -185 + 75t; 8)$.

Vì B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa nên

$$OB = 417 \Leftrightarrow \sqrt{(-688 + 91t)^2 + (-185 + 75t)^2 + 8^2} = 417$$

$$\Leftrightarrow 13906t^2 - 152966t + 333744 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow B(-415; 40; 8) \Rightarrow AB \approx 353,77 \text{ km}$$

$$\text{Với } t = 8 \Rightarrow B(-88; 415; 8) \Rightarrow AB \approx 848,53 \text{ km}$$

Do $353,77 < 848,53$ vị trí máy bay xuất hiện sớm nhất là $B(-415; 40; 8)$.

Câu 54: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21; 35; 50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km . Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21; 35; 50)$ đến vị trí $D(5121; 658; 0)$ hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là: $(x - 21)^2 + (y - 35)^2 + (z - 50)^2 = 4000^2$.

Ta có $|\overline{ID}| = \sqrt{26400629} > 4000$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu.

Đường thẳng ID đi qua điểm $I(21; 35; 50)$ và nhận $\overline{ID} = (5100; 623; -50)$ làm vectơ chỉ phương

$$\text{nên phương trình tham số của } ID \text{ là } \begin{cases} x = 21 + 5100t \\ y = 35 + 623t \\ z = 50 - 50t \end{cases}$$

Giả sử H là điểm cuối cùng trên ID sao cho người đi đường có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng. Khi đó $IH = R$.

$$\text{Do } H \in ID \Rightarrow H(21 + 5100t; 35 + 623t; 50 - 50t) \Rightarrow \overline{IH} = (5100t; 623t; -50t).$$

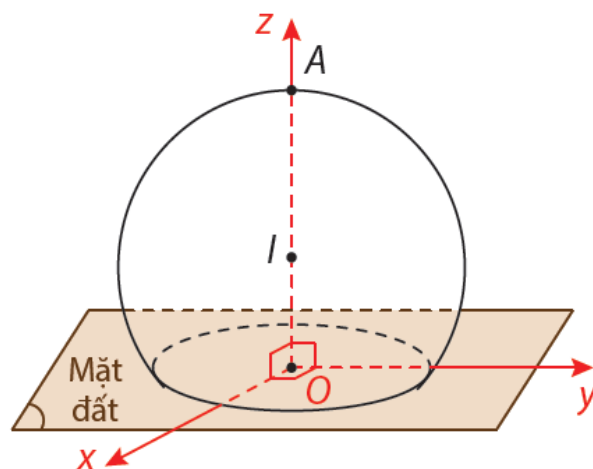
$$\text{Do } IH = R \Rightarrow \sqrt{(5100t)^2 + (623t)^2 + (-50t)^2} = 4000 \Leftrightarrow \sqrt{26400629t^2} = 4000 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 0,78 \\ t \approx -0,78 \end{cases}$$

Với $t \approx 0,78 \Rightarrow H(3999; 520,94; 11)$. Nhận thấy $\overline{IH}$ cùng hướng với $\overline{ID}$ nên H thuộc đoạn thẳng ID .

Với $t \approx -0,78 \Rightarrow H(-3957; -450,94; 89)$. Nhận thấy $\overline{IH}$ không cùng hướng với $\overline{ID}$ nên H không thuộc đoạn thẳng ID .

Vậy vị trí cần tìm là $H(3999; 520,94; 11)$

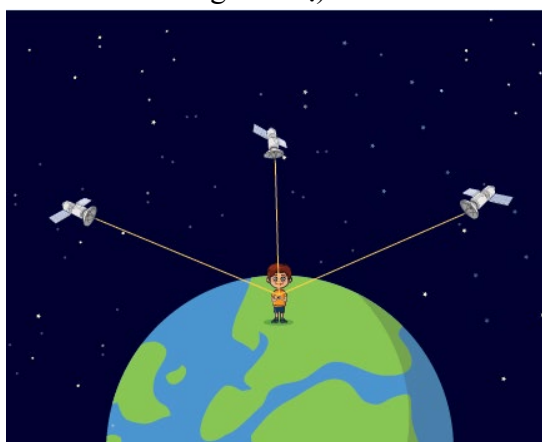
Câu 55: Ericsson Globe (Thụy Điển) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020), với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16 000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I , đường kính 110 m và $OA = 85$ m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.



Lời giải

- +) Theo giả thiết đường kính 110 m nên bán kính $R = 55$ m.
- +) Ta có $OI = OA - IA = 85 - 55 = 30$ suy ra $I(0; 0; 30)$
- +) Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + y^2 + (z - 30)^2 = 55^2$

Câu 56: Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4 \cdot 10^6$ m. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An $3 \cdot 10^6$ m, vệ tinh thứ hai đang cách An $4 \cdot 10^6$ m và vệ tinh thứ ba đang cách An $5 \cdot 10^6$ m. Biết rằng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước với O là tâm Trái Đất (1 đơn vị $= 10^6$ m), tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì tọa độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4; 4; 6)$, $I_2(8; 4; 3)$ và $I_3(4; 9; 3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn An (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

- +) Gọi vị trí bạn An là $A(x; y; z)$ thì An chính là giao điểm của bốn mặt cầu: Trái Đất và ba mặt cầu tâm lần lượt I_1, I_2, I_3 có bán kính lần lượt là khoảng cách từ các vệ tinh đến An
- +) Ta có phương trình mặt cầu của trái đất là $x^2 + y^2 + z^2 = 6,4^2 \approx 41$.
- +) Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ nhất là $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 3^2 = 9$.

+)Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ hai là $(x-8)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4^2 = 16$.

+)Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ ba là $(x-4)^2 + (y-9)^2 + (z-3)^2 = 5^2 = 25$.

$$\text{+) Ta có hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6,4^2 \approx 41 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 9 \\ (x-8)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 16 \\ (x-4)^2 + (y-9)^2 + (z-3)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6,4^2 \approx 41 \\ 8x + 8y + 12z = 100 \\ 16x + 8y + 6z = 114 \\ 8x + 18y + 6z = 122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy toạ độ bạn An là $A(4;4;3)$ với (1 đơn vị $= 10^6 m$).



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Cho phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 16$, bán kính R của mặt cầu là
A. $R = 4$. **B.** $R = 16$. **C.** $R = 0$. **D.** $R = 2$.
- Câu 2:** (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
A. $(-4; 2; -6)$. **B.** $(4; -2; 6)$. **C.** $(2; -1; 3)$. **D.** $(-2; 1; -3)$.
- Câu 3:** (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là
A. $(1; -3; 0)$. **B.** $(-1; 3; 0)$. **C.** $(1; 3; 0)$. **D.** $(-1; -3; 0)$.
- Câu 4:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
A. $(-1; 0; 2)$. **B.** $(1; 0; 2)$. **C.** $(1; 0; -2)$. **D.** $(-1; 0; -2)$.
- Câu 5:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:
A. 32 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 16
- Câu 6:** (TK 2020-2021) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng
A. 9. **B.** 3. **C.** 81. **D.** 6.
- Câu 7:** (Mã 101 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng
A. 3. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 9.
- Câu 8:** (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng
A. $\sqrt{6}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 3.

- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
A. $I(3; -1; 2), R = 2$. **B.** $I(-3; 1; -2), R = 2$. **C.** $I(-3; 1; -2), R = 4$. **D.** $I(3; -1; 2), R = 4$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 6y - 2 = 0$ là phương trình của mặt cầu có tâm I . Xác định tọa độ tâm I .
A. $I(2; -1; 3)$. **B.** $I(2; 3; -1)$. **C.** $I(2; -3; 1)$. **D.** $I(2; 1; -3)$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 2 = 0$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
A. $I(1; 2; -1), R = 2\sqrt{2}$. **B.** $I(-1; -2; 1), R = 2\sqrt{2}$.
C. $I(2; 4; -2), R = \sqrt{2}$. **D.** $I(2; 4; 2), R = 8$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là
A. $I(0; -4; -1), R = 25$. **B.** $I(0; -4; -1), R = 5$.
C. $I(0; 4; 1), R = 25$. **D.** $I(0; 4; 1), R = 5$.
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là
A. $I(-3; 2; -4), R = 25$. **B.** $I(3; -2; 4), R = 5$. **C.** $I(3; -2; 4), R = 25$. **D.** $I(-3; 2; -4), R = 5$.
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z - 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là
A. $I(2; -4; 1), R = 5$. **B.** $I(-2; 4; -1), R = 25$.
C. $I(2; -4; 1), R = \sqrt{21}$. **D.** $I(-2; 4; -1), R = 21$.
- Câu 15:** **Câu 19 (101-2023)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 2$. Phương trình của (S) là
A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$. **D.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.
- Câu 16:** **Câu 23 (102-2023)** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$ và có bán kính $R = \sqrt{2}$. Phương trình của (S) là
A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \sqrt{2}$. **B.** $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.
C. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$. **D.** $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{2}$.

Câu 17: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là

B. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

D. $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 18: **Câu 30 (101-2023)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;2;1)$ và $B(1;0;1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là

B. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20.$

D. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 20$.

Câu 19: **Câu 34 (102-2023)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;0;5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 12.$

D. $x^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 12$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$.
Phương trình của (S) là

B. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 5$.

D. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 5$.

Câu 22: Mặt cầu (C) có tâm $I(1; 0; -2)$ và đi qua điểm $B(4; -4; -2)$ có phương trình là

B. (C): $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$.

D. (C): $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là:

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13.$

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Câu 24: (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$ là

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2.$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

- Câu 25:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -3; 2)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P)
- A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{16}{9}$. B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = \frac{16}{9}$.
 C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = \frac{4}{3}$. D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{4}{3}$.
- Câu 26:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Điểm có tọa độ nào sau đây nằm trên mặt cầu?
- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(1; -2; -1)$. C. $(1; -2; 1)$. D. $(1; -2; 3)$.
- Câu 27:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S) ?
- A. $M(1; 1; 1)$ B. $N(0; 1; 0)$ C. $P(1; 0; 1)$ D. $Q(1; 1; 0)$
- Câu 28:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ và một điểm $M(4; 2; -2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Điểm M là tâm của mặt cầu (S) . B. Điểm M nằm trên mặt cầu (S) .
 C. Điểm M nằm trong mặt cầu (S) . D. Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) .
- Câu 29:** Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?
- A. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 3$. B. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = -3$.
 C. $(x-1) + (y-3) + (z+2) = 9$. D. $(x-1) + (y-3) + (z+2) = -9$.
- Câu 30:** Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu?
- A. $a + b + c - d > 0$. B. $a^2 + b^2 + c^2 + d > 0$.
 C. $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. D. $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.
- Câu 31:** Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?
- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 11 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z - 21 = 0$. D. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y - 8z - 10 = 0$.
- Câu 32:** Trong không gian $Oxyz$, đáp án nào dưới đây là phương trình mặt cầu?
- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. B. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 7 = 0$. D. $x^2 - y^2 - z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.
- Câu 33:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có tâm $I(1; -2; -3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là
- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;1;m-1)$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) biết mặt cầu có diện tích bằng 16π .

A.
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 16 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 16 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 16 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4 \end{cases}$$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$?

A. $m = 5$.

B. $m = \sqrt{3}$.

C. $m = 3$.

D. $m = \sqrt{5}$

Câu 38: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 39: Với giá trị nào của m thì mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 5 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(2-m)y - 4mz + 5m^2 + 1 = 0$?

A. $m = -3$.

B. $m = 1$ hoặc $m = -3$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R = 2$?

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$

B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$

D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$

Câu 41: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2;-3;-4)$ và tiếp xúc với trục Ox .

A. $(x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 = 5$.

B. $(x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 = 25$.

C. $(x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 5$.

D. $(x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 25$.

Câu 42: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(-3;1;4)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$.

A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = \sqrt{30}$.

B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 30$.

C. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = \sqrt{30}$.

D. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 30$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) .

- A.** $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3$. **B.** $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$.
C. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. **D.** $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π . Viết phương trình của mặt cầu (S) .

- A.** $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. **B.** $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.
C. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. **D.** $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

Câu 45: Cho mặt cầu (S) đi qua $A(0;8;0), B(4;6;2), C(0;12;4)$ và có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) . Tính $a+b+c=?$

- A.** 5. **B.** 7. **C.** 0. **D.** 12.

Câu 46: Cho 3 điểm $A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$. Mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) có bán kính bằng?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 47: Cho các điểm $A(1;3;1); B(3;2;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oz

- A.** $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$. **B.** $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 9$.
C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$. **D.** $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 14$.

Câu 48: Cho các điểm $A(0;1;3)$ và $B(2;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d bằng?

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 49: Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

- A.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. **C.** $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Câu 50: Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian $Oxyz$ trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

- A.** $M(1;0;2)$. **B.** $N(2;-1;1)$. **C.** $P(1;1;\sqrt{2})$. **D.** $Q(3;0;0)$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6; -1; 4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km . Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

- A. $A(-4; 0; 2)$ B. $B(-5; -2; 5)$. C. $C(-6; 2; 2)$ D. $D(0; -1; 4)$

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6; -1; 4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km . Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

- A. $A(-5; 0; 3)$ B. $B(-5; -2; 5)$. C. $C(-6; 2; 2)$ D. $D(-7; -2; 3)$

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(3; 0; 0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 5. Hỏi vị trí của điểm nào sau đây không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

- A. $M(5; 0; 0)$. B. $N(3; 2; -1)$. C. $P(-1; 3; 1)$. D. $Q(0; -2; 0)$.

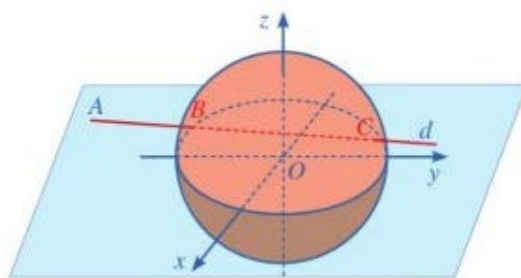
Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), người ta đặt một trạm thu phát sóng điện thoại được đặt ở vị trí $A(-1; 2; -3)$. Biết rằng trạm thu phát sóng được thiết kế với bán kính là 4 km , viết phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian?

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$ D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

Câu 55: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0; 0; 0)$

và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km . Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí A , chuyển động theo đường

$$\text{thẳng } d \text{ có phương trình } \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$



và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Khoảng cách giữa vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình radar và vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình radar gần nhất với đáp án nào sau đây?

- A. 751. B. 750. C. 749. D. 748.

Câu 56: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(-1; 2; 3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 5000 m . Phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng là:

- A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.000.000$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.000.000$.

Câu 57: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng radar của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(2; -1; -3)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$. Điểm nào sau đây nằm trong vùng phủ sóng của radar?

- A.** $N(500; 200; 100)$. **B.** $P(-300; 250; 400)$.
C. $M(200; -100; -230)$. **D.** $Q(120; -200; -500)$.

Câu 58: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là km), bốn chiếc máy bay ở bốn hướng khác nhau khi vừa bay vào vùng phủ sóng của một chiếc radar thì trên radar ngay lập tức báo tín hiệu phát hiện mục tiêu. Tại thời điểm radar phát hiện mục tiêu thì 4 chiếc máy bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $A(30; 25; 33), B(14; 1; 49), C(40; -29; 1), D(0; 31; 41)$. Phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng của radar trong không gian là

- A.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3598 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 2498 = 0$.
C. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 60^2$. **D.** $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 50^2$.

Câu 59: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng Oxy . Một quả cầu bằng nhựa nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $I(12; 20; 50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả cầu nhựa (S) có phương trình là

- A.** $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 12^2$. **B.** $(x+12)^2 + (y+20)^2 + (z+50)^2 = 12^2$.
C. $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 20^2$. **D.** $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 50^2$.

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1; 5; 5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 5 km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1; 5; 5)$ đến vị trí $A(7; 14; 1)$. Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

- A.** $M(3; 8; 7)$. **B.** $N(0; 4; 8)$. **C.** $P(7; 3; 0)$. **D.** $Q(7; 1; 3)$.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -2; 1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2; -5; 0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 16$ tại $M\left(\frac{10}{9}; -\frac{25}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

- A.** $\frac{3}{5}$ km. **B.** $\frac{4}{5}$ km. **C.** $\frac{1}{5}$ km. **D.** $\frac{2}{5}$ km.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 16$, bán kính R của mặt cầu là

A. $R = 4$.

B. $R = 16$.

C. $R = 0$.

D. $R = 2$.

Lời giải

Phương trình tổng quát của mặt cầu trong không gian $Oxyz$ là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4.$$

Câu 2: (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-4; 2; -6)$.

B. $(4; -2; 6)$.

C. $(2; -1; 3)$.

D. $(-2; 1; -3)$.

Lời giải

Tâm mặt cầu (S) có tọa độ là: $(2; -1; 3)$.

Câu 3: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1; -3; 0)$.

B. $(-1; 3; 0)$.

C. $(1; 3; 0)$.

D. $(-1; -3; 0)$.

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$ có tâm là $I(-1; 3; 0)$.

Câu 4: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1; 0; 2)$.

B. $(1; 0; 2)$.

C. $(1; 0; -2)$.

D. $(-1; 0; -2)$.

Lời giải

Từ phương trình ta có ngay tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $(1; 0; -2)$.

Câu 5: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:

A. 32

B. 8

C. 4

D. 16

Lời giải

Từ phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16 \Rightarrow$ Bán kính $R = \sqrt{16} = 4$

Câu 6: (TK 2020-2021) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

A. 9. B. 3. C. 81. D. 6.

Lời giải

Phương trình mặt cầu là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên $R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.

Câu 7: (Mã 101 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 3. B. $\sqrt{15}$. C. $\sqrt{7}$. D. 9.

Lời giải

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x + 2 \cdot 0 \cdot y - 2 \cdot 1 \cdot z - 7 = 0.$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 0, c = 1, d = -7.$$

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu $I(-1;0;1)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 7} = 3$.

Câu 8: (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

A. $\sqrt{6}$. B. 12. C. $2\sqrt{6}$. D. 3.

Lời giải

Từ phương trình mặt cầu ta suy ra bán kính của mặt cầu (S): $R = \sqrt{6}$

Vậy đường kính của (S) bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(3; -1; 2), R = 2$. **B.** $I(-3; 1; -2), R = 2$. **C.** $I(-3; 1; -2), R = 4$. **D.** $I(3; -1; 2), R = 4$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-1;2)$ và bán kính $R=2$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 6y - 2 = 0$ là phương trình của mặt cầu có tâm I . Xác định tọa độ tâm I

A. $I(2; -1; 3)$. **B.** $I(2; 3; -1)$. **C.** $I(2; -3; 1)$. **D.** $I(2; 1; -3)$.

Lời giải

Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = -4 \\ -2b = -6 \\ -2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Vậy tâm của mặt cầu là $I(2; 3; -1)$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 2 = 0$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

- A.** $I(1; 2; -1), R = 2\sqrt{2}$. **B.** $I(-1; -2; 1), R = 2\sqrt{2}$.
C. $I(2; 4; -2), R = \sqrt{2}$. **D.** $I(2; 4; 2), R = 8$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 - (-2)} = 2\sqrt{2}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A.** $I(0; -4; -1), R = 25$. **B.** $I(0; -4; -1), R = 5$.
C. $I(0; 4; 1), R = 25$. **D.** $I(0; 4; 1), R = 5$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 4; 1)$ và bán kính $R = 5$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A.** $I(-3; 2; -4), R = 25$. **B.** $I(3; -2; 4), R = 5$. **C.** $I(3; -2; 4), R = 25$. **D.** $I(-3; 2; -4), R = 5$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2 - 4} = 5$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z - 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A.** $I(2; -4; 1), R = 5$. **B.** $I(-2; 4; -1), R = 25$.
C. $I(2; -4; 1), R = \sqrt{21}$. **D.** $I(-2; 4; -1), R = 21$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2 - (-4)} = 5$.

Câu 15: **Câu 19 (101-2023)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 2$. Phương trình của (S) là

- A.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$. **B.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 2$.
C. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$. **D.** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 2$ là $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$.

Câu 16: **Câu 23 (102-2023)** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và có bán kính $R = \sqrt{2}$. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \sqrt{2}$.

B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{2}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} I(1;0;-1) \\ R = \sqrt{2} \end{cases}$.

Do đó mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$.

Câu 17: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là

A. $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

B. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$.

D. $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2 có phương trình là $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 18: **Câu 30 (101-2023)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;2;1)$ và $B(1;0;1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.

B. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20$.

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

D. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 20$.

Lời giải

Do AB là đường kính của mặt cầu nên trung điểm $I(3;1;1)$ của AB là tâm mặt cầu, bán kính

của mặt cầu là: $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2 + (1-1)^2}}{2} = \sqrt{5}$.

Ta có phương trình mặt cầu: $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 19: **Câu 34 (102-2023)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;0;5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

A. $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 3$.

B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 12$.

C. $x^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 3$.

D. $x^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 12$.

Lời giải

Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm $I(0;1;4)$ của AB và bán kính

$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2 + (5-3)^2}}{2} = \sqrt{3}$, có phương trình là $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 3$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Lời giải

Ta có $R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$$(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$.

Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$.

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và bán kính R là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = R^2$.

Ta có: $M \in (S) \Rightarrow 4^2 + 0^2 + (0+3)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 25$.

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

Câu 22: Mặt cầu (C) có tâm $I(1;0;-2)$ và đi qua điểm $B(4;-4;-2)$ có phương trình là

A. $(C): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 5$.

B. $(C): (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$.

C. $(C): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

D. $(C): (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25$.

Lời giải

Ta có: $\overline{IB} = (3; -4; 0) \Rightarrow R = |\overline{IB}| = 5$.

Khi đó, phương trình mặt cầu là $(C): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Lời giải

Gọi M là hình chiếu vuông góc của tâm $I(1;-2;3)$ lên mặt phẳng (Oyz) , suy ra $M(0;-2;3)$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên có bán kính $R = IM = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Câu 24: (MD 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x-2y+2z+3=0$ là

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Lời giải

Gọi $(P): x - 2y + 2z + 3 = 0$. Mặt cầu có bán kính là $R = d(A; (P)) = \frac{|1 - 4 + 6 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$.

Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc mặt phẳng (P) là $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -3; 2)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P)

- A. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = \frac{16}{9}$. B. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = \frac{16}{9}$.
C. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = \frac{4}{3}$. D. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có bán kính $R = d(I, (P)) = \frac{|1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = \frac{16}{9}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$. Điểm có tọa độ nào sau đây nằm trên mặt cầu?

- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(1; -2; -1)$. C. $(1; -2; 1)$. D. $(1; -2; 3)$.

Lời giải

Thay tọa độ của các điểm đã cho vào phương trình mặt cầu ta được điểm có tọa độ $(1; -2; -1)$ nằm trên mặt cầu.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S) ?

- A. $M(1; 1; 1)$ B. $N(0; 1; 0)$ C. $P(1; 0; 1)$ D. $Q(1; 1; 0)$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Khoảng cách từ các điểm đã cho tới tâm mặt cầu:

$$MI = \sqrt{2} = R; \quad NI = 0 < R, \quad PI = \sqrt{3} > R, \quad QI = 1 < R.$$

Do đó điểm P nằm ngoài mặt cầu.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ và một điểm $M(4; 2; -2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Điểm M là tâm của mặt cầu (S) . B. Điểm M nằm trên mặt cầu (S) .
C. Điểm M nằm trong mặt cầu (S) . D. Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) .

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R=3$.

Khi đó $IM = \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{6} < R$.

Vậy điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

Câu 29: Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

A. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 3$.

B. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = -3$.

C. $(x-1) + (y-3) + (z+2) = 9$.

D. $(x-1) + (y-3) + (z+2) = -9$.

Lời giải

Do phương trình mặt cầu có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên vế phải của phương trình là $R^2 > 0$

Câu 30: Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu?

A. $a+b+c-d > 0$. **B.** $a^2+b^2+c^2+d > 0$.

C. $a^2+b^2+c^2-d > 0$. **D.** $a^2+b^2+c^2-d \geq 0$.

Lời giải

Để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu thì $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

Câu 31: Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 11 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z - 21 = 0$.

D. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y - 8z - 10 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 11 = 0$

Có $a = \frac{2}{-2} = -1$; $b = \frac{2}{-2} = -1$; $c = \frac{-4}{-2} = 2$; $d = 11$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 - 11 = -5 < 0$

Nên phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 11 = 0$ không là phương trình mặt cầu.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, đáp án nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 7 = 0$.

D. $x^2 - y^2 - z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2(-1).x - 2(0).y - 2(1).z - 7 = 0$.

$\Rightarrow a = -1, b = 0, c = 1, d = -7$.

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu $I(-1;0;1)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 7} = 3$.

Suy ra đáp án **A** là phương trình mặt cầu.

Đáp án **B, C, D** không là phương trình mặt cầu vì không ở dạng tổng quát của phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có tâm $I(1; -2; -3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9.$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4.$ **D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1.$**

Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x = 0$.

Do đó bán kính mặt cầu là $R = d(I; (Oyz)) = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2; 1; m-1)$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) biết mặt cầu có diện tích bằng 16π .

- A. $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 16 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 16 \end{cases}$ B. $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 16 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16 \end{cases}$
C. $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4 \end{cases}$

Lời giải

Ta có diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 16\pi \Leftrightarrow R = 2$

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oxy) nên ta có $d(I; (Oxy)) = R \Rightarrow |m-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$

Vậy có hai mặt cầu thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4 \end{cases}$$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

- A. 4. B. 6. C. 5. **D. 7.**

Lời giải

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$$

Theo bài ra $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

- A. 7.** B. 8. C. 9. D. 6.

Lời giải

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$(2m)^2 + (m)^2 + (m)^2 - 9m^2 + 28 > 0$$

$$\Leftrightarrow -3m^2 + 28 < 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}}$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$?

A. $m = 5$.

B. $m = \sqrt{3}$.

C. $m = 3$.

D. $m = \sqrt{5}$

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ có tâm $I(3; 0; 2)$, bán kính $R = \sqrt{m^2 + 1}$.

(S) tiếp xúc với $(Oxy) \Leftrightarrow d(I, (Oxy)) = R$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt{3}.$$

Câu 38: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2; -m; 0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - (3m^2 - 2m)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$.

với điều kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 39: Với giá trị nào của m thì mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 5 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(2-m)y - 4mz + 5m^2 + 1 = 0$?

A. $m = -3$.

B. $m = 1$ hoặc $m = -3$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

Lời giải

Ta có $a = m; b = m - 2; c = 2m; d = 5m^2 + 1$. Tâm $I(m, m - 2, 2m)$

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$R^2 = m^2 + (m - 2)^2 + 4m^2 - 5m^2 - 1 = m^2 - 4m + 3 > 0$$

$\Leftrightarrow m < 1$ hoặc $m > 3$ (P) tiếp xúc (S) khi:

$$d(I, P) = \frac{|3m - 3|}{\sqrt{6}} = R = \sqrt{m^2 - 4m + 3}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \text{ hoặc } m > 3 (\text{loại})$$

Vậy $m = -3$

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R = 2$?

- A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$ B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$
 C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$ D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$

Lời giải

Ta có mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

$$\text{Trong đáp án C ta có: } \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4} = 2.$$

Câu 41: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2; -3; -4)$ và tiếp xúc với trục Ox .

- A. $(x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 = 5$. B. $(x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 = 25$.
 C. $(x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 5$. D. $(x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 25$.

Lời giải

$$R = d(I; Ox) = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$$

Phương trình mặt cầu (S) là $(x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 25$.

Câu 42: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(-3; 1; 4)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}.$$

- A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = \sqrt{30}$. B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 30$.
 C. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = \sqrt{30}$. D. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 30$.

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua $M(-1; 2; -3)$ và nhận $\vec{u}_\Delta = (2; 1; -1)$ làm một vectơ chỉ phương.

$$R = d(A; \Delta) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \sqrt{30}.$$

Phương trình mặt cầu (S) là $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 30$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) .

- A. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3$. B. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$.
 C. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. D. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } h = d(I, (P)) = \frac{|0 + 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 1$$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến có bán kính $r = \sqrt{2}$.

$$\text{Mà } R^2 = r^2 + h^2 = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}.$$

Do đó mặt cầu tâm $I(0; -2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

$$\text{Phương trình mặt cầu } (S): x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$$

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π . Viết phương trình của mặt cầu (S) .

A. $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$. **B.** $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$.

C. $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$. **D.** $(S): (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 25$.

Lời giải

$$\text{Ta có } h = d(I; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 4.$$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến có bán kính r do đó $2\pi r = 6\pi \Rightarrow r = 3$.

$$\text{Gọi } R \text{ là bán kính cầu, suy ra } R^2 = h^2 + r^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow R = 5.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu là: } (S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25.$$

Câu 45: Cho mặt cầu (S) đi qua $A(0; 8; 0), B(4; 6; 2), C(0; 12; 4)$ và có tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) . Tính $a + b + c = ?$

A. 5. **B.** 7. **C.** 0. **D.** 12.

Lời giải

Do tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên $a = 0 \Rightarrow I(0; b; c)$

Mặt cầu đi qua $A; B; C$ nên $IA = IB = IC$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b - 8)^2 + c^2 = 4^2 + (b - 4)^2 + (c - 2)^2 \\ (b - 8)^2 + c^2 = (b - 12)^2 + (c - 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a + b + c = 0 + 7 + 5 = 12.$$

Câu 46: Cho 3 điểm $A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) có bán kính bằng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C

$$\Leftrightarrow IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Do tâm $I(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (P) nên: $x + y + z - 2 = 0$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+z=2 \\ x-y=1 \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Vậy $I(1;0;1)$ và $R^2 = IA^2 = 1 \Rightarrow R = 1$.

Câu 47: Cho các điểm $A(1;3;1); B(3;2;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oz

A. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$.

B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 9$.

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$.

D. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 14$.

Lời giải

Do tâm I thuộc trục Oz nên I $(0;0;z)$

$$IA^2 = 1^2 + 3^2 + (z-1)^2$$

$$IB^2 = 3^2 + 2^2 + (z-2)^2$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 1^2 + 3^2 + (z-1)^2 = 3^2 + 2^2 + (z-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2z = 6 \Leftrightarrow z = 3$$

$$\Rightarrow I(0;0;3); R^2 = IA^2 = 14$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$$

Câu 48: Cho các điểm $A(0;1;3)$ và $B(2;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d bằng?

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Lời giải

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$$

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Gọi I là tâm của mặt cầu, do I thuộc d nên I $(1+2t; 2-t; 3-2t)$

$$\text{Ta có: } IA^2 = (1+2t)^2 + (2-t-1)^2 + (3-2t-3)^2 = 9t^2 + 2t + 2$$

$$IB^2 = (1+2t-2)^2 + (2-t-2)^2 + (3-2t-1)^2 = 9t^2 - 4t + 5$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 9t^2 + 2t + 2 = 9t^2 - 4t + 5$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I\left(2; \frac{3}{2}; 2\right); R^2 = IA^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Câu 49: Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. **C.** $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Lời giải

Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tinh là $18900 + 6300 = 25200$ tương ứng bằng 4 đơn vị. Ta thấy quỹ đạo chuyển động của vệ tinh quanh Trái Đất là một mặt cầu có tâm là tâm Trái Đất có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 4$.

Do đó phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Câu 50: Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian $Oxyz$ trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

A. $M(1;0;2)$. **B.** $N(2;-1;1)$. **C.** $P(1;1;\sqrt{2})$. **D.** $Q(3;0;0)$.

Lời giải

Ta thấy quỹ đạo của Rađa là một khối cầu giới hạn bởi mặt cầu (S) có tâm là vị trí máy Rađa có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2$.

Do đó ta có phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Vật thể bắt đầu bị phát hiện khi nó nằm trong hoặc trên mặt cầu (S) .

Trong 4 đáp án trên ta thấy có đáp án C thỏa mãn phương trình mặt cầu (S) các đáp án còn lại đều nằm ngoài (S) .

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(0;-1;4)$

Lời giải

Ta có $IA = 3 > 2; IB = \sqrt{3} < 2; IC = \sqrt{13} > 2; ID = 6 > 2$.

Vậy người đứng tại điểm B nằm trong mặt cầu nên sẽ sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6; -1; 4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km . Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

- A. $A(-5; 0; 3)$ B. $B(-5; -2; 5)$. C. $C(-6; 2; 2)$ D. $D(-7; -2; 3)$

Lời giải

Ta có $IA = \sqrt{3} < 2$; $IB = \sqrt{3} < 2$; $IC = \sqrt{13} > 2$; $ID = \sqrt{3} < 2$.

Vậy người đứng tại điểm C nằm ngoài mặt cầu nên sẽ không sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(3; 0; 0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 5. Hỏi vị trí của điểm nào sau đây không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

- A. $M(5; 0; 0)$. B. $N(3; 2; -1)$. C. $P(-1; 3; 1)$. D. $Q(0; -2; 0)$.

Lời giải

Ta có $AM = 2 < R$ nên điểm M thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AN = \sqrt{5} < R$ nên điểm N thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AP = \sqrt{26} > R$ nên điểm P không thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AQ = \sqrt{13} < R$ nên điểm Q thuộc vùng phủ sóng.

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), người ta đặt một trạm thu phát sóng điện thoại được đặt ở vị trí $A(-1; 2; -3)$. Biết rằng trạm thu phát sóng được thiết kế với bán kính là 4 km , viết phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian?

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$ D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

Lời giải

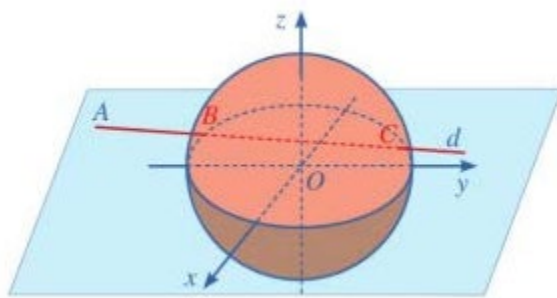
Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$$

Câu 55: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km . Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí A , chuyển động theo

đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu

(như hình vẽ). Khoảng cách giữa vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình radar và vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình radar gần nhất với đáp án nào sau đây?



A. 751.

B. 750.

C. 749.

D. 748.

Lời giải

Ta có: Phương trình mặt cầu ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.

Tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S) .

Từ phương trình đường thẳng d và mặt cầu (S) ta có:

$$(-1000 + 100t)^2 + (-200 + 80t)^2 + 10^2 = 360000$$

$$\Leftrightarrow 164t^2 - 2320t + 6801 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1160 - \sqrt{230236}}{164} \approx 4,15 \\ t = \frac{1160 + \sqrt{230236}}{164} \approx 10 \end{cases}$$

+) $t = 4,15$ suy ra $B(-585; 132; 10)$

+) $t = 10$ suy ra $C(0; 600; 10)$

Khi đó, $\overrightarrow{BC} = (585; 468; 0) \Rightarrow BC \approx 749,17$.

Câu 56: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(-1; 2; 3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5000m$. Phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng là:

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.000.000$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.000.000$.

Lời giải

Tâm mặt cầu có tọa độ $I(-1; 2; 3)$

Bán kính mặt cầu $R = 5000(m) = 5(km)$.

Vậy phương trình mặt cầu mô tả vùng phủ sóng của trạm phát sóng là:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

Câu 57: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng radar của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(2; -1; -3)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$. Điểm nào sau đây nằm trong vùng phủ sóng của radar?

A. $N(500; 200; 100)$.

B. $P(-300; 250; 400)$.

C. $M(200; -100; -230)$.

D. $Q(120; -200; -500)$.

Lời giải

Vì vùng phát sóng của radar là một mặt cầu có tâm $I(2; -1; -3)$ và bán kính $R = 500$.

•Ta có: $IN = \sqrt{(500-2)^2 + (200+1)^2 + (100+3)^2} \approx 546,8 > 500$

Vì $IN > R$ nên điểm N nằm ngoài mặt cầu. Vậy điểm N nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm radar này.

•Ta có: $IP = \sqrt{(-300-2)^2 + (250+1)^2 + (400+3)^2} \approx 562,7 > 500$

Vì $IP > R$ nên điểm P nằm ngoài mặt cầu. Vậy điểm P nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm radar này.

•Ta có: $IM = \sqrt{(200-2)^2 + (-100+1)^2 + (-230+3)^2} \approx 317,1 < 500$

Vì $IM < R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy điểm M nằm trong vùng phủ sóng của trạm radar này.

•Ta có: $IQ = \sqrt{(120-2)^2 + (-200+1)^2 + (-500+3)^2} \approx 548,2 > 500$

Vì $IQ > R$ nên điểm Q nằm ngoài mặt cầu. Vậy điểm Q nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm radar này.

Câu 58: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là km), bốn chiếc máy bay ở bốn hướng khác nhau khi vừa bay vào vùng phủ sóng của một chiếc radar thì trên radar ngay lập tức báo tín hiệu phát hiện mục tiêu. Tại thời điểm radar phát hiện mục tiêu thì 4 chiếc máy bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $A(30; 25; 33), B(14; 1; 49), C(40; -29; 1), D(0; 31; 41)$. Phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng của radar trong không gian là

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3598 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 2498 = 0$.

C. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 60^2$.

D. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 50^2$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Do (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 30^2 + 25^2 + 33^2 - 60a - 50b - 66c + d = 0 \\ 14^2 + 1^2 + 49^2 - 28a - 2b - 98c + d = 0 \\ 40^2 + (-29)^2 + 1^2 - 80a + 58b - 2c + d = 0 \\ 0^2 + 31^2 + 41^2 - 62b - 82c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -60a - 50b - 66c + d = -2614 \\ -28a - 2b - 98c + d = -2598 \\ -80a + 58b - 2c + d = -2442 \\ -62b - 82c + d = -2642 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = -2498 \end{cases}$$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; 1)$ và $R = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 - (-2498)} = 50$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 50^2$

hay $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 2498 = 0$.

Câu 59: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng Oxy . Một quả cầu bằng nhựa nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $I(12; 20; 50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả cầu nhựa (S) có phương trình là

- A. $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 12^2$. B. $(x+12)^2 + (y+20)^2 + (z+50)^2 = 12^2$.
 C. $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 20^2$. D. $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 50^2$.

Lời giải

Do quả cầu nằm trên mặt sàn nhà đa năng nên mặt ngoài của quả cầu tiếp xúc với mặt phẳng Oxy

Ta có: $d(I, (Oxy)) = R = 50$

Vậy mặt ngoài của quả cầu (S) có phương trình là $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 50^2$

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1;5;5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 5 km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1;5;5)$ đến vị trí $A(7;14;1)$. Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

- A. $M(3;8;7)$. B. $N(0;4;8)$. C. $P(7;3;0)$. D. $Q(7;11;3)$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trong không gian là:

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 25$$

Ta có $\vec{IM}(2;3;2)$; $\vec{IA}=(6;9;6) = 3\vec{IM}$ và $IM = \sqrt{(3-1)^2 + (8-5)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{17} < 5$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy người đi biển đi qua điểm M mà vẫn thuộc vùng phủ sáng.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2;-5;0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 16$ tại $M\left(\frac{10}{9}; -\frac{25}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

- A. $\frac{3}{5}$ km. B. $\frac{4}{5}$ km. C. $\frac{1}{5}$ km. D. $\frac{2}{5}$ km.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$; $\vec{IM} = \left(-\frac{8}{9}; -\frac{16}{9}; \frac{16}{9}\right) = -\frac{8}{9}(1;2;-2)$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) tại M nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x - \frac{10}{9} + 2\left(y + \frac{25}{9}\right) - 2\left(z - \frac{7}{9}\right) = 0$ hay $(P): x + 2y - 2z + 6 = 0$.

Giả sử điểm $C(a; b; c)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C \in (P)$ và ba điểm A, B, C thẳng hàng, C nằm giữa A và B .

Do đó $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ với $k > 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (a - 3; b + 2; c - 1), \overrightarrow{AB} = (-1; -3; -1)$.

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 = -k \\ b + 2 = -3k \\ c - 1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - k \\ b = -2 - 3k \\ c = 1 - k \end{cases} \Rightarrow C(3 - k; -2 - 3k; 1 - k).$$

$$C \in (P) \Rightarrow 3 - k + 2(-2 - 3k) - 2(1 - k) + 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{5}.$$

Suy ra $C\left(\frac{12}{5}; -\frac{19}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Vậy tại vị trí C , độ cao của máy bay là $\frac{2}{5}$ km.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$.

- a) Đường kính mặt cầu bằng 8.
- b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(-1; 3; 0)$.
- c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (Oyz) bằng 2.
- d) Mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z - 2 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10; 20; 30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km.

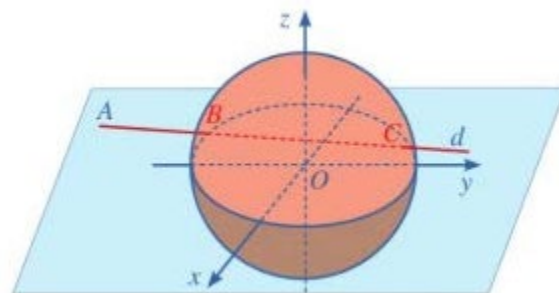
- a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2$.
- b) Người đi biển ở vị trí $A(50; 20; 0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.
- c) Người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.
- d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; 2), B(1; 0; 3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A, B .

- a) Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) có dạng $I(a; 0; 0)$.
- b) Bán kính của mặt cầu (S) là $R = 9$.
- c) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.
- d) Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $P = MA^2 + MB^2 + MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T = x + y + z = 2$.

Câu 4: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc $900km/h$ theo đường thẳng d có phương

$$\text{trình } \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và hướng về đài}$$



kiểm soát không lưu (như hình vẽ).

a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $300km$.

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.

c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M(-500;100;100\sqrt{11})$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện máy bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$.

a) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .

b) Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C) .

c) Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C) .

d) Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID < 4$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm I và bán kính R .

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R = 3$.

b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.

c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có tâm I và bán kính R .

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R = 2$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + y - z - 2 = 0$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Khi đó

a) Mặt cầu tâm B , bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$.

b) Mặt cầu tâm A , đi qua B có phương trình là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{13}{4}$.

d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R=OG$ với G là trọng tâm $\triangle ABC$, có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{14}{9}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (xem hình vẽ) được đặt ở vị trí $I(25;30;50)$. Mặt cầu (S) mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R=5$ km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

a) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2 + (y-30)^2 + (z-50)^2 = 25$.

b) Điểm $A(1025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S) .

c) Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ với O là gốc tọa độ, $A(2;0;0)$, $C(0;3;0)$, $O'(0;0;4)$. Ta có

a) Mặt cầu tâm O , bán kính OA có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

b) Mặt cầu tâm A , đi qua C có phương trình là $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO') , mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{12}{61}$.

d) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là $(x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + y - z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r = 5$.

a) Mặt phẳng $(P): 3x + y - z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (3; 1; -1)$.

b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t; -1+2t; -2-t)$.

c) $d(I, (P)) = 3$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(2; 1; -3)$. Trạm thu phát được thiết kế bán kính phủ sóng là $3km$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$.

b) Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $A(0; 1; -2)$ không sử dụng được dịch vụ của trạm này.

c) Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $B(6; -3; -1)$ sử dụng được dịch vụ của trạm này.

d) Có một người đi từ vị trí $I(2; 1; -3)$ đến vị trí $B(6; -3; -1)$ theo một đường thẳng, vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng IB để người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này là $C(x; y; z)$ với $x + y + z = -1$.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(-2; 1; 3)$. Ngọn hải đăng được thiết kế bán kính phủ sáng là $5km$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$.

b) Người đi biển đứng ở vị trí $A(2; 3; 1)$ có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Người đi biển đứng ở vị trí $B(-2; -5; 6)$ không thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Một người đi biển đang ở vị trí $C(5; 3; -2)$. Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất người đó phải di chuyển để có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng là 73 .

Câu 14: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình minh hoạ).



Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.

(Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>)

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Ta xét ví dụ cụ thể sau: Cho bốn vệ tinh $A(1;-1;2)$, $B(2;1;3)$; $C(-1;4;0)$; $D(2;3;1)$. Một chiếc máy bay quân sự đang ở vị trí M với $MA=3$; $MB=\sqrt{5}$; $MC=\sqrt{26}$; $MD=\sqrt{5}$.

- Mặt cầu tâm A đi qua điểm M có bán kính là 3.
- Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A bán kính MA là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$.
- Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và $S(B, MB)$ là $x + 2y + z - 6 = 0$.
- Tọa độ của máy bay quân sự là $M(x; y; z)$ với $x + y + z = 3$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), Một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt ở tại vị trí $I(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của trạm có bán kính bằng 2 km. Hai người bạn Mai và Nga cùng sử dụng điện thoại. Bạn Mai dùng điện thoại tại vị trí $M(2;1;1)$, bạn Nga dùng điện thoại tại vị trí $N(1;2;2)$.



- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng là: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$
- Bạn Mai có thể sử dụng được dịch vụ của trạm phát sóng trên.
- Hai bạn Mai và Nga liên lạc được với nhau.
- Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất để bạn Nga di chuyển tới vùng phủ sóng của trạm là $1(km)$.

Câu 16: Một sân khấu đã được thiết lập một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) để đạo diễn có thể sắp đặt ánh sáng và xác định vị trí của các diễn viên. Người đạo diễn đặt một đèn chiếu sáng ở vị trí $I(1;2;3)$ tạo ra một vùng sáng là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ bán kính $10(m)$.

- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 100$.
- Diễn viên A đang đứng trên sân khấu ở vị trí $A(3;4;5)$ để chuẩn bị biểu diễn. Khi đó diễn viên A đang được đèn chiếu sáng.
- Diễn viên B luôn đứng yên ở vị trí $B(10;11;12)$. Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai diễn viên A và B bằng $5m$.
- Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$, còn diễn viên C có nhiệm vụ di chuyển xung quanh rìa của vùng chiếu sáng. Tổng khoảng cách từ B đến A và C có giá trị lớn nhất là $11(m)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0.$$

- Mặt cầu (S) có tâm $I = (1;2;-3)$ và bán kính.
- Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ bằng $\frac{28}{3}$.
- Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.
- Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B độ dài đoạn thẳng $AB = \frac{11\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{2}$ và điểm $I(1;-2;5)$.

- Đường thẳng d đi qua $M(2;0;1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;6;2)$.
- Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH = 20$.
- Phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I có phương trình (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 40$.

- Với mọi giá trị của tham số m thì đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$$
 cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$$

- Đường thẳng d đi qua $M(4;-1;0)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;-1;1)$
- Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;0); R = 2$
- Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tâm I cắt tại hai điểm phân biệt
- Tọa độ giao điểm của đường thẳng d với mặt cầu là $A(3;0;0); B(1;2;0)$

- Câu 20:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+mt \\ z = -2t \end{cases}$.
- Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; -2)$ và bán kính $R = 1$.
 - Với $m = 1$ thì đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt
 - Có hai giá trị thực của tham số m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S)
 - Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$.
- Câu 21:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$.
- Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3; 2; 0)$ và vuông góc với đường thẳng d là $x + 2y + 2z - 7 = 0$.
 - Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên d . Khi đó $H(1; -1; 2)$.
 - Mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$.
 - Phương trình mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.
- Câu 22:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 0; 2)$, $B(1; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$.
- Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$.
 - Điểm A nằm trong mặt cầu (S) .
 - Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính bằng $\sqrt{6}$.
 - Điểm M thay đổi thuộc (S) , giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng 5.
- Câu 23:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$ và mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$.
- Mặt phẳng β có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 2)$.
 - $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $m \leq 17$.
 - Khoảng cách từ tâm của mặt cầu (S) đến (β) là 2.
 - Có hai số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .
- Câu 24:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; 1; 1)$, $B(1; 0; -3)$, $C(-1; -2; -3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$.
- Mặt cầu (S) có bán kính $R = 2$.
 - Mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x - 2y + z - 1 = 0$.
 - Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.
 - Điểm $D(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất. Khi đó, $a + b + c = \frac{2}{3}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}) \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 2 + v \\ y = 1 - v \\ z = 1 \end{cases}, (v \in \mathbb{R}).$$

a) Véc tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là: $\vec{u}_1(1;1;-1)$, $\vec{u}_2(1;-1;0)$.

b) (d_1) và (d_2) là hai đường thẳng cắt nhau.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d_1) và (d_2) có bán kính nhỏ nhất là $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Phương trình của mặt cầu (S) tiếp xúc với (d_1) , (d_2) và có bán kính nhỏ nhất là:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{3}{2}.$$

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π .

a) Bán kính đường tròn (C) là $r = 5$.

b) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là 3.

c). Tâm đường tròn (C) có tọa độ là $H(1;3;1)$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R = 3$.

b) Điểm $M(1;3;5)$ nằm trong mặt cầu.

c) Mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 8 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 2$.

d) Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B . Khi đó, diện tích tam giác IAB

là: $\frac{\sqrt{182}}{3}$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng

$$(d): \frac{x-11}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+25}{-2} \text{ tại hai điểm } A, B \text{ sao cho } AB = 16.$$

a) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-2)$.

b) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(5;-3;-31)$.

c) Mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x + y - 2z - 9 = 0$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 225$.

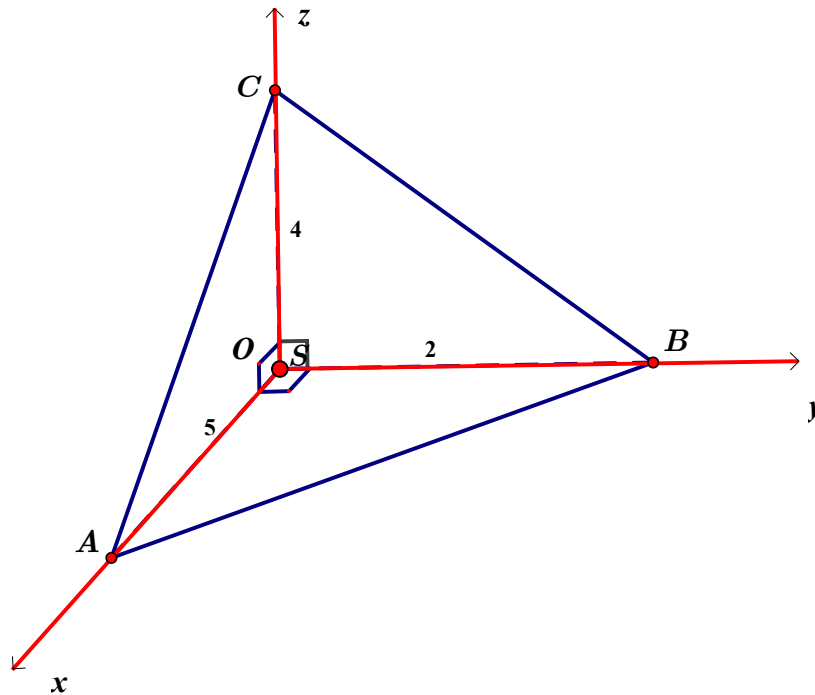
Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$ và điểm $M(-1; 0; 2)$.

- Mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có bán kính là $R = IM = \sqrt{3}$.
- Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có phương trình là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.
- Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M là $-2x + 2y - z = 0$.
- Phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$ là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; 1; -2)$ đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$.

- Điểm I không thuộc đường thẳng Δ .
- Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $2\sqrt{3}$.
- Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B sao cho $\triangle IAB$ đều có bán kính bằng $2\sqrt{6}$.
- Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$.

Câu 31: Cho tứ diện $SABC$, có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = 5, SB = 2, SC = 4$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



- Toạ độ điểm A là $(0; 0; 5)$.
- Phương trình mặt cầu đường kính SC có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.
- Mặt cầu tâm S , tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) có bán kính bằng $\frac{30}{19}$.
- Phương trình mặt cầu đi qua 4 đỉnh của hình chóp là $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \frac{45}{4}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$.

a) Mặt cầu (S_1) tâm A , bán kính $R=1$ có phương trình là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 1$.

b) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.

c) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

d) Bán kính R của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là $R = \sqrt{26}$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(-1;0;3)$, $D(1;2;3)$.

a) Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 25$ có tâm là điểm A .

b) Mặt cầu (S) tâm O bán kính OA có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c) Mặt cầu (S) đường kính AC có phương trình $(S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{9}{2}$.

d) Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính $R = 6$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$.

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu là $(1;0;-2)$.

b) Diện tích mặt cầu bằng 16π (dvd).

c) Điểm $A(1;2;3)$ nằm trong mặt cầu.

d) Số điểm chung của đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S) bằng 0.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$ và hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-1)$.

b) $|R-d| < 2$ với d là khoảng cách từ tâm I mặt cầu (S) đến mặt phẳng $(P): x+y+1=0$.

c) Đường thẳng AB không cắt mặt cầu (S) .

d) Điểm M thay đổi thuộc (S) , biểu thức $2MA^2 + 3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 105 (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 169$.

a) Mặt cầu (S) có đường kính bằng 13.

b) Diện tích mặt cầu $S_{mc} = 338\pi$.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-39=0$.

d) Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 24$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 9$.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét là 8 km.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

b) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc (S) .

c) Điểm $N(-1;-2;-3)$ nằm ngoài mặt cầu (S) .

d) Mặt phẳng $(P): 3x+4y-5=0$ cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng $\frac{484\pi}{25}$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$.

- a) Đường kính mặt cầu bằng 8.
- b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(-1; 3; 0)$.
- c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (Oyz) bằng 2.
- d) Mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z - 2 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 0)$ và bán kính $R = 2$.

a) Sai.

Đường kính mặt cầu bằng $2R = 4$.

b) Sai.

Ta có: $IA = \sqrt{(-1+2)^2 + (3-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5} > R$ nên mặt cầu (S) không đi qua điểm A .

c) Đúng.

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x = 0$.

Khi đó $d(I; (Oyz)) = |-2| = 2$

d) Sai.

Ta có: $d(I; (P)) = \frac{|-2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3} < R$

nên mặt phẳng (P) không tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10; 20; 30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2$.

b) Người đi biển ở vị trí $A(50; 20; 0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng.

Mặt cầu (S) tâm $I(10; 20; 30)$, bán kính $R = 3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$ có phương trình

$$(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2$$

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (40; 0; -30) \Rightarrow IA = \sqrt{40^2 + 0^2 + 30^2} = 50 \text{ m} < R = 3000 \text{ m}$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $A(50; 20; 0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{IB} = (4020; 30; 10) \Rightarrow IB = \sqrt{4020^2 + 30^2 + 10^2} \approx 4020,12 \text{ m} > R = 3000 \text{ m}$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ không nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Đúng.

Vì bán kính phủ sáng là 3 km nên đường kính phủ sáng là 6 km nên nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì hai người đó nằm trong mặt cầu, do đó khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; 2), B(1; 0; 3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A, B .

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) có dạng $I(a; 0; 0)$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là $R = 9$.

c) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

d) Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $P = MA^2 + MB^2 + MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T = x + y + z = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng.

Vì tâm $I \in Ox$ nên toạ độ điểm $I(a; 0; 0)$.

b) Sai.

Vì $A \in (S), B \in (S)$ nên ta có:

$$IA = IB \Leftrightarrow (3-a)^2 + 1 + 4 = (1-a)^2 + 0 + 9 \Leftrightarrow 9 - 6a + a^2 + 5 = 1 - 2a + a^2 + 9 \Leftrightarrow a = 1.$$

Ta có bán kính $R = IB = \sqrt{9} = 3$.

c) Đúng.

Vì $A \in (S), B \in (S)$ nên ta có: $IA = IB \Leftrightarrow (3-a)^2 + 1 + 4 = (1-a)^2 + 0 + 9 \Leftrightarrow a = 1$.

$\Rightarrow R = IA = IB = 3$, tâm $I(1; 0; 0)$,

Ta có mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$

d) Đúng.

Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KI} = \vec{0} \Leftrightarrow K\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$

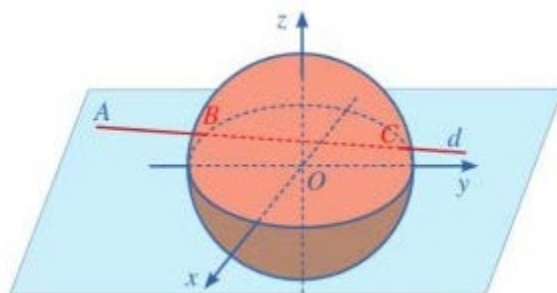
$$\begin{aligned} P &= MA^2 + MB^2 + MI^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MI}^2 = (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA})^2 + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB})^2 + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KI})^2 \\ &= 3MK^2 + KA^2 + KB^2 + KI^2 + 2\overrightarrow{MK}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KI}) = 3MK^2 + KA^2 + KB^2 + KI^2 \end{aligned}$$

Mà $M \in (Oyz) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của K lên mặt phẳng

$$(Oyz) \Rightarrow M\left(0; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right). \text{ Vậy } T = 0 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2.$$

Câu 4: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc $900km/h$ theo đường thẳng d có phương

$$\text{trình } \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).}$$



- a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 300 km .
- b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.
- c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M(-500; 100; 100\sqrt{11})$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.
- d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện máy bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Sai.

Vì đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km nên ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 600 km .

b) Đúng.

Ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ có bán kính bằng $R = 600$ có phương trình là: $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$

c) Đúng.

Ta có $OM = \sqrt{(-500)^2 + (100)^2 + (100\sqrt{11})^2} \approx 608 > 600 = R$.

Vậy, tại vị trí điểm $M(-500; 100; 100\sqrt{11})$ máy bay nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Sai.

Thay $d: \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ vào phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$, ta có:

$$(100t - 1000)^2 + (80t - 300)^2 + (100\sqrt{11})^2 = 360000$$

$$\Leftrightarrow 164t^2 - 2480t + 8400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \Rightarrow B(0; 500; 100\sqrt{11}) \\ t = \frac{210}{41} \Rightarrow C\left(-\frac{20000}{41}; \frac{4500}{41}; 100\sqrt{11}\right) \end{cases}$$

Quãng đường máy bay di chuyển trong vùng kiểm soát không lưu là:

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{20000}{41}\right)^2 + \left(\frac{4500}{41} - 500\right)^2 + (100\sqrt{11} - 100\sqrt{11})^2} \approx 625\text{ km}.$$

Vậy thời gian máy bay di chuyển theo đường thẳng d và trong phạm vi kiểm soát không lưu của sân bay là: $\frac{625}{900} = \frac{25}{36}$ giờ.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$.

- a) Điểm $A(1; 2; -1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .
- b) Điểm $B(0; 0; 1)$ nằm bên trong mặt cầu (C) .
- c) Điểm $C(0; 2; 1)$ nằm trên mặt cầu (C) .
- d) Với điểm $D(2; 1; -1)$, ta có $ID < 4$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Điểm $A(1; 2; -1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .

Tâm $I(1; -2; 0)$.

Ta có $(1-1)^2 + (2+2)^2 + (-1)^2 = 17 > 16 \Rightarrow$ điểm $A(1; 2; -1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .

Đúng.

b) Điểm $B(0; 0; 1)$ nằm bên trong mặt cầu (C) .

Ta có $(0-1)^2 + (0+2)^2 + 1^2 = 6 < 16 \Rightarrow$ điểm $B(0; 0; 1)$ nằm bên trong mặt cầu (C) .

Đúng.

c) Điểm $C(0; 2; 1)$ nằm trên mặt cầu (C) .

Ta có $(0-1)^2 + (2+2)^2 + 1^2 = 18 > 16 \Rightarrow$ điểm $C(0; 2; 1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .

Sai.

d) Với điểm $D(2; 1; -1)$, ta có $ID < 4$.

Ta có $ID = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11} < 4$.

Đúng.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm I và bán kính R .

- a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$, bán kính $R = 3$.
- b) Điểm $A(0; 2; -3)$ nằm trong mặt cầu.
- c) Điểm $J(1; 2; 3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.
- d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$ bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$, bán kính $R = 3$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -1; 2)$, bán kính $R = 3$ là $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

Sai.

b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.

Ta có: $(0+1)^2 + (2-1)^2 + (-3+2)^2 = 3 = R = 3$, do đó điểm A nằm trên mặt cầu.

Sai.

c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

Ta có: $(1+1)^2 + (2-1)^2 + (3+2)^2 = 30 > R = 3$, do đó điểm J nằm ngoài mặt cầu.

$$\text{Và } \overrightarrow{IJ} = (0;3;1) \Rightarrow |\overrightarrow{IJ}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Đúng.

d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu (S') : $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$ bằng $\sqrt{2}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$,

Mặt cầu (S') có tâm $K(0;0;1)$,

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{IK} = (-1;1;-1) \Rightarrow |\overrightarrow{IK}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \neq \sqrt{2}$$

Sai.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có tâm I và bán kính R .

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R = 2$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + y - z - 2 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R = 2$.

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có $a = 1, b = -2, c = 0, d = 1$

$$\Rightarrow \text{tâm } I(1;-2;0) \text{ và bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 2.$$

Đúng.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.

Xét $M(1;1;2): 1^2 + 1^2 + 2^2 - 2.1 + 4.1 + 1 = 9$ do đó M không nằm trên (S)

Vậy bán kính mặt cầu (S) không là đoạn IM .

Sai.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.

Mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính thì $\frac{AB}{2} = R$ và tâm I là trung điểm của AB .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{AB}{2} = \sqrt{3} \neq R = 2$

Sai.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x + y - z - 2 = 0$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x + y - z - 2 = 0 \Leftrightarrow R = d(I, (P))$.

Ta có $d(I, (P)) = \frac{|1 + (-2) - 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3} \neq R = 2$.

Sai.

Câu 8: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$. Khi đó

a) Mặt cầu tâm B, bán kính $R = 3$ có phương trình là $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3$.

b) Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = \frac{13}{4}$.

d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R = OG$ với G là trọng tâm $\triangle ABC$, có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{14}{9}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Mặt cầu tâm B, bán kính $R = 3$ có phương trình là $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3$.

Mặt cầu tâm B, bán kính $R = 3$ có phương trình là $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$.

Sai.

b) Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Ta có bán kính mặt cầu là $R = AB = \sqrt{5}$, nên phương trình mặt cầu là $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Đúng.

c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = \frac{13}{4}$.

Gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow I\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$, $BC = \sqrt{13} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu đường kính BC là $x^2 + (y - 1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$.

Sai.

d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R = OG$ với G là trọng tâm $\triangle ABC$, có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{14}{9}$.

Ta có $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right) \Rightarrow OG = \frac{\sqrt{14}}{3}$ nên phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{14}{9}$.

Đúng.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (xem hình vẽ) được đặt ở vị trí $I(25;30;50)$. Mặt cầu (S) mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R = 5$ km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

- a) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2 + (y-30)^2 + (z-50)^2 = 25$.
- b) Điểm $A(1025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S) .
- c) Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.
- d) Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2 + (y-30)^2 + (z-50)^2 = 25$.

Ta có mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R = 5 \text{ km} = 5000 \text{ m}$, có phương trình là $(x-25)^2 + (y-30)^2 + (z-50)^2 = 5000^2$.

Sai.

b) Điểm $A(1025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S) .

Ta có $IA = \sqrt{(1025-25)^2} = 1000 < 5000 = R$. Suy ra điểm A nằm bên trong mặt cầu (S) .

Đúng.

c) Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Ta có $IM = \sqrt{20^2 + 30^2} = 10\sqrt{13} < 5000 = R$, suy ra điểm M nằm bên trong mặt cầu (S) .

Do đó người ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Đúng.

d) Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Ta có $IN = \sqrt{5100^2 + (-50)^2} > 5000 = R$, suy ra điểm N nằm bên ngoài mặt cầu (S) .

Do đó người ở vị trí $N(5125; 30; 0)$ thì không thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Đúng.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ với O là gốc tọa độ, $A(2; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $O'(0; 0; 4)$. Ta có

a) Mặt cầu tâm O , bán kính OA có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

b) Mặt cầu tâm A , đi qua C có phương trình là $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

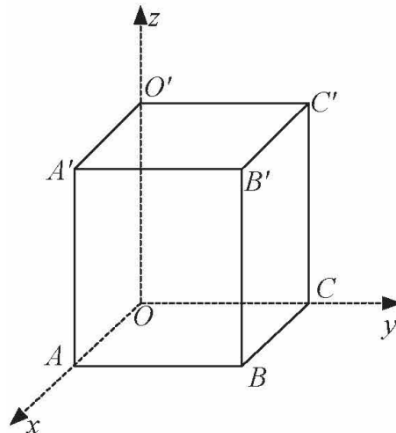
c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO') , mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{12}{61}$.

d) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là $(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, ta có tọa độ các đỉnh của hình hộp



$O(0; 0; 0), A(2; 0; 0); B(2; 3; 0), C(0; 3; 0), O'(0; 0; 4), A'(2; 0; 4); B'(2; 3; 4), C'(0; 3; 4)$

a) Mặt cầu tâm O , bán kính OA có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Ta có $OA = 2$, mặt cầu tâm O , bán kính OA có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Sai.

b) Mặt cầu tâm A , đi qua C có phương trình là $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Ta có $AC^2 = OA^2 + OC^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow$ mặt cầu tâm A , đi qua C có phương trình là $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Đúng.

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO') , mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{12}{61}$.

Ta có $(ACO') : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

$$R = d(O, (ACO')) = \frac{|-12|}{\sqrt{36+16+9}} = \frac{12}{\sqrt{61}}. \text{ Vậy phương trình mặt cầu } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{144}{61}$$

Sai.

d) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là $(x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$.

Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có tâm I là trung điểm của $OB' \Rightarrow I\left(1; \frac{3}{2}; 2\right)$ và có bán

$$\text{kinh } R = \frac{OB'}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$.

Đúng.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x + y - z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r = 5$.

a) Mặt phẳng $(P) : 3x + y - z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (3; 1; -1)$.

b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t; -1+2t; -2-t)$.

c) $d(I, (P)) = 3$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Mặt phẳng $(P) : 3x + y - z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (3; 1; -1)$.

$(P) : 3x + y - z - 5 = 0$ có VTPT là $\vec{n} = (3; 1; -1)$.

Đúng.

b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t; -1+2t; -2-t)$.

$$\text{Ta có: } d : x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow d : \begin{cases} x = t \\ y = 1+2t \\ z = 2-t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow I(t; 1+2t; 2-t)$$

Sai.

c) $d(I, (P)) = 3$.

Do giao tuyến của (S) và (P) là đường tròn lớn nên $I \in (P) \Rightarrow d(I, (P)) = 0$.

Sai.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Ta có $I \in d \Rightarrow I(t; 1+2t; 2-t)$

Theo giả thiết $I = d \cap (P)$ nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

Thay tọa độ điểm I vào (P) ta có :

$$3t + (1+2t) - (2-t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 3; 1)$$

Vì $(S) \cap (P)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính $r = 5$ nên ta có bán kính mặt cầu (S) là $R = r = 5$.

Vậy mặt cầu có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Đúng

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(2; 1; -3)$. Trạm thu phát được thiết kế bán kính phủ sóng là $3km$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$.
- Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $A(0; 1; -2)$ không sử dụng được dịch vụ của trạm này.
- Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $B(6; -3; -1)$ sử dụng được dịch vụ của trạm này.
- Có một người đi từ vị trí $I(2; 1; -3)$ đến vị trí $B(6; -3; -1)$ theo một đường thẳng, vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng IB để người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này là $C(x; y; z)$ với $x + y + z = -1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) Đúng

Mặt cầu có tâm $I(2; 1; -3)$ và bán kính $3km$ có phương trình là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$.

b) Sai

Ta có $\vec{IA}(-2; 0; 1)$ nên $IA = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 3$

Vì $IA < R$ nên người dùng điện thoại đứng ở vị trí $A(0;1;-2)$ sử dụng được dịch vụ của trạm này.

c) Sai

Ta có $\overline{IB}(4;-4;2)$ nên $IB = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = 6 > 3$. Vì $IB > R$ nên người dùng điện thoại đứng ở vị trí $B(6;-3;-1)$ không sử dụng được dịch vụ của trạm này.

d) Sai

Theo phần c, vì $IB > R$ nên người đó đứng ở ngoài vùng phủ sóng. Giả sử đường thẳng IB cắt mặt cầu tại điểm C khi đó C là vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng IB để người đó có thể sử dụng được dịch vụ. Khi đó $IC = \frac{1}{2}IB$ hay C là trung điểm của IB suy ra $C(4;-1;-2)$ nên $4-1-2=1$

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(-2;1;3)$. Ngọn hải đăng được thiết kế bán kính phủ sáng là $5km$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

- a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$.
- b) Người đi biển đứng ở vị trí $A(2;3;1)$ có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.
- c) Người đi biển đứng ở vị trí $B(-2;-5;6)$ không thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.
- d) Một người đi biển đang ở vị trí $C(5;3;-2)$. Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất người đó phải di chuyển để có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng là 73 .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng

Mặt cầu có tâm $I(-2;1;3)$ và bán kính $5km$ có phương trình là $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$.

b) Đúng

Ta có $\overline{IA}(4;2;-2)$ nên $IA = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} < 5$

Vì $IA < R$ nên người đi biển đứng ở vị trí $A(2;3;1)$ có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Đúng

Ta có $\overline{IB}(0; -6; 3)$ nên $IB = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45} > 5$

Vì $IB > R$ nên người đi biển đứng ở vị trí $B(-2; -5; 6)$ không thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Sai

Ta có $\overline{IC}(7; 2; -5)$ nên $IC = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78} > 5$ nên người đó đứng ở ngoài vùng phủ sáng. Giả sử đoạn thẳng IC cắt mặt cầu tại điểm D khi đó CD là khoảng cách ngắn nhất người đó phải di chuyển để có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

Ta có $CD = IC - R = \sqrt{78} - 5$.

Câu 14: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình minh hoạ).



Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.

(Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>)

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Ta xét ví một ví dụ cụ thể sau: Cho bốn vệ tinh $A(1; -1; 2), B(2; 1; 3); C(-1; 4; 0); D(2; 3; 1)$. Một chiếc máy bay quân sự đang ở vị trí M với $MA = 3; MB = \sqrt{5}; MC = \sqrt{26}; MD = \sqrt{5}$.

a) Mặt cầu tâm A đi qua điểm M có bán kính là 3.

b) Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A bán kính MA là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$.

c) Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và $S(B, MB)$ là $x + 2y + z - 6 = 0$.

d) Tọa độ của máy bay quân sự là $M(x; y; z)$ với $x + y + z = 3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng

Mặt cầu có tâm A và đi qua điểm M có bán kính là $MA = 3$.

b) Đúng

Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A bán kính MA là $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0.$$

c) Đúng

- Phương trình mặt cầu (S_1) là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$ (1)

- Phương trình mặt cầu $S(B, MB)$ là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 5$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 9 = 0$$
 (2)

- Lấy (1) trừ (2) ta được: $2x + 4y + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 6 = 0$

d) Sai

Vì $MA = 3; MB = \sqrt{5}; MC = \sqrt{26}; MD = \sqrt{5}$ và $M(x; y; z)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 & (1) \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 5 & (2) \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 26 & (3) \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 12 \\ -6x + 6y - 6z = -18 \\ 6x - 2y + 2z = 18 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $x + y + z = 5$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), Một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt ở tại vị trí $I(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của trạm có bán kính bằng 2 km. Hai người bạn Mai và Nga cùng sử dụng điện thoại. Bạn Mai dùng điện thoại tại vị trí $M(2;1;1)$, bạn Nga dùng điện thoại tại vị trí $N(1;2;2)$.



a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng là: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$

b) Bạn Mai có thể sử dụng được dịch vụ của trạm phát sóng trên.

c) Hai bạn Mai và Nga liên lạc được với nhau.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất để bạn Nga di chuyển tới vùng phủ sóng của trạm là $1(km)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Sai

Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng là: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ nên câu a sai

b) Đúng

$$IM = \sqrt{(2-2)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < 2. \text{ Vậy câu b đúng}$$

c) Sai

$IN = \sqrt{(1-2)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2} = 3 > 2$ nên bạn Nga đang đứng ở vị trí ngoài vùng phủ sóng. Do đó câu c sai

d) Đúng

Xét K là điểm bất kỳ thuộc vùng phủ sóng, khi đó K nằm trên khối cầu

Khoảng cách tính theo đường chim bay để bạn Nga đến vùng phủ sóng là NK

Ta có $NK \geq IN - IK \Leftrightarrow NK \geq 1$. Vậy khoảng cách ngắn nhất để bạn Nga đến vùng phủ sóng là $1(km)$

Câu 16: Một sân khấu đã được thiết lập một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) để đạo diễn có thể sắp đặt ánh sáng và xác định vị trí của các diễn viên. Người đạo diễn đặt một đèn chiếu sáng ở vị trí $I(1;2;3)$ tạo ra một vùng sáng là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ bán kính $10(m)$.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 100$.

b) Diễn viên A đang đứng trên sân khấu ở vị trí $A(3;4;5)$ để chuẩn bị biểu diễn. Khi đó diễn viên A đang được đèn chiếu sáng.

c) Diễn viên B luôn đứng yên ở vị trí $B(10;11;12)$. Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai diễn viên A và B bằng $5m$.

d) Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$, còn diễn viên C có nhiệm vụ di chuyển xung quanh rìa của vùng chiếu sáng. Tổng khoảng cách từ B đến A và C có giá trị lớn nhất là $11(m)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng

$$\text{Phương trình mặt cầu là } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 100.$$

b) Đúng

$$IA = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{3} < 10$$

c) Sai

Ta có $IB = \sqrt{(10-1)^2 + (11-2)^2 + (12-3)^2} = 9\sqrt{3} > 10$ nên B ở ngoài vùng đèn chiếu sáng.

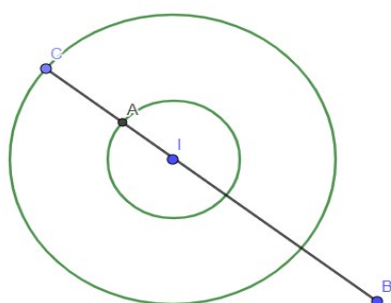
Diễn viên A biểu diễn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$ nên A nằm trên mặt cầu tâm I bán kính bằng 1

Khoảng cách ngắn nhất giữa hai diễn viên A và B khi I, A, B thẳng hàng và A nằm giữa I và **B**.

Khi đó $AB_{\min} = IB - 1 = 9\sqrt{3} - 1$

d) Sai

Diễn viên B đứng yên, diễn viên A, C cùng biểu diễn nên tổng khoảng cách từ B đến A và C có giá trị lớn nhất khi A, C, B, I thẳng hàng sao cho I nằm giữa A và B; A nằm giữa C và I.



Khi đó: $(BA + BC)_{\max} = (IB + 1) + (IB + 10) = 18\sqrt{3} + 11$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0.$$

a) Mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 2; -3)$ và bán kính.

b) Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ bằng $\frac{28}{3}$.

c) Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

d) Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B độ dài đoạn thẳng $AB = \frac{11\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng vì mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 2; -3)$ và bán kính $R = 9$.

b) Sai vì đường thẳng Δ đi qua $M = (-2; 0; 3)$ và có VTCP $\vec{u} = (-1; 1; -1)$

Ta có $\vec{MI} = (3; 2; -6)$ và $[\vec{u}, \vec{MI}] = (-4; -9; -5)$

$$\Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{|\vec{u}, \vec{MI}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{366}}{3}.$$

c) Đúng vì $d(I, \Delta) < R$ nên Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Vậy ý c đúng.

d) Sai vì $AB = 2\sqrt{9^2 - \left(\frac{\sqrt{366}}{3}\right)^2} = \frac{22\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{2}$ và điểm $I(1; -2; 5)$.

a) Đường thẳng d đi qua $M(2; 0; 1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 6; 2)$.

b) Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH = 20$.

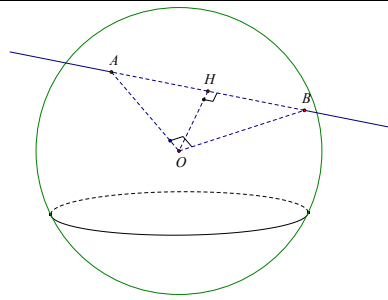
c) Phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I có phương trình $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 40$.

d) Với mọi giá trị của tham số m thì đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm

phân biệt.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng



a) Đúng vì: Đường thẳng d đi qua $M(2; 0; 1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 6; 2)$.

b) Sai vì: Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|}$, với

$$\overrightarrow{IM} = (1; 2; -4), \vec{u} = (3; 6; 2) \quad IH = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{20}.$$

c) Đúng vì:

Theo đề bài ta có tam giác IAB vuông cân tại I nên $IA = IH\sqrt{2} = \sqrt{40}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 40$.

d) Đúng vì:

Từ phương trình đường thẳng d và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+2)^2 + (-2t-5)^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 5)t^2 + 2(11+3m)t - 5 = 0 \quad (1)$$

Đề Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt, hay (1) có $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (3m+11)^2 + 5(m^2+5) > 0 \forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4+t \\ y = -1-t \\ z = 0 \end{cases}$.

- a) Đường thẳng d đi qua $M(4; -1; 0)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 1)$
- b) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 0); R = 2$
- c) Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tâm I cắt tại hai điểm phân biệt
- d) Tọa độ giao điểm của đường thẳng d với mặt cầu là $A(3; 0; 0); B(1; 2; 0)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng vì: Đường thẳng d đi qua $M(4; -1; 0)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 0)$.

b) Đúng vì: Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 0); R = 2$

c) Đúng vì:

Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|}$, với

$$\overrightarrow{IM} = (3; -1; 0), \vec{u} = (1; -1; 0) \quad IH = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{2}.$$

Vì $d(I, \Delta) < R$ nên Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B

d) Đúng vì :

Gọi $A = d \cap (S)$. Vì $A \in d \Rightarrow A(4+t; -1-t; 0)$.

Do

$$A \in (S) \Rightarrow (4+t-1)^2 + (-1-t)^2 + 0^2 = 4 \Leftrightarrow (t+3)^2 + (t+1)^2 = 4 \Leftrightarrow 2t^2 + 8t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Suy ra $\begin{cases} A(3; 0; 0) \\ B(1; 2; 0) \end{cases}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+mt \\ z = -2t \end{cases}.$$

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; -2)$ và bán kính $R = 1$.

b) Với $m = 1$ thì đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt

c) Có hai giá trị thực của tham số m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S)

d) Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai vì:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 1$.

b) Sai vì:

$$\text{Khi } m = 1 \text{ đường thẳng } \Delta \text{ có phương trình } \Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}$$

Đường thẳng (Δ) đi qua $M = (2; 1; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 1; -2)$

Ta có $\vec{MI} = (-1; -4; 2)$ và $[\vec{u}, \vec{MI}] = (6; 0; 3)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (Δ) . Có: $IH = d(I, \Delta) = \frac{[\vec{u}, \vec{MI}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

Vì $d(I, (\Delta)) > R$ nên Δ không cắt mặt cầu (S)

c) Đúng vì:

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$\begin{aligned} (2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (m^2+5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để Δ tiếp xúc mặt cầu (S) thì (1) có nghiệm kép, hay (1) có $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{15}{2} \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$.

d) Đúng vì:

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$\begin{aligned} (2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (m^2+5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt, hay (1) có

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}.$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$.

- a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d là $x + 2y + 2z - 7 = 0$.
- b) Gọi H là hình chiếu vuông của I lên d . Khi đó $H(1;-1;2)$.
- c) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$.
- d) Phương trình mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

- a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d nhận $\vec{u} = (1;2;2)$ là vector pháp tuyến có phương trình
 $1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0$
- b) Gọi $H = d \cap (P)$ khi đó $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$
 Mà $H \in (P) \Rightarrow -1+t + 2(-3+2t) + 2(-2+2t) - 7 = 0 \Rightarrow t = 2$
 Vậy $H(1;1;2)$
- c) Khi đó $IH = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2 + (0-2)^2} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ d)
 Vậy $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$.
- b) Điểm A nằm trong mặt cầu (S) .
- c) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính bằng $\sqrt{6}$.
- d) Điểm M thay đổi thuộc (S) , giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng 5.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.
- b) $IA = 1$, $R = \frac{1}{2}$, $IA > R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S) .
- c) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính $AB = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$.
- d) Gọi K là điểm thỏa mãn $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0} \Rightarrow K\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Ta có

$$MA^2 + 2MB^2 = (\vec{MK} + \vec{KA})^2 + 2(\vec{MK} + \vec{KB})^2$$

$$= 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2 + 2\vec{MK}(\vec{KA} + 2\vec{KB}) = 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2.$$
 Biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ đạt GTNN khi và chỉ khi MK đạt giá trị nhỏ nhất.

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min} = |KI - R| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Vậy $(MA^2 + 2MB^2)_{\min} = 3MK_{\min}^2 + KA^2 + 2KB^2 = \frac{3}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{19}{4}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$ và mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$.

a) Mặt phẳng β có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

b) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $m \leq 17$.

c) Khoảng cách từ tâm của mặt cầu (S) đến (β) là 2.

d) Có hai số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ là $\vec{n} = (2; -1; 2)$

b) Ta có

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 17 - m.$$

(S) là phương trình của mặt cầu thì $17 - m > 0 \Leftrightarrow m < 17$.

Khi đó $I(-1; 2; 3); R = \sqrt{17 - m}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S) .

$$c) d(I, (\beta)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 2 + 2 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2.$$

d) Để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π thì đường tròn đó có bán kính $r = 4$.

Ta có $R^2 = d^2(I, (\beta)) + r^2 \Leftrightarrow 17 - m = 16 + 4 \Leftrightarrow m = -3$ (TMĐK).

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; 1; 1), B(1; 0; -3), C(-1; -2; -3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$.

a) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 2$.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x - 2y + z - 1 = 0$.

c) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Điểm $D(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất. Khi đó, $a + b + c = \frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = 2$.

b) Có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -4), \overrightarrow{AC} = (-1; -3; -4)$ nên mặt phẳng (ABC) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-8; 8; -4)$. Suy ra mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x - 2y + z + 1 = 0$.

c) Ta có $d(I, (ABC)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = \frac{2}{3}$. Vậy bán kính đường tròn giao tuyến của mặt

phẳng (ABC) và mặt cầu (S) là $r = \sqrt{R^2 - [d(I, (ABC))]^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(D, (ABC)) \cdot S_{ABC}$ nên V_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi $d(D, (ABC))$ lớn nhất.

Gọi Δ là đường thẳng qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Suy ra $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Gọi $D_1; D_2$ là các giao điểm của Δ và mặt cầu (S) . Tọa độ điểm $D_1; D_2$ thỏa mãn hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow D_1\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right); D_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

Ta thấy: $d(D_1, (ABC)) > d(D_2, (ABC))$. Vậy điểm $D\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow a + b + c = \frac{2}{3}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}) \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 2 + v \\ y = 1 - v \\ z = 1 \end{cases}, (v \in \mathbb{R}).$$

a) Véc tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là: $\vec{u}_1(1; 1; -1), \vec{u}_2(1; -1; 0)$.

b) (d_1) và (d_2) là hai đường thẳng cắt nhau.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d_1) và (d_2) có bán kính nhỏ nhất là $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Phương trình của mặt cầu (S) tiếp xúc với $(d_1), (d_2)$ và có bán kính nhỏ nhất là:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{3}{2}.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a). từ phương trình tham số của (d_1) và (d_2) , ta có véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d_1)

là: $\vec{u}_1(1; 1; -1)$, véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d_2) là: $\vec{u}_2(1; -1; 0)$.

b). Ta có: (d_1) đi qua điểm $M(1; 2; -2)$, (d_2) đi qua điểm $N(2; 1; 1)$.

+ $\overrightarrow{MN}(1; -1; 3)$, $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 6 \neq 0$ nên (d_1) và (d_2) là hai đường thẳng chéo nhau.

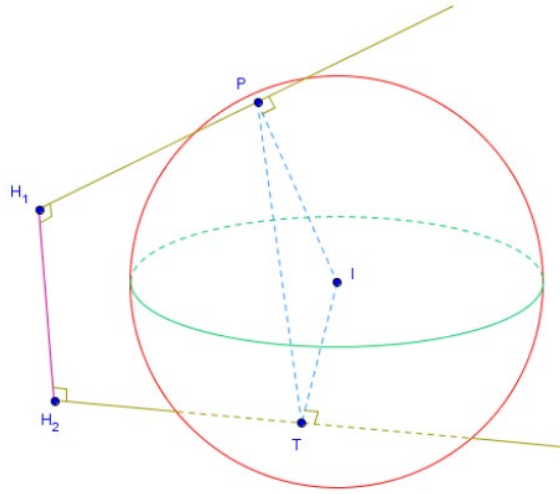
c). Gọi (S) là mặt cầu tâm I , có bán kính nhỏ nhất là R , tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) .

P, T lần lượt là tiếp điểm của (S) và (d_1) , (d_2) . $H_1 H_2$ là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) .

Sử dụng bất đẳng thức tam giác và tính chất đoạn vuông góc chung ta có:

$2R = IP + IT \geq PT \geq H_1 H_2$. Dấu “=” xảy ra khi $P \equiv H_1$, $T \equiv H_2$ và I là trung điểm của $H_1 H_2$.

Giả sử $H_1 \in d_1 \Rightarrow H_1(1+t; 2+t; -2-t)$, $H_2 \in d_2 \Rightarrow H_2(2+v; 1-v; 1)$.



Khi đó ta có $\overrightarrow{H_1 H_2}(v-t+1; -v-t-1; 3+t)$. Vì $H_1 H_2$ là đoạn vuông góc chung của hai đường

thẳng (d_1) và (d_2) nên ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{H_1 H_2} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{H_1 H_2} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-t+1) \cdot 1 + (-v-t-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (t+3) = 0 \\ (v-t+1) \cdot 1 + (-v-t-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (t+3) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow H_1(0; 1; -1), H_2(1; 2; 1)$. Từ đó ta có tọa độ tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$ và $R = IH_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d_1) , (d_2) có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$ và bán kính nhỏ nhất $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ có

phương trình là: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{3}{2}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π .

a) Bán kính đường tròn (C) là $r = 5$.

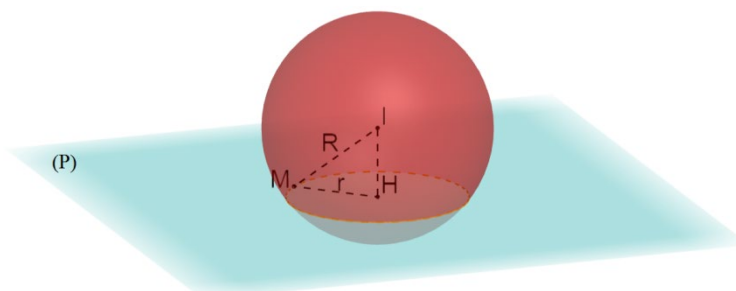
b) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là 3.

c). Tâm đường tròn (C) có tọa độ là $H(1; 3; 1)$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P) . Ta có $IM = R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

a) Ta có đường tròn (C) có diện tích là 25π . Suy ra $r = 5 = MH$.

$$d(I; (P)) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 = IH$$

b) Ta có

$$IH : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

c) Phương trình

$$\text{Vậy tọa độ là } H \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \\ x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(0; 0; 1).$$

d) Suy ra $R^2 = MI^2 = IH^2 + MH^2 = 3^2 + 5^2 = 34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 1)$, bán kính $R = 3$.

b) Điểm $M(1; 3; 5)$ nằm trong mặt cầu.

c) Mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 8 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 2$.

d) Đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B . Khi đó, diện tích tam giác IAB

là: $\frac{\sqrt{182}}{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) **Đúng.**

b) **Sai.**

Ta có $IM = \sqrt{(1-2)^2 + (3+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{33} > R = 3$ nên điểm M nằm ngoài mặt cầu.

c) **Sai.**

Ta có $h = d(I, (P)) = \frac{|2-2-2+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 2 < 3$. Suy ra mặt phẳng $(P): x+2y-2z+8=0$

cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn.

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

d) **Đúng.**

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -1)$, đi qua điểm $N(1; 0; 3)$.

$\vec{IN} = (-1; 1; 2)$, $[\vec{u}, \vec{IN}] = (3; -1; 2)$. Gọi H là trung điểm của AB

$$IH = d(I, d) = \frac{\left| [\vec{u}, \vec{IN}] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \sqrt{\frac{14}{3}}.$$

$$AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \frac{\sqrt{39}}{3} \Rightarrow AB = 2AH = \frac{2\sqrt{39}}{3}$$

$$\text{Diện tích tam giác } IAB \text{ là: } S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{14}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{39}}{3} = \frac{\sqrt{182}}{3}.$$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ cắt đường thẳng

$$(d): \frac{x-11}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+25}{-2} \text{ tại hai điểm } A, B \text{ sao cho } AB = 16.$$

a) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

b) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(5; -3; -31)$.

c) Mặt phẳng (P) chứa $I(2; 3; -1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x + y - 2z - 9 = 0$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 225$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng

b) Vì thay tọa độ $A(5; -3; -31)$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có

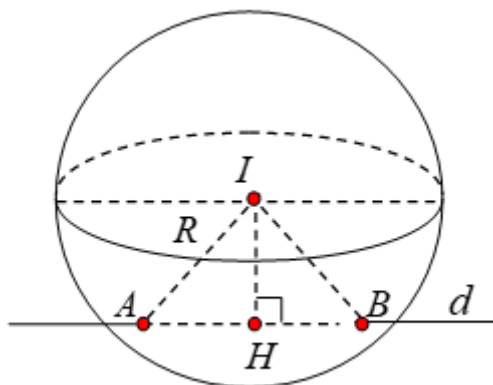
$$\frac{5-11}{2} = \frac{-3}{1} \neq \frac{-31+25}{-2} \text{ nên điểm } A \text{ không thuộc đường thẳng } (d).$$

c) Vì mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) nên (P) nhận vector chỉ phương của (d) là $\vec{u} = (2;1;-2)$ làm vector pháp tuyến.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là

$$2(x-2) + 1(y-3) - 2(z+1) = 0 \text{ hay } 2x + y - 2z - 9 = 0.$$

d)



Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng (d) nên IH và (d) vuông góc với nhau.

Gọi mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x + y - 2z - 9 = 0$.

Suy ra, H là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)

Vì H thuộc đường thẳng (d) nên $H(2t+11, t, -2t-25)$

Mặt khác, H thuộc mặt phẳng (P) nên tọa độ $H(2t+11, t, -2t-25)$ thỏa mãn

$$2(2t+11) + t - 2(-2t-25) - 9 = 0 \text{ hay } t = -7$$

Khi đó, điểm $H(-3, -7, -11)$ và $IH = \sqrt{(-3-2)^2 + (-7-3)^2 + (-11+1)^2} = 15$

Ta được $R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2} = 17.$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính $R=17$ là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17^2 = 289.$

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và điểm $M(-1;0;2)$.

a) Mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có bán kính là $R = IM = \sqrt{3}.$

b) Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có phương trình là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M là $-2x + 2y - z = 0.$

d) Phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$ là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16.$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) $R = IM = \sqrt{9} = 3$

b) Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có dạng

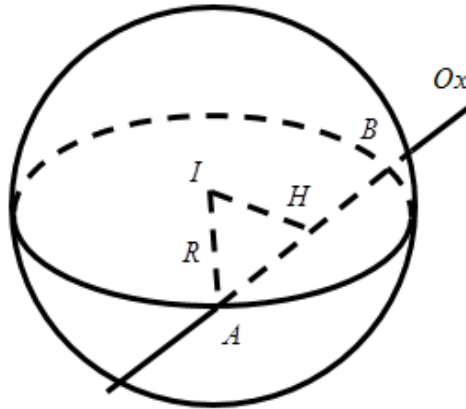
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Suy ra $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M đi qua $M(-1; 0; 2)$ và nhận

$\overrightarrow{IM}(-2; 2; -1)$ làm vectơ pháp tuyến là $-2x + 2y - z = 0$.

d)



Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1; 0; 0)$.

$$IH = \sqrt{13} \Rightarrow R = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = 4.$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; 1; -2)$ đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$.

a) Điểm I không thuộc đường thẳng Δ .

b) Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $2\sqrt{3}$.

c) Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B sao cho $\triangle IAB$ đều có bán kính bằng $2\sqrt{6}$

d) Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Thay điểm $I(1; 1; -2)$ vào phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$, ta được:

$$\frac{2}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{-4}{1} \text{ (Sai).}$$

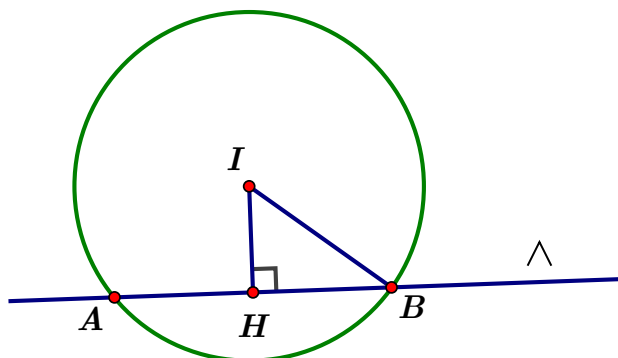
Vậy điểm $I(1; 1; -2)$ không thuộc đường thẳng Δ .

b) Điểm $I(1;1;-2)$, đường thẳng $\Delta: \begin{cases} M(-1;3;2) \\ VTCP \vec{u} = (1;2;1) \end{cases}$.

$$\text{Khoảng cách } d(I, \Delta) = \frac{\|[\vec{IM}, \vec{u}]\|}{\|\vec{u}\|} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

c) $IH = 3\sqrt{2}$, $\triangle IAB$ đều nên $R = IA = IB = AB = 2\sqrt{6}$.

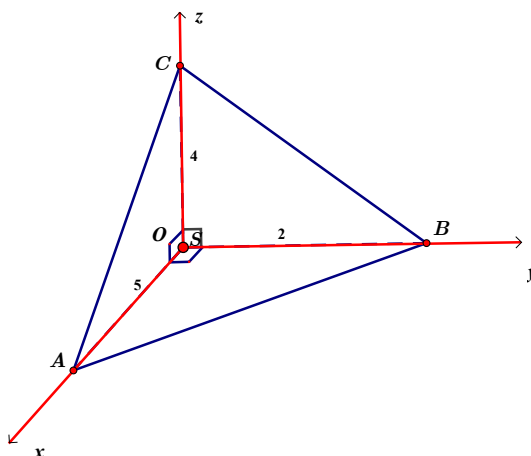
d) Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$.



$$IH = 3\sqrt{2}, HB = 3 \Rightarrow R = IB = \sqrt{27}.$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$.

Câu 31: Cho tứ diện $SABC$, có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = 5, SB = 2, SC = 4$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



a) Tọa độ điểm A là $(0;0;5)$.

b) Phương trình mặt cầu đường kính SC có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

c) Mặt cầu tâm S , tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) có bán kính bằng $\frac{30}{19}$.

d) Phương trình mặt cầu đi qua 4 đỉnh của hình chóp là $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \frac{45}{4}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Tọa độ điểm A là $(5;0;0)$.

b) Phương trình mặt cầu đường kính SC có tâm $I(0;0;2)$ và bán kính $R = \frac{SC}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Nên phương trình mặt cầu thỏa mãn là $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

c) Mặt cầu tâm $S \equiv O$, tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) có bán kính bằng $R = OH$, với H là hình chiếu của S lên mp (ABC) .

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{400}{141}}$

d) Dùng phương trình tổng quát của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

4 điểm O, A, B, C thuộc mặt cầu nên ta có hệ
$$\begin{cases} d = 0 \\ 25 - 10a + d = 0 \\ 4 - 4b + d = 0 \\ 16 - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy tâm cầu là $\left(\frac{5}{2}; 1; 2\right)$, bán kính $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. Ta có phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

SABC là $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \frac{45}{4}$

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$.

a) Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 1$.

b) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.

c) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

d) Bán kính R của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là $R = \sqrt{26}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 1$,

b) $\overrightarrow{AC} = (1;0;7) \Rightarrow AC = \sqrt{50}$, Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $AC = \sqrt{50}$,

c) $\overrightarrow{AB} = (0;-5;5) \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$. Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính nên có tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $R = \frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, có phương trình là: $(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$,

d) Gọi phương trình mặt cầu (S_4) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với tọa độ tâm $I(a;b;c)$.

Ta có:

$$I(a; b; c) \in (Oxy) \Rightarrow c = 0;$$

$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 4b + d = -21 \\ -2a + 6b + d = -11 \\ -4a - 4b + d = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ d = -21 \end{cases};$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4 + 1 + 0 + 21} = \sqrt{26}.$$

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(1; 3; 0), C(-1; 0; 3), D(1; 2; 3)$.

a) Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 25$ có tâm là điểm A .

b) Mặt cầu (S) tâm O bán kính OA có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c) Mặt cầu (S) đường kính AC có phương trình $(S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{9}{2}$.

d) Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính $R = 6$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 25$ có tâm là điểm $A(2; 0; 0)$.

b) Ta có $R = OA = 2 \Rightarrow$ Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c) Tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

d) Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D . Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a+1)^2 + b^2 + (c-3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = -3 \\ a - c = -1 \\ a - 2b - 3c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1)$$

$$\text{Bán kính: } R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$.

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu là $(1; 0; -2)$.

b) Diện tích mặt cầu bằng $16\pi(dvdt)$.

c) Điểm $A(1; 2; 3)$ nằm trong mặt cầu.

d) Số điểm chung của đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S) bằng 0.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu là
$$\begin{cases} x_I = -2 : -2 = 1 \\ y_I = 0 : -2 = 0 \\ z_I = 4 : -2 = -2 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; -2).$$

b) $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} - 1 = 2 \Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi (dvdt).$

c) $\overrightarrow{IA} = (0; 2; 5) \Rightarrow |\overrightarrow{IA}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{29} > 2 \Rightarrow$ điểm A nằm ngoài mặt cầu.

d) Đường thẳng Δ đi qua $M(0; 1; 2)$ và nhận $\vec{u} = (2; 1; -2)$ làm một vector chỉ phương.

$$d(I, \Delta) = \frac{\left| \left[\vec{u}, \overrightarrow{MI} \right] \right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{498}}{6} > R \Rightarrow \Delta \text{ không cắt } (S) \Rightarrow \text{số điểm chung của đường thẳng } \Delta \text{ và mặt cầu } (S) \text{ bằng } 0.$$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$ và hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; -1)$.

b) $|R - d| < 2$ với d là khoảng cách từ tâm I mặt cầu (S) đến mặt phẳng $(P): x + y + 1 = 0$.

c) Đường thẳng AB không cắt mặt cầu (S) .

d) Điểm M thay đổi thuộc (S) , biểu thức $2MA^2 + 3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 105 (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Nên ý a) sai

b) Ta có khoảng cách từ tâm $I(0; 0; 1)$ đến mặt phẳng (P) là $d_{(I, (P))} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $|R - d_{(I, (P))}| = \left| \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \approx 1,53 < 2$

Nên ý b) đúng

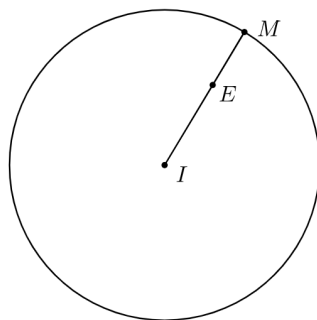
c) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-5; 5; -5), \overrightarrow{AI} = (-2; 2; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (-5; -5; 0)$

Vậy $d_{(I, AB)} = \frac{\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] \right|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2}}{\sqrt{(-5)^2 + 5^2 + (-5)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,82 < R$ nên đường thẳng AB cắt

(S) tại hai điểm phân biệt.

Nên ý c) sai.

d) Mặt cầu có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.



Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0} \Rightarrow E(-1; 1; 1), \overrightarrow{EB} = (-2; 2; -2), \overrightarrow{EA} = (3; -3; 3)$

$$\begin{aligned} \text{Xét } P &= 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + 3(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 \\ &= 2ME^2 + 4\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EA} + 2EA^2 + 3ME^2 + 6\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EB} + 3EB^2 \\ &= 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 + 2\overrightarrow{ME} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB})}_{\vec{0}} = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 \end{aligned}$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\overrightarrow{IE} = (-1; 1; 0) \Rightarrow IE = \sqrt{2} < R$ suy ra E nằm trong mặt cầu nên

$$ME_{\min} = R - IE = \sqrt{5} - \sqrt{2} \text{ với } EB = 2\sqrt{3}, EA = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 5ME_{\min}^2 + 2EA^2 + 3EB^2 = 5(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 2(2\sqrt{3})^2 + 3(3\sqrt{3})^2 \approx 108$$

Nên ý d) sai.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 169.$$

a) Mặt cầu (S) có đường kính bằng 13.

b) Diện tích mặt cầu $S_{mc} = 338\pi$.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 39 = 0$.

d) Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 24$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 3; -1)$ và bán kính $R = 13$.

a) Đường kính của mặt cầu (S) là $d = 2R = 2.13 = 26$.

b) Diện tích mặt cầu bằng $S_{mc} = 4\pi.R^2 = 4\pi.13^2 = 676\pi$.

c) Ta có $d(I, (P)) = \frac{|1.4 - 2.3 - 2.(-1) - 39|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 13 = R$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng.

d) Gọi H là hình chiếu của I lên trục Oz nên $H(0; 0; -1)$ và H là trung điểm của AB .

$$\overrightarrow{IH} = (-4; -3; 0) \Rightarrow IH = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 5.$$

$$\text{Ta có } AH = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

$$\text{Do } H \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } AB = 2IH = 2.12 = 24.$$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 9$.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét là 8 km.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1;3;7)$ bán kính 3 km mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 9$.

b) Ta có: $IA = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{2} < 3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Vì điểm A nằm trong mặt cầu nên người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $A(2;2;7)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Ta có: $IB = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2 + (7-7)^2} = 5 > 3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Ta có: $\overrightarrow{IB}(4;3;0)$; $IB = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2 + (7-7)^2} = 5 > 3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Phương trình đường thẳng BI dạng:
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 3t \\ z = 7 \end{cases}$$

Gọi mặt cầu $(S) \cap BI \equiv E$ suy ra tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 3t \\ z = 7 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ x = \frac{17}{5} \\ y = \frac{24}{5} \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{17}{5}; \frac{24}{5}; 7\right) \Rightarrow EB \approx 1,7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{5} \\ x = -\frac{7}{5} \\ y = \frac{6}{5} \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow E\left(-\frac{7}{5}; \frac{6}{5}; 7\right) \Rightarrow EB = 8$$

Vậy khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét là 8km .

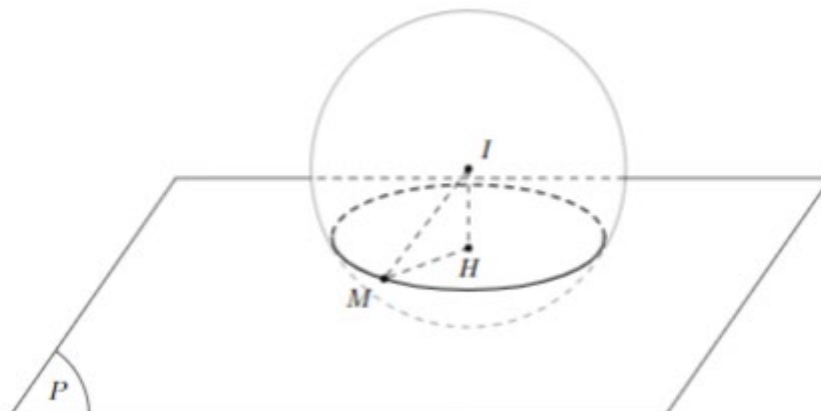
Câu 38: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.
b) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc (S) .
c) Điểm $N(-1;-2;-3)$ nằm ngoài mặt cầu (S) .
d) Mặt phẳng $(P): 3x+4y-5=0$ cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng $\frac{484\pi}{25}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.
b) Thay tọa độ điểm $M(1;2;3)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta được $(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2 = 5$ (TM). Vậy $M \in (S)$.
c) Ta có $\overrightarrow{IN} = (-2; -3; -4)$ suy ra $IN = \sqrt{29} > R$ nên điểm N nằm ngoài mặt cầu (S) .
d)



(P) cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính là r . Khi đó:

$$R^2 = r^2 + d^2(I; (P)) \Leftrightarrow r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (P))} = \frac{11}{5}.$$

Vậy diện tích của đường tròn đó là $S = 4\pi R^2 = \frac{484\pi}{25}$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (C) tâm $I(2;1;-3)$ và đi qua $M(1;-1;-5)$ có phương trình $(C): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + ax + by + cz + d = 0$. Giá trị biểu thức $T = a + b - c + d$ bằng bao nhiêu?
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và $B(0;2;1)$. Biết mặt cầu đường kính AB có dạng $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$. Tính giá trị biểu thức $T = 2a - b + 4c + 2d$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 8 = 0$ có phương trình $(C): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính giá trị của biểu thức $a + b + c + 2d$.
- Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $I(0;2;3)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy .
- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm thuộc trục Oz . Bán kính của mặt cầu (S) là R . Giá trị R^2 bằng?
- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm là $I(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a - b - 2c$.
- Câu 7:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) . Tìm bán kính R của mặt cầu (S) .
- Câu 8:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $I(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.
- Câu 9:** Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?
- Câu 11:** Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π
- Câu 14:** Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 4y + 6mz + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số và $m < 0$). Trong tất cả các mặt cầu có thể có được với mỗi giá trị của m , viết phương trình mặt cầu có diện tích là 36π . Tính $P = m^2 + 2024$
- Câu 15:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và I là hình chiếu vuông góc của $M(3; 1; 2)$ trên trục Ox . Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và đi qua điểm M . Độ dài bán kính mặt cầu bằng
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(1; 2; -3)$ và đi qua điểm $B(3; -2; 1)$. Gọi $M(1; b; -3)$ là điểm thuộc mặt cầu biết $b \in \mathbb{N}^*$. Tung độ điểm M có giá trị bằng
- Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; 3)$, $N(3; -2; -5)$. Mặt cầu (S) có đường kính MN có phương trình dạng $(x-2)^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = c$. Khi đó $a+b+c$ bằng
- Câu 18:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 4)$ và A' là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng Oxy . Mặt cầu (S) có đường kính AA' có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by - 4z + d = 0$. Khi đó $a+b+d$ bằng
- Câu 19:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 3)$ và tiếp xúc với trục Ox . Bán kính của mặt cầu trên bằng
- Câu 20:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox . Hoành độ của tâm mặt cầu (S) là
- Câu 21:** Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$ và có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy) . Gọi một giao điểm của mặt cầu (S) với trục Oz là $A(a; b; c)$ ($c > 1$). Tổng $a+b+c$ bằng
- Câu 22:** Gọi I là giao điểm của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$ và mặt phẳng $(Q): x + y + z - 3 = 0$. Bán kính của mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$ bằng
- Câu 23:** Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$, tiếp xúc với trục Oy có bình phương của bán kính là
- Câu 24:** Cho điểm $I(-3; 1; 4)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với d có bán kính là (lấy giá trị gần đúng đến hàng phần trăm)
- Câu 25:** Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $I(0; 0; 3)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I . Diện tích tam giác IAB bằng

- Câu 26:** Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 9 = 0$, $(Q): 2y + z + 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 16$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng
- Câu 27:** Tính bán kính mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, biết mặt phẳng $(P): 4x + 3y + 12z + 1 = 0$ cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng 16π . (làm tròn đến hàng phần trăm)
Giá trị bằng
- Câu 28:** Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính R , biết mặt phẳng $(P): 9x + 12y + 8z + 5 = 0$ cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = m + 1$. Tìm tổng các giá trị nguyên của tham số m để bán kính mặt cầu nhỏ hơn 5.
Giá trị bằng
- Câu 29:** Gọi $I(m;n;p)$ là tâm của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $M(2;2;2)$, $N(4;0;2)$, $P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$. Khi đó $T = 2m + n - 3p$ bằng
- Câu 30:** Cho 3 điểm $A(2;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) có bán kính là
- Câu 31:** Cho 3 điểm $A(0;8;0)$, $B(4;6;2)$, $C(0;12;4)$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) . Khi đó, $a + b + c = \dots$
- Câu 32:** Cho các điểm $A(1;3;1)$, $B(3;2;2)$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oz bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 33:** Cho các điểm $A(0;1;3)$ và $B(2;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 34:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ nằm trên đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0$, $(Q): x - 2y - 2 = 0$. Tổng $P = a + b + c$ bằng
- Câu 35:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm thuộc Ox và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y - 2z + 3 = 0$ có bán kính R bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 36:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Diện tích của mặt cầu đó có kết quả là (làm tròn đến hàng phần trăm)

- Câu 37:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+10}{-3}$. Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ có bán kính nhỏ nhất trong số các mặt cầu tiếp xúc với cả d_1 và d_2 . Giá trị $T = a^2 - b + c$ có kết quả là
- Câu 38:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1-t \\ y = mt \\ z = 2 \end{cases} (m \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$. Biết đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) . Số giá trị nguyên dương m tương ứng bằng
- Câu 39:** Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+3}{3}$. Khoảng cách ngắn nhất từ tâm mặt cầu (S) đến đường thẳng d bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)
- Câu 40:** Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 2+mt \end{cases} (m \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$. Biết d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B phân biệt và độ dài $AB = 6$. Số giá trị m nguyên thỏa đề bài là
- Câu 41:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 4 điểm có tọa độ lần lượt là $A(2;0;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;0;3)$, $D(1;1;-1)$. Tâm của mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4a + b - c$.
- Câu 42:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;2)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính $T = a + b + c - d$.
- Câu 43:** Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tìm bán kính mặt cầu (C) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 44:** Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 11$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của mặt cầu (C) tại điểm $A(2;1;0)$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u_d} = (-1;b;c)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tính giá trị $b+c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 45:** Trong không gian Oxy , tổng tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

- Câu 46:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;m;1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$. Tập các giá trị của m để điểm A nằm trong khối cầu có dạng $(a;b)$ với $a;b$ là các số nguyên. Giá trị của a^b bằng.
- Câu 47:** Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu?
- Câu 48:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và đi qua $A(5;-1;4)$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c + R^2$.
- Câu 49:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).
- Câu 50:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;2;-2)$, $B(3;-3;3)$ và điểm M không cố định trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.
- Câu 51:** Trong không gian $Oxyz$, khi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 7m^2 - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu. Xác định m để mặt cầu có bán kính lớn nhất.
- Câu 52:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, tính giá trị của $P = \frac{abc}{R}$?
- Câu 53:** Cho các điểm $A(-2;4;1)$, $B(2;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = -2+t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d . Bán kính của mặt cầu (S) là $R = a\sqrt{b}$, tính giá trị của $P = a + b$?
- Câu 54:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Gọi mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ thuộc Δ và tiếp xúc với (P) tại $H(1;-1;0)$. Khi đó giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng bao nhiêu?
- Câu 55:** Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

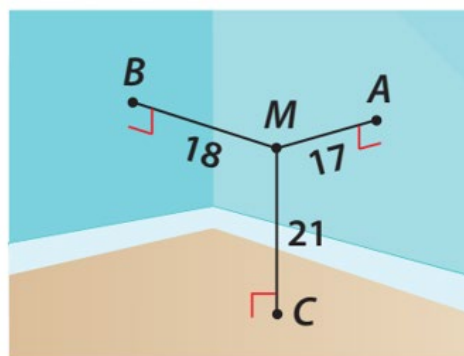
Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$, $(P): x+2y-2z-2=0$, $(Q): x+2y-2z+4=0$. Gọi mặt cầu $S(I, R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P), (Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Câu 57: Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{3}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt trong đó $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0$. Giá trị biểu thức $T = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ bằng (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 58: Cho 3 điểm $M(2;3;3), N(2;-1;-1), P(-2;-1;3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm M, N, P và có tâm thuộc mặt phẳng (α) có bán kính là:

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a+b+c = \dots$

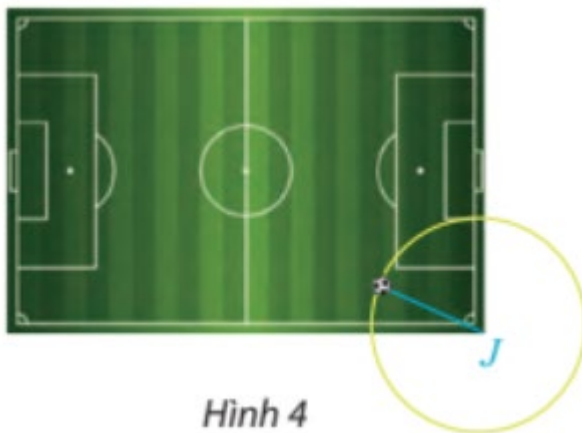
Câu 60: Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đường kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*



Câu 61: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y)^2 + (z-2)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a,b,c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Câu 62: Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 4m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 8m; 8,8m; 9,6m. Biết đáy bể là phẳng. Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là (làm tròn tới hàng phần chục) (đơn vị độ)

Câu 63: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S): (x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là:



Hình 4

- Câu 64:** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, sàn nhà của một công trình thuộc mặt phẳng Oxy , tay vịn của lan can cầu thang là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(5;1;9)$ và $B(2;1;12)$. Góc tạo bởi tay vịn của lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng bao nhiêu độ?
- Câu 65:** Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15;1;6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA , với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?
- Câu 66:** Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3;1;1)$ như hình vẽ. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng $11(m)$. Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.





PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (C) tâm $I(2;1;-3)$ và đi qua $M(1;-1;-5)$ có phương trình $(C): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + ax + by + cz + d = 0$. Giá trị biểu thức $T = a + b - c + d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -14

Mặt cầu (C) có tâm $I(2;1;-3)$, bán kính $IM = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-1)^2 + (-5+3)^2} = 3$.

Phương trình mặt cầu $(C): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x - 4y + 12z + 10 = 0.$$

Suy ra $a = -8, b = -4, c = 12, d = 10$.

Vậy $T = -8 - 4 - 12 + 10 = -14$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và $B(0;2;1)$. Biết mặt cầu đường kính AB có dạng $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$. Tính giá trị biểu thức $T = 2a - b + 4c + 2d$.

Lời giải

Trả lời: 9

Mặt cầu (C) có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB .

$$\text{Bán kính } IA = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (0-1)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Phương trình mặt cầu } (C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}, d = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } T = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} = 9.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 8 = 0$ có phương trình $(C): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính giá trị của biểu thức $a + b + c + 2d$.

Lời giải

Trả lời: -4

Bán kính mặt cầu là:

$$r = d(I; (P)) = \frac{|2 - 4 + 1 - 8|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3.$$

Phương trình mặt cầu $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0.$$

Suy ra $a = 1; b = 2; c = -1; d = -3.$

Hay $a + b + c + 2d = 1 + 2 + (-1) + 2 \cdot (-3) = -4.$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $I(0; 2; 3)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy .

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi H hình chiếu vuông góc của I lên trục $Oy \Rightarrow H(0; 2; 0).$

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy nên mặt cầu có bán kính $R = IH = 3.$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$ và có tâm thuộc trục Oz . Bán kính của mặt cầu (S) là R . Giá trị R^2 bằng?

Lời giải

Trả lời: 11

Gọi tâm của mặt cầu là $I(a; b; c)$. Vì $I \in Oz$ nên $I(0; 0; c).$

Mặt cầu đi qua A, B nên có $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 9 + 1 + (c - 2)^2 = 1 + 1 + (c + 2)^2 \Leftrightarrow c = 1.$

Bán kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{11}.$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2), D(2; 2; 2).$ Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm là $I(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a - b - 2c$.

Lời giải

Trả lời: -2

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có dạng $(S):$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0; \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Vì mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 4 - 4b + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 12 - 4a - 4b - 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = b = c = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } I(1; 1; 1) \text{ nên } T = a - b - 2c = -2.$$

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -3), B(-3; -2; -5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) . Tìm bán kính R của mặt cầu (S) .

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Khi đó $AM^2 + BM^2 = 30$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 + (x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 = 30$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 16z + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 8z + 9 = 0$$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 9$ là phương trình của mặt cầu (S) , có tâm $I(-1; -1; -4)$ và bán kính $R = 3$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0; 1; 2)$ và hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD) là $H(4; -3; -2)$. Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $I(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

Trả lời: 14

Gọi $I(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-a; 1-b; 2-c); \overrightarrow{IH} = (4-a; -3-b; -2-c)$

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện

Nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IH} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IH}$ (Vì H là trọng tâm tam giác BCD)

Từ đó ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -a = -3(4-a) \\ 1-b = -3(-3-b) \\ 2-c = -3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3; -2; -1).$$

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 14$

Câu 9: Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

Lời giải

Trả lời: 1,5

Ta có: $MA = 3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 9(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$$\Leftrightarrow IA^2 - 9IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB}) = 8MI^2 \quad (1)$$

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB = \frac{1}{2}; IA = \frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$ suy ra M thuộc mặt cầu (S) có tâm là I và bán kính $R = \frac{3}{2}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

Lời giải

Trả lời: 7

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$$

Theo bài ra $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

Lời giải

Trả lời: 1

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2; -m; 0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - (3m^2 - 2m)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$.

với điều kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2m)^2 + (y+m)^2 + (z-m)^2 = 28 - 3m^2 \quad (1).$$

$$(1) \text{ là phương trình mặt cầu } \Leftrightarrow 28 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π

Lời giải

Trả lời: 2

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a}$.

$$\text{Do đó: } \sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 11 \end{cases}.$$

Câu 14: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 4y + 6mz + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số và $m < 0$). Trong tất cả các mặt cầu có thể có được với mỗi giá trị của m , viết phương trình mặt cầu có diện tích là 36π . Tính $P = m^2 + 2024$

Lời giải

Trả lời: 2025

Ta có $A = -m; B = 2; C = -3m; D = m^2 + 4$

Ta có $r^2 = A^2 + B^2 + C^2 - D = m^2 + 4 + 9m^2 - m^2 - 4 = 9m^2$

Lại có $S = 4\pi r^2 = 4\pi 9m^2 = 36\pi \Leftrightarrow m^2 = \pm 1 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow P = m^2 + 2024 = (-1)^2 + 2024 = 2025$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và I là hình chiếu vuông góc của $M(3; 1; 2)$ trên trục Ox . Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và đi qua điểm M .

Độ dài bán kính mặt cầu bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1; 0; 0) \Rightarrow IM = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(1; 2; -3)$ và đi qua điểm $B(3; -2; 1)$. Gọi $M(1; b; -3)$ là điểm thuộc mặt cầu biết $b \in \mathbb{N}^*$.

Tung độ điểm M có giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 8

Mặt cầu (S) đi qua $B(3; -2; 1)$ nên bán kính $R = AB$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2 + (1+3)^2} \Leftrightarrow R = 6$$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 36$.

Thay tọa độ điểm $M(1; b; -3)$ vào phương trình mặt cầu (S) , ta có:

$$(1-1)^2 + (b-2)^2 + (-3+3)^2 = 36 \Leftrightarrow (b-2)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} b-2 = 6 \\ b-2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 \\ b = -4 \end{cases}$$

Vì $b > 0$ nên nhận $b = 8$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; 3)$, $N(3; -2; -5)$. Mặt cầu (S) có đường kính MN có phương trình dạng $(x-2)^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = c$. Khi đó $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 20

+) Ta có tọa độ trung điểm I của đoạn MN là $I(2; 0; -1)$ và $\overrightarrow{MN} = (2; -4; -8)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{4+16+64} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

+) Suy ra phương trình mặt cầu đường kính MN là: $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 21$

+) Vậy $a+b+c = 0 + (-1) + 21 = 20$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 4)$ và A' là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng Oxy . Mặt cầu (S) có đường kính AA' có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by - 4z + d = 0$. Khi đó $a+b+d$ bằng

Lời giải

Trả lời: -1

+ Ta có tọa độ của A' là $A'(1; 2; 0) \Rightarrow$ tọa độ trung điểm I của đoạn AA' là $I(1; 2; 2)$

có $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 4) \Rightarrow AA' = \sqrt{0+0+4^2} = 4$

+ Suy ra phương trình mặt cầu đường kính AA' là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z + 5 = 0$$

+ Vậy $a+b+d = (-2) + (-4) + 5 = -1$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 3)$ và tiếp xúc với trục Ox . Bán kính của mặt cầu trên bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) và H là hình chiếu của I trên trục Ox suy ra $H(2; 0; 0)$

$$\text{và } R = IH = \sqrt{(2-2)^2 + (0+4)^2 + (0-3)^2} = 5.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 3)$ và bán kính là $R = 5$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox . Hoành độ của tâm mặt cầu (S) là

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi I là tâm mặt cầu (S) . Vì tâm I nằm trên tia Ox nên $I(a; 0; 0)$, ($a > 0$).

Vì mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên ta có:

$$d(I, (Oyz)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|a|}{1} = 2 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Do $a > 0$ nên ta nhận $a = 2$, loại $a = -2$. Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(2, 0, 0)$.

Câu 21: Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$ và có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy) . Gọi một giao điểm của mặt cầu (S) với trục Oz là $A(a; b; c)$ ($c > 1$). Tổng $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $(Oxy): z = 0$.

Mặt cầu (S) có đúng một điểm chung với mặt phẳng $(Oxy) \Leftrightarrow R = d(I, (Oxy)) = 3$.

$$\text{Suy ra } (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

$$\text{Cho } x = y = 0 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + (z-3)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vì $c > 1$ nên $A(0; 0; 5) \Rightarrow a+b+c = 5$.

Câu 22: Gọi I là giao điểm của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$ và mặt phẳng $(Q): x + y + z - 3 = 0$. Bán

kính của mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $I \in d \Rightarrow I(1 + 2t; -2 - t; t)$.

Vì $I = d \cap (Q)$ nên $I \in (Q) \Rightarrow 1 + 2t - 2 - t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $I(5; -4; 2)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$

$$\Leftrightarrow R = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 5 - (-4) + 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6.$$

Câu 23: Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$, tiếp xúc với trục Oy có bình phương của bán kính là

Lời giải

Trả lời: 10

Vì mặt cầu tiếp xúc với trục tung nên bán kính $R = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Câu 24: Cho điểm $I(-3; 1; 4)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với d có bán kính là (lấy giá trị gần đúng đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 5,48

Vì mặt cầu tiếp xúc với d nên bán kính $R = d(I, d) = IH$ với H là hình chiếu của I lên d .

Vì $H \in d$ nên gọi $H(2t - 1; t + 2; -t - 3)$ mà $IH \perp d$ nên $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$.

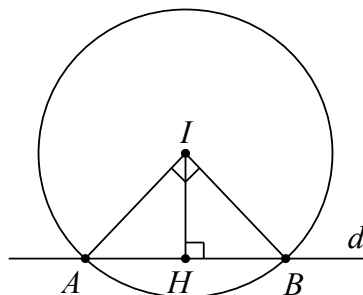
Ta có $\overrightarrow{IH}(2t + 2; t + 1; -t - 7); \overrightarrow{u_d}(2; 1; -1)$

Suy ra $4t + 4 + t + 1 + t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow \overrightarrow{IH}(-2; -1; -5) \Rightarrow R = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30} \approx 5,48$.

Câu 25: Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $I(0; 0; 3)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I . Diện tích tam giác IAB bằng

Lời giải

Trả lời: 1



Đường thẳng d đi qua $M(-1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u}(1;2;2)$.

Do đó: $\overrightarrow{IM}(-1;0;-1) \Rightarrow [\vec{u}, \overrightarrow{IM}] = (-2; -1; 2)$, suy ra $d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}|}{|\vec{u}|} = 1$.

Vì tam giác IAB là tam giác vuông cân tại I nên $\widehat{IBA} = 45^\circ$.

Khi đó tam giác IBH là tam giác vuông cân tại H .

$$\Rightarrow IB = IH\sqrt{2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.d(I, d) \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.$$

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 = 1$$

Câu 26: Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 9 = 0$, $(Q): 2y + z + 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 16$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

Lời giải

Trả lời: 9

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1(1; -2; 1)$, (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_2(0; 2; 1)$ nên d có vector chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (-4; -1; 2)$.

d đi qua điểm $N(14; 0; -5) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (13; -1; -6) \Rightarrow [\overrightarrow{IN}, \vec{u}] = (-8; -2; -17)$

Khoảng cách từ I đến d là

Gọi là hình chiếu của I trên là trung điểm của và

Bán kính mặt cầu là

Câu 27: Tính bán kính mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$, biết mặt phẳng $(P): 4x + 3y + 12z + 1 = 0$ cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng 16π . (làm tròn đến hàng phần trăm)
Giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 4,47

$$d(I; (P)) = \frac{|4 - 3 + 12 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = 2.$$

Ta có $S = \pi r^2 \Leftrightarrow 16\pi = \pi r^2 \Leftrightarrow r = 4$.

$$R_{mc} = \sqrt{d^2(I; (P)) + r^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \approx 4,47.$$

Câu 28: Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ và bán kính R , biết mặt phẳng $(P): 9x + 12y + 8z + 5 = 0$ cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = m + 1$. Tìm tổng các giá trị nguyên của tham số m để bán kính mặt cầu nhỏ hơn 5.

Giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có: $r = m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

$$d(I; (P)) = \frac{|9 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 8 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 8^2}} = 3.$$

Ta có

$$0 < R_{mc} < 5 \Leftrightarrow \sqrt{d^2(I; (P)) + r^2} < 5 \Leftrightarrow 3^2 + (m+1)^2 < 25 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 3.$$

Kết hợp điều kiện ta được: $-1 < m < 3$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Tổng các giá trị nguyên của m bằng 3.

Câu 29: Gọi $I(m; n; p)$ là tâm của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $M(2; 2; 2)$, $N(4; 0; 2)$, $P(4; 2; 0)$ và $Q(4; 2; 2)$. Khi đó $T = 2m + n - 3p$ bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Gọi phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

$$\text{Do } M(2; 2; 2) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 4c + d = -12 \quad (1)$$

$$N(4; 0; 2) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4c + d = -20 \quad (2)$$

$$P(4; 2; 0) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4b + d = -20 \quad (3)$$

$$Q(4; 2; 2) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4b - 4c + d = -24 \quad (4)$$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 8$, suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(3; 1; 1)$

$$\text{Khi đó } T = 2m + n - 3p = 2 \cdot 3 + 1 - 3 \cdot 1 = 4$$

Câu 30: Cho 3 điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) có bán kính là

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C .

$$\text{Khi đó } IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Do tâm của mặt cầu thuộc mặt phẳng (P) nên $a + b + c - 2 = 0$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ a - b = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Bán kính của mặt cầu là: $R = IA = 1$.

Câu 31: Cho 3 điểm $A(0; 8; 0)$, $B(4; 6; 2)$, $C(0; 12; 4)$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) . Khi đó, $a + b + c = \dots$

Lời giải

Trả lời: 12

Do tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên $I(0;b;c) \Rightarrow a = 0$.

Mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C nên $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-8)^2 + c^2 = 4^2 + (b-6)^2 + (c-2)^2 \\ (b-8)^2 + c^2 = (b-12)^2 + (c-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy tâm $I(0;7;5)$. Nên $a + b + c = 12$.

Câu 32: Cho các điểm $A(1;3;1); B(3;2;2)$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oz bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,74

Do tâm I thuộc trục Oz nên $I(0;0;z)$

$$IA^2 = 1^2 + 3^2 + (z-1)^2$$

$$IB^2 = 3^2 + 2^2 + (z-2)^2$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 1^2 + 3^2 + (z-1)^2 = 3^2 + 2^2 + (z-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2z = 6 \Leftrightarrow z = 3$$

$$\Rightarrow I(0;0;3); R^2 = IA^2 = 14$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{14} \approx 3,74$$

Câu 33: Cho các điểm $A(0;1;3)$ và $B(2;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 2,29

Do tâm I thuộc trục Oz nên $I(0;0;z)$

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$$

$$\text{Phương trình tham số của } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Gọi I là tâm của mặt cầu, do I thuộc d nên $I(1+2t; 2-t; 3-2t)$

Ta có:

$$IA^2 = (1+2t)^2 + (2-t-1)^2 + (3-2t-3)^2 = 9t^2 + 2t + 2$$

$$IB^2 = (1+2t-2)^2 + (2-t-2)^2 + (3-2t-1)^2 = 9t^2 - 4t + 5$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 9t^2 + 2t + 2 = 9t^2 - 4t + 5$$

$$\Leftrightarrow t = 1/2$$

$$\Rightarrow I(2; 3/2; 2); R^2 = IA^2 = 21/4$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{2} \approx 2,29$$

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ nằm trên đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0$, $(Q): x - 2y - 2 = 0$. Tổng $P = a + b + c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6

Gọi tâm mặt cầu là $I(a; a+1; a+2) \in (d)$. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) và (Q) nên $d(I; (P)) = d(I; (Q))$.

$$\text{Suy ra } \frac{|2a - a - 2 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 2(a+1) - 2|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |a - 6| = |-a - 4| \Leftrightarrow a = 1.$$

Tâm mặt cầu là $I(1; 2; 3) \Rightarrow P = 6$

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm thuộc Ox và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y - 2z + 3 = 0$ có bán kính R bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,67

Gọi $I(a; 0; 0)$ là tâm của mặt cầu (S) . Ta có $d(I; (P)) = d(I; (Q)) \Leftrightarrow \frac{|a-1|}{3} = \frac{|a+3|}{3} \Leftrightarrow a = -1$

Khi đó, bán kính của mặt cầu (S) là $R = d(I; (P)) = \frac{|a-1|}{3} = \frac{2}{3}$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và

$\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S)

là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Diện tích của mặt cầu đó có kết quả là (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 18,8

Ta dễ dàng kiểm chứng được Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có bán kính nhỏ nhất. Suy ra mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính AB (với AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2)

Ta có: Δ_1 đi qua $M(4; 1; -5)$ và có VTCP $\vec{u}_{\Delta_1} = (3; -1; -2)$

Δ_2 đi qua $N(2; -3; 0)$ và có VTCP $\vec{u}_{\Delta_2} = (1; 3; 1)$

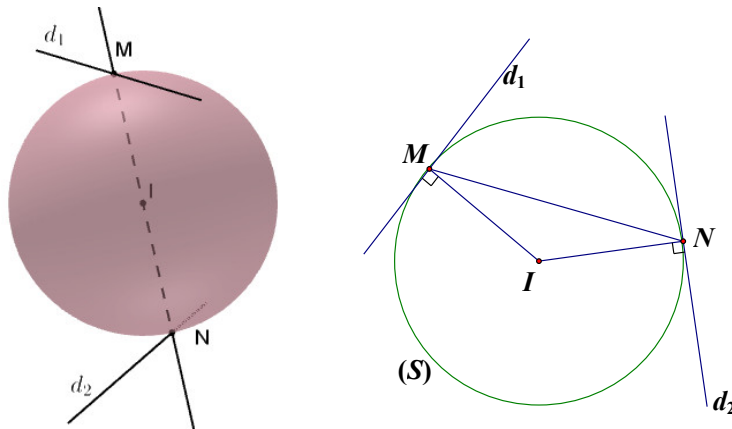
$$\text{Suy ra } d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left| \left[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2} \right] \cdot \vec{MN} \right|}{\left| \left[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2} \right] \right|} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Vậy bán kính } R = \frac{AB}{2} = \frac{d(\Delta_1, \Delta_2)}{2} = \sqrt{6}. \text{ Diện tích mặt cầu } (S) \text{ là } S = \pi R^2 = 6\pi \approx 18.8$$

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+10}{-3}$. Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ có bán kính nhỏ nhất trong số các mặt cầu tiếp xúc với cả d_1 và d_2 . Giá trị $T = a^2 - b + c$ có kết quả là

Lời giải

Trả lời: -4



Gọi (S) là mặt cầu tâm I , bán kính R tiếp xúc với d_1 và d_2 lần lượt tại M và N .

Suy ra $IM \perp d_1$ và $IN \perp d_2$. Khi đó ta có $IM + IN \geq MN \Leftrightarrow 2R \geq MN \Leftrightarrow R \geq \frac{MN}{2}$.

Để bán kính R đạt giá trị nhỏ nhất thì MN đạt giá trị nhỏ nhất hay M, I, N thẳng hàng.

Dễ nhận thấy d_1 và d_2 chéo nhau. Suy ra MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 . Khi đó.

Mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính MN .

$$\text{Thật vậy, ta có } d_1: \begin{cases} x = -4t \\ y = 3+t \\ z = 4+3t \end{cases} \text{ có VTCP } \vec{u}_{d_1} = (-4; 1; 3). M \in d_1 \Rightarrow M(-4t; 3+t; 4+3t).$$

$$d_2: \begin{cases} x = 2+4t' \\ y = -2t' \\ z = -10-3t' \end{cases} \text{ có VTCP } \vec{u}_{d_2} = (4; -2; -3). N \in d_2 \Rightarrow N(2+4t'; -2t'; -10-3t')$$

$$\text{Suy ra } \vec{MN} = (2+4t'+4t; -3-2t'-t; -14-3t'-3t)$$

$$\text{Có } \begin{cases} \vec{MN} \perp \vec{u}_{d_1} \\ \vec{MN} \perp \vec{u}_{d_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27t' + 26t = -53 \\ 29t' + 27t = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \Rightarrow N(-2; 2; -7) \\ t = -1 \Rightarrow M(4; 2; 1) \end{cases}$$

Vì mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính MN suy ra tâm $I(1;2;-3)$ hay $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-3 \end{cases}$

Vậy $T = a^2 - b + c = 1^2 - 2 + (-3) = -4$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=mt \\ z=2 \end{cases} (m \in R, t \in R)$ và mặt cầu

$(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$. Biết đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) .

Số giá trị nguyên dương m tương ứng bằng

Lời giải

Trả lời: 0

Gọi $M(1-t; mt; 2) \in d$ là giao điểm (nếu có) của đường thẳng d và mặt cầu (S) .

Thay điểm $M(1-t; mt; 2)$ vào phương trình mặt cầu, ta có: $(1-t)^2 + (mt-2)^2 + (2+2)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow 1 - 2t + t^2 + m^2 t^2 - 4mt + 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow (m^2 + 1)t^2 - 2(1 + 2m)t - 4 = 0 \quad (1)$$

Để đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) khi

$$\Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow (1 + 2m)^2 + 4(m^2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4m + 4m^2 + 4m^2 + 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 + 4m + 5 < 0 \quad (VN)$$

$$\Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Câu 39: Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+3}{3}$.

Khoảng cách ngắn nhất từ tâm mặt cầu (S) đến đường thẳng d bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,38

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R = 4$

Thay tâm $I(1;-2;3)$ vào phương trình đường thẳng d , ta được: $\frac{0}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{6}{3}$

Nên tâm $I(1;-2;3)$ không thuộc đường thẳng d .

$$\text{Chọn } M(1;-4;-3) \in d \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (0;-2;-6) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}] = (0;-12;4).$$

$$\text{Vậy } d_{(I,d)} = \frac{\|[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}]\|}{\|\overrightarrow{u_d}\|} = \frac{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + 4^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} \approx 3,38$$

Câu 40: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=2+mt \end{cases}$

$(m \in R, t \in R)$. Biết d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B phân biệt và độ dài $AB = 6$.

Số giá trị m nguyên thỏa đề bài là

Lời giải

Trả lời: 0

Mặt cầu có dạng: $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 3$

Chọn $M(2; -1; 2) \in d \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (1; 1; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}] = (m+1; -m-1; 0)$

$$\text{Ta có } d_{(I,d)} = \frac{[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}]}{|\overrightarrow{u_d}|} = \frac{\sqrt{(m+1)^2 + (-m-1)^2 + 0^2}}{\sqrt{2+m^2}} = \frac{\sqrt{2m^2 + 4m + 2}}{\sqrt{2+m^2}}$$

$$\text{Vì } d \text{ cắt mặt cầu tại hai điểm } A, B \text{ phân biệt nên } R^2 = d_{(I,d)}^2 + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow 9 = \frac{2m^2 + 4m + 2}{2+m^2} + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2 + 4m + 2}{2+m^2} = \frac{27}{4} \Leftrightarrow 19m^2 - 16m + 46 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị tham số m thỏa đề bài.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 4 điểm có tọa độ lần lượt là $A(2; 0; 0)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; 1; -1)$. Tâm của mặt cầu (S) là $I(a; b; c)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4a + b - c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi phương trình tổng quát của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Thay tọa độ 4 điểm vào phương trình mặt cầu, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 1 + 1 + 2a - 2c + d = 0 \\ 9 - 6c + d = 0 \\ 1 + 1 + 1 - 2a - 2b + 2c + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ 2a - 2c + d = -2 \\ -6c + d = -9 \\ -2a - 2b + 2c + 2d = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{14} \\ b = \frac{17}{14} \\ c = \frac{19}{14} \\ d = -\frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow T = 4a + b - c = 4 \cdot \frac{11}{14} + \frac{17}{14} - \frac{19}{14} = 3.$$

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 2)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính $T = a + b + c - d$.

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} M_0(1;1;0) \in \Delta \\ VTCP \vec{u} = (1;1;-1) \end{cases}$. Suy ra $\overrightarrow{MM_0} = (0;-2;-2)$.

Vì Δ là một tiếp tuyến của mặt cầu (S) nên $R = d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{[u, \overrightarrow{MM_0}]}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$.

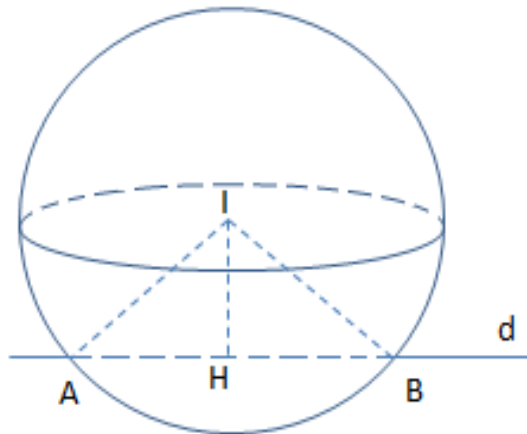
Khi đó phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 8$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = 6 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c - d = 0.$$

Câu 43: Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tìm bán kính mặt cầu (C) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,21



• Gọi $H(-1+t; 2t; 2+t) \in d$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d
 $\Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1+t; 2t; -1+t)$

• Ta có vector chỉ phương của $d: \vec{u} = (1; 2; 1)$ và $IH \perp d$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1+t+4t-1+t=0 \Leftrightarrow -2+6t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow H\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy bán kính của cầu: } R = IA = IB = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{93}}{3} \approx 3,21$$

Câu 44: Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 11$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của mặt cầu (C) tại điểm $A(2;1;0)$ có vector chỉ phương là $\vec{u_d} = (-1; b; c)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tính giá trị $b+c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,71

Mặt cầu (C) có tâm $I = (1; 2; -3)$, khi đó $\vec{IA} = (1; -1; 3)$

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u_\Delta} = (1; 2; 1)$

Do d là tiếp tuyến của mặt cầu tại điểm $A(2;1;0)$ nên $\vec{IA} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow -b + 3c - 1 = 0$

Lại có d vuông góc với đường thẳng Δ nên $\vec{u_\Delta} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2b + c - 1 = 0$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} -b + 3c - 1 = 0 \\ 2b + c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{7} \\ c = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Vậy $b+c = \frac{5}{7} \approx 0,71$.

Câu 45: Trong không gian Oxy , tổng tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

Trả lời: 6

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a = 0 \\ b = m-2 \\ c = -(m+3) \\ d = 3m^2 + 7 \end{cases}$$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu khi:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + (m+3)^2 - (3m^2 + 7) > 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 6 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{7} < m < 1 + \sqrt{7}.$$

Mà $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Nên $0+1+2+3=6$

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; m; 1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$. Tập các giá trị của m để điểm A nằm trong khối cầu có dạng $(a; b)$ với $a; b$ là các số nguyên. Giá trị của a^b bằng.

Lời giải

Trả lời: -1

Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$.

Điểm $A(1; m; 1)$ nằm trong khối cầu (S) $\Leftrightarrow 1^2 + m^2 + 1^2 - 2m + 4 \cdot 1 - 9 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 < 0$
 $\Leftrightarrow m \in (-1; 3)$.

Vậy $a^b = -1$

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu?

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6-m$.

Để phương trình trên là phương trình mặt cầu thì $6-m > 0 \Leftrightarrow m < 6$.

Vậy giá trị nguyên dương m cần tìm là $1; 2; 3; 4; 5$.

Vậy có 5 giá trị thỏa đề.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và đi qua $A(5; -1; 4)$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c + R^2$.

Lời giải

Trả lời: 24

Tâm $I(1; -3; 2)$

Bán kính $R = IA = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24}$

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 24$.

Ta có: $a + b + c + R^2 = 1 + (-3) + 2 + 24 = 24$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 10,2

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x; y; 0)$.

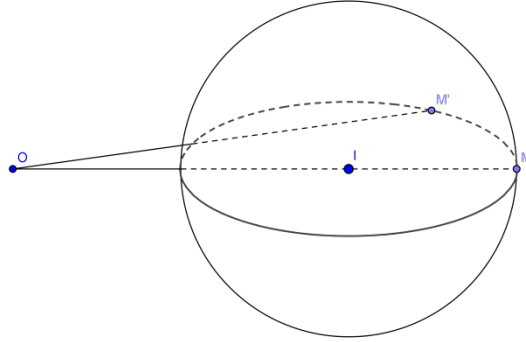
$$\begin{aligned} \begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ (x-1)^2 + 4^2 = (x-2)^2 + 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4 + 4^2 = y^2 + 6y + 9 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } I(-2; 1; 0) \end{aligned}$$

Vậy $l = 2R = 2\sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26} \approx 10,2$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2; 2; -2)$, $B(3; -3; 3)$ và điểm M không cố định trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.*

Lời giải

Trả lời: 20,8



Gọi $M(x; y; z)$.

Ta có: $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$

$$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$$

Suy ra M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6; 6; -6)$ bán kính $R = 6\sqrt{3}$.

Khi đó $OM_{\max} = d(O; I) + R = OI + R = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20,8$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, khi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 7m^2 - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu. Xác định m để mặt cầu có bán kính lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 2

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 7m^2 - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 + m^2 - (7m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 5.$$

Với $m \in (-1; 5)$ ta có mặt cầu có bán kính là $R = \sqrt{-m^2 + 4m + 5} = \sqrt{-(m-2)^2 + 9}$.

$$\text{Ta có } (m-2)^2 \geq 0 \Rightarrow -(m-2)^2 + 9 \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{-(m-2)^2 + 9} \leq 3.$$

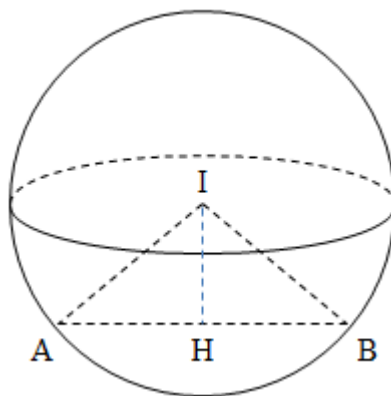
Vậy, bán kính mặt cầu lớn nhất bằng 3 khi $m = 2$.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \text{ tính giá trị của } P = \frac{abc}{R}?$$

Lời giải

Trả lời: -1,5



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục $Ox \Rightarrow H(1;0;0) \Rightarrow IH = \sqrt{13}$

Mà $HA = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$.

Nên bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = 4$.

Khi đó, phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Vậy giá trị của $P = \frac{abc}{R} = \frac{1 \cdot (-2) \cdot 3}{4} = -\frac{3}{2} = -1,5$.

Câu 53: Cho các điểm $A(-2;4;1)$, $B(2;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-2+t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua

A, B và có tâm thuộc đường thẳng d . Bán kính của mặt cầu (S) là $R = a\sqrt{b}$, tính giá trị của $P = a + b$?

Lời giải

Trả lời: 6

Tâm $I \in d \Rightarrow I(1+t; 1+2t; -2+t)$.

$\overrightarrow{AI} = (3+t; -3+2t; -3+t)$; $\overrightarrow{BI} = (-1+t; 1+2t; -5+t)$.

Vì (S) đi qua A, B nên ta có:

$$\begin{aligned} IA = IB &\Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (3+t)^2 + (-3+2t)^2 + (-3+t)^2 = (-1+t)^2 + (1+2t)^2 + (-5+t)^2 \\ &\Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (3; -3; -3). \end{aligned}$$

Suy ra, bán kính mặt cầu (S) : $R = IA = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}$.

Vậy giá trị của $P = a + b = 3 + 3 = 6$.

Câu 54: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Gọi mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ thuộc Δ và tiếp xúc với (P) tại $H(1; -1; 0)$. Khi đó giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 14

Ta có: phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(1 - 2t; 2t; 2 + t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1 - 2t; 2t; 2 + t) \in \Delta$ và tiếp xúc với (P) tại $H(1; -1; 0)$ nên ta có:

$$d(I, (P)) = IH \Leftrightarrow \frac{|2(1 - 2t) - 2t + (2 + t) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{(2t)^2 + (-1 - 2t)^2 + (-2 - t)^2}$$

$$\Leftrightarrow (-5t + 1)^2 = 6(9t^2 + 8t + 5) \Leftrightarrow -29t^2 - 58t - 29 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

$$t = -1 \Rightarrow I(3; -2; 1) \Rightarrow a = 3, b = -2, c = 1.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 = 14.$$

Câu 55: Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m + 100; m + 370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Lời giải

Trả lời: 512

Để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m + 100; m + 370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$ thì $IA \leq 600 \Leftrightarrow (m - 100)^2 + (m - 80)^2 + (-60)^2 \leq 600^2$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 360m - 340000 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{180 - \sqrt{712400}}{2} \leq m \leq \frac{180 + \sqrt{712400}}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } m \text{ là } \frac{180 + \sqrt{712400}}{2} \approx 512.$$

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$, $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z + 4 = 0$. Gọi mặt cầu $S(I, R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P), (Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(2 - 3t; 1 + 2t; 1 + 2t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2 - 3t; 1 + 2t; 1 + 2t)$ thuộc Δ và tiếp xúc với $(P), (Q)$ nên ta có:

$$d(I, (P)) = d(I, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|(2 - 3t) + 2(1 + 2t) - 2(1 + 2t) - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(2 - 3t) + 2(1 + 2t) - 2(1 + 2t) + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |-3t| = |-3t+6| \Rightarrow t=1.$$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;3)$ và bán kính $R=1$.

Vậy đường kính của mặt cầu (S) bằng 2.

Câu 57: Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{3}$.

Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt trong đó $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0$

Giá trị biểu thức $T = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ bằng (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 70,5

Thay tọa độ tâm $I(1;-2;3)$ vào phương trình đường thẳng d , ta được: $-\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq 0$.

Nên đường thẳng d không đi qua tâm $I(1;-2;3)$.

$$\text{Ta có đường thẳng } d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -4 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + 3t \end{cases} \text{ với } M \in d \Leftrightarrow M(2+2t; -4+t; 3+3t)$$

Thay điểm $M(2+2t; -4+t; 3+3t)$ vào phương trình mặt cầu (S) , ta được:

$$\Leftrightarrow (2+2t-1)^2 + (-4+t+2)^2 + (3+3t-3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (2t+1)^2 + (t-2)^2 + (3t)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 + 5 = 25$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{10}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{70}}{7} \Rightarrow M\left(2 + \frac{2\sqrt{70}}{7}; -4 + \frac{\sqrt{70}}{7}; 3 + \frac{3\sqrt{70}}{7}\right) \\ t = -\frac{\sqrt{70}}{7} \Rightarrow N\left(2 - \frac{2\sqrt{70}}{7}; -4 - \frac{\sqrt{70}}{7}; 3 - \frac{3\sqrt{70}}{7}\right) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = \left(2 + \frac{2\sqrt{70}}{7}\right)^2 + \left(-4 + \frac{\sqrt{70}}{7}\right)^2 + \left(3 + \frac{3\sqrt{70}}{7}\right)^2 \approx 70,5$$

Câu 58: Cho 3 điểm $M(2;3;3), N(2;-1;-1), P(-2;-1;3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm M, N, P và có tâm thuộc mặt phẳng (α) có bán kính là:

Lời giải

Trả lời: 4

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

$$\text{Mặt cầu qua } M, N, P \Rightarrow \begin{cases} 4a + 6b + 6c - d = 22 \\ 4a - 2b - 2c - d = 6 \\ 4a + 2b - 6c + d = -14 \end{cases}$$

Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow 2a + 3b - c + 2 = 0$.

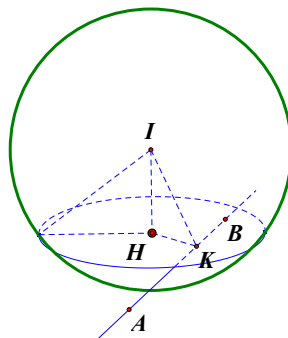
Giải hệ ta được:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \Rightarrow I(2; -1; 3) \\ c = 3 \end{cases}$$

Bán kính của mặt cầu là: $R = IM = 4$.

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c = \dots$.

Lời giải

Trả lời: 3



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (a; b; c)$

Theo giả thiết $B(0; 1; 0) \in (P): b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -6)$ cùng phương với $\vec{u} = (1; -1; 2)$

$$\Rightarrow \text{Phương trình đường thẳng } AB: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến.

K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB ,

H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K \in AB \Rightarrow K(t; 1-t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (t-1; -t-1; 2t-3)$

$IK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (0; -2; -1)$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - IH^2}$$

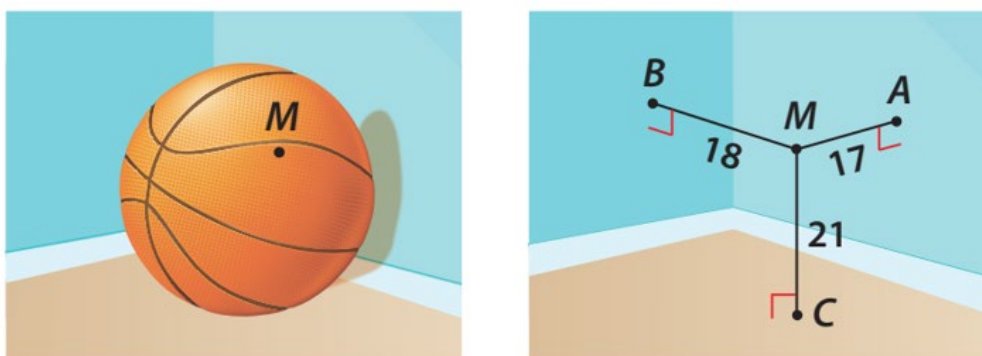
Ta có: $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$

Mà $IH \leq IK \Rightarrow IH_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK \Rightarrow \vec{n}_p$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_p = k \cdot \overrightarrow{IK} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2k \\ c = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ k = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 0 + 2 + 1 = 3.$$

Câu 60: Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có

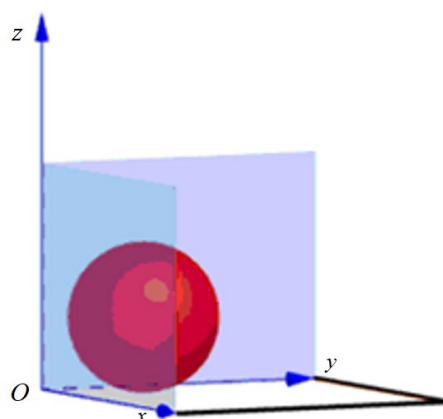
khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đường kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.



Lời giải

Trả lời: 23,9

Ta đặt hệ trục vào căn phòng sao cho có hai bức tường là mặt (Oxz) , (Oyz) , và nền là (Oxy) .



Vậy bài toán dẫn đến việc tìm đường kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng tọa độ và chứa điểm $M(17;18;21)$.

Ta có thể gọi phương trình mặt cầu là $(S): (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$, với $a > 0$ (do mặt cầu tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên $a = b = c = R$).

Do $M(17;18;21) \in (S)$ nên $(17-a)^2 + (18-a)^2 + (21-a)^2 = a^2$

$$\Rightarrow 2a^2 - 112a + 1054 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 28 - \sqrt{257} \\ a = 28 + \sqrt{257} \end{cases}$$

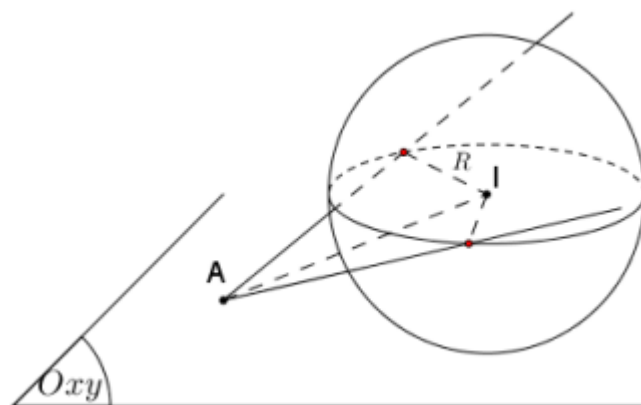
Vì quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm nên $a = 28 - \sqrt{257}$ thỏa.

Vậy đường kính quả bóng bằng $2a = 56 - 2\sqrt{257} \approx 23,9(\text{cm})$.

Câu 61: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y)^2 + (z-2)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a,b,c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Lời giải

Trả lời: 12



Mặt cầu có tâm $I(0;0;2)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Vì $A \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Các tiếp tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón đỉnh A . Để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc ở đỉnh của mặt nón phải $\geq 90^\circ$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

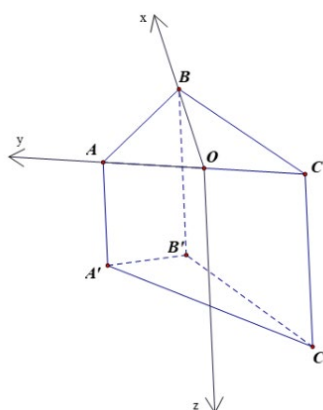
$$\text{Vậy } R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq a^2 + b^2 \leq 4$$

Ta có cặp số $(a;b)$ thỏa mãn là $(0;\pm 1); (0;\pm 2); (\pm 1;0); (\pm 2;0); (1;1); (1;-1); (-1;1); (-1;-1)$.

Câu 62: Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 4m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 8m; 8,8m; 9,6m. Biết đáy bể là phẳng. Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là (làm tròn tới hàng phần chục) (đơn vị độ)

Lời giải

Trả lời: 21,8.



Gọi 3 điểm ở trên mặt nước lần lượt là A, B, C và ba điểm tương ứng ở đáy bể là A', B', C' sao cho $AA' = 8\text{m}, BB' = 8,8\text{m}, CC' = 9,6\text{m}$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, O là trung điểm của AC

Ta có $A(0;2;0), B(2\sqrt{3};0;0), C(0;-2;0), A'(0;2;8), B'(2\sqrt{3};0;8,8), C'(0;-2;9,6)$.

Ta có $\overrightarrow{A'B'} = (2\sqrt{3}; -2; 0,8), \overrightarrow{A'C'} = (0; -4; 1,6)$.

$$\text{Có } [\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0,8 \\ -4 & 1,6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0,8 & 2\sqrt{3} \\ 1,6 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \right) = \left(0; \frac{-16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3} \right).$$

Mặt phẳng đáy bể là mặt phẳng $(A'B'C')$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (0; \frac{-16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3})$.

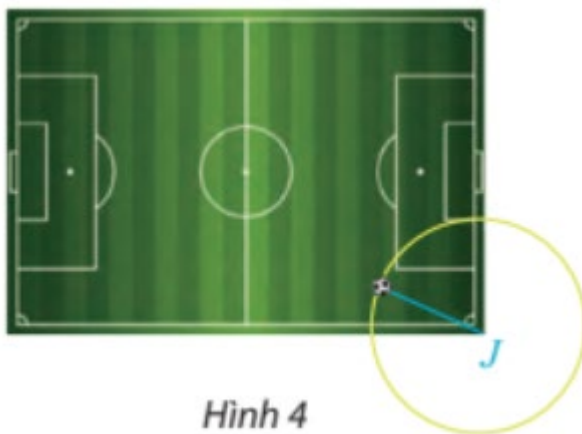
Mặt phẳng nằm ngang (mặt nước) chính là mặt phẳng $(Oxy) : z = 0$ có một vector pháp tuyến là: $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Do đó } \cos((A'B'C'), (Oxy)) = \frac{|0 \cdot 0 - \frac{16\sqrt{3}}{5} \cdot 0 - 8\sqrt{3} \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + (-\frac{16\sqrt{3}}{5})^2 + (-8\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}.$$

Suy ra $((A'B'C'), (Oxy)) \approx 21,8^\circ$.

Vậy đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc khoảng $21,8^\circ$.

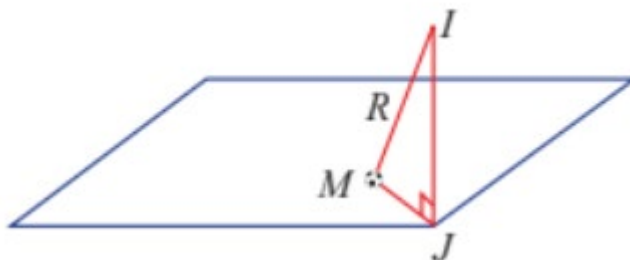
Câu 63: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ toạ độ Oxyz để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S): (x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là:



Hình 4

Lời giải

Trả lời: 5.



Mặt cầu (S) có phương trình

$$(x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$$

nên có tâm $I(22;4;13)$ và bán kính $R = \sqrt{194}$.

Trong không gian Oxyz, mặt sân có phương trình $z = 0$ trùng với mặt phẳng tọa độ (Oxy), suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(22;4;13)$ xuống mặt sân có tọa độ $J(22;4;0)$.

Trong tam giác vuông IJM, ta có $IJ = 13, IM = R = \sqrt{194}$, suy ra

$$JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{194 - 169} = 5$$

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là 5 m.

Câu 64: Trong hệ trục tọa độ Oxyz, sàn nhà của một công trình thuộc mặt phẳng Oxy, tay vịn của lan can cầu thang là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(5;1;9)$ và $B(2;1;12)$. Góc tạo bởi tay vịn của lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 45.

Mặt phẳng Oxy có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$

Đường thẳng AB nhận $\vec{AB} = (-3;0;3)$ là một vector chỉ phương

$$\text{Ta có: } \sin(AB, (Oxy)) = \left| \cos(\vec{AB}, \vec{k}) \right| = \frac{|-3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

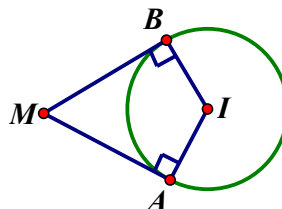
Suy ra $(AB, (Oxy)) = 45^\circ$

Vậy góc tạo bởi tay vịn lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng 45° .

Câu 65: Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian Oxyz (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15;1;6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA, với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 14.



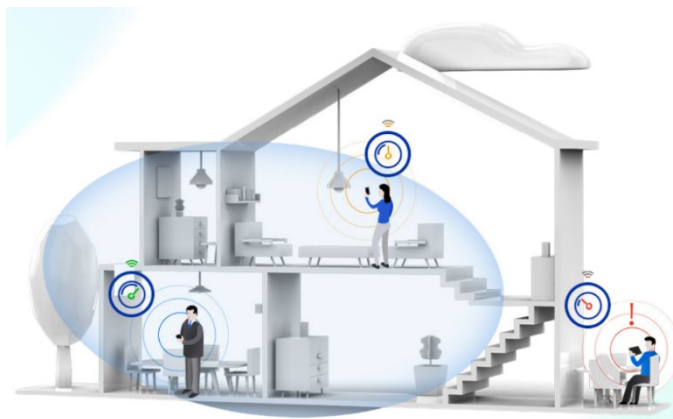
Bề mặt ngoài của quả bóng (S) là một mặt cầu có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R = 3$

$$\text{Ta có: } MI = \sqrt{(1-15)^2 + (1-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{205}$$

$$\text{Suy ra } MA = \sqrt{MI^2 - IA^2} = \sqrt{205 - 9} = \sqrt{196} = 14$$

Vậy $MA = 14 \text{ m}$.

Câu 66: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3;1;1)$ như hình vẽ. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng 11 (m) . Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.



Lời giải

Trả lời: 13

Vùng phủ sóng của thiết bị đã cho là mặt cầu (S) tâm $A(3;1;1)$, bán kính $R = 11$.

Ta có $AE = \sqrt{6^2 + 7^2 + (m-1)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 86}$,

Để điện thoại của người đó bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên thì

$$AE \leq R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 2m + 86} \leq 11 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 86 \geq 0 \\ m^2 - 2m + 86 \leq 121 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 7.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4; -3; \dots; 7\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.