SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÂM ĐỒNG

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT, GDTX NĂM HỌC 2023 - 2024

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 02 trang)

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 26/01/2024

Câu 1. ***(4.5 điểm)***

1.1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{mx-4m-5}{x-m}$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

1.2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-1$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=12+x_1x_2$.

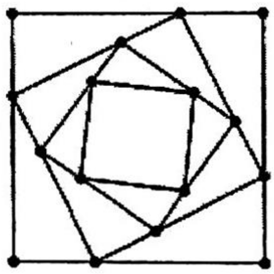
Câu 2. ***(4.5 điểm)***

2.1. Cho $a=\log_2 3$; $b=\log_2 5$. Tính $\log_{15}900$ theo a và b.

2.2. Cho tập hợp $A=\{1;2;3;...;20\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của A. Tính xác suất để 3 phần tử được chọn lập thành cấp số cộng.

Câu 3. ***(4.0 điểm)***

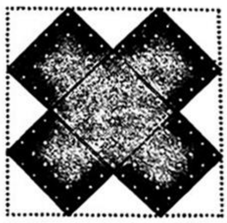
3.1. Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a $\left(a>0\right)$. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông H_1 thành ba phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2. Từ hình vuông H_2 tiếp tục làm như trên ta nhận được hình vuông H_3. Lặp lại cách chia như trên ta được dãy các hình vuông $H_1,H_2,H_3,\ldots,H_n,\ldots$ *(tham khảo hình vẽ ở bên)*. Gọi S_k là diện tích của hình vuông H_k $\left(k\in\{1;2;3;...;n;...\}\right)$. Đặt $T=S_1+S_2+S_3+...+S_n+...$ Tìm a biết $T=16$.



3.2. Giải phương trình sau trên tập số thực: $\sqrt{2x^2+3x-19}-x+1=2\sqrt{x-3}$.

Câu 4. ***(4.0 điểm)***

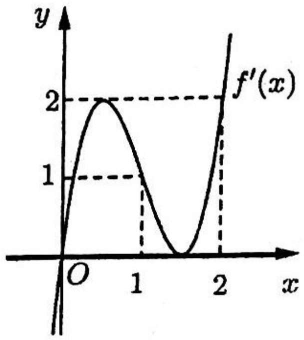
4.1. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng $12\left(dm\right)$ người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ ở bên. Sau đó người ta gập lại và hàn thành hình hộp chữ nhật *(H)* không nắp. Tính thể tích nước tối đa mà khối hộp chữ nhật *(H)* có thể chứa được.



4.2. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\widehat{BAC}=60^0$, $AB=4a$ và $AC=3a$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(B'AC\right)$ bằng a. Tính thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$.

Câu 5. *(3.0 điểm)*

5.1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ, biết $f(1)=\dfrac{5}{2}$. Tìm điều kiện của tham số thực m để bất phương trình $f(2\sin x)+\cos 2x \le 2m+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.



5.2. Cho các số thực $x,y,z\in(0;1]$ thoả mãn $x+y\ge 1+z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{xy+z^2}$.

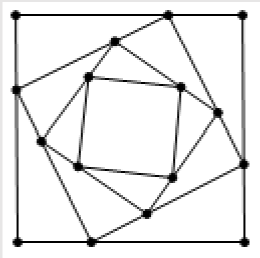
------ Hết ------

(Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **LÂM ĐỒNG**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 NĂM HỌC 2023 - 2024
(Hướng dẫn chấm gồm có 07 trang)	Môn thi: TOÁN Ngày thi: 26/01/2024

ĐÁP ÁN, HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ CHÍNH THỨC

CÂU		HƯỚNG DẪN CHẤM
Câu 1 (4.5 điểm)	**1.1 (2.5 điểm)**	Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{mx-4m-5}{x-m}$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.
		TXĐ: $D=R\setminus\left\{m\right\}$. Ta có: $f'\left(x\right)=\frac{-m^2+4m+5}{\left(x-m\right)^2}$.
		$f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4m+5>0\\ m\notin\left(3;+\infty\right)\end{cases}$
		$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<5\\ m\le 3\end{cases}$
		$\Leftrightarrow -1<m\le 3$
	1.2 (2.0 điểm)	Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-1$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=12+x_1x_2$.
		Đạo hàm: $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$. Ta có: $\Delta'=9m^2-9m^2+9=9>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$.
		Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1x_2=m^2-1\end{cases}$
		YCBT $\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2=12\Leftrightarrow 4m^2-3\left(m^2-1\right)=12\Leftrightarrow m^2=9$
		$\Leftrightarrow m=\pm 3$.
	2.1 (2.5 điểm)	Cho $a=\log_2 3;\ b=\log_2 5$. Tính $\log_{15}900$ theo a,b.
		Ta có: $\log_{15}900=\frac{\log_2 900}{\log_2 15}$.
		$=\frac{\log_2\left(2^2.3^2.5^2\right)}{\log_2\left(3.5\right)}$.
		$=\frac{\log_2\left(2^2\right)+\log_2\left(3^2\right)+\log_2\left(5^2\right)}{\log_2 3+\log_2 5}$
		$=\frac{2+2a+2b}{a+b}$.

Câu 2 (4.5 điểm)	**2.2 (2.0 điểm)**	Cho tập hợp $A=\{1;2;3;...;20\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của A. Tính xác suất để 3 phần tử được chọn lập thành cấp số cộng.
		$n(\Omega)=C_{20}^{3}$
		Giả sử 3 phần tử đó là $a;b;c$ với $a,b,c\in A$ và $a<b<c$ Trong tập A có 10 số lẻ, 10 số chẵn. Do a,b,c lập thành một CSC nên $a+c=2b$ là một số chẵn
		Do đó hai số a,c cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Ứng với 1 cách chọn hai số a,c thì xác định được duy nhất 1 số b. X là biến cố " 3 phần tử được chọn lập thành cấp số cộng". $n(X)=C_{10}^{2}+C_{10}^{2}=90$.
		Vậy xác suất của biến cố X là $P(X)=\dfrac{90}{C_{20}^{3}}=\dfrac{90}{1140}=\dfrac{3}{38}$.
Câu 3 (4.0 điểm)	**3.1 (2.0 điểm)**	Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a $(a>0)$. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông H_1 thành ba phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2. Từ hình vuông H_2 tiếp tục làm như trên ta nhận được hình vuông H_3. Lặp lại cách chia như trên ta được dãy các hình vuông $H_1,H_2,H_3,...,H_n,...$ *(tham khảo hình vẽ ở bên)*. Gọi S_k là diện tích của hình vuông H_k $(k\in\{1;2;3;...;n;...\})$. Đặt $T=S_1+S_2+S_3+...+S_n+...$. Tìm a biết $T=16$. 
		Gọi cạnh của các hình vuông $H_1,H_2,H_3,\ldots,H_n$ là $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ Ta có: $S_1=a_1{}^2=a^2$. $a_2=\sqrt{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}\Rightarrow S_2=\dfrac{5a^2}{9}$
		$a_3=\sqrt{\left(\dfrac{a_2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2a_2}{3}\right)^2}=\dfrac{a_2\sqrt{5}}{3}\Rightarrow S_3=\dfrac{5a_2{}^2}{9}=\dfrac{5^2a^2}{9^2}$ Từ đó, ta thấy diện tích các hình vuông giảm dần và lập thành cấp số nhân có công bội $q=\dfrac{5}{9}$.
		Khi đó: $T=S_1+S_2+S_3+...+S_n+...=a^2\left(1+\dfrac{5}{9}+\dfrac{5^2}{9^2}+...\right)$ $=\dfrac{1}{1-\dfrac{5}{9}}a^2=\dfrac{9}{4}a^2$.
		Theo đề: $\dfrac{9}{4}a^2=16\Rightarrow a=\dfrac{8}{3}$.

3.2 (2.0 điểm)

Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\sqrt{2x^2+3x-19}-x+1=2\sqrt{x-3}.$$

Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+3x-19\ge 0\\ x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 3$

$$\sqrt{2x^2+3x-19}-x+1=2\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+3x-19}-5\sqrt{x-3}=x-1-3\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-4)(x-7)}{\sqrt{2x^2+3x-19}+5\sqrt{x-3}}=\frac{(x-4)(x-7)}{x-1+3\sqrt{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-7)\left[\frac{2}{\sqrt{2x^2+3x-19}+5\sqrt{x-3}}-\frac{1}{x-1+3\sqrt{x-3}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=7\\ \dfrac{2}{\sqrt{2x^2+3x-19}+5\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{x-1+3\sqrt{x-3}}=0\end{array}\right.$$

Xét phương trình: $\dfrac{2}{\sqrt{2x^2+3x-19}+5\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{x-1+3\sqrt{x-3}}=0$.

$$\Leftrightarrow 2\left(x-1+3\sqrt{x-3}\right)=\sqrt{2x^2+3x-19}+5\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow 2x-2+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x^2+3x-19}$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)\sqrt{x-3}=-2(x^2-5x+10)(*)$$

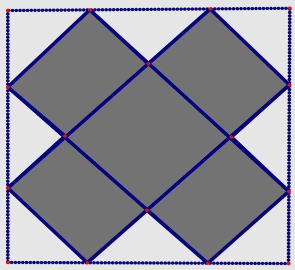
Phương trình $(*)$ có $VT=4(x-1)\sqrt{x-3}\ge 0,\ \forall x\ge 3$

Phương trình $(*)$ có $VP=-2\left(x^2-5x+10\right)\le -8,\ \forall x\ge 3$

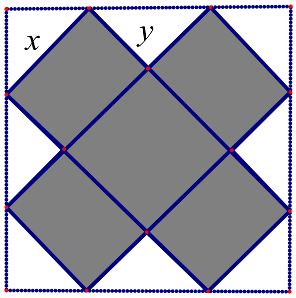
Do đó, phương trình $(*)$ vô nghiệm. So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=4; x=7$.

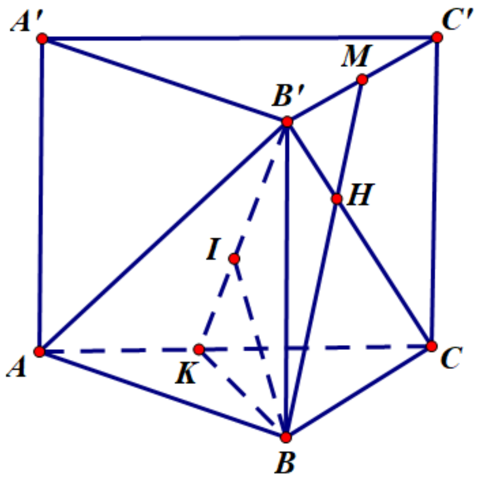
4.1 (2.0 điểm)

Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng $12(dm)$ người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ ở bên. Sau đó người ta gập lại và hàn thành hình hộp chữ nhật *(H)* không nắp. Tính thể tích nước tối đa mà khối hộp chữ nhật *(H)* có thể chứa được.

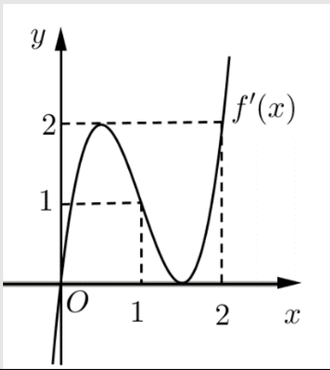


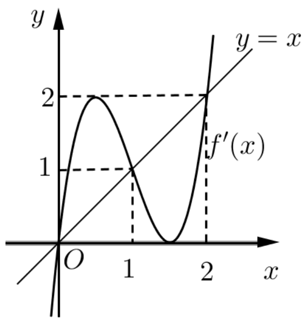
Đặt kích thước các cạnh như hình vẽ

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>

Ta có $\frac{x}{\sqrt{2}}+y\sqrt{2}+\frac{x}{\sqrt{2}}=12 \Leftrightarrow x+y=6\sqrt{2} \Leftrightarrow y=6\sqrt{2}-x$ với $0<x<6\sqrt{2}$.</td></tr>
<tr><td>Thể tích của khối hộp tạo thành là $V=x^2y=x^2\left(6\sqrt{2}-x\right)$.</td></tr>
<tr><td>Ta có: $V'(x)=3x\left(4\sqrt{2}-x\right)=0 \Rightarrow x=4\sqrt{2}$.
Bảng biến thiên :
$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & 4\sqrt{2} & & 6\sqrt{2} \\ \hline V'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline V(x) & & \nearrow & 64\sqrt{2} & \searrow & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>Vậy $\max V=64\sqrt{2}$ khi $x=4\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$.
Lượng nước tối đa mà chiếc hộp có thể chứa được là $64\sqrt{2}\left(dm^3\right)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Câu 4 (4.0 điểm)</td><td rowspan="3">4.2 (2.0 điểm)</td><td>Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\widehat{BAC}=60^0$, $AB=4a$ và $AC=3a$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(B'AC\right)$ bằng a. Tính thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$.</td></tr>
<tr><td>

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}.4a.3a.\sin 60^0=3\sqrt{3}a^2$.</td></tr>
<tr><td>Gọi H là giao điểm của MB và $B'C$. Khi đó, theo định lý Ta-let ta có $\frac{HM}{HB}=\frac{MB'}{BC}=\frac{1}{2}$.</td></tr>
</table>

		Ta có $\dfrac{d\left(M,\left(B'AC\right)\right)}{d\left(B,\left(B'AC\right)\right)}=\dfrac{HM}{HB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d\left(B,\left(B'AC\right)\right)=2d\left(M,\left(B'AC\right)\right)=2a$ Từ B kẻ BK vuông góc với AC với $K\in AC$. Kẻ BI vuông góc với $B'K$ với $I\in B'K$. Ta có $\begin{cases}BI\perp B'K\\ BI\perp AC\end{cases}\Rightarrow BI\perp\left(B'AC\right)\Rightarrow BI=d\left(B,\left(B'AC\right)\right)=2a$.
		Lại có: $BK=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AC}=\dfrac{6\sqrt{3}a^2}{3a}=2a\sqrt{3}$ và $\dfrac{1}{BI^2}=\dfrac{1}{BK^2}+\dfrac{1}{BB'^2}\Rightarrow BB'=\sqrt{\dfrac{BI^2.BK^2}{BK^2-BI^2}}=a\sqrt{6}$.
		Vậy $V_{B'.ACC'A'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{B'.ABC}=\dfrac{2}{3}S_{\Delta ABC}.BB'=\dfrac{2}{3}.3\sqrt{3}a^2.a\sqrt{6}=6\sqrt{2}a^3$.
Câu 5 (3.0 điểm)	**5.1 (1.5 điểm)**	Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ, biết $f\left(1\right)=\dfrac{5}{2}$.Tìm điều kiện của tham số thực m để bất phương trình $f\left(2\sin x\right)+\cos 2x\le 2m+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. 
		Đặt $2\sin x=t$. Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in\left(0;2\right)$. BPT trở thành $f\left(t\right)-\dfrac{t^2}{2}\le 2m$. Đặt $g\left(t\right)=f\left(t\right)-\dfrac{t^2}{2}$ với $t\in\left(0;2\right)$.
		Ta có $g'\left(t\right)=f'\left(t\right)-t$. $g'\left(t\right)=0\Leftrightarrow f'\left(t\right)=t$. Nghiệm phương trình này trên khoảng $\left(0;2\right)$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'\left(t\right)$ và đường thẳng $y=t$ với $t\in\left(0;2\right)$.



Bảng biến thiên của hàm số $g\left(t\right)=f\left(t\right)-\dfrac{t^2}{2}$ trên $\left(0;2\right)$

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)-\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$f(2)-2$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{(0;2)} g\left(t\right)=g\left(1\right)=f\left(1\right)-\dfrac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho đúng với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$2m\ge f\left(1\right)-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{2}\left(f\left(1\right)-\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow m\ge 1.$

5.2 (1.5 điểm)

Cho các số thực $x,y,z\in(0;1]$ thoả mãn $x+y\ge 1+z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{xy+z^2}$.

Nhận xét do $x,y\in(0;1]\Rightarrow(x-1)(y-1)\ge 0\Leftrightarrow xy+1\ge x+y$.

Từ giả thiết $x+y\ge 1+z$ suy ra $xy\ge z$.

Viết lại biểu thức P ta được : $P=\dfrac{\frac{x}{z}}{\frac{y}{z}+1}+\dfrac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{z}+1}+\dfrac{\frac{1}{z}}{\frac{xy}{z^2}+1}$ Đặt

$a=\dfrac{x}{z};b=\dfrac{y}{z};c=\dfrac{1}{z}$ .Ta có: $xy\ge z\Leftrightarrow\dfrac{x}{z}.\dfrac{y}{z}\ge\dfrac{1}{z}\ge 1$

Khi đó $P=\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}+\dfrac{c}{ab+1},ab\ge c\ge 1$

Ta có bất đẳng thức : $\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{a+1}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}\left(1\right)$

Thật vậy: $(1)\Leftrightarrow\dfrac{(a+b)+2}{ab+(a+b)+1}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}\Leftrightarrow(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$ luôn đúng do $ab\ge 1$. Lại có:

		$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=(\frac{a}{b+1}+1)+(\frac{b}{a+1}+1)-2$ $=(a+b+1)(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1})-2\geq(2\sqrt{ab}+1).\frac{2}{1+\sqrt{ab}}-2$ $\Rightarrow\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}$
		Từ đó $\Rightarrow P=\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}+\frac{c}{ab+1}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{ab+1}$ đặt $t=\sqrt{ab}\geq 1$ Ta có $P\geq\frac{2t}{1+t}+\frac{1}{t^2+1}=f(t)$
		Xét hàm số $f(t)=\frac{2t}{1+t}+\frac{1}{t^2+1}$ lên tục trên $[1;+\infty)$ Có $f'(t)=\frac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{(1+t)^2(t^2+1)^2}>0,\forall t\in(1;+\infty)$ Do đó hàm số *f(t)* đồng biến trên $[1;+\infty)\Rightarrow f(t)\geq f(1)=\frac{3}{2}$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow t=1\Rightarrow a=b=c=1\Rightarrow x=y=z=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.

Lưu ý: Giám khảo tính điểm cho học sinh nếu làm theo cách khác.

---- Hết----