Descartes

Vài bài toán về phương trình logarit khác cơ số

Huỳnh Đức Khánh – 0975.120.189
Giải tích – ĐH Quy Nhơn

Phương trình logarit với cơ số khác nhau luôn là vấn đề gây khó dễ cho học sinh khi gặp phải trong các đề thi. Học sinh thường lúng túng khi biến đổi, gặp khó khăn để đưa về cùng cơ số hoặc đưa về các phương trình cơ bản. Tôi viết bài xin đóng góp vài bài mẫu về vấn đề này, nó được dùng các phương pháp: ***Đổi cơ số, đặt ẩn phụ để đưa về phương trình mũ, biến đổi tương đương, đánh giá hai vế.***

Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x.$$

Điều kiện: $x > 0$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương

$$\log_2 x + \log_3 2.\log_2 x + \log_4 2.\log_2 x = \log_{20} 2.\log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x\left(1 + \log_3 2 + \log_4 2 - \log_{20} 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 0 \qquad (\text{do } 1 + \log_3 2 + \log_4 2 - \log_{20} 2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình:

$$\log_3\left(x^2 - 3x - 13\right) = \log_2 x.$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3x - 13 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3 + \sqrt{61}}{2}$.

Đặt: $\log_2 x = t \Leftrightarrow x = 2^t$.

Phương trình trở thành: $\log_3\left(4^t - 3.2^t - 13\right) = t$

$$\Leftrightarrow 4^t - 3.2^t - 13 = 3^t$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^t + 13\left(\frac{1}{4}\right)^t + 3\left(\frac{2}{4}\right)^t. \qquad (*)$$

Hàm số $y = \left(\frac{3}{4}\right)^t + 13\left(\frac{1}{4}\right)^t + 3\left(\frac{2}{4}\right)^t$ là tổng của các hàm nghịch biến nên y nghịch biến, hàm $y = 1$ là hàm hằng. Do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

Ta có: $1 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 13\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{4}\right)^3$. Suy ra phương trình (*) có nghiệm $t = 3$.

Với $t = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 8$.

Ví dụ 3. Giải phương trình:

$$\log_2\left(1+\sqrt{x}\right) = \log_3 x.$$

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt: $\log_3 x = t \Leftrightarrow x = 3^t$.

Phương trình trở thành: $\log_2\left(1+\sqrt{3^t}\right) = t$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{3^t} = 2^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t = 1. \qquad \textbf{(*)}$$

Hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t$ là tổng của các hàm nghịch biến nên y nghịch biến, hàm $y = 1$ là hàm hằng. Do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$. Suy ra phương trình (*) có nghiệm $t = 2$.

Với $t = 2 \Rightarrow x = 3^2 = 9$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 9$.

Ví dụ 4. Giải phương trình:

$$\log_3\left(x^2+2x+1\right) = \log_2\left(x^2+2x\right). \quad \textbf{(1)}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+2x+1 > 0 \\ x^2+2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 0 \end{array}\right.$.

Đặt: $u = x^2+2x$. Phương trình (1) trở thành: $\log_3\left(u+1\right) = \log_2 u$. **(2)**

Xét phương trình (2). Ta đặt: $\log_2 u = t \Leftrightarrow u = 2^t$.

Phương trình (2) trở thành: $\log_3\left(2^t+1\right) = t$

$$\Leftrightarrow 2^t + 1 = 3^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1. \qquad \textbf{(3)}$$

Hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t$ là tổng của các hàm nghịch biến nên y nghịch biến, hàm $y = 1$ là hàm hằng. Do đó phương trình (3) có nghiệm duy nhất.

Ta có: $\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 1$. Suy ra phương trình (3) có nghiệm $t = 1$.

Với $t = 1 \Rightarrow u = 2^1 = 2 \Rightarrow x^2+2x = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1-\sqrt{3} \\ x = -1+\sqrt{3} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1-\sqrt{3};\ x = -1+\sqrt{3}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình:

$$\log_3(x+1)+\log_5(3x+1)=4.$$

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{3}$.

Đặt: $\log_3(x+1)=t \Leftrightarrow x+1=3^t$, suy ra: $3x+1=3.3^t-2$.

Phương trình trở thành: $t+\log_5(3.3^t-2)=4$

$$\Leftrightarrow \log_5(3.3^t-2)=4-t$$

$$\Leftrightarrow 3.3^t-2=5^{4-t}$$

$$\Leftrightarrow 3.3^t-2=\frac{625}{5^t}$$

$$\Leftrightarrow 3.15^t-2.5^t=625$$

$$\Leftrightarrow 3=625\left(\frac{1}{15}\right)^t+2\left(\frac{1}{3}\right)^t.$$

Hàm số $y=625\left(\dfrac{1}{15}\right)^t+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^t$ là tổng của các hàm nghịch biến nên y nghịch biến, hàm

$y=3$ là hàm hằng. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất.

Ta có: $3=625\left(\dfrac{1}{15}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$. Suy ra phương trình có nghiệm $t=2$.

Với $t=2 \Rightarrow x+1=3^2 \Leftrightarrow x=8$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=8$.

Cách khác: • Kiểm tra $x=8$ là nghiệm của phương trình.

• Nếu $x>8$ thì

$$\left.\begin{array}{l} \log_3(x+1)>\log_3(8+1)=2 \\ \log_5(3x+1)>\log_5(3.8+1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \log_3(x+1)+\log_5(3x+1)>4.$$

• Nếu $x<8$ thì

$$\left.\begin{array}{l} \log_3(x+1)<\log_3(8+1)=2 \\ \log_5(3x+1)<\log_5(3.8+1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \log_3(x+1)+\log_5(3x+1)<4.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=8$.

Ví dụ 6. Giải phương trình:

$$\log_2\left(x^2-5x+4\right)+\log_5\left(x-4\right)=1-\log_{\frac{1}{2}}\left(5x-5\right).$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-5x+4>0 \\ x-4>0 \\ 5x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>4$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương

$$\log_2\left[\left(x-1\right)\left(x-4\right)\right]+\log_5\left(x-4\right)=1+\log_2\left[5\left(x-1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x-1\right)+\log_2\left(x-4\right)+\log_5\left(x-4\right)=1+\log_2 5+\log_2\left(x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x-4\right)+\log_5 2.\log_2\left(x-4\right)=1+\log_2 5$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\log_5 2\right)\log_2\left(x-4\right)=1+\log_2 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x-4\right)=\frac{1+\log_2 5}{1+\log_5 2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x-4\right)=\log_2 5$$

$$\Leftrightarrow x-4=5$$

$\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm $x=9$.

Ví dụ 7. Giải phương trình:

$$\log_{3x+7}\left(4x^2+12x+9\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4. \quad \textbf{(1)}$$

Điều kiện: $-\frac{3}{2}<x\neq -1$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương

$$\log_{3x+7}\left(2x+3\right)^2+\log_{2x+3}\left[\left(3x+7\right)\left(2x+3\right)\right]=4$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7}\left(2x+3\right)+\log_{2x+3}\left(3x+7\right)+1=4$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7}\left(2x+3\right)+\frac{1}{\log_{3x+7}\left(2x+3\right)}=3. \quad \textbf{(2)}$$

Đặt: $t=\log_{3x+7}\left(2x+3\right)$. Phương trình (2) trở thành

$$2t+\frac{1}{t}=3 \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

• Với $t=1 \Rightarrow \log_{3x+7}\left(2x+3\right)=1 \Leftrightarrow 2x+3=3x+7 \Leftrightarrow x=-4$ (loại).

• Với $t=\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{3x+7}\left(2x+3\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+3=\sqrt{3x+7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \ \left(\text{loai}\right) \\ x=-\frac{1}{4} \end{array}\right..$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\frac{1}{4}$.

Ví dụ 8. Giải phương trình:

$$\log_x(x+1) = \lg 2.$$

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

● Nếu $0 < x < 1$ thì $x + 1 > 1$, ta có

$$\log_x(x+1) < \log_x 1 = 0 = \lg 1 < \lg 2.$$

● Nếu $x > 1$ thì $x + 1 > x$, ta có

$$\log_x(x+1) > \log_x x = 1 = \lg 10 > \lg 2.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 9. Giải phương trình:

$$\log_2 x + \log_3(x+1) = \log_4(x+2) + \log_5(x+3).$$

Điều kiện: $x > 0$.

● Kiểm tra $x = 2$ là một nghiệm của phương trình.

● Nếu $0 < x < 2$ thì

$$\frac{x}{2} > \frac{x+2}{4} > 1 \qquad \text{và} \qquad \frac{x+1}{3} > \frac{x+3}{5} > 1,$$

Suy ra $\log_2\frac{x}{2} > \log_2\frac{x+2}{4} > \log_2\frac{x+2}{4} \quad \Rightarrow \log_2 x > \log_4(x+2).$

$$\log_3\frac{x+1}{3} > \log_3\frac{x+3}{5} > \log_5\frac{x+3}{5} \quad \Rightarrow \log_3(x+1) > \log_5(x+3).$$

Suy ra

$$\log_2 x + \log_3(x+1) > \log_4(x+2) + \log_5(x+3).$$

● Tương tự cho trường hợp $x > 2$, ta được

$$\log_2 x + \log_3(x+1) < \log_4(x+2) + \log_5(x+3).$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 10. Giải phương trình:

$$\log_2(\log_3 x) = \log_3(\log_2 x).$$

Điều kiện: $x > 1$.

Đặt: $\log_2(\log_3 x) = \log_3(\log_2 x) = t$. Khi đó $\begin{cases} \log_2(\log_3 x) = t \\ \log_3(\log_2 x) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2^t & (1) \\ \log_2 x = 3^t & (2) \end{cases}$.

Suy ra: $\dfrac{\log_3 x}{\log_2 x} = \dfrac{2^t}{3^t} \Leftrightarrow \dfrac{\log_x 2}{\log_x 3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t \Leftrightarrow \log_3 2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t \Leftrightarrow t = \log_{\frac{2}{3}}(\log_3 2)$.

Từ (1) suy ra: $x = 3^{2^t} = 3^{2^{\log_{\frac{2}{3}}(\log_3 2)}}$.

Bài tập tương tự. Giải các phương trình sau:

1. $\log_7\left(x+2\right)=\log_5 x$.

2. $2\log_6\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)=\log_4 x$.

3. $\log_3\left(x^2-1\right)=\log_2 x$.

4. $\log_2\left(x+1\right)^2-\log_3\left(x+1\right)^3=0$.

5. $\log_6\left(x^2-2x-2\right)=\log_5\left(x^2-2x-3\right)$.

6. $\log_2 x=\log_3 x$.

--------------- Chúc các em học sinh đạt kết quả tốt trong kỳ thi sắp tới --------------