

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(đề thi gồm 02 trang)

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Bảng sau thống kê tiền lương 50 công nhân của một công ty trong tháng 5 năm 2025:

Tiền lương (triệu đồng)	[7;8)	[8;9)	[9;10)	[10;11)	[11;12)	[12;13)
Tần số	10	7	10	8	9	6

Hỏi nhóm nào có tần số nhỏ nhất? Tính tần số tương đối của nhóm đó.

b) Một tổ học sinh có 3 bạn nữ là Hoa, Hồng, Hà và 4 bạn nam là An, Bình, Dũng, Cường. Xét phép thử: “Chọn ngẫu nhiên một bạn từ tổ học sinh đã cho”. Tính xác suất của biến cố A: “Bạn học sinh được chọn là nam”.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Tính $A = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{25}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{6}{x-9} \right) : \frac{x+1}{x-3\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 9$.

c) Tìm b để đường thẳng $y = x + b$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Câu 3 (2,5 điểm).

a) Đầu năm học mới, hai bạn Nam và Hùng cùng đi mua bút và vở. Nam mua 10 cái bút và 15 quyển vở hết 200 nghìn đồng, Hùng mua 7 cái bút và 14 quyển vở hết 175 nghìn đồng. Tính giá của mỗi chiếc bút và giá của mỗi quyển vở (biết giá của mỗi chiếc bút là như nhau và giá của mỗi quyển vở là như nhau).

b) Tháng 1 năm 2025, tập đoàn ô tô X sản xuất được 100 xe ô tô. Nhận thấy nhu cầu thị trường tăng lên, tháng 2 tập đoàn đã tăng số lượng sản xuất ô tô lên $x\%$ so với tháng 1. Tháng 3, tập đoàn tiếp tục tăng số lượng sản xuất ô tô lên $2x\%$ so với tháng 2. Biết số lượng ô tô sản xuất trong tháng 3 là 132 xe. Tính x .

c) Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2 . Không giải phương trình,

tính giá trị của biểu thức $P = \frac{|7x_2 - 3x_1^2|}{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), đường cao AH . Kẻ HD, HE lần lượt vuông góc với AB, AC ($D \in AB, E \in AC$).

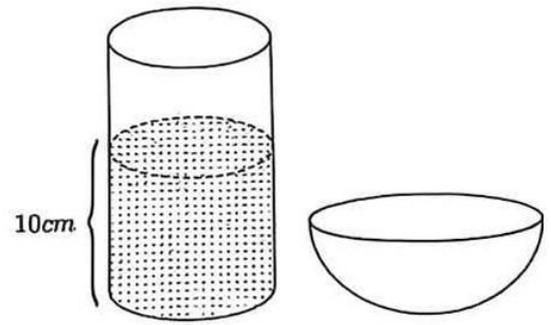
a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Trên tia đối của tia DH lấy điểm F ($F \neq D$). Đường thẳng qua F vuông góc với FB cắt đường thẳng AH tại G . Kẻ GI vuông góc với HF ($I \in HF$). Chứng minh tam giác IFG đồng dạng với tam giác HBG và $IF = DH$.

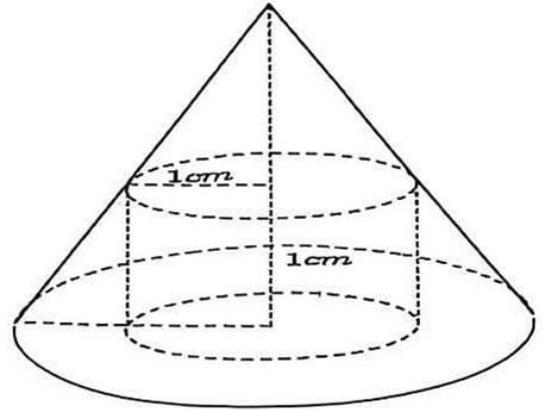
c) Tia phân giác của góc HEC cắt CH tại K . Kẻ KM, KN lần lượt vuông góc với EH, EC ($M \in EH, N \in EC$). Hai đoạn thẳng CM và HN cắt nhau tại T . Gọi P là giao điểm của HN và KM , Q là giao điểm của CM và KN . Chứng minh ET vuông góc với PQ .

Câu 5 (1,0 điểm).

a) Một bác nông dân có một bình đựng nước chè xanh, phần chứa nước là dạng hình trụ có bán kính đáy bằng 4 cm , mực nước trong bình có chiều cao bằng 10 cm . Bác muốn đổ hết nước từ bình sang một cái bát uống nước, phần chứa nước là dạng nửa hình cầu có bán kính bằng 6 cm (hình vẽ bên). Hỏi nếu đổ như vậy thì nước có bị tràn ra ngoài hay không? Vì sao?



b) Một công ty bánh kẹo muốn sản xuất một loại kẹo có dạng hình nón. Nhân của kẹo làm bằng sô cô la là một hình trụ có bán kính đáy và chiều cao cùng bằng 1 cm , một đáy của nhân kẹo nằm trên mặt đáy của hình nón và có tâm trùng với tâm đáy hình nón, đường tròn đáy còn lại của hình trụ nằm trên mặt xung quanh của hình nón. Phần còn lại của kẹo được phủ đầy bằng sữa khô (hình vẽ bên). Biết rằng công ty đã thiết kế viên kẹo có thể tích nhỏ nhất để tiết kiệm tối đa nguyên liệu sữa khô. Tính chiều cao của viên kẹo.



.....**Hết**.....



HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: (1, 5 điểm).

a) Bảng sau thống kê tiền lương 50 công nhân của một công ty trong tháng 5 năm 2025 :

Tiền lương (triệu đồng)	[7;8)	[8;9)	[9;10)	[10;11)	[11;12)	[12;13)
Tần số	10	7	10	8	9	6

Hỏi nhóm nào có tần số nhỏ nhất? Tính tần số tương đối của nhóm đó.

b) Một tổ học sinh có 3 bạn nữ là Hoa, Hồng, Hà và 4 bạn nam là An, Bình, Dũng, Cường. Xét phép thử: "Chọn ngẫu nhiên một bạn từ tổ học sinh đã cho ". Tính xác suất của biến cố A : "Bạn học sinh được chọn là nam ".

Lời giải

a) Nhóm nào có tần số nhỏ nhất là [12;13).

Tần số tương đối của nhóm đó là: $\frac{6}{50} \cdot 100\% = 12\%$

b) Không gian mẫu của phép thử "Chọn ngẫu nhiên một bạn từ tổ học sinh đã chọn" là: $\Omega = \{ \text{Hoa, Hồng, Hà, An, Bình, Dũng, Cường} \}$

Số phần tử của không gian mẫu là: 7.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A : "Bạn học sinh được chọn là nam" là 4, đó là: An, Bình, Dũng, Cường.

Xác suất của biến cố A : "Bạn học sinh được chọn là nam" là $\frac{4}{7}$.

Vậy xác suất của biến cố A : "Bạn học sinh được chọn là nam" là $\frac{4}{7}$.

Câu 2: (2, 0 điểm).

a) Tính $A = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{25}$

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{6}{x-9} \right) : \frac{x+1}{x-3\sqrt{x}}$, với $(x > 0, x \neq 9)$

c) Tìm b để đường thẳng $y = x + b$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

a) $A = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{25}$

$$A = \sqrt{2 \cdot 8} + \sqrt{25}$$

$$A = \sqrt{16} + \sqrt{25}$$

$$A = 4 + 5 = 9$$

b) ĐK: $x > 0, x \neq 9$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{6}{x-9} \right) : \frac{x+1}{x-3\sqrt{x}}$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} + \frac{6}{x-9} \right) \cdot \frac{x-3\sqrt{x}}{x+1}$$



$$B = \frac{\sqrt{x}-3+6}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{x+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{x+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ với $x > 0, x \neq 9$.

c) Tìm b để đường thẳng $y = x + b$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Với $x = 1$ ta có $y = 2 \cdot 1^2 = 2$.

Điểm đó có tọa độ là $(1; 2)$. Thay vào phương trình đường thẳng $y = x + b$ ta được $2 = 1 + b$ suy ra

$$b = 1$$

Vậy $b = 1$.

Câu 3: (2, 5 điểm).

a) Đầu năm học mới, hai bạn Nam và Hùng cùng đi mua bút và vở. Nam mua 10 cái bút và 15 quyển vở hết 200 nghìn đồng, Hùng mua 7 cái bút và 14 quyển vở hết 175 nghìn đồng. Tính giá của mỗi chiếc bút và giá của mỗi quyển vở (biết giá của mỗi chiếc bút là như nhau và giá của mỗi quyển vở là như nhau).

b) Tháng 1 năm 2025, tập đoàn ô tô X sản xuất được 100 xe ô tô. Nhận thấy nhu cầu thị trường tăng lên, tháng 2 tập đoàn đã tăng số lượng sản xuất ô tô lên $x\%$ so với tháng 1. Tháng 3, tập đoàn tiếp tục tăng số lượng sản xuất ô tô lên $2x\%$ so với tháng 2. Biết số lượng ô tô sản xuất trong tháng 3 là 132 xe. Tính x ?

c) Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính giá

trị của biểu thức $P = \frac{|7x_2 - 3x_1^2|}{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}$.

Lời giải

a) Gọi x, y (nghìn đồng) lần lượt là giá 1 cái bút và 1 quyển vở ($x, y > 0$).

Nam mua 10 cái bút và 15 quyển vở hết 200 nghìn đồng nên ta có: $10x + 15y = 200$ (1)

Hùng mua 7 cái bút và 14 quyển vở hết 175 nghìn đồng nên ta có: $7x + 14y = 175$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10x + 15y = 200 \\ 7x + 14y = 175 \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = 40 \\ x + 2y = 25 \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = 40 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases} \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy giá một chiếc bút là 5 nghìn đồng, một quyển vở là 10 nghìn đồng.

b) Tháng 2, tập đoàn đã tăng số lượng sản xuất ô tô lên $x\%$ so với tháng 1, nên số lượng xe sản xuất ở tháng 2 là: $100 + 100 \cdot x\% = 100 + x$ (xe)



Tháng 3, tập đoàn tiếp tục tăng số lượng sản xuất ô tô lên $2x\%$ so với tháng 2, nên số lượng xe sản xuất ở tháng 3 là:

$$100 + x + (100 + x) \cdot 2x\% = 100 + 3x + \frac{2x^2}{100}$$

Biết số lượng ô tô sản xuất trong tháng 3 là 132 xe, nên ta có:

$$100 + 3x + \frac{2x^2}{100} = 132$$

$$2x^2 + 300x - 3200 = 0$$

$$x^2 + 150x - 1600 = 0$$

Giải phương trình ta được $x = 10$ (thỏa mãn); $x = -160$ (loại)

Vậy $x = 10$

$$c) P = \frac{|7x_2 - 3x_1^2|}{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}$$

Xét phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$

Ta có:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1$$

$\Delta = 5 > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$ nên phương trình có hai nghiệm dương x_1, x_2

Khi đó ta có:

$$\text{Đặt } A = 7x_2 - 3x_1^2; B = 7x_1 - 3x_2^2$$

$$A + B = (7x_2 - 3x_1^2) + (7x_1 - 3x_2^2)$$

$$A + B = 7(x_1 + x_2) - 3(x_1^2 + x_2^2)$$

$$A + B = 7(x_1 + x_2) - 3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2]$$

$$A + B = 7 \cdot 3 - 3(3^2 - 2 \cdot 1)$$

$$A + B = 0 \text{ hay } A = -B$$

Suy ra: $|A| = |B|$



$$A^2 = |A| \cdot |B|$$

$$A^2 = |7x_2 - 3x_1^2| \cdot |7x_1 - 3x_2^2|$$

$$A^2 = |49x_1x_2 - 21(x_1^3 + x_2^3) + 9x_1^2 \cdot x_2^2|$$

$$A^2 = |49x_1x_2 - 21(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + 9(x_1x_2)^2|$$

$$A^2 = |49x_1x_2 - 21(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] + 9(x_1x_2)^2|$$

$$A^2 = |49 \cdot 1 - 21 \cdot 1 \cdot (3^2 - 3 \cdot 1) + 9 \cdot 1^2|$$

$$A^2 = |320|$$

$$|A| = 8\sqrt{5}$$

$$P = \frac{|7x_2 - 3x_1^2|}{(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2}$$

$$P = \frac{8\sqrt{5}}{3^2 - 1}$$

Vậy $P = \sqrt{5}$.

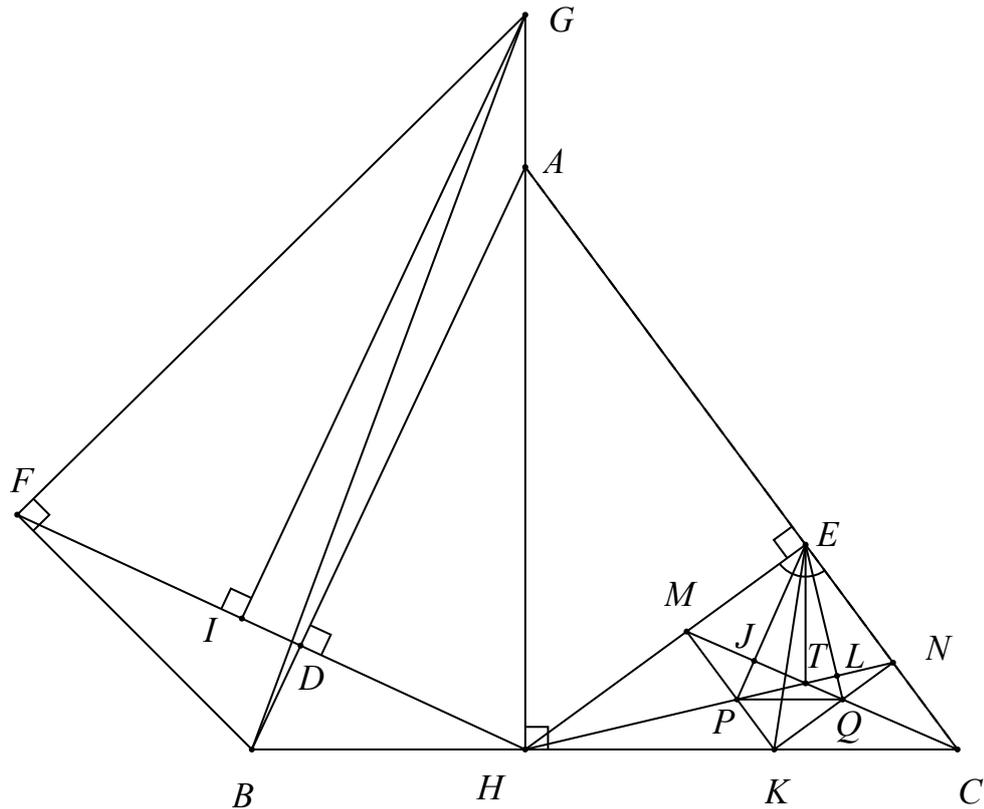
Câu 4: (3, 0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), đường cao AH . Kẻ HD, HE lần lượt vuông góc với AB, AC ($D \in AB, E \in AC$).

a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Trên tia đối của tia DH lấy điểm F ($F \neq D$). Đường thẳng qua F vuông góc với FB cắt đường thẳng AH tại G . Kẻ GI vuông góc với HF ($I \in HF$). Chứng minh $\triangle IFG \sim \triangle HBG$ và $IF = DH$.

c) Tia phân giác của góc HEC cắt CH tại K . Kẻ KM, KN lần lượt vuông góc với EH, EC ($M \in EH, N \in EC$). Hai đoạn thẳng CM và HN cắt nhau tại T . Gọi P là giao điểm của HN và KM , Q là giao điểm của CM và KN . Chứng minh ET vuông góc với PQ .

Lời giải



a) Ta có $\triangle ADH$ vuông tại D nên $\triangle ADH$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .
Ta có $\triangle AEH$ vuông tại E nên $\triangle AEH$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .
Bốn điểm A, D, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH . Hay tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .

b) Vì $GF \perp BF$ tại F nên ba điểm G, B, F thuộc đường tròn đường kính GB .

$\triangle GHB$ vuông tại G nên $\triangle GHB$ nội tiếp đường tròn đường kính GB

Tứ giác $GHBF$ nội tiếp đường tròn đường kính GB .

Suy ra $\widehat{GFI} = \widehat{GBH}$ (cùng chắn cung GH) (1)

Lại có $GI \parallel AB$; $AB \perp HF$ nên $\widehat{GIF} = \widehat{CHB} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\triangle GFI \sim \triangle GBH$ (g.g)

$$\text{Hay } \frac{FI}{HB} = \frac{GI}{GH} \quad (3)$$

Vì $\widehat{BAH} = \widehat{BHD}$ (cùng phụ với \widehat{AHD})

Và $\widehat{HDB} = \widehat{HDA} = 90^\circ$ nên

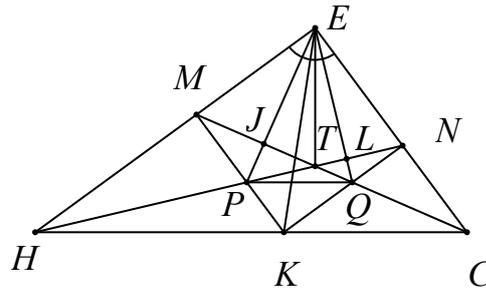
$\triangle HBD \sim \triangle AHD$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{HD}{AD} = \frac{HB}{AH} \text{ hay } \frac{HD}{HB} = \frac{AD}{AH}$$

$$\text{Mặt khác } AD \parallel GI \text{ nên } \frac{AD}{GI} = \frac{AH}{HG} \text{ hay } \frac{AD}{AH} = \frac{GI}{HG} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) ta có } \frac{FI}{HB} = \frac{HD}{HB} \text{ hay } FI = HD.$$

c) gọi L là giao điểm của EQ và PN . Gọi J là giao điểm của CM và EP .



Tứ giác $EMKN$ là hình chữ nhật (vì $\widehat{MEN} = \widehat{ENK} = \widehat{EMK} = 90^\circ$).

Lại có EK là phân giác góc HEC nên $EMKN$ là hình vuông.

Vì $KN \parallel EH$ nên $\frac{CN}{CE} = \frac{NQ}{EM} = \frac{KN}{HE}$ nhưng $ME = NE$ suy ra

$$\frac{NQ}{EM} = \frac{NQ}{NE} = \frac{KN}{HE} = \frac{EN}{HE}$$

hay $\frac{NQ}{NE} = \frac{EN}{HE}$

Lại có $\widehat{ENQ} = \widehat{NEH} = 90^\circ$ nên

$\triangle NEQ \sim \triangle EHN$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{NEQ} = \widehat{EHN}$

Hay $\widehat{NEQ} + \widehat{EHN} = \widehat{EHN} + \widehat{EHN} = 90^\circ$.

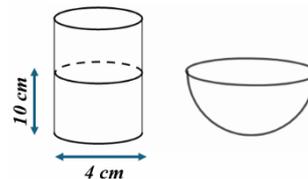
Xét $\triangle ELN$ vuông tại L suy ra $EQ \perp HN$ tại L

Tương tự ta có $EP \perp CM$ tại J .

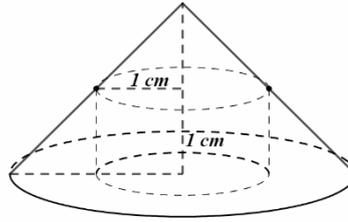
Xét $\triangle EPQ$ có QJ và PL là hai đường cao cắt nhau tại T nên T là trực tâm suy ra $ET \perp PQ$.

Câu 5: (1, 0 điểm).

a) Một bác nông dân có một bình đựng nước chè xanh, phần chứa nước là dạng hình trụ có bán kính đáy bằng 4 cm, mực nước trong bình có chiều cao bằng 10 cm. Bác muốn đổ hết nước từ bình sang một cái bát uống nước, phần chứa nước là dạng nửa hình cầu có bán kính bằng 6 cm (hình vẽ bên). Hỏi nếu đổ như vậy thì nước có bị tràn ra ngoài hay không? Vì sao?



b) Một công ty bánh kẹo muốn sản xuất một loại kẹo có dạng hình nón. Nhân của kẹo làm bằng sô cô la là một hình trụ có bán kính đáy và chiều cao cùng bằng 1 cm, một đáy của nhân kẹo nằm trên mặt đáy của hình nón và có tâm trùng với tâm đáy hình nón, đường tròn đáy còn lại của hình trụ nằm trên mặt xung quanh của hình nón. Phần còn lại của kẹo được phủ đầy bằng sữa khô (hình vẽ bên). Biết rằng công ty đã thiết kế viên kẹo có thể tích nhỏ nhất để tiết kiệm tối đa nguyên liệu sữa khô. Tính chiều cao của viên kẹo.



Lời giải

a) Thể tích nước trong bình là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Thể tích cái bát là: $V' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 = 144\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Vì $V > V'$ nên nếu đổ như vậy thì nước có bị tràn ra ngoài.

b) Đặt $AM = x \text{ (cm, } x > 0\text{)}$

Khi đó chiều cao viên kẹo là $h = OA = x + 1$

Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{AM}{OA} = \frac{EM}{OB}$ hay $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{R}$ suy ra $R = \frac{x+1}{x}$

Thể tích viên kẹo là:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 \cdot (x+1) = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2} = \pi \left(\frac{x}{3} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} \right) \\ &= \pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{x}{24} + \frac{x}{24} + \frac{1}{3x^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 2 \sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{24} + \frac{1}{3x^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x}{24} \cdot \frac{x}{24} \cdot \frac{1}{3x^2}} = 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Suy ra } V \geq \pi \left(1 + \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{9\pi}{4}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \\ \frac{x}{24} = \frac{1}{3x^2} \end{cases} \text{ suy ra } x = 2 \text{ (tm)}$$

Vậy chiều cao của viên kẹo là $h = 3 \text{ (cm)}$.

♾️HẾT♾️