

CHUYÊN ĐỀ 2

BÀI 3. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững khái niệm và tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- + Trình bày và áp dụng được công thức tìm đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- + Nhận biết dạng đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit.

❖ Kỹ năng

- + Biết cách vận dụng tính chất của các hàm số mũ, hàm số lôgarit vào việc so sánh hai số, hai biểu thức chứa mũ và lôgarit.
- + Biết cách vẽ đồ thị các hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- + Tìm được đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Hàm số mũ

Định nghĩa

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) được gọi là hàm số mũ cơ số a .

Tập xác định

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Đạo hàm

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) có đạo hàm tại mọi x .

Đặc biệt: $(e^x)' = e^x$.

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1);$$

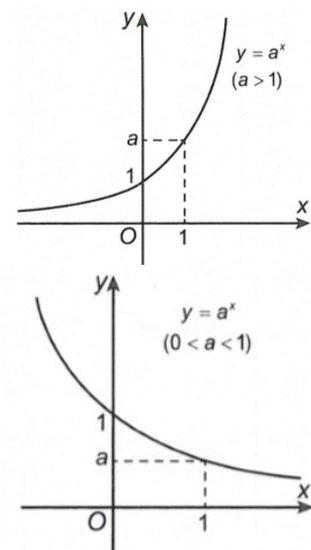
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1).$$

Sự biến thiên

- Khi $a > 1$ hàm số luôn đồng biến.
- Khi $0 < a < 1$ hàm số luôn nghịch biến.

Đồ thị

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox và luôn đi qua các điểm $(0;1)$, $(1;a)$ và nằm phía trên trục hoành.



2. Hàm số lôgarit

Định nghĩa

Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0; a \neq 1$) được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .

Tập xác định

Tập xác định: $(0; +\infty)$.

Đạo hàm

Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0; a \neq 1$) có đạo hàm tại mọi x dương và **Đặc biệt:** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad (a > 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1).$$

Sự biến thiên

- Khi $a > 1$ hàm số luôn đồng biến.
- Khi $0 < a < 1$ hàm số luôn nghịch biến.

Đồ thị

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy và luôn đi qua các điểm $(1;0)$, $(a;1)$ và nằm bên phải trục tung.

Nhận xét: Đồ thị của các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

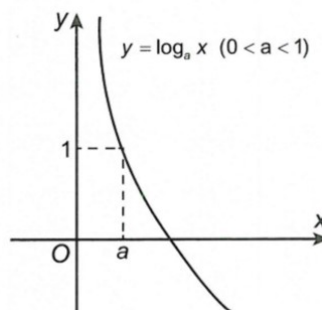
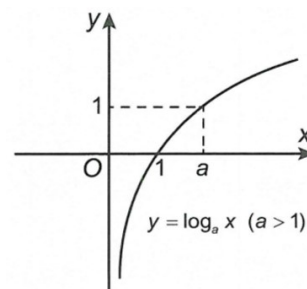
Ứng dụng

1. Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn r (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $S_n = A + nAr = A(1 + nr)$

2. Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n}{A} \right);$$



Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $S_n = A(1+r)^n$.

$$r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1;$$

$$A = \frac{S_n}{(1+r)^n}$$

3. Tiền gửi hàng tháng: Mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào một thời gian cố định.

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n \cdot r}{A(1+r)} + 1 \right);$$

Công thức tính: Đầu mỗi tháng, khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép r (% / tháng) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n .

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n \cdot r}{A(1+r)} + 1 \right);$$

$$A = \frac{S_n \cdot r}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}$$

Ta có
$$S_n = \frac{A}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$$

4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r (% / tháng). Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng.

Công thức tính:
$$X = \left[A(1+r)^n - S_n \right] \frac{r}{(1+r)^n - 1}.$$

Khi đó số tiền còn lại sau n tháng là
$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

5. Vay vốn trả góp: Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r (% / tháng). Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

Công thức tính: Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên

$$A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0.$$

Suy ra mỗi lần hoàn nợ số tiền là
$$X = \frac{A(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}.$$

6. Bài toán tăng lương: Một người được lãnh lương khởi điểm là A (đồng/tháng). Cứ sau n tháng thì lương người đó được tăng thêm

r (% / tháng). Hỏi sau kn tháng, người đó lĩnh được bao nhiêu tiền?

Công thức tính: Lương nhận được sau kn tháng là

$$S_{kn} = An \cdot \frac{(1+r)^k - 1}{r}.$$

7. Bài toán tăng trưởng dân số

Công thức tính tăng trưởng dân số:

$$X_m = X_n (1+r)^{m-n}, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n$$

Trong đó: r % là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m ;

X_m dân số năm m , X_n dân số năm n .

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là $r\% = m-n \sqrt{\frac{X_m}{X_n}} - 1$

8. Lãi kép liên tục

Gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r (% / năm) thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau n năm ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $S_n = A(1+r)^n$.

Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{m}$ % thì số tiền thu được sau n năm là:

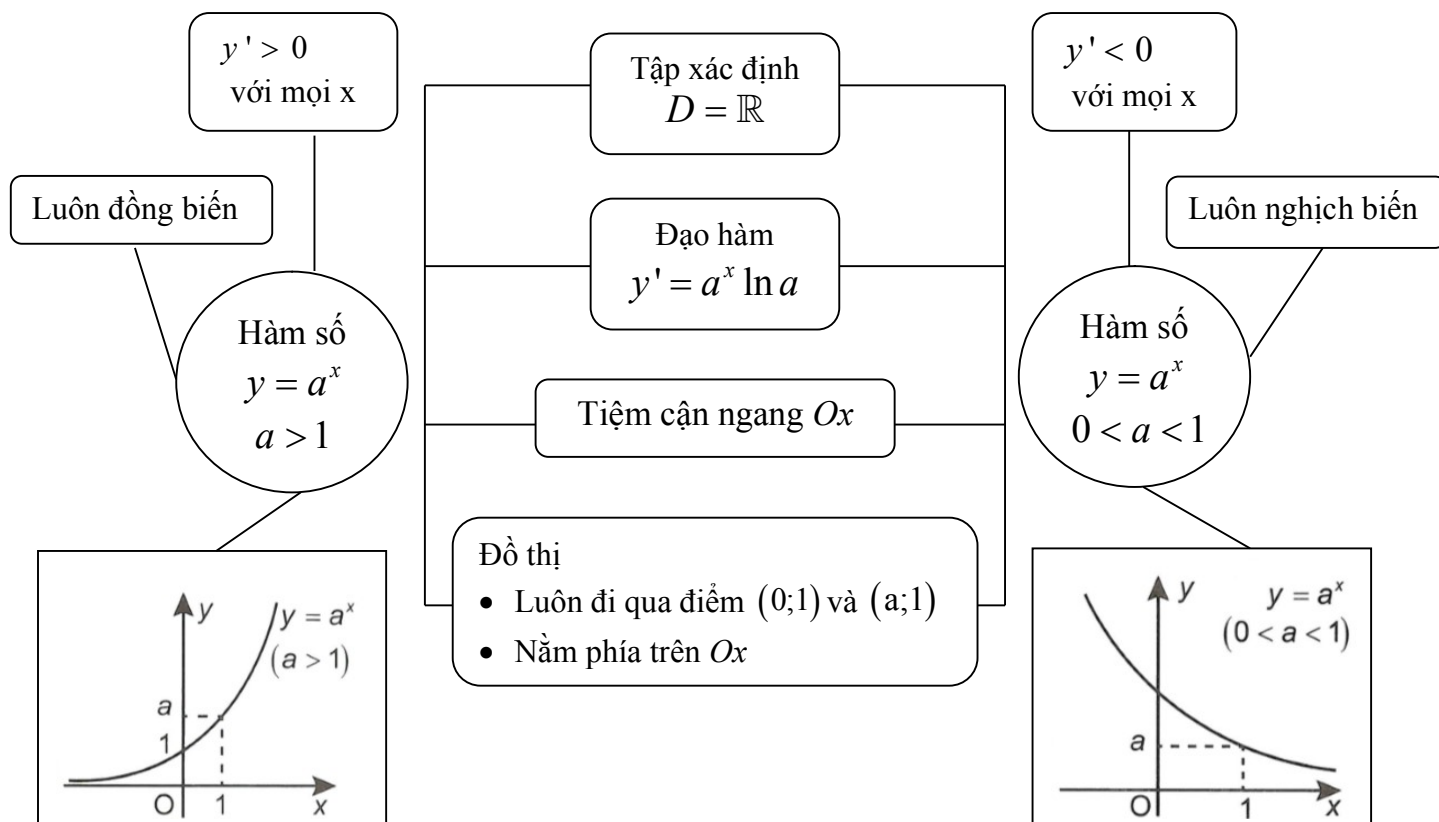
$$S_n = A \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{m \cdot n}$$

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là $m \rightarrow +\infty$, gọi là hình thức lãi kép liên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là:

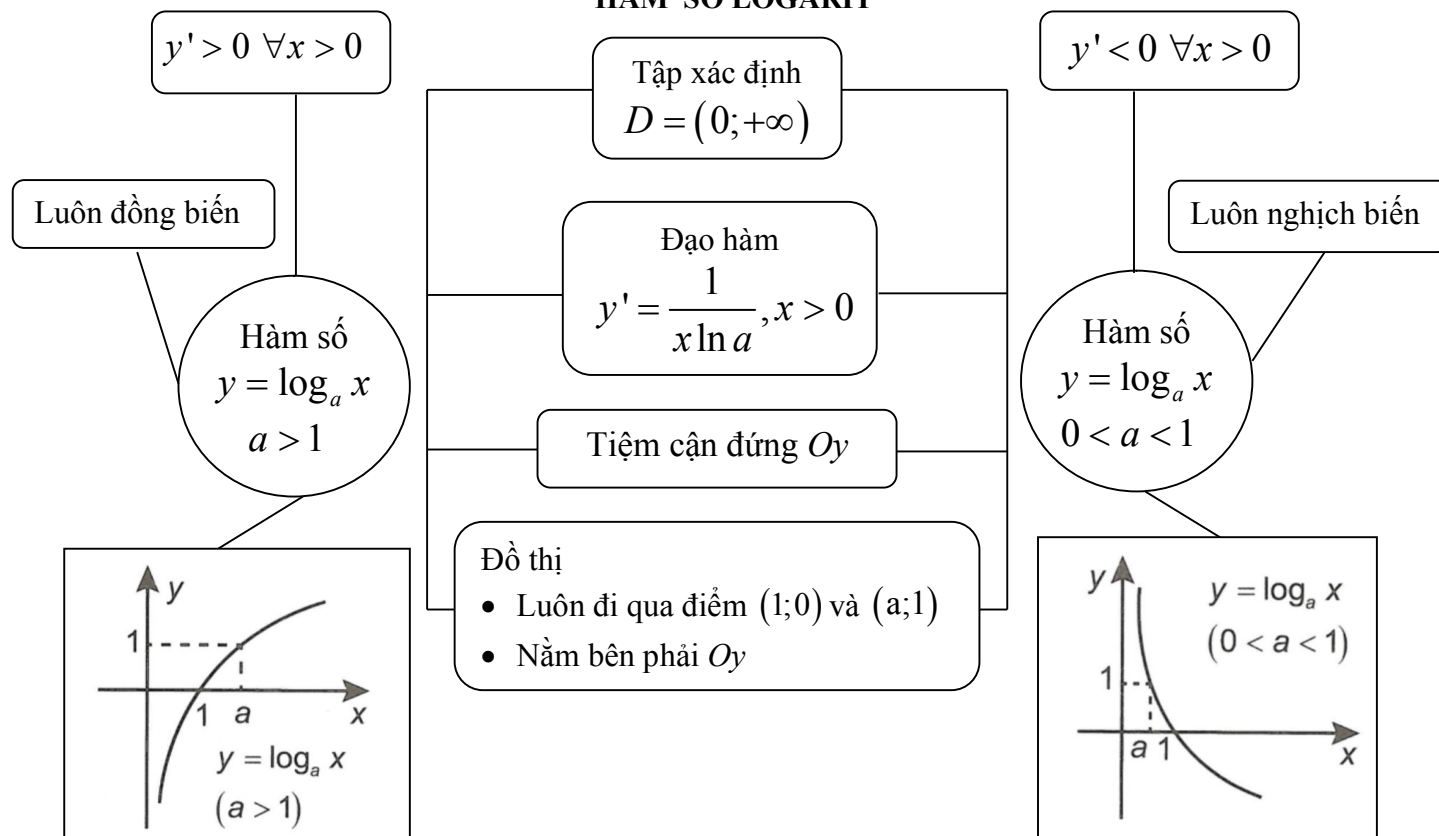
$$S = Ae^{n \cdot r} \text{ (công thức tăng trưởng mũ).}$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

HÀM SỐ MŨ



HÀM SỐ LÔGARIT



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Đạo hàm, sự biến thiên của hàm số

Bài toán 1: Tìm đạo hàm của các hàm số mũ – hàm số lôgarit

Phương pháp giải

Sử dụng công thức đạo hàm của hàm số mũ, lôgarit.

$$(a^x)' = a^x \ln a; (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(3^x)' = 3^x \ln 3$

B. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

C. $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$

D. $(e^{2x})' = e^{2x}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3 \text{ nên đáp án A đúng.}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ nên đáp án B đúng.}$$

$$(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3} \text{ nên đáp án C đúng.}$$

$$(e^{2x})' = (2x)' \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x} \text{ nên đáp án D sai.}$$

Chọn D.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm của hàm số $y = 16^{x^2+2}$.

A. $y' = (x^2 + 2) \cdot 16^{x^2+1}$

B. $y' = 8x \cdot 16^{x^2+2} \ln 4$

C. $y' = 16^{x^2+2} \cdot \ln 16$

D. $y' = 8x \cdot 4^{2x^2+4} \cdot \ln 2$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = (x^2 + 2)' \cdot 16^{x^2+2} \cdot \ln 16 = 2x \cdot 16^{x^2+2} \cdot 4 \ln 2 = 8x \cdot 4^{2x^2+4} \cdot \ln 2.$$

Chọn D.

Ví dụ 3: Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

A. $f'(x) = \ln(x^2 + 1)$

B. $f'(x) = \ln 2x$

C. $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

D. $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$

Chọn D.

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + \sqrt{x+1})$.

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1-\sqrt{x+1})}$

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$

C. $y' = \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$

D. $y' = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, ta có

$$y' = \left(\ln(1 + \sqrt{x+1}) \right)' = \frac{(1 + \sqrt{x+1})'}{1 + \sqrt{x+1}}$$

Mà $(1 + \sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ nên $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

Chọn B.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$. Giá trị $f'(2)$ bằng

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{-1}{3}$

D. $\frac{-2}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = \frac{(e^{-x} + xe^{-x})'}{e^{-x} + xe^{-x}} = \frac{-e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x}}{e^{-x} + xe^{-x}} = -\frac{x}{1+x}$.

Suy ra $f'(2) = -\frac{2}{1+2} = -\frac{2}{3}$.

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \log_2(2^x + 1)$. Giá trị của $y'(1)$ bằng

A. $\frac{2}{3\ln 2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{2\ln 2}{3}$

D. $\frac{1}{3\ln 2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) = \log_2(2^x + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2^x \ln 2}{(2^x + 1) \ln 2} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{3}$.

Chọn B.

Bài toán 2: Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Phương pháp giải

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Ví dụ: Hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì

$$0 < \frac{1}{2} < 1.$$

Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Ví dụ: Hàm số $y = \log_{2a+3} x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $2a + 3 > 1 \Leftrightarrow a > -1$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm a để hàm số $y = (2a - 5)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\frac{5}{2} < a < 3$

B. $\frac{5}{2} \leq a \leq 3$

C. $a > 3$

D. $a < \frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = (2a - 5)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $0 < 2a - 5 < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < a < 3$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \log_2 x$

B. $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$

C. $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$

D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Hướng dẫn giải

Ta có hàm số $y = a^x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$.

Ở phương án B, $a = \frac{\pi}{2} > 1$ thỏa mãn khẳng định trên.

Ta loại phương án A và D vì hàm số $y = \log_a x$ chỉ xác định trên $(0; +\infty)$.

Ta loại phương án C, vì $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = (x^2 - 3)e^x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 2x.e^x + (x^2 - 3).e^x = e^x.(x^2 + 2x - 3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+

Chọn B.

 Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1: Cho hàm số $y = e^x \cdot \sin x$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $y' = e^x \cos x$ B. $y' - y = y''$ C. $y'' = 2(y' - y)$ D. $y'' = -2e^x \cos x$

Câu 2: Cho hàm số $y = e^{ax^2 + bx + c}$ đạt cực trị tại $x = 1$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng e . Giá trị của hàm số tại $x = 2$ là

- A. $y(2) = 1$ B. $y(2) = e$ C. $y(2) = e^2$ D. $y(2) = \frac{1}{e^2}$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$ B. $y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$ C. $y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$ D. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$

Câu 4: Cho hàm số $y = \log_3(3^x + x)$, biết $y'(1) = \frac{a}{4} + \frac{1}{b \ln 3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. 2 B. 7 C. 4 D. 1

Câu 5: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^\pi \cdot \pi^x$ tại điểm $x = 1$.

- A. $f'(1) = \pi$ B. $f'(1) = \pi^2 + \ln \pi$ C. $f'(1) = \pi^2 + \pi \ln \pi$ D. $f'(1) = 1$

Câu 6: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log 2x$.

- A. $y' = \frac{1}{x \ln 2}$ B. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$ C. $y' = \frac{1}{2x \ln 10}$ D. $y' = \frac{\ln 10}{x}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \ln x$. Tìm đạo hàm của hàm số $g(x) = \log_3(x^2 f'(x))$.

- A. $g'(x) = \frac{1}{x}$ B. $g'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$ C. $g'(x) = \frac{\ln 3}{x}$ D. $g'(x) = \frac{x}{\ln 3}$

Câu 8: Cho hàm số $y = e^{\cos x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $y' \cos x + y \sin x + y'' = 0$

B. $y' \sin x + y \cos x + y'' = 0$

C. $y' \sin x - y'' \cos x + y' = 0$

D. $y' \cos x - y \sin x - y'' = 0$

Câu 9: Hàm số $y = x.e^{-x}$ đạt cực trị tại

A. $x_0 = e$

B. $x_0 = e^2$

C. $x_0 = 1$

D. $x_0 = 2$

Câu 10: Cho hàm số $y = x.e^{\frac{x^2}{2}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $xy' = (1 + x^2).y'$

B. $xy' = (1 + x^2).y$

C. $xy' = (1 - x^2).y'$

D. $xy' = (1 - x^2).y$

Câu 11: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$

B. $y = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3}\right)^x$

C. $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$

D. $y = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right)^x$

Câu 12: Các giá trị thực của tham số a để hàm số $y = \log_M x$, $M = a^2 - 4$ nghịch biến trên tập xác định là

A. $2 < a < \sqrt{5}$

B. $a = \sqrt{5}$

C. $-\sqrt{5} < a < -2$; $2 < a < \sqrt{5}$

D. $a = 2$

Câu 13: Với giá trị nào của tham số a thì hàm số $y = (a^2 - 3a + 3)^x$ đồng biến?

A. $a = 1$

B. $a = 2$

C. $a \in (1; 2)$

D. $a \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

Câu 14: Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $a^{\frac{\sqrt{3}}{2}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$; $\log_b \frac{3}{4} < \log_b \frac{4}{5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $0 < a < 1$, $0 < b < 1$

B. $0 < a < 1$, $b > 1$

C. $a > 1$, $0 < b < 1$

D. $a > 1$, $b > 1$

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2} - 1$

C. $\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$

D. $\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1)$

Câu 16: Đối với hàm số $y = \ln \frac{1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $xy' + 1 = -e^y$

B. $xy' - 1 = -e^y$

C. $xy' + 1 = e^y$

D. $xy' - 1 = e^y$

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ là

A. $y' = \frac{3e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

B. $y' = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

C. $y' = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

D. $y' = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

Câu 18: Cho hàm số $y = x \sin x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $xy'' - 2y' + xy = -2\sin x$

B. $xy' + yy'' - xy' = 2\sin x$

C. $xy' + yy' - xy' = 2\sin x$

D. $xy'' + y' - xy = 2\cos x + \sin x$

Câu 19: Hàm số $y = (-3a^2 + 10a - 2)^x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi

A. $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

B. $a \in (-3; +\infty)$

C. $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$

D. $a \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$

Câu 20: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến?

A. $y = \left(\frac{\pi}{3 + \sqrt{5}}\right)^x$

B. $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$

C. $y = \left(\frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right)^x$

D. $y = 3^{-x} \left(\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right)^x$

Câu 21: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty)$?

A. $y = \log_2 x$

B. $y = x^2 + \log_2 x$

C. $y = x + \log_2 x$

D. $y = \log_2 \frac{1}{x}$

Câu 22: Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x + 1)$ là

A. $y' = \frac{1}{(4x + 1)\ln 3}$

B. $y' = \frac{4}{(4x + 1)\ln 3}$

C. $y' = \frac{\ln 3}{4x + 1}$

D. $y' = \frac{4\ln 3}{4x + 1}$

Câu 23: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log(\ln 2x)$.

A. $y' = \frac{2}{x \ln 2x \cdot \ln 10}$

B. $y' = \frac{1}{x \ln 2x \cdot \ln 10}$

C. $y' = \frac{1}{2x \ln 2x \cdot \ln 10}$

D. $y' = \frac{1}{x \ln 2x}$

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \ln(4x - x^2)$. Khẳng định nào sau đây

y đúng?

A. $f'(3) = -1,5$

B. $f'(2) = 0$

C. $f'(5) = 1$

D. $f'(-1) = -1$

Câu 25: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log_5(x^2 + x + 1)$.

A. $y' = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)\ln 5}$

B. $y' = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

C. $y' = (2x + 1)\ln 5$

D. $y' = \frac{1}{(x^2 + x + 1)\ln 5}$

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = \ln(x^4 + 1)$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng

A. $\frac{\ln 2}{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

Câu 27: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$

B. $y' = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

C. $y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

D. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Câu 28: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log(x^2 - x)$.

A. $y = \frac{1}{(x^2 - x)\ln 10}$ B. $y' = \frac{2x-1}{x^2 - x}$ C. $y' = \frac{2x-1}{(x^2 - x)\log e}$ D. $y' = \frac{2x-1}{x^2 - x} \cdot \log e$

Câu 29: Đạo hàm của hàm số $y = \log(2\sin x - 1)$ trên tập xác định là

A. $y' = \frac{-2\cos x}{2\sin x - 1}$ B. $y' = \frac{2\cos x}{2\sin x - 1}$ C. $y' = \frac{2\cos x}{(2\sin x - 1)\ln 10}$ D. $y' = \frac{-2\cos x}{(2\sin x - 1)\ln 10}$

Câu 30: Nếu $(0, 1a)^{\sqrt{3}} < (0, 1a)^{\sqrt{2}}$ và $\log_b \frac{2}{3} < \log_b \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì

A. $a > 10$ và $b < 1$ B. $0 < a < 10$ và $0 < b < 1$
C. $0 < a < 10$ và $b > 1$ D. $a > 10$ và $0 < b < 1$

Câu 31: Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$.

A. $y' = (2x - 2)e^x$ B. $y' = (x^2 + 2)e^{-x}$ C. $y' = xe^{-x}$ D. $y' = (-x^2 + 2)e^{-x}$

Câu 32: Cho hàm số $y = ex + e^{-x}$. Nghiệm của phương trình $y' = 0$ là

A. $x = 0$ B. $x = 1$ C. $x = -1$ D. $x = \ln 2$

Câu 33: Tìm đạo hàm của hàm số $y = 3^{2017x}$.

A. $y' = 2017 \ln 3 \cdot 3^{2017x}$ B. $y' = \frac{3^{2017}}{\ln 3}$ C. $y' = 3^{2017}$ D. $y' = \ln 3 \cdot 3^{2017x}$

Câu 34: Cho hàm số $y = e^x + e^{-x}$. Giá trị của $y''(1)$ là

A. $e + \frac{1}{e}$ B. $e - \frac{1}{e}$ C. $-e + \frac{1}{e}$ D. $-e - \frac{1}{e}$

Câu 35: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 1, b > 1$ B. $a > 1, 0 < b < a$
C. $0 < a < 1, 0 < b < 1$ D. $0 < a < 1, b > 1$

Bài tập nâng cao

Câu 36: Cho hàm số $f(x) = \ln 2017 - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. Tính tổng $S = f'(x) + f'(2) + \dots + f'(2017)$, ta được kết quả

A. $S = \frac{4035}{2018}$ B. $S = 2017$ C. $S = \frac{2016}{2017}$ D. $S = \frac{2017}{2018}$

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (20x^2 + 20x - 1283)e^{40x}$ trên tập hợp các số tự nhiên là

A. -1283

B. $-163.e^{280}$

C. $157.e^{320}$

D. $-8.e^{300}$

Câu 38: Các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - 2mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. Không tồn tại m

B. $m \geq \frac{1}{2}$

C. $m \leq -\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

Câu 39: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = 4^x - 2^{x+2} - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\ln 2\right]$

B. $(-\infty; 0]$

C. $(-\infty; -2\ln 2]$

D. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\ln 2\right]$

Dạng 2: Tập xác định của hàm số chứa mũ – lôgarit

Bài toán 1. Tìm tập xác định của hàm số chứa mũ – lôgarit.

Phương pháp giải

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0; a \neq 1$) có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ví dụ: Tìm tập xác định D của hàm số

Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0; a \neq 1$) có tập xác định là

$$y = \log_{x-1}(x^2 - 6x + 9).$$

$(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Hàm số xác định: } \begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 > 0 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; +\infty) \setminus \{2, 3\}.$$

$$\text{Vậy } D = (1; +\infty) \setminus \{2, 3\}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tập xác định D của hàm số $y = \ln\left(\frac{1-x}{x-2}\right)$ là

A. $(1; 2)$

B. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

C. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x-2} > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Chọn A.

Ví dụ 2: Điều kiện xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\log_9 \frac{2x}{x+1} - \frac{1}{2}}}$ là

A. $x < -3$

B. $x > -1$

C. $-3 < x < -1$

D. $0 < x < 3$

Hướng dẫn giải

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 \frac{2x}{x+1} > \frac{1}{2} \\ \frac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x+1} > 9^{\frac{1}{2}} \\ \frac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} > 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$$

Chọn C

Ví dụ 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{3^x - 2}$

A. $D = [\log_2 3; +\infty)$

B. $D = [\log_3 2; +\infty)$

C. $D = (-\infty; \log_2 3]$

D. $D = (-\infty; \log_3 2]$

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \log_3 2$.

Chọn B.

Bài toán 2. Tìm tham số m để hàm số xác định trên khoảng cho trước

 **Phương pháp giải**

Bài toán: Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

Áp dụng tính chất

- Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

Bài toán: Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định trên khoảng D .

- Cô lập tham số m .
- Sử dụng phương pháp khảo sát hàm số.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 5

B. 2

C. 4

D. 3

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 4m^2 - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$

Chọn D.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \log_2 [(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3]$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

A. $m \leq -2$

B. $m > -2$

C. $m < -2$

D. $m \geq -2$

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$.

Trường hợp 1: $a \neq 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ 4(m+2)^2 - 4(m+2)(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Trường hợp 2: $a = 0 \Leftrightarrow m = -2$, ta có

$$(*) \Leftrightarrow 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (đúng), nhận } m = -2$$

Vậy $m \geq -2$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$?

A. 9

B. 10

C. 11

D. 8

Hướng dẫn giải

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi $4^x - 2^x + m > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Khi đó (1) trở thành $t^2 - t + m > 0 \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m > -t^2 + t \forall t \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m > \max_{(0; +\infty)} f(t) = \frac{1}{4} \text{ với } f(t) = -t^2 + t.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{1;2;3;...;8;9\}$.

Chọn A.

Ví dụ 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(-10;10)$ để hàm số

$$y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3} \text{ xác định trên khoảng } (0; +\infty)?$$

A. 13

B. 11

C. 12

D. 10

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định $\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3 \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ (*).

Đặt $t = \log_3 x, t \in \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow mt^2 - 4t + m + 3 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Trường hợp 1: $m = 0$. Phương trình có nghiệm (loại $m = 0$).

Trường hợp 2: $m \neq 0$. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - m(m+3) < 0 \Leftrightarrow m < -4 \text{ hoặc } m > 1.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; 2; 3; ...; 8; 9\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên thỏa mãn.

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (3x - x^2)^{\frac{\pi}{2}} + \log_2(x-1)^4$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1; 3\}$

B. $D = (1; 3)$

C. $D = (0; 3) \setminus \{1\}$

D. $D = [1; 3]$

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x-2)^{\log 100} + \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

A. $D = (3; +\infty)$

B. $D = (2; 3)$

C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

D. $D = (-1; 3)$

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{2^x - 1} - \log(x-2)^4$.

A. $D = (2; +\infty)$

B. $D = [0; +\infty)$

C. $D = [0; +\infty) \setminus \{2\}$

D. $D = (0; +\infty) \setminus \{2\}$

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2 \frac{x-1}{x}$.

A. $D = (1; +\infty)$

B. $D = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

C. $D = (0; 1)$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln(\sqrt{x^2 + x - 2} - x)$.

A. $D = (-\infty; -2)$

B. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

C. $D = (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$

D. $D = [-2; 2)$

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{5^{x-1} - 25} + (x-4)^{-2}$

A. $D = (-\infty; 3)$

B. $D = (4; +\infty)$

C. $D = (-\infty; 3]$

D. $D = [3; +\infty) \setminus \{4\}$

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $y = 2017^{\sqrt{2-x^2}}$.

A. $D = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

B. $D = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

C. $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

D. $D = (-\infty; -\sqrt{2}]$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{1}{(x-m)\log_2[x^2 - 2(2m-1)x + 4m^2]}$. Các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho xác định với mọi $x \in (1; +\infty)$ là

A. $m \in (-\infty; 2)$

B. $m \in (-1; 1]$

C. $m \in (-\infty; 1)$

D. $m \in (-\infty; 1]$

Câu 9: Điều kiện xác định của phương trình $\log^4(x-1) + \log^2(x-1)^2 = 25$ là

A. $x \in \mathbb{R}$

B. $x \neq 1$

C. $x \geq 1$

D. $x > 1$

Câu 10: Tập xác định D của hàm số $y = \log_3 \frac{10-x}{x^2-3x+2}$ là

A. $D = (2; 10)$

B. $D = (1; +\infty)$

C. $D = (-\infty; 10)$

D. $D = (-\infty; 1) \cup (2; 10)$

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

A. $-2 < m < 2$

B. $m > 2$ hoặc $m < -2$

C. $m > -2$

D. $-2 \leq m \leq 2$

Câu 12: Hàm số $y = (x^2 - 16)^{-5} - \ln(24 - 5x - x^2)$ có tập xác định là

A. $(-8; -4) \cup (3; +\infty)$

B. $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$

C. $(-8; 3) \setminus \{-4\}$

D. $(-4; 3)$

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(5^{x+2} - 125)$ là

A. $[1; +\infty)$

B. $(1; +\infty)$

C. $(2; +\infty)$

D. $[2; +\infty)$

Câu 14: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\ln(x-1) + \ln(x+1)}$ là

A. $(1; +\infty)$

B. $(-\infty; \sqrt{2})$

C. $\emptyset$

D. $[\sqrt{2}; +\infty)$

Câu 15: Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi

A. $m > \frac{1}{4}$

B. $m > 0$

C. $m \geq \frac{1}{4}$

D. $m < \frac{1}{4}$

Câu 16: Tập xác định D của hàm số $y = \log(x^2 - 6x + 5)$ là

A. $D = (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$

B. $D = (1; 5)$

C. $D = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$

D. $D = [1; 5]$

Câu 17: Tập xác định của hàm số $\log_2 \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}$ là.

A. $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

B. $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

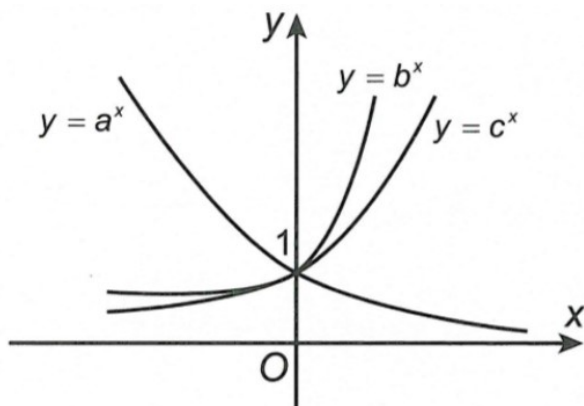
C. $\mathbb{R}$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

Dạng 3: Đồ thị hàm số

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ sau



Mệnh đề nào đúng?

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

Hướng dẫn giải

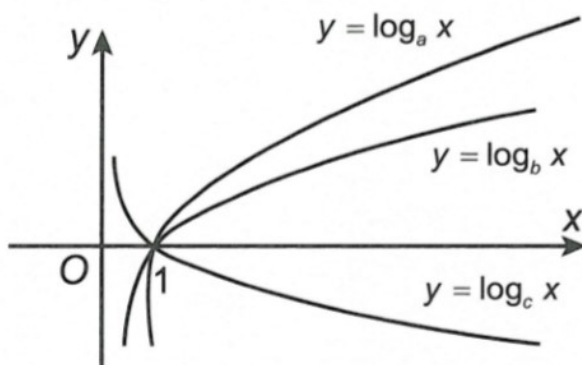
Ta có: $y = a^x$ nghịch biến nên $0 < a < 1$.

Mặt khác, $y = b^x, y = c^x$ đồng biến, đồng thời cho $x = 1 \Rightarrow y = b > y = c$.

Vậy $a < c < b$

Chọn B.

Ví dụ 2: Từ các đồ thị $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ đã cho ở hình vẽ sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0 < a < b < 1 < c$

B. $0 < c < 1 < a < b$

C. $0 < c < a < 1 < b$

D. $0 < c < 1 < b < a$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y = \log_c x$ nghịch biến nên $0 < c < 1$.

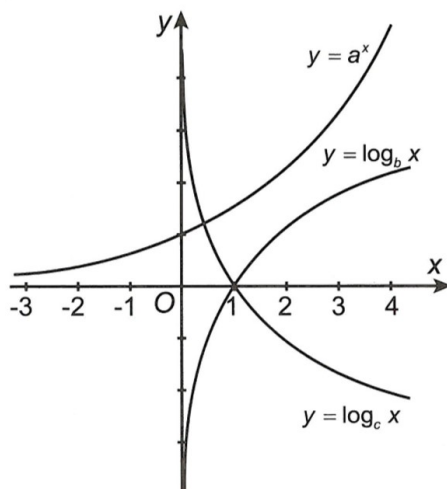
Mặt khác, $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ đồng biến nên $a, b > 1$ đồng thời cho $y = 1$ thì $x = a < x = b$. Vậy

$0 < c < 1 < a < b$.

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.

Chọn mệnh đề đúng?



A. $b < c < a$

B. $a < c < b$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

Hướng dẫn giải

Ta có $y = \log_c x$ nghịch biến nên $0 < c < 1$ còn $y = \log_b x$ và $y = a^x$ đồng biến nên $b > 1$ và $a > 1$.

Xét $y = a^x$: Với $x = 1 \Rightarrow y = a \Rightarrow 1 < a < 2$.

Xét $y = \log_b x$: Với $y = 1 \Rightarrow x = b \Rightarrow b = 2$.

Do đó $a < b$

Vậy $c < 1 < a < b$.

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 3

Bài tập cơ bản

Câu 1: Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{5}} x$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. $y' = \frac{-1}{x \ln 5}$

C. Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy .

Câu 2: Tìm phát biểu **sai**.

A. Đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) nằm hoàn toàn phía trên Ox .

B. Đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) luôn đi qua điểm $A(0; 1)$.

C. Đồ thị hàm số $y = a^x, y = \left(\frac{1}{a}\right)^x, (0 < a \neq 1)$ đối xứng nhau qua trục Ox .

D. Đồ thị hàm số $y = a^x, y = \left(\frac{1}{a}\right)^x, (0 < a \neq 1)$ đối xứng nhau qua trục Oy .

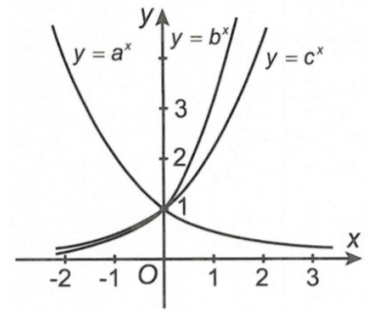
Câu 3: Cho đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $c > b > a$

B. $b > a > c$

C. $c > a > b$

D. $b > c > a$



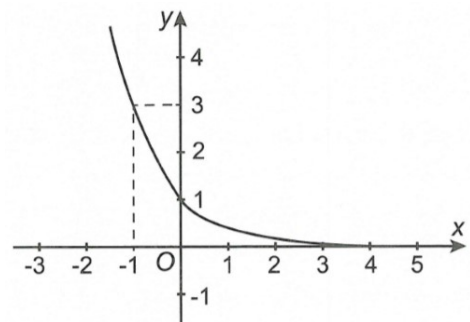
Câu 4: Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên?

A. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

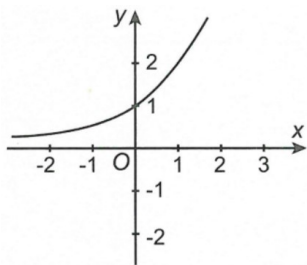
B. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

C. $y = 3^x$

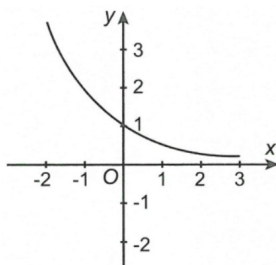
D. $y = (\sqrt{2})^x$



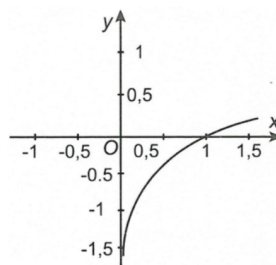
Câu 5: Trong các hình sau, hình nào là dạng đồ thị của hàm số $y = a^x, a > 1$?



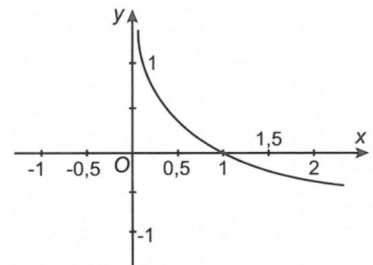
(I)



(II)



(III)



(IV)

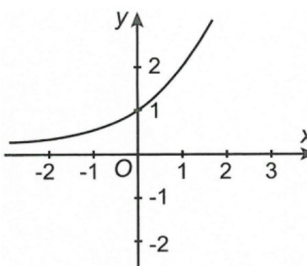
A. (I)

B. (II)

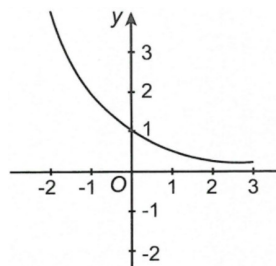
C. (III)

D. (IV)

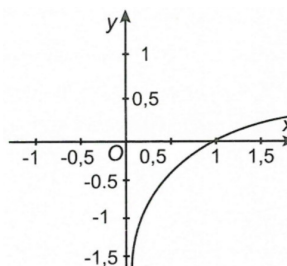
Câu 6: Trong các hình sau, hình nào là dạng đồ thị của hàm số $y = a^x, 0 < a < 1$?



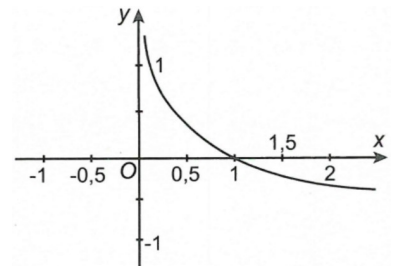
(I)



(II)



(III)



(IV)

A. (I)

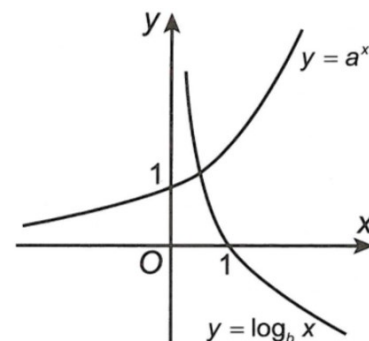
B. (II)

C. (IV)

D. (III)

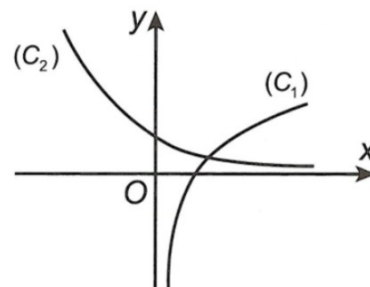
Câu 7: Quan sát hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a > 1, b > 1$ B. $1 > a > 0, b > 1$
C. $a > 1, 0 < b < 1$ D. $0 < a < 1, 0 < b < 1$



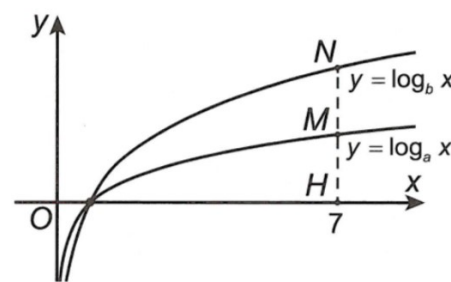
Câu 8: Cho hai hàm số $y = \log_b x, y = a^x$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a > 1, b > 1$ B. $0 < a, b < 1$
C. $0 < a < 1 < b$ D. $a > 1, b < 1$



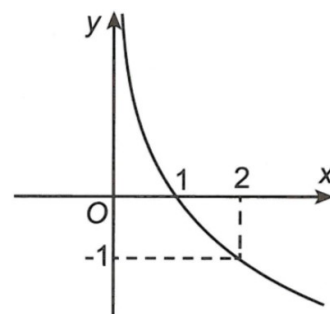
Câu 9: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại H, M, N . Biết rằng $HM = MN$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a = 7b$ B. $a = 2b$
C. $a = b^7$ D. $a = b^2$



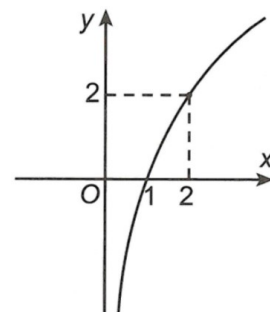
Câu 10: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây?

- A. $y = \log_2 x$ B. $y = \log_{0,5} x$
C. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ D. $y = -3x + 1$

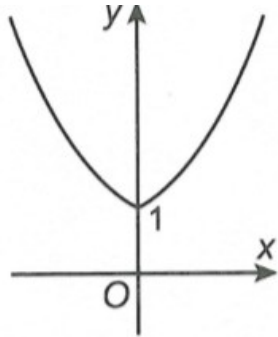
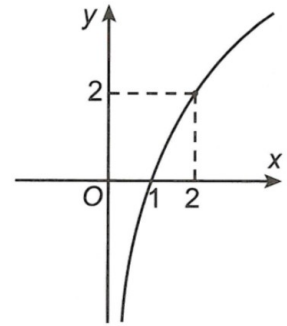


Câu 11: Với giá trị nào của a để hàm số $y = \log_a x (0 < a \neq 1)$ có đồ thị là hình bên?

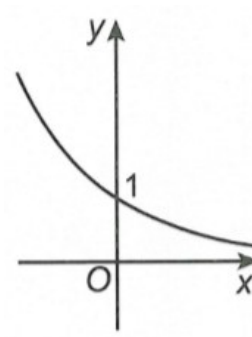
- A. $a = \frac{1}{2}$ B. $a = 2$
C. $a = \sqrt{2}$ D. $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$



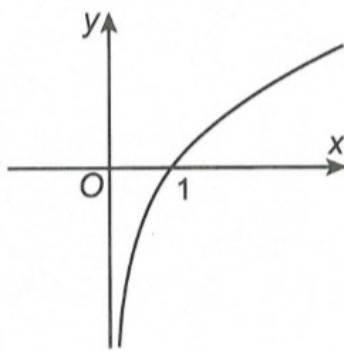
Câu 12: Biết hàm số $y = 2^x$ có đồ thị là hình bên. Khi đó, hàm số $y = 2^{|x|}$ có đồ thị là hình nào trong bốn hình được liệt kê ở bốn **A, B, C, D** dưới đây?



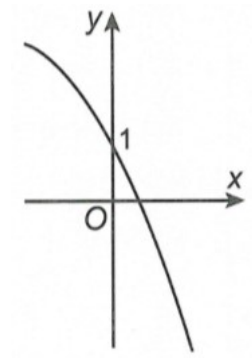
Hình 1



Hình 2



Hình 3



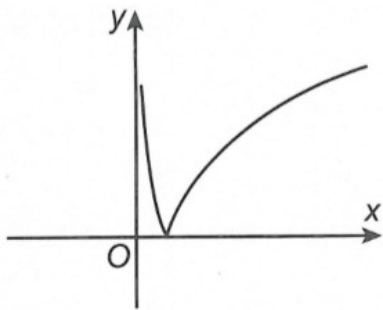
Hình 4

- A.** Hình 4 **B.** Hình 2 **C.** Hình 3 **D.** Hình 1

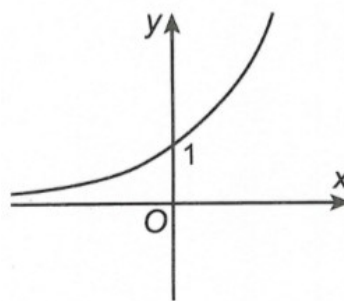
Câu 13: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^2 e^x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

- A.** e **B.** $\frac{1}{e}$ **C.** $2e$ **D.** 0

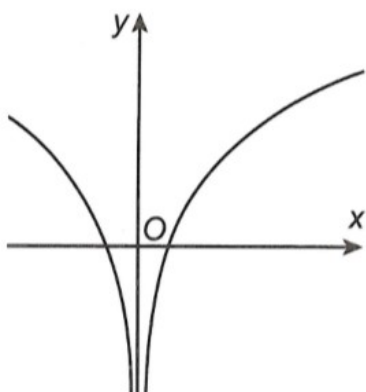
Câu 14: Cho hàm số $y = \log_2(2x)$. Khi đó, hàm số $y = |\log_2(2x)|$ có đồ thị là hình nào trong bốn hình được liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây?



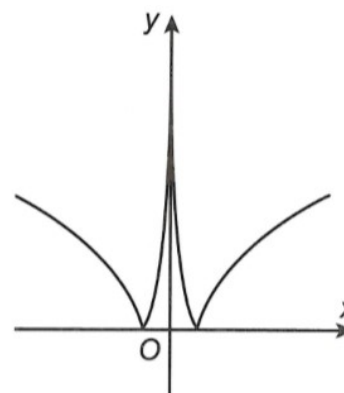
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 3

B. Hình 2

C. Hình 1

D. Hình 4

Câu 15: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{|x|}$ trên $[-2; 2]$?

A. $\max y = 4; \min y = -\frac{1}{4}$

B. $\max y = 4; \min y = \frac{1}{4}$

C. $\max y = 1; \min y = \frac{1}{4}$

D. $\max y = 4; \min y = 1$

Câu 16: Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$,

$y = \log_b x$, $y = \log_c x$ ($0 < a, b, c \neq 1$) được vẽ trên cùng một

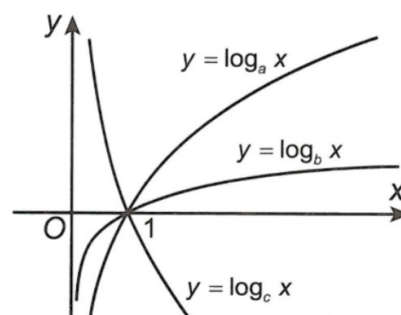
hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a > c > b$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $b > a > c$



Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right)^x$. Tìm khẳng định **sai**.

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

C. Hàm số không có cực trị.

D. $f(x)$ luôn nhỏ hơn 1 với mọi x dương.

Câu 18: Cho $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Nếu $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b)$ là

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{3 + 9^x}, x \in \mathbb{R}$. Nếu $a + b = 3$ thì $f(a) + f(b - 2)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. 2

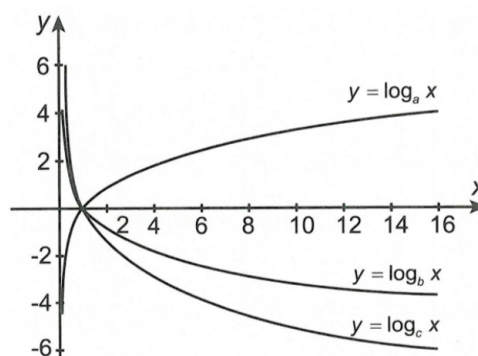
Câu 20: Hàm số $y = \log_2(x^3 - 4x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 21: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ sau:

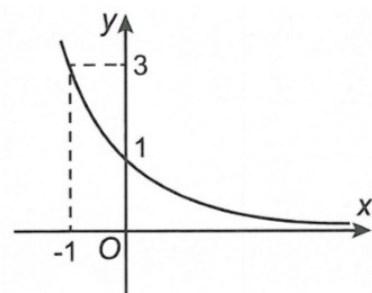
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $b < c < a$ B. $a < b < c$
C. $c < a < b$ D. $a < c < b$



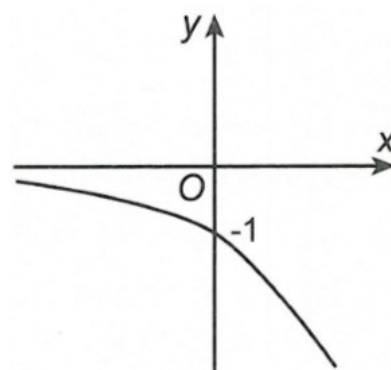
Câu 22: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây?

- A. $y = (\sqrt{3})^x$ B. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
C. $y = 2^x + \frac{5}{2}$ D. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



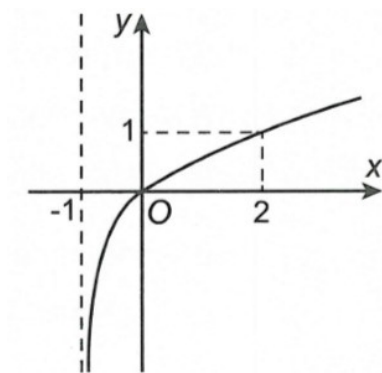
Câu 23: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây?

- A. $y = -2^x$ B. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
C. $y = 2^x$ D. $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

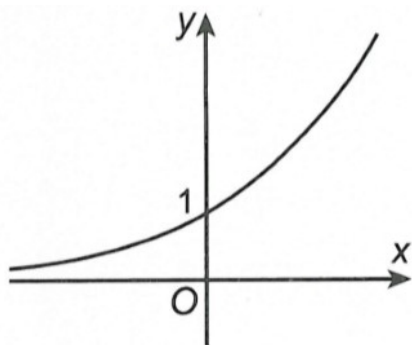


Câu 24: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây?

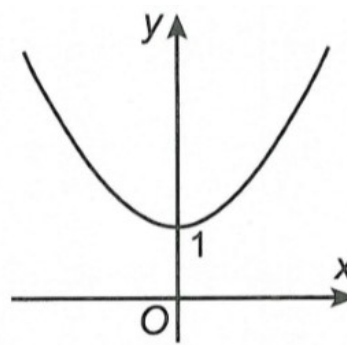
- A.** $y = \log_2 x$ **B.** $y = \log_2 (x+1)$
C. $y = \log_3 x + 1$ **D.** $y = \log_3 (x+1)$



Câu 25: Cho hàm số $y = (\sqrt{2})^x$ có đồ thị Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

- A.** $y = |(\sqrt{2})^x|$ **B.** $y = -(\sqrt{2})^x$ **C.** $y = (\sqrt{2})^{|x|}$ **D.** $y = -|(\sqrt{2})^x|$

Câu 26: Cho hàm số $y = 5^x$ có đồ thị (C) . Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng $y = x$?

- A.** $y = 5^{-x}$ **B.** $y = \log_5 x$ **C.** $y = -\log_5 x$ **D.** $y = -5^{-x}$

Câu 27: Cho hàm số $y = 3^{\frac{x}{2}}$ có đồ thị (C) . Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng $y = x$?

- A.** $y = \log_{\sqrt{3}} x$ **B.** $y = \log_3 x^2$ **C.** $y = \log_3 \left(\frac{x}{2}\right)$ **D.** $y = \frac{1}{2} \log_3 x$

Câu 28: Cho hàm số $y = -\log_2 x$ có đồ thị (C) . Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng $y = x$?

- A.** $y = 2^x$ **B.** $y = 2^{\frac{1}{x}}$ **C.** $y = 2^{-x}$ **D.** $y = 2^{\frac{x}{2}}$

Câu 29: Đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ là đồ thị nào trong các đồ thị có phương trình sau đây?

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

B. $y = 2^x$

C. $y = \log_2 \sqrt{x}$

D. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Dạng 4: Bài tập lãi suất **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Một người gửi tiết kiệm số tiền 80 000 000 đồng với lãi suất 6,9% một năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được cộng vào tiền gốc, hỏi sau 5 năm người đó rút được cả tiền gốc lẫn tiền lãi gần với con số nào sau đây?

A. 105370000 đồng

B. 111680000 đồng

C. 107667000 đồng

D. 116570000 đồng

Hướng dẫn giải

Gọi A là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất hàng năm.

$$\text{Số tiền gốc và lãi sau năm thứ nhất là } S_1 = A + A.r = A(1+r).$$

$$\text{Số tiền gốc và lãi sau năm thứ hai là } S_2 = S_1 + S_1.r = A(1+r)^2.$$

...

Số tiền gốc và lãi người đó rút ra được sau 5 năm là

$$S_5 = A.(1+r)^5 = 80000000.(1+6,9\%)^5 \approx 111680799 \text{ (đồng)}$$

Chọn B.

Ví dụ 2: Một người gửi ngân hàng 100 triệu với lãi suất 0,5% một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được cộng vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu?

A. 45 tháng

B. 46 tháng

C. 47 tháng

D. 44 tháng

Hướng dẫn giải

$$\text{Sau } n \text{ tháng, tổng số tiền gốc và lãi là: } 100(1+0,5\%)^n.$$

$$\text{Theo đề bài: } 100(1+0,5\%)^n > 125 \Leftrightarrow n > \log_{(1+0,5\%)} \frac{125}{100} \approx 44,74$$

Vậy sau ít nhất 45 tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

Chọn A.

Ví dụ 3: Bác Toàn gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000 đồng. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất

Ghi nhớ:

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$S_n = A(1+r)^n$$

Từ công thức lãi kép

$$S_n = A(1+r)^n, \text{ ta suy ra}$$

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n}{A} \right).$$

Từ công thức lãi kép

$$S_n = A(1+r)^n, \text{ ta có}$$

không thay đổi trong thời gian gửi.

- A. 0,8% B. 0,6% C. 0,7% D. 0,5%

$$r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1.$$

Hướng dẫn giải

Gọi r là lãi suất tiền gửi của ngân hàng theo tháng. A, S_n lần lượt là số tiền gửi ban đầu và số tiền sau $n = 9$ tháng. Áp dụng công thức lãi kép ta có

$$S_n = A(1+r)^n \Leftrightarrow 61758000 = 58000000(1+r)^9$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[9]{\frac{61758000}{58000000}} - 1 \approx 7.10^{-3} = 0,7\%$$

Vậy lãi suất ngân hàng hàng tháng là 0,7%

Chọn C.

Ví dụ 4: Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% mỗi tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh trả hết nợ ngân hàng?

- A. 65 B. 66 C. 67 D. 68

Hướng dẫn giải

Đặt $A = 500$ triệu là số tiền đã vay, $X = 10$ triệu là số tiền trả trong mỗi tháng và $r = 0,85\%$ là lãi suất ngân hàng, n là số tháng anh An phải trả hết nợ.

Theo đề bài:

Cuối tháng thứ nhất anh An còn nợ số tiền là

$$A + Nr - X = A(1+r) - X.$$

Cuối tháng thứ hai anh An còn nợ số tiền là

$$[A(1+r) - X] + [A(1+r) - X]r - X = A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1].$$

Cuối tháng thứ ba anh An còn nợ số tiền là

$$[A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1]](1+r) - X = A(1+r)^3 - X[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$$

...

Cuối tháng thứ n anh An còn nợ số tiền là

$$A(1+r)^n - X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1]$$

Để sau n tháng, anh An trả hết nợ thì

Bài toán vay vốn trả góp:

Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r (% / tháng). Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

Cách tính số tiền còn lại sau n tháng là:

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì

$$A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0.$$

Suy ra

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{X}{X - Ar} \right).$$

$$A(1+r)^n - X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n = X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1]$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n = X \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{X}{X - Ar} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)} \left(\frac{X}{X - Ar} \right)$$

$$\text{Áp dụng ta có: } n = \log_{(1+0,0085)} \left(\frac{10}{10 - 500.0,0085} \right) \Leftrightarrow n \approx 65,38.$$

Vậy anh An phải trả trong vòng 66 tháng.

Chọn B.

Ví dụ 5: Bác An có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Bác gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý; 200 triệu còn lại bác gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, bác rút tất cả số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, bác An thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi? (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

- A. 75,304 triệu đồng B. 75,303 triệu đồng
C. 470,656 triệu đồng D. 475,304 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Công thức tính lãi kép là $S_n = A(1+r)^n$.

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm theo kì hạn quý là:

$$S_1 = 200(1 + 2,1\%)^4 \text{ triệu đồng}$$

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm theo kì hạn tháng là:

$$S_2 = 200(1 + 0,73\%)^{12} \text{ triệu đồng}$$

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm là $S_1 + S_2$ triệu đồng.

Tổng số tiền bác An thu được sau 2 năm là

$$S = (S_1 + S_2)(1 + 0,73\%)^{12} = 475,304 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy tiền lãi bác An thu được sau 2 năm là $L = S - 400 = 75,304$ triệu đồng.

Chọn A.

Ví dụ 6: Một người vay ngân hàng số tiền 350 triệu đồng, mỗi tháng trả

góp 8 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 0,79% một tháng. Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Hỏi số tiền phải trả ở kỳ cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 2921000 đồng B. 7084000 đồng
C. 2944000 đồng D. 7140000 đồng

Hướng dẫn giải

Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất nên đây là bài toán vay vốn trả góp cuối kỳ.

Gọi A là số tiền vay ngân hàng, B là số tiền trả trong mỗi chu kỳ, $d = r\%$ là lãi suất cho số tiền chưa trả trên một chu kỳ, n là số kỳ trả nợ.

Số tiền còn nợ ngân hàng (tính cả lãi) trong từng chu kỳ như sau:

+ Đầu kỳ thứ nhất là A

+ Cuối kỳ thứ nhất là $A(1+d) - B$.

+ Cuối kỳ thứ hai là

$$[A(1+d) - B](1+d) - B = A(1+d)^2 - B[(1+d) + 1]$$

+ Cuối kỳ thứ ba là

$$[A(1+d)^2 - B[(1+d) + 1]](1+d) - B = A(1+d)^3 - B[(1+d)^2 + (1+d) + 1]$$

...

+ Theo giả thiết quy nạp, cuối kỳ thứ n là

$$A(1+d)^n - B[(1+d)^{n-1} + \dots + (1+d) + 1] = A(1+d)^n - B \frac{(1+d)^n - 1}{d}$$

Vậy số tiền còn nợ (tính cả lãi) sau n chu kỳ là

$$A(1+d)^n - B \frac{(1+d)^n - 1}{d}.$$

$$\text{Người đó trả hết nợ ngân hàng khi } A(1+d)^n - B \frac{(1+d)^n - 1}{d} = 0$$

$$\Leftrightarrow 350.1,0079^n - 8 \cdot \frac{1,0079^n - 1}{0,0079} = 0 \Leftrightarrow n \approx 53,9.$$

Tức là phải mất 54 tháng người này mới trả hết nợ.

Cuối tháng thứ 53, số tiền còn nợ (tính cả lãi) là

$$S_{53} = 350.1,0079^{53} - 8 \cdot \frac{1,0079^{53} - 1}{0,0079} \text{ (triệu đồng)}$$

Kì trả nợ tiếp theo là cuối tháng thứ 54, khi đó phải trả số tiền S_{53} và lãi của số tiền này nữa là $S_{53} + 0,0079.S_{53} = S_{53} \cdot 1,0079 \approx 7,139832$ (triệu đồng).

Chọn D.

Ví dụ 7: Ông A vay dài hạn ngân hàng 300 triệu, với lãi suất 12% năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một năm kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một năm, số tiền hoàn ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 4 năm kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

$$\text{A. } m = \frac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1} \text{ (triệu đồng)} \quad \text{B. } m = 36(1,12)^2 \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{C. } m = \frac{36(1,12)^3 - 1}{(1,12)^3} \text{ (triệu đồng)} \quad \text{D. } m = \frac{300(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1} \text{ (triệu đồng)}$$

Hướng dẫn giải

Số tiền nợ sau năm thứ nhất: $T_1 = 300(1 + 12\%) - m = 300p - m$, với $p = 1 + 12\% = 1,12$.

Số tiền nợ sau năm thứ hai: $T_2 = (300p - m)p - m = 300p^2 - mp - m$

Số tiền nợ sau năm thứ ba:

$$T_3 = (300p^2 - mp - m)p - m = 300p^3 - mp^2 - mp - m$$

Trả hết nợ sau năm thứ tư: $(300p^3 - mp^2 - mp - m)p - m = 0$

$$\Leftrightarrow 300p^4 - mp^3 - mp^2 - mp - m = 0 \Leftrightarrow 300p^4 - m(p^3 + p^2 + p + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 300p^4 - m \cdot \frac{(p^4 - 1)}{p - 1} = 0 \Leftrightarrow 300(1,12)^4 = m \cdot \frac{[(1,12)^4 - 1]}{0,12}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{300(1,12)^4 \cdot (0,12)}{(1,12)^4 - 1} \Leftrightarrow m = \frac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1}.$$

Chọn A.

Ví dụ 8: Một người mỗi đầu tháng gửi vào ngân hàng T triệu đồng với lãi suất kép 0,6% một tháng. Biết cuối tháng thứ 15 thì số tiền cả gốc lẫn lãi sẽ thu về là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số nào nhất trong các số sau đây?

- A. 535000 đồng B. 635000 đồng
C. 613000 đồng D. 643000 đồng

Hướng dẫn giải

Sau tháng gửi đầu tiên số tiền cả gốc và lãi thu được là $T(1+r)$

Sau tháng thứ hai số tiền cả gốc và lãi thu được là $T(1+r)^2 + T(1+r)$.

...

Sau tháng thứ 15, số tiền cả gốc và lãi thu được là

$$T(1+r)^n + T(1+r)^{n-1} + \dots + T(1+r).$$

Để số tiền cả gốc lẫn lãi thu về là 10 triệu đồng thì

$$T(1+r)^{15} + T(1+r)^{14} + \dots + T(1+r) = 10000000$$

$$\Leftrightarrow T(1+r) \frac{(1+r)^{15} - 1}{r} = 10000000 \Rightarrow T \approx 635.000 \text{ (đồng)}.$$

Chọn B.

Ví dụ 9: Một huyện A có 100 000 dân. Với mức tăng dân số bình quân 1,8% năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số sẽ vượt 150 000 dân.

- A. 22 B. 23 C. 27 D. 28

Hướng dẫn giải

Giả sử sau n năm nữa thì dân số sẽ vượt 150 000 dân.

Áp dụng công thức: $X' = X(1+r)^n$.

$$\text{Suy ra } n = \log_{1+r} \left(\frac{X'}{X} \right) = \log_{1+1,8\%} \frac{150000}{100000} = 22,72796911.$$

Chọn B.

Ví dụ 10: Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng cục Thống kê, dân số của Việt Nam năm

Bài toán tiền gửi ngân hàng:

Đầu mỗi tháng, khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép r (% / tháng) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là

$$S_n = \frac{A}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r).$$

Công thức tính tăng trưởng dân số:

$$X_m = X_n (1+r)^{m-n}$$

$$(m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n)$$

Trong đó: r % là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m ; X_m dân số năm m , X_n dân số năm n .

2014 là 90728900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030, dân số của Việt Nam là:

- A. 106118331 người B. 198049810 người
C. 107232574 người D. 108358516 người

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức: $X_{2030} = X_{2014}(1+r)^n$

Trong đó: $X_{2014} = 90728900$; $r = 1,05$; $n = 16$

Ta được dân số đến hết năm 2030 là: $X_{2030} = 107232574$.

Chọn C.

Ví dụ 11: Trong vật lý, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn

bởi công thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của

chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác).

Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Cabon có khối lượng 100g. Hỏi sau khoảng thời gian t thì khối lượng còn bao nhiêu gam?

- A. $m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5730}}$ B. $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{t \ln 2}{5730}}$
C. $m(t) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{100t}{5730}}$ D. $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{100t}{5730}}$

Hướng dẫn giải

Theo công thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ ta có:

$$m(t) = 100 \cdot \frac{1}{2}^{\frac{t}{5730}}$$

Chọn A.

Ví dụ 12: Cường độ ánh sáng đi qua môi trường khác không khí (chẳng hạn sương mù, nước,...) sẽ giảm dần tùy thuộc độ dày của môi trường và hằng số μ gọi là khả năng hấp thụ của môi trường, tùy thuộc môi trường thì khả năng hấp thụ tính theo công thức $I = I_0 e^{-\mu x}$ với x là độ

dày của môi trường đó và được tính bằng đơn vị mét. Biết rằng nước biển có $\mu = 1,4$. Hãy tính cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu khi từ độ sâu 2m xuống đến 20m?

- A. $e^{25,2}$ B. $e^{22,5}$ C. $e^{32,5}$ D. $e^{52,5}$

Hướng dẫn giải

Cường độ ánh sáng thay đổi khi từ độ sâu x_1 đến độ sâu x_2 là:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_0 e^{-\mu x_1}}{I_0 e^{-\mu x_2}} = e^{\mu(x_2 - x_1)}.$$

Thay $x_1 = 2$; $x_2 = 20$, $\mu = 1,4$ ta có $\frac{I_1}{I_2} = e^{25,2}$.

Chọn A.

 Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng thời hạn 15 tháng, lãi suất 0,6% tháng (lãi kép). Khi hết kỳ hạn thì số tiền người đó nhận được là

- A. 55,664000 triệu B. 54,694000 triệu C. 55,022000 triệu D. 54,368000 triệu

Câu 2: Một người gửi ngân hàng 50 triệu đồng theo hình thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất 7% mỗi năm. Hỏi sau 4 năm người đó có bao nhiêu tiền cả gốc và lãi?

- A. 70,13 triệu đồng B. 65,54 triệu đồng C. 61,25 triệu đồng D. 65,53 triệu đồng

Câu 3: Một học sinh A khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200 000 000 đồng. Số tiền này được bảo quản trong một ngân hàng B với kì hạn thanh toán một năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 231525000 đồng. Vậy lãi suất kì hạn 1 năm của ngân hàng B là bao nhiêu?

- A. 8% B. 7% C. 6% D. 5%

Câu 4: Một chiếc ô tô mới mua năm 2016 với giá 800 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm, giá chiếc ô tô này bị giảm 5%. Hỏi đến năm 2020, giá tiền chiếc ô tô này còn khoảng bao nhiêu?

- A. 651605000 đồng B. 685900000 đồng C. 619024000 đồng D. 760000000 đồng

Câu 5: Ông An gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông An đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? (Biết lãi suất không thay đổi qua các năm ông gửi tiền).

- A. 231,815 (triệu đồng) B. 197,201 (triệu đồng) C. 217,695 (triệu đồng) D. 190,271 (triệu đồng)

Câu 6: Một người vay ngân hàng 90000000 đồng theo hình thức trả góp trong 3 năm. Mỗi tháng người đó phải trả số tiền bằng nhau. Giả sử lãi suất trong toàn bộ quá trình trả nợ không đổi là 0,8% trên tháng. Tổng số tiền người đó phải trả trong toàn bộ quá trình trả nợ là

- A. 103320000 đồng B. 101320000 đồng C. 105320000 đồng D. 103940000 đồng

Câu 7: Anh Minh gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 0,6% tháng. Sau mỗi tháng, anh Minh đến ngân hàng rút mỗi tháng 3 triệu đồng để chi tiêu cho đến khi hết tiền thì thôi. Sau một số tròn tháng thì anh Minh rút hết tiền cả gốc lẫn lãi. Biết trong suốt thời gian đó, ngoài số tiền rút mỗi tháng, anh Minh không rút thêm một đồng nào kể cả gốc lẫn lãi và lãi suất không đổi. Vậy tháng cuối cùng anh Minh sẽ rút được số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến đồng)?

- A. 1840270 đồng B. 3000000 đồng C. 1840269 đồng D. 1840268 đồng

Câu 8: Bác Tuấn gửi tiết kiệm 75 triệu đồng vào ngân hàng theo kì hạn một quý với lãi suất 1,77% một quý. Nếu Bác Tuấn không rút lãi ở tất cả các định kì thì sau 3 năm Bác Tuấn nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng hết một kì hạn lãi sẽ được cộng vào vốn để tính lãi trong kì tiếp theo.

- A. 90930000 đồng B. 92690000 đồng C. 92576000 đồng D. 80486000 đồng

Câu 9: Một sinh viên muốn có 12 triệu đồng để mua laptop nên mỗi tháng gửi vào ngân hàng 250000 đồng với lãi suất 0,72% một tháng. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh ta đủ tiền mua laptop?

- A. 41 B. 36 C. 42 D. 37

Câu 10: Cô Ngọc vay ngân hàng một số tiền với lãi suất 1% mỗi tháng. Cô ấy muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày cho vay, cô ấy bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là 5 triệu đồng và cô ấy trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay (số tiền hoàn nợ tháng cuối cùng có thể ít hơn 5 triệu đồng). Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mà cô Ngọc vay ngân hàng là số nào trong các số dưới đây?

- A. 224 triệu đồng B. 222 triệu đồng C. 221 triệu đồng D. 225 triệu đồng

Câu 11: Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu đồng theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% mỗi tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết rằng phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng?

- A. 68 B. 66 C. 65 D. 67

Câu 12: Một người vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 0,6% một tháng theo thỏa thuận: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay thì ông bắt đầu trả nợ và đều đặn cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 9 triệu đồng cho đến khi hết nợ (biết rằng, tháng cuối cùng có thể trả dưới 9 triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng?

- A. 24 B. 23 C. 22 D. 25

Câu 13: Ông Tuấn đầu tư 500 triệu đồng để mua xe ô tô chở khách. Sau khi mua, thu nhập bình quân mỗi tháng được 10 triệu đồng (sau khi trừ đi các khoản chi phí khác). Tuy nhiên mỗi năm giá trị xe lại giảm 10% so với năm trước đó. Tổng số tiền lãi sau 4 năm kinh doanh của ông Tuấn bằng bao nhiêu?

- A. 480 triệu đồng B. 308,05 triệu đồng C. 328,05 triệu đồng D. Lỗi 171,95 triệu đồng

Câu 14: Anh Hòa gửi ngân hàng 3350000 đồng, theo phương thức lãi đơn với lãi suất 0,4% trên nửa năm. Hỏi ít nhất bao lâu anh rút được cả vốn lẫn lãi là 4020000 đồng?

- A. 5 năm B. 30 tháng C. 3 năm D. 24 tháng

Câu 15: Một khách hàng gửi tiết kiệm 64 triệu đồng, với lãi suất 0,85% một tháng. Hỏi người đó phải mất ít nhất mấy tháng để được số tiền cả gốc lẫn lãi không dưới 72 triệu đồng?

- A. 13 B. 14 C. 15 D. 18

Câu 16: Anh Ngọc muốn vay ngân hàng 200 triệu đồng theo phương thức trả góp (trả tiền vào cuối tháng) với lãi suất 0,75% mỗi tháng. Hỏi hàng tháng, anh Ngọc phải trả số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) để sau đúng 2 năm thì trả hết nợ ngân hàng?

- A. 9236000 đồng B. 9137000 đồng C. 9970000 đồng D. 9971000 đồng

Câu 17: Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với mức lương khởi điểm của mỗi tháng trong ba năm đầu tiên là 6 triệu đồng/tháng. Tính từ ngày đầu làm việc, cứ sau đúng ba năm liên tiếp thì tăng lương 10% so với mức lương một tháng người đó đang hưởng. Nếu tính theo hợp đồng thì tháng đầu tiên của năm thứ 16 người đó nhận được mức lương là bao nhiêu?

- A. $6.1,1^4$ (triệu đồng) B. $6.1,1^6$ (triệu đồng) C. $6.1,1^5$ (triệu đồng) D. $6.1,1^{16}$ (triệu đồng)

Câu 18: Một người cứ đầu tháng đều gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Đến cuối tháng thứ 15 thì người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

- A. 535000 đồng B. 635000 đồng C. 643000 đồng D. 613000 đồng

Câu 19: Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc trong một công ty với lương năm đầu là 72 triệu đồng, cứ sau 3 năm thì tăng lương 10%. Nếu tính theo hợp đồng thì sau đúng 21 năm, người đó nhận được tổng số tiền của công ty là

- A. $216(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng) B. $7200(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng)
C. $720(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng) D. $2160(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng)

Câu 20: Một người vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 0,6% một tháng theo hình thức lãi kép với thỏa thuận: sau đúng một tháng kể từ ngày vay thì ông bắt đầu trả nợ và đều đặn cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 9 triệu đồng cho đến khi hết nợ (biết rằng, tháng cuối cùng có thể trả dưới 9 triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng?

- A. 25 B. 24 C. 22 D. 23

Câu 21: Một người gửi tiền tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc và tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được số tiền lãi ít nhất bằng số tiền gửi ban đầu, giả định trong thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- A. 12 năm B. 11 năm C. 10 năm D. 13 năm

Câu 22: Một khách hàng gửi ngân hàng 20 triệu đồng, kì hạn 3 tháng, với lãi suất 0,65% một tháng theo phương thức lãi kép. Hỏi sau bao lâu vị khách này mới có số tiền lãi nhiều hơn số tiền gốc ban đầu gửi ngân hàng? Giả sử người đó không rút lãi ở tất cả các định kì.

- A. 8 năm 11 tháng B. 19 tháng C. 18 tháng D. 9 năm

Câu 23: Một người vay ngân hàng số tiền 400 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 10 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 1% mỗi tháng. Kì trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Biết lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi, hỏi số tiền còn phải trả ở kì cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn).

- A. 2921000 đồng B. 3387000 đồng C. 2944000 đồng D. 7084000 đồng

Câu 24: Mỗi tháng bà A gửi vào ngân hàng một khoản tiền không đổi với lãi suất cố định là 0,4% mỗi tháng. Ba năm rưỡi kể từ ngày gửi khoản tiền đầu tiên, bà A rút toàn bộ số tiền để mua xe. Số tiền nhận về lấy đến hàng nghìn là 91635000 đồng. Hỏi khoản tiền gửi mỗi tháng của bà A là bao nhiêu?

- A. 2000000 đồng B. 1800000 đồng C. 1500000 đồng D. 2500000 đồng

Câu 25: Dân số thế giới cuối năm 2010, ước tính 7 tỉ người. Hỏi với mức tăng trưởng dân số 1,5% mỗi năm thì cuối năm 2020 dân số thế giới là bao nhiêu?

- A. 8,12 tỉ người B. 8,05 tỉ người C. 8 tỉ người D. 8,10 tỉ người

Câu 26: Một khu rừng có trữ lượng gỗ $4 \cdot 10^5$ mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây trong rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 10 năm khu rừng đó có số mét khối gỗ gần nhất với số nào?

- A. $5,9 \cdot 10^5$ B. $5,92 \cdot 10^5$ C. $5,93 \cdot 10^5$ D. $5,94 \cdot 10^5$

Câu 27: Để đo độ phóng xạ của một chất phóng xạ β^- người ta dùng máy đếm xung. Khi chất này phóng xạ ra các hạt β^- , các hạt này đập vào máy làm trong máy xuất hiện một xung điện và bộ đếm tăng thêm 1 đơn vị. Ban đầu máy đếm được 960 xung trong một phút nhưng sau đó 3 giờ thì chỉ còn 120 xung trong một phút (trong cùng điều kiện). Hỏi chu kì bán rã của chất này là bao nhiêu giờ?

- A. 1 giờ B. 2 giờ C. 0,5 giờ D. 1,5 giờ

Câu 28: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức là P giảm theo công thức: $P = P_0 e^{xi}$, trong đó $P_0 = 760$ mmHg là áp suất ở mực nước biển ($x = 0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng, ở độ cao 1000m thì áp suất của không khí là 672,72 mmHg.

Hỏi áp suất của không khí ở độ cao 12km bằng bao nhiêu? (các kết quả giữ lại sau dấu thập phân 7 chữ số)

- A. 178,8176855 B. 176,8176855 C. 177,8176855 D. 175,8176855

Câu 29: Người ta thả một số lá bèo vào một hồ nước, sau 10 giờ số lượng lá bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ số lượng lá đều tăng gấp 10 lần số lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu số lượng lá bèo phủ kín tối thiểu một phần tư hồ?

- A. $10 - \log 4$ (giờ) B. $10 \log 4$ (giờ) C. $1 + 10 \log 4$ (giờ) D. $10 - 10 \log 4$ (giờ)

Câu 30: Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ ponoli 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Thời gian phân rã phóng xạ ponoli 210 để từ 20 gam còn lại $2,22 \cdot 10^{-15}$ gam gần đúng với đáp án nào nhất?

- A. Khoảng 18 năm B. Khoảng 21 năm C. Khoảng 19 năm D. Khoảng 20 năm

BÀI 3. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

Dạng 1: Đạo hàm, sự biến thiên của hàm số

1 - C	2 - B	3 - A	4 - B	5 - B	6 - C	7 - B	8 - B	9 - C	10 - D
11 - B	12 - C	13 - D	14 - B	15 - C	16 - C	17 - A	18 - A	19 - D	20 - D
21 - D	22 - B	23 - B	24 - B	25 - A	26 - D	27 - D	28 - D	29 - C	30 - C
31 - D	32 - C	33 - A	34 - A	35 - D	36 - D	37 - B	38 - C	39 - C	

Dạng 2: Tập xác định của hàm số chứa mũ – lôgarit

1 - C	2 - C	3 - C	4 - B	5 - C	6 - D	7 - C	8 - D	9 - D	10 - D
11 - A	12 - C	13 - B	14 - D	15 - A	16 - A	17 - A			

Dạng 3: Đồ thị hàm số

1 - A	2 - C	3 - D	4 - A	5 - A	6 - B	7 - C	8 - C	9 - D	10 - B
11 - A	12 - D	13 - A	14 - C	15 - D	16 - D	17 - B	18 - A	19 - C	20 - C
21 - A	22 - D	23 - A	24 - D	25 - C	26 - B	27 - A	28 - C	29 - A	

Dạng 4: Lãi suất ngân hàng

1 - B	2 - B	3 - D	4 - A	5 - C	6 - D	7 - A	8 - C	9 - C	10 - D
11 - B	12 - A	13 - B	14 - B	15 - B	16 - B	17 - C	18 - B	19 - D	20 - B
21 - A	22 - D	23 - B	24 - A	25 - A	26 - B	27 - A	28 - D	29 - A	30 - D