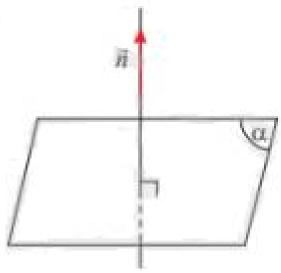
CHƯƠNG 5
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

BÀI 1
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

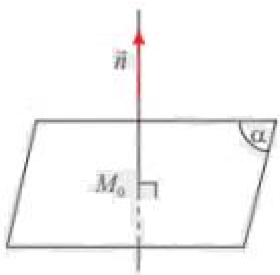
a. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α). Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là **vectơ pháp tuyến** của mặt phẳng (α).



Nhận xét:

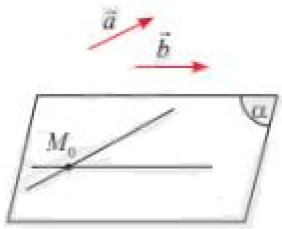
- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.



b. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

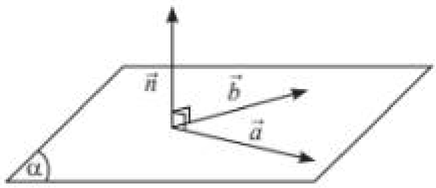
Cho mặt phẳng (α). Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và giá của chúng song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{a},\vec{b}$ là cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

Nhận xét: Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vectơ chỉ phương của nó.



Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ làm vectơ pháp tuyến.



Chú ý:

- Vectơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$

- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$

- Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

a. Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có dạng phương trình: $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét:

- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (với $A^2+B^2+C^2\neq 0$) thì vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

- Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó:

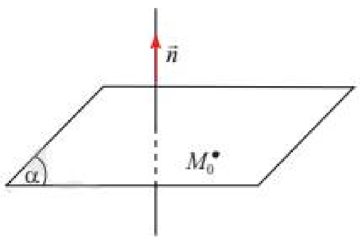
$$N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

b. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng khi biết một số điều kiện

• Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết vectơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

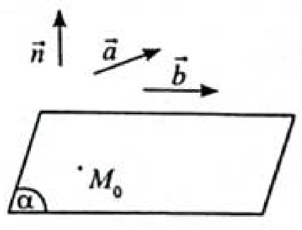


• Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết cặp vectơ chỉ phương

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.



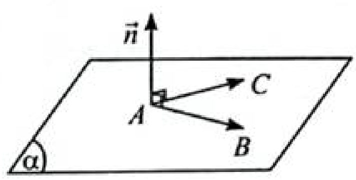
• Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A,B,C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

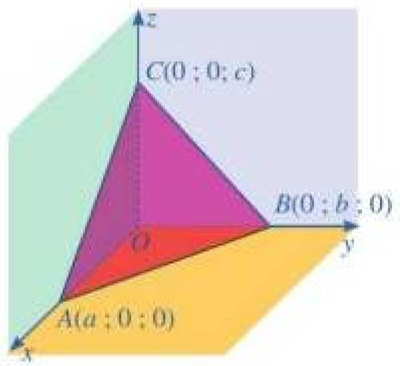
Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.



Nhận xét:

Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có phương trình là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. với $a.b.c\neq 0$

Phương trình trên được gọi là **phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.**

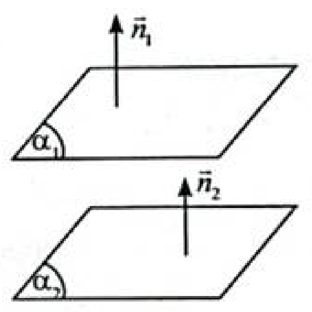


3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

a. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

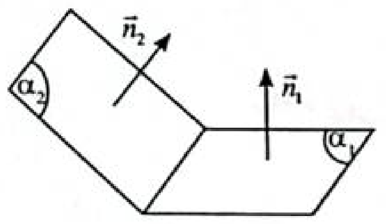
Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.

Khi đó: $(\alpha_1)\,//\,(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \ (k\in\mathbb{R})$



Chú ý:

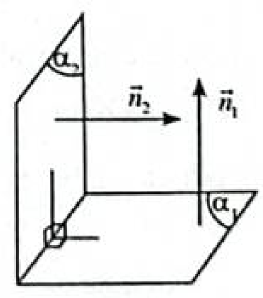
- $(\alpha_1)\equiv(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \ (k\in\mathbb{R})$
- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.



b. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.

Khi đó: $(\alpha_1)\perp(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$



4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính: $d(M_0,(\alpha))=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG
XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC VÀ KHÔNG THUỘC MẶT PHẲNG

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- Mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$
- Nếu mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a},\vec{b}$ thì (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.
- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là vectơ có giá vuông góc với (α).
- Vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) là vectơ có giá song song hoặc trùng với (α).
- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k.\vec{n}$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).
- Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của (α) thì $k.\vec{a}$ cũng là một vectơ chỉ phương của (α).

Chú ý:

- Trục Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.
- Trục Oy có vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

2. Điểm thuộc và không thuộc mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$. Khi đó:

- $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$
- $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)\notin(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, xác định một vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng sau:

a) $(P): x-2y+2z-2026=0$.

b) $(Q): 2x-3y+2025=0$.

c) $(R): -x+3z-4=0$.

Bài 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$ và $C(-1;1;0)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A,B,C, hãy xác định một vectơ pháp tuyến của (P).

Bài 3. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$.

a) Biết mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A,B,C, hãy xác định một vectơ pháp tuyến của (P).

b) Tính $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-3=0$. Xét các điểm sau, điểm nào thuộc và không thuộc mặt phẳng (α) ?

a) $M\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$.

a) $N\left(1;-1;-\frac{3}{2}\right)$.

c) $P(1;6;4)$.

d) $Q(0;3;0)$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(-5;3;-1)$, $\vec{b}=(1;2;1)$, $\vec{c}=(m;3;-1)$. Giá trị của m sao cho $\vec{a}=\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;1;2)$, $\vec{v}=(-1;m;m-2)$. Tìm giá trị của m sao cho $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{14}$.

DẠNG 2

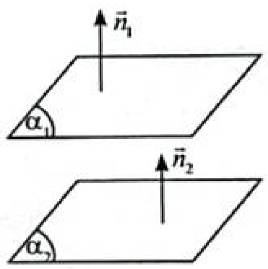
HAI MẶT PHẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

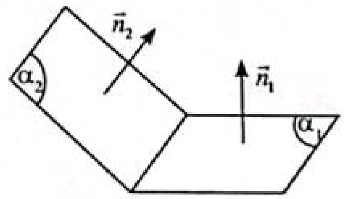
KHOẢNG CÁCH MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

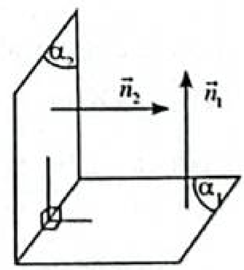
1. Điều kiện hai mặt phẳng song song, vuông góc

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó:

- $(\alpha_1)\ //\ (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1=k\vec{n}_2 \\ D_1\neq kD_2 \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R})$
- $(\alpha_1)\equiv(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1=k\vec{n}_2 \\ D_1= kD_2 \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R})$
- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.
- $(\alpha_1)\perp(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$





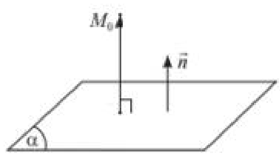


Chú ý:

- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
- Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính: $d(M_0,(\alpha))=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$



Chú ý:

- Mặt phẳng (Oxy) có phương trình: $z=0$.
- Mặt phẳng (Oxz) có phương trình: $y=0$.
- Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x=0$.

3. Khoảng cách hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia *(Thực chất là khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng).*

Để tính khoảng cách mặt phẳng (α_1) song song với (α_2), ta thực hiện như sau:

Bước 1: Chọn điểm $M \in (\alpha_1)$

Bước 2: Tính khoảng cách điểm M đến (α_2)

Bước 3: Kết luận $d\left((\alpha_1),(\alpha_2)\right) = d\left(M,(\alpha_2)\right)$

Chú ý: Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): Ax+By+Cz+D_1=0$ và $(\alpha_2): Ax+By+Cz+D_2=0$ có cùng vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$. Khi đó khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là: $d((\alpha_1),(\alpha)) = \dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng : $(\alpha): x-2=0; (\beta): y-6=0; (\gamma): 2x+2025=0$. Chứng minh rằng:

a) $(\alpha)\perp(\beta)$.

b) $(\alpha) // (\gamma)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(\alpha): x+y+2z+1=0$; $(\beta): x+y-z+2=0$; $(\gamma): x-y+5=0$. Chứng minh rằng:

a) $(\alpha)\perp(\beta)$.

b) $(\alpha)\perp(\gamma)$.

c) $(\beta)\perp(\gamma)$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+2mz-9=0$ và $(Q): 6x-y-z-10=0$. Tìm m để $(P)\perp(Q)$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 5x+my+z-5=0$ và $(Q): nx-3y-2z+7=0$. Tìm m,n để $(P)//(Q)$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$

a) Tính khoảng cách từ điểm $M(0;0;-2)$ đến mặt phẳng (P).

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và $(Q): x+2y+2z-5=0$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y-12z+5=0$ và điểm $A(2;4;-1)$. Trên mặt phẳng (P) lấy điểm M. Gọi B là điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=3.\overrightarrow{AM}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (P).

Bài 7. Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$.

CHỦ ĐỀ 2
LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT MẶT PHẲNG

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α), thông thường ta có 3 trường hợp cơ bản sau:

Trường hợp 1: Khi bài toán cho biết mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ hoặc có hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ (với $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$) thì viết dưới dạng sau:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Trường hợp 2: Khi bài toán cho biết mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ hoặc có hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ (với $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$) và không tìm được điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)$ thì ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Viết phương trình mặt phẳng (α) dưới dạng:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

- **Bước 2:** Sau đó dựa vào giả thiết bài toán để tìm giá trị D .

Chú ý: Dạng này, giả thiết có liên quan đến khoảng cách và góc liên quan đến mặt phẳng.

Trường hợp 3: Khi bài toán cho biết mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và giả thiết bài toán không cho vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ hoặc không cho hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ thì ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(A;B;C)$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt phẳng (α) dưới dạng:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

- **Bước 3:** Sau đó dựa vào giả thiết bài toán để tìm hai phương trình chứa 3 ẩn A,B,C .

Chú ý:

- Dạng này, giả thiết có liên quan đến khoảng cách và góc liên quan đến mặt phẳng.
- Để giải tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đơn giản hơn thì gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=(1;B;C)$.

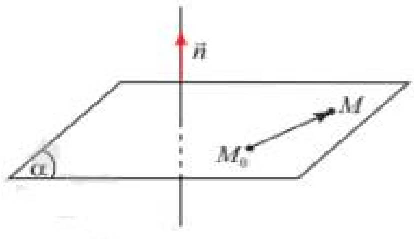
DẠNG 1

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT MẶT PHẲNG KHI BIẾT MỘT ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG VÀ MỘT VECTƠ PHÁP TUYẾN HOẶC HAI VECTƠ CHỈ PHƯƠNG

1. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và biết một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$

Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$



Chú ý:

- Phải nắm vững khái niệm **vectơ pháp tuyến** và **vectơ chỉ phương** của mặt phẳng.

  + Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là vectơ **có giá vuông góc** với mặt phẳng đó. Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng thì $k\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

  + Vectơ vectơ chỉ phương của mặt phẳng là vectơ **có giá song song** với mặt phẳng đó. Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của mặt phẳng thì $k\vec{a}$ $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.

- Mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ ($\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương) thì mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

- Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A,B,C không thẳng hàng thì có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ nên mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

- Dựa vào tính chất vuông góc, song song giữa mặt phẳng với mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng trong không gian để tìm vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần lập.

  + Hai mặt phẳng song song thì có cùng vectơ pháp tuyến.

  + Hai mặt phẳng vuông góc thì vectơ chỉ phương của mặt phẳng này là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng kia.

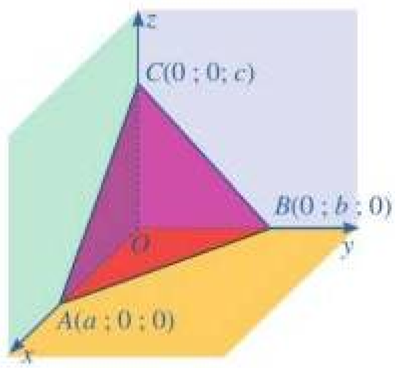
  + Đường thẳng song song mặt phẳng thì vectơ chỉ phương của đường thẳng là vectơ chỉ phương của mặt phẳng.

  + Đường thẳng vuông góc mặt phẳng thì vectơ chỉ phương của đường thẳng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

2. Các trường hợp đặc biệt của mặt phẳng

a. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

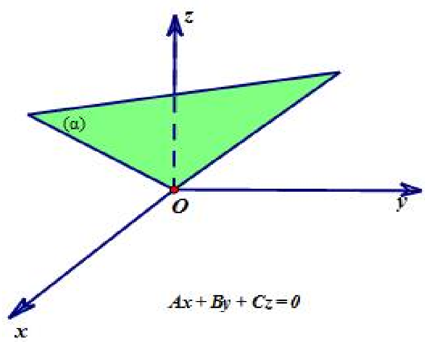
Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có **phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn** là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. với $a.b.c\neq 0$



a. Phương trình mặt phẳng đặc biệt

Xét phương trình mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$

- Nếu $D=0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O và có dạng $(\alpha): Ax+By+Cz=0$.



- Nếu $A=0, B\neq 0, C\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox.
  + Mặt phẳng (α) song song Ox thì có dạng $(\alpha): By+Cz+D=0$. (Hình 1)
  + Mặt phẳng (α) chứa trục Ox thì có dạng $(\alpha): By+Cz=0$.
- Nếu $A\neq 0, B=0, C\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy.
  + Mặt phẳng (α) song song Oy thì có dạng $(\alpha): Ax+Cz+D=0$. (Hình 2)
  + Mặt phẳng (α) chứa trục Oy thì có dạng $(\alpha): Ax+Cz=0$.
- Nếu $A\neq 0, B\neq 0, C=0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz.
  + Mặt phẳng (α) song song Oz thì có dạng $(\alpha): Ax+By+D=0$. (Hình 3)
  + Mặt phẳng (α) chứa trục Oz thì có dạng $(\alpha): Ax+By=0$.
- Nếu $A=B=0, C\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy).
  + Mặt phẳng (α) song song (Oxy) thì có dạng $(\alpha): Cz+D=0$. (Hình 4)
  + Mặt phẳng (α) chứa trục (Oxy) thì có dạng $(\alpha): z=0$.

- Nếu $A = C = 0, B \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz).

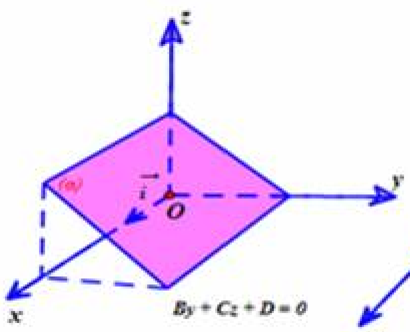
  + Mặt phẳng (α) song song (Oxz) thì có dạng $(\alpha): By + D = 0$. (Hình 5)

  + Mặt phẳng (α) chứa trục (Oxz) thì có dạng $(\alpha): y = 0$.

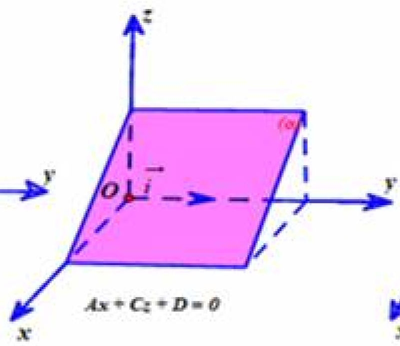
- Nếu $B = C = 0, A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz).

  + Mặt phẳng (α) song song (Oyz) thì có dạng $(\alpha): Ax + D = 0$. (Hình 6)

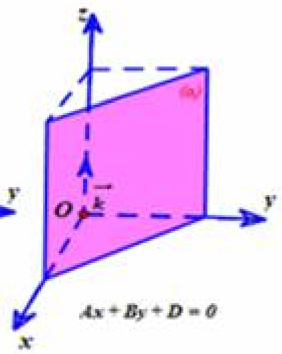
  + Mặt phẳng (α) chứa trục (Oyz) thì có dạng $(\alpha): x = 0$.



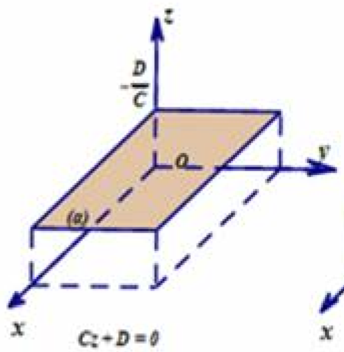
Hình 1



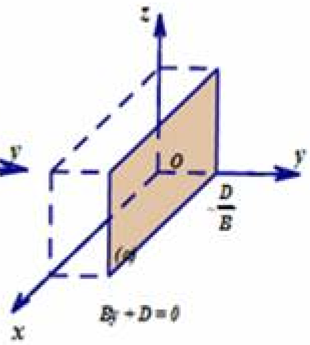
Hình 2



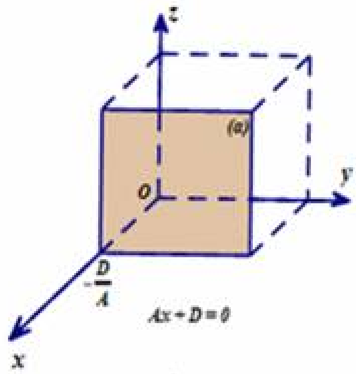
Hình 3



Hình 4



Hình 5



Hình 6

Nhận xét:

- Để nhớ các phương trình mặt phẳng đặc biệt thì lấy phương trình (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ làm chuẩn.

  + Mặt phẳng (α) chứa gốc tọa độ $O(0;0;0)$ thì $D = 0$.

  + Mặt phẳng (α) chứa trục tương ứng nào (trục Ox, Oy, Oz) thì ẩn đó không có (không chứa Ax, By, Cz) và $D = 0$.

  + Mặt phẳng (α) song song trục tương ứng nào (trục Ox, Oy, Oz) thì ẩn đó không có (không chứa Ax, By, Cz) và $D \neq 0$.

- Nếu không nhớ các phương trình mặt phẳng đặc biệt thì nhớ vectơ chỉ phương của các trục Ox, Oy, Oz và vectơ pháp tuyến các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ để chuyển bài toán lập phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến.

+ Trục Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.

+ Trục Oy có vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.

+ Trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.

+ Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

+ Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.

+ Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P)

a) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$.

b) đi qua điểm $N(2;-1;0)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và:

a) vuông góc với trục Ox.

b) song song với mặt phẳng (Oxy).

Bài 3. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua:

a) điểm $M(-2;4;-1)$ và song song với mặt phẳng $(Q):3x+7y+10z+1=0$

b) điểm $N(1;-1;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):3x+2y-z=0$, $(R):x+y-z=0$.

c) điểm $K(2;3;-1)$, song song với trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q):x+2y-3z+1=0$.

Bài 4. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua:

a) đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) với $(\alpha):3x-2y+2z+7=0$, $(\beta):5x-4y+3z+1=0$.

b) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): $x+2y-z=0$.

Bài 5. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;1;1)$; $B(0;4;0)$; $C(2;2;0)$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy), và N là điểm đối xứng với B qua (Oyz). Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN.

Bài 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;2;1), B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2), D(-1;1;-1)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm ΔABC. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của GI.

Bài 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x - y + z - 2 = 0, (\alpha_2): x + 4y - 5 = 0$ và song song với mặt phẳng $(\alpha_3): 2x + 21y - z + 7 = 0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P).

Bài 10. Lập phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn của mặt phẳng (P), biết rằng mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(5;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;-1;3)$, $B(0;2;4)$ $D(2;-1;1), A'(0;1;2)$.

a) Tính tọa độ các điểm C, B', D'.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

DẠNG 2
VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT MẶT PHẲNG KHI BIẾT MỘT VECTƠ PHÁP TUYẾN HOẶC HAI VECTƠ CHỈ PHƯƠNG MÀ KHÔNG BIẾT ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG

Khi viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) mà có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ hoặc có hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ (với $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$) và không tìm được điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)$ thì ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Viết phương trình mặt phẳng (α) dưới dạng:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

- **Bước 2:** Sau đó dựa vào giả thiết bài toán để tìm giá trị D .

Chú ý: Dạng này, giả thiết có liên quan đến khoảng cách và góc liên quan đến mặt phẳng.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $B(6;4;0)$, $C(4;5;1)$, $M(2;1;6)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với BC và cách M một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính $-3a+c$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P):2x-y-2z+19=0$ và cách (P) một khoảng bằng 5 có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính $a+c+d$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q):x+2y+2z-3=0$ và mặt phẳng (P) không qua O, song song mặt phẳng (Q) và $d\left((P);(Q)\right)=1$. Viết phương trình mặt phẳng (P)

Bài 4. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

DẠNG 3

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT MẶT PHẲNG KHI BIẾT ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG VÀ KHÔNG BIẾT VECTƠ PHÁP TUYẾN HOẶC KHÔNG BIẾT HAI VECTƠ CHỈ PHƯƠNG

Khi bài toán cho biết mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và giả thiết bài toán không cho vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ hoặc không cho hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ thì ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(A;B;C)$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt phẳng (α) dưới dạng:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

- **Bước 3:** Sau đó dựa vào giả thiết bài toán để tìm hai phương trình chứa 3 ẩn A,B,C.

Chú ý:

- Dạng này, giả thiết có liên quan đến khoảng cách và góc liên quan đến mặt phẳng.
- Để giải tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đơn giản hơn thì gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=(1;B;C)$.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1;-2;-2)$, vuông góc với mặt phẳng (Oxz) đồng thời khoảng cách từ điểm $B(3;1;-3)$ đến (P) bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Bài 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $M(-1;1;0), N(0;0;-2), I(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và B, đồng thời khoảng cách từ I đến (P) bằng $\sqrt{3}$.

Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3), B(0;-1;2), C(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và gốc tọa độ O sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1;-2;-2)$, vuông góc với mặt phẳng (Oxz) đồng thời khoảng cách từ điểm $B(3;1;-3)$ đến (P) bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x+by+cz+d=0\ (d\neq 0)$. Tính $P=3b+2c-d$.

Bài 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-1), B(1;1;2), C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$.

CHỦ ĐỀ 3
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

DẠNG 1
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T=\left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất (với $\alpha_1;\alpha_2...\alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\neq 0$).

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)+\alpha_2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}\qquad\left(do\ \alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T=\left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|=\left|\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right|\left|\overrightarrow{MI}\right|$$

Vì $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}$

Mà $M\in(P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases}Qua\ I\\ \vec{u}_{IM}=\vec{n}_P=(A;B;C)\end{cases}$.

+ Ta có $M=IM\cup(P)\Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpxki

Với $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$, ta có:

$$(ax+by+cz)^2\leq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra}\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T=\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+...+\alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1;\alpha_2...\alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \neq 0$).

Chú ý:

$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n>0$

$T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n<0$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I.

+ Ta có:

$$\begin{aligned}
T&=\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+...+\alpha_n MA_n^2\\
&=\alpha_1\left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2+\alpha_2\left(\overrightarrow{MA_2}\right)^2+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MA_n}\right)^2\\
&=\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2+\alpha_2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)^2+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)^2\\
&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)MI^2+\alpha_1 IA_1^2+\alpha_2 IA_2^2+...+\alpha_n IA_n^2+2\overrightarrow{MI}\left(\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}\right)\\
&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1 IA_1^2+\alpha_2 IA_2^2+...+\alpha_n IA_n^2 \quad \left(do\ \alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow T=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1 IA_1^2+\alpha_2 IA_2^2+...+\alpha_n IA_n^2$

+ Vì $\alpha_1 IA_1^2+\alpha_2 IA_2^2+...+\alpha_n IA_n^2$ không đổi nên:

- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M\in(P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} Qua\ I \\ \vec{u}_{IM}=\vec{n}_P=(A;B;C)\end{cases}$.

+ Ta có $M=IM\cup(P)\Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bu–nhia–cốp–xki

Với $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$, ta có: $(ax+by+cz)^2\le(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

Bài 1. Trong hệ trục *Oxyz*, cho điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai điểm $A(1;0;2), B(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9a+3b+6c$.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ của điểm M .

Bài 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(P): x-y+z+2=0$. Tìm điểm $N\in(P)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2), M\in(\alpha): x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tìm tọa độ của điểm M .

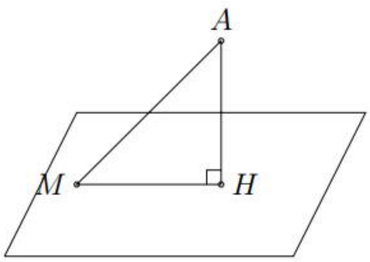
DẠNG 2
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN KHOẢNG CÁCH

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ cố định và điểm M di động trên mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$. Tìm tọa độ điểm M để AM có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P).

+ Khi đó, tam giác AHM vuông tại H do đó $AM \geq AH$.

+ Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.

+ Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P).

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M $(M \equiv H)$

+ Lập phương trình tham số đường thẳng AH với $\begin{cases} Qua\ A \\ \vec{u}_{AH} = \vec{n}_P = (A;B;C) \end{cases}$.

+ Ta có $M \equiv H = AH \cup (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpxki

Với $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

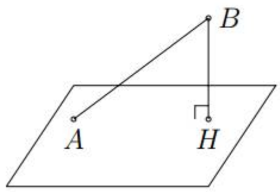
$$\text{Dấu } "=" \text{ xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



+ Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P).

+ Khi đó $\mathrm{d}(B,(P)) = BH \le BA$

+ Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} Qua\ A \\ \vec{n}_P = \overrightarrow{AB} \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ Gọi $\vec{n}_P = (a;b;c)$, $\left(a^2+b^2+c^2 \ne 0\right)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

+ Khi đó phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A là: $a(x-x_A)+(y-y_A)+(z-z_A)=0$

+ Khi đó $\vec{n}_P.\overrightarrow{AB}=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).

+ Ta có: $d(B,(P)) = f(t)$, với $t=\dfrac{b}{c}, c\ne 0$.

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

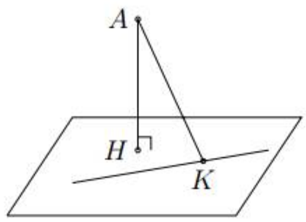
Chú ý: *Để tìm vectơ pháp tuyến* $\vec{n}_P$ *của mặt phẳng* (P) *đơn giản hơn thì nên gọi* $\vec{n}_P = (1;b;c)$.

Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A và đường thẳng Δ cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ.

+ Khi đó $d(A,(P)) = AH \le AK$

+ Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK.

Bước 2:

+ Tìm tọa độ điểm K.

+ Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} Qua\ \text{K} \\ \vec{n}_P = \overrightarrow{AK} \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ Gọi $\vec{n}_P = (a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2 \ne 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

+ Khi đó $\vec{n}_P.\vec{u}_\Delta = 0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).

+ Ta có: $d(A,(P)) = f(t)$, với $t = \dfrac{b}{c}, c \ne 0.$

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: *Để tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_P = (1;b;c)$.*

Bài toán 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Phương pháp giải

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.

Ta xét hai trường hợp sau:

- **TH 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P).

  Khi đó $AM + BM \ge AB$

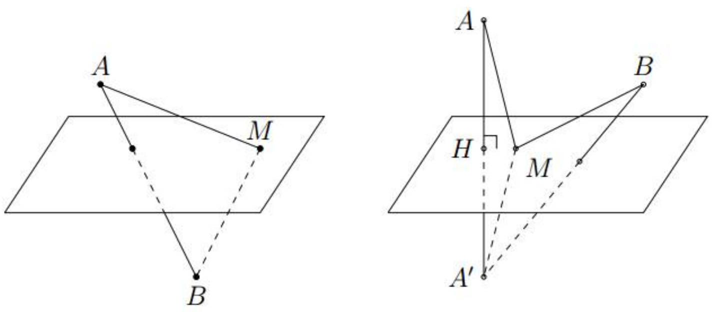
  Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2**: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P).

  Gọi A' đối xứng với A qua (P).

  Khi đó $AM + BM = A'M + BM \ge A'B$

  Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



2. $|MA-MB|$ lớn nhất.

Ta xét hai trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P).

  + Khi đó $|AM-BM|\le AB$

  + Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P).

  + Gọi A' đối xứng với A qua (P),

  + Khi đó $|AM-BM|=\left|A'M-BM\right|\le A'B$

  + Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Bài toán 5. Trong không gian $Oxyz$, cho các số thực dương α,β và ba điểm A,B,C. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và có $T=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta \mathrm{d}(B,(P))$ nhỏ nhất.

Phương pháp giải

1. Xét A,B nằm về cùng phía so với (P).

- Nếu $AB // (P)$ thì $P=(\alpha+\beta)\mathrm{d}(A,(P))\le(\alpha+\beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $\vec{IB}=\dfrac{\alpha}{\beta}\vec{ID}$ và E là trung điểm BD.

Khi đó: $P=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta\cdot\dfrac{IB}{ID}\cdot \mathrm{d}(D,(P))=2\alpha \mathrm{d}(E,(P))\le 2(\alpha+\beta)EC$

2. Xét A,B nằm về hai phía so với (P).

Gọi I là giao điểm của AB và (P), B' là điểm đối xứng với B qua I.

Khi đó $P=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta \mathrm{d}\left(B',(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 4** trên.

Bài toán 6. Trong không gian $Oxyz$, cho n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ và diểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i\,(i=\overline{1,n})$ lớn nhất.

Phương pháp giải

- Xét n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho.

Khi đó: $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\left(A_i,(P)\right)=n\mathrm{d}(G,(P))\le nGA$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác $(m+k=n)$. Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A.

Khi đó $P=m\mathrm{d}\left(G_3,(P)\right)+k\mathrm{d}\left(G_2,(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 5** trên.

Bài 1. Cho $A(4;5;6);B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P):2x+y+2z+1=0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $|MA-MB|$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Lập phương trình của mặt phẳng (P).

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Tính m.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1),B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Trả lời: ………………..

Bài 5. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Tính $T=a+2b+3c$.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;1;-2)$, $\vec{b}=(1;0;3)$ là

A. $(2;3;-1)$. **B.** $(3;5;-2)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(3;-5;-1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;-2)$ và vectơ $\vec{b}=(1;0;2)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(2;6;-1)$. **B.** $\vec{c}=(4;6;-1)$. **C.** $\vec{c}=(4;-6;-1)$. **D.** $\vec{c}=(2;-6;-1)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{n}$ có phương vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\vec{n}=(8;4;-3)$. **B.** $\vec{n}=(-18;0;-3)$. **C.** $\vec{n}=(-18;4;-3)$. **D.** $\vec{n}=(1;4;-3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $x-3y^2+z-1=0$. **B.** $x^2+2y+4z-2=0$.

C. $2x-3y+4z-2024=0$. **D.** $2x-3y+4z^2-2025=0$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-y+2z-1=0$. Vectơ nào dưới đây không phải là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(-3;1;-2)$. **B.** $\vec{n}=(3;1;2)$ **C.** $\vec{n}=(3;-1;2)$ **D.** $\vec{n}=(6;-2;4)$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{i}=(1;0;0)$ **B.** $\vec{m}=(1;1;1)$ **C.** $\vec{j}=(0;1;0)$ **D.** $\vec{k}=(0;0;1)$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+1=0$?

A. $\vec{a}=(2;-3;1)$ **B.** $\vec{b}=(2;1;-3)$ **C.** $\vec{c}=(2;-3;0)$ **D.** $\vec{d}=(3;2;0)$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$ là

A. $\vec{n}=(3;6;-2)$ **B.** $\vec{n}=(2;-1;3)$ **C.** $\vec{n}=(-3;-6;-2)$ **D.** $\vec{n}=(-2;-1;3)$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x-y+z-2=0$.

A. $Q(1;-2;2)$. **B.** $P(2;-1;-1)$. **C.** $M(1;1;-1)$. **D.** $N(1;-1;-1)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

A. $Q(3;3;0)$ **B.** $N(2;2;2)$ **C.** $P(1;2;3)$ **D.** $M(1;-1;1)$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $P(0;0;-5)$ **B.** $M(1;1;6)$ **C.** $Q(2;-1;5)$ **D.** $N(-5;0;0)$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(0;2;0)$. **B.** $N(1;2;3)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $Q(0;0;3)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $N\left(1;-1;-\frac{3}{2}\right)$. **C.** $P(1;6;1)$. **D.** $Q(0;3;0)$.

Câu 14. Khoảng cách từ điểm $M(3;\ 2;\ 1)$ đến mặt phẳng (P): $Ax+Cz+D=0$, $A.C.D \neq 0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $d(M,(P))=\frac{|3A+C+D|}{\sqrt{A^2+C^2}}$ **B.** $d(M,(P))=\frac{|A+2B+3C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

C. $d(M,(P))=\frac{|3A+C|}{\sqrt{A^2+C^2}}$. **D.** $d(M,(P))=\frac{|3A+C+D|}{\sqrt{3^2+1^2}}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

A. $d=\frac{5}{9}$. **B.** $d=\frac{5}{29}$. **C.** $d=\frac{5}{\sqrt{29}}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-1=0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;0)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$.

A. $\frac{11}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-4=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-2)$ lên mặt phẳng (P). Độ dài đoạn thẳng MH là

A. 2. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;-2;3)$ lên mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+5=0$. Độ dài đoạn thẳng AH là

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 20. Khoảng cách từ điểm $M(-4;-5;6)$ đến mặt phẳng (Oxy), (Oyz) lần lượt bằng:

A. 6 và 4. **B.** 6 và 5. **C.** 5 và 4. **D.** 4 và 6.

Câu 21. Tính khoảng cách từ điểm $B(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (P): $y+1=0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. y_0. **B.** $|y_0|$. **C.** $\frac{|y_0+1|}{\sqrt{2}}$. **D.** $|y_0+1|$.

Câu 22. Khoảng cách từ điểm $C(-2;0;0)$ đến mặt phẳng (Oxy) bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-3=0$ bằng:

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** 3.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+3z-1=0$ và $(Q): x+2y+3z+6=0$ là

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$ **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$ **C.** 14 **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-8=0$ và $(Q): x+2y+2z-4=0$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+y+z-2=0$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-z-2=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $x+y+z-2=0$. **D.** $2x+y+z-2=0$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+3z-5=0$ và $(Q): nx-8y-6z+2=0$, với $m,n \in \mathbb{R}$. Xác định m,n để (P) song song với (Q).

A. $m=n=-4$. **B.** $m=4; n=-4$. **C.** $m=-4; n=4$. **D.** $m=n=4$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và $(Q): mx+y-2z+1=0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=-6$ **D.** $m=6$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng ba mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$, $(Q): 2x+my+2z+3=0$ và $(R): -x+2y+nz=0$. Tính tổng $m+2n$, biết rằng $(P)\perp(R)$ và $(P)//(Q)$

A. -6. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 6.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x+y-2z+5=0$ và $(Q): 4x+(2-m)y+mz-3=0$, m là tham số thực. Tìm tham số m sao cho mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $m=-3$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z-1=0$ và $(\beta): 2x+4y-mz-2=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A. $m=1$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 32. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z-1=0$, mặt phẳng nào dưới đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3.

A. $(Q): x+2y-2z+8=0$.
B. $(Q): x+2y-2z+5=0$.

C. $(Q): x+2y-2z+1=0$.
D. $(Q): x+2y-2z+2=0$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$.

A. $x-2y+3z+12=0$ **B.** $x-2y-3z-6=0$ **C.** $x-2y+3z-12=0$ **D.** $x-2y-3z+6=0$

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ là

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x-y+3z-4=0$. **C.** $x-2y-4=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $A(3;0;-1)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-2;-3)$ là

A. $4x-2y+3z-9=0$.
B. $4x-2y-3z-15=0$.

C. $3x-z-15=0$.
D. $4x-2y-3z+15=0$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua $A(-1;1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;-2)$ là

A. $x-2y-2z-1=0$. **B.** $-x+y-2z-1=0$. **C.** $x-2y-2z+7=0$. **D.** $-x+y-2z+1=0$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oyz) là

A. $z=0$. **B.** $x=0$. **C.** $x+y+z=0$. **D.** $y=0$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oxy) là:

A. $z=0$. **B.** $x=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x+y=0$.

Câu 39. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A. $y=0$ **B.** $x=0$ **C.** $y-z=0$ **D.** $z=0$

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Ozx?

A. $x=0$. **B.** $y-1=0$. **C.** $y=0$. **D.** $z=0$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) qua $M(0;-2;1)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;1;-2),\vec{b}=(1;0;3)$ là

A. $3x-5y-z-6=0$. **B.** $3x-5y-z+6=0$. **C.** $3x+5y-z+6=0$. **D.** $3x-5y+z-6=0$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cặp vectơ $\vec{a}=(2;1;-2),\vec{b}=(1;0;2)$ có giá song song với mặt phẳng (P). Phương trình mặt phẳng (P) qua $C(1;1;3)$ là

A. $2x+6y-z-7=0$. **B.** $2x-6y-z+5=0$. **C.** $2x+6y+z+5=0$. **D.** $2x-6y-z+7=0$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;-2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$. **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$. **D.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2),B(2;-2;1),C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=1,d=1$. **B.** $a=6,d=-6$. **C.** $a=-1,d=-6$. **D.** $a=-6,d=6$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;-3;2)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+3z+5=0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là:

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x+y+3z-3=0$.

C. $2x+y+3z+3=0$. **D.** $2x-y+3z-9=0$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;1)$ và $B(1;2;3)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $x+2y+2z-11=0$. **B.** $x+2y+2z-2=0$. **C.** $x+2y+4z-4=0$. **D.** $x+2y+4z-17=0$.

Câu 47. Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(3;2;1)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là:

A. $2x+2y+z-2=0$. **B.** $4x+2y+z-17=0$.

C. $4x+2y+z-4=0$. **D.** $2x+2y+z-11=0$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$) và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $x+y+2z-3=0$ **B.** $x+y+2z-6=0$ **C.** $x+3y+4z-7=0$ **D.** $x+3y+4z-26=0$

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$ $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $3x+2z+1=0$ **B.** $x+2y-2z+1=0$ **C.** $x+2y-2z-1=0$ **D.** $3x+2z-1=0$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $y+2z-5=0$. **B.** $2x-y-1=0$. **C.** $2x-y+1=0$. **D.** $-y+2z-5=0$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):x+2y-z=0$ có phương trình là

A. $4x-3y+2z+3=0$. **B.** $4x-3y-2z+3=0$. **C.** $2x+y-3z-1=0$. **D.** $4x+y-2z-1=0$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0,(\beta):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x-y-2z=0.$ **B.** $2x-y+2z=0.$

C. $2x+y-2z=0.$ **D.** $2x+y-2z+1=0.$

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1);B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=15$. **C.** $a+b+c=-5$. **D.** $a+b+c=-15$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0$, $(Q):x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là

A. $x+y+z-3=0$ **B.** $x+y+z+3=0$ **C.** $-2x+z+6=0$ **D.** $-2x+z-6=0$

Câu 55. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):ax+by+cz-9=0$ chứa hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=-12$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=-2$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):x+y+3z=0$, $(R):2x-y+z=0$ là

A. $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z-22=0$.

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-1=0$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3? Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

A. $(Q): 2x+2y-z+10=0$.

B. $(Q): 2x+2y-z+4=0$.

C. $(Q): 2x+2y-z+8=0$.

D. $(Q): 2x+2y-z-8=0$.

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) qua $D(1;1;1)$ và song song với mặt phẳng (ABC) là

A. $2x+3y-6z+1=0$.

B. $3x+2y-6z+1=0$.

C. $3x+2y-5z=0$.

D. $6x+2y-3z-5=0$.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là

A. $6x+3y+2z-24=0$

B. $6x+3y+2z-12=0$

C. $6x+3y+2z=0$

D. $6x+3y+2z-36=0$

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC.

A. $(P): 6x+3y+2z+18=0$.

B. $(P): 6x+3y+2z+6=0$.

C. $(P): 6x+3y+2z-18=0$.

D. $(P): 6x+3y+2z-6=0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;-2;-1)$ và ba điểm $M(2;1;-3), A(1;1;2), B(2;-1;0)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$

b) $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-2;1;0)$.

c) Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm M nhận hai vectơ $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ là cặp vectơ chỉ phương là $2x-y-5=0$.

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{5}$.

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;0;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z=0$.

a) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A.

b) Phương trình mặt phẳng qua A và song song mặt phẳng (P) là $2x+y-2z+6=0$.

c) Mặt phẳng qua gốc toạ độ O và điểm A đồng thời vuông góc mặt phẳng (P) có phương trình là $ax+by+z=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+2b=2$.

d) Mặt phẳng (Q) song song với (P) và đồng thời khoảng cách đến A đến mặt phẳng (Q) bằng 2 có phương trình là $ax+y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+c+d=10$.

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-6=0$.

a) Vec tơ $\vec{n}=(1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x+2y+2z-15=0$.

c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình là $2x+by+cz=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $2024b+2025c=2024$.

d) Điểm $M\in(\alpha)$ sao cho A,O,M thẳng hàng thì tọa độ $M(x_0;y_0;z_0)$. Khi đó, giá trị của biểu thức $10x_0+5y_0+z_0=10$.

Câu 64. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;0;-5)$.

a) Mặt phẳng (P) có phương trình là $4x-5z+4=0$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;5)$.

c) Mặt phẳng $(Q): 5x+y+4z+2025=0$ song song với mặt phẳng (P).

d) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (P) là $\frac{19\sqrt{41}}{41}$ với điểm $B(-2;1;3)$.

Câu 65. Trong hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$, $(Q): 2x-2y+z-5=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(2;0;1)$.

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

b) Khoảng cách $d(A,(Q))=2$.

c) Khoảng cách $d(P,(Q))=4$.

d) Cho biết điểm $C\in(P)$ và đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (P) góc 30^0. Khi đó ta có khoảng cách $BC=4$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+3=0$, $(R): 2x+2y-z=0$ và điểm $A(1;2;3)$.

a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;2;-1)$.

b) Điểm A cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 3.

c) Mặt phẳng $(R): 2x+2y-z=0$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 2.

d) Hai mặt phẳng (P) và $(Q): x+y+mz+1=0$ luôn cắt nhau mọi giá trị m.

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$ và $(Q): -2x+y+4z-3=0$.

a) Mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q).

b) Mặt phẳng $(R): 14x+8y+5z-2=0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

c) Mặt phẳng $(\alpha): 2x-6y+4z-9=0$ song song mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$ và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng $\sqrt{14}$.

d) Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình là $ax+4y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a-2c+d=-9$.

Câu 68. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và hai mặt phẳng $(Q): x+y-3z-5=0$, $(R): x+2y-z-1=0$.

a) Mặt phẳng (R) đi qua điểm M.

b) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{7\sqrt{11}}{11}$.

c) Mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình là $ax+by+cz-2=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=1$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-2;0)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Q), (R) có phương trình là $ax+by+z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+d=6$.

Câu 69. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là $(P): x-2y+3z+1=0$ và $(Q): 2x-4y+6z+1=0$.

a) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M\left(1;3;\frac{4}{3}\right)$.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là $ax+by+cz-5=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=18$.

Câu 70. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1), B(0;-1;3)$.

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(-1;2;-2)$.

b) Điểm A và B nằm về cùng phía của mặt phẳng (P).

c) Mặt phẳng (Q) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) không đi qua điểm $M(-2;-2;3)$.

d) Mặt phẳng (R) đi qua A song song với (P) có phương trình là $ax+by+cz+1=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=-1$.

Câu 71. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-2); B(2;1;2); C(3;-2;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1;-1;4)$

b) Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+5y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+c+d=38$.

c) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{3.\sqrt{22}}{22}$.

d) Gọi $E;F;K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên trục $Ox;Oy;Oz$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $E;F;K$ có phương trình $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$.

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$.

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(3;3;-2)$.

b) Mặt phẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là $x+y=0$.

c) Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có dạng $ax+by+cz-2=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=-1$.

d) Gọi $M(a;b;c)\in(Oyz)$ sao cho biểu thức $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất. Khi đó $a+3b+c=3$.

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;3)$, và mặt phẳng $(P): x-y+2z+7=0$.

a) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $(2;1;1)$.

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(3;1;5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P).

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;3), B(-1;3;2), C(-1;2;3)$.

a) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

b) Điểm $G\left(-\frac{1}{3};2;\frac{8}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC.

c) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $x+ay+bz+c=0$. Khi đó $a+b+c=4$

d) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc mặt phẳng (ABC).

Câu 75. Cho các điểm $A(1;-2;0); B(2;-1;1); C(1;1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1;1;1); \overrightarrow{AC}=(0;-3;2)$

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $ax+by+cz+3=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=0$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với BC. Khi đó, mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;-2;0)$.

d) Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AC. Khi đó, khoảng cách từ điểm O đến (β) bằng $\frac{\sqrt{10}}{20}$.

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-3;1)$, $B(1;0;-1)$, $C(3;1;2)$.

a) $\overrightarrow{BC}=(2;1;3)$

b) Tọa độ trọng tâm của ΔABC là điểm $G\left(2;\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trọng tâm của ΔABC và song song với mặt phẳng $(\beta): z-2=0$. Khi đó, khoảng cách từ điểm A đến (α) bằng $\frac{1}{3}$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng trung trực của BC có phương trình là $ax+by+cz-4=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=4$.

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, Cho các điểm $A(1;-2;-1), B(4;1;2), C(2;3;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(3;3;3)$.

b) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

c) Mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C có một vectơ pháp tuyến là: $\vec{a}=(3;1;-4)$.

d) Mặt phẳng (α) đi qua A đồng thời song song với Oy và đường thẳng BC có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(1;0;-2)$.

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương. Gọi $G(1;2;3)$ là trọng tâm của ΔABC.

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) $a+b+c=9$.

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $mx+ny+pz-18=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $m+n+p=7$.

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{18}{7}$.

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương. Gọi $H(1;1;1)$ là trực tâm của ΔABC.

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) $ab+bc+ac=abc$

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $x+my+nz+p=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $m+n+p=1$.

d) Khoảng cách từ mặt phẳng $(Q): 2x+2y+2z+2025=0$ đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{2031\sqrt{3}}{6}$.

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai bằng 2.

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) $b+c=2a-6$

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $mx+ny+2z+p=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $m+n+p=3$.

d) Khoảng cách từ mặt phẳng $(Q):12x+6x+4z-2025=0$ đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{2021}{7}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(-5;3;-1),\vec{b}=(1;2;1),\vec{c}=(m;3;-1)$.,Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a}=\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

Trả lời: ………………..

Câu 82. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;1;2),\vec{v}=(-1;m;m-2)$. Gọi S là tổng các giá trị của m sao cho thỏa mãn $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{14}$. Tính S.

Trả lời: ………………..

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}=(x_0;y_0;z_0)$ là vectơ cùng hướng với $\left[\vec{m},\vec{n}\right]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $\left|\vec{p}\right|=15$, hãy tính giá trị biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 84. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tìm giá trị của m để $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}=0$.

Trả lời: ………………..

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z-16=0$ và $(Q):x+2y-2z-1=0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 86. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q):2x-y+2z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 87. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P):2x+y-2z-1=0$, $(Q):6x+3y-6z+15=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P):x+y-z+1=0$ và $(Q):x-y+z-5=0$. Tính giá trị biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 89. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB.

Trả lời: ………………..

Câu 90. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ trên trục Oy sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P):2x-y+3z-4=0$ nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 91. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ trên trục Oz sao cho cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P):2x+3y+z-17=0$. Tính giá trị biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 92. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d(B;(P))=2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Câu 93. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x+my+2mz-9=0$ và $(Q):6x-y-z-10=0$. Để $(P)\perp(Q)$ thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):5x+my+z-5=0$ và $(Q):nx-3y-2z+7=0$. Biết $(P)//(Q)$, hãy tính giá trị biểu thức $T=2m-n$.

Trả lời: ………………..

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-my-4z-6+m=0$ và $(Q):(m+3)x+y+(5m+1)z-7=0$. Để $(P)\equiv(Q)$ thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $x-2y-z+3=0$; (Q): $2x+y+z-1=0$. Mặt phẳng (R) đi qua điểm $M(1;1;1)$ chứa giao tuyến của (P) và (Q); phương trình của (R): $m(x-2y-z+3)+(2x+y+z-1)=0$. Khi đó giá trị của m là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $b.c\neq 0$ và mặt phẳng (P): $y-z+1=0$. Để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) thì $b-c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 98. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):ax-y+2z+b=0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x-y-z+1=0$ và $(Q):x+2y+z-1=0$. Tính $a+4b$.

Trả lời: ………………..

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, gọi m,n là hai giá trị thực thỏa mãn hai mặt phẳng $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ và $(Q_m): x-my+nz+2=0$. Biết giao tuyến chung của hai mặt phẳng (P_m) và (Q_m) vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x-y-6z+3=0$. Tính $m+n$.

Trả lời: ………………..

Câu 100. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;0;0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-1=0$ có dạng $-x+by+cz+d=0$. Tính $b+c-3d$.

Trả lời: ………………..

Câu 101. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC có dạng $x+by+cz+d=0$. Tính $b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Câu 102. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$ và 2 vectơ $\vec{a}=(1;-3;2),\vec{b}=(-1;-1;2)$. Một mặt phẳng (Q) chứa điểm A và nhận $\vec{a},\vec{b}$ làm cặp vecto chỉ phương có phương trình là $ax+by+cz-3=0$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Câu 103. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) qua $M(0;-2;1)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(-2;-3;8),\vec{b}=(-1;0;6)$ có dạng $ax+by+cz-12=0$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Câu 104. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;-2),B(-3;1;1),C(5;5;-5)$ có dạng $ax+by+cz+5=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2),B(3;2;0),C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Mặt phẳng (α) đi qua $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, (α) song song với đường thẳng CD. Biết phương trình mặt phẳng (α) có dạng $2x+ay+bz+c=0$, tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-3)$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y+z-3=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) có dạng $3x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+2025c+2024d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;1)$ và $B(2;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có dạng $ax+y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$, gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ. Viết phương trình mặt phẳng (MNP) có dạng $ax+by+cz-12=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 111. Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): x+y-z+3=0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $ax+by-z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $2025a-2024b+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 112. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1): 3x-y+4z+2=0$ và $(Q_2): 3x-y+4z+8=0$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1), (Q_2) có dạng $3x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, gọi (γ) là mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng sau đây: $(\alpha): 4x-y-2z-3=0$, $(\beta): 4x-y-2z-5=0$. Phương trình mặt phẳng (γ) có dạng $4x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 114. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC), (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $6x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 115. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q): $x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng (P) không qua O, song song với mặt phẳng (Q) và $d((P),(Q))=1$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-6=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 116. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương. Biết phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $ax+by+cz-14=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a-b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 117. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;3), C(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới mặt phẳng (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Biết phương trình mặt phẳng (P) là có dạng $ax+by+cz+23=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a-b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 118. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $M(4;2;1), N(0;0;3), Q(2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng chứa OQ và cách đều 2 điểm M, N có dạng $ax-4y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 119. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-48=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 120. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(2;1;-3)$ và cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tam giác ABC nhận M làm trực tâm. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b-c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 121. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-6=0$ và cách đều các điểm $A(1;6;0), B(-2;2;-1), C(5;-1;3)$. Tích abc bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 122. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $3x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b-c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz+4=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b-c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M,N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM=2ON$. Biết phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+3z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a-b-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 125. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;4)$, $B(6;-3;0)$ và mặt phẳng (P) sao cho $d(B;(P))=2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm trên đoạn thẳng AB. Tính $S=a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A,B,C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $Ax+By+z+D=0$, $(A,B,D\in\mathbb{R})$. Giá trị của biểu thức $A+B+D$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 127. Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;3)$ là trực tâm của ΔABC với A,B,C là ba điểm lần lượt nằm trên các trục Ox,Oy,Oz (khác gốc tọa độ). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A,B,C có dạng $mx+ny+pz-14=0$, ($m,n,p\in\mathbb{Z}$). Khi đó $m+n+p$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+4y-2z-6=0$, $(Q): x-2y+4z-6=0$. Mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $c+b-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 129. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ và chắn trên Oz một đoạn dài gấp đôi các đoạn chắn trên các tia Ox,Oy. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 130. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q): $x+y+z=0$ và cách điểm $M(1;2;-1)$ một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $5x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c+2025d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 131. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-1;2)$, $B(1;3;0)$, $C(-3;4;1)$, $D(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A,B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P). Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-4=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 132. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7)$, $B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, khi đó giá trị của biểu thức $x_0+y_0+z_0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 133. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Có bao nhiêu mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq 0$?

Trả lời: ………………..

Câu 135. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua $M(2;1;3)$, $A(0;0;4)$ và cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại B, C khác O thỏa mãn diện tích tam giác OBC bằng 1?

Trả lời: ………………..

Câu 136. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y+z+1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với (α), cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 137. *Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

Trả lời: ………………..

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C (A,B,C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B,C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $6x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 140. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng $(P): x+Ay+Bz+C=0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tính tổng $A+B+C$.

Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2), B(1;1;-1), C(2;-2;-2)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-4=0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T=\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Câu 143. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+7=0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$.

Câu 144. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=9a+18b+9c$.

Câu 145. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2$.

Trả lời: ………………..

Câu 146. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P=x+y+z$.

Câu 147. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), tính giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$.

Câu 148. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Câu 149. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a+b+c$.

Câu 150. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=18a+18b+9c$.

Trả lời: ………………..

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(3;1;-5)$. Lấy điểm $M(a,b,c)$ trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2-2MB^2-MC^2$ lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+8=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2MA^2+MB^2-MC^2$.

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;0), B(1;-1;3), C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z-15=0$. Xét $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính T.

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(5;0;-1)$, $C(3;1;2)$ và mặt phẳng $(Q):3x+y-z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2+MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Câu 156. Cho hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(2;3;-3)$, $C(-2;1;-2)$ và mặt phẳng (Oyz). Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) sao $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a-2b+c$.

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=12a+12b+c$.

Câu 158. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1)$, $B(-2;3;6)$. Điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị của biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$ khi $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Câu 159. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3), B(6;-5;8)$ và $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{k}$ trong đó a,b là cá số thực luôn thay đổi. Nếu $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giác trị nhỏ nhất thì giá trị $a-b$ bằng bao nhiêu?

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;5)$, $B(3;-1;0)$, $C(-4;0;-2)$. Gọi I là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P):4x+3y+2=0$.

Câu 161. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Tính giá trị của $a+b$.

Câu 162. Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Lấy điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Câu 163. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2), B(1;1;0), C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q): x+y+z-5=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q) sao cho thỏa mãn biểu thức $T=MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá nhỏ nhất, khi đó giá trị của $3T$ bằng bao nhiêu?

Câu 164. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng bao nhiêu?

Câu 165. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+2=0$ sao cho $3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Câu 166. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;4;5), B(3;4;0), C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S=a+b+c$.

Câu 167. Trong hệ trục tọa độ Oxyz, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;2)$ và cách $M(-2;4;-1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là có dạng $x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Câu 168. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Phương trình của (P) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Câu 169. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $S=a+b+d$ bằng bao nhiêu?

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. . Phương trình của (P) có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $S=a+b+d$ bằng bao nhiêu?

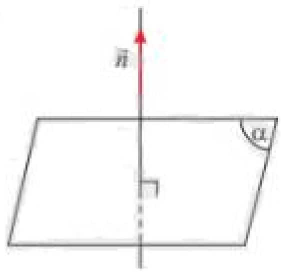
CHƯƠNG 5
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

BÀI 1
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

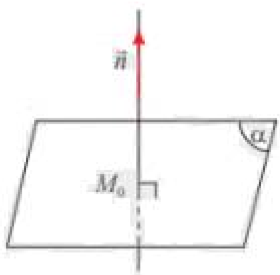
a. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α). Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là **vectơ pháp tuyến** của mặt phẳng (α).



Nhận xét:

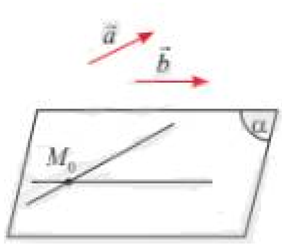
- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.



b. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

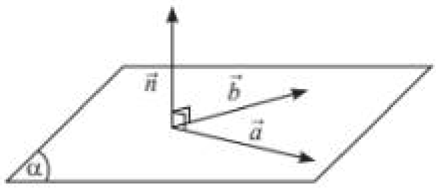
Cho mặt phẳng (α). Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và giá của chúng song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ là cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

Nhận xét: Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vectơ chỉ phương của nó.



Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ làm vectơ pháp tuyến.



Chú ý:

• Vectơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

• $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$

• $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$

• Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

a. Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có dạng phương trình: $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét:

• Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (với $A^2+B^2+C^2\neq 0$) thì vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

• Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó:

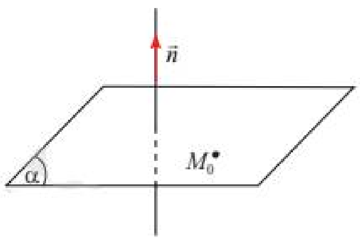
$$N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

b. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng khi biết một số điều kiện

• Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết vectơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

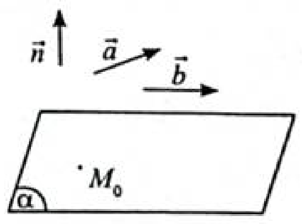


• Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết cặp vectơ chỉ phương

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.



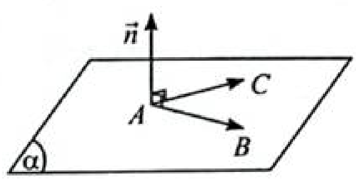
• Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A,B,C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

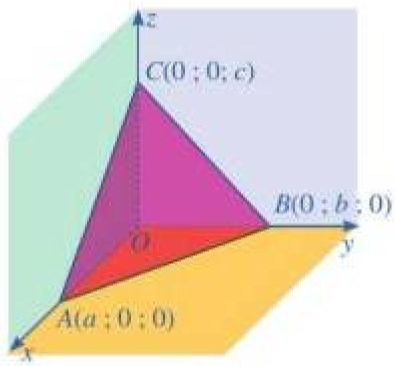
Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.



Nhận xét:

Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có phương trình là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. với $a.b.c\neq 0$

Phương trình trên được gọi là **phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.**

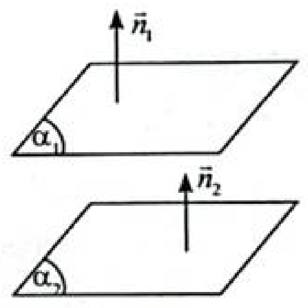


3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

a. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

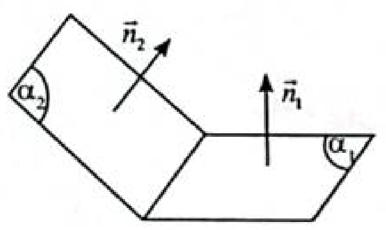
Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Khi đó: $(\alpha_1) \,//\, (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$



Chú ý:

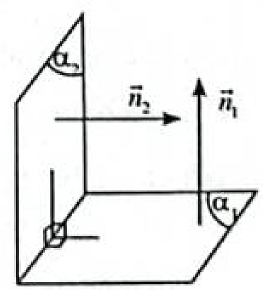
- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.



b. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Khi đó: $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$



4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính: $d(M_0,(\alpha)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG
XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC VÀ KHÔNG THUỘC MẶT PHẲNG

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- Mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$
- Nếu mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a},\vec{b}$ thì (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.
- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là vectơ có giá vuông góc với (α).
- Vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) là vectơ có giá song song hoặc trùng với (α).
- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k.\vec{n}$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).
- Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của (α) thì $k.\vec{a}$ cũng là một vectơ chỉ phương của (α).

Chú ý:

- Trục Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.
- Trục Oy có vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

2. Điểm thuộc và không thuộc mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$. Khi đó:

- $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$
- $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)\notin(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, xác định một vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng sau:

a) $(P): x-2y+2z-2026=0$.

b) $(Q): 2x-3y+2025=0$.

c) $(R): -x+3z-4=0$.

Lời giải

a) Mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2026=0$ nên suy ra một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;2)$.

b) Mặt phẳng $(Q): 2x-3y+2025=0$ nên suy ra một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-3;0)$.

c) Mặt phẳng $(R): -x+3z-4=0$ nên suy ra một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;0;3)$.

Bài 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$ và $C(-1;1;0)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A,B,C, hãy xác định một vectơ pháp tuyến của (P).

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AC}=(-3;1;-2), \overrightarrow{AB}=(-1;-1;-4)$

nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-6;-10;4)$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A,B,C nên vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-6;-10;4)$

Bài 3. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$.

a) Biết mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A,B,C, hãy xác định một vectơ pháp tuyến của (P).

b) Tính $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;3)$; $\overrightarrow{AC}=(-3;3;3)$; $\overrightarrow{AD}=(-1;3;1)$.

nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-12;9)$

Vì mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A,B,C nên vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-12;9)$

b) Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}=(-3).(-1)+(-12).3+9.1=-24$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-3=0$. Xét các điểm sau, điểm nào thuộc và không thuộc mặt phẳng (α) ?

a) $M\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$.

a) $N\left(1;-1;-\frac{3}{2}\right)$.

c) $P(1;6;4)$.

d) $Q(0;3;0)$.

Lời giải

$(\alpha): x-y+2z-3=0$

a) Xét điểm $M\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$, ta có: $1-1+2.\frac{3}{2}-3=0$ nên $M\in(\alpha)$

b) Xét điểm $N\left(1;-1;-\frac{3}{2}\right)$, ta có: $1+1+2.\left(-\frac{3}{2}\right)-3=-4\neq 0$ nên $N\notin(\alpha)$

c) Xét điểm $P(1;6;4)$, ta có: $1-6+2.4-3=0$ nên $P\in(\alpha)$ nên C sai.

d) Xét điểm $Q(0;3;0)$, ta có: $0-3+2.0-3=-6\neq 0$ nên $Q\notin(\alpha)$ nên D sai.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(-5;3;-1)$, $\vec{b}=(1;2;1)$, $\vec{c}=(m;3;-1)$. Giá trị của m sao cho $\vec{a}=\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

Lời giải

Ta có: $\left[\vec{b},\vec{c}\right]=(-5;m+1;3-2m)$

Mà $\vec{a}=\left[\vec{b},\vec{c}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}m+1=3\\3-2m=-1\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;1;2),\vec{v}=(-1;m;m-2)$. Tìm giá trị của m sao cho $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{14}$.

Lời giải

Ta có: $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-m-2;-m;m+1)\Rightarrow\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{(m+2)^2+m^2+(m+1)^2}=\sqrt{3m^2+6m+5}$

Mà $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{14}$ nên $3m^2+6m+5=14\Leftrightarrow 3m^2+6m-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$

DẠNG 2

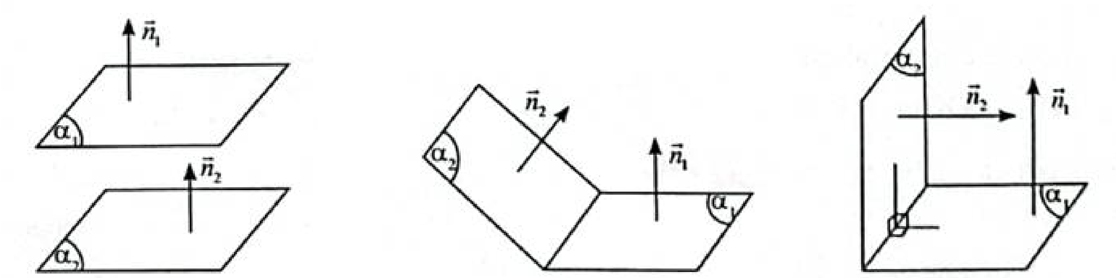
HAI MẶT PHẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

KHOẢNG CÁCH MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

1. Điều kiện hai mặt phẳng song song, vuông góc

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

- $(\alpha_1) \,//\, (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.
- $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

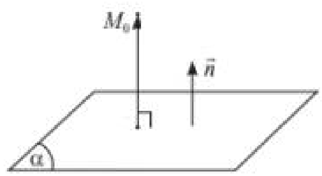


Chú ý:

- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$
- Nếu $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính: $d(M_0, (\alpha)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$



Chú ý:

- Mặt phẳng (Oxy) có phương trình: $z = 0$.
- Mặt phẳng (Oxz) có phương trình: $y = 0$.

• Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x=0$.

3. Khoảng cách hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia *(Thực chất là khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng).*

Để tính khoảng cách mặt phẳng (α_1) song song với (α_2), ta thực hiện như sau:

Bước 1: Chọn điểm $M\in(\alpha_1)$

Bước 2: Tính khoảng cách điểm M đến (α_2)

Bước 3: Kết luận $d\left((\alpha_1),(\alpha_2)\right)=d\left(M,(\alpha_2)\right)$

Chú ý: Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): Ax+By+Cz+D_1=0$ và $(\alpha_2): Ax+By+Cz+D_2=0$ có cùng vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$. Khi đó khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là: $d((\alpha_1),(\alpha))=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng : $(\alpha): x-2=0; (\beta): y-6=0; (\gamma): 2x+2025=0$. Chứng minh rằng:

a) $(\alpha)\perp(\beta)$.

b) $(\alpha)\ //\ (\gamma)$.

Lời giải

$(\alpha): x-2=0$ có VTPT $\vec{a}=(1;0;0)$

$(\beta): y-6=0$ có VTPT $\vec{b}=(0;1;0)$

$(\gamma): 2x+2025=0$ có VTPT $\vec{c}=(2;0;0)$

a) Ta có; $\vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$

b) Ta có; $\vec{a}=2\vec{c}$ và $\vec{a}.\vec{c}=2\neq0$ nên $(\alpha)\ //\ (\gamma)$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(\alpha): x+y+2z+1=0$; $(\beta): x+y-z+2=0$; $(\gamma): x-y+5=0$. Chứng minh rằng:

a) $(\alpha)\perp(\beta)$.

b) $(\alpha)\perp(\gamma)$.

c) $(\beta)\perp(\gamma)$.

Lời giải

$(\alpha): x+y+2z+1=0$ có VTPT $\vec{a}=(1;1;2)$

$(\beta): x+y-z+2=0$ có VTPT $\vec{b}=(1;1;-1)$

$(\gamma): x-y+5=0$ có VTPT $\vec{c}=(1;-1;0)$

a) Ta có $\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$

b) Ta có $\vec{a}.\vec{c}=0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\gamma)$

c) Ta có $\vec{b}.\vec{c}=0 \Rightarrow (\beta)\perp(\gamma)$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+2mz-9=0$ và $(Q): 6x-y-z-10=0$. Tìm m để $(P)\perp(Q)$.

Lời giải

$(P): 2x+my+2mz-9=0$ có VTPT $\vec{a}=(2;m;2m)$

$(Q): 6x-y-z-10=0$ có VTPT $\vec{b}=(6;-1;-1)$

$(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow 2.6+m.(-1)+2m.(-1)=0 \Leftrightarrow m=4$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 5x+my+z-5=0$ và $(Q): nx-3y-2z+7=0$. Tìm m,n để $(P)//(Q)$.

Lời giải

$(P): 5x+my+z-5=0$ có VTPT $\vec{a}=(5;m;1)$

$(Q): nx-3y-2z+7=0$ có VTPT $\vec{b}=(n;-3;-2)$

$$(P)\ //(Q) \Leftrightarrow \left[\vec{a};\vec{b}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}-2m+3=0\\ n+10=0\\ -15-mn=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{3}{2}\\ n=-10\end{cases}$$

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$

a) Tính khoảng cách từ điểm $M(0;0;-2)$ đến mặt phẳng (P).

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và $(Q): x+2y+2z-5=0$.

Lời giải

a) $d\left(M,(P)\right)=\dfrac{\left|0+2.0+2.(-2)-10\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{14}{3}$

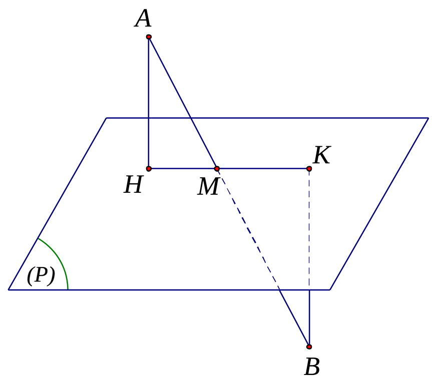
b) Vì $\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{2}=\dfrac{2}{2}\neq\dfrac{-10}{-5}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) song song.

Lấy $M(10;0;0)\in(P)$.

Khi đó, $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)=\dfrac{|10-5|}{\sqrt{9}}=\dfrac{5}{3}$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y-12z+5=0$ và điểm $A(2;4;-1)$. Trên mặt phẳng (P) lấy điểm M. Gọi B là điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=3.\overrightarrow{AM}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (P).

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AB} = 3.\overrightarrow{AM} \Rightarrow BM = 2.AM \Rightarrow \dfrac{d\left(B,(P)\right)}{d\left(A,(P)\right)} = \dfrac{BM}{AM} = 2$

$\Rightarrow d\left(B,(P)\right) = 2.d\left(A,(P)\right) = 2.\dfrac{\left|3.2+4.4-12.(-1)+5\right|}{\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}} = 2.3 = 6$.

Bài 7. Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$.

Lời giải

Vì $M \in Oz \Rightarrow M(0;0;m)$. Ta có: $MA = \sqrt{2^2+3^2+(4-m)^2}$; $d\left(M,(P)\right) = \dfrac{|m-17|}{\sqrt{14}}$.

M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$ khi và chỉ khi

$\sqrt{2^2+3^2+(4-m)^2} = \dfrac{|m-17|}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow 13(m-3)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Vậy $M(0;0;3)$.

CHỦ ĐỀ 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT MẶT PHẲNG

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α), thông thường ta có 3 trường hợp cơ bản sau:

Trường hợp 1: Khi bài toán cho biết mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ hoặc có hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ (với $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$) thì viết dưới dạng sau:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Trường hợp 2: Khi bài toán cho biết mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ hoặc có hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ (với $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$) và không tìm được điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)$ thì ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Viết phương trình mặt phẳng (α) dưới dạng:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

- **Bước 2:** Sau đó dựa vào giả thiết bài toán để tìm giá trị D .

Chú ý: Dạng này, giả thiết có liên quan đến khoảng cách và góc liên quan đến mặt phẳng.

Trường hợp 3: Khi bài toán cho biết mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và giả thiết bài toán không cho vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ hoặc không cho hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ thì ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(A;B;C)$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt phẳng (α) dưới dạng:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

- **Bước 3:** Sau đó dựa vào giả thiết bài toán để tìm hai phương trình chứa 3 ẩn A,B,C .

Chú ý:

- Dạng này, giả thiết có liên quan đến khoảng cách và góc liên quan đến mặt phẳng.
- Để giải tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đơn giản hơn thì gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=(1;B;C)$.

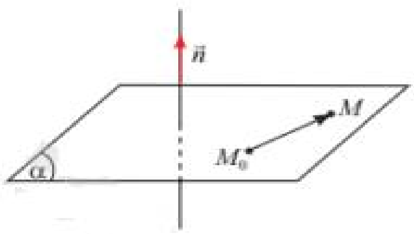
DẠNG 1

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT MẶT PHẲNG KHI BIẾT MỘT ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG VÀ MỘT VECTƠ PHÁP TUYẾN HOẶC HAI VECTƠ CHỈ PHƯƠNG

1. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và biết một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$

Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$



Chú ý:

- Phải nắm vững khái niệm **vectơ pháp tuyến** và **vectơ chỉ phương** của mặt phẳng.

+ Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là vectơ **có giá vuông góc** với mặt phẳng đó. Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng thì $k\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

+ Vectơ vectơ chỉ phương của mặt phẳng là vectơ **có giá song song** với mặt phẳng đó. Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của mặt phẳng thì $k\vec{a}$ $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.

- Mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ ($\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương) thì mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

- Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A,B,C không thẳng hàng thì có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ nên mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

- Dựa vào tính chất vuông góc, song song giữa mặt phẳng với mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng trong không gian để tìm vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần lập.

+ Hai mặt phẳng song song thì có cùng vectơ pháp tuyến.

+ Hai mặt phẳng vuông góc thì vectơ chỉ phương của mặt phẳng này là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng kia.

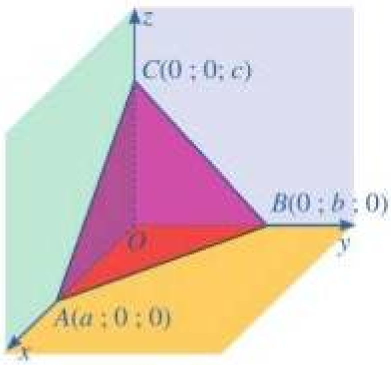
+ Đường thẳng song song mặt phẳng thì vectơ chỉ phương của đường thẳng là vectơ chỉ phương của mặt phẳng.

+ Đường thẳng vuông góc mặt phẳng thì vectơ chỉ phương của đường thẳng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

2. Các trường hợp đặc biệt của mặt phẳng

a. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

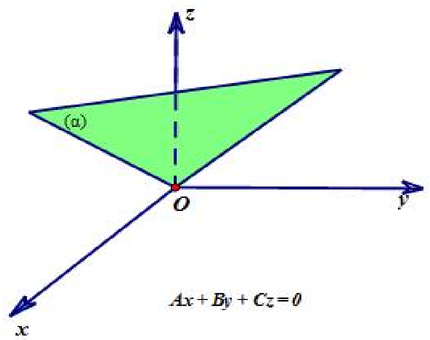
Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có **phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn** là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. với $a.b.c\neq 0$



a. Phương trình mặt phẳng đặc biệt

Xét phương trình mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$

- Nếu $D=0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O và có dạng $(\alpha): Ax+By+Cz=0$.



- Nếu $A=0, B\neq 0, C\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox.

  + Mặt phẳng (α) song song Ox thì có dạng $(\alpha): By+Cz+D=0$. (Hình 1)

  + Mặt phẳng (α) chứa trục Ox thì có dạng $(\alpha): By+Cz=0$.

- Nếu $A\neq 0, B=0, C\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy.

  + Mặt phẳng (α) song song Oy thì có dạng $(\alpha): Ax+Cz+D=0$. (Hình 2)

  + Mặt phẳng (α) chứa trục Oy thì có dạng $(\alpha): Ax+Cz=0$.

- Nếu $A\neq 0, B\neq 0, C=0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz.

  + Mặt phẳng (α) song song Oz thì có dạng $(\alpha): Ax+By+D=0$. (Hình 3)

  + Mặt phẳng (α) chứa trục Oz thì có dạng $(\alpha): Ax+By=0$.

- Nếu $A=B=0, C\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy).

  + Mặt phẳng (α) song song (Oxy) thì có dạng $(\alpha): Cz+D=0$. (Hình 4)

  + Mặt phẳng (α) chứa trục (Oxy) thì có dạng $(\alpha): z=0$.

- Nếu $A = C = 0, B \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz).

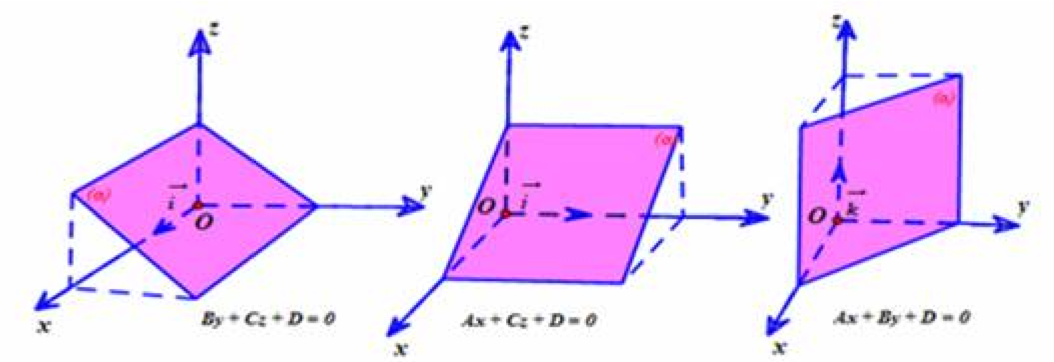
  + Mặt phẳng (α) song song (Oxz) thì có dạng $(\alpha): By + D = 0$. (Hình 5)

  + Mặt phẳng (α) chứa trục (Oxz) thì có dạng $(\alpha): y = 0$.

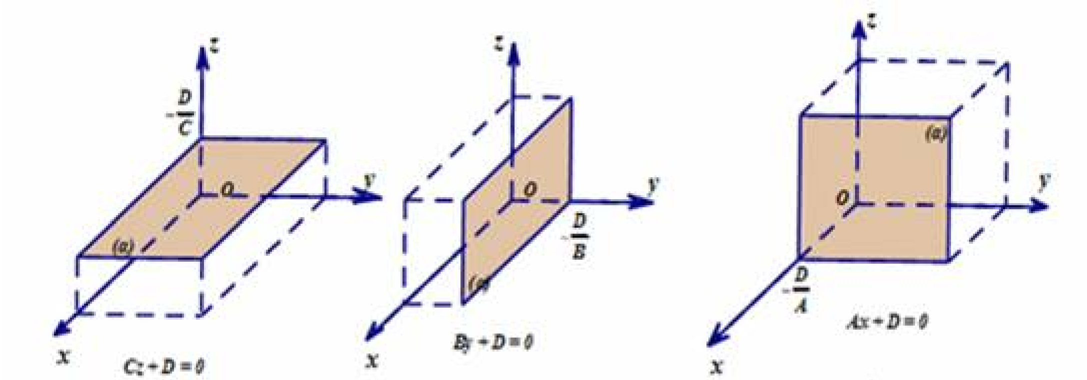
- Nếu $B = C = 0, A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz).

  + Mặt phẳng (α) song song (Oyz) thì có dạng $(\alpha): Ax + D = 0$. (Hình 6)

  + Mặt phẳng (α) chứa trục (Oyz) thì có dạng $(\alpha): x = 0$.



Hình 1 **Hình 2** **Hình 3**



Hình 4 **Hình 5** **Hình 6**

Nhận xét:

- Để nhớ các phương trình mặt phẳng đặc biệt thì lấy phương trình (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ làm chuẩn.

  + Mặt phẳng (α) chứa gốc tọa độ $O(0;0;0)$ thì $D = 0$.

  + Mặt phẳng (α) chứa trục tương ứng nào (trục Ox, Oy, Oz) thì ẩn đó không có (không chứa Ax, By, Cz) và $D = 0$.

  + Mặt phẳng (α) song song trục tương ứng nào (trục Ox, Oy, Oz) thì ẩn đó không có (không chứa Ax, By, Cz) và $D \neq 0$.

- Nếu không nhớ các phương trình mặt phẳng đặc biệt thì nhớ vectơ chỉ phương của các trục Ox, Oy, Oz và vectơ pháp tuyến các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ để chuyển bài toán lập phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến.

+ Trục Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.

+ Trục Oy có vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.

+ Trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.

+ Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

+ Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.

+ Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P)

a) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$.

b) đi qua điểm $N(2;-1;0)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$.

Lời giải

a) Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$ có dạng: $3(x-2)-2(y-1)+6(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+6z+14=0$.

Mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(-1;-1;1)$.

b) Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(2;-1;0)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;-1;1)$ có dạng: $-1(x-2)-1(y+1)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow -x-y+z+1=0$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và:

a) vuông góc với trục Ox.

b) song song với mặt phẳng (Oxy).

Lời giải

a) Mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và vuông góc với trục Ox thì nhận vectơ $\vec{i}=(1;0;0)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $1(x-1)+0(y-2)+0(z+1)=0$ hay $x-1=0$.

b) Mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) thì nhận vectơ $\vec{k}=(0;0;1)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $(x-1)+0(y-2)+1(z+1)=0$ hay $z+1=0$.

Bài 3. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua:

a) điểm $M(-2;4;-1)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 3x+7y+10z+1=0$

b) điểm $N(1;-1;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): 3x+2y-z=0$, $(R): x+y-z=0$.

c) điểm $K(2;3;-1)$, song song với trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-3z+1=0$.

Lời giải

c) Mặt phẳng $(P)//(Q)\Rightarrow \vec{n}_{(P)}=\vec{n}_{(Q)}=(3;7;10)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;4;-1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(3;7;10)$ có phương trình là:

$3(x+2)+7(y-4)+10(z+1)=0\Leftrightarrow 3x+7y+10z-12=0$.

b) Mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (R) lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(3;2;-1)$, $\vec{n}_R=(1;1;-1)$

Vì mặt phẳng (P) vuông góc với cả hai mặt phẳng (R), (Q) nên giá của các vectơ $\vec{n}_R,\vec{n}_Q$ song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P).

Suy ra $[\vec{n}_Q,\vec{n}_R]=(-1;2;1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(1;-1;5)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(-1;2;1)$ có phương trình là: $-1(x-1)+2(y+1)+1(z-5)=0$ hay $x-2y-z+2=0$.

c) Do $(P)//Ox$ nên mặt phẳng (P) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\vec{i}=(1;0;0)$.

Mặt khác: $(P)\perp(Q)\Rightarrow$ mặt phẳng (P) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;2;-3)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(0;3;2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $K(2;3;-1)$ có phương trình $(P):3y+2z-7=0$.

Bài 4. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua:

a) đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) với $(\alpha):3x-2y+2z+7=0$, $(\beta):5x-4y+3z+1=0$.

b) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): $x+2y-z=0$.

Lời giải

a) Vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_\alpha=(3;-2;2)$, $\vec{n}_\beta=(5;-4;3)$.

Khi đó vecto pháp tuyến mặt phẳng cần tìm là $\vec{n}=[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta]=(2;1;-2)$

Mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-2)$ là : $2x+y-2z=0$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, vectơ pháp tuyến mặt phẳng (Q): $\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-1)$.

Theo đề bài ta có vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}\wedge\overrightarrow{AB}=(4;-3;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x-3y-2z+C=0$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;0)$ nên: $-3+C=0\Leftrightarrow C=3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x-3y-2z+3=0$.

Bài 5. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;1;1)$; $B(0;4;0)$; $C(2;2;0)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;3;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(1;1;-1)$, suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}3 & -1\\1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-2;-2;-4)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $B(0;4;0)$ và có vectơ pháp tuyến của $\vec{n}=(-2;-2;-4)$ nên c phương trình

$-2(x-0)-2(y-4)-4(z-0)=0 \Leftrightarrow x+y+2z-4=0$

Vậy $(P): x+y+2z-4=0$.

Bài 6. Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*.

Lời giải

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ và đi qua trung điểm $I(1;1;2)$ của đoạn thẳng *AB*.

Do đó, ta có: $-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow -6x+2y+2z=0 \Leftrightarrow 3x-y-z=0$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy), và N là điểm đối xứng với B qua (Oyz). Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN.

Lời giải

M là hình chiếu của $A(-3;2;1)$ trên trục (Oxy) nên ta có $M(-3;2;0)$.

N là đối xứng với $B(5;-4;1)$ qua (Oyz) nên ta có $N(-5;-4;1)$.

Gọi I là trung điểm MN. Ta có $I\left(-4;-1;\frac{1}{2}\right)$ và $\overrightarrow{MN}=(-2;-6;1)$

Phương trình mặt phẳng $2(x+4)+6(y+1)-1\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 4x+12y-2z+29=0$.

Bài 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;2;1), B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2), D(-1;1;-1)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm ΔABC. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của GI.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình vuông nên tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Khi đó $I\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và do G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{-1}{3}\right)$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng GI nên $M\left(\frac{4}{3};\frac{5}{12};-\frac{5}{12}\right)$

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn thẳng GI:

$$-4\left(x-\frac{4}{3}\right)+\left(y-\frac{5}{12}\right)-\left(z+\frac{5}{12}\right)=0 \Leftrightarrow 8x-2y+2z-9=0.$$

Bài 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x-y+z-2=0, (\alpha_2): x+4y-5=0$ và song song với mặt phẳng $(\alpha_3): 2x+21y-z+7=0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P).

Lời giải

Ta có: $(P)//(\alpha_3) \Rightarrow (P): 2x+21y-z+m=0\ (m\neq -7)$

Gọi d là giao tuyến của $(\alpha_1);(\alpha_2)$ $d: \begin{cases}(\alpha_1): 3x-y+z-2=0\\ (\alpha_2): x+4y-5=0\end{cases}$

Cho $y=0 \Rightarrow \begin{cases}3x+z-2=0\\ x-5=0\end{cases} \Rightarrow M(5;0;-13)$ $y=0$ và $z=0 \Rightarrow \begin{cases}3x-y-2=0\\ x+4y-5=0\end{cases} \rightarrow N(1;1;0)$

$M\in(P) \Rightarrow 2.5+21.0-(-13)+m=0 \Rightarrow m=-23$

$N\in(P) \Rightarrow 2.1+21.1-0+m=0 \Rightarrow m=-23$.

Vậy $2x+21y-z-23=0$.

Bài 10. Lập phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn của mặt phẳng (P), biết rằng mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(5;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$.

Lời giải

Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(5;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$ có phương trình là: $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

Lời giải

Phương trình mặt chắn cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (với $a>0$, $b>0$, $c>0$).

Theo đề: $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{b}{2}\\ c=2b\end{cases}$.

Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: $\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{3}{b}+\frac{-2}{2b}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{b}=1 \Leftrightarrow b=4$

Khi đó $a=2$, $c=8$.

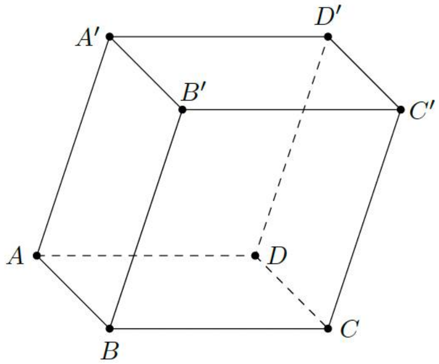
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1 \Leftrightarrow 4x+2y+z-8=0$.

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;-1;3)$, $B(0;2;4)$ $D(2;-1;1)$, $A'(0;1;2)$.

a) Tính tọa độ các điểm C, B', D'.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

Lời giải



a) Tính tọa độ các điểm C, B', D'.

Ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=1 \\ y_C-2=0 \\ z_C-4=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=1 \\ y_C=2 \\ z_C=2 \end{cases}$ suy ra $C(1;2;2)$.

$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'}=-1 \\ y_{B'}-2=2 \\ z_{B'}-4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=-1 \\ y_C=4 \\ z_C=3 \end{cases}$ suy ra $B'(-1;4;3)$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'}=1 \\ y_{D'}-1=0 \\ z_{D'}-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'}=1 \\ y_{D'}=1 \\ z_{D'}=0 \end{cases}$ suy ra $D'(1;1;0)$.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

Ta có: $\overrightarrow{CB'}=(-2;2;1), \overrightarrow{CD'}=(0;-1;-2)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(CB'D')$ nên $(CB'D')$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{CD'}\right]=(-3;-4;2)$ và đi qua điểm $C(1;2;2)$ có phương trình là: $3x+4y-2z-7=0$.

DẠNG 2

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT MẶT PHẲNG KHI BIẾT MỘT VECTƠ PHÁP TUYẾN HOẶC HAI VECTƠ CHỈ PHƯƠNG MÀ KHÔNG BIẾT ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG

Khi viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) mà có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ hoặc có hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ (với $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$) và không tìm được điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)$ thì ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Viết phương trình mặt phẳng (α) dưới dạng:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

- **Bước 2:** Sau đó dựa vào giả thiết bài toán để tìm giá trị D .

Chú ý: Dạng này, giả thiết có liên quan đến khoảng cách và góc liên quan đến mặt phẳng.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $B(6;4;0)$, $C(4;5;1)$, $M(2;1;6)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với BC và cách M một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính $-3a+c$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{BC}=(-2;1;1)\Rightarrow(P):-2x+y+z+D=0$.

Lại có $d\left(M;(P)\right)=\sqrt{6}\Leftrightarrow\dfrac{|D+3|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|D+3|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-3\\D=3\end{array}\right.$

Với $D=-3\Rightarrow(P):-2x+y+z-3=0$.

Với $D=3\Rightarrow(P):-2x+y+z+3=0$.

Vậy $a=-2;c=1\Rightarrow-3a+c=7$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P):2x-y-2z+19=0$ và cách (P) một khoảng bằng 5 có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính $a+c+d$.

Lời giải

Trên mặt phẳng $(P):2x-y-2z+4=0$ chọn điểm $M(0;4;0)$.

Do (Q) song song với mặt phẳng (P) nên (Q) có dạng: $2x-y-2z+D=0$ với $D\neq19$.

Vì $d\left((P),(Q)\right)=5\Leftrightarrow d\left(M,(Q)\right)=5\Leftrightarrow\dfrac{|-4+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=5\Leftrightarrow|-4+D|=15\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-11\\D=19\end{array}\right.$

Mặt phẳng (Q) thỏa mãn yêu cầu bài toán: $2x-y-2z-11=0$

Vậy $a+c+d=11$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q):x+2y+2z-3=0$ và mặt phẳng (P) không qua O, song song mặt phẳng (Q) và $d\left((P);(Q)\right)=1$. Viết phương trình mặt phẳng (P)

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+2y+2z+d=0$ Với $d\neq 0;d\neq -3$.

Có $d((P);(Q))=1\Leftrightarrow \dfrac{|d+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=0 \\ d=-6 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow (P)$ có dạng: $x+2y+2z-6=0$.

Bài 4. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

Lời giải

Do $(Q)//(P)$ nên mặt phẳng $(Q):2x-2y+z+C=0$; $C\neq -5$, chọn $M(0;0;5)\in(P)$

Ta có $d((P);(Q))=d(M;(Q))=\dfrac{|5+C|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=4 \\ C=-14 \end{array}\right.$

Với $C=4\Rightarrow (Q):2x-2y+z+4=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

Với $C=-14\Rightarrow (Q):2x-2y+z-14=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q):2x-2y+z-14=0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q):2x-2y+z-14=0$.

DẠNG 3
VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT MẶT PHẲNG KHI BIẾT ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG VÀ KHÔNG BIẾT VECTƠ PHÁP TUYẾN HOẶC KHÔNG BIẾT HAI VECTƠ CHỈ PHƯƠNG

Khi bài toán cho biết mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và giả thiết bài toán không cho vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ hoặc không cho hai vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$ thì ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(A;B;C)$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt phẳng (α) dưới dạng:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

- **Bước 3:** Sau đó dựa vào giả thiết bài toán để tìm hai phương trình chứa 3 ẩn A,B,C.

Chú ý:

- Dạng này, giả thiết có liên quan đến khoảng cách và góc liên quan đến mặt phẳng.
- Để giải tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đơn giản hơn thì gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=(1;B;C)$.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1;-2;-2)$, vuông góc với mặt phẳng (Oxz) đồng thời khoảng cách từ điểm $B(3;1;-3)$ đến (P) bằng $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Lời giải

Giả sử mặt phẳng cần lập có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$

Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(Oxz): y=0$ nên $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Oxz)}=0 \Leftrightarrow b=0$.

(P) đi qua điểm $A(1;-2;-2) \Rightarrow (P): a(x-1)+c(z+2)=0 \Leftrightarrow ax+cz-a+2c=0$.

$$d\left(B;(P)\right)=\frac{|2a-c|}{\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow 5(2a-c)^2=9\left(a^2+c^2\right) \Leftrightarrow 11a^2-20ac-4c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2c \\ 11a=-2c \end{array}\right..$$

Với $a=2c$ chọn $c=1 \Rightarrow a=2 \Rightarrow (P): 2x+z=0$

Với $11a=-2c$ chọn $a=2 \Rightarrow c=-11 \Rightarrow (P): 2x-11z-24=0$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $2x+z=0$ và $2x-11z-24=0$.

Bài 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $M(-1;1;0), N(0;0;-2), I(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và B, đồng thời khoảng cách từ I đến (P) bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải

Giả sử mặt phẳng cần lập có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;1;0) \Rightarrow (P): a(x+1)+b(z-1)+cz=0$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(0;0;-2) \Rightarrow a-b-2c=0 \Rightarrow b=a-2c$.

$$d\left(I;(P)\right)=\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+(a-2c)^2+c^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|2a+c|}{\sqrt{2a^2-4ac+5c^2}}=\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow|2a+c|=\sqrt{3}\sqrt{2a^2-4ac+5c^2}$

$\Leftrightarrow(2a+c)^2=3\left(2a^2-4ac+5c^2\right)$

$\Leftrightarrow a^2-8ac+7c^2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=c\\a=7c\end{array}\right.$

Với $a=c$ chọn $c=1\Rightarrow a=1,b=-1\Rightarrow(P):x-y+z+2=0$

Với $a=7c$ chọn $c=1\Rightarrow a=7,b=5\Rightarrow(P):7x+5y+z+2=0$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x-y+z+2=0$ và $7x+5y+z+2=0$.

Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3),B(0;-1;2),C(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và gốc tọa độ O sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

Lời giải

Giả sử mặt phẳng cần lập có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2\neq0$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $O(0;0;0)$ $\Rightarrow(P):ax+by+cz=0$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;3)$ $\Rightarrow a+2b+3c=0\Rightarrow a=-2b-3c$.

$$d\left(B;(P)\right)=d\left(C;(P)\right)\Leftrightarrow\frac{|-b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Leftrightarrow|-b+2c|=|a+b+c|$$

$\Leftrightarrow|-b+2c|=|-b-2c|$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-b+2c=-(-b-2c)\\-b+2c=-b-2c\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\c=0\end{array}\right.$

Với $b=0$ thì $a=-3c\Rightarrow(P):3x-z=0$

Với $c=0$ thì $a=-2b\Rightarrow(P):2x-y=0$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $3x-z=0$ và $2x-y=0$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1;-2;-2)$, vuông góc với mặt phẳng (Oxz) đồng thời khoảng cách từ điểm $B(3;1;-3)$ đến (P) bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x+by+cz+d=0$ $(d\neq0)$. Tính $P=3b+2c-d$.

Lời giải

Giả sử mặt phẳng cần lập có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(Oxz): y=0$ nên $\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Oxz)}} = 0 \Leftrightarrow b=0$.

(P) đi qua điểm $A(1;-2;-2) \Rightarrow (P): a(x-1)+c(z+2)=0 \Leftrightarrow ax+cz-a+2c=0$.

$$d(B;(P)) = \frac{|2a-c|}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow 5(2a-c)^2 = 9(a^2+c^2) \Leftrightarrow 11a^2-20ac-4c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2c \\ 11a=-2c \end{array}\right..$$

Với $a=2c$ chọn $c=1 \Rightarrow a=2 \Rightarrow (P): 2x+z=0$ (loại).

Với $11a=-2c$ chọn $a=2 \Rightarrow c=-11 \Rightarrow (P): 2x-11z-24=0$ (thỏa mãn).

Vậy $P=3b-2c-d=0-2(-11)-(-24)=46$.

Bài 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-1), B(1;1;2), C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $ax+by+cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

Do $A(1;1;-1) \in (Q)$ nên: $a+b-c+d=0$ (1);

$(Q) \perp (P)$ nên $a-2b+2c=0$ (2)

$$IB=2IC \Leftrightarrow d(B,(\alpha)) = 2d(C;(\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|a+b+2c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2\frac{|-a+2b-2c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-3b+6c-d=0 \\ -a+5b-2c+3d=0 \end{array}\right. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có 2 trường hợp sau :

Trường hợp 1 : $\begin{cases} a+b-c+d=0 \\ a-2b+2c=0 \\ 3a-3b+6c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=\frac{-1}{2}a;\ c=-a;\ d=\frac{-3}{2}a$.

Chọn $a=2 \Rightarrow b=-1; c=-2; d=-3 \Rightarrow (Q): 2x-y-2z-3=0$

Trường hợp 2 : $\begin{cases} a+b-c+d=0 \\ a-2b+2c=0 \\ -a+5b-2c+3d=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=\frac{3}{2}a; c=a; d=\frac{-3}{2}a$.

Chọn $a=2 \Rightarrow b=3; c=2; d=-3 \Rightarrow (Q): 2x+3y+2z-3=0$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là: $2x-y-2z-3=0$ và $2x+3y+2z-3=0$

CHỦ ĐỀ 3
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

DẠNG 1
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2,..., A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất (với $\alpha_1; \alpha_2 ... \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}\right) + \alpha_2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}\right) + ... + \alpha_n\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}\right)\\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\overrightarrow{MI} + \alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{IA_n}\\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\overrightarrow{MI} \quad \left(do\ \alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right| = |\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n|\left|\overrightarrow{MI}\right|$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}$

Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} Qua\ I \\ \vec{u}_{IM} = \vec{n}_P = (A; B; C) \end{cases}$.

+ Ta có $M = IM \cup (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpxki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Dấu } "=" \text{ xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2,..., A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1; \alpha_2 ... \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$).

Chú ý:

$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n>0$

$T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n<0$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I.

+ Ta có:

$$\begin{aligned}T&=\alpha_1MA_1^2+\alpha_2MA_2^2+...+\alpha_nMA_n^2\\&=\alpha_1\left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2+\alpha_2\left(\overrightarrow{MA_2}\right)^2+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MA_n}\right)^2\\&=\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2+\alpha_2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)^2+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)^2\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)MI^2+\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2+2\overrightarrow{MI}\left(\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}\right)\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2 \qquad \left(do\ \alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow T=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2$

+ Vì $\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2$ không đổi nên:

- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M\in(P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases}Qua\ I\\ \vec{u}_{IM}=\vec{n}_P=(A;B;C)\end{cases}$.

+ Ta có $M=IM\cup(P)\Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bu–nhia–cốp–xki

Với $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$, ta có: $(ax+by+cz)^2\le(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

Bài 1. Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

Gọi $G\left(x_1;y_1;z_1\right)$ là trọng tâm tam giác ABC suy ra $G\left(-1;-1;3\right)$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm tùy ý nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG}$.

Vậy $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$.

$S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G trên (P)

Do đó: $S=3MG=3d\left(G,(P)\right)=3.\dfrac{\left|-1+2.(-1)-2.3-5\right|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{14}{3}$

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai điểm $A(1;0;2), B(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9a+3b+6c$.

Lời giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Gọi $I(m;n;p)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-m;-n;2-p); \overrightarrow{IB}=(3-m;1-n;-1-p)$.

$$3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3(1-m)-2(3-m)=0\\3(-n)-2(1-n)=0\\3(2-p)-2(-1-p)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\n=-2\\p=8\end{cases}\Rightarrow I(-3;-2;8).$$

Ta có $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\left|3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})-2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

Khi đó, $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $M\in(P)$ $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất, $M\in(P)$

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Khi đó Δ nhận vectơ pháp tuyến của (P) là

$\vec{n}=(1;1;1)$ làm vecto chỉ phương $\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-3+t\\y=-2+t\\z=8+t\end{cases}$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-3+t\\y=-2+t\\z=8+t\\x+y+z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{11}{3}\\y=-\dfrac{8}{3}\\z=\dfrac{22}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{11}{3}\\b=-\dfrac{8}{3}\\c=\dfrac{22}{3}\end{cases}\Rightarrow S=9a+3b+6c=3.$

Cách 2: Phương pháp đại số

$M(a;b;c)\in(P)\Rightarrow a+b+c-1=0$

$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=(-3-a;-2-b;8-c)\Rightarrow\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(a+3)^2+(b+2)^2+(c-8)^2}$

Ta có: $a+b+c-1=0 \Leftrightarrow (a+3)+(b+2)+(c-8)=-1$

$$\left|(a+3)+(b+2)+(c-8)\right|=\left|1.(a+3)+1.(b+2)+1.(c-8)\right| \le \sqrt{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left[(a+3)^2+(b+2)^2+(c-8)^2\right]}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+3)^2+(b+2)^2+(c-8)^2} \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu "=" xảy ra $\frac{a+3}{1}=\frac{b+2}{1}=\frac{c-8}{1} \Leftrightarrow a+3=b+2=c-8 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ a-c=-11 \end{cases}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} a-b=-1 \\ a-c=-11 \\ a+b+c-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{11}{3} \\ b=-\frac{8}{3} \\ c=\frac{22}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow S=9a+3b+6c=3$

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}\right)=\vec{0}$

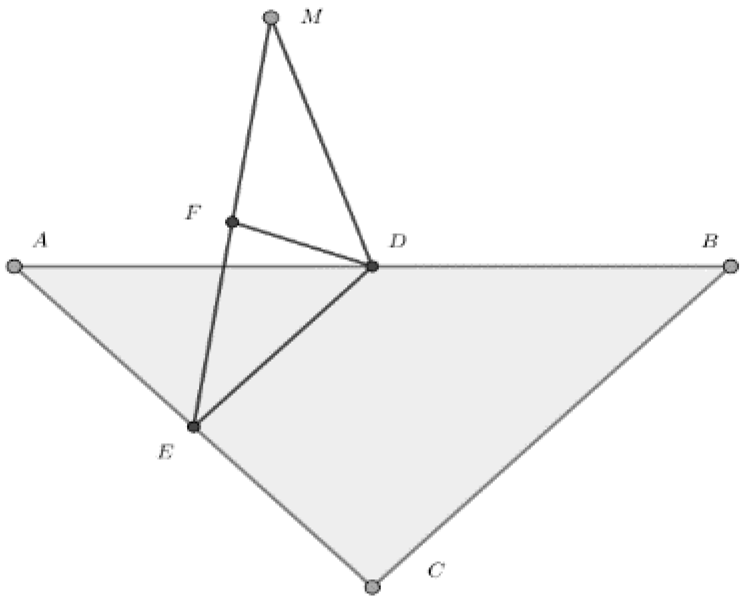
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{0C}\right) \Rightarrow I(2;3;1)$

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right|=2.MI$

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I trên $mp(Oxy)$.

Vì $I(2;3;1) \Rightarrow M(2;3;0)$

Cách 2: Phương pháp hình học



Gọi $D;E;F$ lần lượt là trung điểm của $AB;AC;ME$. Ta có:

$$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|2.\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CB}\right|=\left|2.\overrightarrow{MD}+2.\overrightarrow{ED}\right|=2\left|2.\overrightarrow{FD}\right|=4.FD$$

Ta lại có: $M(x;y;0)$; $D\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$; $E(3;0;0)$; $F\left(\frac{x+3}{2};\frac{y}{2};0\right)$

$FD_{\min}\Leftrightarrow F$ là hình chiếu của D trên $mp(Oxy)\Leftrightarrow x=2;y=3\Leftrightarrow M(2;3;0)$

Cách 3: Phương pháp đại số

$M\in(Oxy)\Rightarrow M(x;y;0)$

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(4-2x;6-2y;-1)$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{(4-2x)^2+(6-2y)^2+1}\ge 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2;y=3$. Khi đó $M(2;3;0)$.

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ của điểm M.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;7;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(1;6;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4\ne 0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|4\overrightarrow{MG}\right|=4MG$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

Bài 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(P): x-y+z+2=0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Với mọi điểm I ta có

$S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$= 4NI^2 + 2\overrightarrow{NI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ Suy ra tọa độ điểm I là: $I(0;1;2)$.

Khi đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

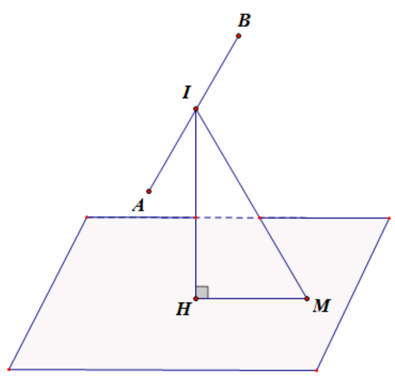
Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases} x = 0+t \\ y = 1-t \\ z = 2+t \end{cases}$

Tọa độ điểm $N(t;1-t;2+t) \in (P) \Rightarrow t-1+t+2+t+2=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow N(-1;2;1)$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M \in (\alpha): x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tìm tọa độ của điểm M.

Lời giải

Cách 1: Phương pháp hình học



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Suy ra I là trung điểm $AB \Rightarrow I(3;1;4)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right) = MI^2$

Gọi H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (α).

Do IA không đổi nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI = IH \Leftrightarrow M \equiv H$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α).

Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(1;2;-3)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó Δ có phương trình $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=4-3t \end{cases}$.

$H\in\Delta\Leftrightarrow H(3+t;1+2t;4-3t)$.

$H\in(\alpha)\Leftrightarrow(3+t)+2(1+2t)-3(4-3t)-7=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow H(4;3;1)$.

Vậy $M(4;3;1)$.

Cách 2: Phương pháp đại số

Gọi $M(x;y;z)\in(\alpha)\Rightarrow x+2y-3z-7=0$

$\overrightarrow{MA}=(4-x;-2-y;6-z)$; $\overrightarrow{MB}=(2-x;4-y;2-z)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(4-x)(2-x)+(-2-y)(4-y)+(6-z)(2-z)$

$=x^2+y^2+z^2-6x-2y-8z+12\ =(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2-12$

Áp dụng bất đẳng thức Bunnhiacopxki

$\left[1^2+2^2+(-3)^2\right]\left[(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\right]\ge\left[x-3+2(y-1)-3(z-4)\right]^2$

$\Leftrightarrow 14\left[(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\right]\ge\left[x+2y-3z+7\right]^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\ge\dfrac{(7+7)^2}{14}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2-12\ge 2$

$Min\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)=2$ xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+2y-3z-7=0 \\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}\Rightarrow M(4;3;1)$

DẠNG 2

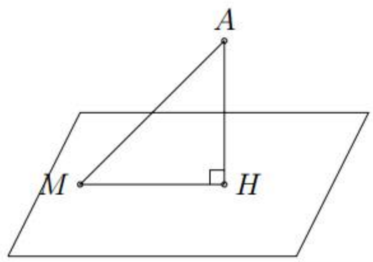
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN KHOẢNG CÁCH

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ cố định và điểm M di động trên mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$. Tìm tọa độ điểm M để AM có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P).

+ Khi đó, tam giác AHM vuông tại H do đó $AM \geq AH$.

+ Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.

+ Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P).

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M ($M \equiv H$)

+ Lập phương trình tham số đường thẳng AH với $\begin{cases} Qua\ A \\ \vec{u}_{AH} = \vec{n}_P = (A;B;C) \end{cases}$.

+ Ta có $M \equiv H = AH \cup (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpxki

Với $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

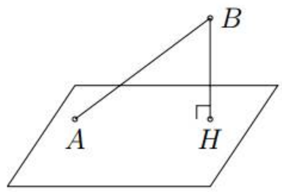
$$\text{Dấu } "=" \text{ xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



+ Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P).

+ Khi đó $\mathrm{d}(B,(P)) = BH \le BA$

+ Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} Qua\ A \\ \vec{n}_P = \overrightarrow{AB} \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ Gọi $\vec{n}_P = (a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2 \ne 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

+ Khi đó phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A là: $a(x-x_A)+(y-y_A)+(z-z_A)=0$

+ Khi đó $\vec{n}_P.\overrightarrow{AB}=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).

+ Ta có: $d(B,(P)) = f(t)$, với $t = \frac{b}{c}, c \ne 0.$

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

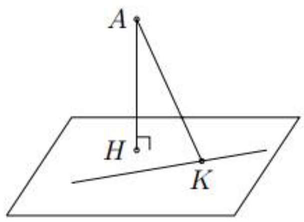
Chú ý: *Để tìm vectơ pháp tuyến* $\vec{n}_P$ *của mặt phẳng* (P) *đơn giản hơn thì nên gọi* $\vec{n}_P = (1;b;c)$.

Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A và đường thẳng Δ cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ.

+ Khi đó $d(A,(P)) = AH \le AK$

+ Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK.

Bước 2:

+ Tìm tọa độ điểm K.

+ Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} Qua\ \text{K} \\ \vec{n}_P = \overrightarrow{AK} \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

+ Gọi $\vec{n}_P = (a;b;c)$, $\left(a^2+b^2+c^2 \ne 0\right)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

+ Khi đó $\vec{n}_P.\vec{u}_\Delta = 0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).

+ Ta có: $d\left(A,(P)\right) = f\left(t\right)$, với $t = \dfrac{b}{c}, c \ne 0$.

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: *Để tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_P = (1;b;c)$.*

Bài toán 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA-MB|$ lớn nhất.

Phương pháp giải

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

Ta xét hai trường hợp sau:

• **TH 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P).

Khi đó $AM + BM \ge AB$

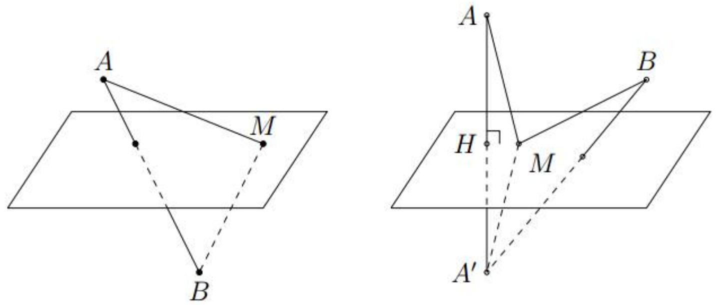
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

• **TH 2**: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P).

Gọi A' đối xứng với A qua (P).

Khi đó $AM + BM = A'M + BM \ge A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



2. $|MA-MB|$ lớn nhất.

Ta xét hai trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P).

  + Khi đó $|AM-BM|\le AB$

  + Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P).

  + Gọi A' đối xứng với A qua (P),

  + Khi đó $|AM-BM|=\left|A'M-BM\right|\le A'B$

  + Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Bài toán 5. Trong không gian $Oxyz$, cho các số thực dương α,β và ba điểm A,B,C. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và có $T=\alpha d(A,(P))+\beta d(B,(P))$ nhỏ nhất.

Phương pháp giải

1. Xét A,B nằm về cùng phía so với (P).

- Nếu $AB\,//\,(P)$ thì $P=(\alpha+\beta)d(A,(P))\le(\alpha+\beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $\vec{IB}=\dfrac{\alpha}{\beta}\vec{ID}$ và E là trung điểm BD.

Khi đó: $P=\alpha d(A,(P))+\beta\cdot\dfrac{IB}{ID}\cdot d(D,(P))=2\alpha d(E,(P))\le 2(\alpha+\beta)EC$

2. Xét A,B nằm về hai phía so với (P).

Gọi I là giao điểm của AB và (P), B' là điểm đối xứng với B qua I.

Khi đó $P=\alpha d(A,(P))+\beta d\left(B',(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 4** trên.

Bài toán 6. Trong không gian $Oxyz$, cho n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ và diểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i\,(i=\overline{1,n}\,)$ lớn nhất.

Phương pháp giải

- Xét n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho.

Khi đó: $\sum_{i=1}^{n} d\left(A_i,(P)\right)=nd(G,(P))\le nGA$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác $(m+k=n\,)$. Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A.

Khi đó $P=md\left(G_3,(P)\right)+kd\left(G_2,(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 5** trên.

Bài 1. Cho $A(4;5;6);B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P):2x+y+2z+1=0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $|MA-MB|$.

Lời giải

Ta có $|MA-MB|\le AB$ với mọi điểm $M\in(P)$

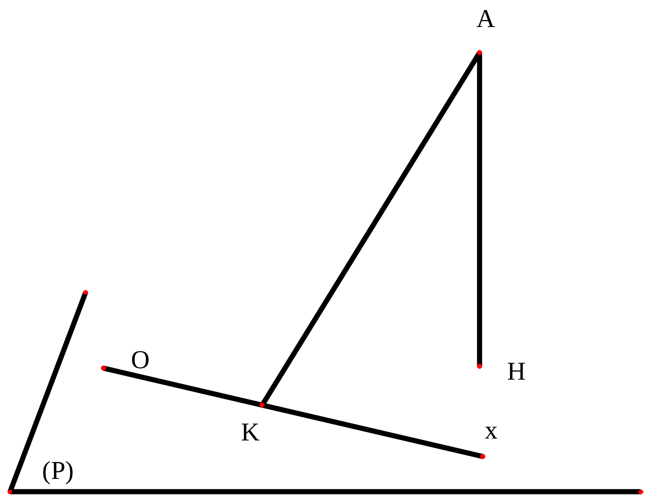
Vì $(2.4+5+2.6+1).(2.1+1+2.2+1)=208>0$ nên hai điểm A,B nằm cùng phía với (P)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M=AB\cap(P)$

Khi đó, $|MA-MB|$ nhận giá trị lớn nhất là: $AB=\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{41}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Lập phương trình của mặt phẳng (P).

Lời giải



Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;-2)$ lên trục Ox.

Ta có $K(1;0;0)$, $\overrightarrow{AK}=(0;-2;2)$.

Gọi H là điểm chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Ta có $d(A,(P))=AH\le AK=2\sqrt{2}$.

Suy ra $\max d(A,(P))=2\sqrt{2}$, đạt được khi $H\equiv K(1;0;0)$.

Khi đó mặt phẳng (P) qua $O(0;0;0)$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AK}=(0;-2;2)$.

Nên phương trình mặt phẳng (P) là $0.(x-1)-2(y-0)+2(z-0)=0\Leftrightarrow y-z=0$.

Vậy $(P):y-z=0$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Tính m.

Lời giải

Ta có $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}}=\sqrt{\dfrac{(3m-1)^2}{2\left(m^2-m+1\right)}}$.

Xét $f(m)=\dfrac{(3m-1)^2}{2\left(m^2-m+1\right)}\Rightarrow f'(m)=\dfrac{(5-m)(3m-1)}{2\left(m^2-m+1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{3}\\ m=5\end{array}\right.$.

m	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{14}{3}$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$

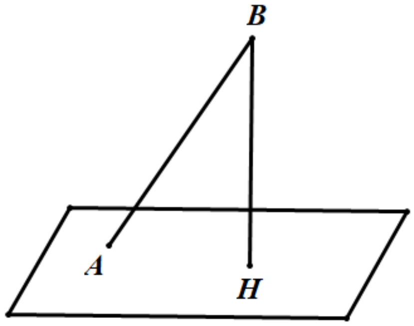
Vậy $\max d\left(A;(P)\right)=\sqrt{\dfrac{14}{3}}$ khi $m=5$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $(P): x-y+2z+3=0$



Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;4)\Rightarrow AB=2\sqrt{6}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (P).

Ta có $d\left(B,(P)\right)=BH\le BA=2\sqrt{6}\Rightarrow max d\left(B,(P)\right)=2\sqrt{6}$, đạt được khi $H\equiv A$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-2;4)$ là véctơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-1)-2(y-2)+4(z+1)=0\Leftrightarrow x-y+2z+3=0$.

Bài 5. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Tính $T=a+2b+3c$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a>0, b>0, c>0$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$.

Ta có phương trình đoạn chắn mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mà $M\in(P)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\Rightarrow abc\geq 27$.

Do đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc\geq\frac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Vậy $\min_{V_{OABC}}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow a=b=c=3$. Khi đó $T=a+2b+3c=18$.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;1;-2)$, $\vec{b}=(1;0;3)$ là

A. $(2;3;-1)$. **B.** $(3;5;-2)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(3;-5;-1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(3;-5;-1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;-2)$ và vectơ $\vec{b}=(1;0;2)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(2;6;-1)$. **B.** $\vec{c}=(4;6;-1)$. **C.** $\vec{c}=(4;-6;-1)$. **D.** $\vec{c}=(2;-6;-1)$.

Lời giải

Chọn D.

Áp dụng công thức tính tích có hướng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ ta được:

$\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(2;-6;-1)$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{n}$ có phương vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\vec{n}=(8;4;-3)$. **B.** $\vec{n}=(-18;0;-3)$. **C.** $\vec{n}=(-18;4;-3)$. **D.** $\vec{n}=(1;4;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8)$ và $\overrightarrow{AC}=(-1;0;6) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.

Vậy: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $x-3y^2+z-1=0$. **B.** $x^2+2y+4z-2=0$.

C. $2x-3y+4z-2024=0$. **D.** $2x-3y+4z^2-2025=0$.

Lời giải

Chọn C

phương trình tổng quát của mặt phẳng là: $2x-3y+4z-2024=0$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây không phải là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n} = (-3;1;-2)$. **B.** $\vec{n} = (3;1;2)$ **C.** $\vec{n} = (3;-1;2)$ **D.** $\vec{n} = (6;-2;4)$

Lời giải

Chọn B

Véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n} = (3;-1;2)$.

$\vec{n} = (-3;1;-2) = -1(3;-1;2)$ là một vec tơ pháp tuyến của (P)

$\vec{n} = (6;-2;4) = 2(3;-1;2)$ là một vec tơ pháp tuyến của (P)

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{i} = (1;0;0)$ **B.** $\vec{m} = (1;1;1)$ **C.** $\vec{j} = (0;1;0)$ **D.** $\vec{k} = (0;0;1)$

Lời giải

Chọn D

Do mặt phẳng (Oxy) vuông góc với trục Oz nên nhận vectơ $\vec{k} = (0;0;1)$ làm một véc tơ pháp tuyến

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y - 2026 = 0$

A. $\vec{a} = (2;-3;1)$ **B.** $\vec{b} = (2;1;-3)$ **C.** $\vec{c} = (2;-3;0)$ **D.** $\vec{d} = (3;2;0)$

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có một VTPT là $\vec{n} = (2;-3;0) = \vec{c}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$ là

A. $\vec{n} = (3;6;-2)$ **B.** $\vec{n} = (2;-1;3)$ **C.** $\vec{n} = (-3;-6;-2)$ **D.** $\vec{n} = (-2;-1;3)$

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{3}z - 1 = 0. \Leftrightarrow 3x + 6y - 2z + 6 = 0.$

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\vec{n} = (3;6;-2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$.

A. $Q(1;-2;2)$. **B.** $P(2;-1;-1)$. **C.** $M(1;1;-1)$. **D.** $N(1;-1;-1)$.

Lời giải

Chọn D

+ Thay toạ độ điểm Q vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1-(-2)+2-2=4\neq 0$ nên $Q\notin(P)$.

+ Thay toạ độ điểm P vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.2-(-1)+(-1)-2=2\neq 0$ nên $P\notin(P)$.

+ Thay toạ độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1-1+(-1)-2=-2\neq 0$ nên $M\notin(P)$.

+ Thay toạ độ điểm N vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1-(-1)+(-1)-2=0$ nên $N\in(P)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

A. $Q(3;3;0)$ **B.** $N(2;2;2)$ **C.** $P(1;2;3)$ **D.** $M(1;-1;1)$

Lời giải

Chọn D

A. $Q(3;3;0)$ Thay toạ độ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0 \Rightarrow 3+3+0-6=0 \Rightarrow Q\in(\alpha)$

B. $N(2;2;2)$ Thay toạ độ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$ $\Rightarrow 2+2+2-6=0 \Rightarrow N\in(\alpha)$

C. $P(1;2;3)$ Thay toạ độ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0 \Rightarrow 1+2+3-6=0 \Rightarrow P\in(\alpha)$

D. $M(1;-1;1)$ Thay toạ độ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$ $\Rightarrow 3+3+0-6=0 \Rightarrow M\notin(\alpha)$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $P(0;0;-5)$ **B.** $M(1;1;6)$ **C.** $Q(2;-1;5)$ **D.** $N(-5;0;0)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $1-2.1+6-5=0$ nên $M(1;1;6)$ thuộc mặt phẳng (P).

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(0;2;0)$. **B.** $N(1;2;3)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $Q(0;0;3)$.

Lời giải

Chọn B

Thế tọa độ điểm N vào phương trình mặt phẳng (P) ta có: $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}=1$.

Vậy mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ không đi qua điểm $N(1;2;3)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$,mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$.   **B.** $N\left(1;-1;-\frac{3}{2}\right)$.   **C.** $P(1;6;1)$.   **D.** $Q(0;3;0)$.

Lời giải

Chọn A

Xét điểm $M\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$,ta có: $1-1+2.\frac{3}{2}-3=0$ đúng nên $M\in(\alpha)$ nên A đúng.

Xét điểm $N\left(1;-1;-\frac{3}{2}\right)$,ta có: $1+1+2.\left(-\frac{3}{2}\right)-3=0$ sai nên $N\notin(\alpha)$ nên B sai.

Xét điểm $P(1;6;1)$,ta có: $1-6+2.1-3=0$ sai nên $P\notin(\alpha)$ nên C sai.

Xét điểm $Q(0;3;0)$,ta có: $0-3+2.0-3=0$ sai nên $Q\notin(\alpha)$ nên D sai.

Câu 14. Khoảng cách từ điểm $M(3;\ 2;\ 1)$ đến mặt phẳng (*P*): $Ax+Cz+D=0$, $A.C.D\neq 0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $d(M,(P))=\frac{|3A+C+D|}{\sqrt{A^2+C^2}}$ **B.** $d(M,(P))=\frac{|A+2B+3C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

C. $d(M,(P))=\frac{|3A+C|}{\sqrt{A^2+C^2}}$.   **D.** $d(M,(P))=\frac{|3A+C+D|}{\sqrt{3^2+1^2}}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dung công thức $d(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Ta được: $d(M,(P))=\frac{|3A+C+D|}{\sqrt{A^2+C^2}}$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

A. $d=\frac{5}{9}$.   **B.** $d=\frac{5}{29}$.   **C.** $d=\frac{5}{\sqrt{29}}$.   **D.** $d=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Khoảng cách d từ A đến (P) là $d(A,(P))=\frac{|3x_A+4y_A+2z_A+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\frac{|3-8+6+4|}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow d(A,(P))=\frac{5}{\sqrt{29}}$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-1=0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;0)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $d(M,(P))=\frac{|2.(-1)-2.2+0-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{3}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$.

A. $\frac{11}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$d(M;(P))=\frac{|1+2.2+2.(-3)-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-11|}{3}=\frac{11}{3}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-4=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-2)$ lên mặt phẳng (P). Độ dài đoạn thẳng MH là

A. 2. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến mặt phẳng (P): $MH=d(M,(P))=\frac{|2.3-1+2.(-2)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;-2;3)$ lên mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+5=0$. Độ dài đoạn thẳng AH là

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$AH=d(A,(P))=\frac{|2+2-6+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=1$.

Câu 20. Khoảng cách từ điểm $M(-4;-5;6)$ đến mặt phẳng (Oxy), (Oyz) lần lượt bằng:

A. 6 và 4. **B.** 6 và 5. **C.** 5 và 4. **D.** 4 và 6.

Lời giải

Chọn A

$d\left(M,(Oxy)\right)=|z_M|=6$; $d(M,(Oyz))=|x_M|=4.$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $B\left(x_0;y_0;z_0\right)$ đến mặt phẳng (P): $y+1=0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. y_0. **B.** $|y_0|$. **C.** $\dfrac{|y_0+1|}{\sqrt{2}}$. **D.** $|y_0+1|$.

Lời giải

Chọn D

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $C(-2;\,0;\,0)$ đến mặt phẳng (Oxy) bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điểm C thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $d\left(C,(Oxy)\right)=0$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-3=0$ bằng:

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Lấy $A(2;1;3)\in(P)$.Do (P) song song với (Q) nên

Ta có $d\left((P),(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)=\dfrac{|2+2.1+2.3-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{7}{3}$

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+3z-1=0$ và $(Q): x+2y+3z+6=0$ là

A. $\dfrac{7}{\sqrt{14}}$ **B.** $\dfrac{8}{\sqrt{14}}$ **C.** 14 **D.** $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$

Lời giải

Chọn A

$(P): x+2y+3z-1=0$ $(Q): x+2y+3z+6=0$. Ta có: $\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{2}=\dfrac{3}{3}\neq\dfrac{-1}{6}$

trắc nghiệm:

Công thức tính nhanh: $(P): Ax+By+Cz+D_1=0$; $(Q)\,Ax+By+Cz+D_2=0$

$$\mathrm{d}\left((P);(Q)\right)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$(P)//(Q)$ áp dụng công thức: $\text{d}((P);(Q))=\frac{|-1-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-8=0$ và $(Q): x+2y+2z-4=0$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}(P)//(Q)\\ A(8;0;0)\in(P)\end{cases}\Rightarrow d((P);(Q))=d(A;(Q))=\frac{|8+2.0+2.0-4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{4}{3}$.

Nhận xét:

Nếu mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d$ *và* $(Q): ax+by+cz+d'$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ *song song với nhau* $(d\neq d')$ *thì* $d((P);(Q))=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$..

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+y+z-2=0$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-z-2=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $x+y+z-2=0$. **D.** $2x+y+z-2=0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;1;1)$.

Mặt phẳng $(Q): x-y-z-2=0$ có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;-1)$.

Mà $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=2-1-1=0\Rightarrow\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\Rightarrow(P)\perp(Q)$.

Vậy mặt phẳng $x-y-z-2=0$ là mặt phẳng cần tìm.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+3z-5=0$ và $(Q): nx-8y-6z+2=0$, với $m,n\in\mathbb{R}$. Xác định m,n để (P) song song với (Q).

A. $m=n=-4$. **B.** $m=4;n=-4$. **C.** $m=-4;n=4$. **D.** $m=n=4$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(2;m;3)$

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}(n;-8;-6)$

Mặt phẳng $(P)//(Q) \Rightarrow \vec{n_1} = k\,\vec{n_2}\ (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = kn \\ m = -8k \\ 3 = -6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ m = 4 \\ n = -4 \end{cases}$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và $(Q): mx+y-2z+1=0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=-6$ **D.** $m=6$

Lời giải

Chọn D

Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$1.m-2.1+2.(-2)=0 \Leftrightarrow m=6$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng ba mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$, $(Q): 2x+my+2z+3=0$ và $(R): -x+2y+nz=0$. Tính tổng $m+2n$, biết rằng $(P)\perp(R)$ và $(P)//(Q)$

A. -6. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

$(P): x+y+z-1=0$ có VTPT $\vec{a}=(1;1;1)$

$(Q): 2x+my+2z+3=0$ có VTPT $\vec{b}=(2;m;2)$

$(R): -x+2y+nz=0$ có VTPT $\vec{c}=(-1;2;n)$

$(P)\perp(R) \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{c}=0 \Leftrightarrow n=-1$

$(P)//(Q) \Leftrightarrow \dfrac{2}{1}=\dfrac{m}{1}=\dfrac{2}{1} \Leftrightarrow m=2$

Vậy $m+2n=2+2(-1)=0$

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x+y-2z+5=0$ và $(Q): 4x+(2-m)y+mz-3=0$, m là tham số thực. Tìm tham số m sao cho mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $m=-3$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;-2)$.

Mặt phẳng (Q) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(4;2-m;m)$.

Ta có: $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{n_{(Q)}} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}=0 \Leftrightarrow 4.1+2-m-2m=0 \Leftrightarrow m=2$.

Nên $m=2$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z-1=0$ và $(\beta): 2x+4y-mz-2=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A. $m=1$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có vec tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_1}=(1;2;-1)$, vec tơ pháp tuyến của (β) là $\overrightarrow{n_2}=(2;4;-m)$.

Hai mặt phẳng (α) và (β) song song khi $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{-m}{-1}\neq\frac{-2}{-1}$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 32. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z-1=0$, mặt phẳng nào dưới đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3.

A. $(Q): x+2y-2z+8=0$. **B.** $(Q): x+2y-2z+5=0$.

C. $(Q): x+2y-2z+1=0$. **D.** $(Q): x+2y-2z+2=0$.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có: $(P): x+2y-2z-1=0$, chọn $A(1;0;0)\in(P)$.

+ Xét đáp án A, ta có $d\left(A;(Q)\right)=\frac{|1+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$. Vậy đáp án A thoả mãn.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$.

A. $x-2y+3z+12=0$ **B.** $x-2y-3z-6=0$ **C.** $x-2y+3z-12=0$ **D.** $x-2y-3z+6=0$

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$ là

$1(x-1)-2(y-2)+3(z+3)=0 \Leftrightarrow x-2y+3z+12=0$.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ là

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x-y+3z-4=0$. **C.** $x-2y-4=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ là

$2.(x-1)-1.(y-2)+3.(z+3)=0$

$\Leftrightarrow 2x-2-y+2+3z+9=0$

$\Leftrightarrow 2x-y+3z+9=0.$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $A(3;0;-1)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-2;-3)$ là

A. $4x-2y+3z-9=0$. **B.** $4x-2y-3z-15=0$.
C. $3x-z-15=0$. **D.** $4x-2y-3z+15=0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng đi qua điểm $A(3;0;-1)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-2;-3)$ có phương trình:

$4(x-3)-2(y-0)-3(z+1)=0 \Leftrightarrow 4x-2y-3z-15=0$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua $A(-1;1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;-2)$ là

A. $x-2y-2z-1=0$. **B.** $-x+y-2z-1=0$. **C.** $x-2y-2z+7=0$. **D.** $-x+y-2z+1=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) đi qua $A(-1;1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;-2)$ nên có phương trình

$(x+1)-2(y-1)-2(z+2)=0 \Leftrightarrow x-2y-2z-1=0$.

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình: $x-2y-2z-1=0$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oyz) là

A. $z=0$. **B.** $x=0$. **C.** $x+y+z=0$. **D.** $y=0$.

Lời giải

Chọn B.

Mặt phẳng (Oyz) nhận $\vec{i}(1;0;0)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ có phương trình là $x=0$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oxy) là:

A. $z=0$. **B.** $x=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x+y=0$.

Lời giải

Chọn A.

phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $z=0$

Câu 39. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A. $y=0$ **B.** $x=0$ **C.** $y-z=0$ **D.** $z=0$

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Oyz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$ nên ta có phương trình mặt phẳng (Oyz) là : $1(x-0)+0(y-0)+0(z-0)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Ozx?

A. $x=0$. **B.** $y-1=0$. **C.** $y=0$. **D.** $z=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt phẳng Ozx đi qua điểm $O(0;0;0)$ và vuông góc với trục Oy nên có VTPT $\vec{n}=(0;1;0)$.

Do đó phương trình của mặt phẳng Ozx là $y=0$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) qua $M(0;-2;1)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;1;-2),\vec{b}=(1;0;3)$ là

A. $3x-5y-z-6=0$. **B.** $3x-5y-z+6=0$. **C.** $3x+5y-z+6=0$. **D.** $3x-5y+z-6=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(3;-5;-1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $M(0;-2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-5;-1)$ nên có phương trình

$3(x-0)-5(y+2)-(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-5y-z-6=0$.

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình: $3x-5y-z-6=0$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cặp vectơ $\vec{a}=(2;1;-2),\vec{b}=(1;0;2)$ có giá song song với mặt phẳng (P). Phương trình mặt phẳng (P) qua $C(1;1;3)$ là

A. $2x+6y-z-7=0$. **B.** $2x-6y-z+5=0$. **C.** $2x+6y+z+5=0$. **D.** $2x-6y-z+7=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(2;-6;-1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $C(1;1;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-6;-1)$ nên có phương trình

$2(x-1)-6(y-1)-(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-6y-z+7=0$.

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình: $2x-6y-z+7=0$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;-2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$. **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$. **D.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B.

$(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ hay $(ABC):\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=1, d=1$. **B.** $a=6, d=-6$. **C.** $a=-1, d=-6$. **D.** $a=-6, d=6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3 & -1\\0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 2\\-2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -3\\-2 & 0\end{vmatrix}\right)=(6;6;-6).$$

Chọn $\vec{n}=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-1)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Ta có pt $mp(ABC)$ là:

$x+y-1-z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z+1=0$. Vậy $a=1, d=1$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;-3;2)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+3z+5=0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là:

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x+y+3z-3=0$.

C. $2x+y+3z+3=0$. **D.** $2x-y+3z-9=0$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

Theo bài $(Q)//(P)\Rightarrow(Q):2x-y+3z+m=0$ $(m\neq 5)$

Mà (Q) qua $A\Leftrightarrow 2.0-(-3)+3.2+m=0\Leftrightarrow m=-9$.

Vậy mp(Q): $2x-y+3z-9=0$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;1)$ và $B(1;2;3)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $x+2y+2z-11=0$. **B.** $x+2y+2z-2=0$. **C.** $x+2y+4z-4=0$. **D.** $x+2y+4z-17=0$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;2)$.

Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB nên nhận $\overrightarrow{AB}=(1;2;2)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình: $1(x-0)+2(y-0)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-2=0$.

Câu 47. Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(3;2;1)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là:

A. $2x+2y+z-2=0$. **B.** $4x+2y+z-17=0$.

C. $4x+2y+z-4=0$. **D.** $2x+2y+z-11=0$.

Lời giải

Chọn A.

Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB nên nhận $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2(x-1)+2y+z=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-2=0$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$) và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $x+y+2z-3=0$ **B.** $x+y+2z-6=0$ **C.** $x+3y+4z-7=0$ **D.** $x+3y+4z-26=0$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;1)$ và nhận vecto $\overrightarrow{AB}=(1;1;2)$ là vectơ pháp tuyến

$(P):1(x-0)+1(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+2z-3=0$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$ $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $3x+2z+1=0$ **B.** $x+2y-2z+1=0$ **C.** $x+2y-2z-1=0$ **D.** $3x+2z-1=0$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;2)$ là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm.

$\vec{n}=-\overrightarrow{BC}=(1;2;-2)$ cũng là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x+2y-2z+1=0$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $y+2z-5=0$. **B.** $2x-y-1=0$. **C.** $2x-y+1=0$. **D.** $-y+2z-5=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng: $\overrightarrow{BC}=(-4;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng:

$-4(x-0)+2(y-1)+0(z-2)=0 \Leftrightarrow -4x+2y-2=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-z=0$ có phương trình là

A. $4x-3y+2z+3=0$. **B.** $4x-3y-2z+3=0$. **C.** $2x+y-3z-1=0$. **D.** $4x+y-2z-1=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, vectơ pháp tuyến mặt phẳng (Q): $\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-1)$.

Theo đề bài ta có vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}\wedge\overrightarrow{AB}=(4;-3;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x-3y-2z+C=0$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;0)$ nên: $-3+C=0 \Leftrightarrow C=3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x-3y-2z+3=0$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0, (\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x-y-2z=0.$ **B.** $2x-y+2z=0.$

C. $2x+y-2z=0.$ **D.** $2x+y-2z+1=0.$

Lời giải

Chọn C

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;-2;2), \overrightarrow{n_\beta}=(5;-4;3)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_\beta}\right]=(2;1;-2)$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O, VTPT $\vec{n}=(2;1;-2)$: $2x+y-2z=0.$

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1); B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=15$. **C.** $a+b+c=-5$. **D.** $a+b+c=-15$.

Lời giải

Chọn A

Vì (Q) vuông góc với (P) nên (Q) nhận vtpt $\vec{n}=(1;-3;2)$ của (P) làm vtcp

Mặt khác (Q) đi qua A và B nên (Q) nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$ làm vtcp

(Q) nhận $\overrightarrow{n_Q}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(0;8;12)$ làm vtpt

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q):0(x+1)+8(y-1)+12(z-3)=0$, hay $(Q):2y+3z-11=0$

Vậy $a+b+c=5$. Chọn **A.**

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0,\ (Q):x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là

A. $x+y+z-3=0$ **B.** $x+y+z+3=0$ **C.** $-2x+z+6=0$ **D.** $-2x+z-6=0$

Lời giải

Chọn A

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$, (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là

$\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(3;3;3)=3(1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$ nên (α) có phương trình:

$x+y+z-3=0$.

Câu 55. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):ax+by+cz-9=0$ chứa hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=-12$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=-2$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}=(-6;3;1)$.

$\overrightarrow{n_{(Q)}}=(3;1;1)$ là VTPT của mp(Q).

Mp(P) chứa hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q).

$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(2;9;-15)$ là VTPT của mp(P)

$A(3;2;1)\in(P)$

$\Rightarrow (P):2x+9y-15z-9=0$ hoặc $(P):-2x-9y+15z+9=0$

Mặt khác $(P):ax+by+cz-9=0 \Rightarrow a=2;b=9;c=-15$.

Vậy $S=a+b+c=2+9+(-15)=-4$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):x+y+3z=0$, $(R):2x-y+z=0$ là

A. $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z-22=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$ có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;3)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;1)$.

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q), (R) nên (P) có vectơ pháp tuyến là

$\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(4;5;-3)$.

Ta lại có (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ nên $(P): 4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0$

$\Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-1=0$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3? Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

A. $(Q): 2x+2y-z+10=0$. **B.** $(Q): 2x+2y-z+4=0$.

C. $(Q): 2x+2y-z+8=0$. **D.** $(Q): 2x+2y-z-8=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;0;-1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3 nên có dạng

$(Q): 2x+2y-z+d=0, (d\neq -1)$.

Mặt khác ta có $d(M,(Q))=3 \Leftrightarrow \dfrac{|1+d|}{\sqrt{4+4+1}}=3 \Leftrightarrow |d+1|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=8 \\ d=-10 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Do đó $(Q): 2x+2y-z+8=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z-10=0$.

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) qua $D(1;1;1)$ và song song với mặt phẳng (ABC) là

A. $2x+3y-6z+1=0$. **B.** $3x+2y-6z+1=0$.

C. $3x+2y-5z=0$. **D.** $6x+2y-3z-5=0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-1}=1$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên

$(P): \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - z + m = 0$ $(m \neq -1)$.

Do $D(1;1;1) \in (P)$ có: $\frac{1}{2}.1 + \frac{1}{3}.1 - 1 + m = 0 \Leftrightarrow m - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$.

Vậy $(P): \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - z + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 6z + 1 = 0$.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là

A. $6x + 3y + 2z - 24 = 0$

B. $6x + 3y + 2z - 12 = 0$

C. $6x + 3y + 2z = 0$

D. $6x + 3y + 2z - 36 = 0$

Lời giải

Chọn A

$(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

$(P) // (ABC) \Rightarrow (P): 6x + 3y + 2z + m = 0$ $(m \neq -12)$.

(P) cách đều D và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow d(D,(P)) = d(A,(P))$

$\Leftrightarrow \frac{|6.2 + 3.4 + 2.6 + m|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|6.2 + 3.0 + 2.0 + m|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} \Leftrightarrow |36 + m| = |12 + m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 36 + m = 12 + m \\ 36 + m = -12 - m \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m = -24$ (nhận).

Vậy phương trình của (P) là $6x + 3y + 2z - 24 = 0$.

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC.

A. $(P): 6x + 3y + 2z + 18 = 0$.

B. $(P): 6x + 3y + 2z + 6 = 0$.

C. $(P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

D. $(P): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$ nên ta có thể đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

Vì $M(1;2;3)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$.

Từ đó ta có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là:

$(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;-2;-1)$ và ba điểm $M(2;1;-3), A(1;1;2), B(2;-1;0)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$

b) $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-2;1;0)$.

c) Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm M nhận hai vectơ $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ là cặp vectơ chỉ phương là $2x-y-5=0$.

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{5}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$

b) Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)\\ \vec{u}=(1;-2;-1)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-2;-1;0)$.

c) Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-2;-1;0)$

Ta có: $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nên (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-2;-1;0)$ và đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có phương trình là:

$$\begin{aligned}&-2(x-2)-1.(y-1)+0(z+3)=0\\ &\Leftrightarrow 2x+y-5=0\end{aligned}.$$

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng

$$d\left(M,(P)\right)=\frac{|2.0+0-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;0;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z=0$.

a) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A.

b) Phương trình mặt phẳng qua A và song song mặt phẳng (P) là $2x+y-2z+6=0$.

c) Mặt phẳng qua gốc toạ độ O và điểm A đồng thời vuông góc mặt phẳng (P) có phương trình là $ax+by+z=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+2b=2$.

d) Mặt phẳng (Q) song song với (P) và đồng thời khoảng cách đến A đến mặt phẳng (Q) bằng 2 có phương trình là $ax+y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+c+d=10$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Thay toạ độ điểm $A(-1;0;2)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $-2-4=0$ (vô lý).

b) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-2)$

Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song (P), suy ra (α) có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;1;-2)$.

Phương trình (α) là: $2(x+1)+1(y-0)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z+6=0$.

c) Gọi (β) là mặt phẳng qua O, A và vuông góc (P).

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(2;1;-2), \overrightarrow{OA}=(-1;0;2)$.

(β) có VTPT là $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{OA}\right]=(2;-2;1)$.

Phương trình của (β) là: $2(x-0)-2(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z=0$.

$\Rightarrow a=2; b=-2 \Rightarrow a+2b=-2$

d) Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $2x+y-2z+d=0 \quad (d \neq 0)$

Ta có $d(A,(Q))=2 \Leftrightarrow \dfrac{|2(-1)+0-2.2+d|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2 \Leftrightarrow |d-6|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d-6=6 \\ d-6=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=12(n) \\ d=0(l) \end{array}\right.$.

Vậy có một phương trình mặt phẳng (Q) là: $2x+y-2z+12=0$

$\Rightarrow a=2; c=-2; d=12 \Rightarrow a+c+d=12$

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-6=0$.

a) Vec tơ $\vec{n}=(1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x+2y+2z-15=0$.

c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình là $2x+by+cz=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $2024b+2025c=2024$.

d) Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A, O, M thẳng hàng thì tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$. Khi đó, giá trị của biểu thức $10x_0+5y_0+z_0=10$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Theo định nghĩa vectơ $\vec{n}=(1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) nên:

$\overrightarrow{n_\beta}=(1;2;2)$, do đó (β) có phương trình: $x-1+2(y-2)+2(z-5)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-15=0$

c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_\beta}\perp\overrightarrow{OA}=(1;2;5)\\ \overrightarrow{n_\beta}\perp\vec{n}=(1;2;2)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{OA},\vec{n}\right]=(-6;3;0)=-3(2;-1;0)$$

Do đó (β) có phương trình: $2x-y=0$.

$\Rightarrow b=-2024; c=0 \Rightarrow 2024b+2025c=-2024$

d) Điểm $M\in(\alpha)$ sao cho A,O,M thẳng hàng

Do $M\in(\alpha): x=6-2y-2z \Rightarrow M(6-2b-2c;b;c)$

$\overrightarrow{OM}=(6-2b-2c;b;c);\overrightarrow{OA}=(1;2;5)$

Vì A,O,M thẳng hàng nên $\overrightarrow{OM}=k.\overrightarrow{OA}$ $(k\in\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6-2b-2c=k\\ b=2k\\ c=5k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{4}{5}\\ c=2\\ k=\dfrac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{4}{5};2\right).$$

$\Rightarrow x_0=\dfrac{2}{5}; y_0=\dfrac{4}{5}; z_0=2 \Rightarrow 10x_0+5y_0+z_0=12$

Câu 64. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;0;-5)$.

a) Mặt phẳng (P) có phương trình là $4x-5z+4=0$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;5)$.

c) Mặt phẳng $(Q): 5x+y+4z+2025=0$ song song với mặt phẳng (P).

d) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (P) là $\dfrac{19\sqrt{41}}{41}$ với điểm $B(-2;1;3)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Phương trình mặt phẳng (P): $4(x+1)+0(y-2)-5(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x-5z+4=0$.

b) Thay điểm M vào phương trình mặt phẳng $(P): 4x-5z+4=0$ ta thấy không thỏa mãn

c) $\vec{n}_P=(4;0;-5);\vec{n}_Q=(5;1;4)$

$\Rightarrow \vec{n}_P.\vec{n}_Q = 4.5+0.1+(-5).4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q$

Do đó, mặt phẳng (Q) vuông góc với (P).

d) $d(B,(P)) = \dfrac{|4.(-2)-5.3+4|}{\sqrt{4^2+5^2}} = \dfrac{19}{\sqrt{41}} = \dfrac{19\sqrt{41}}{41}$

Câu 65. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$, $(Q): 2x-2y+z-5=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(2;0;1)$.

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

b) Khoảng cách $d(A,(Q)) = 2$.

c) Khoảng cách $d(P,(Q)) = 4$.

d) Cho biết điểm $C \in (P)$ và đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (P) góc 30^0. Khi đó ta có khoảng cách $BC = 4$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có $\overrightarrow{n_1} = (2;-2;1)$ và $\overrightarrow{n_2} = (2;-2;1)$ là các véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng. Rõ ràng chúng cùng phương nhau

Mặt khác ta có $1 \neq -5$ là các hệ số tự do của phương trình tổng quát của 2 mặt phẳng tương ứng.

Từ đó ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Ta có: $d(A,(Q)) = \dfrac{|0-2+1-5|}{\sqrt{4+4+1}} = 2$.

c)Ta thấy $A(0;1;1)$ thuộc (P) vì tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P): $2.0-2.1+1.1+1=0$.

Vậy có $(P)//(Q)$ và $A \in (P)$ nên $d(P,(Q)) = d(A,(Q)) = 2$.

d) Ta thấy $B(2;0;1)$ thuộc (Q) vì tọa độ điểm B thỏa mãn phương trình mặt phẳng (Q): $2.2-2.0+1.1-5=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P), ta có $BH = d(B,(P)) = d(A,(Q)) = 2$.

Vì góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (P) bằng 30^0 nên suy ra góc $\widehat{BCH} = 30°$.

Do $C \in (P)$ nên xét tam giác BHC vuông tại H có $BH = 2$, $\widehat{BCH} = 30°$

dó đó ta có $\sin 30° = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{BH}{\sin 30°} = \dfrac{2}{0,5} = 4$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+3=0$, $(R): 2x+2y-z=0$ và điểm $A(1;2;3)$.

a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;2;-1)$.

b) Điểm A cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 3.

c) Mặt phẳng $(R): 2x+2y-z=0$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 2.

d) Hai mặt phẳng (P) và $(Q): x+y+mz+1=0$ luôn cắt nhau mọi giá trị m.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$.

b) Ta có $d\left(A,(P)\right)=\dfrac{|2+4-3+3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2$.

c) Ta có hai mặt phẳng (P) và (R) song song nhau.

Lấy điểm $O(0;0;0)$ thuộc mặt phẳng (R) thì $d\left((R),(P)\right)=d\left(O,(P)\right)=\dfrac{|3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=1$

d) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng (T) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_T}=(1;1;m)$.

Vì hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau nên hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_T}$ không cùng phương.

$\Rightarrow m\neq\dfrac{-1}{2}$.

Vậy với $m\neq\dfrac{-1}{2}$ thì hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$ và $(Q): -2x+y+4z-3=0$.

a) Mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q).

b) Mặt phẳng $(R): 14x+8y+5z-2=0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

c) Mặt phẳng $(\alpha): 2x-6y+4z-9=0$ song song mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$ và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng $\sqrt{14}$.

d) Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình là $ax+4y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a-2c+d=-9$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=(-2;1;4)$

Vì hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$ và $\overrightarrow{n_Q}=(-2;1;4)$ của hai mặt phẳng (P) và (Q) không cùng phương. Do đó mặt phẳng (P) không song song mặt phẳng (Q).

b) Mặt phẳng (R) cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có cặp vecto chỉ phương là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$ và $\overrightarrow{n_Q}=(-2;1;4)$

Mặt phẳng (R) có một vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(-14;-8;-5)$ hay chọn $\overrightarrow{n_R}=(14;8;5)$

Vậy mặt phẳng (R) có phương trình $14x+8y+5z-2=0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

c) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-6;4)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{n_\alpha}=2.\overrightarrow{n_P}\\ -9\neq 2.(-1)\end{cases}$ nên mặt phẳng (α) song song mặt phẳng (P)

Lấy điểm $M(1;0;0)$ thuộc mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$.

Lại có $d\left(M,mp(\alpha)\right)=\dfrac{|2.1-9|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+4^2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

Nên mặt phẳng (α) cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

d) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-2;0)$ và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=(-2;1;4)$

Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên có cặp vec tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{n_Q}$. Do đó mặt phẳng (β) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{AB}\right]=(8;4;3)$.

Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_\beta}=(8;4;3)$.

có phương trình là $8(x-1)+4(y-0)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow 8x+4y+3z-11=0$

$\Rightarrow a=8; c=3; d=-11 \Rightarrow a-2c+d=-9$

Câu 68. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và hai mặt phẳng $(Q): x+y-3z-5=0$, $(R): x+2y-z-1=0$.

a) Mặt phẳng (R) đi qua điểm M .

b) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{7\sqrt{11}}{11}$.

c) Mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình là $ax+by+cz-2=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=1$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-2;0)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Q), (R) có phương trình là $ax+by+z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+d=6$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;-3)$.

Mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;2;-1)$.

a) Thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (R) ta được: $1+2.0-1-1\neq 0$ nên mặt phẳng (R) không đi qua điểm M .

b) Ta có: $d(M;(Q))=\frac{|1+0-3-5|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{11}}=\frac{7\sqrt{11}}{11}$

c) Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Do (α) song song với (Q) nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}=(1;1;-3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-3)$ có phương trình:

$(x-1)+(y-0)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y-3z+2=0$

$a=1;b=1;c=-3 \Rightarrow a+b+c=-1$

d) Gọi mặt phẳng cần tìm là (P).

Mặt phẳng (P) vuông góc với hai mặt phẳng $(Q),(R)$ nên (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;-3)$, $\overrightarrow{n_2}=(1;2;-1)$. Do đó, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(5;-2;1)$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-2;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(5;-2;1)$ có phương trình:

$5(x-1)-2(y+2)+(z-0)=0 \Leftrightarrow 5x-2y+z-9=0$.

$\Rightarrow a=5;b=-2;d=-9 \Rightarrow a+b+d=-6$

Câu 69. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là $(P): x-2y+3z+1=0$ và $(Q): 2x-4y+6z+1=0$.

a) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M\left(1;3;\frac{4}{3}\right)$.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là $ax+by+cz-5=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=18$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Thay điểm $M\left(1;3;\frac{4}{3}\right)$ vào mặt phẳng $(P): x-2y+3z+1=0$, ta có:

$1-2.3+3.\frac{4}{3}+1=0$ đúng nên $M\in(P)$

b) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;3)$

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến của $\overrightarrow{n_Q}=(2;-4;6)$

Ta có $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{3}{6}\neq\frac{1}{1}\Rightarrow(P)\,//\,(Q)$.

c) Ta có $(P)\,//\,(Q)$.

Lấy điểm $N(1;1;0)\in(P)\Rightarrow d\left((P),(Q)\right)=d\left(N,(Q)\right)=\frac{|2.1-4.1+6.0+1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+6^2}}=\frac{\sqrt{14}}{28}$.

d) Ta có $(P)\,//\,(Q)$. Lấy $N(1;1;0)\in(P);P\left(1;0;-\frac{1}{2}\right)\in(Q)$.

Gọi I là trung điểm $MN\Rightarrow I\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(R)$ qua I và nhận vectơ $\vec{n}=(1;2;3)$ làm một vectơ pháp tuyến là: $1(x-1)+2\left(y-\frac{1}{2}\right)+3\left(z+\frac{1}{4}\right)=0$

Hay $(R): 4x+8y+12z-5=0$.

$\Rightarrow a+b+c=24$

Câu 70. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(0;-1;3)$.

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(-1;2;-2)$.

b) Điểm A và B nằm về cùng phía của mặt phẳng (P).

c) Mặt phẳng (Q) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) không đi qua điểm $M(-2;-2;3)$.

d) Mặt phẳng (R) đi qua A song song với (P) có phương trình là $ax+by+cz+1=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=-1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Từ phương trình mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ suy ra một vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$. Vậy vectơ $\vec{n}=(-1;2;-2)$ cũng là vectơ pháp tuyến

b) Đặt $f(x,y,z)=x-2y+2z-5$.

$f(A)=-3-2.0+2.1-5=-6$

$f(B)=0-2(-1)+2.3-5=3$

Khi đó $f(A).f(B)<0 \Rightarrow A,B$ nằm về 2 phía của (P)

c) $\overrightarrow{AB}=(3;-1;2)$; $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$.

Do đó vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(2;-4;-5)$

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $2x-4y-5z+11=0$

Thay toạ độ điểm $M(-2;-2;3)$ vào phương trình mặt phẳng (Q) ta thấy thỏa mãn.

d) Phương trình mặt phẳng có dạng $(R): x-2y+2z+d=0$

Vì mặt phẳng (R) đi qua điểm $A(-3;0;1)$ nên thay toạ độ điểm A vào phương trình $x-2y+2z+d=0$ ta được $d=1$.

Vậy $(R): x-2y+2z+1=0$.

$\Rightarrow a=1; b=-2; c=2 \Rightarrow a+b+c=1$

Câu 71. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-2); B(2;1;2); C(3;-2;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1;-1;4)$

b) Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+5y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+c+d=38$.

c) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{3.\sqrt{22}}{22}$.

d) Gọi $E;F;K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên trục $Ox;Oy;Oz$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $E;F;K$ có phương trình $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}=(1;-1;4)$

b) Vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;-1;4)\\ \overrightarrow{AC}=(2;-4;3)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\neq k\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(13;5;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(13;5;-2)$ là

$13(x-1)+5(y-2)-2(z+2)=0\Leftrightarrow 13x+5y-2z-27=0$.

$\Rightarrow a=13;c=-2;d=-27\Rightarrow a+c+d=-16$

c) $(P):13x+5y-2z-27=0$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) là :

$$d\left(O,(P)\right)=\frac{|13.0+5.0-2.0-27|}{\sqrt{13^2+5^2+(-2)^2}}=\frac{27}{3\sqrt{22}}=\frac{9\sqrt{22}}{22}$$

d) Tọa độ ba điểm $E(1;0;0);F(0;2;0);K(0;0;-2)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(1;2;-2)$ lên trục $Ox;Oy;Oz$

Do đó, mặt phẳng (EFK) có phương trình $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=1$.

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0),B(0;2;0),C(0;0;3)$.

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(3;3;-2)$.

b) Mặt phẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là $x+y=0$.

c) Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có dạng $ax+by+cz-2=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=-1$.

d) Gọi $M(a;b;c)\in(Oyz)$ sao cho biểu thức $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất. Khi đó $a+3b+c=3$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 3x+3y+2z-6=0$.

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(3;3;2)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua C và vuông góc với AB.

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)=-2(1;-1;0)$.

Phương trình của (α) là $1(x-0)-1(y-0)+0(z-3)=0 \Leftrightarrow x-y=0$.

c) Gọi (β) là mặt phẳng mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có một vectơ pháp tuyến của (β) là: $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(4;4;-12)=4(1;1;-3)$.

Phương trình của (β) là: $1(x-2)+1(y-0)-3(z-0)=0 \Leftrightarrow x+y-3z-2=0$.

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};1\right)$.

Vì $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MG}\right|$, suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|_{\min} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right|_{\min}$.

Mà $M \in Oyz \Rightarrow M$ phải là hình chiếu của G lên $Oyz \Rightarrow M\left(0;\frac{2}{3};1\right) \Rightarrow a+3b+c=2+1=3$.

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;3)$, và mặt phẳng $(P): x-y+2z+7=0$.

a) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $(2;1;1)$.

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(3;1;5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P).

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}(0;-2;2), \overrightarrow{BC}(1;1;1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]=(-4;2;2)=2(-2;1;1)=2.\vec{n}$

Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến: $\vec{n}(-2;1;1)$.

b) Phương trình mặt phẳng (ABC): $-2(x-1)+1(y-2)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow -2x+y+z=0$

Thay toạ độ điểm $M(3;1;5)$ vào phương trình mặt phẳng (ABC): $-2.3+1+5=0$: thoả mãn.

c) Ta có vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;2)$.

Khi đó $\overrightarrow{n_P}.\vec{n}=-2.1-1.1+1.2=-1\neq 0$

Mặt phẳng (ABC) không vuông góc với mặt phẳng (P).

d) $d(A;(P))=\frac{|1-2+2.0+7|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}$.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;3), B(-1;3;2), C(-1;2;3)$.

a) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

b) Điểm $G\left(-\frac{1}{3};2;\frac{8}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC.

c) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $x+ay+bz+c=0$. Khi đó $a+b+c=4$

d) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc mặt phẳng (ABC).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-1);\overrightarrow{AC}=(-2;1;0)$

Ta có $\frac{-2}{-2}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{0}{-1}$. Do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

b) G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(-\frac{1}{3};2;\frac{8}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-1);\overrightarrow{AC}=(-2;1;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;2;2)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua A và nhận vecto $\vec{n}=(1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $1(x-1)+2(y-1)+2(z-3)=0$

$\Rightarrow(ABC):x+2y+2z-9=0$. Khi đó $a=2;b=2;c=-9\Rightarrow a+b+c=-5$.

d) Tọa độ điểm M không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (ABC) vì $1+2.2+2.3-9\neq0$.

Do đó M không thuộc mặt phẳng (ABC).

Câu 75. Cho các điểm $A(1;-2;0);B(2;-1;1);C(1;1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1;1;1);\overrightarrow{AC}=(0;-3;2)$

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $ax+by+cz+3=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=0$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với BC. Khi đó, mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;-2;0)$.

d) Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AC. Khi đó, khoảng cách từ điểm O đến (β) bằng $\frac{\sqrt{10}}{20}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;1);\overrightarrow{AC}=(0;3;2)$

b) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;1);\overrightarrow{AC}=(0;3;2)$

Vectơ pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-2;3)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $-1(x-1)-2(y+2)+3z=0$ hay $x+2y-3z+3=0$

$\Rightarrow a=1;b=2;c=-3\Rightarrow a+b+c=0$

c) Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=\overrightarrow{BC}=(-1;2;1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $-1(x-1)+2(y+2)+1z=0$ hay $x-2y-z-5=0$

Thay điểm $M(2;-1;2)$ vào mặt phẳng (α) ta được:

$x-2y-z-5=2-2(-1)-2-5=-3\neq 0\Rightarrow M\notin(\alpha)$

d) Ta có trung điểm của đoạn AC là $M\left(1;\frac{-1}{2};1\right)$

Vectơ pháp tuyến của (β) là $\vec{n}=\overrightarrow{AC}=(0;3;2)$.

Phương trình mặt phẳng (β) là: $0(x-1)+3\left(y+\frac{1}{2}\right)+2(z-1)=0$ hay $6y+4z-1=0$

$$d(O;(\beta))=\frac{|6.0+4.0-1|}{\sqrt{0^2+6^2+4^2}}=\frac{1}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{20}$$

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-3;1)$, $B(1;0;-1)$, $C(3;1;2)$.

a) $\overrightarrow{BC}=(2;1;3)$

b) Tọa độ trọng tâm của ΔABC là điểm $G\left(2;\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trọng tâm của ΔABC và song song với mặt phẳng $(\beta): z-2=0$. Khi đó, khoảng cách từ điểm A đến (α) bằng $\frac{1}{3}$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng trung trực của BC có phương trình là $ax+by+cz-4=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c=4$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\overrightarrow{BC}=(2;1;3)$

b) Trọng tâm ΔABC là điểm $G\left(2;-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

c) Trọng tâm ΔABC là điểm $G\left(2;-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Do $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\beta} = (0;0;1)$ và (α) đi qua điểm G

$\Rightarrow (\alpha): 0.(x-2) + 0.\left(y + \frac{2}{3}\right) + 1.\left(z - \frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow (\alpha): 3z - 2 = 0$ và

$d(A;(\alpha)) = \frac{|3.1-2|}{\sqrt{0^2+0^2+3^2}} = \frac{1}{3}$.

b) Trung điểm BC là $I\left(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC} = (2;1;3)$

Mặt phẳng trung trực của BC là $(Q): 2.(x-2) + 1.\left(y - \frac{1}{2}\right) + 3.\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow (Q): 2x + y + 3z - 6 = 0$.

Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm. Do $\Rightarrow (R): 2.(x-2) + 1.(y+3) + 3.(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z - 4 = 0$

$\Rightarrow a + b + c = 6$

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, Cho các điểm $A(1;-2;-1), B(4;1;2), C(2;3;1)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (3;3;3)$.

b) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

c) Mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C có một vectơ pháp tuyến là: $\vec{a} = (3;1;-4)$.

d) Mặt phẳng (α) đi qua A đồng thời song song với Oy và đường thẳng BC có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n} = (1;0;-2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (3;3;3)$

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} = (3;3;3), \overrightarrow{AC} = (1;5;2)$ không cùng phương nên 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

c) Mặt phẳng (ABC) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (3;3;3), \overrightarrow{AC} = (1;5;2)$ nên có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-9;-3;12)$. Do đó $\vec{a} = (3;1;-4)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

d) Vectơ $\vec{j} = (0;1;0)$ có giá song song mặt phẳng (α);

Vectơ $\overrightarrow{BC} = (-2;2;-1)$ có giá song song mặt phẳng (α).

Hai vectơ $\vec{j}, \overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

Do đó mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0), \overrightarrow{BC}=(-2;2;-1)$ nên mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=\left[\vec{j},\overrightarrow{BC}\right]=(-1;0;2)=-1(1;0;-2)$. Do đó $\vec{a}=(1;0;-2)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương. Gọi $G(1;2;3)$ là trọng tâm của ΔABC.

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) $a+b+c=9$.

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $mx+ny+pz-18=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $m+n+p=7$.

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{18}{7}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Theo phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) Vì G là trọng tâm ΔABC ta có $\begin{cases}\frac{a}{3}=1\\ \frac{b}{3}=2\\ \frac{c}{3}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=6\\ c=9\end{cases} \Rightarrow a+b+c=18$

c) Theo phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$

$\Rightarrow m=6; n=3; p=2 \Rightarrow m+n+p=7$

d) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $6x+3y+2z-18=0$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là:

$d(O;(ABC))=\frac{|6.0+3.0+2.0-18|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{18}{7}$.

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương. Gọi $H(1;1;1)$ là trực tâm của ΔABC.

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) $ab+bc+ac=abc$

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $x+my+nz+p=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $m+n+p=1$.

d) Khoảng cách từ mặt phẳng $(Q):2x+2y+2z+2025=0$ đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{2031\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Theo phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

c) Vì $H(1;1;1)$ là trực tâm ΔABC nên $H\in(ABC)\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow ab+bc+ac=abc$

c) Vì $H(1;1;1)$ là trực tâm ΔABC nên ta có $\begin{cases}H\in(ABC)\\ \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\\ -b+c=0\\ a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=3\\ c=3\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow x+y+z-3=0$

Phương trình (ABC) là: $x+y+z-3=0\Rightarrow m+n+p=-1$

d) Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(ABC)}=(1;1;1)$

Mặt phẳng $(Q):2x+2y+2z+2025=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=(2;2;2)=2(1;1;1)$

Do đó $2\vec{n}_{(ABC)}=\vec{n}_{(Q)}$ và $-3\neq 2025$ nên $(ABC)//(Q)$

Nên $d((ABC);(Q))=d(H;(Q))=\frac{|2.1+2.1+2.1+2025|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{2031}{2\sqrt{3}}=\frac{2031\sqrt{3}}{6}$.

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ sao cho độ dài OA,OB,OC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai bằng 2.

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

b) $b+c=2a-6$

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $mx+ny+2z+p=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $m+n+p=3$.

d) Khoảng cách từ mặt phẳng $(Q): 12x+6x+4z-2025=0$ đến mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{2021}{7}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Theo phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (ABC) có phương trình $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

b) Độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai bằng 2 nên $b=a+2; c=a+4$

Do đó: $b+c=a+2+a+4=2a+6$

c) Giả sử mặt phẳng (α) cắt tia Ox tại điểm có hoành độ bằng a $(a>0)$ khi đó phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a+2}+\dfrac{z}{a+4}=1$.

Do (α) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ nên ta có $\dfrac{2}{a}+\dfrac{-2}{a+2}+\dfrac{3}{a+4}=1 \Leftrightarrow a=2$.

Vậy mặt phẳng (ABC) có phương trình $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+3x+2z-12=0$

$\Rightarrow m+n+p=-3$

d) Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(ABC)}=(6;3;2)$

Mặt phẳng $(Q): 12x+6x+4z-2025=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=(12;6;4)=2(6;3;2)$

Do đó $2\vec{n}_{(ABC)}=\vec{n}_{(Q)}$ và $-12 \neq -2025$ nên $(ABC)//(Q)$

Nên $d((ABC);(Q))=d(M;(Q))=\dfrac{|12.2+6.(-2)+4.3-2025|}{\sqrt{12^2+6^2+4^2}}=\dfrac{2021}{14}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(-5;3;-1),\vec{b}=(1;2;1),\vec{c}=(m;3;-1)$.,Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a}=\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

$\left[\vec{b},\vec{c}\right]=(-5;m+1;3-2m)$

Ta có: $\vec{a}=\left[\vec{b},\vec{c}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}m+1=3\\3-2m=-1\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Câu 82. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;1;2),\vec{v}=(-1;m;m-2)$. Gọi S là tổng các giá trị của m sao cho thỏa mãn $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{14}$. Tính S.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -2

$\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-m-2;-m;m+1)\Rightarrow\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{(m+2)^2+m^2+(m+1)^2}=\sqrt{3m^2+6m+5}$

$\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{14}\Leftrightarrow 3m^2+6m+5=14\Leftrightarrow 3m^2+6m-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$.

$\Rightarrow S=1-3=-2$

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}=(x_0;y_0;z_0)$ là vectơ cùng hướng với $\left[\vec{m},\vec{n}\right]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $\left|\vec{p}\right|=15$, hãy tính giá trị biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -3

Ta có : $\left[\vec{m};\vec{n}\right]=(3;-4;0)$

Do $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $\left[\vec{m};\vec{n}\right]$ nên $\vec{p}=k\left[\vec{m};\vec{n}\right]$, $k>0$

Mặt khác: $\left|\vec{p}\right|=15\Leftrightarrow k.\left|\left[\vec{m},\vec{n}\right]\right|=15\Leftrightarrow k.5=15\Leftrightarrow k=3$

Vậy $\vec{p}=(9;-12;0)$.

$\Rightarrow S=x_0+y_0+z_0=9-12+0=-3$

Câu 84. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tìm giá trị của m để $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}=0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 14

Ta có $\overrightarrow{OA}=(0;1;-2)$, $\overrightarrow{OB}=(1;2;1)$, $\overrightarrow{OC}=(4;3;m)$.

$\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}=0 \Leftrightarrow 5.4-2.3-1.m=0 \Leftrightarrow m=14$.

Vậy $m=14$.

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z-16=0$ và $(Q): x+2y-2z-1=0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $\begin{cases}(P)//(Q)\\ A(16;0;0)\in(P)\end{cases} \Rightarrow d\left((P),(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)=\dfrac{|16+2.0-2.0-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=5.$

Câu 86. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q): 2x-y+2z+4=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Dễ thấy $(P)//(Q) \Rightarrow d((P),(Q))=d\left(M,(Q)\right)$ với $M(0;1;0)\in(P)$

Vậy $d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|2.0-1+2.0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1.$

Câu 87. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P){:}2x+y-2z-1=0$, $(Q){:}6x+3y-6z+15=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $(Q){:}6x+3y-6z+15=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z+5=0$. Lấy $M(0;1;0)\in(P)$.

Vậy $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)=\dfrac{|1+5|}{\sqrt{1+4+4}}=2.$

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x+y-z+1=0$ và $(Q): x-y+z-5=0$. Tính giá trị biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -3

Ta có $M\in Oy \Rightarrow M(0;y;0)$.

Theo giả thiết: $d\left(M,(P)\right)=d\left(M,(Q)\right) \Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{3}}=\frac{|-y-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y=-3$.

Vậy $M(0;-3;0)$

$S=x_0+y_0+z_0=-3$

Câu 89. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1) \Rightarrow AB=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3 \quad (1)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P): $d\left(A,(P)\right)=\frac{|2.1+2+m.3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+m^2}}=\frac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}$

Để $AB=d\left(A,(P)\right) \Rightarrow 3=\frac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}} \Leftrightarrow 9\left(5+m^2\right)=9(m+1)^2 \Leftrightarrow m=2$.

Câu 90. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ trên trục Oy sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): 2x-y+3z-4=0$ nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -4

Khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất khi M thuộc (P). Nên M là giao điểm của trục Oy với mặt phẳng (P). Thay $x=0;z=0$ vào phương trình (P) ta được $y=-4y=-4$.

Vậy $M(0;-4;0)$

$\Rightarrow S=x_0+y_0+z_0=-4$

Câu 91. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ trên trục Oz sao cho cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$. Tính giá trị biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Vì $M \in Oz \Rightarrow M(0;0;z_0)$. Ta có: $MA = \sqrt{2^2 + 3^2 + (4 - z_0)^2}$; $d(M,(P)) = \dfrac{|z_0 - 17|}{\sqrt{14}}$.

M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 17 = 0$ khi và chỉ khi

$\sqrt{2^2 + 3^2 + (4 - z_0)^2} = \dfrac{|z_0 - 17|}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow 13(z_0 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow z_0 = 3$.

Vậy $M(0;0;3) \Rightarrow S = x_0 + y_0 + z_0 = 3$

Câu 92. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d(B;(P)) = 2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Vì $d(B;(P)) = 2d(A;(P))$ và (P) cắt đoạn AB tại I nên

$$\overrightarrow{BI} = -2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 5 = -2(a-1) \\ b + 4 = -2(b-2) \\ c + 1 = -2(c-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{3} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 4.$$

Câu 93. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + my + 2mz - 9 = 0$ và $(Q): 6x - y - z - 10 = 0$. Để $(P) \perp (Q)$ thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

$(P): 2x + my + 2mz - 9 = 0$ có VTPT $\vec{a} = (2; m; 2m)$

$(Q): 6x - y - z - 10 = 0$ có VTPT $\vec{b} = (6;-1;-1)$

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2.6 + m.(-1) + 2m.(-1) = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 5x + my + z - 5 = 0$ và $(Q): nx - 3y - 2z + 7 = 0$. Biết $(P)//(Q)$, hãy tính giá trị biểu thức $T = 2m - n$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 13

$(P): 5x + my + z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{a} = (5; m; 1)$

$(Q): nx-3y-2z+7=0$ có VTPT $\vec{b}=(n;-3;-2)$

$$(P)\ //(Q) \Leftrightarrow \left[\vec{a};\vec{b}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}-2m+3=0\\ n+10=0\\ -15-mn=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{3}{2}\\ n=-10\end{cases} \Rightarrow T=2m-n=13$$

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-my-4z-6+m=0$ và $(Q):(m+3)x+y+(5m+1)z-7=0$. Để $(P)\equiv(Q)$ thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

$$(P)\equiv(Q) \Leftrightarrow \frac{2}{m+3}=\frac{-m}{1}=\frac{-4}{5m+1}=\frac{-6+m}{-7}\left(m\neq -3, -\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow m=-1$$

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $x-2y-z+3=0$; (Q): $2x+y+z-1=0$. Mặt phẳng (R) đi qua điểm $M(1;1;1)$ chứa giao tuyến của (P) và (Q); phương trình của (R): $m(x-2y-z+3)+(2x+y+z-1)=0$. Khi đó giá trị của m là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -3

Vì (R): $m(x-2y-z+3)+(2x+y+z-1)=0$ đi qua điểm $M(1;1;1)$ nên ta có:

$m(1-2.1-1+3)+(2.1+1+1-1)=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Câu 97. Trong không gian Oxyz, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $b.c\neq 0$ và mặt phẳng (P): $y-z+1=0$. Để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) thì $b-c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Phương trình (ABC): $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \Rightarrow (ABC)$ có VTPT: $\vec{n}=\left(1;\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$.

Phương trình (P): $y-z+1=0 \Rightarrow (P)$ có VTPT: $\vec{n}'=(0;1;-1)$.

$(ABC)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n'}=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=0 \Leftrightarrow b=c \Leftrightarrow b-c=0$.

Câu 98. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $ax-y+2z+b=0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P): $x-y-z+1=0$ và (Q): $x+2y+z-1=0$. Tính $a+4b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -16

Trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng $(P),(Q)$ ta lấy lần lượt 2 điểm A,B như sau:

Lấy $A(x;y;1)\in\Delta$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x-y=0\\x+2y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0\Rightarrow A(0;0;1)$.

Lấy $B(-1;y;z)\in\Delta$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}y+z=0\\2y+z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2\\z=-2\end{cases}\Rightarrow B(-1;2;-2)$.

Vì $\Delta\subset(\alpha)$ nên $A,B\in(\alpha)$. Do đó ta có: $\begin{cases}2+b=0\\-a+b-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-8\\b=-2\end{cases}$.

Vậy $a+4b=-8+2.(-2)=-16$.

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, gọi m,n là hai giá trị thực thỏa mãn hai mặt phẳng $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ và $(Q_m): x-my+nz+2=0$. Biết giao tuyến chung của hai mặt phẳng (P_m) và (Q_m) vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x-y-6z+3=0$. Tính $m+n$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

+ $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(m;2;n)$.

$(Q_m): x-my+nz+2=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}(1;-m;n)$.

$(\alpha): 4x-y-6z+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}(4;-1;-6)$.

+ Giao tuyến của hai mặt phẳng (P_m) và (Q_m) vuông góc với mặt phẳng (α) nên

$$\begin{cases}(P_m)\perp(\alpha)\\(Q_m)\perp(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\\\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\\\overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m-2-6n=0\\4+m-6n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}.$$

Vậy $m+n=3$.

Câu 100. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;0;0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-1=0$ có dạng $-x+by+cz+d=0$. Tính $b+c-3d$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $-2,5$

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Do $(P)//(\alpha)\Rightarrow\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-1;0)$.

Và (P) đi qua điểm $M\Rightarrow(P): 2.(x-1)-1.(y+0)+0.(z+0)=0\Rightarrow(P): 2x-y-2=0$

hay $-x+\frac{1}{2}y+1=0$

Vậy $b=\frac{1}{2}, c=0, d=1\Rightarrow b+c-3d=-2,5$.

Câu 101. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC có dạng $x+by+cz+d=0$. Tính $b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -9

Mặt phẳng vuông góc với BC có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\overrightarrow{BC}=(1;-2;-5)$.

Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC là $1(x-2)-2(y-1)-5(z+1)=0$ hay $x-2y-5z-5=0$.

Vậy $b=-2, c=-2, d=-5 \Rightarrow b+c+d=-9$.

Câu 102. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$ và 2 vecto $\vec{a}=(1;-3;2), \vec{b}=(-1;-1;2)$. Một mặt phẳng (Q) chứa điểm A và nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp vecto chỉ phương có phương trình là $ax+by+cz-3=0$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\vec{b},\vec{a}\right]=(4;4;4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là: $4(x-2)+4(y-0)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow 4x-8+4y+4z-4=0$

$\Leftrightarrow 4x+4y+4z-12=0 \Leftrightarrow x+y+z-3=0$.

Suy ra $a=b=c=1$ nên $a+b+c=3$.

Câu 103. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) qua $M(0;-2;1)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(-2;-3;8), \vec{b}=(-1;0;6)$ có dạng $ax+by+cz-12=0$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 17

Ta có $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-18;4;-3)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $M(0;-2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-18;4;-3)$ nên có phương trình

$-18(x-0)+4(y+2)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow 18x-4y+3z-12=0$.

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình: $18x-4y+3z-12=0$.

$a+b+c=18-4+3=17$

Câu 104. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;-2), B(-3;1;1), C(5;5;-5)$ có dạng $ax+by+cz+5=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;1;3),\overrightarrow{AC}=(4;5;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;0;-24)=-\frac{1}{6}(3;0;4)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;0;4)$ là:

$3(x-1)+4(z+2)=0\Leftrightarrow 3x+4z+5=0$.

Suy ra $a=3,b=0,c=4$ nên $a+b+c=7$.

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2),B(3;2;0),C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án:

Ta có: 3

$\overrightarrow{AB}=(0;4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;4;3)$, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(4;-6;12)$.

Ta có $\vec{n}=(4;-6;12)$ cùng phương $\vec{n}_1=(2;-3;6)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $C(0;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;-3;6)$ nên (ABC) có phương trình là:

$2(x-0)-3(y-2)+6(z-1)=0\Leftrightarrow 2x-3y+6z=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-3y+6z=0\Rightarrow b+c+d=3$

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Mặt phẳng (α) đi qua $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, (α) song song với đường thẳng CD. Biết phương trình mặt phẳng (α) có dạng $2x+ay+bz+c=0$, tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -1

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$, $\overrightarrow{CD}=(0;1;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(-2;-1;-1)$.

(α) đi qua $A(1;1;0)$ và có một VTPT là $\vec{n}(2;1;1)\Rightarrow(\alpha):2x+y+z-3=0$.

$\Rightarrow a+b+c=-1$

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z-3=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) có dạng $3x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+2025c+2024d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -1

Mặt phẳng (Q) cần tìm song song với mặt phẳng $(P): 3x-2y+z-3=0$ nên có phương trình dạng

$$(Q): 3x-2y+z+m=0,\ m\neq -3$$

Vì $M\in(Q)$ nên $(Q): 3.2-2.1+(-3)+m=0 \Leftrightarrow m=-1$

Vậy $(Q): 3x-2y+z-1=0 \Rightarrow b+2025c+2024d=-1$

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;1)$ và $B(2;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có dạng $ax+y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Mặt phẳng đi qua $A(0;0;1)$ và nhận vecto $\overrightarrow{AB}=(2;1;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là:

$2(x-0)+(y-0)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+2z-2=0$

$\Rightarrow a+c+d=2$

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Từ giả thiết suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q).

Mp (Q) đi qua điểm $A(2;4;1)$ suy ra phương trình tổng quát của mp(Q) là:

$0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0 \Rightarrow a+b+c=5$

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$, gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ. Viết phương trình mặt phẳng (MNP) có dạng $ax+by+cz-12=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Không mất tính tổng quát, ta giả sử M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oxz), (Oyz).

Khi đó, $M(2;-3;0)$, $N(2;0;1)$ và $P(0;-3;1)$

$\overrightarrow{MN}=(0;3;1)$ và $\overrightarrow{MP}=(-2;0;1)$.

Ta có, $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ là cặp vectơ không cùng phương và có giá nằm trong (MNP)

Do đó, (MNP) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(3;-2;6)$.

Mặt khác, (MNP) đi qua $M(2;-3;0)$ nên có phương trình là:

$3(x-2)-2(y+3)+6(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+6z-12=0$

$\Rightarrow a+b+c=7$

Câu 111. Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): x+y-z+3=0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $ax+by-z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $2025a-2024b+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Gọi mặt phẳng (α) cần tìm.

Vì $(\alpha)//(\beta)$ nên phương trình (α) có dạng : $x+y-z+d=0$ với $d\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lấy điểm $I(-1;-1;1)\in(\beta)$.

Vì khoảng cách từ (α) đến (β) bằng $\sqrt{3}$ nên ta có :

$d(I,(\alpha))=\sqrt{3}\Leftrightarrow \dfrac{|-1-1-1+d|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow \dfrac{|d-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\\ d=6\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện $d\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$).

phương trình (α) là: $x+y-z+6=0; x+y-z=0$

Do $d=6$ nên phương trình (α) là: $x+y-z+6=0\Rightarrow 2025a-2024b+d=7$

Câu 112. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1): 3x-y+4z+2=0$ và $(Q_2): 3x-y+4z+8=0$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1), (Q_2) có dạng $3x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 8

Mặt phẳng (P) có dạng $3x-y+4z+D=0$.

Lấy $M(0;2;0)\in(Q_1)$ và $N(0;8;0)\in(Q_2)$. Do $(Q_1)//(Q_2)$ trung điểm $I(0;5;0)$ của MN phải thuộc vào (P) nên ta tìm được $D=5$.

Vậy $(P):3x-y+4z+5=0\Rightarrow b+c+d=8$.

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, gọi (γ) là mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng sau đây: $(\alpha):4x-y-2z-3=0$, $(\beta):4x-y-2z-5=0$. Phương trình mặt phẳng (γ) có dạng $4x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Gọi điểm $A(0;-3;0)\in 4x-y-2z-3=0$ (α) và $B(0;-5;0)\in 4x-y-2z-5=0$ (β).

Mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng trên có dạng: $4x-y-2z+m=0$ (γ).

Để mặt phẳng (γ) cách đều hai mặt phẳng trên thì $d\left(A;(\beta)\right)=2d\left(A;(\gamma)\right)\Leftrightarrow|m+3|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=-4\end{array}\right.$.

Mặt khác điểm hai điểm A, B phải nằm về hai phía của mặt phẳng (γ).

Do đó:

+ Với $m=-2$ ta có: $(4.0+3-2.0-2)(4.0+5-2.0-2)>0$ nên $A;B$ cùng phía.

+ Với $m=-4$ ta có: $(4.0+3-2.0-4)(4.0+5-2.0-4)<0$ nên $A;B$ khác phía.

Vậy phương trình mặt phẳng (γ) cần tìm là $4x-y-2z-4=0\Rightarrow b+c-d=1$.

Câu 114. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;0),B(0;4;0),C(0;0;6),D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC), (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $6x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 29

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên (P) có dạng:

$$6x+3y+2z+d=0\quad(d\neq-12)$$

Vì (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) nên ta có:

$$d\left(D;(P)\right)=d\left((ABC);(P)\right)\Leftrightarrow d\left(D;(P)\right)=d\left(A;(P)\right)\Leftrightarrow|36+d|=|12+d|\Leftrightarrow d=-24.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $6x+3y+2z-24=0$.

Vậy (P) là: $6x+3y+2z-24=0 \Rightarrow b+c-d=29$

Câu 115. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q): $x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng (P) không qua O, song song với mặt phẳng (Q) và $d((P),(Q))=1$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-6=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q)

$\Rightarrow vtpt\overrightarrow{n_P} = vtpt\overrightarrow{n_Q} = (1;2;2)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+2y+2z+D=0$

Gọi $A(3;0;0)\in(Q)$

$\Rightarrow d((P),(Q)) = d(A,(P)) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{|3+D|}{3}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+D=3 \\ 3+D=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=0 \quad (L), do\ qua\ O \\ D=-6\ (N) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x+2y+2z-6=0 \Rightarrow a+b+c=5$

Câu 116. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương. Biết phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $ax+by+cz-14=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a-b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có, (Q) song song (P) nên phương trình mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z+C=0$; $C\neq -5$

Chọn $M(0;0;5)\in(P)$

Ta có $d((P);(Q)) = d(M;(Q)) = \dfrac{|5+C|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=4 \\ C=-14 \end{array}\right.$

$C=4 \Rightarrow (Q): 2x-2y+z+4=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

$C=-14 \Rightarrow (Q): 2x-2y+z-14=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q): 2x-2y+z-14=0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z-14=0 \Rightarrow a-b+c=5$.

Câu 117. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;3)$, $C(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới mặt phẳng (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Biết phương trình mặt phẳng (P) là có dạng $ax+by+cz+23=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a-b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 31

Gọi $(P):\begin{cases} qua\ A(1;0;0) \\ VTPT\ \vec{n}=(A;B;C)\neq\vec{0} \end{cases}$

$(P): A.(x-1)+By+Cz=0$

$B\in(P): -A-2B+3C=0 \Leftrightarrow A=-2B+3C \quad (1)$

$(C;(P))=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \frac{|B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow 3(B^2+C^2+2BC)=4(A^2+B^2+C^2)$

$\Leftrightarrow B^2+C^2-6BC+4A^2=0 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta có: $B^2+C^2-6BC+4(-2B+3C)^2=0 \Leftrightarrow 17B^2-54BC+37C^2=0$

Cho $C=1$: $17B^2-54B+37=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=1 \Rightarrow A=1 \\ B=\frac{37}{17} \Rightarrow A=\frac{-23}{17} \end{array}\right.$

$(P): x+y+x-1=0$

$(P): -23x+37y+17z+23=0$

Do $d=23$ nên $a+b+c=31$

Câu 118. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $M(4;2;1), N(0;0;3), Q(2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng chứa OQ và cách đều 2 điểm M,N có dạng $ax-4y+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -1

Gọi $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ $\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

$O\in(\alpha)$ nên ta có: $D=0$ (1)

$Q\in(\alpha)$ nên ta có: $Ax+By+Cz-2A-C=0$ (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow C=-2A$.

Theo đề bài: $d(M,(\alpha))=d(N,(\alpha))$.

$\Leftrightarrow |2A+2B|=|-6A| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2A+B=6A \\ 2A+B=-6A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} B=2A & (*) \\ B=-4A & (**) \end{array}\right.$

Từ $(*)$: Chọn $A=1 \Rightarrow B=2,\ C=-2 \ \Rightarrow (\alpha): x+2y-2z=0$.

Từ $(**)$: Chọn $A=1 \Rightarrow B=-4,\ C=-2 \ \Rightarrow (\alpha): x-4y-2z=0$.

Do $b=-4$ nên $(\alpha): x-4y-2z=0 \Rightarrow a+c+d=-1$

Câu 119. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-48=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 19

mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C nên $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$.

Vì G là trọng tâm tứ diện $OABC$ nên $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_O}{4}=\dfrac{a}{4} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_O}{4}=\dfrac{b}{4} \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_O}{4}=\dfrac{c}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=16 \\ c=12 \end{cases}$.

Khi đó mặt phẳng (P) có phương trình là $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{16}+\dfrac{z}{12}=1$ hay $12x+3y+4z-48=0$.

Vậy mặt phẳng (P) thỏa mãn là $12x+3y+4z-48=0$.

$\Rightarrow a+b+c=19$

Câu 120. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(2;1;-3)$ và cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tam giác ABC nhận M làm trực tâm. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b-c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 18

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c), abc \neq 0$.

Khi đó mặt phẳng (α) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Do $M \in (\alpha) \Rightarrow \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{3}{c}=1 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2-a;1;-3), \overrightarrow{BM}=(2;1-b;-3), \overrightarrow{BC}=(0;-b;c), \overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Do M là trực tâm tam giác ABC nên: $\begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b-3c=0 \\ -2a-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3c \\ a=-\dfrac{3c}{2} \end{cases} \quad (2)$

Thay (2) vào (1) ta có: $-\dfrac{4}{3c}-\dfrac{1}{3c}-\dfrac{3}{c}=1 \Leftrightarrow c=-\dfrac{14}{3} \Rightarrow a=7, b=14.$

Do đó $(\alpha): \dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{14}-\dfrac{3z}{14}=1 \Leftrightarrow 2x+y-3z-14=0.$

$\Rightarrow b-c-d=18$

Câu 121. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-6=0$ và cách đều các điểm $A(1;6;0), B(-2;2;-1), C(5;-1;3)$. Tích abc bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6

Ta có: $\begin{cases} a+b+c=6 \\ MA^2=MB^2 \\ MA^2=MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+b^2=(a+2)^2+(b-2)^2+(c+1)^2 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+c^2=(a-5)^2+(b+1)^2+(c-3)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ 3a+4b+c=14 \\ 4a-7b+3b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow abc=6.$

Câu 122. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $3x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b-c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Gọi $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 (a.b.c \neq 0)$

Vì (P) qua M nên $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(a-3;-2;-1); \overrightarrow{MB}=(-3;b-2;-1); \overrightarrow{BC}=(0;-b;c); \overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Vì M là trực tâm của tam giác ABC nên: $\begin{cases} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=c \\ 3a=c \end{cases} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=\dfrac{14}{3};b=\dfrac{14}{2};c=14$.

Khi đó phương trình (P): $3x+2y+z-14=0 \Rightarrow b-c-d=0$

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz+4=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b-c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;6;-8)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+6y-8z+10=0$.

Phương trình mặt phẳng qua B và vuông góc với AC là: $2x+y+z-2=0$.

Phương trình mặt phẳng qua C và vuông góc với AB là: $2x-3y-2z+6=0$.

Giao điểm của ba mặt phẳng trên là trực tâm H của tam giác ABC nên $H\left(-\dfrac{22}{101};\dfrac{70}{101};\dfrac{176}{101}\right)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A, H nên $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{22}{101};-\dfrac{31}{101};-\dfrac{26}{101}\right)=-\dfrac{1}{101}(22;31;26)$.

Mặt phẳng $(P)\perp(ABC)$ nên $\overrightarrow{n_P}\perp\vec{n}_{(ABC)}=(1;6;-8)$.

Vậy $\left[\vec{n}_{(ABC)};\vec{u}_{AH}\right]=(404;-202;-101)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

Chọn $\vec{n}_P=(4;-2;-1)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $4x-2y-z+4=0$.

$\Rightarrow a+b-c=3$

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M,N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM=2ON$. Biết phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+3z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a-b-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Giả sử (P) đi qua 3 điểm $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $P(0;0;c)$

Suy ra $(P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

Mà (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ nên ta có hệ $\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\\ \dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ \dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}=1\end{cases}$

Theo giả thuyết ta có $OM=2ON \Leftrightarrow |a|=2|b| \Leftrightarrow |b|=1$

TH1. $b=1 \Rightarrow c=-2$ suy ra $(P): x+2y-z-2=0$

TH2. $b=-1 \Rightarrow c=-\dfrac{2}{3}$ suy ra $(P): x-2y+3z-2=0$

Do $c=3$ nên $(P): x-2y+3z-2=0 \Rightarrow a-b-d=5$

Câu 125. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;4)$, $B(6;-3;0)$ và mặt phẳng (P) sao cho $d(B;(P))=2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm trên đoạn thẳng AB. Tính $S=a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên mặt phẳng (P)

Suy ra $BK=d(B;(P))$, $AH=d(A;(P))$ do $AH\perp(P)$; $BK\perp(P)$ nên $AH // BK$

Suy ra A, H, K, B đồng phẳng và ta có $\Delta IKB \backsim \Delta IHA$ (góc – góc)

Suy ra $\dfrac{BI}{AI}=\dfrac{BK}{AH}=\dfrac{d(B;(P))}{d(A;(P))}=2 \Rightarrow BI=2AI$ mà I thuộc đoạn AB nên $\overrightarrow{BI}=-2\overrightarrow{AI}$

Ta có $\overrightarrow{BI}(a-6;b+3;c), \overrightarrow{AI}(a-2;b-3;c-4)$

$$\overrightarrow{BI}=-2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases}a-6=-2(a-2)\\ b+3=-2(b-3)\\ c=-2(c-4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{10}{3}\\ b=1\\ c=\dfrac{8}{3}\end{cases} \Rightarrow a+b+c=7.$$ Vậy $S=7$.

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A,B,C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $Ax+By+z+D=0$, $(A,B,D\in\mathbb{R})$. Giá trị của biểu thức $A+B+D$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -6

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, điều kiện $a>0; b>0; c>0$

Độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3

Suy ra $\begin{cases} OB = 3OA \\ OC = 3OB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 9a \end{cases}$ nên $A(a;0;0), B(0;3a;0), C(0;0;9a)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{3a} + \frac{z}{9a} = 1$.

Vì $M(1;2;3) \in (\alpha)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{3a} + \frac{3}{9a} = 1 \Leftrightarrow 6 = 3a \Leftrightarrow a = 2$

$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{18} = 1 \Leftrightarrow (\alpha): 9x + 3y + z - 18 = 0 \Rightarrow A = 9, B = 3, D = -18 \Rightarrow A + B + D = -6$

Câu 127. Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;3)$ là trực tâm của ΔABC với A, B, C là ba điểm lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz (khác gốc tọa độ). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có dạng $mx + ny + pz - 14 = 0$, ($m, n, p \in \mathbb{Z}$). Khi đó $m + n + p$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6

Giả sử: $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}(1-a;2;3)$; $\overrightarrow{BH}(1;2-b;3)$; $\overrightarrow{BC}(0;-b;c)$; $\overrightarrow{AC}(-a;0;c)$

Do H là trực tâm tam giác ABC nên ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và do $H \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{2b}{3} \\ \frac{1}{2b} + \frac{2}{b} + \frac{9}{2b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 7 \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{14} + \frac{y}{7} + \frac{3z}{14} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Vậy $m + n + p = 6$.

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 4y - 2z - 6 = 0$, $(Q): x - 2y + 4z - 6 = 0$. Mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $x + by + cz + d = 0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $c + b - d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 8

Mặt phẳng $(P): x+4y-2z-6=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;4;-2)$.

Mặt phẳng $(Q): x-2y+4z-6=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;-2;4)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(12;-6;-6)$, cùng phương với $\vec{u}=(2;-1;-1)$.

Gọi $d=(P)\cap(Q)$. Ta có đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1;-1)$ và đi qua điểm $M(6;0;0)$.

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa $d \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\ M\in(\alpha)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=0\\ \dfrac{6}{a}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=6\\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}(*)\end{cases}$.

Ta lại có hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Leftrightarrow OA=OB=OC \Leftrightarrow |a|=|b|=|c| \Leftrightarrow |b|=|c|=6$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $b=c=6$.

Vậy phương trình của mặt phẳng $(\alpha): \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow x+y+z-6=0$.

$\Rightarrow c+b-d=8$

Câu 129. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ và chắn trên Oz một đoạn dài gấp đôi các đoạn chắn trên các tia Ox, Oy. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$, $C(0;0;p)$ (với $m,n,p>0$)

Theo giả thiết có $OC=2OA=2OB \Rightarrow p=2m=2n \quad (1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p}=1$.

Do mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ nên $\dfrac{1}{m}-\dfrac{3}{n}+\dfrac{8}{p}=1 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được $\dfrac{1}{m}-\dfrac{3}{m}+\dfrac{8}{2m}=1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{m}=1 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow m=n=2, p=4$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 2x+2y+z-4=0$

$\Rightarrow b+c-d=7$

Câu 130. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q): $x+y+z=0$ và cách điểm $M(1;2;-1)$ một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $5x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c+2025d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -5

• PT mặt phẳng (P) qua O nên có dạng: $Ax+By+Cz=0$ (với $A^2+B^2+C^2\neq 0$).

• Vì $(P)\perp(Q)$ nên: $1.A+1.B+1.C=0 \Leftrightarrow C=-A-B$ (1)

• $d(M,(P))=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow (A+2B-C)^2=2\left(A^2+B^2+C^2\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $8AB+5B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} B=0 & (3) \\ 8A+5B=0 & (4) \end{array}\right.$

• Từ (3): B = 0 ⇒ C = –A. Chọn A = 1, C = –1 ⇒ (P): $x-z=0$

• Từ (4): 8A + 5B = 0. Chọn A = 5, B = –8 ⇒ C = 3 ⇒ (P): $5x-8y+3z=0$.

Do $a=5$ nên phương trình mặt phẳng (P) là: $5x-8y+3z=0 \Rightarrow b+c+2025d=-5$

Câu 131. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-1;2)$, $B(1;3;0)$, $C(-3;4;1)$, $D(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A,B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P). Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-4=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

Ta có: $\begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \\ d(C,(P))=d(D,(P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+2c+d=0 \\ a+3b+d=0 \\ \frac{|-3a+4b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2a, c=4a, d=-7a \\ c=2a, b=a, d=-4a \end{array}\right.$

+ Với $b=2a, c=4a, d=-7a \Rightarrow (P): x+2y+4z-7=0$

+ Với $c=2a, b=a, d=-4a \Rightarrow (P): x+y+2z-4=0$.

Do $d=-4$ nên phương trình mặt phẳng (P) là: $x+y+2z-4=0 \Rightarrow a+b+c=4$

Câu 132. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7)$, $B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, khi đó giá trị của biểu thức $x_0+y_0+z_0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Gọi $M(a;b;c)$ với $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(a-3;b-1;c-7)$ và $\overrightarrow{BM}=(a-5;b-5;c-1)$.

Vì $\begin{cases} M\in(P) \\ MA=MB=\sqrt{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\in(P) \\ MA^2=MB^2 \\ MA^2=35 \end{cases}$ nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2a-b-c+4=0 \\ (a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=(a-5)^2+(b-5)^2+(c-1)^2 \\ (a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b-c=-4 \\ 4a+8b-12c=-8 \\ (a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ c=a+2 \\ (a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+2 \\ c=a+2 \\ 3a^2-14a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}, \text{ (do } a\in\mathbb{Z}\text{)}.$$

Ta có $M(2;2;0)\Rightarrow x_0+y_0+z_0=4$

Câu 133. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\dfrac{OA}{1}=\dfrac{OB}{2}=\dfrac{OC}{4}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 11

Phương trình mặt chắn cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là $(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (với $a>0$, $b>0, c>0$).

Theo đề: $\dfrac{OA}{1}=\dfrac{OB}{2}=\dfrac{OC}{4}\Leftrightarrow\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{4}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{b}{2} \\ c=2b \end{cases}$.

Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có:

$\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{3}{b}+\frac{-2}{2b}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{b}=1 \Leftrightarrow b=4$.Khi đó $a=2$, $c=8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1 \Leftrightarrow 4x+2y+z-8=0$

$\Rightarrow b+c-d=11$

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Có bao nhiêu mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq 0$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Giả sử $A(a;0;0),\mathrm{B}(0;\mathrm{b};0),\mathrm{C}(0;0;\mathrm{c})$ với $abc\neq 0$ $\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Mà $OA=OB=OC\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} |b|=|a| \\ |c|=|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\pm a \\ c=\pm a \end{cases}$

Trường hợp 1: $b=a;c=a$

$\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{5}{a}=1\Rightarrow a=8$

Trường hợp 2: $b=a;c=-a$

$\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{a}-\frac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{a}-\frac{5}{a}=1\Rightarrow a=-2$

Trường hợp 3: $b=-a;c=a$

$\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}-\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{2}{a}+\frac{5}{a}=1\Rightarrow a=-4$

Trường hợp 4: $b=-a;c=-a$

$\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}-\frac{y}{a}-\frac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{2}{a}-\frac{5}{a}=1\Rightarrow a=-6$

Vậy có 4 mặt phẳng (α)

Câu 135. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua $M(2;1;3)$, $A(0;0;4)$ và cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại B, C khác O thỏa mãn diện tích tam giác OBC bằng 1?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi $B(a;0;0)$, $C(0;b;0)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox,Oy.

Phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{4}=1$.

Vì $M\left(2;1;3\right)$ thuộc $\left(P\right)$ nên ta có $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4a+8b=ab$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}OB.OC=\frac{1}{2}|a|.|b|=\frac{1}{2}|ab|=1 \Leftrightarrow |ab|=2$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}4a+8b=ab\\ ab=2\end{cases},(I)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4a+8b=2\\ ab=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+4b=1\\ 2ab=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a=1-4b\\ (1-4b)b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a=1-4b\\ 4b^2-b+4=0,(vn)\end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}4a+8b=ab\\ ab=-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4a+8b=-2\\ ab=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+4b=-1\\ 2ab=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a=-1-4b\\ (-1-4b)b=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a=-1-4b\\ 4b^2+b-4=0\end{cases}$. Hệ có hai nghiệm.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 136. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y+z+1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với (α), cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 10

Do (P) song song với (α) nên (P) có phương trình: $2x+3y+z+m=0$, điều kiện $m\neq 1$.

Khi đó: (P) cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm là: $A\left(-\frac{m}{2};0;0\right)$, $B\left(0;-\frac{m}{3};0\right)$, $C(0;0;-m)$, với $m<0$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6 nên $\frac{1}{6}OA.OB.OC=6$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}.\left|-\frac{m}{2}\right|.\left|-\frac{m}{3}\right|.|-m|=6 \Leftrightarrow -\frac{m^3}{36}=6$ (do $m<0$) $\Leftrightarrow m^3=-216 \Leftrightarrow m=-6$ (thỏa mãn).

Ta có: $(P): 2x+3y+z-6=0 \Rightarrow b+c-d=10$.

Câu 137. *Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -9

Cách 1

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x+by+cz+d=0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O.

Vì (α) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+b+c+d=0 \\ -2b+2c+d=0 \end{cases} \quad (*)$$

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại $M(-d;0;0), N\left(0;\frac{-d}{b};0\right)$.

Vì M, N cách đều O nên $OM=ON$. Suy ra: $|d|=\left|\frac{d}{b}\right|$.

Nếu $d=0$ thì chỉ tồn tại duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán (mặt phẳng này sẽ đi qua điểm O).

Do đó để tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì: $|d|=\left|\frac{d}{b}\right| \Leftrightarrow b=\pm 1$.

- Với $b=1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} c+d=-2 \\ 2c+d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ d=-6 \end{cases}$. Ta được mặt phẳng (P): $x+y+4z-6=0$
- Với $b=-1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} c+d=0 \\ 2c+d=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2 \\ d=2 \end{cases}$. Ta được mặt phẳng (Q): $x-y-2z+2=0$

Vậy: $b_1b_2+c_1c_2=1.(-1)+4.(-2)=-9$.

Cách 2

$\overrightarrow{AB}=(-1;-3;1)$

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x+by+cz+d=0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O

lần lượt tại M, N. Vì M, N cách đều O nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: $M(a;0;0), N(0;a;0)$ với $a \neq 0$ khi đó (α) chính là (P). Ta có $\overrightarrow{MN}=(-a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_1}=(-1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_1}\right]=(-1;-1;-4)$,

suy ra $(P): x+y+4z+d_1=0$

TH2: $M(-a;0;0), N(0;a;0)$ với $a \neq 0$ khi đó (α) chính là (Q). Ta có $\overrightarrow{MN}=(a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_2}=(1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_2}\right]=(-1;1;2)$,

suy ra $(Q): x-y-2z+d_2=0$

Vậy: $b_1b_2+c_1c_2=1.(-1)+4.(-2)=-9$.

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C (A,B,C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $40,5$

Giả sử $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Mặt phẳng (P) có phương trình (theo đoạn chắn): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ nên $\frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Ta có $1=\frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{9}{a.b.c}}\Rightarrow a.b.c\ge 243$.

$V_{OABC}=\frac{1}{6}a.b.c\ge\frac{243}{6}=\frac{81}{2}$.

Vậy thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $40,5$

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia $Ox,\ Oy,\ Oz$ lần lượt tại các điểm $A,\ B,C$ (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $6x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 41

Giả sử $A(a;0;0),\ B(0;b;0),\ C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; $OA+OB+OC=a+b+c$

$M(1;4;9)\in(P)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$. Áp dụng BĐT Bunhiacopxki:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c)=\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\ge(1+2+3)^2.$$

$\Rightarrow a+b+c\ge 36$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1\\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\end{cases}\xrightarrow{a+b+c=49}\begin{cases}a=6\\ b=12\\ c=18\end{cases}$.

Nên $(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-36=0$

$\Rightarrow b+c-d=41$

Câu 140. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng $(P): x+Ay+Bz+C=0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tính tổng $A+B+C$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Vì (P) chứa trục Oz nên luôn có $d(M;(P)) \le d(M;Oz)$.

Suy ra $d(M;(P))$ đạt giá trị lớn nhất bằng $d(M;Oz)=MH$, với H là hình chiếu của M trên trục Oz.

Ta có $H(0;0;3)$. Vậy (P) đi qua $H(0;0;3)$, có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MH}(-1;-2;0)$.

$(P): -x-2y=0 \Leftrightarrow x+2y=0 \Rightarrow A=2; B=C=0 \Rightarrow A+B+C=2$

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2), B(1;1;-1), C(2;-2;-2)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)+2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)-\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=(2;3;1) \Leftrightarrow I(2;3;1)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|$

$=\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|=2MI$.

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất, khi đó M là hình chiếu của $I(2;3;1)$ lên mặt phẳng (Oyz). Suy ra $M(0;3;1)$.

$\Rightarrow S=x_0+y_0+z_0=4$

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-4=0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T=\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-x;-1-y;3-z) \Rightarrow 3\overrightarrow{IA}=(3-3x;-3-3y;9-3z)$

$\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-z) \Rightarrow 2\overrightarrow{IB}=(4-2x;2-2y;-2z)$

$\overrightarrow{IC}=(-3-x;-1-y;-3-z)$

Khi đó $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=(-2x-4;-2y-6;-2z+6)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x-4=0\\-2y-6=0\\-2z+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=-3\\z=3\end{cases}$. Vậy $I(-2;-3;3)$

Ta có $T=\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|$

Suy ra $T_{\min} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

Đường thẳng MI đi qua $I(-2;-3;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

$MI:\begin{cases}x=-2+t\\y=-3+t\\z=3-t\end{cases}$. Lấy $M(-2+t;-3+t;3-t)\in MI$

Mặt khác $M\in(P)\Rightarrow(-2+t)+(-3+t)-(3-t)-4=0\Rightarrow t=4$

Suy ra $M(2;1;-1)$.

Vậy $a+b+c=2$

Câu 143. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+7=0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)+5\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)-7\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=3\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}-7\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm $I=(-23;20;-11)$

Khi đó: $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}=3\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)+5\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)-7\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)$

$=-\overrightarrow{IM}+\left(3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}\right)=-\overrightarrow{IM}$.

Nên: $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|=\left|-\overrightarrow{IM}\right|=IM\geq d\left(I,(\alpha)\right)$.

Vậy: $P_{\min}=d\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{\left|2.(-23)-20+2(-11)+7\right|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=27$.

Câu 144. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=9a+18b+9c$.

Lời giải

+ Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(3-x;1-y;1-z)\\\overrightarrow{IB}=(7-x;3-y;9-z)\\\overrightarrow{IC}=(2-x;2-y;2-z)\end{cases}$.

+ $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}23-6x=0\\13-6y=0\\25-6z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{23}{6}\\y=\dfrac{13}{6}\\z=\dfrac{25}{6}\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right)$.

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|6\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|6\overrightarrow{MI}\right|=6MI$.

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

+ Gọi đường thẳng (d) đi qua I và vuông góc (P).

Ta có (d) đi qua $I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right)$ và nhận $\overrightarrow{n_p}=(1;1;1)$ làm véc tơ chỉ phương.

Suy ra phương trình $(d):\begin{cases}x=\dfrac{23}{6}+t\\y=\dfrac{13}{6}+t\\z=\dfrac{25}{6}+t\end{cases}$.

$M\in(d)\Leftrightarrow M\left(\dfrac{23}{6}+t;\dfrac{13}{6}+t;\dfrac{25}{6}+t\right)$

$M\in(P)\Leftrightarrow\dfrac{23}{6}+t+\dfrac{13}{6}+t+\dfrac{25}{6}+t-3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-43}{18}\Leftrightarrow M\left(\dfrac{13}{9};\dfrac{-2}{9};\dfrac{16}{9}\right)$.

Do đó $\begin{cases}a=\dfrac{13}{9}\\b=\dfrac{-2}{9}\\c=\dfrac{16}{9}\end{cases}\Rightarrow S=9a+18b+9c=25$.

Câu 145. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2$.

Lời giải

Ta có $G(-1;3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó:

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\end{aligned}$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy). Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$ Vậy $M(-1;3;0)$. Từ đó $T=(-1)^2+3^2=10$.

Câu 146. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P=x+y+z$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow I(2;-2;2)$.

$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2$.

Mà $M\in(Oyz)\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên

$(Oyz)\Leftrightarrow M(0;-2;2)$.

Vậy $P=0-2+2=0$.

Câu 147. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), tính giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ suy ra $I(-1;1;1)$

$IA^2=27$; $IB^2=12$; $d(I,(P))=3$

$2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+3\overrightarrow{IB}^2=5MI^2+90$

Mà $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất

Suy ra $MI\ge d(I,(P))=3$

Vậy $2MA^2+3MB^2\ge 5.9+90=135$

Câu 148. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OC}=(2;1;1)\Rightarrow I(2;1;1)$.

Khi đó, $T=MA^2+MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=5MI^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)+IA^2+IB^2+3IC^2$

$=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2$ (vì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$)

Vì I, A, B, C cố định $\Rightarrow IA^2+IB^2+3IC^2$ không đổi nên T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M\equiv I(2;1;1)\Rightarrow a=2$, $b=c=1$.

Vậy $S=a+b+c=4$.

Câu 149. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P):3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a+b+c$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ $(*)$.

Khi đó, $(*)\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OC}=(2;1;1)\Leftrightarrow I(2;1;1)$.

Mặt khác, áp dụng tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm $\Rightarrow T=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2$.

Vì $IA^2+IB^2+3IC^2$ là hằng số nên suy ra T đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\in(P) \\ \overrightarrow{IM} \text{ cùng phương } \vec{n}_{(P)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3b-2c=29 \\ \frac{a-2}{3}=\frac{b-1}{3}=\frac{c-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=4 \\ c=-1 \end{cases}$$

Vậy $a+b+c=8$.

Câu 150. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=18a+18b+9c$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}(1-a;2-b;3-c), \overrightarrow{IB}(-a;1-b;1-c), \overrightarrow{IC}(1-a;-b;-2-c)$

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a-2a+3-3a=0 \\ 2-b+2-2b-3b=0 \\ 3-c+2-2c-6-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=4 \\ 6b=4 \\ 6c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=-\frac{1}{6} \end{cases} I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{6}\right).$$

Ta chứng minh được $T=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$. Do đó T đạt $GTNN$ khi MI đạt $GTNN$ $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P).

Ta có $MI:\begin{cases} x=\frac{2}{3}+t \\ y=\frac{2}{3}+t \\ z=-\frac{1}{6}+t \end{cases}$, $M\in MI\Rightarrow M\left(t+\frac{2}{3};t+\frac{2}{3};t-\frac{1}{6}\right), M\in(P)\Rightarrow 3t+\frac{19}{6}=0\Leftrightarrow t=-\frac{19}{18}$

$\Rightarrow M\left(-\frac{7}{18};-\frac{7}{18};-\frac{11}{9}\right)$.

$\Rightarrow S=18a+18b+9c=-25$

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3), C(3;1;-5)$. Lấy điểm $M(a,b,c)$ trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2-2MB^2-MC^2$ lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Lời giải

Gọi điểm E thỏa $\overrightarrow{EA}-2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$. Suy ra B là trung điểm của AE, suy ra $E(3;-4;5)$.

Khi đó: $MA^2-2MB^2=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2=-ME^2+EA^2-2EB^2$.

Do đó MA^2-2MB^2 lớn nhất $\Leftrightarrow ME$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của $E(3;-4;5)$ lên (Oxy)

$\Leftrightarrow M(3;-4;0)$.

$\Rightarrow S=a+b+c=-1$

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+8=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2MA^2+MB^2-MC^2$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)-\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=(1;0;4)$

$\Leftrightarrow I(1;0;4)$.

Khi đó, với mọi điểm $M(x;y;z)\in(P)$, ta luôn có:

$T=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)+2\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2-\overrightarrow{IC}^2$

$=2MI^2+2IA^2+IB^2-IC^2$.

Ta tính được $2IA^2+IB^2-IC^2=30$.

Do đó, T đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN $\Leftrightarrow MI\perp(P)$.

Lúc này, $IM = d\left(I,(P)\right) = \dfrac{\left|2.1 - 0 + 2.4 + 8\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6$.

Vậy $T_{\min} = 2.6^2 + 30 = 102$.

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;0), B(1;-1;3), C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$. Xét $M\left(a;b;c\right)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}}{2} \Rightarrow I\left(1;2;-2\right)$

Ta có $2MA^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 = 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$

$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$

$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IC}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}$

Suy ra $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + IC^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}\right)$

Suy ra $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2 + IC^2 - IB^2$. Do I cố định nên $2IA^2 + IC^2 - IB^2$ không đổi.

Vậy $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P).

• Đường thẳng Δ qua $I\left(1;2;-2\right)$ và vuông góc với $\left(P\right)$ là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \\ 3x - 3y + 2z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(4;-1;0\right)$

Suy ra $S = a + b + c = 3$

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(-10;-5;8\right)$, $B\left(2;1;-1\right)$, $C\left(2;3;0\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right): x + 2y - 2z - 9 = 0$. Xét M là điểm thay đổi trên $\left(P\right)$ sao cho $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính T.

Lời giải

Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = \left(-10 - x; -5 - y; 8 - z\right)$, $\overrightarrow{IB} = \left(2 - x; 1 - y; -1 - z\right)$, $\overrightarrow{IC} = \left(2 - x; 3 - y; -z\right)$.

Khi đó, $\begin{cases}(-10-x)+2(2-x)+3(2-x)=0\\(-5-y)+2(1-y)+3(3-y)=0\\(8-z)+2(-1-z)+3(-z)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$.

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$MA^2+2MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$).

Ta lại có $IA^2+2IB^2+3IC^2=185+2.8+3.9=228$.

Do đó, $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI=d\left(I,(P)\right)=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ bằng: $6MI^2+228=6.9+228=282$.

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(5;0;-1)$, $C(3;1;2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x+y-z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2+MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Lời giải

Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0} \Rightarrow E(3;0;1)$.

Ta có: $S=MA^2+MB^2+2MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2$

$=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2=4ME^2+EA^2+EB^2+2EC^2$.

Vì $EA^2+EB^2+2EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi ME nhỏ nhất.

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của E lên (Q).

Phương trình đường thẳng $ME: \begin{cases}x=3+3t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=3+3t\\y=t\\z=1-t\\3x+y-z+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=-1\\z=2\\t=-1\end{cases}$.

$\Rightarrow M(0;-1;2) \Rightarrow a=0$, $b=-1$, $c=2$.

$\Rightarrow S = a + b + c = 1$.

Câu 156. Cho hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(2;3;-3)$, $C(-2;1;-2)$ và mặt phẳng (Oyz). Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) sao $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a - 2b + c$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$, sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I$ là trong tâm $\Delta ABC \Rightarrow I(1;1;-1)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)$

$= 3MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + \left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}\right)$, (mà $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$)

$= 3MI^2 + \left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}\right)$

Vì điểm I, A, B, C cố định nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}$ có giá trị không đổi.

Để $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị min $\Leftrightarrow MI$ min mà I cố định nên M là hình chiếu của I lên (Oyz) suy ra $M(0;1;-1)$.

Vậy $a - 2b + c = 0 - 2.1 - 1 = -3$.

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = 12a + 12b + c$.

Lời giải

Xét $S = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})$

$MI^2 + \overrightarrow{MI}(4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA}$

Gọi I là điểm thỏa mãn $4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{4x_A + 3x_B + 5x_C}{12} \\ y_I = \dfrac{4y_A + 3y_B + 5y_c}{12} \\ z_I = \dfrac{4x_A + 3z_B + 5z_C}{12} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{-2}{12}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{7}{12}\right)$.

Mà: $(4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}) = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA} = const$. Nên $S_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}$

Suy ra M là hình chiếu của I lên mặt Oxy $\Rightarrow M\left(-\dfrac{2}{12}, \dfrac{1}{12}, 0\right) \Rightarrow T = 12a + 12b + c = -1$

Câu 158. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1)$, $B(-2;3;6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ khi đó: $\begin{cases} x_H=\dfrac{x_A+3x_B}{1+3} \\ y_H=\dfrac{y_A+3y_B}{1+3} \\ z_H=\dfrac{z_A+3z_B}{1+3} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{11}{4};\dfrac{19}{4}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z=0$.

Xét $T=\dfrac{z_H}{1}=\dfrac{19}{4}$ do đó tọa độ điểm M cần tìm là: $\begin{cases} x_M=x_H-aT \\ y_M=y_H-bT \\ z_M=z_H-cT \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{11}{4};0\right)$.

Vậy $T=x_M+y_M+z_M=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{11}{4}+0=2$.

Câu 159. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3), B(6;-5;8)$ và $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{k}$ trong đó a,b là cá số thực luôn thay đổi. Nếu $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giác trị nhỏ nhất thì giá trị $a-b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{k} \Rightarrow M(a;0;b)$

$\overrightarrow{MA}=(-1-a;2;3-b);\overrightarrow{MB}=(6-a;-5;8-b) \Rightarrow -2\overrightarrow{MB}=(-12+2a;10;-16+2b)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=(a-13;12;b-13)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(a-13)^2+12^2+(b-13)^2}\geq 12$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|_{\min}=12 \Leftrightarrow \begin{cases} a=13 \\ b=13 \end{cases}$. Do đó $a-b=0$

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;5)$, $B(3;-1;0)$, $C(-4;0;-2)$. Gọi I là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P): 4x+3y+2=0$.

Lời giải

Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Khi đó: $\begin{cases} -1-a-2(3-a)+3(-4-a)=0 \\ 2-b-2(-1-b)+3(0-b)=0 \\ 5-c-2(0-c)+3(-2-c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{19}{2} \\ b=2 \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\dfrac{19}{2};2;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{IM}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{IM}+3\overrightarrow{MC}\right|$

$=\left|2\overrightarrow{IM}+\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)\right|=2\left|\overrightarrow{IM}\right|=2IM$.

Biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của M lên $(Oxy)\Leftrightarrow I\left(-\frac{19}{2};2;0\right)$.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là: $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left|4.\left(-\frac{19}{2}\right)+3.2+2\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=6$.

Câu 161. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Tính giá trị của $a+b$.

Lời giải

Ta thấy $M(a;b;0)\in(Oxy)$.

Gọi $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có

$MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2$

$=\left(\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IM}^2-2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}\right)+\left(\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IM}^2-2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}\right)$

$=IM^2+2IA^2-2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=IM^2+\dfrac{AB^2}{2}=IM^2+7$.

Bởi vậy MA^2+MB^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ IM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (Oxy). Bởi vậy $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$. Như vậy $a=\frac{3}{2},b=\frac{1}{2}\Rightarrow a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$.

Câu 162. Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Lấy điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Lời giải

Lấy $G(1;3;-1)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ bé nhất khi MG bé nhất.

Hay M là hình chiếu của điểm G lên mặt phẳng Oxy.

Vậy $M(1;3;0)\Rightarrow S=a+b+c=4$

Câu 163. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2), B(1;1;0), C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q): x+y+z-5=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q) sao cho thỏa mãn biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá nhỏ nhất, khi đó giá trị của $3T$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, suy ra $G\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};1\right)$. Khi đó

$$T = MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$\geq 3\left[d\left(G,(Q)\right)\right]^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q).

Ta có $d\left(G,(Q)\right) = \dfrac{\left|\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+1-5\right|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{GA} = \left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3};1\right) \Rightarrow GA^2 = \frac{26}{9}$; $\overrightarrow{GB} = \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-1\right) \Rightarrow GB^2 = \frac{11}{9}$; $\overrightarrow{GC} = \left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};0\right) \Rightarrow GC^2 = \frac{29}{9}$.

Vậy $\min T = 3.\frac{4}{3} + \frac{26}{9} + \frac{11}{9} + \frac{29}{9} = \frac{34}{3}$ khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q).

$\Rightarrow 3T = 3.\frac{34}{3} = 34$

Câu 164. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xét điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right)$.

Ta có $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$

$= 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$

$= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$ (vì $MI^2 \geq 0$ với mọi điểm M)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I$ tức là $M\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right) \Rightarrow x+y+z = \frac{7}{4}+\frac{7}{2} = 5,25$

Câu 165. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+2=0$ sao cho $3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Lời giải

Gọi I là điểm thảo mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{3x_A+2x_B+x_C}{6}=-\dfrac{1}{6} \\ y_I=\dfrac{3y_A+2y_B+y_C}{6}=\dfrac{1}{3} \\ z_I=\dfrac{3z_A+2z_B+z_C}{6}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Ta có $3MA^2+2MB^2+MC^2=3\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)^2$

$=3IA^2+2IB^2+IC^2+6IM^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)$

$=3IA^2+2IB^2+IC^2+6IM^2$.

Do đó $3MA^2+2MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên $(P) \Rightarrow M\left(-\dfrac{11}{18};-\dfrac{1}{9};\dfrac{5}{9}\right) \Rightarrow \min\left(3MA^2+2MB^2+MC^2\right)=\dfrac{61}{6}$

$S=18a+9b+9c=-7$

Câu 166. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5), B(3;4;0), C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S=a+b+c$.

Lời giải

Gọi điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{IA}=(1-x;4-y;5-z) \\ \overrightarrow{IB}=(3-x;4-y;-z) \\ \overrightarrow{IC}=(2-x;-1-y;-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}=(1-x;4-y;5-z) \\ \overrightarrow{IB}=(3-x;4-y;-z) \\ 3\overrightarrow{IC}=(6-3x;-3-3y;-3z) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=(10-5x;5-5y;5-5z)$

Do đó: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;1)$.

Mặt khác: $MA^2+MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=5MI^2+2.MI.\left(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}\right)+IA^2+IB^2+3IC^2$

Vì I,A,B,C cố định nên $IA^2+IB^2+3IC^2$ không đổi

Do đó: $MA^2+MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α).

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Gọi $\{M\}=d\cap(\alpha)$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}\\ 3x-3y-2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+6=3y-3\\ -2x+4=3z-3\\ 3x-3y-2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\\ z=0\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2};0\right).$$

Vậy $a=\dfrac{7}{2},b=-\dfrac{1}{2},c=0\Rightarrow S=a+b+c=3.$

Câu 167. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;2)$ và cách $M(-2;4;-1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là có dạng $x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $d(M,(P))\le MA$

Nên $d(M,(P))_{max}=MA$ khi A là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P).

Suy ra $AM\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-3;-3;-3)$ là vectơ pháp tuyến của (P).

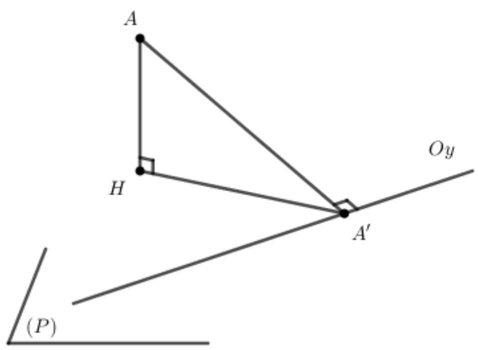
(P) đi qua $A(1;7;2)$ và nhận $\overrightarrow{AM}=(-3;-3;-3)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$-3(x-1)-3(y-7)-3(z-2)=0\Leftrightarrow x+y+z-10=0$

$\Rightarrow b+c-d=12$

Câu 168. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Phương trình của (P) có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $b+c-d$ bằng bao nhiêu?

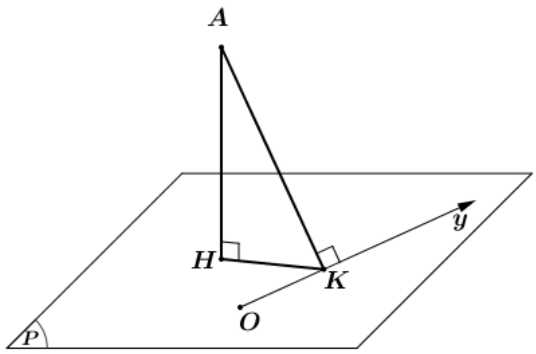
Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P), A' là hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Oy suy ra $A'(0;1;0)$. Khi đó khoảng cách từ A đến (P) là đoạn thẳng $AH \le AA'$. Độ dài đoạn thẳng AH dài nhất khi H và A' trùng nhau. Khi đó mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{A'A}=(2;0;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A'(0;1;0)$ có VTPT: $\overrightarrow{A'A}=(2;0;-1)$ là: $2(x-0)+0(y-1)+(-1)(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x-z=0$. Suy ra $b+c-d=-1$

Câu 169. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $S=a+b+d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và trục Oy.

Ta có $d(A,(P))=AH \le AK$. Do đó khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $H \equiv K(0;1;0)$.

Khi đó (P) đi qua $K(0;1;0)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AK}=(-2;0;-1)=-(2;0;1)$ nên có phương trình là $2x+z=0 \Rightarrow S=a+b+d=2$

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. . Phương trình của (P) có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $S=a+b+d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;2)$ lên trục Ox là $M(1;0;0)$.

Khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất nên mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{MA}=(0;2;2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;0;0)$ và có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{MA}=(0;2;2)$ nên

$0.(x-1)+2(y-0)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow y+z=0$

$\Rightarrow S=a+b+d=1$

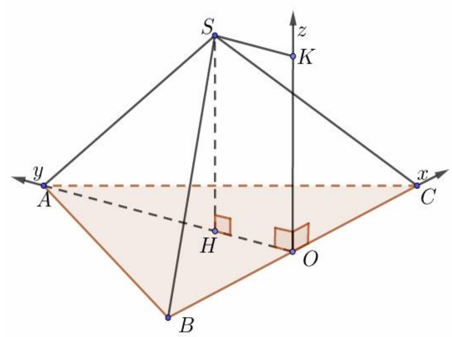
CHỦ ĐỀ 4
ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG THỰC TIỄN

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

1. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH CHÓP ĐẶC BIỆT

Hình chóp đều

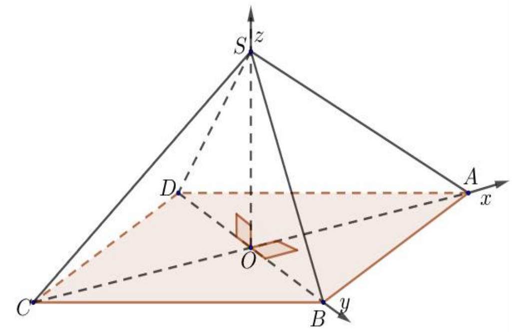
Hình chóp tam giác đều



- Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, đặt $AB=1$.
- Dựng hệ trục như hình vẽ .
- Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$B\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $S\left(0;\underbrace{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}_{=OH};\underbrace{OK}_{=SH}\right)$.

Hình chóp tứ giác đều

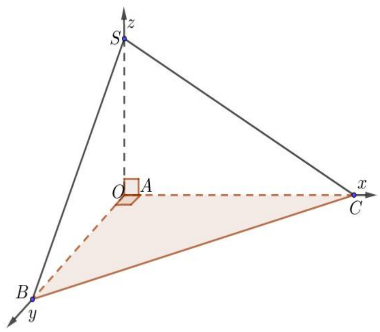


- Chọn hệ trục như hình, đặt $AB=1$.
- Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(\underbrace{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{=OA};0;0\right)$, $B\left(0;\underbrace{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$,

$C\left(\underbrace{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{=-OA};0;0\right)$, $D\left(0;-\underbrace{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$, $S(0;0;SO)$.

Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy

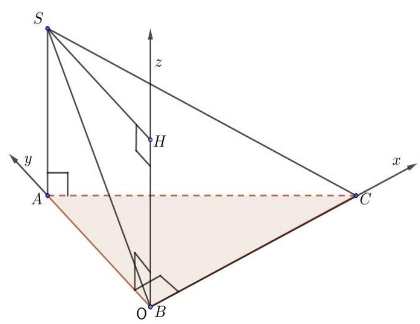
Đáy là tam giác vuông tại *A*



- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $A\equiv O(0;0;0)$,

$B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

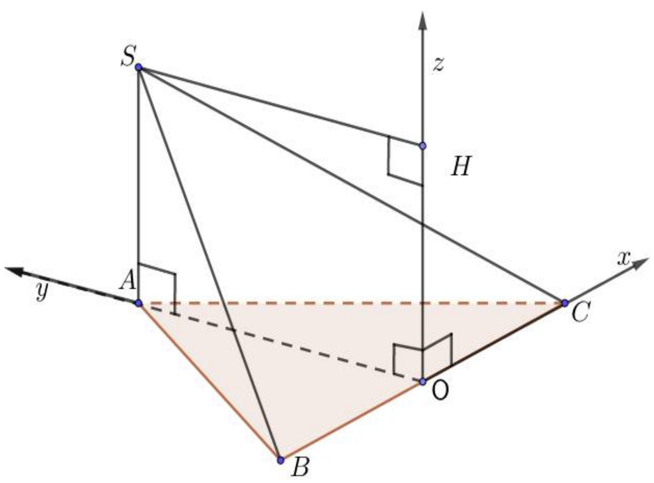
Đáy là tam giác vuông tại *B*



- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $B\equiv O(0;0;0)$, $A(0;AB;0)$,

$C(BC,0;0)$, $S\left(0;AB;\underbrace{BH}_{=SA}\right)$.

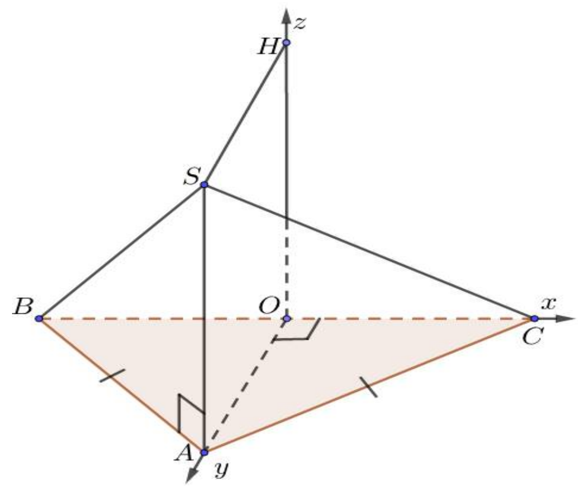
Đáy là tam giác đều



- Gọi O là trung điểm BC.
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = 1$.
- Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $S\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

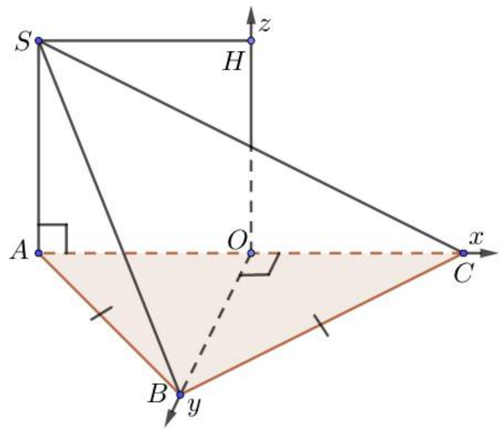
Đáy là tam giác cân tại A



- Gọi O là trung điểm BC.
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,

$B(-OB;0;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

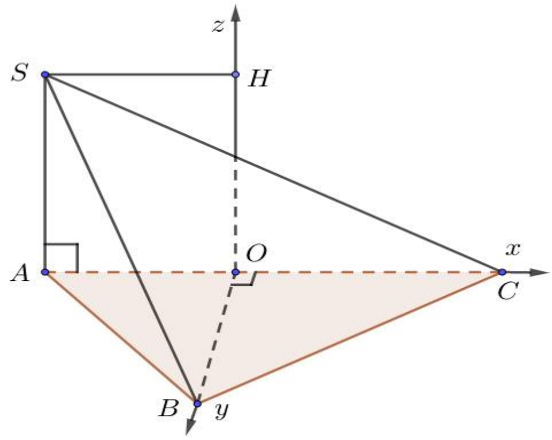
Đáy là tam giác cân tại B



- Gọi O là trung điểm AC.
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$,

$B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

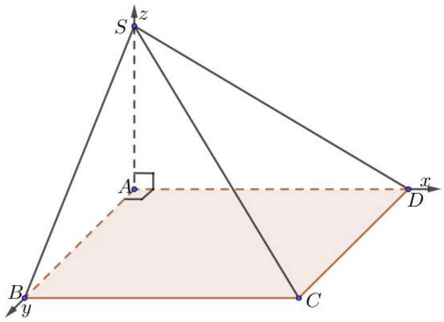
Đáy là tam giác thường



- Dựng đường cao BO của ΔABC.
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$,

$B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

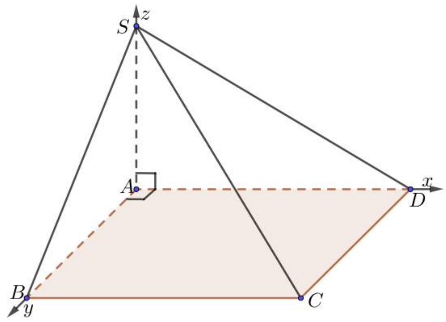
Đáy là hình vuông



• Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = 1$.

• Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

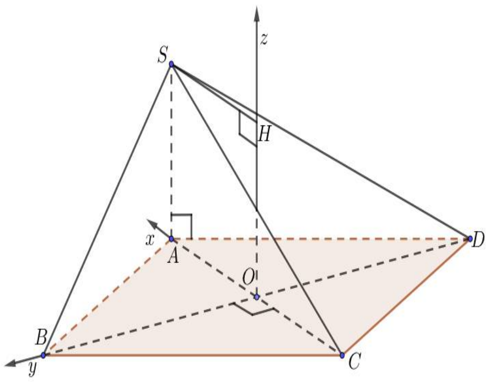
Đáy là hình chữ nhật



• Chọn hệ trục như hình vẽ

• Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

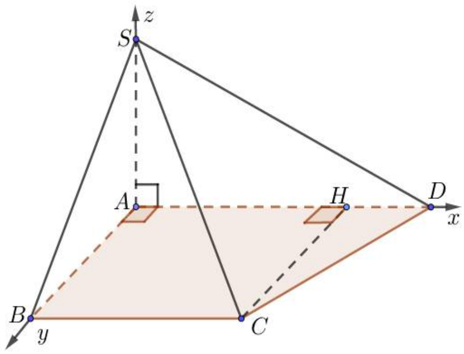
Đáy là hình thoi



• Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

• Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $S\left(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là hình thang vuông

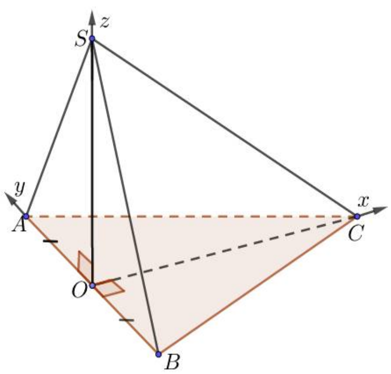


• Chọn hệ trục như hình vẽ.

• Tọa độ: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

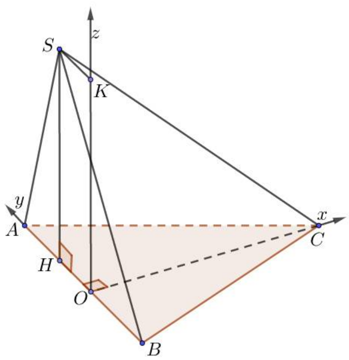
Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



• Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình.

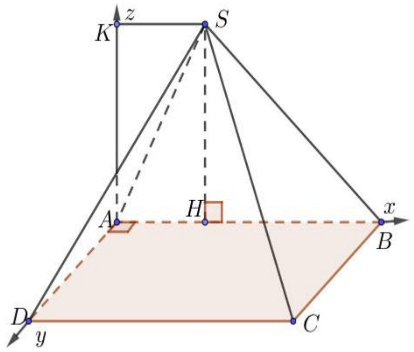
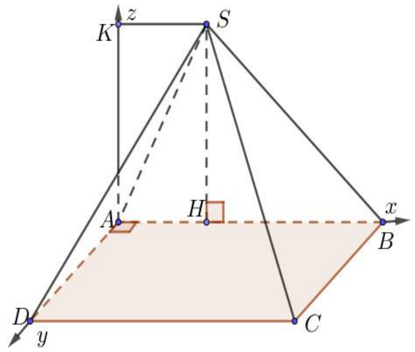
• Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường

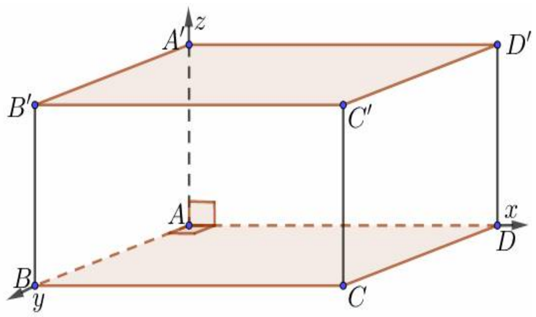
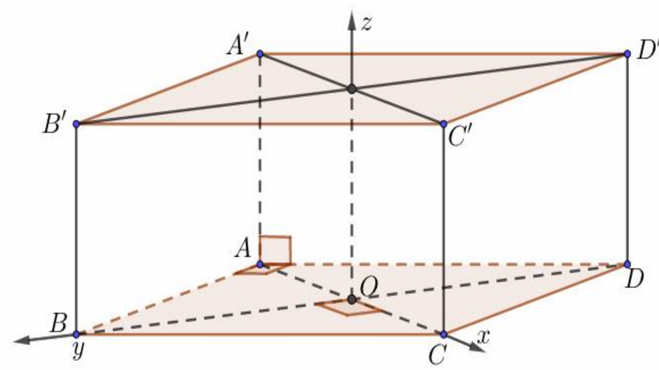


• Vẽ đường cao CO trong ΔABC, chọn hệ trục như hình.

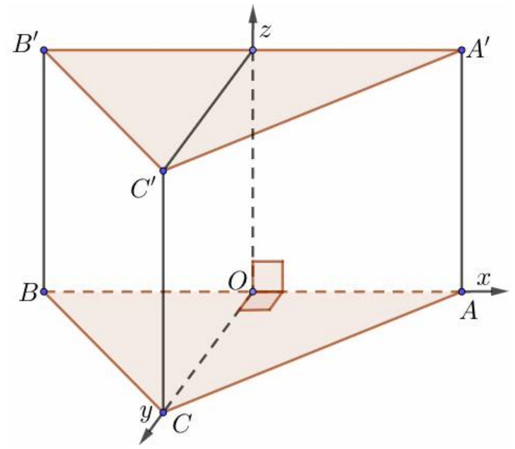
• Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;OH;OK)$

Đáy là hình vuông	**Đáy là hình chữ nhật**
 • Chọn hệ trục như hình • Tọa độ $A\equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0)$, $D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$	 • Chọn hệ trục như hình • Tọa độ $A\equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0)$, $D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$

2. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

Lăng trụ đứng	
Hình lập phương, hình hộp chữ nhật	**Lăng trụ đứng đáy là hình thoi**
 • Dựng hệ trục như hình vẽ. • Tọa độ điểm: $A\equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0), A'(0;0;AA'), B'(0;AB;AA')$, $C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.	 • Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình. • Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $A'(-OA;0;AA')$, $B'(0;OB;AA')$, $C'(OC;0;CC')$, $D'(0;-OD;DD')$

Lăng trụ có đáy tam giác đều hoặc cân



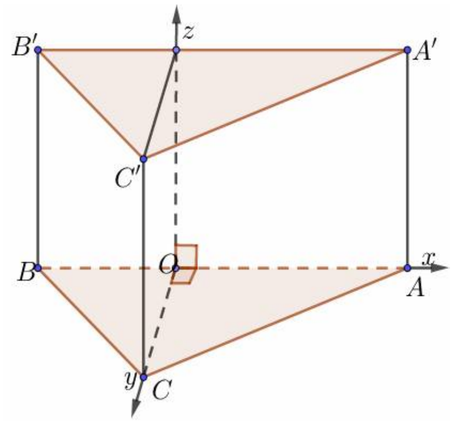
• Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ .

• Tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A\left(\dfrac{AB}{2};0;0\right)$, $B\left(-\dfrac{AB}{2};0;0\right)$, $C(0;OC;0)$,

$A'(OA;0;AA')$, $B'\left(-\dfrac{AB}{2};0;BB'\right)$, $C'(0;OC;CC')$.

Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường



• Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ .

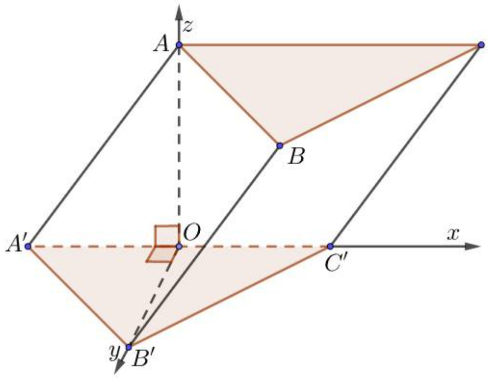
• Tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$,

$A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.

Lăng trụ xiên

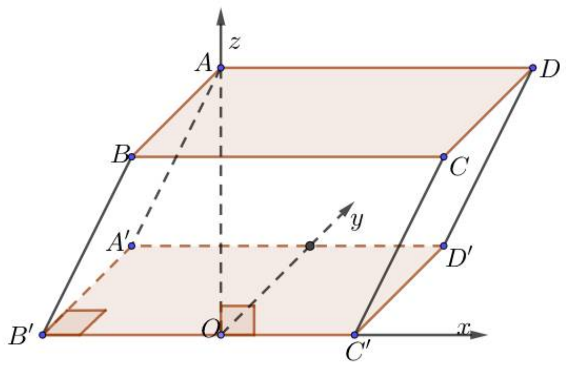
Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



• Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.

• Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

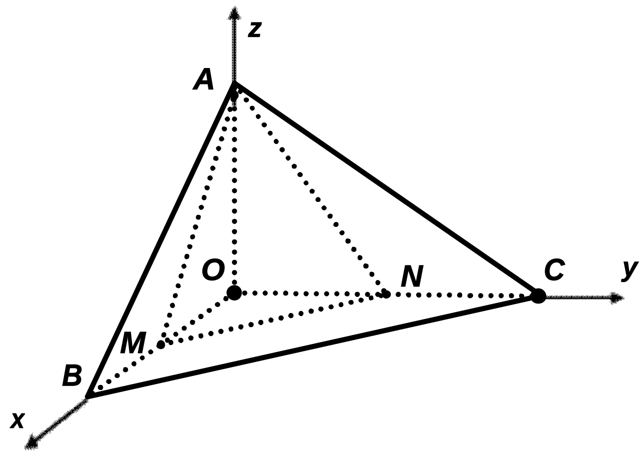
Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



• Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.

• Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

Bài 1. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 5, OB = 2, OC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



a) Tìm tọa độ các đỉnh của tứ diện $OABC$.

b) Tìm tọa độ các điểm M, N.

c) Tìm tọa độ các điểm G, K.

e) Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

f) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMN).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I, có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ và $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB)

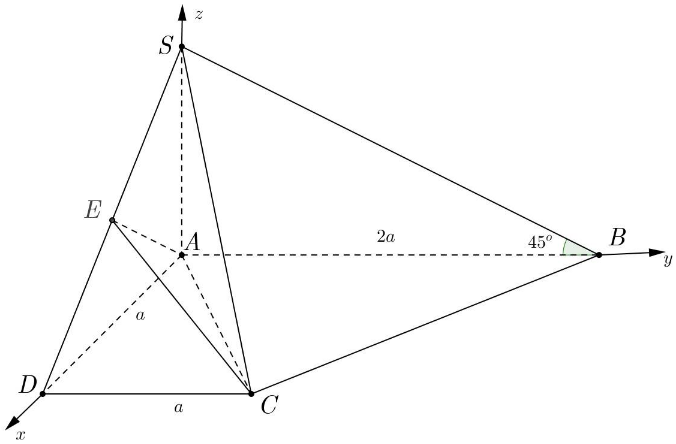
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD)

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

b) Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (GMN).

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45°, E là trung điểm của SD, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



a) Lập phương trình mặt phẳng (SAC) .

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AEC) .

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD = 2, AB = AC = 1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD.

a) Tính độ dài cạnh IG .

b) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AIG) .

Bài 7. Một công trường xây dựng nhà cao tầng đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Hãy kiểm tra tính song song hoặc vuông góc giữa các mặt kính (P), (Q), (R) (hình bên) của một tòa nhà biết các mặt phẳng có phương trình lần lượt là: $(P): 3x + y - z + 2 = 0$; $(Q): 6x + 2y - 2z + 11 = 0$; $(R): x - 3y + 1 = 0$.

Bài 8. Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức tường $(P),(Q),(R)$ (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + 2z - 3 = 0$, $(R): 2x + 4y - 4z - 19 = 0$.

a) Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P),(Q),(R)$ của tòa nhà.

b) Tính khoảng giữa hai bức tường (P) và (R) của tòa nhà.

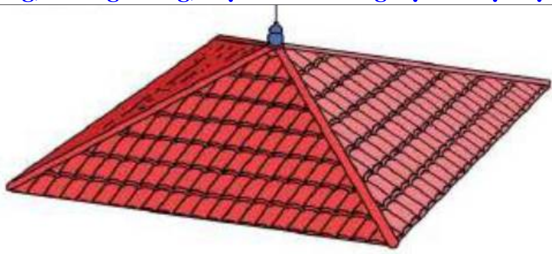
Bài 9. Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Bốn bức tường $(P),(Q),(R),(T)$ (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): 2x - y - z + 1 = 0$, $(Q): x + 3y - z - 2 = 0, (R): 4x - 2y - 2z + 9 = 0, (T): 2x + 6y - 2z + 15 = 0$.

a) Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P),(Q),(R),(T)$ của tòa nhà.

b) Tính khoảng giữa hai bức tường (Q) và (T) của tòa nhà.

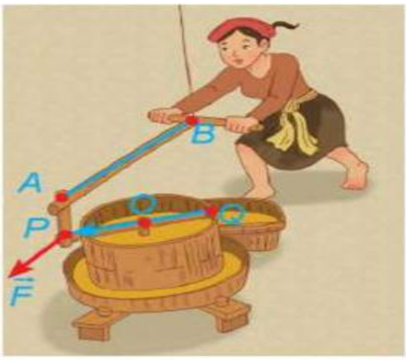
c) Tính chiều rộng bức tường (Q) của tòa nhà.

Bài 10. Bác An dự định làm bốn mái nhà của một ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp tứ giác đều và các mái kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng đó có làm được không?



Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, một ngôi nhà có sàn nhà thuộc mặt phẳng Oxy và trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng $z-1=0$, mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng $x+y+50z-100=0$. Hỏi trong 3 mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần nhà tầng 1, mái nhà tầng 2, hai mặt nào song song với nhau?

Bài 12. Xét một cối xay lúa trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét. Nếu tác động vào tại cối xay lúa (Ở vị trí P) một lực $\overrightarrow{F}$ thì moment lực $\overrightarrow{M}$ được tính bởi công thức $\overrightarrow{M}=\left[\overrightarrow{OP};\overrightarrow{F}\right]$ như hình minh họa. Trong quá trình xay, các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang. Vectơ lực $\overrightarrow{F}$ có giá song song với AB. Giải thích vì sao giá của vecto moment lực $\overrightarrow{M}$ có phương thẳng đứng?



PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=5, OB=2, OC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

A. $\frac{20}{3\sqrt{129}}$. **B.** $\frac{20}{\sqrt{129}}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45°, E là trung điểm của SD, $AB=2a$, $AD=DC=a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACE).

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** a. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM).

A. $d(B,(CDM))=2$. **B.** $d(B,(CDM))=2\sqrt{2}$.

C. $d(B,(CDM))=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $d(B,(CDM))=\sqrt{2}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $S(-1;6;2)$, $A(0;0;6)$, $B(0;3;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm S, B, H là

A. $x+5y+7z-10=0$. **B.** $x-5y-7z+15=0$.

C. $x+5y-7z-15=0$. **D.** $x-5y-7z-15=0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, trên cánh đồng pin mặt trời, một tấm pin nằm trong mặt phẳng $(P): x-2y+3z+1=0$, một tấm pin khác nằm trong mặt phẳng $(Q): 2x-4y+6z+1=0$ như hình bên dưới.

Nhận định nào sau đây sai?

A. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;3)$

B. Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến của $\overrightarrow{n_Q}=(2;-4;6)$

C. $(P)//(Q)$.

D. (P) cắt (Q)

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), trên cánh đồng pin mặt trời, một tấm pin nằm trong mặt phẳng $(P): 2x+y-2z-1=0$, một tấm pin khác nằm trong mặt phẳng $(Q): 6x+3y-6z+15=0$ như hình bên dưới.

Khoảng cách giữa hai pin mặt trời trên bằng bao nhiêu?

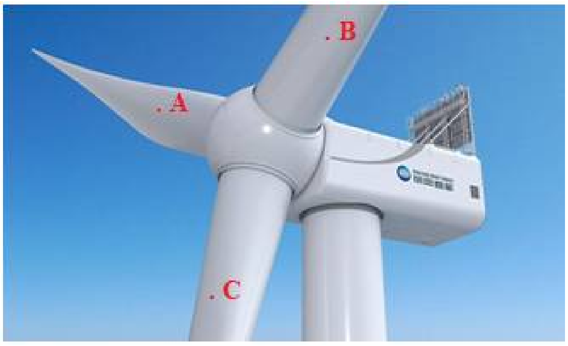
A. 1 mét. **B.** 2 mét.. **C.** 3 mét. **D.** 4 mét.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, trên cánh đồng pin mặt trời, một tấm pin nằm trong mặt phẳng $(Q): x+y-3z-2=0$, một tấm pin khác nằm trong mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;0;1)$ và song song với mặt phẳng (Q) như hình bên dưới.

Lập phương trình mặt phẳng (P)

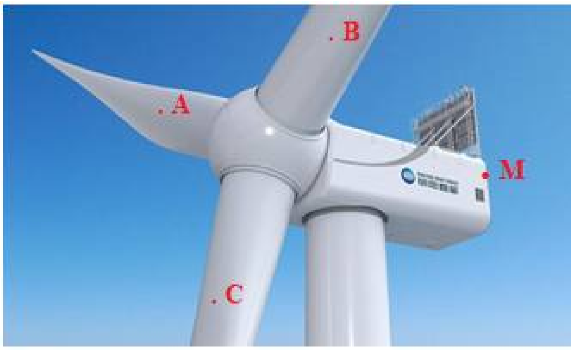
A. $x+y-3z+3=0$.
B. $x+y-3z+2=0$.
C. $x+y-3z-3=0$.
D. $x+y-3z-2=0$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, trên cánh đồng điện gió, một tuabin điện gió có ba cánh quạt cùng nằm trong một mặt phẳng (Q) và ba cánh quạt chứa ba điểm $A(1;0;-2), B(-3;1;1), C(5;5;-5)$ (như hình bên dưới). Lập phương trình mặt phẳng chứa ba cánh quạt của tuabin điện gió đó.



A. $3x+4z+5=0$.
B. $3x+2y+4z+5=0$.
C. $3x-2y+4z+5=0$.
D. $3x+4z-5=0$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), trên cánh đồng điện gió, một tuabin điện gió có ba cánh quạt cùng nằm trong một mặt phẳng (Q) và ba cánh quạt chứa ba điểm $A(1;-2;0); B(2;-1;1); C(1;1;2)$, ngoài ra có điểm $M(5;7;-8)$ nằm ở mép tuabin (như hình bên dưới). Khoảng cách từ điểm $M(5;7;-8)$ đến mặt phẳng chứa ba cánh quạt của tuabin là:



A. $13,3$ mét.
B. $12,3$ mét.
C. $10,3$ mét.
D. $11,3$ mét.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một căn phòng có bức tường nằm trong mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+5=0$ và một bóng điện có tọa độ $(1;-2;3)$ như hình bên dưới. Khoảng cách từ bóng điện đó đến bức tường là:

A. 3 mét. **B.** 2 mét. **C.** 4 mét. **D.** 1 mét.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là decimét), tọa độ hóa ba trái bida A, B, C ta được tọa độ ba điểm $A(1;2;0), B(4;2;0), C(7;4;0)$ như hình bên dưới.

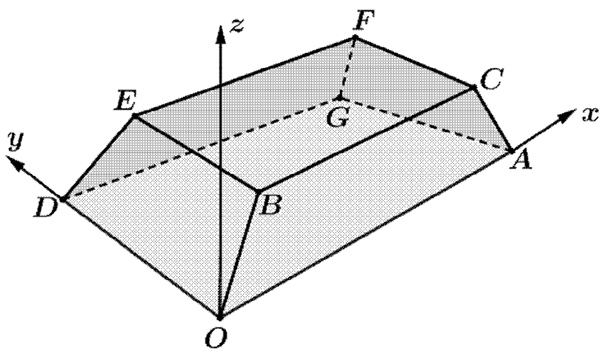
a) Khoảng cách giữa trái bida B với trái bida C bằng $3,6(dm)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của decimét)

b) Bạn Thanh Minh muốn thực hiện cú đánh sơn mỏng như sau: từ trái bida A, sơn mỏng qua trái bida B thì trái bida A không trúng trái bida C (cú đánh sơn mỏng là đánh trái bida A vào mép của trái bida B). Biết nếu ba trái bida A, B, C không thẳng hàng thì khi sơn mỏng, trái bida A sẽ trúng trái bida C.

c) Mặt phẳng đi qua ba trái bida A, B, C có phương trình là: $ax + y + cz + d = 0$. Khi đó $a + c + d = 4$.

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng đi qua ba trái bida A, B, C bằng $0,9(dm)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của decimét).

Câu 12. Hình vẽ dưới đây minh họa hình ảnh một tòa nhà trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết $A(50;0;0)$, $D(0;20;0)$, $B(4k;3k;2k)$ với $k > 0$ và mặt phẳng $(BCFE)$ có phương trình là $z = 3$.



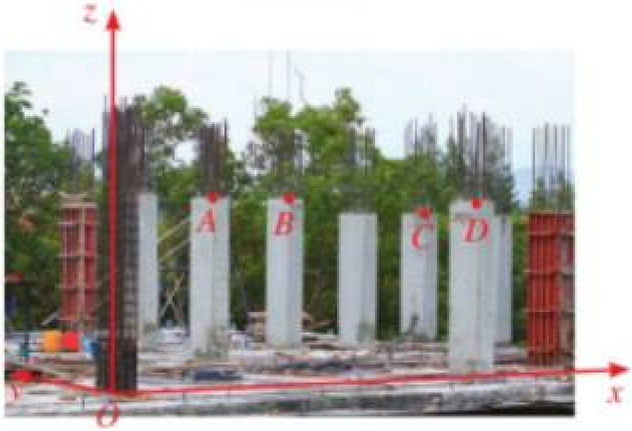
a) Độ dài đường chéo AD của sàn nhà bằng $54(m)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

b) Đỉnh B của trần nhà có tọa độ là $B\left(6;\dfrac{7}{2};3\right)$.

c) Phương trình mặt phẳng của bức tường $OACB$ có dạng: $ax-2y+cz+d=0$. Khi đó $2a+3c+4d=8$.

d) Khoảng cách từ điểm D đến bức tường $OACB$ có bằng $11,3(m)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của mét).

Câu 13. Hình dưới đây minh họa một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3)$, $B(4;3;3)$, $C(6;3;2,5)$, $D(4;0;2,8)$.



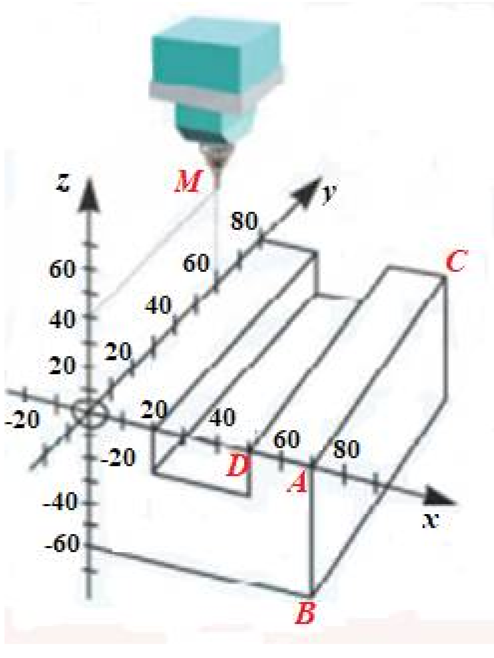
a) Khoảng cách hai trụ A và B bằng $2,83(m)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét).

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $x+by+cz+d=0$. Khi đó $b+2c-d=-6$.

c) Bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng.

d) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) bằng $0,4(m)$.

Câu 14. Phần mềm của máy tiện kĩ thuật số CNC (Computer Numerical Control) đang biểu diễn một chi tiết máy như hình vẽ dưới đây:



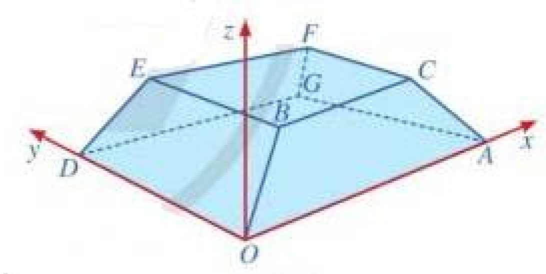
a) Tọa độ các điểm A, B, C, D là $A(70;0;0)$, $B(70;0;-60)$, $C(70;80;-60)$, $D(50;0;0)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm C và D bằng $82,5(m)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của mét).

c) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $x+70=0$.

d) Cho biết đầu mũi tiện đang đặt tại điểm $M(0;60;40)$. Khi đó, khoảng cách từ đầu mũi tiện đến mặt phẳng (ABC) bằng $70(m)$.

Câu 15. Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100m$, chiều rộng $OD=60m$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$.



a) Tọa độ các điểm A, D, G là $A(100;0;0), D(0;60;0), G(100;60;8)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm B và D bằng $51,6(m)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của mét).

c) Phương trình mặt phẳng $(OACB)$ có dạng: $ax+y+cz+d=0$. Khi đó $2025a-2c-2024d=20$.

d) Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ bằng $60,5(m)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của mét).

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD.

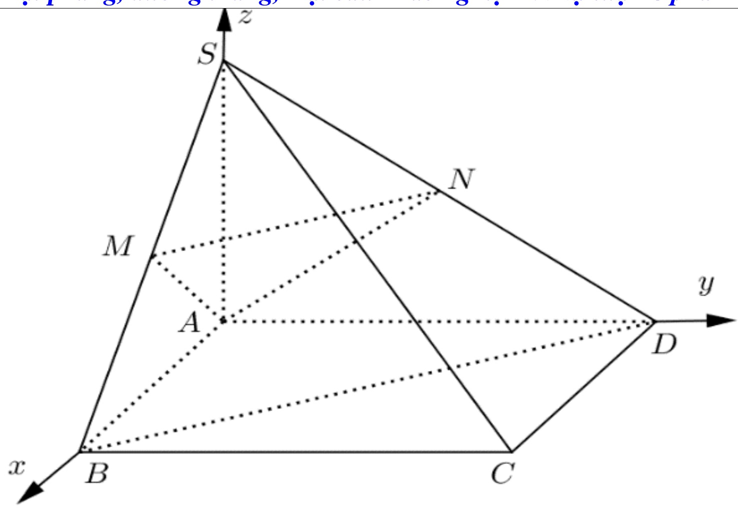
a) Điểm M có tọa độ là $M(0;2;2)$.

b) Điểm C có tọa độ là $C(2;4;0)$.

c) Phương trình mặt phẳng (AMC) có dạng: $ax-y+cz+d=0$. Khi đó $a+2024c-2025d=2025$.

d) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMG) bằng $2,93$ (kết quả làm tròn đến phần trăm).

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác AMN. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới.



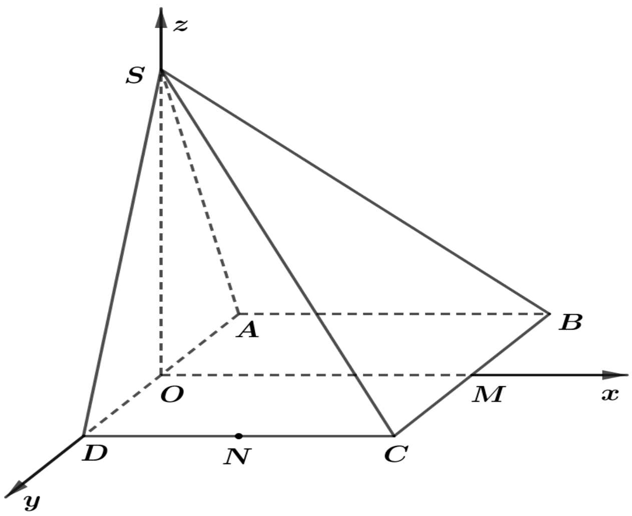
a) Hai điểm M,N có tọa độ là $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$ và $N\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

b) Điểm G có tọa độ là $G\left(\frac{a}{6};\frac{a}{6};\frac{a}{6}\right)$

c) Phương trình mặt phẳng (AMC) có dạng: $mx+by-z+d=0$. Khi đó $2026m-2025b+2024d=4049$.

d) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AMN) bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm cạnh AD như hình vẽ dưới.



a) Tọa độ các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$ là:

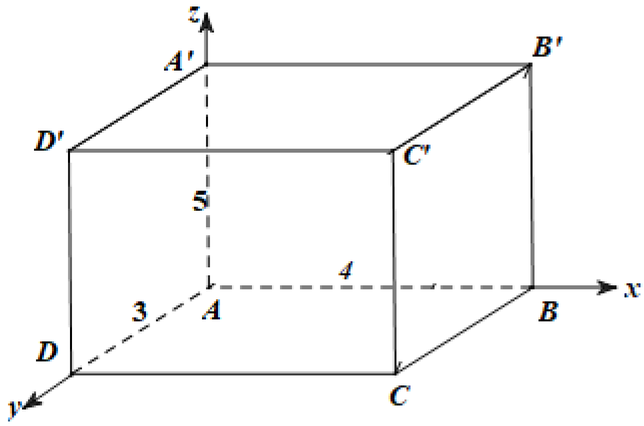
$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right),B\left(a;-\frac{a}{2};0\right),C\left(a;\frac{a}{2};0\right),D\left(0;\frac{a}{2};0\right),S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

b) Tọa độ của hai điểm M,N là $M(a;0;0)$ và $N\left(\frac{a}{2};a;0\right)$.

c) Phương trình mặt phẳng (SMN) có dạng: $mx+ny+pz-a\sqrt{3}=0$ $(m,n,p\in\mathbb{R})$. Khi đó $m+n+p=2$.

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (SMN) bằng $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Câu 19. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB=4(m), AD=3(m), AA'=5(m)$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới.



a) Tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là:

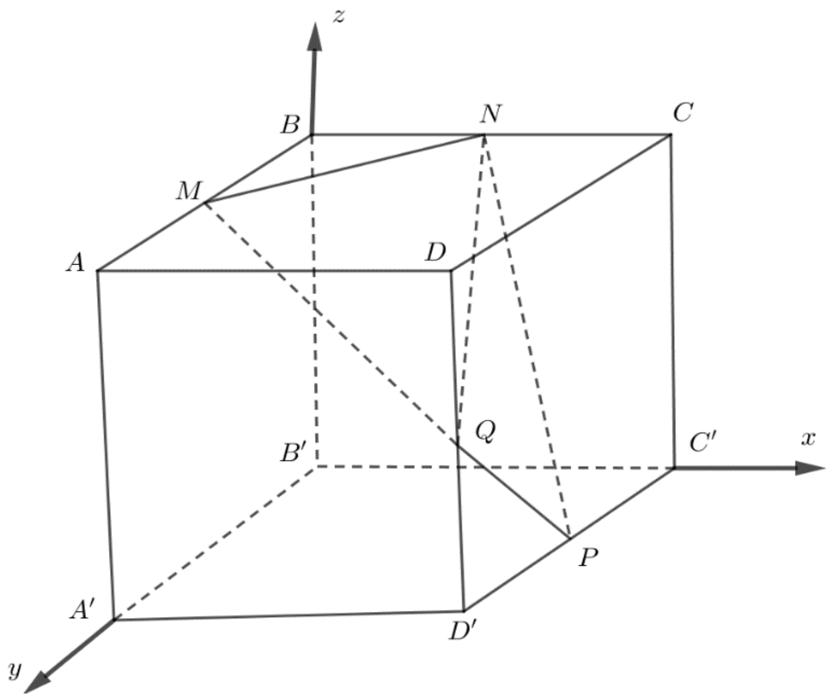
$A(00;0), B(4;0;0), C(4;3;0), D(0;0;3), A'(00;5), B'(4;0;5), C'(4;3;5), D'(0;3;5)$.

b) Tọa độ của tâm hình chữ nhật $ABCD$ là $\left(2;\dfrac{3}{2};0\right)$.

c) Phương trình mặt phẳng (ACD') có dạng: $ax+by+12z+d=0$. Khi đó $a-b-d=35$.

d) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và mặt phẳng $(A'BC')$ bằng $2{,}16(m)$(kết quả làm tròn đến phần trăm của mét).

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



a) Tọa độ các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$B'(0\,0;0), A'(0;1;0), D'(1;1;0), C'(1;0;0), B(0\,0;1), A(0;1;1), D(1;1;1), C(1;0;1)$,

b) Tọa độ các điểm M, N, P, Q lần lượt là $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $P\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $Q\left(1;\frac{1}{2};1\right)$.

c) Phương trình mặt phẳng (MNP) có dạng: $ax+by+cz-3=0$. Khi đó $a+b+c=6$.

d) Khoảng cách từ điểm Q đến mặt phẳng (MNP) bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimét), phần mềm điều khiển máy in 3D cho biết đầu in phun của máy đang đặt tại điểm $M(5;6;30)$. Tính khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật in có phương trình $z-2=0$.

Trả lời: ………………..

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có sàn nhà nằm trên mặt phẳng (Oxy). Hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x-2y+5=0$ và $(Q): x-2y-3z+20=0$. Hỏi là chiều cao của ngôi nhà tính từ sàn nhà lên nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 23. Một ngôi nhà có các bậc thang của cầu thang đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là decimét). Biết hai mặt bậc thang song song nằm trên hai mặt phẳng phân biệt: $(P): 2x-y+2z+8=0$ và $(Q): 2x-y+2z+2=0$. Khoảng cách giữa hai bậc thang này bằng bao nhiêu decimét?

Trả lời: ………………..

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-4=0$. Khoảng cách giữa hai mái nhà này bằng bao nhiêu mét?

Trả lời: ………………..

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà song song với nhau và lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 3x-2y+z-3=0$ và $(Q): 3x+by+cz+d=0$ $(b,c,d\in\mathbb{Z})$. Điểm $M(2;1;-3)$ thuộc mái nhà nằm trên mặt phẳng (Q). Giá trị của biểu thức $b+2025c+2024d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà song song với nhau và lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$ và $(Q): ax+by-z+d=0$ $(a,b,d\in\mathbb{Z})$. Biết khoảng cách hai mái nhà này bằng $\sqrt{3}(m)$. Khi đó, giá trị của biểu thức $2025a-2024b+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x+y+2z+1=0$ và $(Q): x+y-z+2=0$. Hai mái nhà này hợp với nhau một góc bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 2x + my + 2mz - 9 = 0$ và $(Q): 6x - y - z - 10 = 0$. Tìm giá trị m để hai mái nhà này vuông góc với nhau.

Trả lời: ………………..

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và $(Q): mx + y - 2z + 1 = 0$. Tìm giá trị m để hai mái nhà này vuông góc với nhau.

Trả lời: ………………..

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 5x + my + z - 5 = 0$ và $(Q): nx - 3y - 2z + 7 = 0$. Để hai mái nhà này song song với nhau thì giá trị $T = 2m - n$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

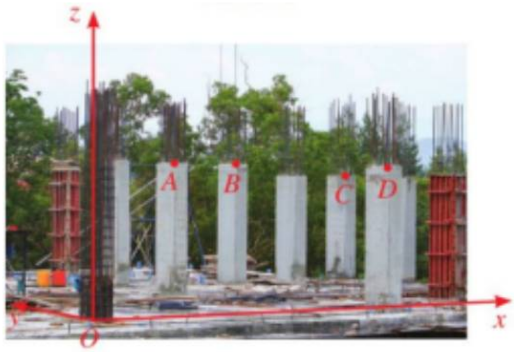
Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 2x+my+3z-5=0$ và $(Q): nx-8y-6z+2=0$. Để hai mái nhà này song song với nhau thì giá trị $T=2m+n$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một camera được đặt tại điểm $A(2;1;5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+13=0$. Biết góc quan sát ngang của camera là $120°$, hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai của mét)

Trả lời: ………………..

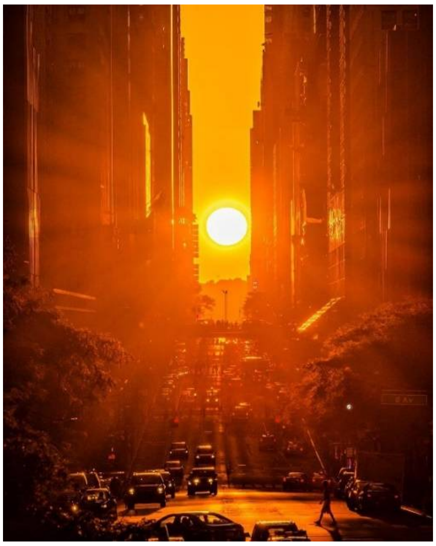
Câu 33. Hình bên dưới minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét).



Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều cạnh đáy dài $1m$ và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3), B(4;3;3), C(6;3;3)$, $D(4;0;2,5)$. Giám sát công trình tính toán nhận thấy A, B, C, D không đồng phẳng, yêu cầu bên nhà thầu tính khối lượng bê tông cần bổ sung để độ cao các cột bê tông bằng nhau. Thể tích bê tông cần bổ sung bằng bao nhiêu centimét khối? (giả sử thể tích phần cốt thép là 3% trên một mét khối bê tông).

Trả lời: ………………..

Câu 34. Manhattanhenge (Hình 1) là một sự kiện diễn ra khi Mặt Trời mọc hoặc khi Mặt Trời lặn nằm thẳng hàng với các tuyến phố Đông - Tây thuộc mạng lưới đường phố chính tại quận Manhattan của thành phố New York. Khi mặt trời lặn, tia sáng song song mặt đất lệch một góc khoảng $38°$ so với hướng tây (Hình 2).



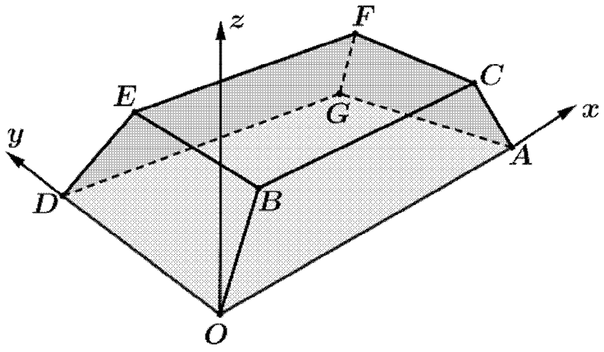
Hình 1

Hình 2

Giả sử mặt tiền các tòa nhà hai bên đường nằm trong 2 mặt phẳng song song cách nhau 30 m và vuông góc với mặt đất. Biết rằng mặt phẳng phía bắc đi qua gốc O của hệ trục $Oxyz$, với tia Oz vuông góc với mặt đất và hướng lên trên. Phương trình mặt phẳng thứ hai có dạng $(Q): x + ay + bz + c = 0$ với $c = \dfrac{m}{\sin n°}$. Tính $T = 3m - 2n$.

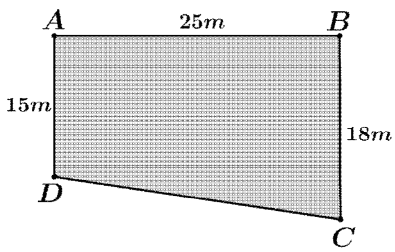
Trả lời: ………………..

Câu 35. Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100$ m, chiều rộng $OD = 60$ m và tọa độ điểm $B(10;10;8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax + y + cz + d = 0$. Tính giá trị biểu thức $a + c + d$.



Trả lời: ………………..

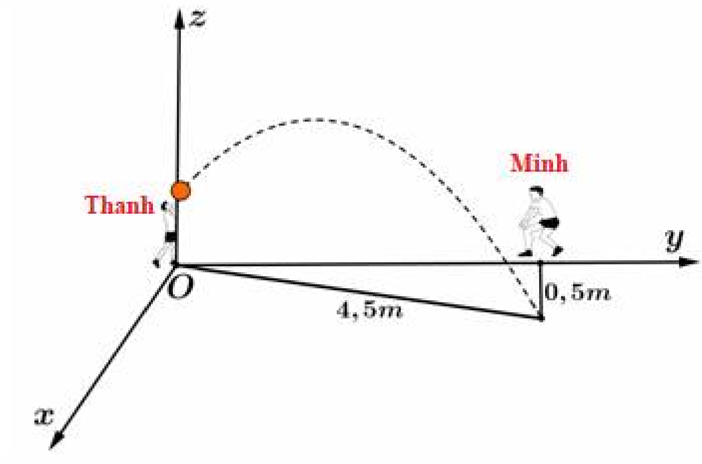
Câu 36. Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D, như hình vẽ:



Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25(m)$, $AD = 15(m)$, $BC = 18(m)$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10(cm)$, $a\ (cm)$, $6(cm)$ tương ứng. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

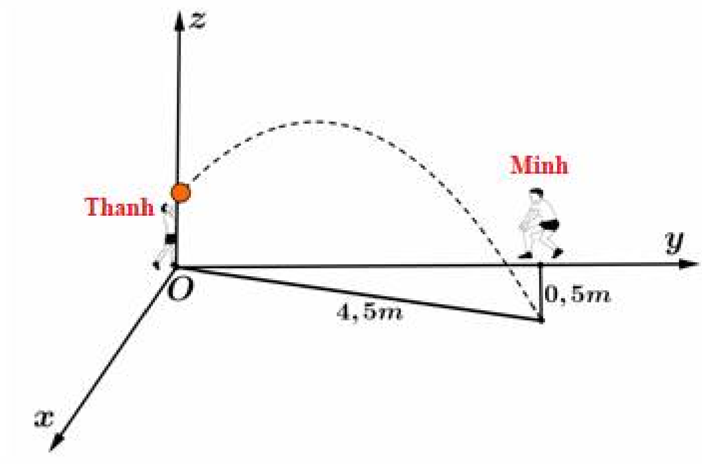
Câu 37. Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Thanh và Minh đang tập chuyền bóng cho nhau. Thanh ném bóng cho Minh đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Thanh và rơi xuống vị trí cách Minh $0,5(m)$ và cách Thanh $4,5(m)$ được mô tả bằng hình vẽ bên dưới:



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax - y + cx + d = 0$ và vuông góc với mặt đất. Khi đó giá trị của $a\sqrt{5} + 2024c + 2025d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 38. Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Thanh và Minh đang tập chuyền bóng cho nhau. Thanh ném bóng cho Minh đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Thanh và rơi xuống vị trí cách Minh $0,5(m)$ và cách Thanh $4,5(m)$ được mô tả bằng hình vẽ bên dưới:



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cx + d = 0$ và vuông góc với mặt đất. Khoảng cách từ bạn Minh đến mặt phẳng (α)bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai của mét)

Trả lời: ………………..

Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh $1(cm)$. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD)(làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimét).

Trả lời: ………………..

Câu 40. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ biết rằng $AB = 6(cm), AD = 2(cm)$. Gọi ba điểm M, N, P lần lượt là trung điểm DE, DF, BC. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên dưới. Gọi điểm

S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimét).

Trả lời: ………………..

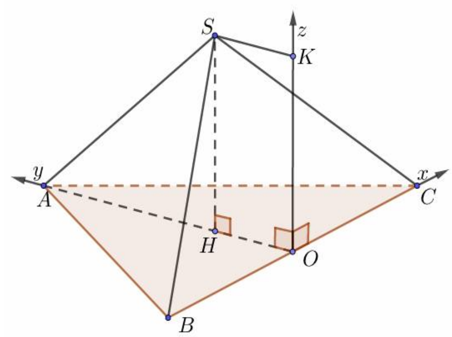
CHỦ ĐỀ 4
ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG THỰC TIỄN

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

1. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH CHÓP ĐẶC BIỆT

Hình chóp đều

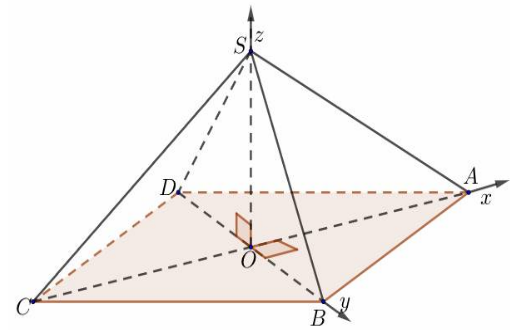
Hình chóp tam giác đều



- Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, đặt $AB=1$.
- Dựng hệ trục như hình vẽ .
- Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$B\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $S\left(0;\underbrace{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}_{=OH};\underbrace{OK}_{=SH}\right)$.

Hình chóp tứ giác đều

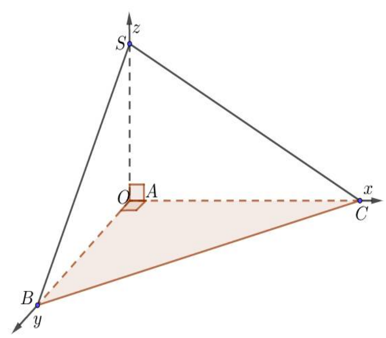


- Chọn hệ trục như hình, đặt $AB=1$.
- Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(\underbrace{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{=OA};0;0\right)$, $B\left(0;\underbrace{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$,

$C\left(\underbrace{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{=-OA};0;0\right)$, $D\left(0;\underbrace{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$, $S(0;0;SO)$.

Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy

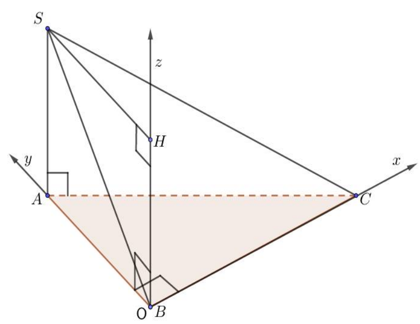
Đáy là tam giác vuông tại A



- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $A\equiv O(0;0;0)$,

$B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là tam giác vuông tại B

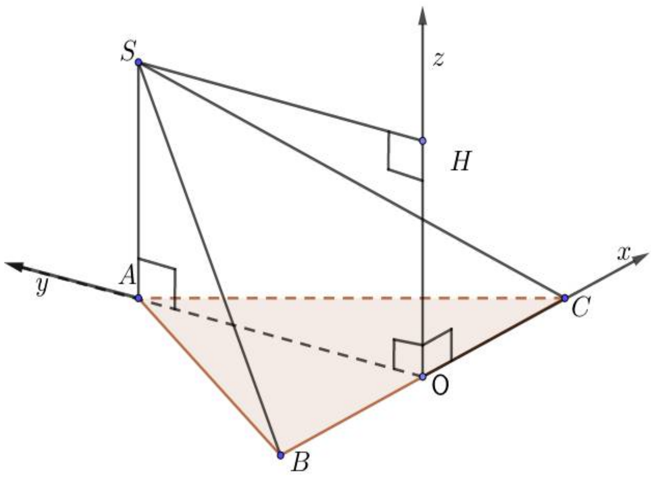


- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $B\equiv O(0;0;0)$, $A(0;AB;0)$,

$C(BC,0;0)$, $S\left(0;AB;\underbrace{BH}_{=SA}\right)$.

<table>
<tr>
<td>

Đáy là tam giác đều



• Gọi O là trung điểm BC.

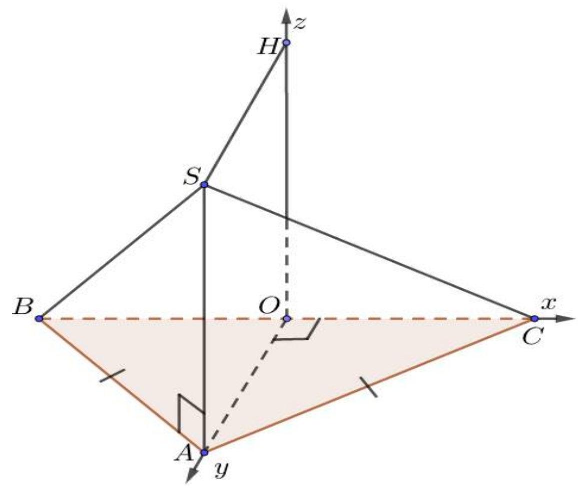
• Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = 1$.

• Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$B\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $S\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

</td>
<td>

Đáy là tam giác cân tại A



• Gọi O là trung điểm BC.

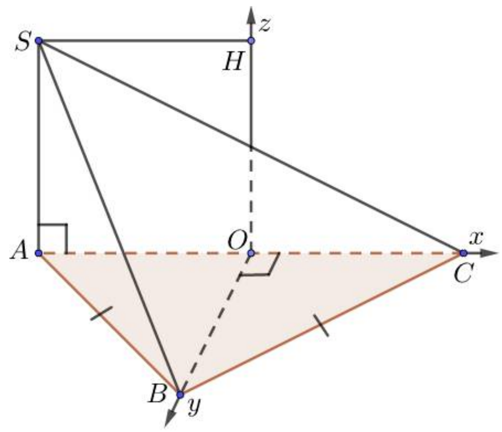
• Chọn hệ trục như hình vẽ.

• Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,

$B(-OB;0;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Đáy là tam giác cân tại B



• Gọi O là trung điểm AC.

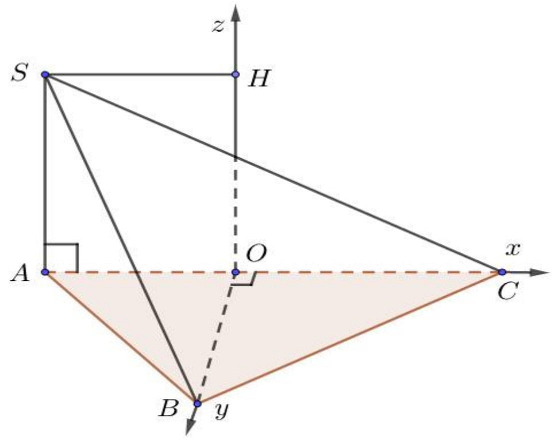
• Chọn hệ trục như hình vẽ.

• Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$,

$B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

</td>
<td>

Đáy là tam giác thường



• Dựng đường cao BO của ΔABC.

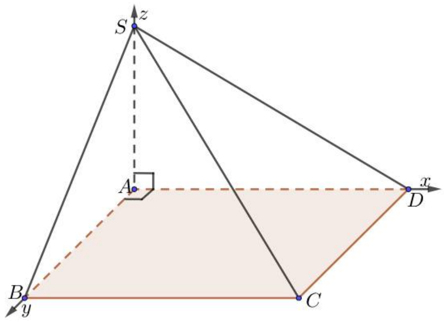
• Chọn hệ trục như hình vẽ.

• Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$,

$B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

</td>
</tr>
</table>

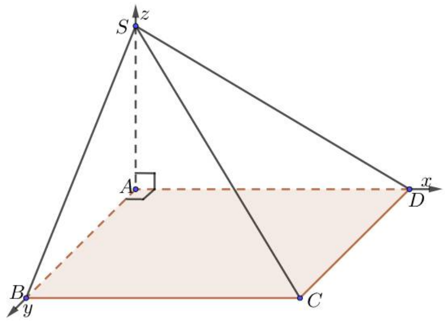
Đáy là hình vuông



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = 1$.
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;1;0)$,

$C(1;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

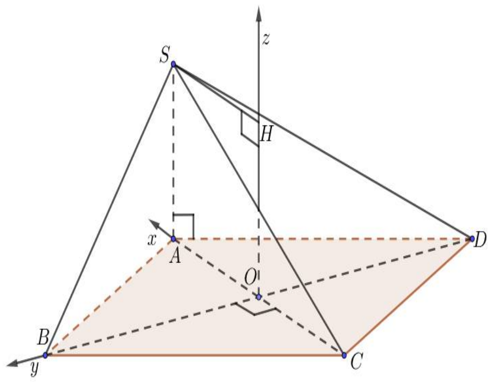
Đáy là hình chữ nhật



- Chọn hệ trục như hình vẽ
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$,

$C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

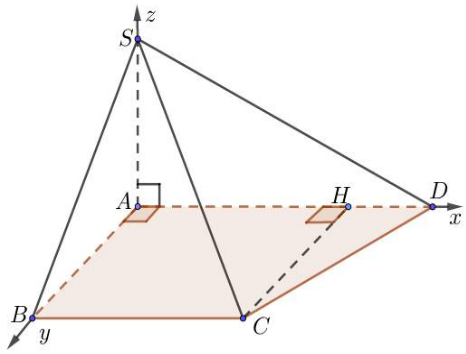
Đáy là hình thoi



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$,

$C(-OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $S\left(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là hình thang vuông

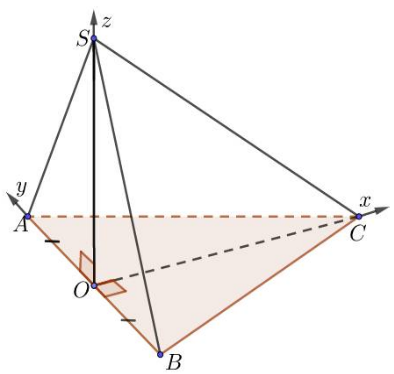


- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$,

$C(AH;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

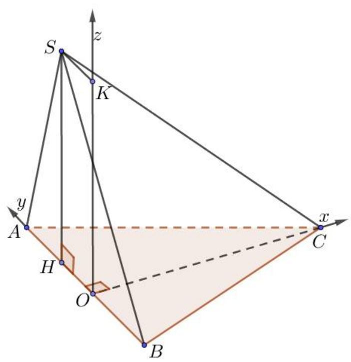
Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,

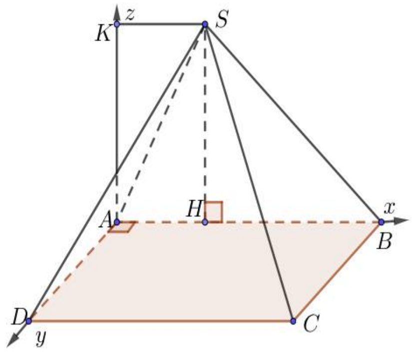
$B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



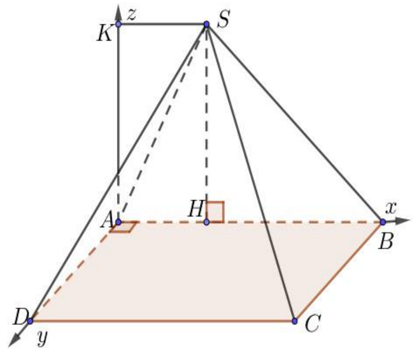
- Vẽ đường cao CO trong ΔABC, chọn hệ trục như hình.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$,

$C(OC;0;0)$, $S(0;OH;OK)$

<table>
<tr><th>Đáy là hình vuông</th><th>Đáy là hình chữ nhật</th></tr>
<tr><td>


• Chọn hệ trục như hình

• Tọa độ $A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0)$,

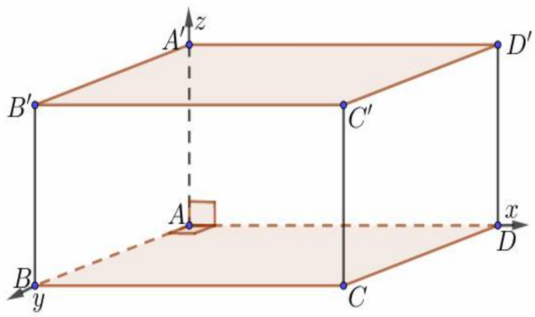
$D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$
</td><td>


• Chọn hệ trục như hình

• Tọa độ $A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0)$,

$D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$
</td></tr>
</table>

2. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

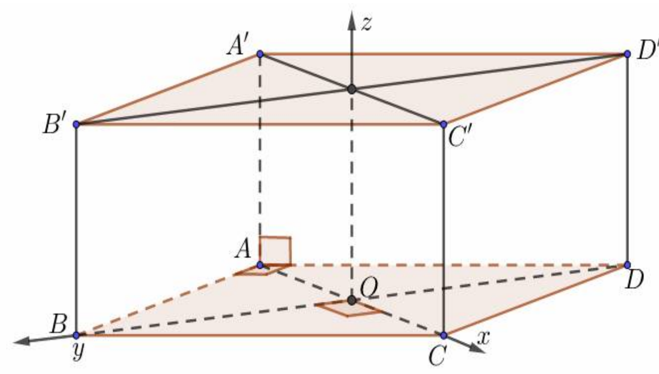
<table>
<tr><th colspan="2">Lăng trụ đứng</th></tr>
<tr><th>Hình lập phương, hình hộp chữ nhật</th><th>Lăng trụ đứng đáy là hình thoi</th></tr>
<tr><td>


• Dựng hệ trục như hình vẽ.

• Tọa độ điểm:

$A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$,

$D(AD;0;0), A'(0;0;AA'), B'(0;AB;AA')$,

$C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.
</td><td>


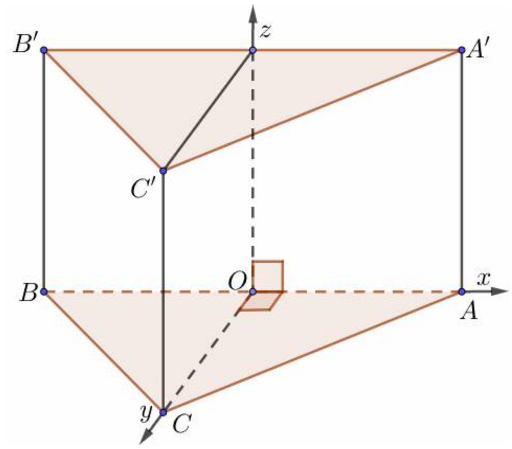
• Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình.

• Tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(OC;0;0)$,

$D(0;-OD;0)$, $A'(-OA;0;AA')$, $B'(0;OB;AA')$,

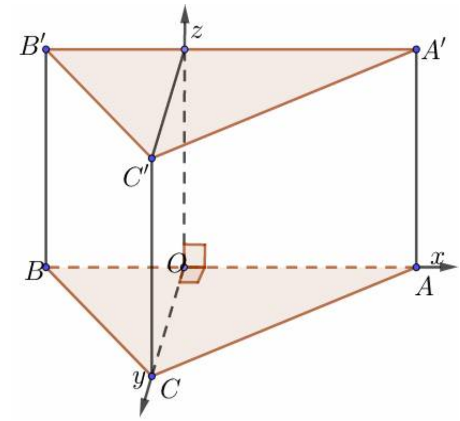
$C'(OC;0;CC')$, $D'(0;-OD;DD')$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<th>Lăng trụ có đáy tam giác đều hoặc cân</th>
<th>Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường</th>
</tr>
<tr>
<td>


• Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ .

• Tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A\left(\frac{AB}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right)$, $C(0;OC;0)$,

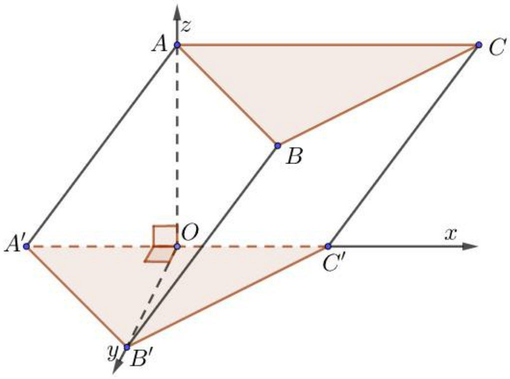
$A'(OA;0;AA')$, $B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right)$, $C'(0;OC;CC')$.
</td>
<td>


• Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ .

• Tọa độ điểm:

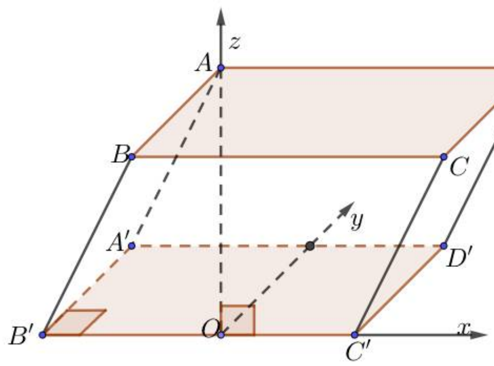
$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$,

$A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Lăng trụ xiên</td>
</tr>
<tr>
<td>
Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



• Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.

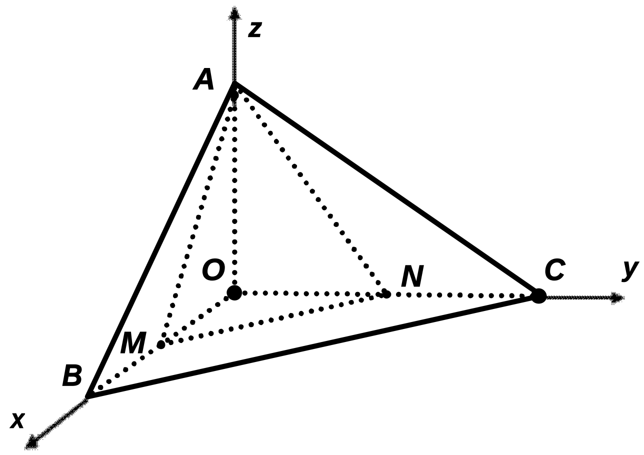
• Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.
</td>
<td>
Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



• Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.

• Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.
</td>
</tr>
</table>

Bài 1. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 5, OB = 2, OC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



a) Tìm tọa độ các đỉnh của tứ diện $OABC$.

b) Tìm tọa độ các điểm M, N.

c) Tìm tọa độ các điểm G, K.

e) Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

f) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMN).

Lời giải

a) Từ hình vẽ ta có:

Ta có $O(0;0;0), A(0;0;5), B(2;0;0), C(0;4;0)$,

b) M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$.

c) G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

K là trọng tâm tam giác AMN nên $K\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$

d) Mặt phẳng (ABC) cắt ba trục tọa độ $B(2;0;0), C(0;4;0), A(0;0;5)$nên theo phương trình mặt chắn, ta có:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1 \Leftrightarrow 10x+5y+4z-20=0$$

e) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMN).

$A(0;0;5)$ $M(1;0;0)$ $N(0;2;0)$

Ta có:

$\overrightarrow{AM}=(1;0;-5)$

$\overrightarrow{AN}=(0;2;-5)$

Mặt phẳng (AMN) có hai chỉ phương $\overrightarrow{AM}=(1;0;-5),\overrightarrow{AN}=(0;2;-5)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=(10;5;2)$

Phương trình mặt phẳng (AMN) đi qua $A(0;0;5)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(10;5;2)$ là:

$10(x-0)+5(y-0)+2(z-5)=0\Leftrightarrow 10x+5y+2z-10=0$

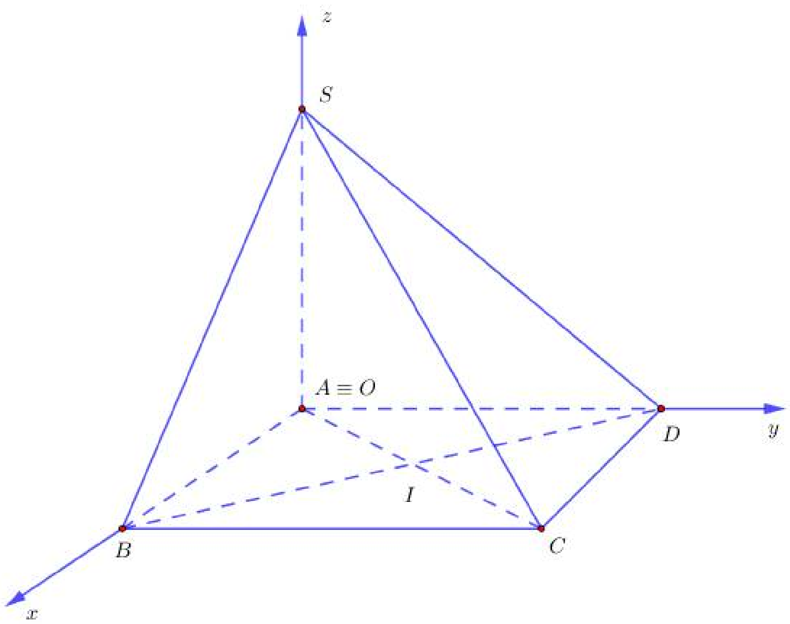
Do đó khoảng cách từ $B(2;0;0)$ đến mặt phẳng (AMN) là:

$$d\left(B,(AMN)\right)=\frac{|10.2+5.0+2.0-10|}{\sqrt{10^2+5^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{129}}=\frac{10\sqrt{129}}{129}$$

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I, có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ và $\tan\alpha=\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB)

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a.

Ta có $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\ SI\perp BD\\ AI\perp BD\end{cases}\Rightarrow\left((SBD);(ABCD)\right)=(SI;AI)=\widehat{SIA}$.

Ta có $\tan\alpha=\tan\widehat{SIA}=\dfrac{SA}{AI}\Leftrightarrow SA=a$.

Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)\Rightarrow I\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$

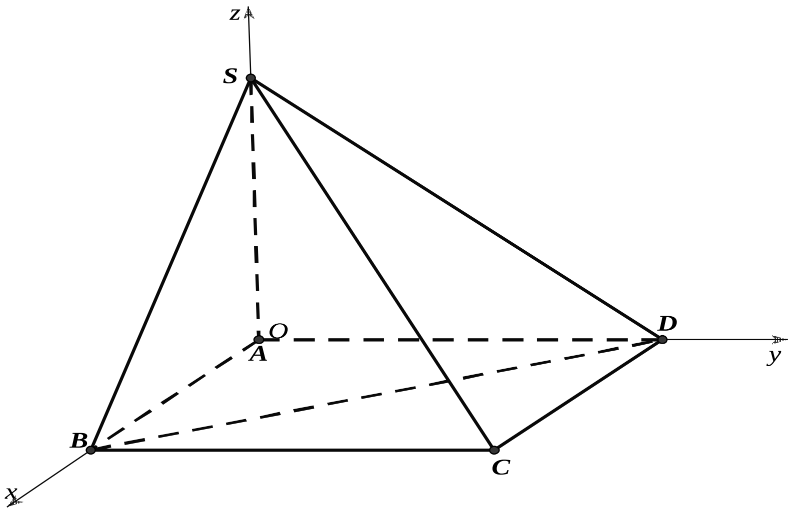
Mặt phẳng (SAB) có phương trình: $z=0$

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) là: $d\left(I;(SAB)\right)=\dfrac{\left|\frac{a}{2}\right|}{1}=\dfrac{a}{2}$

Chú ý: Để tính tọa độ các điểm và các vectơ ta chọn $a=1$ để bài toán đơn giản hơn.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD)

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có:

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C\left(a;a\sqrt{3};0\right)$, $D\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $S(0;0;a)$.

Ta có:

$\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)=a(1;0;-1)$

$\overrightarrow{SD}=\left(0;a\sqrt{3};-a\right)=a\left(0;\sqrt{3};-1\right)$

Mặt phẳng (SBD) có hai chỉ phương $\overrightarrow{SB}=(1;0;-1),\overrightarrow{SD}=\left(0;\sqrt{3};-1\right)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right]=\left(-\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right)$

Phương trình mặt phẳng (SBD) đi qua $S(0;0;a)$ và có vectơ pháp tuyến $\left(-\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right)$ là:

$-\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}(z-a)=0\Leftrightarrow\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}z+a\sqrt{3}=0$

Do đó khoảng cách từ $C\left(a;a\sqrt{3};0\right)$ đến mặt phẳng (SBD) là:

$$d\left(C,(SBD)\right)=\frac{\left|\sqrt{3}.a-a\sqrt{3}-\sqrt{3}.0+a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

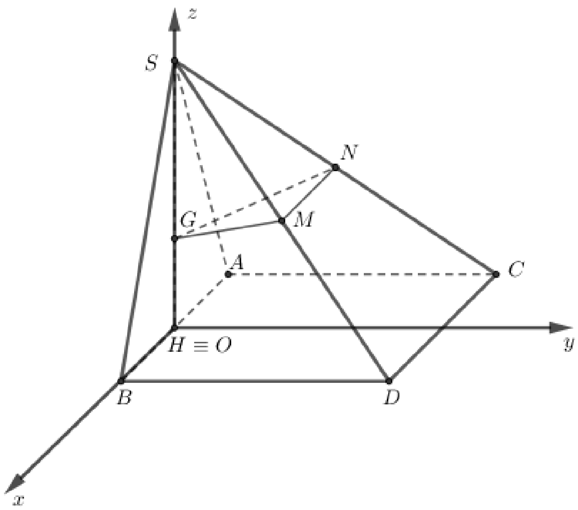
Chú ý: Để tính tọa độ các điểm và các vectơ ta chọn $a=1$ để bài toán đơn giản hơn.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M,N lần lượt là trung điểm của SC,SD.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

b) Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (GMN).

Lời giải



C

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

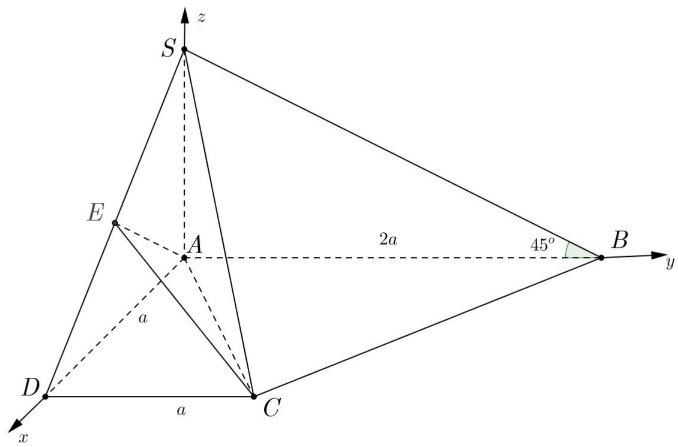
$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ A\left(\frac{-a}{2};0;0\right);\ B\left(\frac{a}{2};0;0\right);C\left(\frac{a}{2};a;0\right);\ D\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$$

suy ra $G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$; $M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

b) Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (GMN).

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45°, E là trung điểm của SD, $AB=2a$, $AD=DC=a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



a) Lập phương trình mặt phẳng (SAC) .

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AEC) .

Lời giải

Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB $\Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\widehat{SBA}=45^{\circ}$.

Tam giác SAB vuông cân tại A $\Rightarrow SA=2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$, $E\left(\frac{a}{2};0;a\right)$.

a) Lập phương trình mặt phẳng (SAC) .

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AEC) .

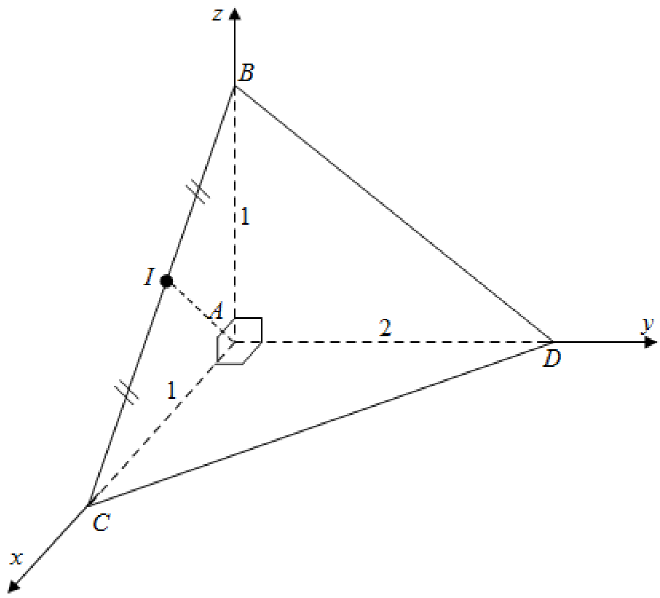
Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD=2, AB=AC=1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD.

a) Tính độ dài cạnh IG .

b) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AIG) .

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



Vì tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, nên ta chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ (với A là gốc tọa độ, đường thẳng AC nằm trên trục Ax, AD nằm trên trục Ay và AB nằm trên trục Az).

Từ đó suy ra: $A(0;0;0)$, $B(0;0;1)$ vì $B\in Az$, $C(1;0;0)$ vì $C\in Ax$, $D(0;2;0)$ vì $D\in Ay$.

Vì I là trung điểm của BC nên $I\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$.

G là trọng tâm của tam giác $ABD \Rightarrow G\left(\frac{1}{6};0;\frac{1}{2}\right)$

a) Tính độ dài cạnh IG .

b) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AIG) .

Bài 7. Một công trường xây dựng nhà cao tầng đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Hãy kiểm tra tính song song hoặc vuông góc giữa các mặt kính (P), (Q), (R) (hình bên) của một tòa nhà biết các mặt phẳng có phương trình lần lượt là: $(P): 3x+y-z+2=0$; $(Q): 6x+2y-2z+11=0$; $(R): x-3y+1=0$.

Lời giải

Các mặt phẳng (P), (Q) và (R) lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(3;1;-1)$, $\vec{n}_Q=(6;2;-2)$ và $\vec{n}_R=(1;-3;0)$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} \vec{n}_P=\frac{1}{2}\vec{n}_Q \\ 2\neq\frac{1}{2}.11 \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

Mặt khác $\vec{n}_P.\vec{n}_R=0 \Rightarrow (P)\perp(R)$ và $\vec{n}_Q.\vec{n}_R=0 \Rightarrow (Q)\perp(R)$.

Bài 8. Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức tường $(P),(Q),(R)$ (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): x+2y-2z+1=0$, $(Q): 2x+y+2z-3=0$, $(R): 2x+4y-4z-19=0$.

a) Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P),(Q),(R)$ của tòa nhà.

b) Tính khoảng giữa hai bức tường (P) và (R) của tòa nhà.

Lời giải

a) Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P),(Q),(R)$ của tòa nhà.

$(P): x+2y-2z+1=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;2;-2)$

$(Q): 2x+y+2z-3=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(2;1;2)$

$(R): 2x+4y-4z-19=0$. có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_R=(2;4;-4)$

Ta có $\vec{n}_R=(2;4;-4)=2(1;2;-2)\Rightarrow \vec{n}_R=2\vec{n}_P$ nên hai bức tường (P) và (R) song song nhau

$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=1.2+2.1+(-2).2=0\Rightarrow \vec{n}_P\perp\vec{n}_Q$ nên bức tường (Q) vuông góc với hai bức tường (P) và (R),

b) Tính khoảng giữa hai bức tường (P) và (R) của tòa nhà.

Chọn điểm $M(-1;0;0)\in(P)$

Do hai bức tường (P) và (R) song song nhau nên:

$$d((P),(R))=d(M,(R))=\frac{|2.(-1)+4.0-4.0-19|}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{21}{6}=3,5m$$

Bài 9. Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Bốn bức tường $(P),(Q),(R),(T)$ (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): 2x-y-z+1=0$, $(Q): x+3y-z-2=0, (R): 4x-2y-2z+9=0, (T): 2x+6y-2z+15=0$.

a) Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P),(Q),(R),(T)$ của tòa nhà.

b) Tính khoảng giữa hai bức tường (Q) và (T) của tòa nhà.

c) Tính chiều rộng bức tường (Q) của tòa nhà.

Lời giải

a) Hãy kiểm tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường $(P),(Q),(R),(T)$ của tòa nhà.

$(P): 2x-y-z+1=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(2;-1;-1)$

$(Q): x+3y-z-2=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(1;3;-1)$

$(R): 4x-2y-2z+9=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_R=(4;-2;-2)$

$(T): 2x+6y-2z+15=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_T=(2;6;-2)$

Ta có:

$\vec{n}_R=(4;-2;-2)=2(2;-1;-1)\Rightarrow \vec{n}_R=2\vec{n}_P$ nên hai bức tường (P) và (R) song song nhau

$\vec{n}_T=(2;6;-2)=2(1;3;-1)\Rightarrow \vec{n}_T=2\vec{n}_Q$ nên hai bức tường (T) và (Q) song song nhau

$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=2.1+(-1).3+(-1).(-1)=0\Rightarrow \vec{n}_P\perp\vec{n}_Q$ nên bức tường (Q) vuông góc với hai bức tường (P) và (R)

$\vec{n}_R.\vec{n}_Q=4.1+(-2).3+(-2).(-1)=0\Rightarrow \vec{n}_R\perp\vec{n}_Q$ nên bức tường (R) vuông góc với hai bức tường (Q) và (T)

b) Tính khoảng giữa hai bức tường (Q) và (T) của tòa nhà.

Chọn điểm $M(2;0;0)\in(Q)$

Do hai bức tường (Q) và (T) song song nhau nên:

$$d((Q),(T))=d(M,(T))=\frac{|2.2+6.0-2.0+15|}{\sqrt{4+36+4}}=\frac{19}{\sqrt{44}}\approx 2,9m$$

c) Tính chiều rộng bức tường (Q) của tòa nhà.

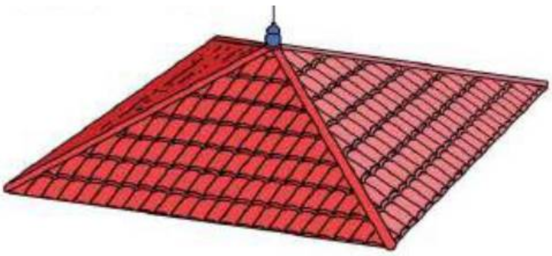
Do hai bức tường (P) và (R) song song nhau nên chiều rộng bức tường (Q) là khoảng cách giữa hai bức tường (P) và (R).

Chọn điểm $N(0;0;1)\in(P)$

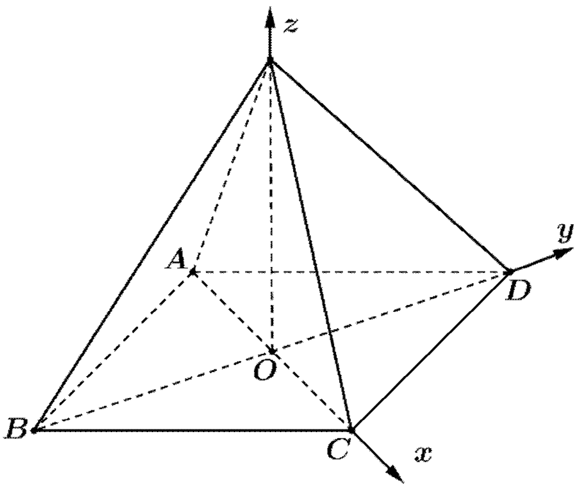
Do hai bức tường (P) và (R) song song nhau nên:

$$d((P),(R))=d(N,(R))=\frac{|4.0-2.0-2.1+9|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{7}{\sqrt{6}}\approx 2,9m$$

Bài 10. Bác An dự định làm bốn mái nhà của một ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp tứ giác đều và các mái kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng đó có làm được không?



Lời giải



Giả sử mái nhà của ngôi nhà được minh họa như hình vẽ trên. Ta gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi các cạnh đáy của hình chóp có độ dài là a và các cạnh bên có độ dài là b.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $OA=OB=OC=OD=a\sqrt{2}$.

Vì SO là đường cao của tam giác SOC nên $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}}$

Khi đó ta có: $O(0;0;0)$; $A\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};0\right)$; $D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

và $S\left(0;0;\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{SC}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}}\right);\overrightarrow{DC}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; $\overrightarrow{BC}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

Mặt khác: $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SC};\frac{\sqrt{2}}{a}\overrightarrow{DC}\right]=\left(\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}};\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}};-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SC};\frac{\sqrt{2}}{a}\overrightarrow{BC}\right]=\left(\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}};-\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}};\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

Mặt phẳng (SCD) nhận $\overrightarrow{n_1}$ làm một vectơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (SBC) nhận $\overrightarrow{n_2}$ làm một vectơ pháp tuyến.

Vì $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=\frac{-a^2}{2}\neq 0$ do đó hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) không vuông góc với nhau.

Do đó ý tưởng trên không thực hiện được.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, một ngôi nhà có sàn nhà thuộc mặt phẳng Oxy và trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng $z-1=0$, mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng $x+y+50z-100=0$. Hỏi trong 3 mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần nhà tầng 1, mái nhà tầng 2, hai mặt nào song song với nhau?

Lời giải

Vì mặt phẳng Oxy vuông góc với Oz nên mặt phẳng Oxy nhận $\vec{k}=(0;0;1)$ làm một vectơ pháp tuyến.

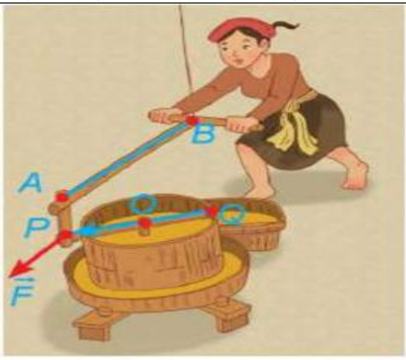
Vì mặt phẳng Oxy đi qua điểm O(0; 0; 0) và có vectơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$ nên có phương trình là: $z-0=0\Leftrightarrow z=0$

Mặt phẳng $z-1=0$ có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(0;0;1)$.

Vì $\overrightarrow{n_1}=\vec{k}$ và $-1\neq 0$ nên mặt phẳng chứa sàn nhà song song với trần tầng 1.

Mặt mái tầng 2 có phương trình $x+y+50z-100=0$ và có nhận một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;1;50)$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_1},\vec{k}$ nên không song song với hai mặt phẳng còn lại .

Bài 12. Xét một cối xay lúa trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét. Nếu tác động vào tại cối xay lúa (Ở vị trí P) một lực $\vec{F}$ thì moment lực $\vec{M}$ được tính bởi công thức $\vec{M}=\left[\overrightarrow{OP};\vec{F}\right]$ như hình minh họa. Trong quá trình xay, các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang. Vectơ lực $\vec{F}$ có giá song song với AB. Giải thích vì sao giá của vecto moment lực $\vec{M}$ có phương thẳng đứng?



Lời giải

Vì các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang và vectơ lực $\vec{F}$ có giá song song với AB nên giá của vectơ $\vec{F}$ có phương nằm ngang.

Mặt khác $\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{OP}; \vec{F}\right]$ nên moment lực $\overrightarrow{M}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{OP}$

Do đó giá của vectơ moment lực $\overrightarrow{M}$ có phương thẳng đứng.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

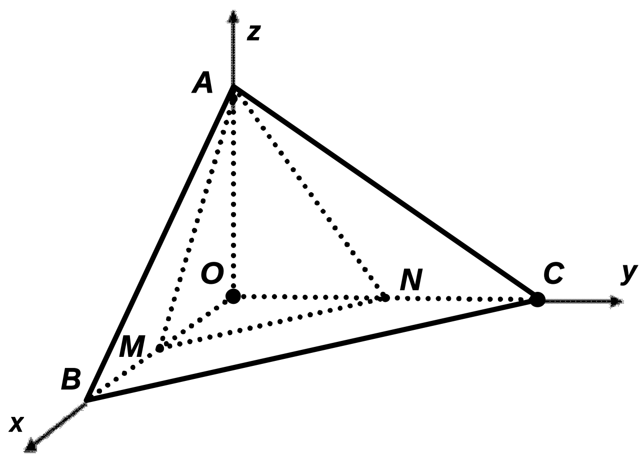
Câu 1. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=5, OB=2, OC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

A. $\frac{20}{3\sqrt{129}}$. **B.** $\frac{20}{\sqrt{129}}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $O(0;0;0)$, $A \in Oz, B \in Ox, C \in Oy$ sao cho $AO=5, OB=2, OC=4$

$\Rightarrow A(0;0;5), B(2;0;0), C(0;4;0)$.

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng (AMN) là: $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=1$ hay $10x+5y+2z-10=0$

Vậy khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

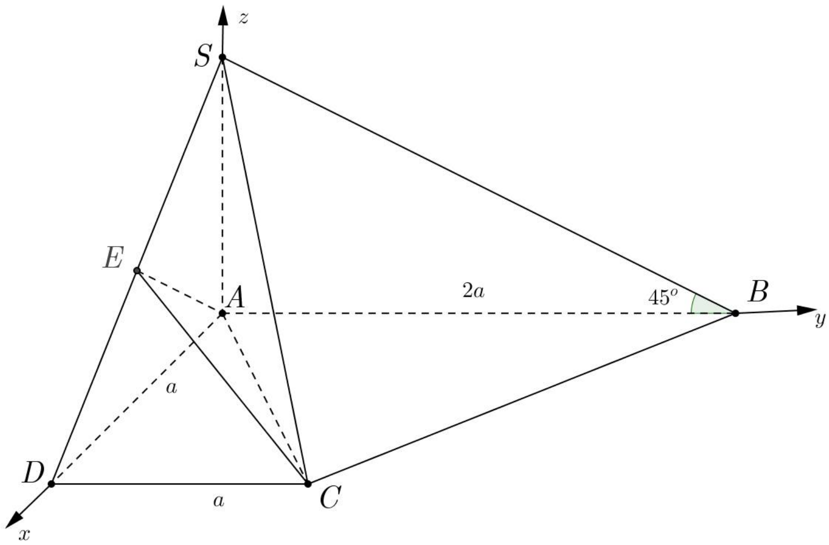
$$d(G,(AMN)) = \frac{\left|\frac{20}{3}+\frac{20}{3}+\frac{10}{3}-10\right|}{\sqrt{100+25+4}} = \frac{20}{3\sqrt{129}}.$$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45°, E là trung điểm của SD, $AB=2a$, $AD=DC=a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACE).

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{4a}{3}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn B.



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB $\Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\widehat{SBA}=45^\circ$.

Tam giác SAB vuông cân tại A $\Rightarrow SA=2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$, $E\left(\dfrac{a}{2};0;a\right)$.

$\overrightarrow{AC}=(a;a;0)$, $\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{a}{2};0;a\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right]=\left(a^2;-a^2;-\dfrac{a^2}{2}\right)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (ACE) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;-1)\Rightarrow(ACE):2x-2y-z=0$.

Vậy $d(B,(ACE))=\dfrac{|2.2a|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{4a}{3}$.

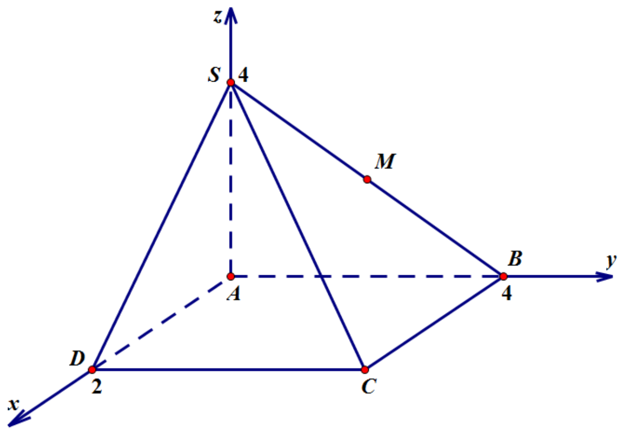
Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM).

A. $d(B,(CDM))=2$. **B.** $d(B,(CDM))=2\sqrt{2}$.

C. $d(B,(CDM))=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $d(B,(CDM))=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D.



Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;4;0)$.

M là trung điểm của SB $\Rightarrow M(0;2;2)$.

Viết phương trình mặt phẳng (CDM):

$\overrightarrow{CD} = (0;-4;0)$, $\overrightarrow{CM} = (-2;-2;2) \Rightarrow \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CM} = (-8;0;-8)$.

(CDM) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;0;1)$.

Suy ra (CDM) có phương trình: $x + z - 2 = 0$.

Vậy $d(B;(CDM)) = \dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \sqrt{2}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $S(-1;6;2)$, $A(0;0;6)$, $B(0;3;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm S, B, H là

A. $x+5y+7z-10=0$.

B. $x-5y-7z+15=0$.

C. $x+5y-7z-15=0$.

D. $x-5y-7z-15=0$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình Mặt phẳng $(ABC): \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow -3x + 2y + z - 6 = 0$.

H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$ nên H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow H\left(\dfrac{19}{14};\dfrac{31}{7};\dfrac{17}{14}\right)$

Mặt phẳng $(SBH):\begin{cases} qua\, B(0;3;0) \\ vtpt\left[\overrightarrow{BH},\overrightarrow{SB}\right]=\left(\dfrac{11}{14};\dfrac{55}{14};-\dfrac{11}{2}\right)=\dfrac{11}{14}(1;5;-7) \end{cases}$.

Phương trình Mặt phẳng $(SBH): x+5(y-3)-7z=0 \Leftrightarrow x+5y-7z-15=0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, trên cánh đồng pin mặt trời, một tấm pin nằm trong mặt phẳng $(P): x-2y+3z+1=0$, một tấm pin khác nằm trong mặt phẳng $(Q): 2x-4y+6z+1=0$ như hình bên dưới.

Nhận định nào sau đây sai?

A. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;3)$

B. Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến của $\overrightarrow{n_Q}=(2;-4;6)$

C. $(P)\,//\,(Q)$.

D. (P) cắt (Q)

Lời giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;3)$

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến của $\overrightarrow{n_Q}=(2;-4;6)$

Ta có $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{3}{6}\neq\dfrac{1}{1}\Rightarrow(P)\,//\,(Q)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), trên cánh đồng pin mặt trời, một tấm pin nằm trong mặt phẳng $(P): 2x+y-2z-1=0$, một tấm pin khác nằm trong mặt phẳng $(Q): 6x+3y-6z+15=0$ như hình bên dưới.

Khoảng cách giữa hai pin mặt trời trên bằng bao nhiêu?

A. 1 mét. **B.** 2 mét.. **C.** 3 mét. **D.** 4 mét.

Lời giải

Chọn B.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến: $\vec{n}_{(Q)}=(6;3;-6)=3(2;1;-2)$

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến: $\vec{n}_{(P)}=(2;1;-2)$

Ta có: $\vec{n}_{(Q)}=3\vec{n}_{(P)}$ và $15\neq -1$ nên $(P)\,//\,(Q)$

Lấy $M(0;1;0)\in(P)$.

Vậy $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)=\dfrac{|1+5|}{\sqrt{1+4+4}}=2.$

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, trên cánh đồng pin mặt trời, một tấm pin nằm trong mặt phẳng $(Q): x+y-3z-2=0$, một tấm pin khác nằm trong mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;0;1)$ và song song với mặt phẳng (Q) như hình bên dưới.

Lập phương trình mặt phẳng (P)

A. $x+y-3z+3=0$.

B. $x+y-3z+2=0$.

C. $x+y-3z-3=0$.

D. $x+y-3z-2=0$.

Lời giải

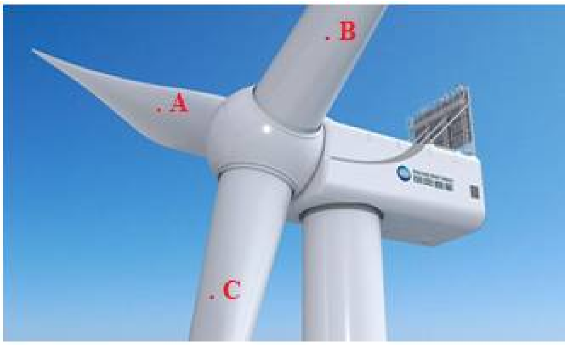
Chọn B.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;-3)$.

Do (Q) song song với (P) nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}=(1;1;-3)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;0;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-3)$ có phương trình: $(x-1)+(y-0)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y-3z+2=0$

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, trên cánh đồng điện gió, một tuabin điện gió có ba cánh quạt cùng nằm trong một mặt phẳng (Q) và ba cánh quạt chứa ba điểm $A(1;0;-2), B(-3;1;1), C(5;5;-5)$ (như hình bên dưới). Lập phương trình mặt phẳng chứa ba cánh quạt của tuabin điện gió đó.



A. $3x+4z+5=0$. **B.** $3x+2y+4z+5=0$. **C.** $3x-2y+4z+5=0$. **D.** $3x+4z-5=0$.

Lời giải

Chọn A.

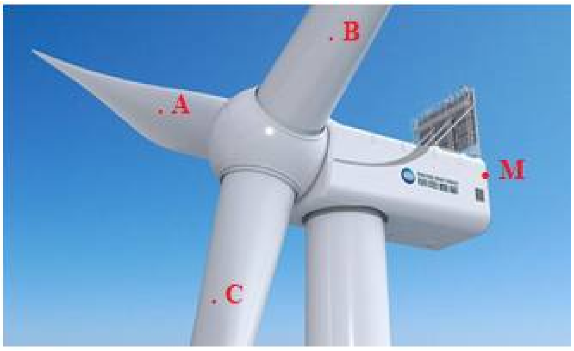
Mặt phẳng (Q) chứa ba điểm $A(1;-2;0); B(2;-1;1); C(1;1;2)$ nên mặt phẳng (Q) cũng là mặt phẳng (ABC)

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;1;3), \overrightarrow{AC}=(4;5;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]=(-18;0;-24)=-\frac{1}{6}(3;0;4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;0;4)$ là:

$3(x-1)+4(z+2)=0 \Leftrightarrow 3x+4z+5=0$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), trên cánh đồng điện gió, một tuabin điện gió có ba cánh quạt cùng nằm trong một mặt phẳng (Q) và ba cánh quạt chứa ba điểm $A(1;-2;0); B(2;-1;1); C(1;1;2)$, ngoài ra có điểm $M(5;7;-8)$ nằm ở mép tuabin (như hình bên dưới). Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng chứa ba cánh quạt của tuabin là:



A. 13,3 mét. **B.** 12,3 mét. **C.** 10,3 mét. **D.** 11,3 mét.

Lời giải

Chọn B.

Mặt phẳng (Q) chứa ba điểm $A(1;-2;0);B(2;-1;1);C(1;1;2)$ nên mặt phẳng (Q) cũng là mặt phẳng (ABC)

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;1);\overrightarrow{AC}=(0;3;2)$

Vectơ pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-2;3)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $-1(x-1)-2(y+2)+3z=0$ hay $x+2y-3z+3=0$

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) là:

$$d(M;(ABC))=\frac{|5+2.7-3.(-8)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{46}{\sqrt{14}}\approx 12,3 \text{ mét}$$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một căn phòng có bức tường nằm trong mặt phẳng $(P):2x-y-2z+5=0$ và một bóng điện có tọa độ $(1;-2;3)$ như hình bên dưới. Khoảng cách từ bóng điện đó đến bức tường là:

A. 3 mét. **B.** 2 mét. **C.** 4 mét. **D.** 1 mét.

Lời giải

Chọn D

$$d(A,(P))=\frac{|2+2-6+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=1.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là decimét), tọa độ hóa ba trái bida A, B, C ta được tọa độ ba điểm $A(1;2;0), B(4;2;0), C(7;4;0)$ như hình bên dưới.

a) Khoảng cách giữa trái bida B với trái bida C bằng $3,6(dm)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của decimét)

b) Bạn Thanh Minh muốn thực hiện cú đánh sơn mỏng như sau: từ trái bida A, sơn mỏng qua trái bida B thì trái bida A không trúng trái bida C (cú đánh sơn mỏng là đánh trái bida A vào mép của trái bida B). Biết nếu ba trái bida A, B, C không thẳng hàng thì khi sơn mỏng, trái bida A sẽ trúng trái bida C.

c) Mặt phẳng đi qua ba trái bida A, B, C có phương trình là: $ax + y + cz + d = 0$. Khi đó $a + c + d = 4$.

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng đi qua ba trái bida A, B, C bằng $0,9(dm)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của decimét).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

$A(1;2;0), B(4;2;0), C(7;4;0)$

a) Khoảng cách giữa trái bida B với trái bida C là

$$BC = \sqrt{(7-4)^2 + (4-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{13} \approx 3,6(dm)$$

b) $\overrightarrow{AB} = (2;0;0); \overrightarrow{AC} = (6;2;0)$

Ta có $\frac{2}{6} \neq \frac{0}{2}$. Do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng, do đó Bạn Thanh Minh sơn mỏng sẽ trúng trái bida C.

c) $\overrightarrow{AB} = (2;0;0); \overrightarrow{AC} = (6;2;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right] = (0;-2;4) = 2(0;-1;2)$

Mặt phẳng đi qua $A(1;2;0)$ và nhận vecto $\vec{n}=(0;-1;2)$ là một vectơ pháp tuyến:

$0(x-1)-(y-2)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow y-2z-2=0$

Vậy mặt phẳng đi qua ba trái bida A,B,C là: $y-2z-2=0$

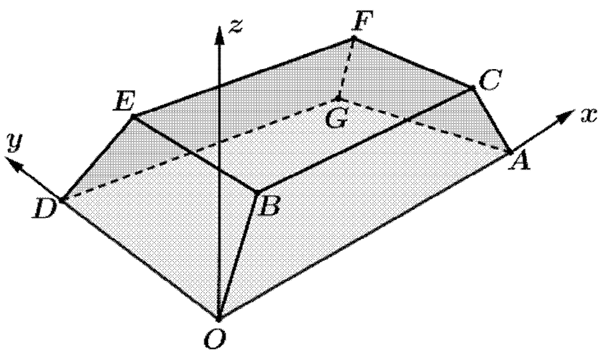
$\Rightarrow a+c+d=-4$

d) mặt phẳng đi qua ba trái bida A,B,C là: $y-2z-2=0$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng đi qua ba trái bida A,B,C là:

$$d\left(O;(ABC)\right)=\frac{|0-2.0-2|}{\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\approx 0,9(dm).$$

Câu 12. Hình vẽ dưới đây minh họa hình ảnh một tòa nhà trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết $A(50;0;0)$, $D(0;20;0)$, $B(4k;3k;2k)$với $k>0$ và mặt phẳng $(BCFE)$ có phương trình là $z=3$.



a) Độ dài đường chéo AD của sàn nhà bằng $54(m)$(kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

b) Đỉnh B của trần nhà có tọa độ là $B\left(6;\frac{7}{2};3\right)$.

c) Phương trình mặt phẳng của bức tường $OACB$ có dạng: $ax-2y+cz+d=0$. Khi đó $2a+3c+4d=8$.

d) Khoảng cách từ điểm D đến bức tường $OACB$ có bằng $11,3(m)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của mét).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có: $\overrightarrow{AD}=(-50;20;0)\Rightarrow AD=\sqrt{(-50)^2+20^2+0^2}=\sqrt{2900}\approx 54(m)$

Vậy độ dài đường chéo AD của sàn nhà bằng $54(m)$

b) Vì $B\in(BCFE)$ nên thay điểm $B(4k;3k;2k)$ vào phương trình $z=3$ ta được:

$2k=3\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}\Rightarrow B\left(6;\frac{9}{2};3\right)$.

c) Ta có: $\overrightarrow{OA}=(50;0;0)=50(1;0;0)$ và $\overrightarrow{OB}=\left(6;\frac{9}{2};3\right)=\frac{3}{2}(4;3;2)$

Mặt phẳng $(OACB)$ có hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;0;0)$; $\overrightarrow{u_2}=(4;3;2)$ $\Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(0;-2;3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(OACB)$

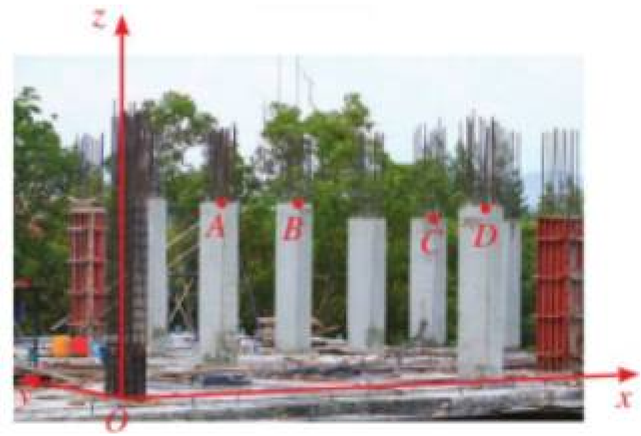
Phương trình mặt phẳng $(OACB)$ là: $-2(y-0)+3(z-0)=0 \Leftrightarrow -2y+3z=0$.

$\Rightarrow a=0; c=3; d=0 \Rightarrow 2a+3c+4d=9$

d) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(OACB)$ là

$$d\left(D;(OACB)\right)=\frac{|-2.20+3.0|}{\sqrt{0^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{37\sqrt{13}}{13}\approx 10,3(m)$$

Câu 13. Hình dưới đây minh họa một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3)$, $B(4;3;3)$, $C(6;3;2,5)$, $D(4;0;2,8)$.



a) Khoảng cách hai trụ A và B bằng $2,83(m)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét).

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $x+by+cz+d=0$. Khi đó $b+2c-d=-6$.

c) Bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng.

d) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) bằng $0,4(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2;0)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=2\sqrt{2}\approx 2,83(m)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2;0)\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AC}=(4;2;-0,5)\neq\vec{0}$.

Xét: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}2 & 0\\2 & -0,5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 2\\-0,5 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & 2\end{vmatrix}\right)=(-1;1;-4)$ hay $\vec{n}=(1;-1;4)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $1(x-2)-1(y-1)+4(z-3)=0 \Leftrightarrow x-y+4z-13=0$.

$\Rightarrow b=-1; c=4; d=-13 \Rightarrow b+2c-d=20$

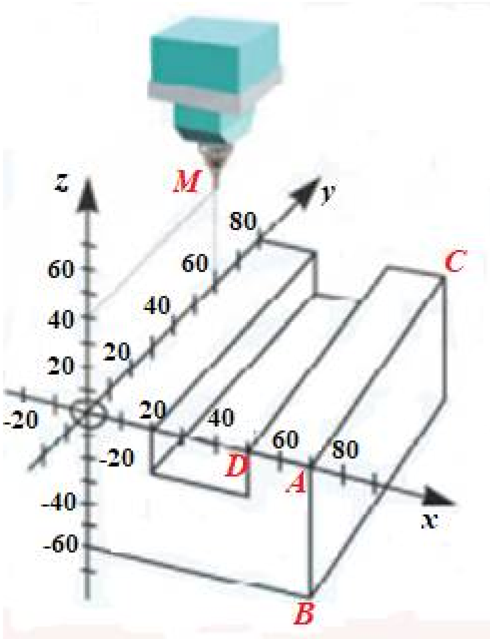
c) Thay tọa độ điểm $D(4;0;2,8)$ vào phương trình mặt phẳng (ABC) ta có:

$$x-y+4z-13=0 \Leftrightarrow 4+4.2,8-13=0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng.

d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC): $d\left(D,(ABC)\right)=\dfrac{|2,5-3|}{1}=0,5(m)$.

Câu 14. Phần mềm của máy tiện kĩ thuật số CNC (Computer Numerical Control) đang biểu diễn một chi tiết máy như hình vẽ dưới đây:



a) Tọa độ các điểm A, B, C, D là $A(70;0;0)$, $B(70;0;-60)$, $C(70;80;-60)$, $D(50;0;0)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm C và D bằng $82,5(m)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của mét).

c) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $x+70=0$.

d) Cho biết đầu mũi tiện đang đặt tại điểm $M(0;60;40)$. Khi đó, khoảng cách từ đầu mũi tiện đến mặt phẳng (ABC) bằng $70(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có $A(70;0;0)$, $B(70;0;-60)$, $C(70;80;0)$, $D(50;0;0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{CD}=(-20;-80;0)$

Khoảng cách giữa hai điểm C và D là :

$CD=\sqrt{(-20)^2+(-80)^2+0^2}=\sqrt{6800}\approx 82,5(m)$

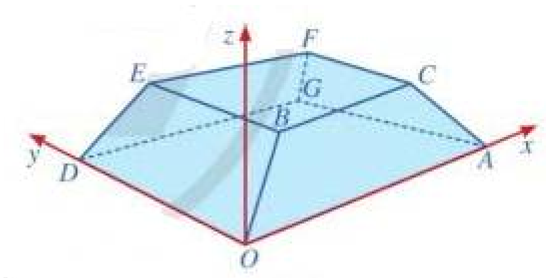
c) Mặt phẳng (ABC) đi qua $A(70;0;0)$ và vuông góc với trục Ox nên có vectơ pháp tuyến là:

$\vec{i}=(1;0;0)$.

Suy ra mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $1(x-70)=0 \Leftrightarrow x-70=0$.

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) là: $d(M,(ABC))=\dfrac{|0-70|}{1}=70(m)$.

Câu 15. Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100m$, chiều rộng $OD=60m$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$.



a) Tọa độ các điểm A, D, G là $A(100;0;0), D(0;60;0), G(100;60;8)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm B và D bằng $51,6(m)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của mét).

c) Phương trình mặt phẳng $(OACB)$ có dạng: $ax+y+cz+d=0$. Khi đó $2025a-2c-2024d=20$.

d) Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ bằng $60,5(m)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của mét).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có: $O(0;0;0), A(100;0;0), G(100;60;0), D(0;60;0), B(10;10;8)$

b) Ta có: $\overrightarrow{BD}=(-10;50;-8)$

Khoảng cách giữa hai điểm B và D bằng: $BD=\sqrt{(-10)^2+(50)^2+(-8)^2}=\sqrt{2664}\approx 51,6(m)$

c) Ta có: $\overrightarrow{OA}=(100;0;0), \overrightarrow{OB}=(10;10;8)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(OACB)$ là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;-100;1000)=-100(0;1;-10)$

Phương trình mặt phẳng $(OACB)$ đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;1;-10)$ là:

$y-10z=0$

$\Rightarrow a=0;c=-10;d=0 \Rightarrow 2025a-2c-2024d=20$

d) Ta có: $\overrightarrow{OD}=(0;60;0),\overrightarrow{OB}=(10;10;8)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(OBED)$ là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right]=(480;0;-600)=120(4;0;-5)$

Phương trình mặt phẳng $(OBED)$ đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;0;-5)$ là:

$4x-5z=0$

Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ là:

$$d(G,(OBED))=\frac{|4.100-5.0|}{\sqrt{16+25}}=\frac{400\sqrt{41}}{41}\approx 62,5(m)$$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD .

a) Điểm M có tọa độ là $M(0;2;2)$.

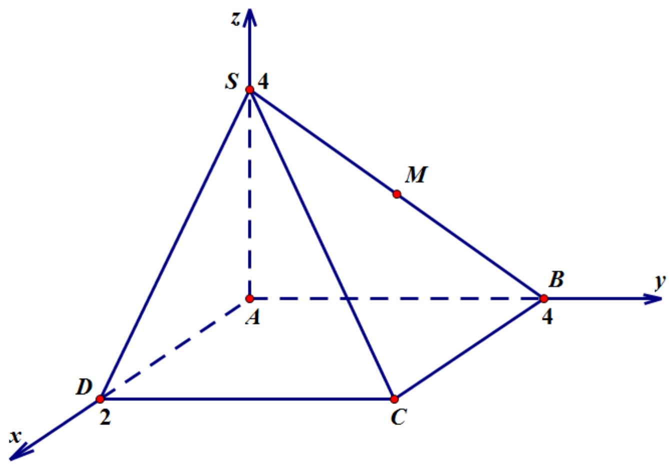
b) Điểm C có tọa độ là $C(2;4;0)$.

c) Phương trình mặt phẳng (AMC) có dạng: $ax-y+cz+d=0$. Khi đó $a+2024c-2025d=2025$.

d) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMG) bằng $2,93$ (kết quả làm tròn đến phần trăm).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ : $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$.

a) Điểm M là trung điểm của SB $\Rightarrow M(0;2;2)$.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \Rightarrow C(2;4;0) \\ z_C = 0 \end{cases}$.

c) Ta có: $\overrightarrow{AM} = (0;2;2), \overrightarrow{AC} = (2;4;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right] = (-8;4;-4) = -4(2;-1;1)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AMC) là $\vec{n} = (2;-1;1)$

Phương trình mặt phẳng (AMC) đi qua A và có Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;-1;1)$ là: $2x - y + z = 0$

$\Rightarrow a = 2; c = 1; d = 0 \Rightarrow a + 2024c - 2025d = 2026$

d) G là trọng tâm của tam giác SCD $\Rightarrow G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (0;2;2) = 2(0;1;1), \overrightarrow{AG} = \left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}(1;1;1)$

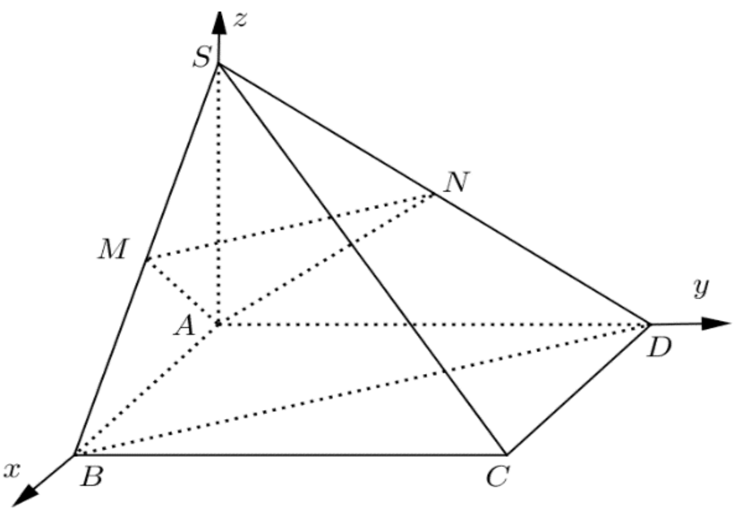
Mặt phẳng (AMG) có hai chỉ phương $\overrightarrow{AM} = (0;1;1), \overrightarrow{AG} = (1;1;1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AG}\right] = (0;1;-1)$

Phương trình mặt phẳng (AMG) đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;1;-1)$ là: $y - z = 0$

Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMG) là

$$d(B,(AMG)) = \frac{|4-0|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác AMN. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới.



a) Hai điểm M, N có tọa độ là $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$ và $N\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

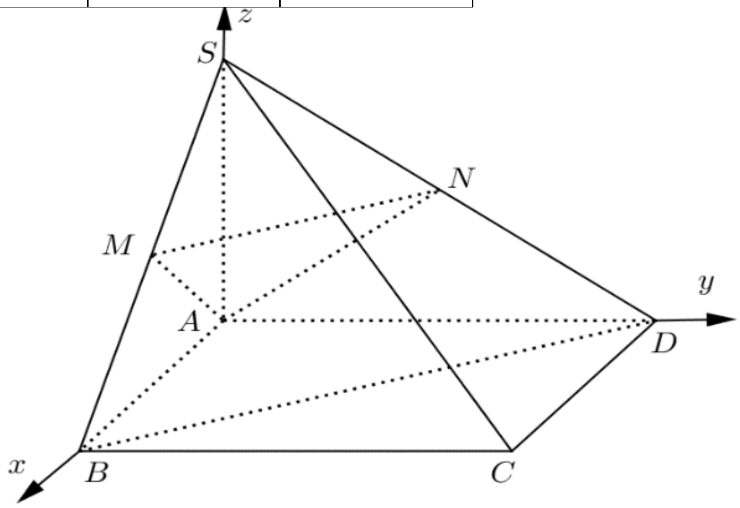
b) Điểm G có tọa độ là $G\left(\frac{a}{6};\frac{a}{6};\frac{a}{6}\right)$

c) Phương trình mặt phẳng (AMC) có dạng: $mx+by-z+d=0$. Khi đó $2026m-2025b+2024d=4049$.

d) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AMN) bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) Ta có $A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), S(0;0;a)$

suy ra $M\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$ và $N\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

b) Điểm G là trọng tâm của tam giác $AMN \Rightarrow G\left(\dfrac{a}{6};\dfrac{a}{6};\dfrac{a}{3}\right)$

c) Ta có: $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a}{2}(1;0;1), \overrightarrow{AN}=\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a}{2}(0;1;1)$

Mặt phẳng (AMN) có hai chỉ phương $\overrightarrow{AM}=(1;0;1), \overrightarrow{AN}=(0;1;1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=(-1;-1;1)$

Phương trình mặt phẳng (AMG) đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-1;-1;1)$ là:

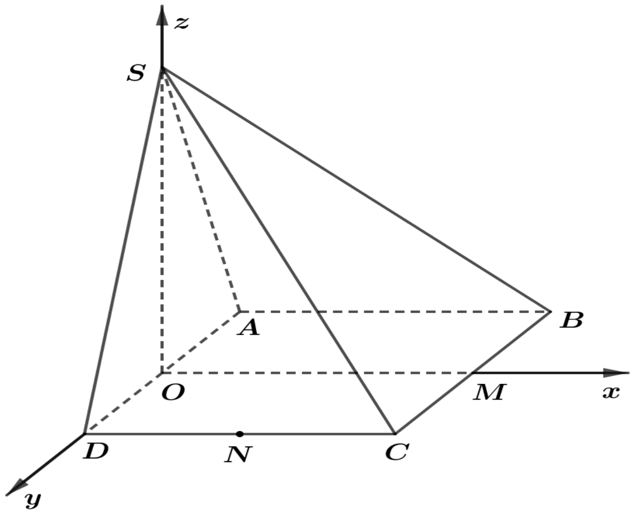
$-x-y+z=0 \Leftrightarrow x+y-z=0$

$\Rightarrow m=1; b=1; d=0 \Rightarrow 2026m-2025b+2024d=1$

d) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (AMN).

$$d\left(C,(AMN)\right)=\frac{|a+a-0|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm cạnh AD như hình vẽ dưới.



a) Tọa độ các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$ là:

$$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right),B\left(a;-\frac{a}{2};0\right),C\left(a;\frac{a}{2};0\right),D\left(0;\frac{a}{2};0\right),S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

b) Tọa độ của hai điểm M,N là $M(a;0;0)$ và $N\left(\frac{a}{2};a;0\right)$.

c) Phương trình mặt phẳng (SMN) có dạng: $mx+ny+pz-a\sqrt{3}=0$ $(m,n,p\in\mathbb{R})$. Khi đó $m+n+p=2$.

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (SMN) bằng $\frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có $A\left(0;-\frac{a}{2};0\right),B\left(a;-\frac{a}{2};0\right),C\left(a;\frac{a}{2};0\right),D\left(0;\frac{a}{2};0\right),S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

b) Vì M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD nên $M(a;0;0)$ và $N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

c) Ta có: $\overrightarrow{SM}=\left(a;0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{a}{2}\left(2;0;-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)=-\frac{a}{2}(1;-1;0)$

Mặt phẳng (SMN) có hai chỉ phương $\overrightarrow{SM}=\left(2;0;-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{MN}=(1;-1;0)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{MN}\right]=\left(\sqrt{3};-\sqrt{3};2\right)$

Phương trình mặt phẳng (SMN) đi qua $M(a;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\left(\sqrt{3};-\sqrt{3};2\right)$ là:

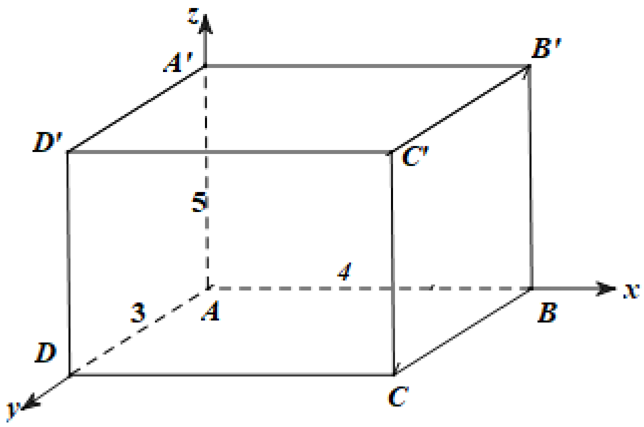
$$\sqrt{3}(x-a)-\sqrt{3}y+2z=0\Leftrightarrow\sqrt{3}x-\sqrt{3}y+2z-a\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow m=\sqrt{3};n=-\sqrt{3};p=2\Rightarrow m+n+p=2$$

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (SMN) là:

$$d(O,(SMN))=\frac{\left|\sqrt{3}.0-\sqrt{3}.0+2.0-a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2+2^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\frac{a\sqrt{30}}{10}$$

Câu 19. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB=4(m), AD=3(m), AA'=5(m)$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới.



a) Tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$A(0\,0;0), B(4;0;0), C(4;3;0), D(0;0;3), A'(0\,0;5), B'(4;0;5), C'(4;3;5), D'(0;3;5)$.

b) Tọa độ của tâm hình chữ nhật $ABCD$ là $\left(2;\frac{3}{2};0\right)$.

c) Phương trình mặt phẳng (ACD') có dạng: $ax+by+12z+d=0$. Khi đó $a-b-d=35$.

d) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và mặt phẳng $(A'BC')$ bằng $2{,}16(m)$(kết quả làm tròn đến phần trăm của mét).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có: $A(0\,0;0), B(4;0;0), C(4;3;0), D(0;0;3), A'(0\,0;5), B'(4;0;5), C'(4;3;5), D'(0;3;5)$,

b) Tọa độ của tâm hình chữ nhật $ABCD$ là trung điểm $AC \Rightarrow \left(2;\frac{3}{2};0\right)$.

c) Ta có: $\overrightarrow{AC}=(4;3;0), \overrightarrow{AD'}=(0;3;5)$

Mặt phẳng (ACD') có hai chỉ phương $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD'}$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD'}\right]=(15;-20;12)$

Phương trình mặt phẳng (ACD') đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(15;-20;12)$ là:

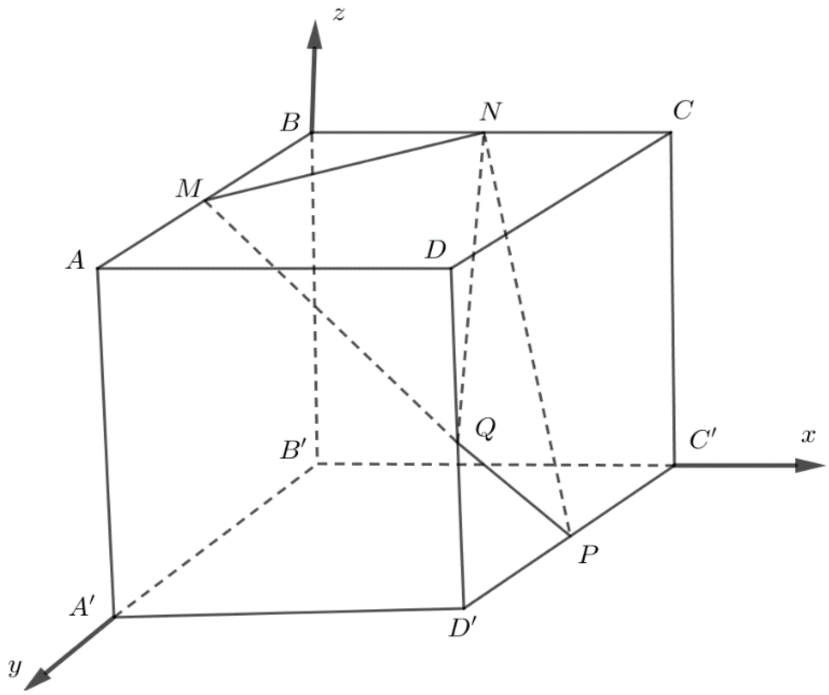
$15x-20y+12z=0$

$\Rightarrow a=15; b=-20; d=0 \Rightarrow a-b-d=35$

d) Do mặt phẳng (ACD') song song mặt phẳng $(A'BC')$ nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và mặt phẳng $(A'BC')$ là khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng (ACD')

$$d\left((A'BC'),(ACD')\right)=d\left(A',(ACD')\right)=\frac{|15.0-20.0+12.5|}{\sqrt{15^2+(-20)^2+(12)^2}}=\frac{60}{\sqrt{769}}\approx 2,16(m)$$

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



a) Tọa độ các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$B'(0\,0;0), A'(0;1;0), D'(1;1;0), C'(1;0;0), B(0\,0;1), A(0;1;1), D(1;1;1), C(1;0;1)$,

b) Tọa độ các điểm M,N,P,Q lần lượt là $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $P\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $Q\left(1;\frac{1}{2};1\right)$.

c) Phương trình mặt phẳng (MNP) có dạng: $ax+by+cz-3=0$. Khi đó $a+b+c=6$.

d) Khoảng cách từ điểm Q đến mặt phẳng (MNP) bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có: $B'(0\,0;0), A'(0;1;0), D'(1;1;0), C'(1;0;0), B(0\,0;1), A(0;1;1), D(1;1;1), C(1;0;1)$

b) M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của $AB,BC,C'D',DD'$ nên $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $P\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $Q\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

c) Ta có: $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)=\frac{1}{2}(1;-1;0),\overrightarrow{MP}=(1;0;-1)$

Mặt phẳng (MNP) có hai chỉ phương $\overrightarrow{MN}=(1;-1;0),\overrightarrow{MP}=(1;0;-1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(1;1;1)$

Phương trình mặt phẳng (MNP) đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(15;-20;12)$ là:

$1(x-0)+1\left(y-\frac{1}{2}\right)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+2z-3=0$

$\Rightarrow a=2;b=2;c=2 \Rightarrow a+b+c=6$

d) Khoảng cách từ điểm Q đến mặt phẳng (MNP) là:

$$d\left(Q,(MNP)\right)=\frac{\left|2.1+2.1+2.\frac{1}{2}-3\right|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimét), phần mềm điều khiển máy in 3D cho biết đầu in phun của máy đang đặt tại điểm $M(5;6;30)$. Tính khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật in có phương trình $z-2=0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 28

Ta có phương trình mặt phẳng là $(P): z-2=0$

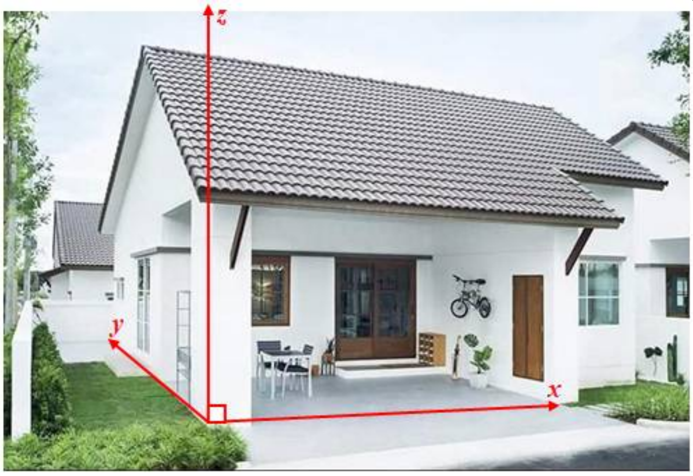
Khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật in là: $d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|30-2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=28$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có sàn nhà nằm trên mặt phẳng (Oxy). Hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x-2y+5=0$ và $(Q): x-2y-3z+20=0$. Hỏi là chiều cao của ngôi nhà tính từ sàn nhà lên nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5



Những điểm thuộc đường nóc nhà có tọa độ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ x-2y-3z+20=0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất chọn $y=0 \Rightarrow x=-5$. Thay vào phương trình còn lại ta được $z=5$

Vậy điểm $M(-5;0;5)$ là một điểm thuộc đường nóc nhà. Khi đó chiều cao cần tìm của của ngôi nhà là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(Oxy): z=0$

$d\left(M,(Oxy)\right)=|z_M|=5(m)$

Câu 23. Một ngôi nhà có các bậc thang của cầu thang đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là decimét). Biết hai mặt bậc thang song song nằm trên hai mặt phẳng phân biệt: $(P): 2x-y+2z+8=0$ và $(Q): 2x-y+2z+2=0$. Khoảng cách giữa hai bậc thang này bằng bao nhiêu decimét?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Khoảng cách giữa hai bậc thang này bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

$$d\left((P),(Q)\right)=\frac{|2-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2(dm)$$

Vậy khoảng cách giữa hai bậc thang bằng $2(dm)$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-4=0$. Khoảng cách giữa hai mái nhà này bằng bao nhiêu mét?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{2}{2}\neq\frac{-10}{-4}$ nên (P) song song với (Q)

Lấy $A(2;1;3)\in(P)$.Do (P) song song với (Q) nên khoảng cách giữa hai mái nhà là:

Ta có $d((P),(Q))=d(A,(Q))=\frac{|2+2.1+2.3-4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2(m)$

Chú ý: Dùng công thức tính nhanh để tính trắc nghiệm:

$(P): Ax+By+Cz+D_1=0;\ (Q)\ Ax+By+Cz+D_2=0$

$\Rightarrow d((P);(Q))=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà song song với nhau và lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 3x-2y+z-3=0$ và $(Q): 3x+by+cz+d=0$ $(b,c,d\in\mathbb{Z})$. Điểm $M(2;1;-3)$ thuộc mái nhà nằm trên mặt phẳng (Q). Giá trị của biểu thức $b+2025c+2024d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -1

Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 3x-2y+z-3=0$ nên có phương trình dạng

$(Q): 3x-2y+z+m=0,\ m\neq -3$

Vì $M\in(Q)$ nên $(Q): 3.2-2.1+(-3)+m=0 \Leftrightarrow m=-1$

Vậy $(Q): 3x-2y+z-1=0 \Rightarrow b+2025c+2024d=-1$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà song song với nhau và lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$ và $(Q): ax+by-z+d=0$ $(a,b,d\in\mathbb{Z})$. Biết khoảng cách hai mái nhà này bằng $\sqrt{3}(m)$. Khi đó, giá trị của biểu thức $2025a-2024b+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Vì $(P)//(Q)$ nên phương trình (P) có dạng : $x+y-z+d=0$ với $d\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lấy điểm $I(-1;-1;1)\in(Q)$.

Vì khoảng cách từ (P) đến (Q) bằng $\sqrt{3}$ nên ta có :

$$d(I,(P))=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|-1-1-1+d|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|d-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\\d=6\end{array}\right.$$ (thỏa điều kiện $d\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$).

Phương trình (P) là: $x+y-z+6=0; x+y-z=0$

Do $d=6$ nên phương trình (P) là: $x+y-z+6=0\Rightarrow 2025a-2024b+d=7$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x+y+2z+1=0$ và $(Q): x+y-z+2=0$. Hai mái nhà này hợp với nhau một góc bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 90

$(P): x+y+2z+1=0$ có VTPT $\vec{n}_{(P)}=(1;1;2)$

$(Q): x+y-z+2=0$ có VTPT $\vec{n}_{(Q)}=(1;1;-1)$

Ta có $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}=1.1+1.1+2(-1)=0\Rightarrow(P)\perp(Q)$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 2x+my+2mz-9=0$ và $(Q): 6x-y-z-10=0$. Tìm giá trị m để hai mái nhà này vuông góc với nhau.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

$(P): 2x + my + 2mz - 9 = 0$ có VTPT $\vec{a} = (2; m; 2m)$

$(Q): 6x - y - z - 10 = 0$ có VTPT $\vec{b} = (6; -1; -1)$

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2.6 + m.(-1) + 2m.(-1) = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và $(Q): mx + y - 2z + 1 = 0$. Tìm giá trị m để hai mái nhà này vuông góc với nhau.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $m = 6$

Mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(1; -2; 2)$

Mặt phẳng $(Q): mx + y - 2z + 1 = 0$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (m; 1; -2)$

Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 1.m - 2.1 + 2.(-2) = 0 \Leftrightarrow m = 6$

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 5x + my + z - 5 = 0$ và $(Q): nx - 3y - 2z + 7 = 0$. Để hai mái nhà này song song với nhau thì giá trị $T = 2m - n$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 13

$(P): 5x + my + z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{a} = (5; m; 1)$

$(Q): nx - 3y - 2z + 7 = 0$ có VTPT $\vec{b} = (n; -3; -2)$

$$(P) // (Q) \Leftrightarrow \left[\vec{a}; \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 3 = 0 \\ n + 10 = 0 \\ -15 - mn = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3}{2} \\ n = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = 2m - n = 2.\frac{3}{2} - (-10) = 13$$

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 2x + my + 3z - 5 = 0$ và $(Q): nx - 8y - 6z + 2 = 0$. Để hai mái nhà này song song với nhau thì giá trị $T = 2m + n$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;m;3)$

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(n;-8;-6)$

Mặt phẳng $(P)//(Q)\Rightarrow \vec{n}_1=k\vec{n}_2(k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}2=kn\\m=-8k\\3=-6k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2}\\m=4\\n=-4\end{cases}$

$\Rightarrow T=2m+n=4$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một camera được đặt tại điểm $A(2;1;5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+13=0$. Biết góc quan sát ngang của camera là $120°$, hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai của mét)

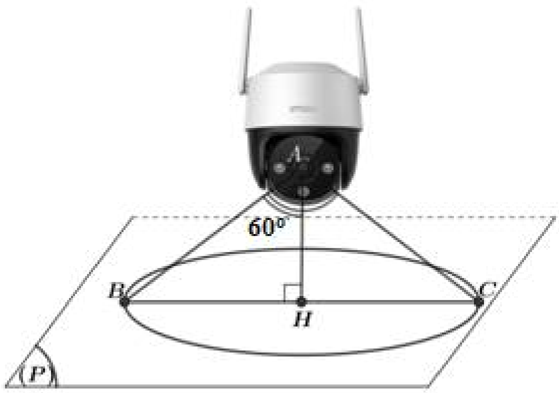
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6,93

Gọi A,B,C là các điểm như hình vẽ bên dưới và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P)

Hình vẽ minh hoạ



Theo đề $\widehat{BAC}=120°\Rightarrow\widehat{BAH}=60°$.

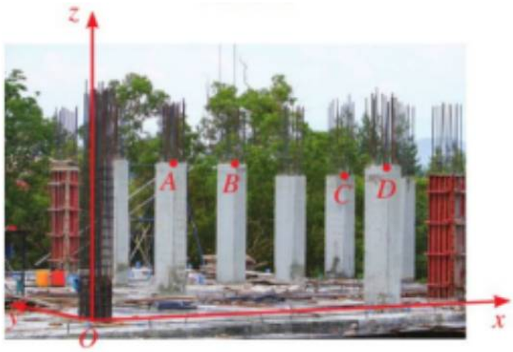
Khi đó $AH=\mathrm{d}(A,(P))=\dfrac{|2\cdot2-1-2\cdot5+13|}{\sqrt{4+1+4}}=2(m)$.

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có: $\tan \widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \tan 60° \cdot 2 = 2\sqrt{3}$

Suy ra $BC = 2BH = 2 \cdot 2\sqrt{3} \approx 6,93(m)$

Vậy vùng quan sát của camera trên mặt phẳng (P) là hình tròn có đường kính khoảng $6,4$ (đvđd).

Câu 33. Hình bên dưới minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét).



Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều cạnh đáy dài $1m$ và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3), B(4;3;3), C(6;3;3)$, $D(4;0;2,5)$. Giám sát công trình tính toán nhận thấy A, B, C, D không đồng phẳng, yêu cầu bên nhà thầu tính khối lượng bê tông cần bổ sung để độ cao các cột bê tông bằng nhau. Thể tích bê tông cần bổ sung bằng bao nhiêu centimét khối? (giả sử thể tích phần cốt thép là 3% trên một mét khối bê tông).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 485

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;2;0)$, $\overrightarrow{AC} = (4;2;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (0;0;-4)$.

Phương trình (ABC) đi qua $A(2;1;3)$ và nhận $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (0;0;-4)$ làm một véctơ pháp tuyến là:

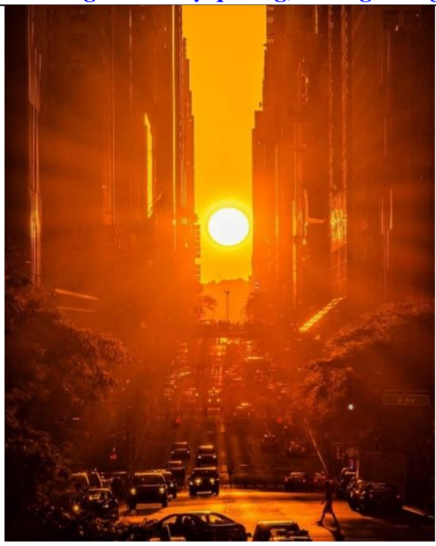
$-4(z-3) = 0 \Leftrightarrow z - 3 = 0$.

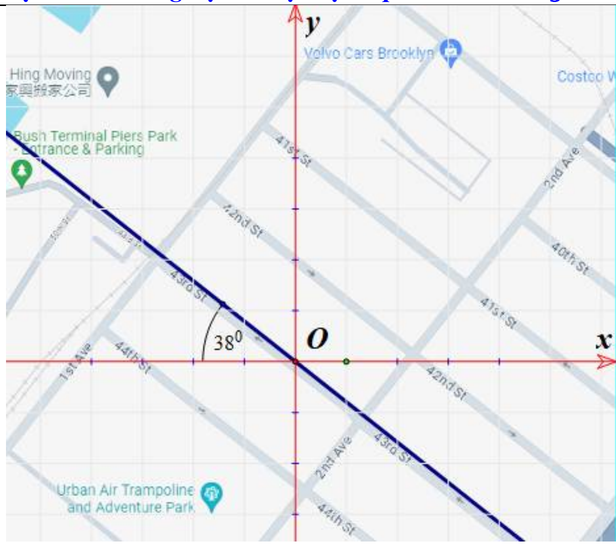
Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC): $d(D,(ABC)) = \dfrac{|2,5-3|}{1} = 0,5(m)$.

Vì mỗi cột bê tông là hình lăng trụ tứ giác đều và thể tích phần cốt thép là 3% trên một mét khối bê tông, do đó thể tích phần bê tông cần bổ sung là:

$$V = 1.1.0,5(100-3)\% = 0,5.97\% = 0,485\left(m^3\right) = 485\left(cm^3\right).$$

Câu 34. Manhattanhenge (Hình 1) là một sự kiện diễn ra khi Mặt Trời mọc hoặc khi Mặt Trời lặn nằm thẳng hàng với các tuyến phố Đông - Tây thuộc mạng lưới đường phố chính tại quận Manhattan của thành phố New York. Khi mặt trời lặn, tia sáng song song mặt đất lệch một góc khoảng $38°$ so với hướng tây (Hình 2).





Hình 1 **Hình 2**

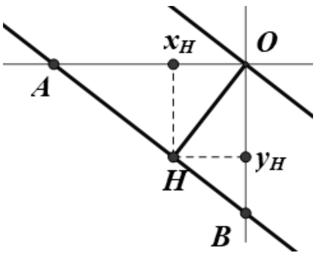
Giả sử mặt tiền các tòa nhà hai bên đường nằm trong 2 mặt phẳng song song cách nhau 30 m và vuông góc với mặt đất. Biết rằng mặt phẳng phía bắc đi qua gốc O của hệ trục $Oxyz$, với tia Oz vuông góc với mặt đất và hướng lên trên. Phương trình mặt phẳng thứ hai có dạng $(Q): x+ay+bz+c=0$ với $c=\dfrac{m}{\sin n^\circ}$. Tính $T=3m-2n$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 14

Gọi A,B là giao điểm của mp (Q) với trục Ox và Oy, H là hình chiếu vuông góc của O lên AB.



Vì khoảng cách giữa hai mặt phẳng bằng 30 m nên $OH=30$

Theo giả thiết ta có góc $\widehat{OAH}=38^\circ$ nên khi đó $OA=\dfrac{OH}{\sin 38^\circ}=\dfrac{30}{\sin 38^\circ}$

$x_H=-OH.\cos 52^\circ=-30.\cos 52^\circ$, $y_H=-OH\cos 38^0=-30\cos 38^0$

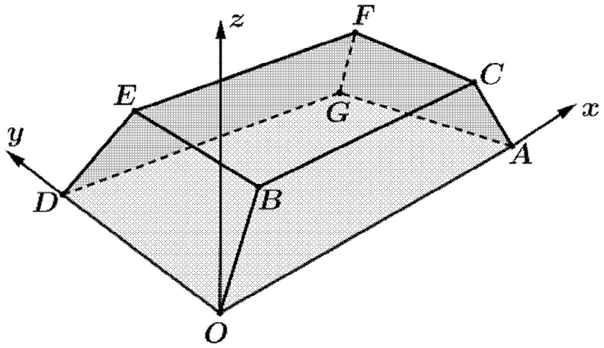
Tọa độ điểm $A\left(-\dfrac{30}{\sin 38^\circ};0;0\right)$, $H(-30\cos 52^\circ;-30\cos 38^\circ;0)$ và chọn một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(1;\dfrac{\cos 38^\circ}{\cos 52^\circ};0\right)$

Mặt phẳng (Q) đi qua A vuông góc OH nhận $\vec{n}$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình:

$$\left(x+\frac{30}{\sin 38^\circ}\right)+\frac{\cos 38^\circ}{\cos 52^\circ}y=0 \Leftrightarrow x+\frac{\cos 38^\circ}{\cos 52^\circ}y+\frac{30}{\sin 38^\circ}=0$$

Vậy $c=\dfrac{30}{\sin 38^\circ}\Rightarrow m=30;n=38\Rightarrow T=3m-2n=14$

Câu 35. Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100$ m, chiều rộng $OD=60$ m và tọa độ điểm $B(10;10;8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $a+c+d$.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -10

Gắn hình chóp cụt vào hệ trục $Oxyz$ ta có:

$O(0;0;0)$, $A(100;0;0)$, $G(100;60;0)$, $D(0;60;0)$, $B(10;10;8)$

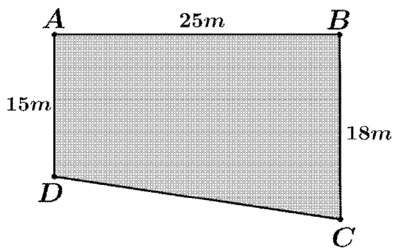
Do $\overrightarrow{OA}=(100;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(10;10;8)$ nên $\vec{n}=[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}]=(0;-100;1000)$.

Suy ra mặt phẳng $(OACB)$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(0;1;-10)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ là $y-10z=0$.

Do đó $a=0,c=-10,d=0$. Vậy $a+c+d=0-10+0=-10$.

Câu 36. Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A,B,C,D, như hình vẽ:

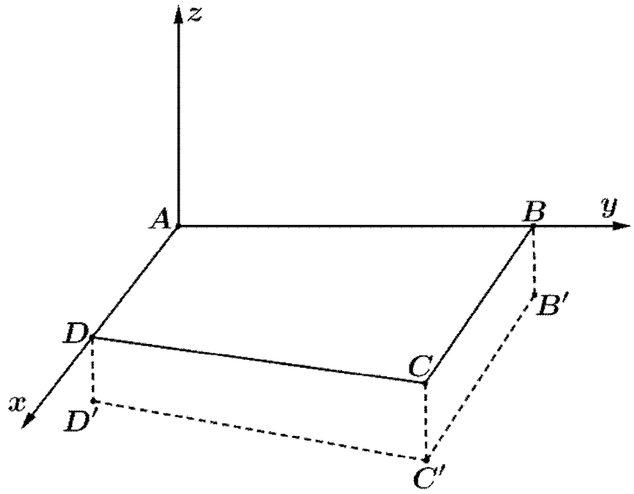


Bước đầu chúng được lấy "thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB=25(m)$, $AD=15(m)$, $BC=18(m)$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B,C,D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10(cm)$, $a\,(cm)$, $6(cm)$ tương ứng. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $17,2$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó: $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

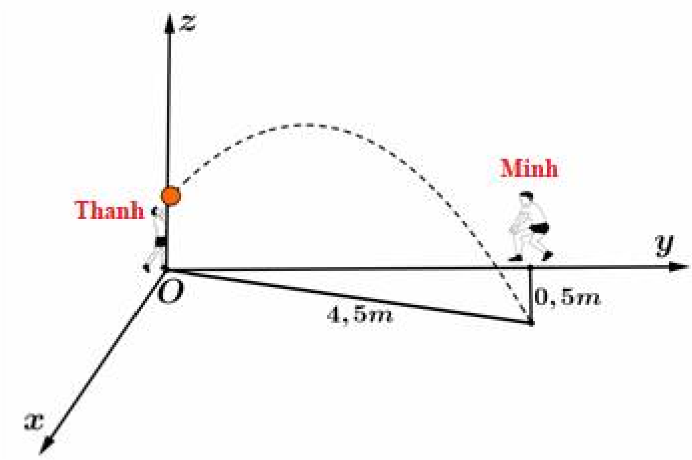
Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm, a cm 6cm tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$. Theo bài ra có bốn điểm A; B'; C'; D' đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D'): x + y + 250z = 0$.

Do $C'(1800;\, 2500;-a) \in (AB'D')$ nên ta có $1800 + 2500 - 250a = 0 \Leftrightarrow a = 17,2$.

Vậy $a = 17,2(cm)$.

Câu 37. Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Thanh và Minh đang tập chuyền bóng cho nhau. Thanh ném bóng cho Minh đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Thanh và rơi xuống vị trí cách Minh $0,5(m)$ và cách Thanh $4,5(m)$ được mô tả bằng hình vẽ bên dưới:



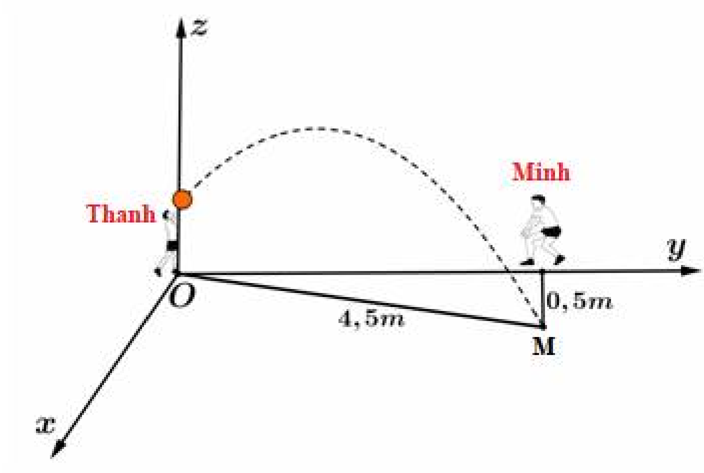
Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax - y + cx + d = 0$ và vuông góc với mặt đất.

Khi đó giá trị của $a\sqrt{5} + 2024c + 2025d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20



Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi M là điểm mà quả bóng chạm đất.

Khi đó $x_M = 0,5$, $y_M = \sqrt{4,5^2 - 0,5^2} = 2\sqrt{5}$

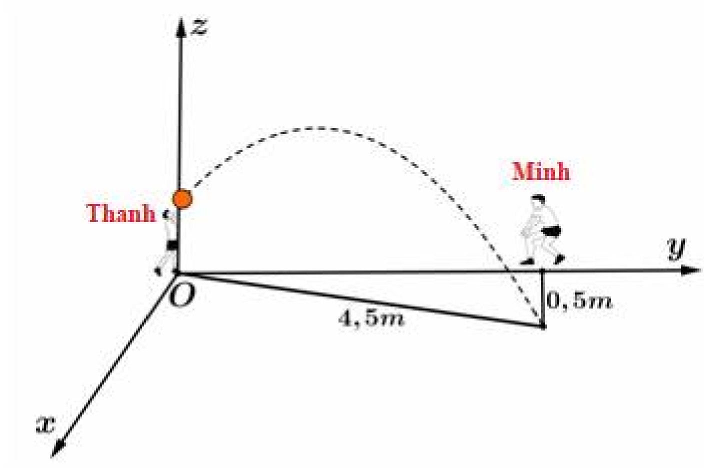
Vì $(\alpha) \perp (Oxy)$ nên (α) có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$.

Mà (α) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{OM} = \left(0,5;2\sqrt{5};0\right)$

Khi đó vec tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\vec{k},\overrightarrow{OM}\right] = \left(-2\sqrt{5};0,5;0\right) = -\frac{1}{2}\left(4\sqrt{5};-1;0\right)$.

Do đó mặt phẳng $(\alpha): 4\sqrt{5}x - y = 0$ nên $a = 4\sqrt{5}; c = 0; d = 0 \Rightarrow a\sqrt{5} + 2024c + 2025d = 20$.

Câu 38. Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Thanh và Minh đang tập chuyền bóng cho nhau. Thanh ném bóng cho Minh đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Thanh và rơi xuống vị trí cách Minh $0,5(m)$ và cách Thanh $4,5(m)$ được mô tả bằng hình vẽ bên dưới:

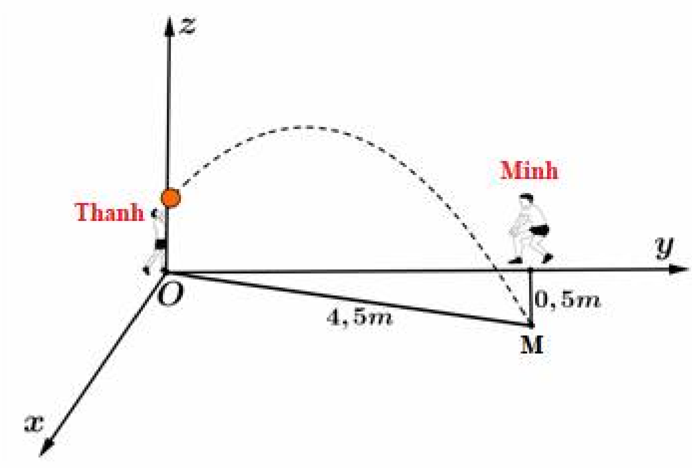


Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cx + d = 0$ và vuông góc với mặt đất. Khoảng cách từ bạn Minh đến mặt phẳng (α)bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai của mét)

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $4,44$



Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi M là điểm mà quả bóng chạm đất.

Khi đó $x_M = 0,5$, $y_M = \sqrt{4,5^2 - 0,5^2} = 2\sqrt{5}$

Vì $(\alpha) \perp (Oxy)$ nên (α) có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$.

Mà (α) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{OM} = \left(0,5;2\sqrt{5};0\right)$

Khi đó vec tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\vec{k}, \overrightarrow{OM}\right] = \left(-2\sqrt{5};0,5;0\right) = -\frac{1}{2}\left(4\sqrt{5};-1;0\right)$.

Do đó mặt phẳng $(\alpha): 4\sqrt{5}x - y = 0$

Vị trí bạn Minh có tọa độ là $\left(2\sqrt{5};0;0\right)$

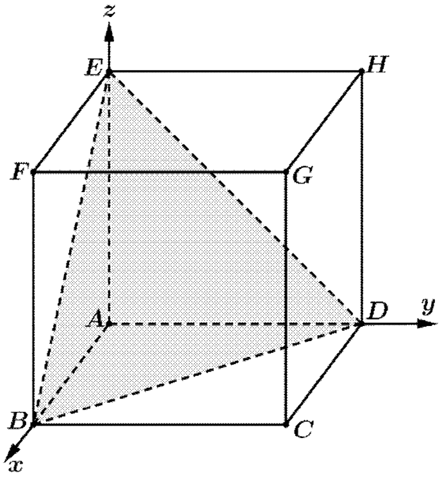
Khoảng cách từ bạn Minh đến mặt phẳng (α) là : $\dfrac{\left|4\sqrt{5}.2\sqrt{5} - 0\right|}{\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \dfrac{40}{9} \approx 4,44(m)$

Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh $1(cm)$. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimét).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $2,9$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

Ta có $A(0;0;0)$, $\overrightarrow{AE}=(0;0;1)$, $\overrightarrow{CD}=(-1;0;0)$.

Đặt $M(a;b;c)$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(a;b;c)$.

Đề cho $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$, ta được $\begin{cases}a+0=-3\\ b+0=0\\ c+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-3\\ b=0\\ c=-1\end{cases}$. Suy ra $M(-3;0;-1)$.

Mặt phẳng (EBD), phương trình theo đoạn chắn là $x+y+z-1=0$.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) bằng

$$d(M;(EBD))=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-3+0-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\approx 2{,}9(cm).$$

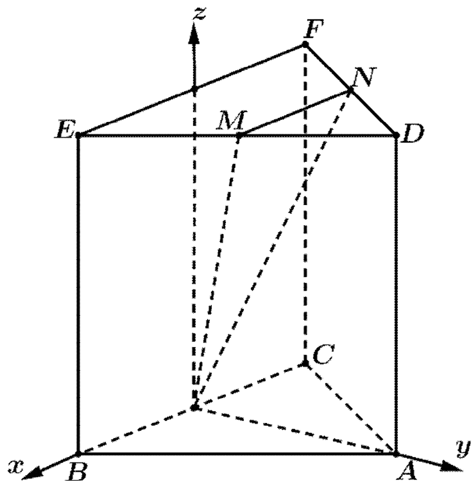
Vậy khoảng cách bằng xấp xỉ $2{,}9(cm)$.

Câu 40. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ biết rằng $AB=6(cm)$, $AD=2(cm)$. Gọi ba điểm M, N, P lần lượt là trung điểm DE, DF, BC. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên dưới. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của centimét).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $5,2$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

Ta có $P(0;0;0)$, $A\left(3\sqrt{3};0;0\right)$, $B(0;3;0)$, $C(0;-3;0)$, $E(0;3;2)$, $F(0;-3;2)$, $D\left(3\sqrt{3};0;2\right)$

Suy ra $M\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2};2\right)$, $N\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{-3}{2};2\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}\right]=\left(6;0;\dfrac{-9\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow \vec{n}=\left(4;0;-3\sqrt{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $4x-3\sqrt{3}z=0$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm cạnh AC, $IB \Rightarrow I\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{-3}{2};0\right)$, $J\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\dfrac{3}{4};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SI}+2\overrightarrow{SB}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{SJ}=\vec{0}\Leftrightarrow S\equiv J$.

Do đó $S\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\dfrac{3}{4};0\right)$.

Vậy khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) bằng $d=3\sqrt{3}\approx 5,2(cm)$.