TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ THI OLYMPIC CÁC MÔN CHUYÊN

DÀNH CHO HỌC SINH THCS LẦN THỨ II, NĂM 2025

Môn thi: Toán

*Thời gian làm bài: **150 phút**, không kể thời gian giao đề*

Câu 1: (4 điểm)

a. Cho hai số thực phân biệt $a, b \neq 0$, thỏa mãn

$$a^2 + 2ab = 3b^2.$$

Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{(a+b)(a+2b)}{(a-b)(a-2b)}$.

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x(x+y-2) = 2y \\ y(x+y-1) = 9x \end{cases}$.

Câu 2: (4 điểm)

a. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{1+b^2} + \dfrac{b}{1+c^2} + \dfrac{c}{1+a^2} \geq \dfrac{3}{2}$.

b. Cho một chiếc hộp trong đó có 4 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 6 viên bi vàng, các viên bi được coi là khác nhau. Có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi, sao cho các viên bi lấy ra có đủ cả 3 màu?

Câu 3: (7 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O). Kẻ các đường cao BE, CF cắt nhau tại H với $E \in AC, F \in AB$. Trung trực của đoạn thẳng HB cắt cạnh BC tại M. Trung trực của đoạn thẳng HC cắt cạnh BC tại N. Đường tròn $(M; MB)$ cắt cạnh AB tại điểm J khác B. Đường tròn $(N; NC)$ cắt cạnh AC tại điểm I khác C.

a. Chứng minh rằng các điểm I, J, B, C cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi P là giao điểm khác H của $(M; MB)$ và $(N; NC)$. Chứng minh rằng P là giao điểm khác A của AH và (O).

c. Lấy Q là giao điểm khác C của đường tròn ngoại tiếp tam giác PFC và AC. Chứng minh rằng Q là trung điểm của AI.

Câu 4: (4 điểm)

a. Chứng minh rằng nếu bội chung nhỏ nhất và ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b đều là các số chính phương thì a, b cũng là các số chính phương.

b. Tìm tất cả các số nguyên dương x để $A = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 15$ là số chính phương.

Câu 5: (1 điểm) Cho 20 điểm phân biệt gồm 10 điểm màu xanh và 10 điểm màu đỏ trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể dùng 10 đoạn thẳng nối mỗi điểm xanh với một điểm đỏ tương ứng sao cho 10 đoạn thẳng này đôi một không có điểm chung.

HẾT

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG

(Hướng dẫn có 5 trang)

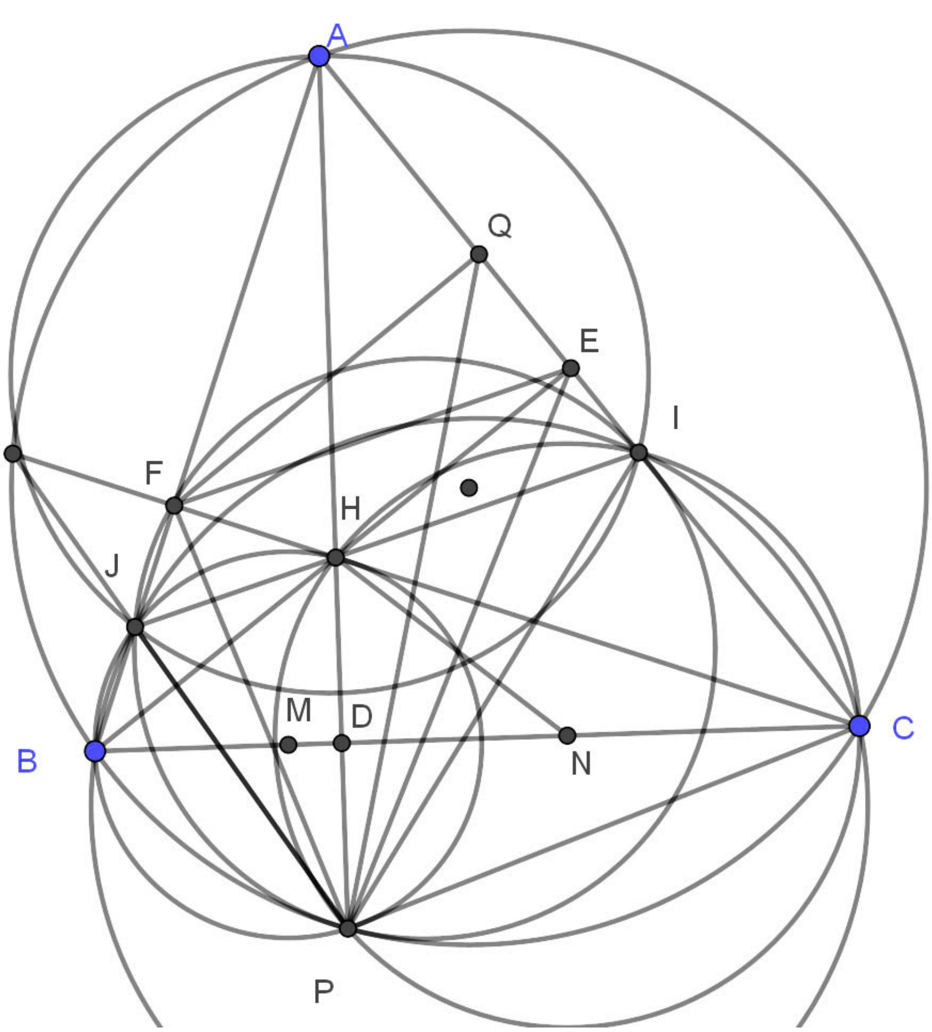
HƯỚNG DẪN CHẤM THI OLYMPIC CÁC MÔN CHUYÊN

DÀNH CHO HỌC SINH THCS LẦN THỨ II

Môn thi: Toán

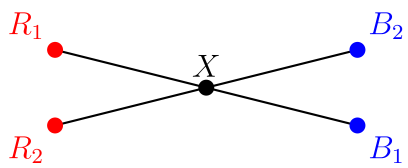
Câu	***Sơ lược lời giải***	***Điểm***
1(4,0đ)	a. *Cho hai số thực phân biệt* $a, b \neq 0$, *thỏa mãn* $$a^2+2ab=3b^2.$$ *Tính giá trị biểu thức* $P=\dfrac{(a+b)(a+2b)}{(a-b)(a-2b)}$.	
	Biến đổi tương đương: $a^2+2ab=3b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+3b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-3b \end{array}\right.$. Kết hợp giả thiết, loại trường hợp $a=b$, ta còn lại $a=-3b$.	1
	thay vào P: $$P=\dfrac{(a+b)(a+2b)}{(a-b)(a-2b)}=\dfrac{(-3b+b)(-3b+2b)}{(-3b-b)(-3b-2b)}=\dfrac{1}{10}.$$ Vậy $P=\dfrac{1}{10}$.	1
	b. *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} 3x(x+y-2)=2y \\ y(x+y-1)=9x \end{cases}$.	
	Nhân theo vế của hai phương trình, phân tích thành nhân tử rồi rút gọn ta được: $3xy(x+y-2)(x+y-1)=18xy \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0 \\ (x+y-2)(x+y-1)=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0 \\ x+y-4=0 \\ x+y+1=0 \end{array}\right.$. Từ đây, hoặc $xy=0$ hoặc $x+y=4$ hoặc $x+y=-1$.	1
	TH1: Nếu $x=0$ (tương ứng $y=0$), thay vào hệ ban đầu ta được $y=0$ (tương ứng $x=0$). **TH2:** Nếu $x+y=4$, thay vào hệ ban đầu ta được $(x,y)=(1,3)$. **TH3:** Nếu $x+y=-1$, thay vào hệ ban đầu ta được $(x,y)=\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{9}{7}\right)$. Thử lại, ta kết luận hệ đã cho có 3 nghiệm như trên.	1
2(4,0đ)	a. *Cho* $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. *Chứng minh rằng:* $\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\geq\dfrac{3}{2}$.	
	Áp dụng bất đẳng thức AM - GM: $$\dfrac{a}{1+b^2}=\dfrac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\dfrac{ab^2}{2b}=a-\dfrac{ab}{2}.$$	1

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Tương tự với hai biểu thức còn lại, cộng vế với vế ta được $$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq(a+b+c)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geq 3-\frac{1}{2}.\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{3}{2}.$$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.	1
	b. *Cho một chiếc hộp trong đó có 4 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 6 viên bi vàng, các viên bi được coi là khác nhau. Có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi, sao cho các bi lấy ra có đủ cả 3 màu?*	
	Ta tính số cách chọn 2 bi trong số n bi ($n\geq 2$): • Chọn bi đầu tiên, có n cách. • Chọn bi thứ hai, có $n-1$ cách. Tuy nhiên với một cách lấy, bi thứ 2 có thể được lấy ra trước nên mỗi cách được tính 2 lần, suy ra số cách chọn 2 bi trong số n bi là $\frac{n(n-1)}{2}$. Trở lại bài toán, 4 bi có đủ 3 màu, ta có 3 trường hợp: **TH1:** 2 đỏ, 1 xanh, 1 vàng, có $\frac{4.3}{2}.5.6=180$ cách. **TH2:** 1 đỏ, 2 xanh, 1 vàng, có $4.\frac{5.4}{2}.6=240$ cách. **TH3:** 1 đỏ, 1 xanh, 2 vàng, có $4.5.\frac{6.5}{2}=300$ cách. Vậy tất cả có 720 cách.	2
3(7đ)	*Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O). Kẻ các đường cao BE, CF cắt nhau tại H với $E\in AC, F\in AB$. Trung trực của đoạn thẳng HB cắt cạnh BC tại M. Trung trực của đoạn thẳng HC cắt cạnh BC tại N. Đường tròn $(M;MB)$ cắt cạnh AB tại điểm J khác B. Đường tròn $(N;NC)$ cắt cạnh AC tại điểm I khác C.* *a. Chứng minh rằng các điểm I, J, B, C cùng thuộc một đường tròn.* *b. Gọi P là giao điểm khác H của $(M;MB)$ và $(N;NC)$. Chứng minh rằng P là giao điểm khác A của AH và (O).* *c. Lấy Q là giao điểm khác C của đường tròn ngoại tiếp tam giác PFC và AC. Chứng minh rằng Q là trung điểm của AI.*	

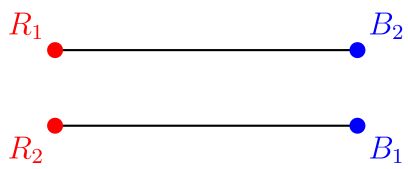
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	 a. Ta có: N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HIC nên $$\widehat{HIA} = 90^\circ - \widehat{NCH} = 90^\circ - \widehat{HCB} = \widehat{ABC}$$ Bởi vì B, E, C, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{FEA} = \widehat{ABC}$.	1
	Suy ra được $EF \parallel HI$. Tương tự $HJ \parallel EF$. Do đó nên H, I, J cùng thuộc 1 đường thẳng song song với EF.	1
	$\Rightarrow \widehat{AIJ} = \widehat{ABC}$. $\Rightarrow IJBC$ nội tiếp.	1
	b. Ta có $MH = MP; NH = NP$ nên MN là trung trực của HP. Ta lại có $BC \equiv MN$ nên BC là trung trực của HP. $\Rightarrow HP \perp BC$ và do đó nên H, P, A thẳng hàng.	1
	Ta có: $$\widehat{PBC} = \widehat{HBC} = 90^\circ - \widehat{ACB} = \widehat{HAC} = \widehat{PAC}$$ $\Rightarrow P, A, B, C$ cùng thuộc 1 đường tròn. Do đó nên P là giao khác A của AH và (O)	1

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	c. Gọi K là giao điểm khác C của HC và (O). Trước hết ta chứng minh F là trung điểm của HK. Ta có: $\widehat{BKH} = \widehat{BKC} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{BHK} = \widehat{BHF} = 90^\circ - \widehat{HBA} = \widehat{BAC}$ $\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{BKH} \Rightarrow BK = BH,$ Lại có $BF \perp HK$ tại F nên F là trung điểm của HK. Ta có: $\widehat{PKH} = \widehat{PKC} = \widehat{PAC} = \widehat{PAI}, \widehat{PHK} = 180^\circ - \widehat{PHC} = 180^\circ - \widehat{PIC} = \widehat{PIA}$ $\Rightarrow \triangle PHK \sim \triangle PIA(g-g)$.	1
	Bởi Q, F, P, C cùng thuộc 1 đường tròn nên $\widehat{IQP} = \widehat{CQP} = \widehat{HFP}$. Lại có $\widehat{PIQ} = \widehat{AIP} = \widehat{KHP} = \widehat{FHP}$ nên $\triangle PIQ \sim \triangle PHF$. Suy ra : $$\frac{HF}{IQ} = \frac{PH}{PI} = \frac{HK}{IA}$$ Ta có $HF = \dfrac{HK}{2}$ nên $IQ = \dfrac{IA}{2}$. Do đó nên Q là trung điểm của IA.	1
4(4đ)	a. *Chứng minh rằng nếu bội chung nhỏ nhất và ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b đều là các số chính phương thì a, b cũng là các số chính phương.*	
	Đặt $a = da_1, b = db_1$ với $d = \gcd(a, b)$. Khi đó $\gcd(a_1, b_1) = 1$ và $\operatorname{lcm}(a, b) = da_1b_1$ là số chính phương. Theo điều kiện đề bài d cũng là số chính phương nên a_1b_1 là số chính phương.	1
	Lại có $\gcd(a_1, b_1) = 1$ nên a_1, b_1 đều là các số chính phương. Ta có $a = da_1; d; a_1$ đều là các số chính phương nên a là số chính phương. Tương tự b là số chính phương.	1
	b. *Tìm tất cả các số nguyên dương x để $A = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 15$ là số chính phương.*	
	Giả sử x là số nguyên dương cần tìm. Xét $x \leq 3$, ta thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn. Để ý rằng $4x^3 + 9x^2 - 10x - 15 = (x+1)(4x^2 + 5x - 15)$ và xét $x > 3$ thì cả hai nhân tử đều dương. Đặt $d = \gcd(x+1; 4x^2 + 5x - 15) \in \{1; 2; 4; 8; 16\}$, ta có các trường hợp sau:	1
	TH1: Nếu $d \in \{1; 4; 16\}$. Khi đó $4x^2 + 5x - 15$ là số chính phương, nhưng $(2x)^2 < 4x^2 + 5x - 15 < (2x+2)^2$ với mọi $x > 3$ nên $4x^2 + 5x - 15 = (2x+1)^2$. Giải ra được $x = 16$, thử lại không thỏa mãn. **TH2:** Nếu $d \in \{2; 8\}$. Khi đó $4x^2 + 5x - 15 = 2m^2$ hay $$(8x+5)^2 - 2(4m)^2 = 265.$$ Dễ thấy $8x + 5$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi $4m$ chia hết cho 5, nhưng khi đó vế trái chia hết cho 5^2 (mâu thuẫn). Còn nếu $8x + 5$ và $4m$ không chia hết cho 5, xét modulo 5 vế trái cũng không chia hết cho 5 (mâu thuẫn). Vậy $x = 3$ là giá trị duy nhất thỏa mãn đề bài.	1

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Sơ lược lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>5(1đ)</td><td>a. Cho 20 điểm phân biệt gồm 10 điểm màu xanh và 10 điểm màu đỏ trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể dùng 10 đoạn thẳng nối mỗi điểm xanh với một điểm đỏ tương ứng sao cho 10 đoạn thẳng này đôi một không có điểm chung.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Ta thấy rằng khi nối mỗi điểm xanh với một điểm đỏ tương ứng, ta chỉ có hữu hạn cách nối (cụ thể là 10! cách). Giả sử rằng trong các cách nối đó có một cách nối T mà tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ nhất. Nếu ở cách nối T này có hai đoạn thẳng cắt nhau:



Như ở trên hình minh hoạ, các điểm R_1, R_2 màu đỏ và các điểm B_1, B_2 màu xanh sao cho R_1B_1 cắt R_2B_2 tại X. Khi đó ta xét cách nối T' được tạo thành từ việc giữ nguyên cách nối T cho các điểm còn lại, ngoại trừ việc ta sẽ nối R_1B_2 và R_2B_1:



Rõ ràng theo bất đẳng thức tam giác thì $R_1B_2+R_2B_1 < (XR_1+XB_2)+(XR_2+XB_1) = R_1B_1 + R_2B_2$. Do ngoài 4 điểm này, các điểm còn lại của cách nối T' được nối y hệt T nên T' có tổng độ dài các đoạn thẳng nhỏ hơn T (mâu thuẫn). Vậy cách nối T không có hai đoạn thẳng nào cắt nhau.</td><td>1</td></tr>
</table>

Hướng dẫn khi chấm:

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.

2. Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới $0,25$ điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm, không làm tròn điểm.

3. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi thống nhất trong cả tổ chấm và ghi vào biên bản.

TỔ TOÁN - TIN TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG