

(Đề kiểm tra gồm 01 trang)

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+15}{x-9}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$ .

- 1) Tính giá trị của  $B$  tại  $x = 4$ .
- 2) Chứng minh  $A = \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ .
- 3) Đặt  $P = A \cdot B$ . Tìm số nguyên tố  $x$  để  $P \leq -\frac{2}{3}$ .

**Câu II. (3,5 điểm)**

- 1) Trong cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi thí sinh phải trả lời đủ 15 câu hỏi của ban tổ chức. Mỗi câu hỏi gồm bốn phương án, trong đó chỉ có một phương án đúng. Với mỗi câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm, trả lời sai bị trừ 2 điểm. Khi bắt đầu cuộc thi mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm. Thí sinh nào đạt từ 90 điểm trở lên sẽ được vào vòng tiếp theo. Hỏi thí sinh phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu thì được vào vòng thi tiếp theo?
- 2) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*  
Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 30 m. Nếu tăng độ dài một cạnh lên 1 m và giảm độ dài cạnh còn lại 2 m thì diện tích mảnh đất giảm đi 5 mét vuông. Tìm độ dài các cạnh của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu.
- 3) Cho phương trình:  $x^2 - 6x + m - 1 = 0$  với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:  $x_1 x_2 + 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ .

**Câu III. (4,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Kẻ các đường cao  $AD, BE$  của tam giác  $ABC$ . Kẻ đường kính  $AK$  của đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $F$  là hình chiếu của điểm  $B$  trên  $AK$ .

- a) Chứng minh năm điểm  $A, B, D, E, F$  cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Chứng minh  $AB \cdot AC = AK \cdot AD$  và  $DF \parallel BE$ .
- c) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh ba điểm  $E, F, M$  thẳng hàng.

**Câu IV. (0,5 điểm)** Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy móc có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ (người này sẽ giám sát tất cả các máy hoạt động). Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất?

-----HẾT-----

Họ và tên học sinh: ..... Lớp: .....

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
I	1)	$x = 4$ (tmđk)	0,25
	0,5đ	$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{4} + 3}{\sqrt{4} - 3} = -5$	0,25
	2)	Chứng minh $A = \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$ .	1,0
	0,5đ	$P = A \cdot B = \frac{2}{\sqrt{x} - 3} \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{2}{3} \leq 0$ $\Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \leq 0$	0,25
		+) $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ loại do $x$ nguyên tố +) $\sqrt{x} - 3 < 0 \Rightarrow x < 9$ Do $x$ nguyên tố nên $x \in \{2, 3, 5, 7\}$	0,25
		<b>Chú ý:</b> - Học sinh thiếu xử lý trường hợp $x = 0$ : trừ 0,25 - Học sinh quên chỉ ra số nguyên tố: trừ 0,25 <b>Tuy nhiên, nếu mắc cả hai lỗi trên thì chỉ trừ 0,25</b>	
II	1)	Gọi $x$ là số câu trả lời đúng ( $x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 15$ ) Suy ra số câu trả lời sai là $15 - x$	0,25
		Số điểm mà thí sinh có được là: $20 + 5x + 2(15 - x)$	0,25
		Bất phương trình: $20 + 5x + 2(15 - x) \geq 90$	
		Giải được $x \geq \frac{40}{3}$	0,25
		Kết luận: ít nhất 14 câu đúng	0,25
	2)	Nửa chu vi hình chữ nhật là $30 : 2 = 15$ (m)	0,25
	1,5đ	Gọi 2 cạnh hình chữ nhật là $x, y$ (đơn vị: m, đk: $0 < x < 15, 2 < y < 15$ )	
		Lập luận được phương trình (1): $x + y = 15$	0,25
		Lập luận được phương trình (2): $(x + 1)(y - 2) = xy - 5$	0,5
		Giải hệ phương trình và kết luận: 2 cạnh của hình chữ nhật là $6m$ và $9m$	0,5
		<b>Chú ý: Nếu học sinh có nhầm lẫn mà gọi từ đâu chiều rộng là <math>x</math> và chiều dài là <math>y</math>, sau đó chỉ xét trường hợp <math>x + 1</math> và <math>y - 2</math> thì vẫn cho điểm tối đa</b>	
	3)	Phương trình có hai nghiệm phân biệt	0,25
1,0đ	$\Delta = 36 - 4(m - 1) > 0 \Rightarrow m < 10$		
	Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$ . Điều kiện bổ sung: $x_1 x_2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ .	0,25	
	$x_1 x_2 + 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 x_2 + 1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \Rightarrow m = \frac{6}{m - 1}$	0,25	

		$m \in \{-2; 3\}$	0,25
III	Hình vẽ 0,5đ		0,5đ
	a) 1,5đ	<p>Chứng minh năm điểm <math>A, B, D, E, F</math> cùng nằm trên một đường tròn.</p> <p><b>Chú ý: nếu không chỉ ra các góc <math>90^\circ</math> thì trừ 0,25đ</b></p>	1,5đ
	b) 1,5đ	<p>Chứng minh <math>\triangle ABD \sim \triangle ACK</math> (g.g)</p>	0,5đ
		$\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AK$	0,5đ
		<p><math>A, B, D, E, F</math> cùng nằm trên một đường tròn nên</p> <p><math>\widehat{BFD} = \widehat{BAD}</math> và <math>\widehat{EBF} = \widehat{EAF}</math> hay <math>\widehat{EBF} = \widehat{CAK}</math></p>	0,25
		<p>Mà <math>\triangle ABD \sim \triangle ACK \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAK}</math></p> <p><math>\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{EBF}</math> mà hai góc ở vị trí đồng vị <math>\Rightarrow DF \parallel BE</math></p>	0,25
	c) 0,5đ	<p><math>A, B, E, F</math> thuộc một đường tròn nên <math>\widehat{BEF} = \widehat{BAF}</math></p> <p><math>\widehat{BAD} = \widehat{CAK} \Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{CAD}</math></p>	0,25
		<p><math>\widehat{CAD} = \widehat{CBE}</math> (cùng phụ với <math>\widehat{ACB}</math>) <math>\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{CBE}</math></p> <p><math>\triangle EBC</math> vuông tại <math>E</math>, <math>M</math> là trung điểm <math>BC</math></p> <p><math>\Rightarrow ME = MB \Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{BEM}</math> hay <math>\widehat{CBE} = \widehat{BEF}</math></p> <p><math>\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BEM} \Rightarrow E, F, M</math> thẳng hàng</p>	0,25
IV	0,5đ	<p>Gọi số máy móc công ty nên sử dụng là <math>x</math> (máy). Điều kiện <math>x \in \mathbb{N}^*</math>.</p> <p>Trong một giờ, số quả bóng tennis sản xuất được là <math>30x</math> (quả bóng)</p> <p>Như vậy, số giờ để sản xuất 8000 quả bóng là <math>\frac{8000}{30x}</math> (giờ)</p> <p>Mỗi giờ phải trả 192 nghìn đồng cho người giám sát và chi phí thiết lập cho mỗi máy là 200 nghìn đồng nên chi phí sản xuất là :</p> $M = 200x + \frac{8000}{30x} \cdot 192 = 200x + \frac{51200}{x}$ (nghìn đồng). <p>Ta tìm <math>x \in \mathbb{N}^*</math> để <math>M</math> đạt giá trị nhỏ nhất.</p>	0,25
		<p>Ta có</p> $M - 6400 = 200x + \frac{51200}{x} - 6400$ $= \frac{200(x^2 - 32x + 256)}{x} = \frac{200(x - 16)^2}{x} \geq 0$	0,25

Dấu "=" xảy ra khi  $x - 16 = 0 \Rightarrow x = 16$  (tm)

Vậy số máy móc công ty nên sử dụng là 16 máy để chi phí sản xuất là thấp nhất.

**Chú ý: Nếu học sinh sử dụng BĐT Cauchy mà không chứng minh và không chỉ ra điều kiện để áp dụng thì không được điểm phần cực trị**

+ Chứng minh bất Cauchy cho 2 số không âm

+ Với  $x > 0$  thì  $200x > 0$  và  $51200/x > 0$

**Thiếu 1 trong 2 dấu (+) trên đều không cho điểm phần cực trị.**