

BÀI 1. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC, ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác

1. Định nghĩa

Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác

2. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường trung trực tam giác đó.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường trung trực đến mỗi đỉnh của tam giác đó.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.

Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

II. Đường tròn nội tiếp tam giác

1. Định nghĩa

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác đó

2. Xác định tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác

Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác đó.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh của tam giác đó.

Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác đó.

Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

B. CÂU TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) . Cho các khẳng định sau:

- (i) Số đo góc $\widehat{BAC}$ bằng một nửa số đo góc $\widehat{BOC}$.
 - (ii) O luôn là giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác ABC .
 - (iii) Để xác định O , ta lấy giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC .
- Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 2. Tâm đường tròn nội tiếp của một tam giác là giao của ba đường:

- A. Trung trực. B. Phân giác. C. Đường cao D. Đường trung tuyến.

Câu 3. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao của ba đường:

- A. Trung trực. B. Phân giác trong. C. Trung tuyến. D. Đường cao.

Câu 4. Tam giác đều ABC có cạnh 10 cm nội tiếp trong đường tròn, thì bán kính đường tròn là

- A. $5\sqrt{3}\text{ cm}$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$. C. $\frac{10\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$. D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$

Câu 5. Số đường tròn ngoại tiếp của một đa tam giác là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 6. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) . Cho các khẳng định sau:

- i) I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC .
- ii) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC luôn bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$ lần bán độ dài cạnh BC .
- iii) Số đo của góc $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$.
- iv) Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh BC của tam giác ABC tại chân đường cao hạ từ I xuống BC .

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 7. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = 4\text{ cm}$. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác có độ dài là

- A. $2\sqrt{2}\text{ cm}$. B. $\sqrt{2}\text{ cm}$. C. $4\sqrt{2}\text{ cm}$. D. $8\sqrt{2}\text{ cm}$.

Câu 8. Cho tam giác vuông cân ABC tại A có độ dài cạnh góc vuông 2 cm và nội tiếp đường tròn (O) . Bán kính của đường tròn (O) là

- A. 2 cm . B. 4 cm . C. $2\sqrt{2}\text{ cm}$. D. $\sqrt{2}\text{ cm}$.

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = 30\text{ cm}$, $AC = 40\text{ cm}$, $BC = 50\text{ cm}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Tam giác ABC là tam giác vuông.
- B. Tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp trùng với trọng tâm.
- C. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 25 cm .
- D. Số đo cung $\widehat{BC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là 180° .

Câu 10. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh là 5 cm và đường tròn nội tiếp (I) . Khoảng cách từ I đến A là

- A. $\frac{5\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{6}(\text{cm})$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}(\text{cm})$. D. $5\sqrt{3}(\text{cm})$.

Câu 11. Cho tam giác đều ABC có đường cao $AH = 9\text{ cm}$. Bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác có độ dài là (TH)

- A. 6 cm . B. 3 cm . C. $4,5\text{ cm}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết góc $\widehat{ABC} = 70^\circ$, góc $\widehat{ACB} = 85^\circ$. Số đo góc $\widehat{BOC}$ là

- A. 60° . B. 50° . C. 70° . D. 80° .

Câu 13. Cho tam giác đều ABC có đường tròn nội tiếp (I) . Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A. $\widehat{BIC} = 120^\circ$. B. $\widehat{AIC} = 120^\circ$. C. $\widehat{AIB} = 120^\circ$.
D. Đường kính đường tròn nội tiếp (I) bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ lần độ dài cạnh của tam giác ABC .

Câu 14. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Góc $\widehat{BIC}$ luôn là góc tù. B. Góc $\widehat{BIC}$ có thể là góc vuông.
C. Góc $\widehat{BIC}$ bằng góc $\widehat{BAC}$. D. Góc $\widehat{BIC}$ có thể là góc nhọn.

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao hạ từ A xuống BC cắt BC tại H và cắt (O) tại S . Biết số đo góc $\widehat{ACB} = 20^\circ$, số đo góc $\widehat{SBC}$ là

- A. 50° . B. 60° . C. 70° . D. 80° .

Câu 16. Cho tam giác ABC có số đo góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , số đo góc $\widehat{BIC}$ là

- A. 150° . B. 120° . C. 30° . D. 90° .

Câu 17. Tính chu vi của tam giác đều nội tiếp $(O; R)$ theo R

- A. $\frac{R}{\sqrt{3}}$. B. $\sqrt{3}R$. C. $R\sqrt{6}$. D. $3R$.

Câu 18. Tính diện tích tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O; 2\text{ cm})$

- A. 6 cm^2 . B. $6\sqrt{3}\text{ cm}^2$. C. 3 cm^2 . D. $3\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 19. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có: $AB = 9\text{ cm}$; $AC = 12\text{ cm}$, bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ bằng

- A. 2 cm . B. 3 cm . C. 6 cm . D. $12,5\text{ cm}$.

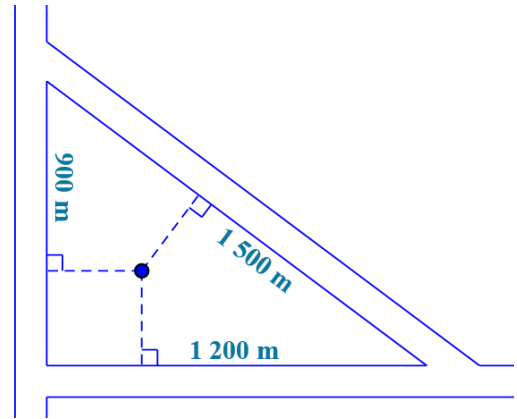
Câu 20. Một khu dân cư được bao quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900 m , 1200 m và 1500 m . Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường một khoảng là bao nhiêu?

A. 150 m .

B. 300 m .

C. 450 m .

D. 500 m .



C. CÁC DẠNG TỰ LUẬN

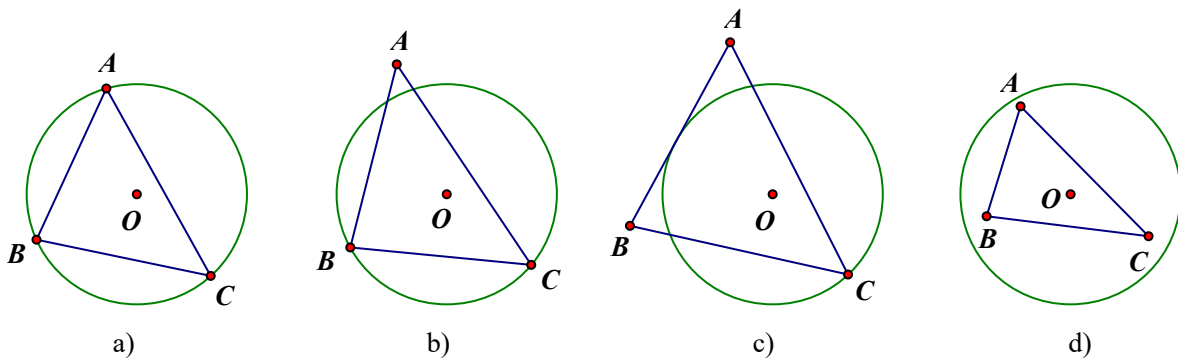
Dạng 1. Nhận biết và vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác, đường tròn nội tiếp tam giác. Tính độ dài bán kính đường tròn, cạnh của tam giác

Phương pháp giải

Theo định nghĩa đường tròn ngoại tiếp tam giác (Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác).

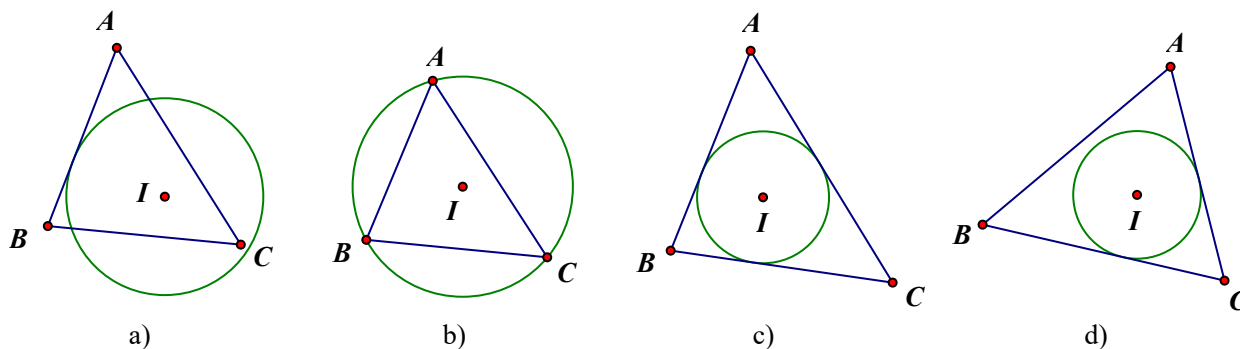
- Theo định nghĩa đường tròn nội tiếp tam giác (Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác đó).
- Vẽ hai đường trung trực hai cạnh của tam giác, chúng cắt nhau tại điểm O , điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- Vẽ hai đường phân giác hai góc của tam giác, chúng cắt nhau tại điểm I , điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác
- Dựa vào định lý Pythagore, các hệ thức lượng trong tam giác để tính toán.

Bài 1. Trong các hình 1a, 1b, 1c, 1d ở hình nào ta có đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ? Vì sao?



Hình 1

Bài 2. Trong các hình 2a, 2b, 2c, 2d ở hình nào ta có đường tròn (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC ? Vì sao?



Hình 2

Bài 3.

- Vẽ tam giác đều ABC cạnh $a = 3\text{cm}$.
- Vẽ tiếp đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác đều ABC . Tính R .
- Vẽ tiếp đường tròn $(O; r)$ nội tiếp tam giác ABC . Tính r .
- Vẽ tiếp tam giác đều IJK ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$.

Bài 4.

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC .

Bài 5.

Cho tam giác ABC có chu vi 20cm ngoại tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến của đường tròn (O) song song với BC bị AB, AC cắt thành đoạn thẳng $MN = 2,4\text{ cm}$. Tính độ dài BC .

Bài 6.

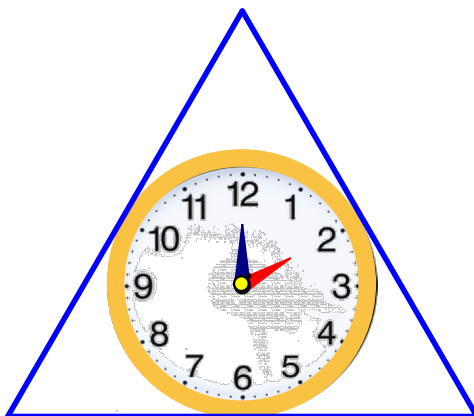
Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 18cm . Một tiếp tuyến với đường tròn nội tiếp tam giác cắt các cạnh AB và AC ở N và M . Tính diện tích tam giác AMN biết $MN = 8\text{cm}$.

Bài 7.

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$, biết $AB = 8\text{cm}$, $AC = 18\text{cm}$, đường cao $AH = 6\text{cm}$ (H nằm bên ngoài cạnh BC). Tính bán kính của đường tròn.

Bài 8.

Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít một chiếc đồng hồ hình tròn có đường kính 21cm (Hình bên). Hỏi độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng bao nhiêu?



Dạng 2. Tính độ dài của dây căng cung**Phương pháp giải**

- Nếu cung đã cho căng một dây là cạnh của một đa giác đều n cạnh thì ta tính độ dài của cạnh này theo công thức: $a = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$
- Áp dụng định lý Pythagore hoặc hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để tính dây căng cung 90° .

Bài 9. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A trên đường tròn này vẽ các cung AB và AC sao cho $sđ \widehat{AB} = 30^\circ$, $sđ \widehat{AC} = 90^\circ$ (điểm A nằm trên cung nhỏ BC). Tính các cạnh của $\triangle ABC$ và diện tích của nó.

Bài 10. Cho đường tròn $(O; R)$. Cho dây $BC = R\sqrt{3}$. Lấy A thuộc cung nhỏ BC sao cho $BA = R\sqrt{2}$. Vẽ $AH \perp BC$. Tính AH ; AC .

Bài 11. Cho đường tròn $(O; R)$, S là điểm sao cho $OS = 2R$. Vẽ cát tuyến SCO đến đường tròn (O) . Lấy C, D thuộc đường tròn (O) . Biết $CD = R\sqrt{3}$. Tính SC và SD theo R .

Bài 12. Cho đường tròn $(O; R)$, BC là dây cung cố định, $sđ \widehat{BC} = 120^\circ$. Điểm A di động trên cung lớn BC . Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC .

Bài 13. Một chiếc máy quay ở đài truyền hình được đặt trên giá đỡ 3 chân, các điểm tiếp xúc với mặt đất của 3 chân lần lượt là 3 đỉnh A, B, C của tam giác đều ABC . Tính khoảng cách giữa 2 vị trí A và B , biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là 4dm.



Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác**Phương pháp giải**

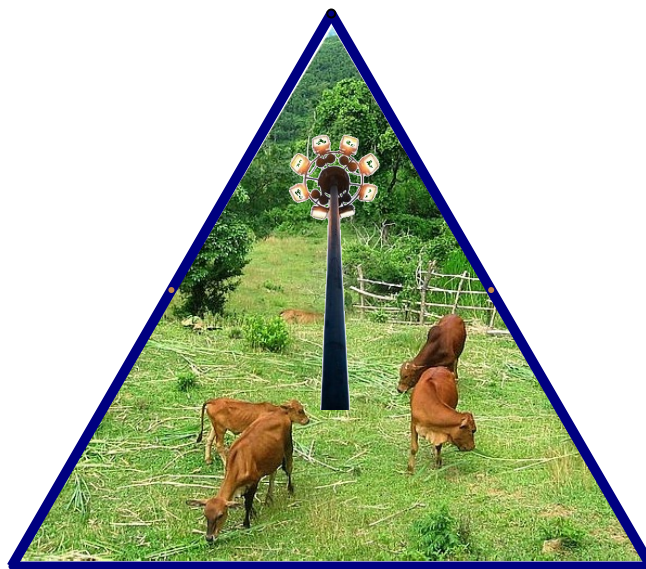
- Dựa vào cách xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác
- Áp dụng công thức tính diện tích tam giác, hình tròn.

Bài 14. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 15 cm. Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 15. Một mảnh vườn có dạng tam giác đều ABC cạnh 18 cm. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

Bài 16. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều có cạnh bằng 60 m, người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa 50 m, hỏi rằng có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy hay không?

Bài 17. Một trại nuôi gia súc có dạng hình tam giác đều cạnh 100 m (Hình vẽ). Người ta muốn đặt một trụ đèn cao áp tại một điểm cách đều ba đỉnh của tam giác. Nêu cách xác định vị trí đặt đèn và tính khoảng cách từ điểm đó đến ba đỉnh của tam giác.



Bài 18. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ($AB \leq AC$). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D . Chứng minh rằng

$$\text{a) } BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$$

$$\text{b) } S_{ABC} = BD \cdot DC$$

C. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CÂU TẬP TRẮC NGHIỆM PHẢN VẬN DỤNG

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	B	A	C	A	C	A	D	B	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	B	D	A	C	C	B	D	B	B

Câu 17: Tính độ dài của tam giác đều nội tiếp $(O; R)$ theo R .

A. $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

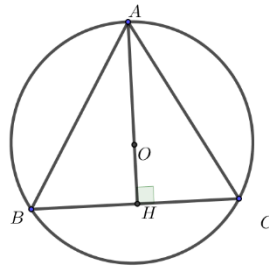
B. $\sqrt{3}R$.

C. $R\sqrt{6}$.

D. $3R$.

Lời giải

Chọn B



Gọi tam giác ABC đều cạnh a nội tiếp $(O; R)$

Khi đó O là trọng tâm tam giác ABC . Gọi AH là đường trung tuyến

$$\Rightarrow R = AO = \frac{2}{3} AH \Rightarrow AH = \frac{3R}{2}.$$

Theo định lý Pytago ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Từ đó ta có $\frac{3R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = R\sqrt{3}.$

Câu 18: Tính diện tích tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O; 2\text{ cm})$

A. 6 cm^2 .

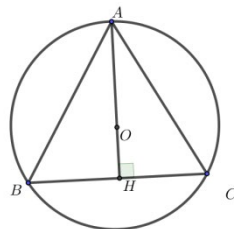
B. $6\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

C. 3 cm^2 .

D. $3\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi tam giác ABC đều cạnh a nội tiếp $(O; 2\text{ cm})$

Khi đó O là trọng tâm tam giác ABC và cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $AO = 2\text{ cm}$. Gọi AH là đường trung tuyến $\frac{2}{3}AH = AO = 2\text{ cm} \Rightarrow AH = 3\text{ cm}$.

Theo định lý Pytago ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó ta có $3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\text{ cm}$.

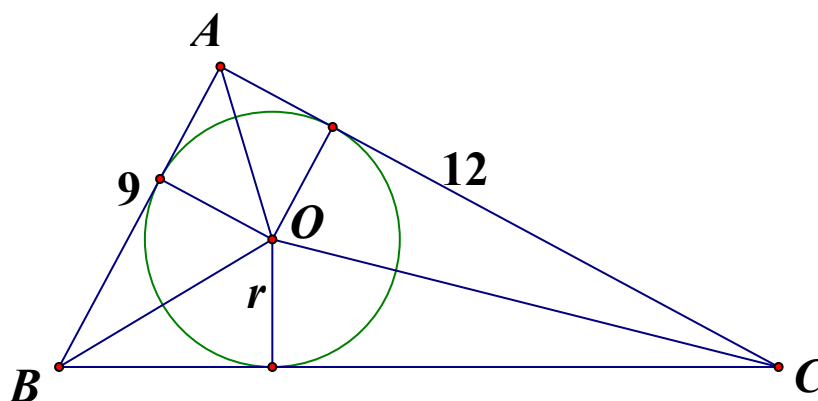
Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

Câu 19. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có: $AB = 9\text{ cm}$; $AC = 12\text{ cm}$, bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ bằng

A. 2 cm . **B.** 3 cm . **C.** 6 cm . **D.** $12,5\text{ cm}$.

Lời giải

Chọn B



$\triangle ABC$ vuông tại A có: $AB = 9\text{ cm}$; $AC = 12\text{ cm} \Rightarrow BC = 15\text{ cm}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 54\text{ cm}^2$$

Lại có: $S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot AC + \frac{1}{2}r \cdot BC$$

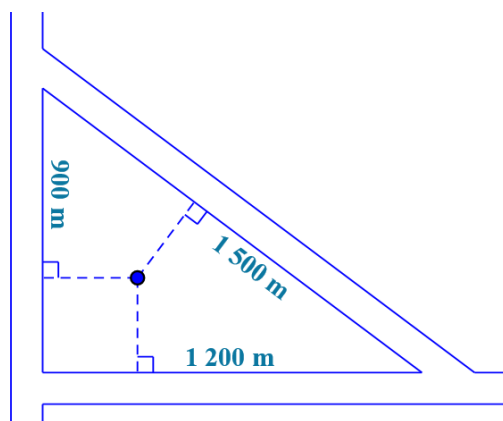
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}r.(AB + AC + BC)$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}r.C_{ABC}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2S_{ABC}}{C_{ABC}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2.54}{9+12+15} = \frac{108}{36} = 3 \text{ cm}$$

Câu 20. Một khu dân cư được bao quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900 m , 1200 m và 1500 m . Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường một khoảng là bao nhiêu?



A. 150 m .

B. 300 m .

C. 450 m .

D. 500 m .

Lời giải

Chọn B

Để khách sạn cách đều cả ba con đường thì cần phải được xây vào đúng vị trí tâm nội tiếp I của tam giác ABC . Khi đó cho chiều cao hạ từ đỉnh I xuống các cạnh BC , CA , AB của các tam giác IBC , ICA , IAC đều bằng bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

$$\text{Do đó } S_{ABC} = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB}$$

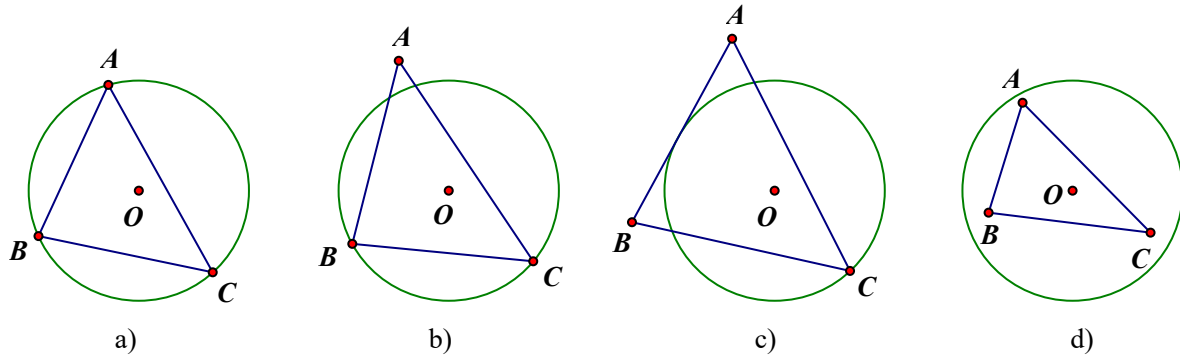
$$= \frac{1}{2}r(AB + AC + BC) = \frac{rc}{2}.$$

$$\text{Suy ra } r = \frac{2S_{ABC}}{C} = 300 \text{ m. Vậy khách sạn sẽ cách mỗi con đường là } 300 \text{ m.}$$

E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: Nhận biết và vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác, đường tròn nội tiếp tam giác. Tính độ dài bán kính đường tròn, cạnh của tam giác

Bài tập 1. Trong các hình 1a, 1b, 1c, 1d ở hình nào ta có đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ? Vì sao?

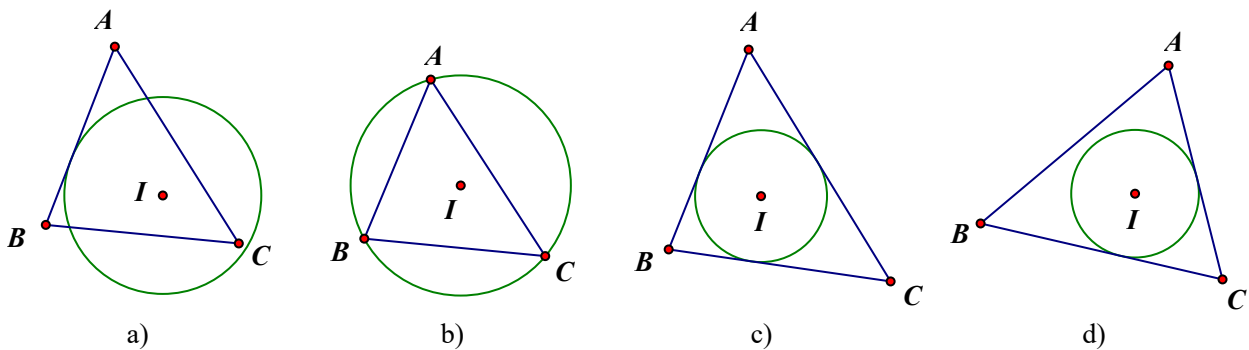


Hình 1

Lời giải

Hình a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Bài tập 2. Trong các hình 2a, 2b, 2c, 2d ở hình nào ta có đường tròn (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC ? Vì sao?



Hình 2

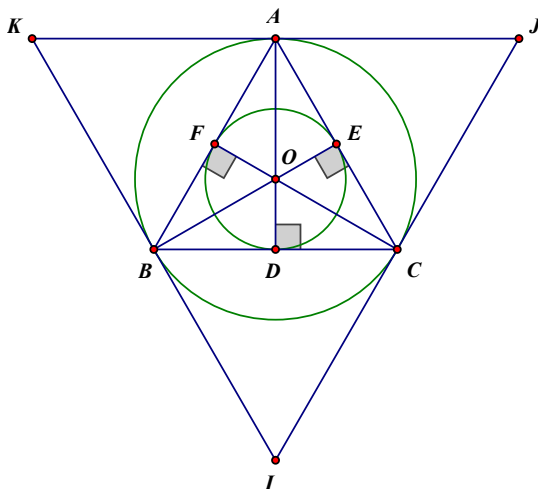
Lời giải

Hình c) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Bài tập 3.

- Vẽ tam giác đều ABC cạnh $a = 3\text{cm}$.
- Vẽ tiếp đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác đều ABC . Tính R .
- Vẽ tiếp đường tròn $(O; r)$ nội tiếp tam giác ABC . Tính r .
- Vẽ tiếp tam giác đều IJK ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$.

Lời giải



a) Vẽ tam giác đều ABC , cạnh $BC = a = 3\text{cm}$.

b) Vẽ các đường trung trực của các cạnh chúng gặp nhau tại O , đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác đều ABC .

Vẽ đường tròn $(O; OA)$ ta được đường tròn ngoại tiếp tam giác đều.

Ta có:

$$R = OA = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

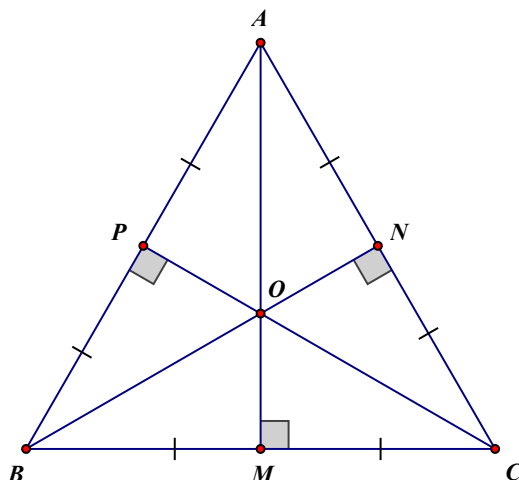
c) Vẽ đường tròn $(O; OD)$ ta được đường tròn nội tiếp tam giác đều.

$$\text{Ta có: } r = OD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d) Vẽ các tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại A, B, C . Ba tiếp tuyến này cắt nhau tại $I; J; K$. Tam giác IJK là tam giác đều ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$.

Bài tập 4. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC và O là giao điểm của AM, BP, CN .

Vì ABC là tam giác đều nên $OA = OB = OC$ hay O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Mặt khác ta có $OM = ON = OP$ hay O cách đều ba cạnh của tam giác.

Vậy O cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Xét tam giác vuông AMB có

$$AB^2 = AM^2 + MB^2$$

$$a^2 = AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$AM^2 = \frac{3a^2}{4}$$

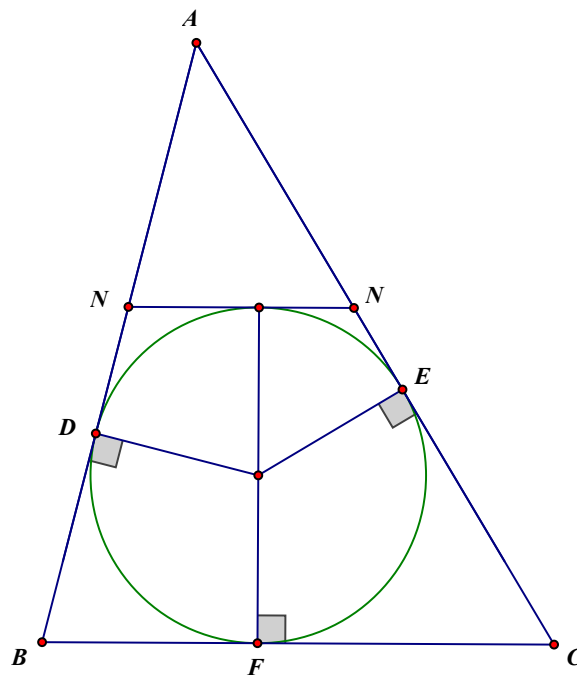
$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $R = OA = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là: $r = OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Bài tập 5. Cho tam giác ABC có chu vi 20cm ngoại tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến của đường tròn (O) song song với BC bị AB, AC cắt thành đoạn thẳng $MN = 2,4\text{ cm}$. Tính độ dài BC .

Lời giải



Gọi D, E, F là tiếp điểm của (O) với AB, AC, BC .

Ta có $AD = AE$, $BD = BF$, $CE = CF$ nên

$$AD + BF + CE = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ cm}$$

Đặt $BC = x$, $AD = y$ ta có $x + y = 10$ (1)

Vì $MN \parallel BC$ nên ta có $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

$$\text{Suy ra } \frac{MN}{BC} = \frac{\text{chu vi } \triangle AMN}{\text{chu vi } \triangle ABC}$$

Mặt khác chu vi tam giác AMN là: $AM + AN + MN = AD + AE = 2AD = 2y$.

Khi đó

$$\frac{2,4}{x} = \frac{2y}{20}$$

$$xy = 24 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$x(10 - x) = 24$$

$$x^2 - 10x - 24 = 0$$

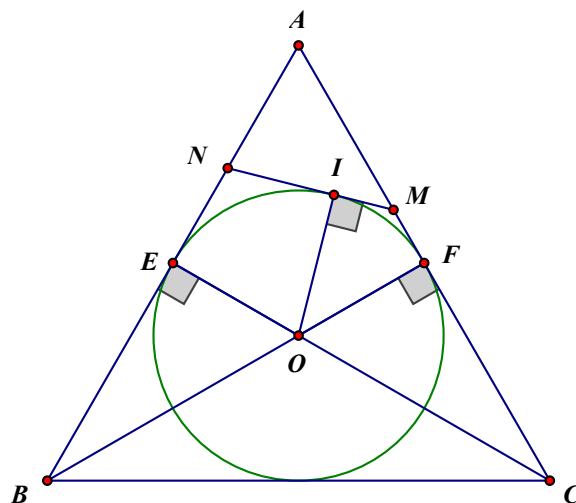
$$(x - 6)(x - 4) = 0$$

Suy ra $x = 6$ hoặc $x = 4$

Vậy độ dài cạnh BC là: 6cm hoặc 4cm.

Bài tập 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 18cm. Một tiếp tuyến với đường tròn nội tiếp tam giác cắt các cạnh AB và AC ở N và M . Tính diện tích tam giác AMN biết $MN = 8\text{cm}$.

Lời giải



Gọi $(O; r)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và E, F là điểm tiếp xúc của đường tròn với cạnh AC, AB .

Ta có $AE = AF, NE = NI, MF = MI$.

Vì tam giác ABC đều nên bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là

$$r = \frac{1}{3} \cdot BE = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

Xét $\triangle OEN$ và $\triangle OIN$ có $NE = NI = r; OE = OI$ (chứng minh trên);

NO là cạnh chung.

Suy ra $\triangle OEN = \triangle OIN$ (c - c - c).

Chứng minh tương tự ta có $\triangle OMI = \triangle OMF$.

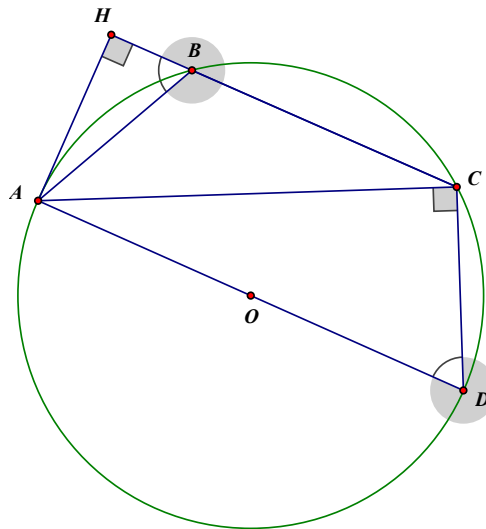
$$\text{Suy ra } S_{OENMF} = S_{OENI} + S_{OIMF} = 2S_{ONI} + 2S_{OMI} = 2S_{OMN} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OI \cdot MN = 3\sqrt{3} \cdot 8 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Diện tích tứ giác } AEOF \text{ là } S_{AEOF} = 2S_{AEO} = AE \cdot OE = \frac{1}{2} AC \cdot OE = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Vậy } S_{AMN} = S_{AEOF} - S_{OENMF} = 27\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Bài tập 7. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$, biết $AB = 8\text{ cm}$, $AC = 18\text{ cm}$, đường cao $AH = 6\text{ cm}$ (H nằm bên ngoài cạnh BC). Tính bán kính của đường tròn.

Lời giải



Kẻ đường kính AD .

Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$.

Mặt khác $\widehat{ABH} + \widehat{ABC} = 180^\circ$.

Do đó $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$.

Xét hai tam giác vuông ABH và ADC có $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$. (chứng minh trên).

Suy ra $\triangle ABH \sim \triangle ADC$ (g - g). Khi đó

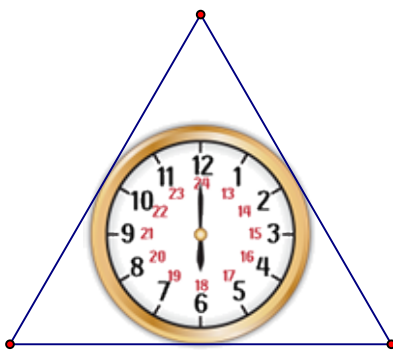
$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{6}{18} = \frac{8}{2R}$$

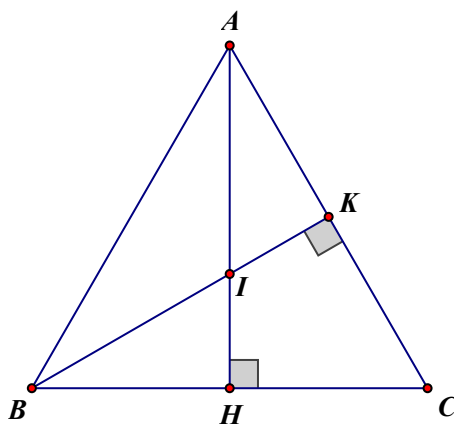
$$R = 12 \text{ cm}$$

Vậy $R = 12 \text{ cm}$.

Bài 8. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít một chiếc đồng hồ hình tròn có đường kính 21cm (Hình bên). Hỏi độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng bao nhiêu?



Lời giải



Gọi khung gỗ hình tam giác đều là tam giác ABC .

Đồng hồ là đường tròn tâm I , bán kính $IH = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$

Vì $(I; IH)$ nội tiếp tam giác đều ABC nên $IH = \frac{\sqrt{3}}{6} BC$ suy ra $BC = 30\sqrt{3} \text{ cm}$

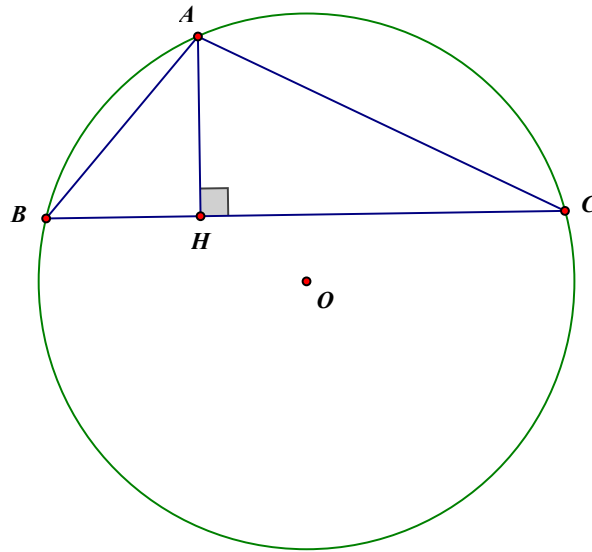
Vậy độ dài cạnh khung gỗ phía bên trong bằng $30\sqrt{3}$ cm

Dạng 2. Tính độ dài của dây căng cung

Bài tập 9. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A trên đường tròn này vẽ các cung AB và AC sao cho

$\widehat{AB} = 30^\circ$, $\widehat{AC} = 90^\circ$ (điểm A nằm trên cung nhỏ BC). Tính các cạnh của $\triangle ABC$ và diện tích của nó.

Lời giải



$$\text{Ta có } \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BAC} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ.$$

Do đó BC là cạnh của một tam giác đều nội tiếp. Vậy $BC = R\sqrt{3}$.

Vì $\widehat{AC} = 90^\circ$ nên AC là cạnh của một hình vuông nội tiếp.

$$\text{Vậy } AC = R\sqrt{2}.$$

$$\text{Vẽ đường cao } AH \text{ ta được } AH = AC \cdot \sin C = R\sqrt{2} \sin 15^\circ$$

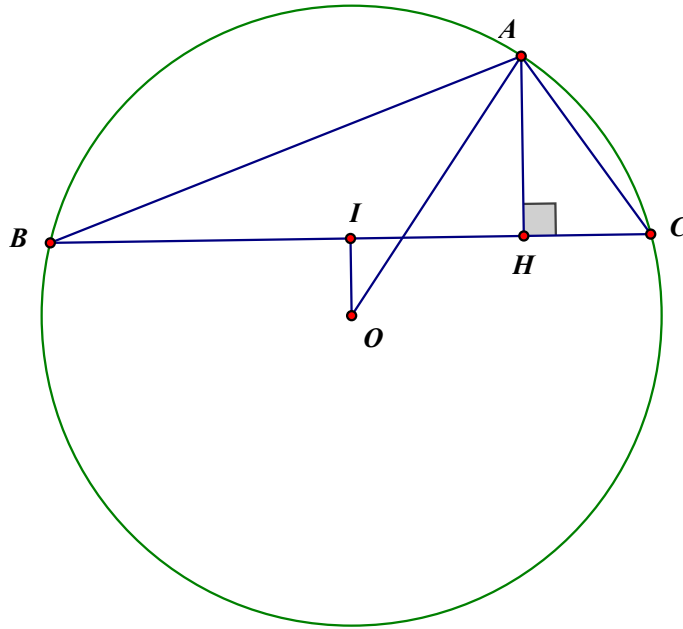
Xét tam giác vuông HAB có:

$$AB = \frac{AH}{\sin 45^\circ} = AH \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2} \sin 15^\circ \cdot \sqrt{2} = 2R \sin 15^\circ$$

$$\text{Diện tích } \triangle ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} R\sqrt{2} \sin 15^\circ \cdot R\sqrt{3} = R^2 \frac{\sqrt{6}}{2} \sin 15^\circ$$

Bài tập 10. Cho đường tròn $(O; R)$. Cho dây $BC = R\sqrt{3}$. Lấy A thuộc cung nhỏ BC sao cho $BA = R\sqrt{2}$. Vẽ $AH \perp BC$. Tính AH ; AC .

Lời giải



Vẽ $OI \perp BC$, ta có $BI = CI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lí Pythagore, ta có: $OI^2 = OB^2 - BI^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4}$.

Suy ra $OI = \frac{R}{2}$. Suy ra $OI = \frac{1}{2}BO$. Vậy $\widehat{IBO} = 30^\circ$

Ta có: $BO^2 + OA^2 = 2R^2 = AB^2$ nên $\triangle OAB$ vuông,
do đó $\widehat{BOA} = 90^\circ$.

Mà $OA = OB$ nên $\triangle OAB$ vuông cân, do đó $\widehat{OAB} = \widehat{ABO} = 45^\circ$.

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABO} - \widehat{CBO} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

Xét $\triangle ABH$ có $AH = AB \cdot \sin \widehat{ABC} = R\sqrt{2} \sin 15^\circ$

$$\text{Mà } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 45^\circ$$

Suy ra $\triangle AHC$ vuông cân, do đó $AH = HC$.

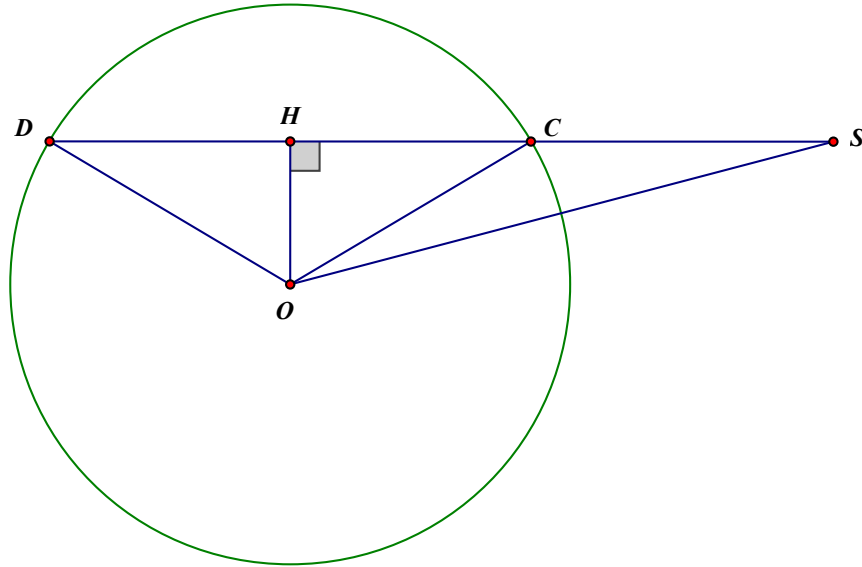
Áp dụng định lí Py-ta-go trong $\triangle AHC$, ta có:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

Suy ra $AC = AH \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2} \sin 15^\circ \cdot \sqrt{2} = 2R \cdot \sin 15^\circ$

Bài tập 11. Cho đường tròn $(O; R)$, S là điểm sao cho $OS = 2R$. Vẽ cát tuyến SCO đến đường tròn (O) . Lấy C, D thuộc đường tròn (O) . Biết $CD = R\sqrt{3}$. Tính SC và SD theo R .

Lời giải



Vẽ $OH \perp CD, H \in CD$.

Ta có: $CD = R\sqrt{3}$ suy ra CD là cạnh của tam giác đều nội tiếp $(O; R)$

Khi đó $\widehat{COD} = 120^\circ$.

Do đó: $\widehat{HOC} = 60^\circ$.

Ta có $\triangle HOC$ là nửa tam giác đều nên

$$OH = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}, DH = HC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

(vì $OH \perp CD$).

$\triangle HOS$ có $\widehat{H} = 90^\circ$ nên

$$OS^2 = OH^2 + SH^2$$

$$SH^2 = OS^2 - OH^2$$

$$SH^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{15R^2}{4}$$

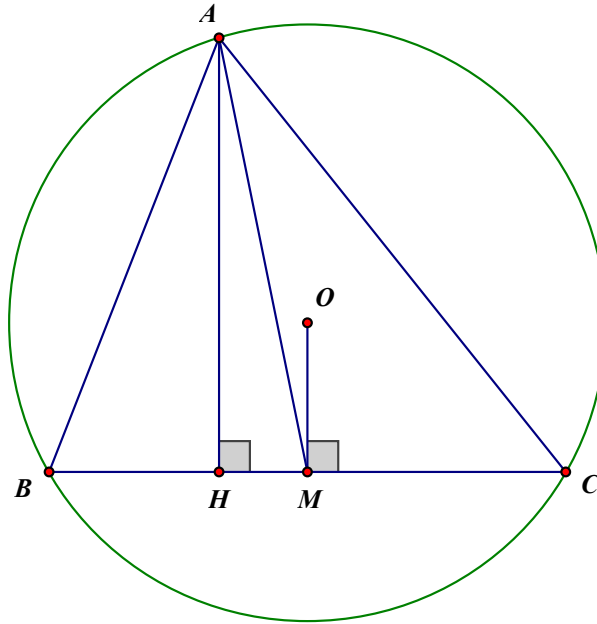
$$\text{Suy ra } SH = \frac{\sqrt{15}R}{2}.$$

$$\text{Ta có } SC = SH - HC = \frac{\sqrt{15}R}{2} - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{2}R;$$

$$SD = SH + HD = \frac{\sqrt{15}R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}R.$$

Bài tập 12. Cho đường tròn $(O; R)$, BC là dây cung cố định, số $\widehat{BC} = 120^\circ$. Điểm A di động trên cung lớn BC . Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Hạ $OM \perp BC, AH \perp BC (H, M \in BC)$.

Ta có số $\widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MOC} = 60^\circ$

Xét tam giác OMC vuông tại M có

$$OM = OC \cdot \cos \widehat{MOC} = R \cdot \cos 60^\circ$$

$$\text{hay } OM = \frac{R}{2}.$$

$$BC = 2MC = 2\sqrt{OC^2 - OM^2}$$

Suy ra $BC = R\sqrt{3}$.

Xét ba điểm A, O, M ta có: $AM \leq OA + OM$.

Mà $AH \leq AM$.

Do vậy: $AH \leq R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$ nên

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \text{ (không đổi)}$$

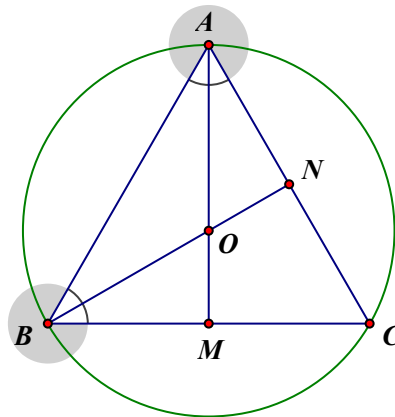
Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv M$ và O nằm giữa A và M khi A là điểm chính giữa cung lớn BC .

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Bài tập 13. Một chiếc máy quay ở đài truyền hình được đặt trên giá đỡ 3 chân, các điểm tiếp xúc với mặt đất của 3 chân lần lượt là 3 đỉnh A, B, C của tam giác đều ABC . Tính khoảng cách giữa 2 vị trí A và B biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là 4 dm.



Lời giải



Gọi $(O; OM)$ là đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC nên O là giao điểm của phân giác AM, BN và $OA = 4$ dm.

AM là đường phân giác của tam giác đều ABC nên AM đồng thời là đường cao do đó $\widehat{AMB} = 90^\circ$ và cũng là đường trung tuyến suy ra $AM = \frac{3}{2}OA = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$ dm và $BM = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác AMB vuông tại M :

$$AB^2 = AM^2 + MB^2$$

$$AB^2 = 6^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$\frac{3AB^2}{4} = 36$$

$$AB^2 = 48$$

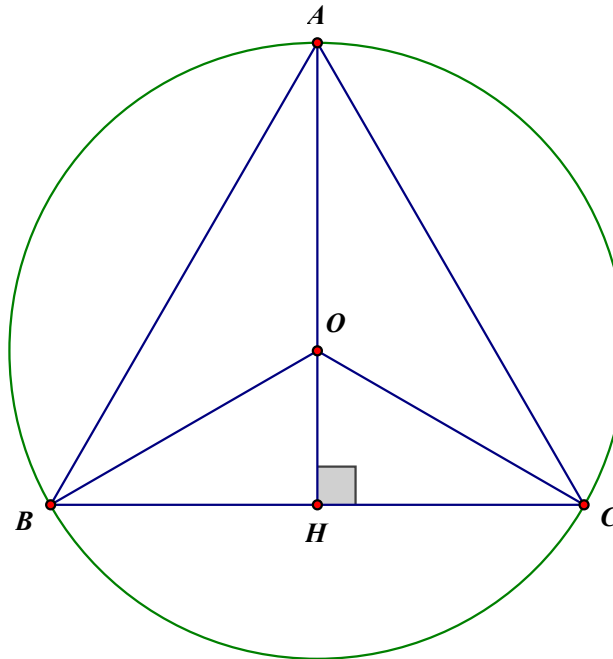
Suy ra $AB = 4\sqrt{3}$ dm

Vậy khoảng cách A và B là $4\sqrt{3}$ dm

Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác

Bài tập 14. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 15 cm. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Vì tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O) nên O là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC .

Gọi H là giao điểm của AO và BC nên AH là trung trực đồng thời là đường cao, đường trung tuyến trong tam giác đều ABC .

$$\text{Do đó: } OA = \frac{BC\sqrt{3}}{3} \text{ suy ra } BC = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

Vì O là trọng tâm của tam giác ABC ,

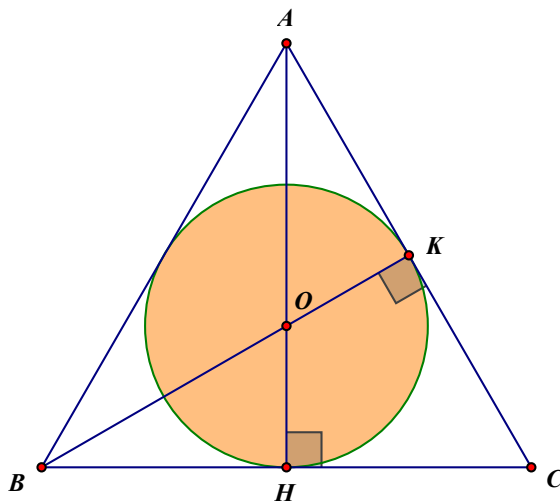
AH là đường trung tuyến của tam giác ABC nên

$$AH = \frac{3}{2}OA = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

Diện tích tam giác ABC là: $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ cm}$

Bài tập 15. Một mảnh vườn có dạng tam giác đều ABC cạnh 18 cm. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

Lời giải



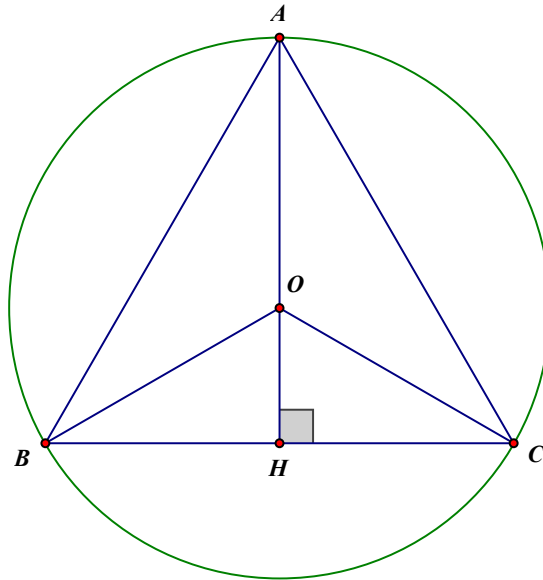
Vì đường tròn (O) nội tiếp tam giác đều nên O là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC .

Tam giác ABC đều cạnh 18cm có bán kính đường tròn nội tiếp là $\frac{18\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

Diện tích phần đất trồng hoa là $3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3,14 \approx 87,78 \text{ cm}^2$

Bài tập 16. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều có cạnh bằng 60 m, người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa 50 m, hỏi rằng có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy hay không?

Lời giải



Để vị trí của bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng thì bộ phát sóng wifi đặt ở tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác khu vui chơi đó

Xét khu vui chơi hình tam giác đều là tam giác ABC có cạnh 60m. Xét đường tròn tâm (O) ngoại tiếp tam giác ABC đó.

Vẽ đường cao AH của tam giác ABC . Tam giác ABC đều nên AH vừa là đường trung trực, vừa là đường trung tuyến của tam giác.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là

$$OA = \frac{BC\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

Vì $20\sqrt{3} \text{ m} < 50\text{m}$ nên bộ phát sóng đó đặt ở tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác thì cả khu vui chơi đều có thể bắt sóng được.

Bài tập 17. Một trại nuôi gia súc có dạng hình tam giác đều cạnh 100 m (Hình vẽ). Người ta muốn đặt một trụ đèn cao áp tại một điểm cách đều ba đỉnh của tam giác. Nêu cách xác định vị trí đặt đèn và tính khoảng cách từ điểm đó đến ba đỉnh của tam giác.

Lời giải



Vị trí đặt đèn sẽ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều suy ra vị trí đặt đèn là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác.

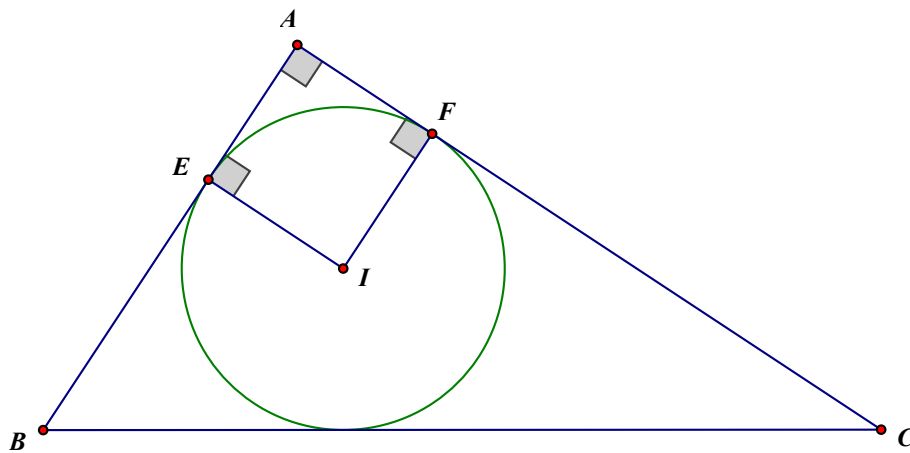
Khoảng cách từ tâm đến đỉnh hay bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ cm.

Bài tập 18. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ($AB \leq AC$). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D . Chứng minh rằng

a) $BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$

b) $S_{ABC} = BD \cdot DC$

Lời giải



a) Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn tâm I với các cạnh AB, AC

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AE = AF$; $BE = BD$; $CD = CF$

Do đó

$$\begin{aligned} 2BD &= BD + BE = BC - CD + AB - AE \\ &= BC + AB - (CD + AE) \\ &= BC + AB - (CF + AF) \\ &= BC + AB - AC \end{aligned}$$

Suy ra $BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$

b) Tương tự $DC = \frac{BC + AC - AB}{2}$

Mà $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ($\triangle ABC$ vuông tại A)

do đó $BD \cdot DC = \frac{BC + AB - AC}{2} \cdot \frac{BC + AC - AB}{2}$

$$BD.DC = \frac{BC^2 - (AB - AC)^2}{4}$$

$$BD.DC = \frac{AB.AC}{2} = S_{ABC} \text{ hay } S_{ABC} = BD.DC$$

BÀI 2. TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

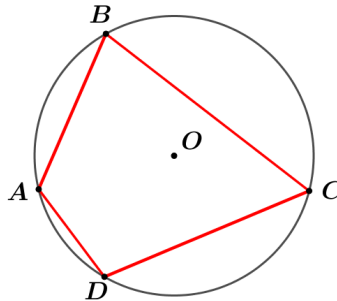
Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa:

- Tứ giác có bốn đỉnh thuộc một đường tròn được gọi là *tứ giác nội tiếp đường tròn* (hay còn gọi là *tứ giác nội tiếp*)

2. Tính chất

- Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng số đo hai góc đối bằng 180° .



- Hình chữ nhật, hình vuông** nội tiếp đường tròn
- Mỗi hình chữ nhật là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.
- Mỗi hình vuông là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn ngoại tiếp hình vuông là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn, Biết $\widehat{C} = 60^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$. Khi đó:

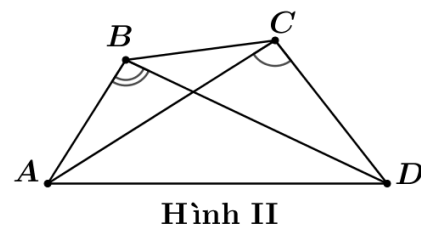
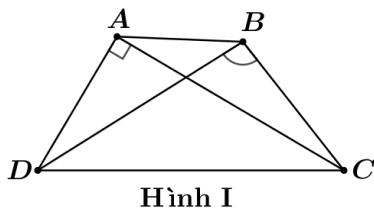
A. $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{B} = 80^\circ$

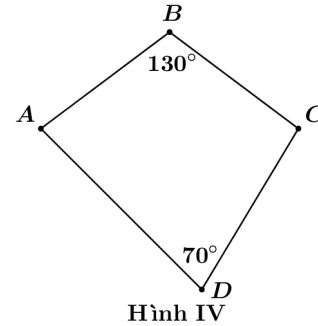
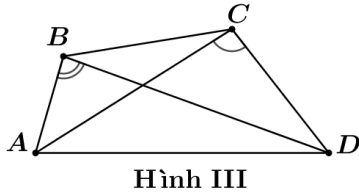
B. $\widehat{A} = 120^\circ$; $\widehat{B} = 100^\circ$

C. $\widehat{A} = 120^\circ$; $\widehat{B} = 130^\circ$

D. $\widehat{A} = 90^\circ$; $\widehat{B} = 100^\circ$

Câu 2: Trong các hình vẽ tứ giác $ABCD$ sau hãy chọn hình vẽ có tứ giác nội tiếp trong đường tròn.





A. Hình I

B. Hình II

C. Hình III

D. Hình IV

Câu 3: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là đúng

A. Mọi tứ giác đều nội tiếp được đường tròn.

B. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối bằng 90° .

C. Tứ giác có tổng hai góc bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp.

D. Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp.

Câu 4: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai cạnh đối AB và CD cắt nhau tại M và $\widehat{BAD} = 80^\circ$ thì $\widehat{BCM} = ?$.

A. 100°

B. 40°

C. 70°

D. 80°

Câu 5: Điều kiện để tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn là:

A. $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$

B. $\widehat{BCA} + \widehat{DCA} = 180^\circ$

C. $\widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 180^\circ$

D. $\widehat{ADB} + \widehat{BCA} = 180^\circ$

Câu 6: Trong các hình sau, hình nào sau đây không nội tiếp được đường tròn?

A. Hình vuông.

B. Hình chữ nhật.

C. Hình thoi có một góc nhọn.

D. Hình thang cân.

Câu 7: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn, Biết $\hat{A} = 50^\circ$, $\hat{B} = 70^\circ$. Khi đó:

A. $\hat{C} = 110^\circ$; $\hat{D} = 70^\circ$

B. $\hat{C} = 130^\circ$; $\hat{D} = 110^\circ$

C. $\hat{C} = 40^\circ$; $\hat{D} = 130^\circ$

D. $\hat{C} = 50^\circ$; $\hat{D} = 70^\circ$

Câu 8: Cho tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và có $\hat{M} = 50^\circ$. Khi đó ta có

A. $\hat{P} = 50^\circ$

B. $\hat{P} = 130^\circ$

C. $\hat{P} = 180^\circ$

D. $\hat{P} = 310^\circ$

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9: Cho hình vẽ sau:

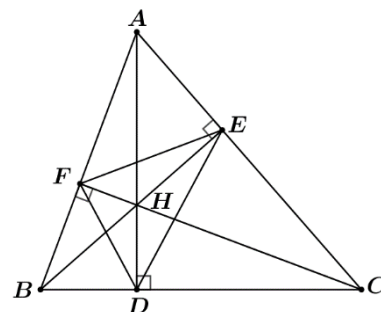
Số tứ giác nội tiếp được trong đường tròn là:

A. Có 3 hình tứ giác nội tiếp.

B. Có 4 hình tứ giác nội tiếp.

C. Có 5 hình tứ giác nội tiếp.

D. Có 6 hình tứ giác nội tiếp.



Câu 10: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có hai tia $AB; DC$ kéo dài cắt nhau tại M sao cho $\widehat{AMD} = 20^\circ$ và hai tia $AD; BC$ kéo dài cắt nhau tại N sao cho $\widehat{ANB} = 40^\circ$. Khi đó số đo của $\widehat{BAD}$ là:

A. 120° B. 40° C. 20° D. 60°

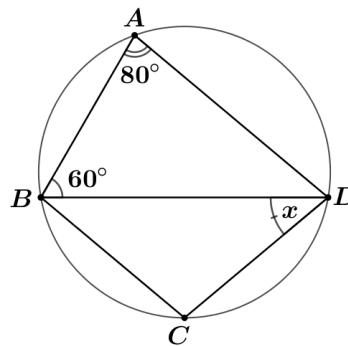
Câu 11: Cho tứ giác $MNPQ$ có $\widehat{PMQ} = \widehat{PNQ} = 90^\circ$ và $MP = MQ$. Khi đó số đo $\widehat{MNP}$ là:

A. 45° B. 90° C. 125° D. 135° .

Câu 12: Cho đường tròn (O) . Biết $MA; MB$ là các tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại M và $\widehat{AMB} = 58^\circ$. Khi đó số đo $\widehat{ABO}$ bằng:

A. 24° B. 29° C. 30° D. 31°

Câu 13. Cho hình vẽ bên dưới. Biết $AD \parallel BC$. Số đo góc x bằng:



A. 40° B. 70° C. 60° D. 50°

Câu 14. Cho 4 điểm M, Q, N, C thuộc (O) . Biết $\widehat{MNQ} = 60^\circ; \widehat{QMP} = 40^\circ$. Khi đó số đo $\widehat{MQP}$ là:

A. 20° B. 25° C. 30° D. 40°

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} : \widehat{D} = 8 : 15 : 28 : 21$ khẳng định nào sau đây là **đúng**:

- A. Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. B. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp được.
C. Tứ giác $ABCD$ là một hình thoi. D. Tứ giác $ABCD$ là một hình thang cân.

Câu 16. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết $\widehat{ADO} = 50^\circ; \widehat{OCD} = 40^\circ$. Khi đó số đo $\widehat{ABC}$ là:

A. 40° B. 50° C. 90° D. 10°

Câu 17. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . Biết $\widehat{AOC} = 120^\circ$. Khi đó số đo $\widehat{ADC}$ là:

A. 60° hoặc 120° . B. 80° C. 100° D. 120°

Câu 18. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi H là điểm nằm giữa O và B . Kẻ dây $CD \perp AB$ tại H . Trên cung nhỏ AC lấy điểm E , kẻ $CK \perp AE$ tại K . Đường thẳng DE cắt CK tại F . Tam giác ACF là tam giác

A. cân tại F . B. cân tại C . C. cân tại A . D. đều.

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 19: Cho $\triangle ABC$ cân tại $A; \widehat{B} = 40^\circ$ điểm D thuộc cạnh AB . Đường vuông góc với AB tại D cắt BC tại E và cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở K . Gọi I là trung điểm của BE . Khi đó số đo $\widehat{IAK}$

là:

A. 40° B. 50° C. 90° D. 60°

Câu 20: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính a . Biết rằng $AC \perp BD$. Khi đó để $AB + CD$ đạt giá trị lớn nhất thì

A. $AC = AB$ B. $AC = BD$ C. $DB = AB$

D. Không có đáp án đúng.

C. CÁC DẠNG TỰ LUẬN

Dạng 1. Chứng minh tứ giác nội tiếp

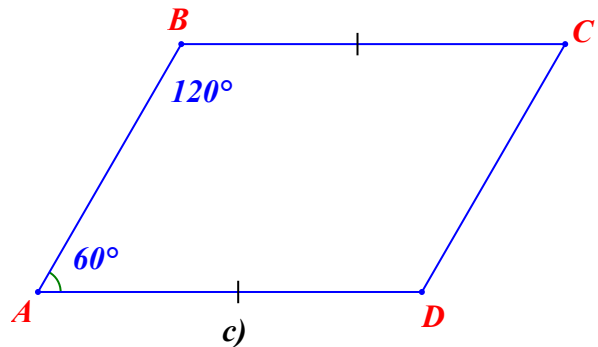
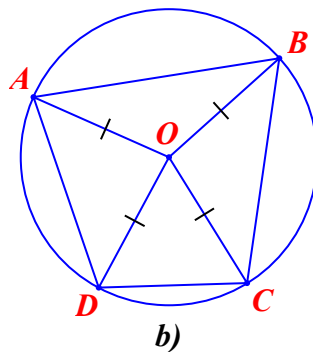
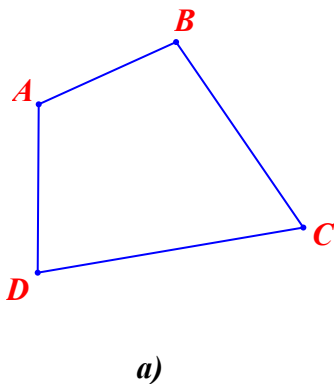
Phương pháp giải: Sử dụng một số nhận xét sau.

Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° .

Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm cố định (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Bài 1. Trong các tứ giác $ABCD$ dưới đây, đâu là tứ giác nội tiếp. Vì sao?



Bài 2. Cho tam giác ABC nhọn có hai đường cao BE và CF cắt nhau ở H . Chứng minh: tứ giác $AEHF$ và $BCEF$ nội tiếp.

Bài 3. Cho hình thoi $ABCD$, (O là giao điểm của hai đường chéo AC , BD). M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của AB , BC , CD , DA . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn.

Bài 4. Hai đường xy và $x'y'$ cắt nhau ở O . Trên Ox, Oy, Ox', Oy' lần lượt lấy các điểm A, C, B và D sao cho $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Chứng minh:

a) $\triangle OAB$ đồng dạng với $\triangle ODC$.

b) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Bài 5. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ ($OA > 2R$) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính CK của (O) , AK cắt (O) tại E . Gọi H là giao điểm của OA và BC .

a) Chứng minh: $OA \perp BC$ tại H và tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Tính số đo $\widehat{KEC}$ và chứng minh: tứ giác $AEHC$ nội tiếp.

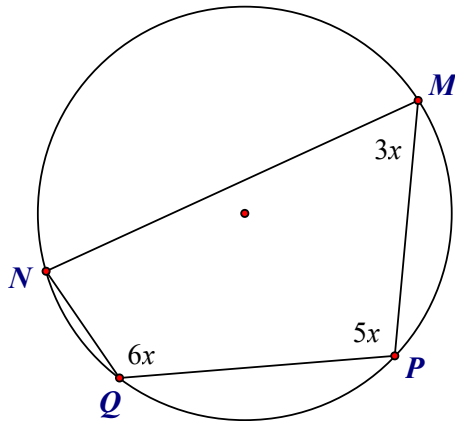
Dạng 2. Sử dụng tính chất tứ giác nội tiếp giải một số bài toán định lượng

Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất “Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° ” và các tính toán hình học, định lý Pytago, tổng số đo trong một tam giác, tứ giác.

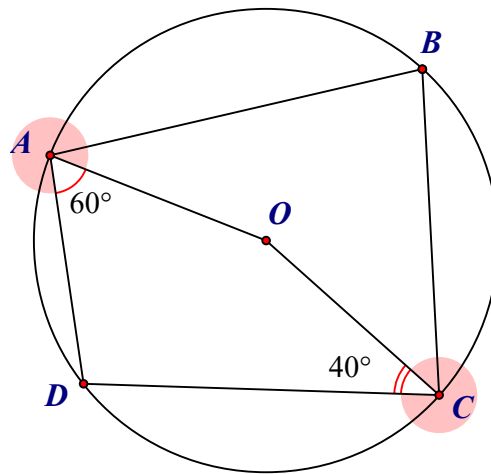
Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác $ABCD$ biết: $\widehat{C} = 7\widehat{D}$ và $\widehat{C} + 2\widehat{D} = 180^\circ$

Bài 7. Tính số đo góc $\widehat{MNQ}$ trong hình 2



Hình 3

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết $\widehat{DAO} = 60^\circ$, $\widehat{OCD} = 40^\circ$ (Hình bên). Tính số đo của $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ABC}$



Hình 4

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại E . Biết rằng $\widehat{DAB} = 70^\circ$, $\widehat{ADC} = 65^\circ$. Tính số đo của các góc BCD và BEC .

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết $AD \parallel BC$ và $AB = BC$, $\widehat{DAB} = 70^\circ$. Tính số đo của $\widehat{CBD}$.

Dạng 3. Sử dụng tính chất tứ giác nội tiếp giải các bài toán định tính

Phương pháp giải:

Bài 11. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , trong đó không có cặp cạnh đối nào song song. Hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại E . Chứng minh rằng: $EA \cdot EB = EC \cdot ED$

Bài 12. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC . Điểm E nằm trên cung nhỏ BC (E khác B và C). ED là tia đối của tia EB . Chứng minh EC là phân giác của góc AED và EA là phân giác của góc BEC

Bài 13. Cho tam giác ABC cân ở A , H là trung điểm của BC và $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Đường vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng BC ở D . Kẻ DE vuông góc với AC . Chứng minh:

a) $AH = EH$;

b) $\widehat{DCE} = \widehat{ABD}$.

Bài 14. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Đường thẳng qua C vuông góc với CM cắt các tia AB , AD lần lượt tại E và F . Tia CM cắt đường thẳng AD tại N . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{NCA} = \widehat{MFN}$ và $\widehat{NEA} = \widehat{NCA}$

b) $CM + CN = EF$.

Bài 15. Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ CB (M khác B và C), kẻ AM cắt CD tại N .

a) Tính $\widehat{AMB}$ và chứng minh: tứ giác $MNOB$ nội tiếp.

b) Đoạn thẳng MD cắt BC ở H . Tính $\widehat{NCH}$ và chứng minh: tứ giác $CNHM$ nội tiếp.

c) Chứng minh: NH song song với AB .

C. ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	B	D	D	A	C	B	B	D	D
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	B	A	A	A	C	A	C	B	B

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn, Biết $\widehat{C} = 60^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$. Khi đó:

A. $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{B} = 80^\circ$

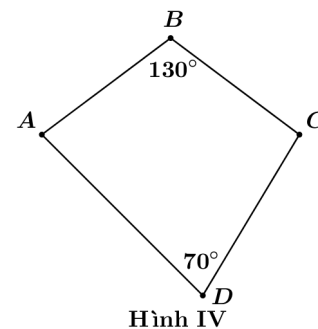
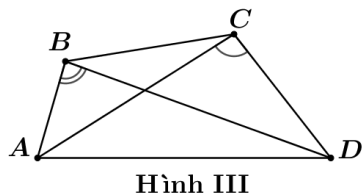
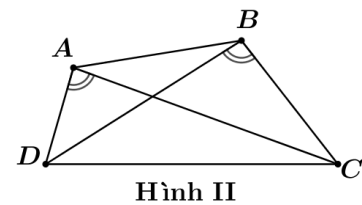
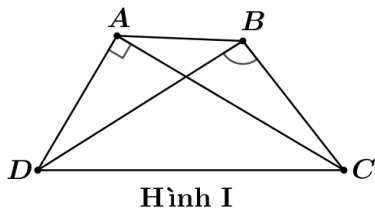
B. $\widehat{A} = 120^\circ$; $\widehat{B} = 100^\circ$

C. $\widehat{A} = 120^\circ$; $\widehat{B} = 130^\circ$

D. $\widehat{A} = 90^\circ$; $\widehat{B} = 100^\circ$

Chọn B.

Câu 2: Trong các hình vẽ tứ giác $ABCD$ sau hãy chọn hình vẽ có tứ giác nội tiếp trong đường tròn.



A. Hình I

B. Hình II

C. Hình III

D. Hình IV

Chọn B.

Câu 3: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là đúng

A. Mọi tứ giác đều nội tiếp được đường tròn.

B. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối bằng 90° .

C. Tứ giác có tổng hai góc bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp.

D. Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp.

Chọn D.

Câu 4: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai cạnh đối AB và CD cắt nhau tại M và $\widehat{BDA} = 80^\circ$ thì $\widehat{BCM} = ?$.

A. 100°

B. 40°

C. 70°

D. 80°

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{BCA} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BCM} = 80^\circ$. Chọn D.

Câu 5: Điều kiện để tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn là:

A. $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$

B. $\widehat{BCA} + \widehat{DCA} = 180^\circ$

C. $\widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 180^\circ$

D. $\widehat{ADB} + \widehat{BCA} = 180^\circ$

Chọn A.

Câu 6: Trong các hình sau, hình nào sau đây không nội tiếp được đường tròn?

A. Hình vuông.

B. Hình chữ nhật.

C. Hình thoi có một góc nhọn.

D. Hình thang cân.

Chọn C.

Câu 7: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn, Biết $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$. Khi đó:

A. $\widehat{C} = 110^\circ$; $\widehat{D} = 70^\circ$

B. $\widehat{C} = 130^\circ$; $\widehat{D} = 110^\circ$

C. $\widehat{C} = 40^\circ$; $\widehat{D} = 130^\circ$

D. $\widehat{C} = 50^\circ$; $\widehat{D} = 70^\circ$

Chọn B.

Câu 8: Cho tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và có $\widehat{M} = 50^\circ$. Khi đó ta có:

A. $\widehat{P} = 50^\circ$

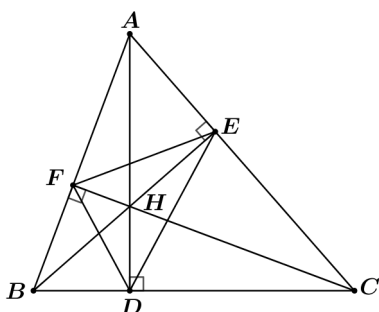
B. $\widehat{P} = 130^\circ$

C. $\widehat{P} = 180^\circ$

D. $\widehat{P} = 310^\circ$

Chọn B.

Câu 9: Cho hình vẽ sau:



Số tứ giác nội tiếp được trong đường tròn là:

A. Có 3 hình tứ giác nội tiếp.

B. Có 4 hình tứ giác nội tiếp.

C. Có 5 hình tứ giác nội tiếp.

D. Có 6 hình tứ giác nội tiếp.

Nhóm tứ giác nội tiếp thứ nhất: $AEHF$; $CDHE$; $BDHF$.

Nhóm tứ giác nội tiếp thứ hai: $BCEF$; $ACDF$; $ABDE$.

Chọn D.

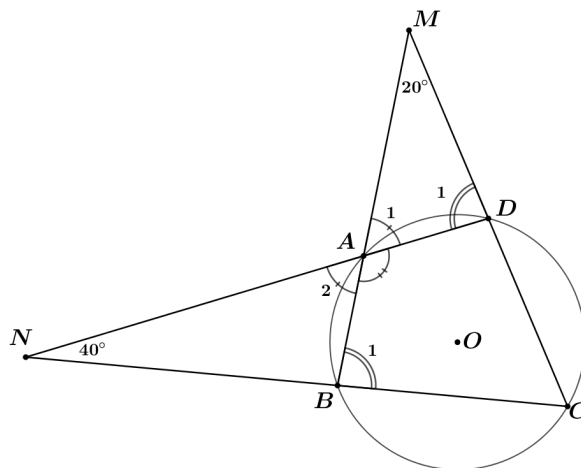
Câu 10: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có hai tia $AB; DC$ kéo dài cắt nhau tại M sao cho $\widehat{AMD} = 20^\circ$ và hai tia $AD; BC$ kéo dài cắt nhau tại N sao cho $\widehat{ANB} = 40^\circ$. Khi đó số đo của $\widehat{BAD}$ là:

A. 120°

B. 40°

C. 20°

D. 60°



Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O) \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{B_1}$

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (hai góc đối đỉnh).

$\widehat{D_1} = 180^\circ - \widehat{A_1} - \widehat{M} = 160^\circ - \widehat{A_1}$.

$\widehat{B_1} = 40^\circ + \widehat{A_2}$ (Góc ngoài tại đỉnh B của $\triangle ABN$) $\Rightarrow \widehat{D_1} = 40^\circ + \widehat{A_1}$.

Do đó: $160^\circ - \widehat{A_1} = 40^\circ + \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{A_1} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 120^\circ$. **Chọn A.**

Câu 11: Cho tứ giác $MNPQ$ có $\widehat{PMQ} = \widehat{PNQ} = 90^\circ$ và $MP = MQ$. Khi đó số đo $\widehat{MNP}$ là:

A. 45°

B. 90°

C. 125°

D. 135° .

Tứ giác $MNPQ$ có $\widehat{PMQ} = \widehat{PNQ} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn đường kính PQ .

$\Rightarrow \widehat{MQP} + \widehat{MNP} = 180^\circ \dots (1)$

$\triangle MPQ$ vuông tại M (gt) và $MP = MQ$ (gt) $\Rightarrow \triangle MPQ$ vuông cân tại $M \Rightarrow \widehat{MQP} = 45^\circ \dots (2)$

Từ (1), (2) suy ra: $\widehat{MNP} = 135^\circ$. **Chọn D.**

Câu 12: Cho đường tròn (O) . Biết $MA; MB$ là các tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại M và $\widehat{AMB} = 58^\circ$ Khi đó số đo $\widehat{ABO}$ bằng:

A. 24°

B. 29°

C. 30°

D. 31°

Vì $MA; MB$ lần lượt là hai tiếp tuyến của (O) lần lượt tại $A; B$ (gt) nên ta có:

$$\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ.$$

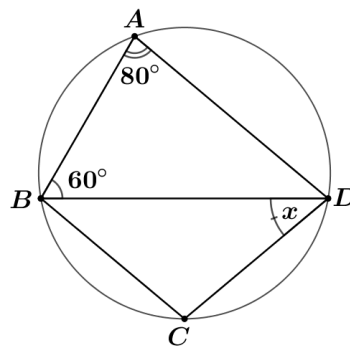
Tứ giác $AMBO$ có $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AMBO$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

$$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{AOB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ.$$

$$\triangle AOB \text{ có } OA = OB = R_{(O)} \Rightarrow \triangle AOB \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{ABO} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} = \frac{180^\circ - 122^\circ}{2} = 29^\circ.$$

Chọn B.

Câu 13. Cho hình vẽ bên dưới. Biết $AD \parallel BC$. Số đo góc x bằng:



A. 40°

B. 70°

C. 60°

D. 50°

$\triangle ABD$ có $\widehat{ADB} = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$ (Định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$$AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DBC} = 40^\circ.$$

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 100^\circ \text{ (Tứ giác } ABCD \text{ nội tiếp đường tròn)}$$

$$\triangle BCD : \widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{DBC} - \widehat{BCD} = 40^\circ \text{ (Định lý tổng ba góc trong một tam giác)}$$

Chọn A.

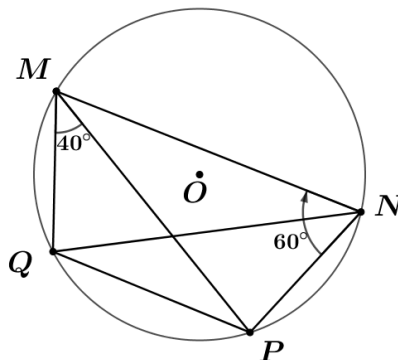
Câu 14. Cho 4 điểm M, Q, N, P thuộc (O) . Biết $\widehat{MNP} = 60^\circ$; $\widehat{QMP} = 40^\circ$. Khi đó số đo $\widehat{MPQ}$ là:

A. 20°

B. 25°

C. 30°

D. 40°



Tứ giác $MNPQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MQP} = 180^\circ - \widehat{MNP} = 120^\circ$.

$\triangle MPQ$: $\widehat{MPQ} = 180^\circ - \widehat{QMP} - \widehat{MQP} = 180^\circ - 40^\circ - 120^\circ = 20^\circ$ (Định lý tổng ba góc trong một tam giác).

Chọn A.

Câu 15. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} : \widehat{D} = 8 : 15 : 28 : 21$ khẳng định nào sau đây là **đúng**:

- A.** Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
- B.** Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp được.
- C.** Tứ giác $ABCD$ là một hình thoi.
- D.** Tứ giác $ABCD$ là một hình thang cân.

Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} : \widehat{D} = 8 : 15 : 28 : 21$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{A}}{8} = \frac{\widehat{B}}{15} = \frac{\widehat{C}}{28} = \frac{\widehat{D}}{21} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{8 + 15 + 28 + 21} = \frac{360^\circ}{72} = 5^\circ \text{ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)}$$

Suy ra: $\widehat{A} = 40^\circ; \widehat{B} = 75^\circ; \widehat{C} = 140^\circ; \widehat{D} = 105^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 16. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết $\widehat{ADO} = 50^\circ; \widehat{OCD} = 40^\circ$. Khi đó

số đo $\widehat{ABC}$ là:

- A.** 40°
- B.** 50°
- C.** 90°
- D.** 10°

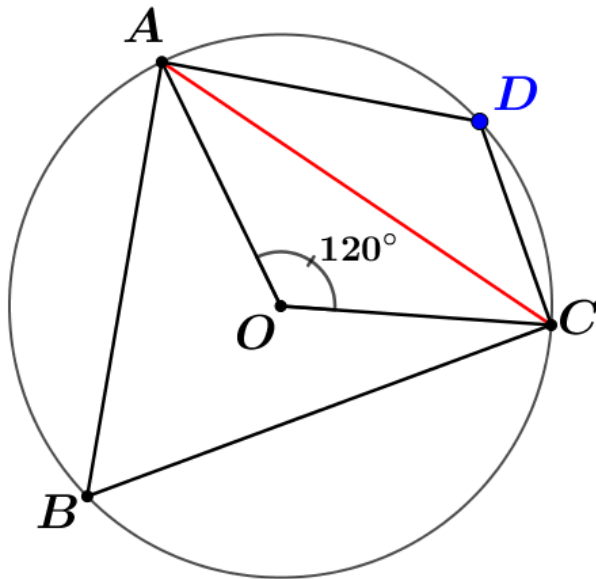
$\triangle OCD$ có $OC = OD = R_{(O)} \Rightarrow \triangle OCD$ cân tại O suy ra $\widehat{OCD} = \widehat{ODC} = 40^\circ$.

Ta có: $\widehat{ADO} + \widehat{ODC} = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ$

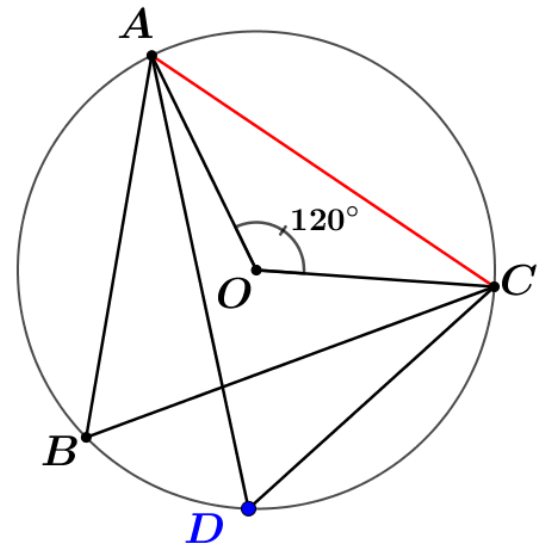
$\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 90^\circ$ (Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O)). **Chọn C.**

Câu 17. Cho tứ giác $A; B; C; D$ thuộc (O) . Biết $\widehat{AOC} = 120^\circ$. Khi đó số đo $\widehat{ADC}$ là:

- A.** 60° hoặc 120° .
- B.** 80°
- C.** 100°
- D.** 120°



TH₁



TH₂

TH1: $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - \frac{\widehat{AOC}}{2} = 120^\circ$.

TH2: $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

Chọn A.

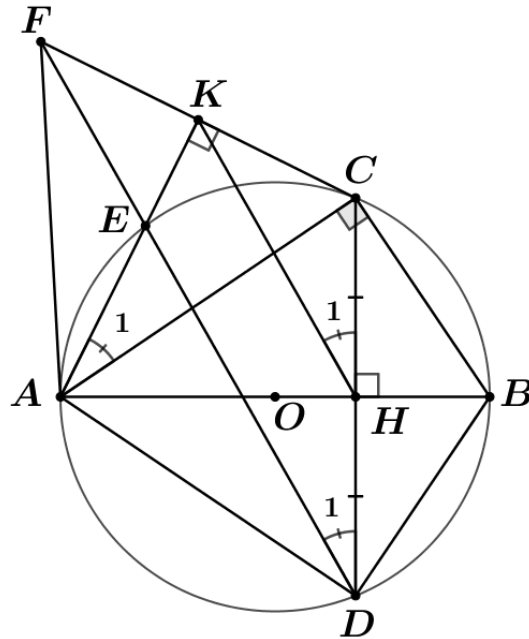
Câu 18. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi H là điểm nằm giữa O và B . Kẻ dây $CD \perp AB$ tại H . Trên cung nhỏ AC lấy điểm E , kẻ $CK \perp AE$ tại K . Đường thẳng DE cắt CK tại F . Tam giác ACF là tam giác

A. cân tại F .

C. cân tại A .

B. cân tại C .

D. đều.



$AB \perp CD$ tại H mà AB là đường kính suy ra H là trung điểm của CD ... (1)

Trên (O) : $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EC}$)... (2)

Đễ dàng, chứng minh được tứ giác $AHCK$ nội tiếp đường tròn đường kính AC .

Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{H}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{KC}$)... (3)

Từ (2), (3) suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{H_1}$ mà $\widehat{D_1}; \widehat{H_1}$ là cặp góc nằm ở vị trí đồng vị $\Rightarrow HK // DF \dots$ (4)

Từ (1), (4) suy ra K là trung điểm của FC .

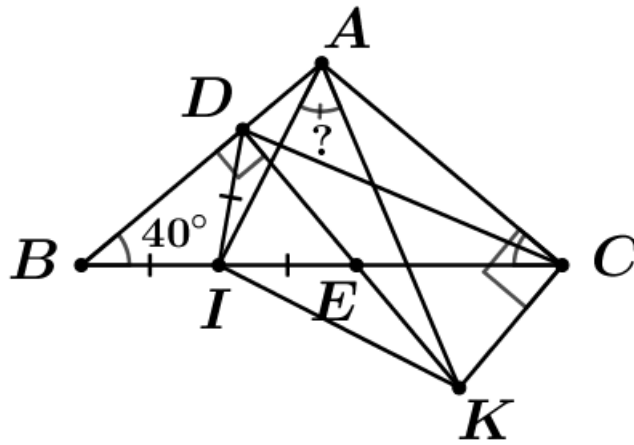
hay AK là đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của $\triangle AFC$.

mà AK cũng là đường cao xuất phát từ đỉnh A của $\triangle AFC$.

Do đó: $\triangle ACF$ cân tại A . **Chọn C.**

Câu 19: Cho $\triangle ABC$ cân tại A ; $\widehat{B} = 40^\circ$ điểm D thuộc cạnh AB . Đường vuông góc với AB tại D cắt BC tại E và cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở K . Gọi I là trung điểm của BE . Khi đó số đo $\widehat{IAK}$ là:

- A.** 40° **B.** 50°
C. 90° **D.** 60°



$\triangle BDE$ vuông tại D có DI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BE

$\Rightarrow IB = ID = IE$. Suy ra: $\triangle BID$ cân tại I và $\triangle EID$ cân tại I

Suy ra: $\widehat{IBD} = \widehat{IDB} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{IED} = 90^\circ - \widehat{IDB} = 50^\circ$ hay $\widehat{IDK} = 50^\circ$

$\widehat{ICK} = 90^\circ - \widehat{BCA} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

Tứ giác $IDCK$ có hai đỉnh liên kề D, C cùng nhìn đoạn IK dưới một góc 50°

$\Rightarrow IDCK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow I; D; C; K$ cùng thuộc một đường tròn.

Dễ dàng chứng minh tứ giác $ADKC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow A; D; C; K$ cùng thuộc một đường tròn.

Do đó 5 điểm $A; I; D; C; K$ cùng thuộc một đường tròn, đường kính AK .

$\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{ICK} = 50^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{IK}$).

Chọn B.

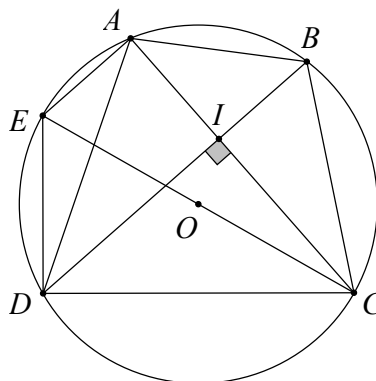
Câu 20: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính a . Biết rằng $AC \perp BD$. Khi đó để $AB + CD$ đạt giá trị lớn nhất thì

A. $AC = AB$

B. $AC = BD$

C. $DB = AB$

D. Không có đáp án đúng.



Vẽ đường kính CE của đường tròn (O) .

Ta có $\widehat{EAC} = 90^\circ$, $\widehat{EDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Từ đó ta có $AE \perp AC$. Mặt khác theo giả thiết $AC \perp BD$.

Kéo theo $AE \parallel BD$. Vậy $AEBD$ là hình thang.

Do hình thang $AEBD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $AEDB$ là hình thang cân.

Kéo theo $AB = DE$ (các cạnh bên của hình thang).

Từ đó ta có $AB^2 + CD^2 = DE^2 + DC^2 = EC^2 = (2a)^2 = 4a^2$ (do $\triangle EDC$ vuông tại D).

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho (AB^2, CD^2) ta có $AB^2 + CD^2 \geq 2AB \cdot CD$

$$\Rightarrow 2(AB^2 + CD^2) \geq AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD = (AB + CD)^2.$$

Kéo theo $(AB + CD)^2 \leq 2(4a^2) = 8a^2 \Rightarrow AB + CD \leq 2\sqrt{2}a$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB = CD$.

Xét $\triangle ABI$, $\triangle DCI$ có $AB = CD$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AD}$),

$\widehat{BAC} = \widehat{CDB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BC}$).

Do đó $\triangle ABI = \triangle DCI$ (g – c – g).

Kéo theo $AI = ID, IB = IC$.

Suy ra $AC = AI + IC = ID + IB = BD$.

Chọn B.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

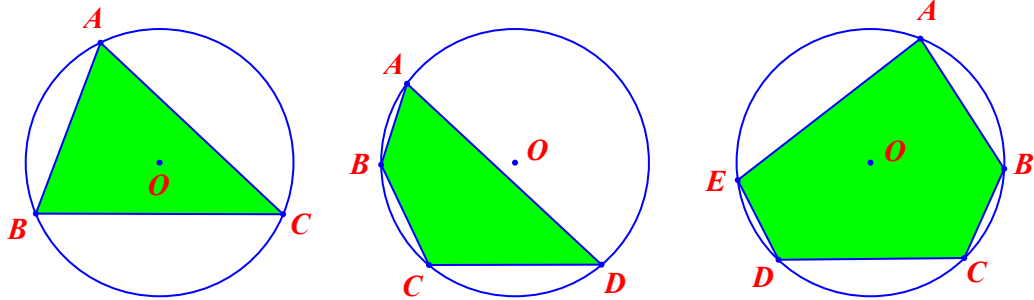
Kiến thức cần nhớ

I. Đường tròn ngoại tiếp

Định nghĩa

Đường tròn ngoại tiếp là đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác, đa giác này được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 1: Đường tròn tâm O trong các hình dưới đây được gọi là đường tròn ngoại tiếp vì nó đi qua tất cả các đỉnh của tam giác, tứ giác và ngũ giác.



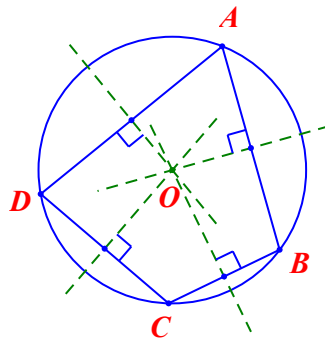
Khi đó, tam giác, tứ giác và ngũ giác lần lượt được gọi là tam giác nội tiếp, tứ giác nội tiếp và ngũ giác nội tiếp đường tròn (tứ giác ở bên trong đường tròn).

Cách xác định tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác

Tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác là giao của các đường trung trực của tất cả các cạnh.

Do đó, để xác định tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác, ta có thể làm như sau:

- Kẻ các đường trung trực của các cạnh rồi xác định giao điểm.
- Vẽ đường tròn có tâm là giao điểm các đường trung trực và bán kính là khoảng cách từ giao điểm đến các đỉnh.



Như vậy, một đa giác có đường tròn ngoại tiếp nếu đường trung trực của các cạnh đồng quy và điểm đồng quy chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác.

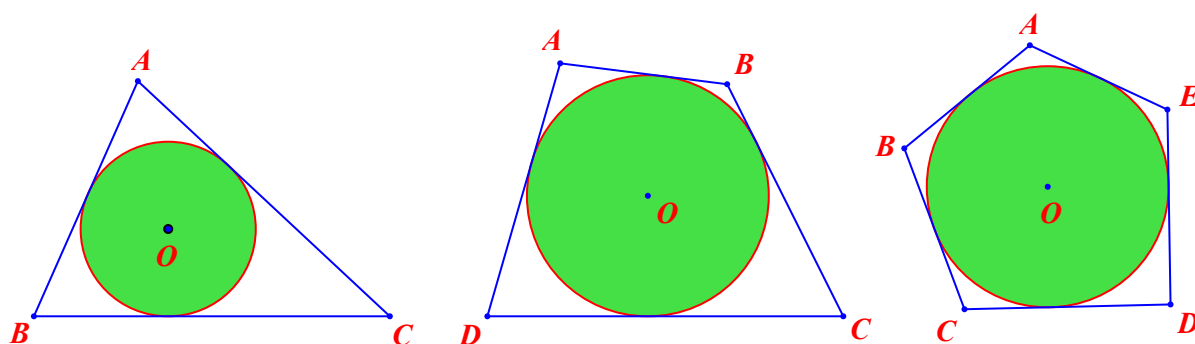
II. Đường tròn nội tiếp

1. Định nghĩa

Đường tròn nội tiếp là đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác, đa giác này được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.

Ví dụ 2: Đường tròn trong hình dưới là đường tròn nội tiếp vì nó tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa

giác.



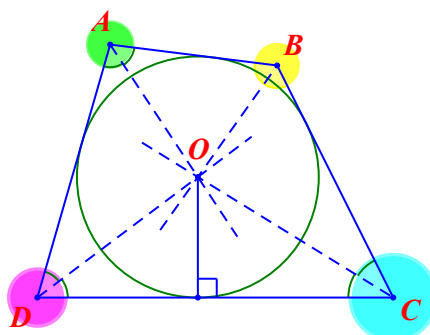
Khi đó, tứ giác và ngũ giác lần lượt được gọi là tam giác ngoại tiếp, tứ giác ngoại tiếp và ngũ giác ngoại tiếp đường tròn (đa giác nằm bên ngoài đường tròn).

2. Cách xác định tâm đường tròn nội tiếp đa giác

Tâm đường tròn nội tiếp đa giác là giao của các đường phân giác của tất cả các góc trong đa giác.

Do đó để xác định tâm đường tròn nội tiếp đa giác, ta làm như sau:

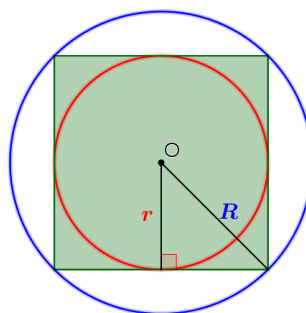
- Kẻ các đường phân giác của các góc rồi xác định giao điểm ví dụ giao điểm
- Kẻ đường thẳng đi qua giao điểm và vuông góc với một cạnh bất kỳ để xác định bán kính ví dụ bán kính



Như vậy, một đa giác có đường tròn nội tiếp nếu đường phân giác của các góc trong đồng quy và điểm đồng quy chính là tâm đường tròn nội tiếp đa giác.

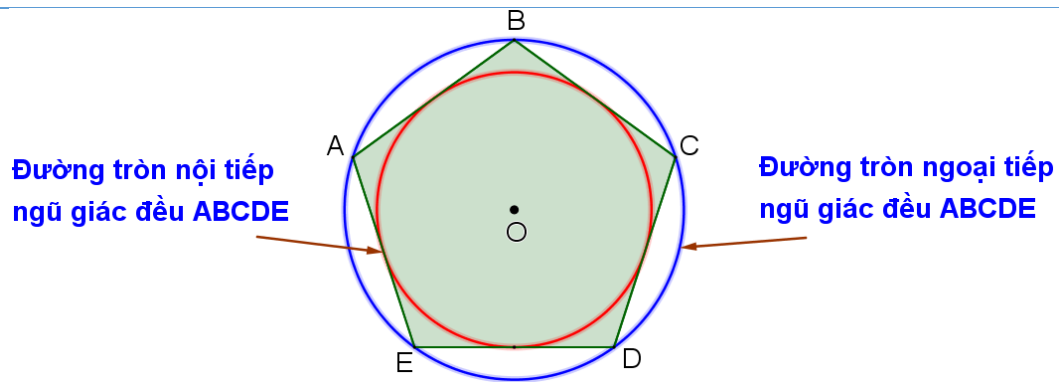
III. Định lý

Bất kỳ đa giác đều nào cũng chỉ có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp; có một và chỉ một đường tròn nội tiếp (h.72)



Hình 72

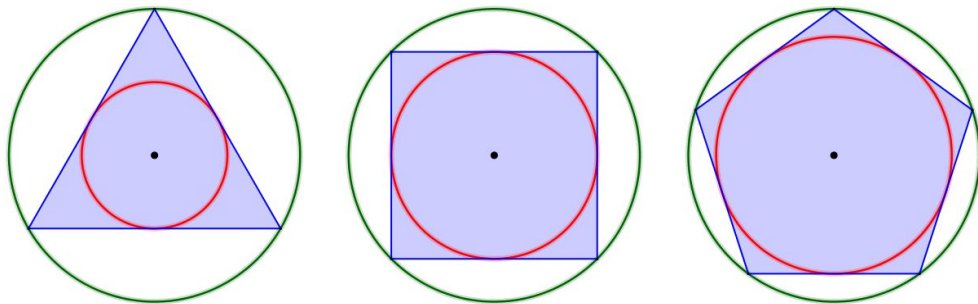
Ví dụ:



Ngũ giác đều có một đường tròn nội tiếp và một đường tròn ngoại tiếp. Đặc biệt, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp ngũ giác đều trùng nhau, đều là tâm

Chú ý:

Tâm của một đường tròn ngoại tiếp trùng với tâm đường tròn nội tiếp và được gọi là tâm của đa giác đều.



B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

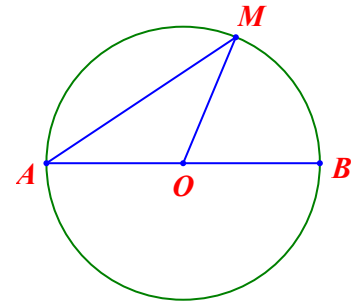
- Câu 1.** Trong một đường tròn, số đo góc nội tiếp chắn cung 50° là
A. 50° . **B.** 100° . **C.** 25° . **D.** 130° .
- Câu 2.** Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng
A. 90° . **B.** 180° . **C.** 270° . **D.** 360° .
- Câu 3.** Hãy chọn khẳng định **sai**. Một tứ giác nội tiếp được nếu
A. Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
B. Tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180° .
C. Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .
D. Tứ giác có tổng hai góc bằng 180° .
- Câu 4.** Trong một đường tròn, góc ở tâm chắn cung 70° có số đo là
A. 30° . **B.** 35° . **C.** 70° . **D.** 110° .
- Câu 5.** Bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông có độ dài đường chéo 5 cm là
A. 2,5 cm. **B.** 5 cm. **C.** 10 cm. **D.** 25 cm.

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

- Câu 6.** Chu vi của đường tròn nội tiếp hình vuông có độ dài cạnh bằng 2 dm là
A. 2π dm. **B.** 2π cm. **C.** 2 dm. **D.** 4π dm.
- Câu 7.** Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD cạnh $a = 6$ cm là
A. 6 cm. **B.** $2\sqrt{3}$ cm. **C.** 5 cm. **D.** $3\sqrt{2}$ cm.

- Câu 8.** Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có $\widehat{A} = 50^\circ$; $\widehat{B} = 70^\circ$. Khi đó $\widehat{C} - \widehat{D}$ bằng
A. 20° . **B.** 30° . **C.** 120° . **D.** 140° .

- Câu 9.** Trên hình vẽ, biết số đo cung MB bằng 60° . Khi đó số đo góc AMO bằng
A. 60° **B.** 30°
C. 45° **D.** 120°



- Câu 10.** Hai bán kính OA, OB của đường tròn $(O; R)$ tạo với nhau một góc 75° thì độ dài cung nhỏ AB là:

- A.** $\frac{3\pi R}{4}$. **B.** $\frac{5\pi R}{12}$. **C.** $\frac{7\pi R}{24}$. **D.** $\frac{4\pi R}{5}$.

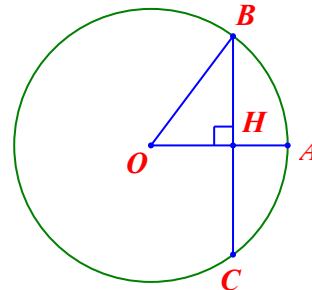
III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

- Câu 11.** Hai tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại A và B cắt nhau tại M . Nếu $MA = R\sqrt{3}$ thì số đo cung nhỏ AB bằng:

- A.** 45° . **B.** 60° . **C.** 90° . **D.** 120° .

- Câu 12.** Trong hình bên, biết $BC = 8\text{ cm}$; $OB = 5\text{ cm}$. Độ dài AB bằng:

- A.** 20 cm . **B.** $\sqrt{6}\text{ cm}$.
C. $2\sqrt{5}\text{ cm}$. **D.** Một kết quả khác.



- Câu 13.** Tam giác đều ABC có cạnh 10 cm nội tiếp trong đường tròn, thì bán kính đường tròn là

- A.** $5\sqrt{3}\text{ cm}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$. **C.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$.

- Câu 14.** Một hình quạt tròn OAB của đường tròn $(O; R)$ có diện tích $\frac{7\pi R^2}{24}$ (đvdt). Số đo $\widehat{AB}$ là:

- A.** 90° . **B.** 150° . **C.** 120° . **D.** 105° .

- Câu 15.** Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MCD qua tâm O (C nằm giữa M và D). Cho $MT = 20\text{ cm}$, $MD = 40\text{ cm}$. Khi đó R bằng:

- A.** 10 cm . **B.** 15 cm . **C.** 20 cm . **D.** 25 cm .

IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

- Câu 16:** Cho $(O; 4)$ có dây AC bằng cạnh hình vuông nội tiếp và dây BC bằng cạnh tam giác đều nội tiếp đường tròn đó (điểm C và A nằm cùng phía với BO). Tính số đo góc ACB ?

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 15° .

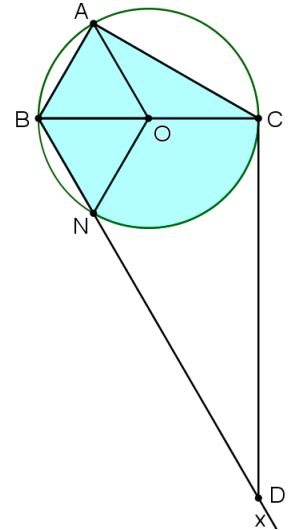
Câu 17. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, cạnh $AB = a$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A kẻ tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = 120^\circ$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ C cắt Bx ở D . Diện tích phần mặt phẳng chung của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và tứ giác $ABCD$ bằng

A. $\frac{(4\pi + 9\sqrt{3})}{12}a^2$

B. $\frac{\pi}{3}a^2$

C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}a^2$

D. Một đáp án khác.



Câu 18. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính AC và dây cung $BD = R\sqrt{2}$. Gọi x, y, z, t lần lượt là khoảng cách từ điểm O tới AB, CD, BC, DA . Giá trị của biểu thức $xy + zt$ bằng

A. $2\sqrt{2}R^2$.

B. $\sqrt{2}R^2$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}R^2$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}R^2$.

Câu 19. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có: $AB = 9\text{ cm}$; $AC = 12\text{ cm}$, bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ bằng

A. 2 cm .

B. 3 cm .

C. 6 cm .

D. $12,5\text{ cm}$.

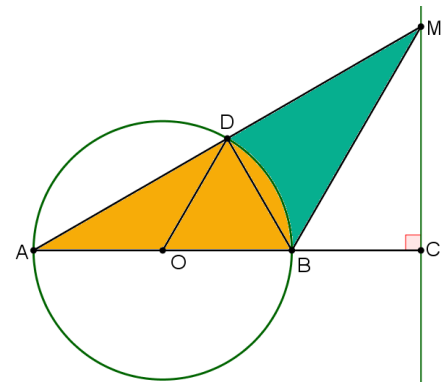
Câu 20. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = R$, trên đường tròn lấy điểm D sao cho $BD = R$, đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt tia AD ở M . Cung BD của đường tròn (O) chia $\triangle ABM$ thành hai phần. Diện tích phần của $\triangle ABM$ nằm ngoài đường tròn (O) là

A. $\frac{(2\pi + 3\sqrt{3})}{12}R^2$

B. $\sqrt{3}R^2$.

C. $\frac{(9\sqrt{3} - 2\pi)}{12}R^2$.

D. Một đáp án khác.



C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tính số đo góc của tứ giác nội tiếp**Phương pháp giải***Sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp; tính chất góc nội tiếp, góc ở tâm, ...*

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC . Biết góc $\widehat{DCA} = 36^\circ$. Số đo góc $\widehat{CBD}$ bằng?

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp (O) có $\widehat{BAC} = 40^\circ$, điểm M tùy ý trên $\widehat{AC}$ nhỏ (M khác A và C). Số đo của $\widehat{AMB}$?

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết $\widehat{BOD} = 124^\circ$ thì số đo $\widehat{BAD}$ là:

Bài 4. Cho hình vẽ, biết $\widehat{ABC} = 40^\circ$. Tính $\widehat{AKC} - \widehat{M}$

Bài 5. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có: $\widehat{A} = 50^\circ$; $\widehat{B} = 70^\circ$. Khi đó $\widehat{C} - \widehat{D} = ?$

Bài 6. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $\widehat{A} = 70^\circ$ và $\widehat{B} = 60^\circ$. Khi đó $\widehat{C} + \widehat{D} = ?$

Dạng 2: Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp**Phương pháp giải**

- + *Sử dụng định lý sin trong tam giác.*
- + *Sử dụng diện tích tam giác.*
- + *Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền, do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông chính bằng nửa độ dài cạnh huyền.*
- + *Bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}}$*
- + *Bán kính đường tròn nội tiếp $R = \frac{a}{2 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}}$ (trong đó a là độ dài cạnh của đa giác)*

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 6cm$, $AC = 8cm$ thì bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 6cm$; $BC = 10cm$ và $AC = 8cm$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ?

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD . Biết $AB = BC = 2\sqrt{5}$; $CD = 6cm$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$

Bài 4: Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh $12cm$.

Bài 5: Hình vuông cạnh bằng $1cm$, bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông.

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6cm$; $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$?

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3cm$; $AC = 4cm$; $BC = 5cm$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

Bài 8: $\triangle ABC$ có $AB = 16cm$; $AC = 30cm$; $BC = 34cm$. Bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

Dạng 3: Tính các đại lượng liên quan đến đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp**Phương pháp giải**

Bài 1: Một đường tròn có bán kính $R = 3\text{cm}$. Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

Bài 2: Độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác cân có cạnh đáy 12cm , góc ở đáy bằng 30° là:

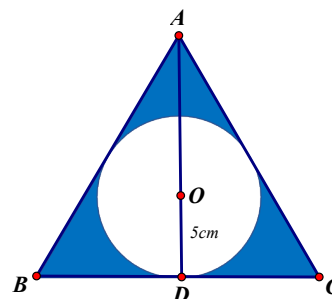
Bài 3: Cho tam giác ABC đều, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 2cm . Diện tích tam giác ABC ?

Bài 4: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 2m . Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Diện tích của tứ giác $ADCI$ bằng

Bài 5: Cho tam giác đều, ngoại tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{3}\text{cm}$. Tính độ dài mỗi cạnh của tam giác đó?

Bài 6: Diện tích của hình tròn nội tiếp hình vuông cạnh 8cm .

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ đều, ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính $OD = 5\text{cm}$. Hãy tính diện tích phần tô đậm



trong hình (kết quả làm tròn đến số thập phân thứ nhất).

Bài 8: Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} = 45^\circ$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ bằng $\sqrt{2}\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AB của $\triangle ABC$.

Bài 9: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính $BC = 10\text{cm}$. Biết cạnh $AB = 6\text{cm}$, khi đó độ dài đường cao AH ?

Bài 10: Chu vi đường tròn ngoại tiếp một tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}\text{cm}$ bằng?

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A cạnh $BC = 6\text{cm}$. Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ?

Bài 12: Trên đường tròn bán kính R lần lượt đặt theo cùng một chiều, kể từ A , ba cung AB, BC, CD sao cho; $s\widehat{AB} = 60^\circ$; $s\widehat{BC} = 90^\circ$; $s\widehat{CD} = 120^\circ$;

- Tứ giác $ABCD$ là hình gì?
- Chứng minh rằng hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ vuông góc với nhau.
- Tính độ dài các cạnh của tứ giác $ABCD$ theo R .

Bài 13: Cho ngũ giác đều $ABCDE$ cạnh a . Hai đường chéo AC và AD cắt BE lần lượt tại M và N .

- Tính tỷ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều đó.
- Chứng minh rằng các tam giác AMN và CMB là những tam giác cân.
- Chứng minh rằng $AC \cdot BM = a^2$

Dạng 4: Chứng minh tứ giác nội tiếp. Sử dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song, vuông góc ...

Phương pháp giải:

Để chứng minh tứ giác nội tiếp ta có thể dùng một trong bốn dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

Cách 1: Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°

Cách 2: Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng các đều 1 điểm.

Cách 3: Chứng minh hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh đó một góc không đổi.

Cách 4: Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện

Sử dụng các tính chất của tứ giác nội tiếp.

Bài 1. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn. ($M; N$ là tiếp điểm). Qua A kẻ cát tuyến ABC không đi qua tâm O ($AB < AC$ và N thuộc cung nhỏ BC). Gọi $H; K$ thứ tự là giao điểm của MN với AO và BC . Gọi I là trung điểm của dây BC .

- Chứng minh tứ giác $AMOI$ nội tiếp.
- Chứng minh $AK \cdot AI = AB \cdot AC$
- Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại E . Chứng minh khi cát tuyến ABC thay đổi thì E luôn thuộc một đường cố định.

Bài 2. Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O) . Kẻ hai tiếp tuyến $AB; AC$ với (O) (B, C là tiếp điểm). Kẻ $CD \perp AB$ ($D \in AB$), CD cắt (O) tại M . Vẽ đường tròn đường kính MC cắt AC, BC thứ tự tại E và F . Gọi H là giao điểm của MB và FD , I là giao điểm của MC và EF .

- Chứng minh: tứ giác $MDBF$ nội tiếp.
- Chứng minh: $DF^2 = DM \cdot DC$.
- Trên đoạn AC lấy điểm K sao cho $CK = HF$. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Bài 3. Trên nửa đường tròn đường kính AB , lấy hai điểm P, Q sao cho P thuộc cung AQ . Gọi C là giao điểm của tia AP và tia BQ ; H là giao điểm của hai dây cung AQ và BP .

- Chứng minh tứ giác $CPHQ$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $\triangle CBP \sim \triangle HAP$.
- Biết $AB = 2R$, tính theo R giá trị của biểu thức: $S = AP \cdot AC + BQ \cdot BC$

Bài 4. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AC , B là điểm chính giữa của cung AC . Lấy điểm N thuộc cung nhỏ AB (N khác A và B). Qua điểm N kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn đã cho, gọi K là giao điểm của CN và OB . Từ K kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt đường thẳng d ở F .

- Chứng minh tứ giác $OKNF$ nội tiếp được một đường tròn.
- Tính độ dài đoạn FK theo R .
- Kẻ NH vuông góc với OB tại H . Đường tròn ngoại tiếp $\triangle OBC$ cắt NC tại điểm thứ hai là I . Chứng minh $\widehat{OHI} = 45^\circ$.

Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$). Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ($H \in BC$). Vẽ đường tròn (O) đường kính BC , đường tròn (O) cắt AB tại E . Trên cung nhỏ BE lấy điểm D , CD cắt AH tại G .

- Chứng minh tứ giác $BDGH$ nội tiếp trong một đường tròn.
- Đường thẳng EG cắt đường tròn (O) tại điểm M . Hai đường thẳng AH và BM cắt nhau tại I .
Chứng minh $GA \cdot GI = GE \cdot GM$
- Hai đường thẳng AD và CB cắt nhau tại N , DB và CI cắt nhau tại K . Chứng minh $NK \parallel AH$

Bài : Cho đường tròn tâm O , bán kính R và một đường thẳng d không cắt đường tròn (O) . Dựng đường thẳng OH vuông góc với đường thẳng d tại điểm H . Trên đường thẳng d lấy điểm K (khác điểm H), qua K vẽ hai tiếp tuyến KA và KB với đường tròn (O) , (A và B là các tiếp điểm) sao cho A và H nằm về hai phía của đường thẳng OK .

- Chứng minh tứ giác $KAOH$ nội tiếp được trong đường tròn.
- Đường thẳng AB cắt đường thẳng OH tại điểm I . Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IH \cdot IO$.
- Khi $OK = 2R, OH = R\sqrt{3}$. Tính diện tích $\triangle KAI$ theo R .

Bài 7: Cho đường tròn tâm (O) , đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm C bất kì (C không trùng với A và B). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BC ở điểm D . Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng DO . Tia AH cắt đường tròn (O) tại điểm F (không trùng với A).

- Chứng minh tứ giác $AHCD$ nội tiếp được một đường tròn.
- Chứng minh $\triangle CFH$ là tam giác vuông.
- Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{BH \cdot BC}{BF}$.

Bài 8: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Vẽ tiếp tuyến AM và cát tuyến ACD (tia AO nằm giữa hai tia AM và AD). Gọi I là trung điểm của CD . Đường tròn đường kính AO cắt (O) tại N .

- Chứng minh tứ giác $AMOI$ nội tiếp được đường tròn. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp đó.
- Vẽ dây CB vuông góc với MO cắt MN tại F . Chứng minh tứ giác $CFIN$ nội tiếp
- Tia DF cắt AM tại E . Chứng minh rằng KE vuông góc với AM

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính R . Hai đường cao AE và BK của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H (với E thuộc BC , K thuộc AC).

- Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Chứng minh $CE \cdot CB = CK \cdot CA$ và $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.
- Cho B, C cố định và A di động trên (C) nhưng vẫn thoả mãn điều kiện tam giác ABC nhọn; khi đó H thuộc một đường tròn (T) cố định. Xác định tâm I và tính bán kính r của đường tròn (T) , biết $R = 3\text{ cm}$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	B	D	C	A	A	D	A	B	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	C	C	D	B	D	A	C	B	C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT**

Câu 1: Trong một đường tròn, số đo góc nội tiếp chắn cung 50° là

- A. 50° . B. 100° . **C. 25° .** D. 130° .

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng

- A. 90° . **B. 180° .** C. 270° . D. 360° .

Lời giải

Chọn B

Câu 3: Hãy chọn khẳng định **sai**. Một tứ giác nội tiếp được nêu:

- A. Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
 B. Tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180° .
 C. Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .
D. Tứ giác có tổng hai góc bằng 180° .

Lời giải

Chọn D

Câu 4: Trong một đường tròn, góc ở tâm chắn cung 70° có số đo là

- A. 30° . B. 35° . **C. 70° .** D. 110° .

Lời giải

Chọn C

Câu 5: Bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông có độ dài đường chéo 5 cm là

- A. 2,5 cm.** B. 5 cm. C. 10 cm. D. 25 cm.

Lời giải

Chọn A

Bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông có độ dài đường chéo 5 cm là: $5 : 2 = 2,5$ cm

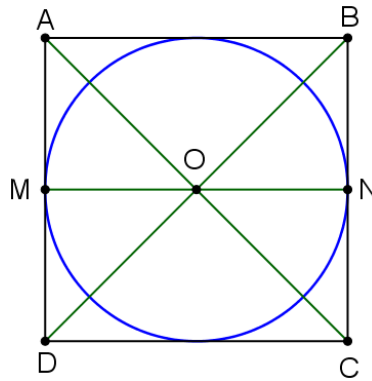
II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 6: Chu vi của đường tròn nội tiếp hình vuông có độ dài cạnh bằng 2 dm là

- A. 2π dm.** B. 2π cm. C. 2 dm. D. 4π dm.

Lời giải

Chọn A



Hình vuông có độ dài cạnh bằng 2 dm

Đường tròn nội tiếp hình vuông cũng có đường kính bằng 2 dm và bán kính bằng 1 dm nên có chu vi là $2\pi\text{ dm}$

Câu 7: Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ cạnh $a = 6\text{ cm}$ là

A. 6 cm .

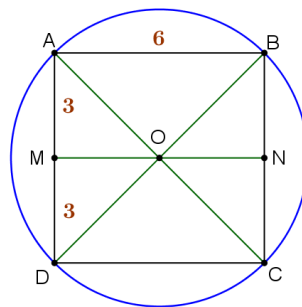
B. $2\sqrt{3}\text{ cm}$.

C. 5 cm .

D. $3\sqrt{2}\text{ cm}$.

Lời giải

Chọn D



Hình vuông $ABCD$ cạnh $a = 6\text{ cm}$.

Đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có đường kính là đường chéo của hình vuông

Ta có $\triangle ABD$ vuông cân tại A nên $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ cạnh $a = 6\text{ cm}$ là:

$$R = \frac{BD}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\text{ cm}.$$

Câu 8: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có $\hat{A} = 50^\circ$; $\hat{B} = 70^\circ$. Khi đó $\hat{C} - \hat{D}$ bằng

A. 20° .

B. 30° .

C. 120° .

D. 140° .

Lời giải

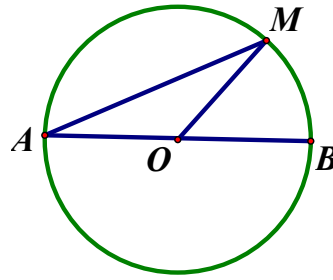
Chọn A

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn nên $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ và $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

Mà $\hat{A} = 50^\circ$; $\hat{B} = 70^\circ$ nên $\hat{C} = 130^\circ$; $\hat{D} = 110^\circ$.

$\Rightarrow \hat{C} - \hat{D} = 20^\circ$.

Câu 9: Trên hình vẽ, biết số đo cung MB bằng 60° . Khi đó số đo góc AMO bằng



- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 120° .

Lời giải

Chọn B

$$\widehat{AMO} = \widehat{MAO} = \frac{l}{2} \text{sd} \widehat{MB} = 30^\circ.$$

Câu 10: Hai bán kính OA, OB của đường tròn $(O; R)$ tạo với nhau một góc 75° thì độ dài cung nhỏ AB là:

- A. $\frac{3\pi R}{4}$. B. $\frac{5\pi R}{12}$. C. $\frac{7\pi R}{24}$. D. $\frac{4\pi R}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Hai bán kính OA, OB của đường tròn $(O; R)$ tạo với nhau một góc 75° thì độ dài cung

nhỏ AB là: $l = \frac{\pi R \cdot 75^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi R}{12}$.

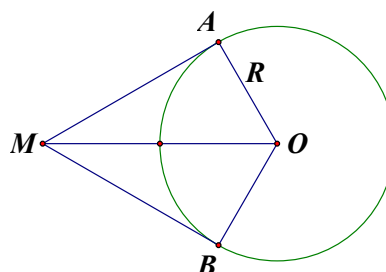
III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 11: Hai tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại A và B cắt nhau tại M . Nếu $MA = R\sqrt{3}$ thì số đo cung nhỏ AB bằng:

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Lời giải

Chọn D



Ta có $\triangle AMO$ vuông tại A nên:

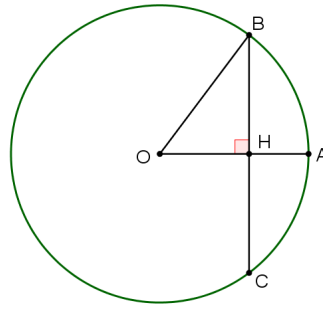
$$\tan \widehat{AOM} = \frac{MA}{OA} = \frac{R\sqrt{3}}{R} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AOM} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow sđ\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 2.\widehat{AOM} = 120^\circ$$

Câu 12: Trong hình bên, biết $BC = 8\text{ cm}$; $OB = 5\text{ cm}$. Độ dài AB bằng:



A. 20 cm .

B. $\sqrt{6}\text{ cm}$.

C. $2\sqrt{5}\text{ cm}$.

D. Một kết quả khác.

Lời giải

Chọn C

$$BC = 8\text{ cm} \Rightarrow BH = 4\text{ cm};$$

$$\text{Ta có } \triangle OBH \text{ vuông tại } H \text{ nên: } OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{ cm}$$

$$\Rightarrow HA = 2\text{ cm}$$

$$\text{Ta có } \triangle ABH \text{ vuông tại } H \text{ nên: } AB = \sqrt{HB^2 + HA^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\text{ cm}$$

Câu 13: Tam giác đều ABC có cạnh 10 cm nội tiếp trong đường tròn, thì bán kính đường tròn là

A. $5\sqrt{3}\text{ cm}$.

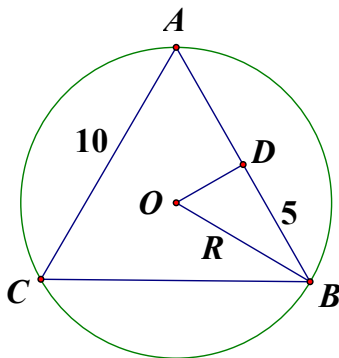
B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$.

C. $\frac{10\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác đều ABC có cạnh 10 cm nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$

$$\text{Gọi } D \text{ là trung điểm của cạnh } AB, \text{ ta có } AD = BD = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{ cm}; OD \perp AB$$

$$BO \text{ là phân giác của } \widehat{ABC} \text{ nên } \widehat{OBD} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 30^\circ$$

$$\text{Ta có } \triangle OBD \text{ vuông tại } D \text{ có } \widehat{OBD} = 30^\circ \text{ nên } OD = \frac{R}{2}$$

$$\text{Mà: } DB^2 + OD^2 = OB^2$$

$$\Rightarrow 5^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow \frac{3R^2}{4} = 25$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{4 \cdot 25}{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2.5}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Vậy thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh 10 cm là $R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Câu 14: Một hình quạt tròn OAB của đường tròn $(O; R)$ có diện tích $\frac{7\pi R^2}{24}$ (đvdt). Số đo $\widehat{AB}$ là:

A. 90° .

B. 150° .

C. 120° .

D. 105° .

Lời giải

Chọn D

Một hình quạt tròn OAB của đường tròn $(O; R)$ có diện tích $\frac{7\pi R^2}{24}$ (đvdt).

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{7\pi R^2}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{360} = \frac{7}{24}$$

$$\Rightarrow n = \frac{360 \cdot 7}{24}$$

$$\Rightarrow n = 105^\circ$$

Số đo $\widehat{AB}$ là $n = 105^\circ$

Câu 15: Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MCD qua tâm O (C nằm giữa M và D). Cho $MT = 20\text{ cm}$, $MD = 40\text{ cm}$. Khi đó R bằng:

A. 10 cm .

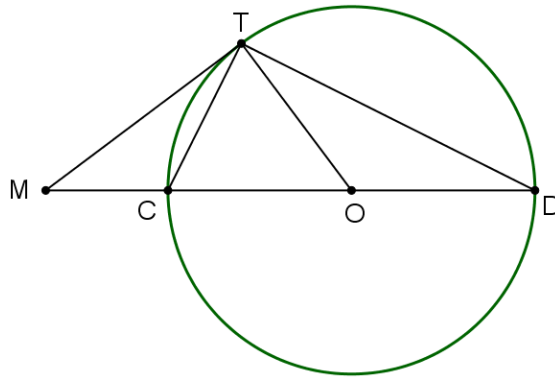
B. 15 cm .

C. 20 cm .

D. 25 cm .

Lời giải

Chọn B



Ta có $\triangle MTC$ đồng dạng với $\triangle MDT$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MT}{MD} = \frac{MC}{MT} \Rightarrow MT^2 = MC \cdot MD$$

$$\Rightarrow MC = \frac{MT^2}{MD} = \frac{20^2}{40} = 10 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow CD = MD - MC = 40 - 10 = 30 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow R = \frac{CD}{2} = 15 \text{ cm}$$

IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 16: Cho $(O; 4)$ có dây AC bằng cạnh hình vuông nội tiếp và dây BC bằng cạnh tam giác đều nội tiếp đường tròn đó (điểm C và A nằm cùng phía với BO). Tính số đo góc ACB ?

A. 30° .

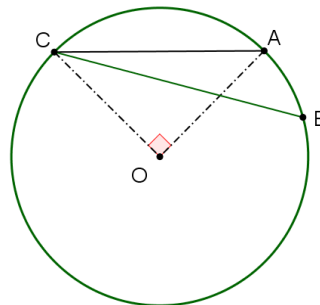
B. 45° .

C. 60° .

D. 15° .

Lời giải

Chọn D



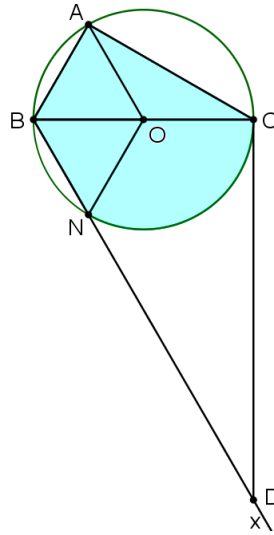
Vì AC bằng cạnh của hình vuông nội tiếp (O) nên $sđ\widehat{AC} = 90^\circ$.

Vì BC bằng cạnh của tam giác đều nội tiếp (O) nên $sđ\widehat{BC} = 120^\circ$.

Từ đó suy ra $sđ\widehat{AB} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Vì $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn cung AB nên $\widehat{ACB} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Câu 17: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, cạnh $AB = a$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A kẻ tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = 120^\circ$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ C cắt Bx ở D . Diện tích phần mặt phẳng chung của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và tứ giác $ABCD$ bằng



A. $\frac{(4\pi + 9\sqrt{3})}{12}a^2$

B. $\frac{\pi}{3}a^2$

C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}a^2$

D. Một đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, cạnh $AB = a$ nên $BC = 2a$; $AC = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle OBN \text{ đều cạnh } a \text{ có } \Rightarrow S_{OBN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Số đo $\widehat{NC}$ là $n = 2\widehat{NBC} = 120^\circ$

$$S_{\text{quat } CON} = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ} = \frac{\pi a^2 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi a^2}{3}$$

Diện tích phần mặt phẳng chung của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và tứ giác $ABCD$ bằng

$$S = S_{ABC} + S_{BON} + S_{\text{quat } CON}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi a^2}{3}$$

$$S = \frac{6a^2\sqrt{3} + 3a^2\sqrt{3} + 4\pi a^2}{12}$$

$$S = \frac{(4\pi + 9\sqrt{3})}{12}a^2$$

Câu 18: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính AC và dây cung $BD = R\sqrt{2}$. Gọi x, y, z, t lần lượt là khoảng cách từ điểm O tới AB, CD, BC, DA . Giá trị của biểu thức $xy + zt$ bằng

A. $2\sqrt{2}R^2$.

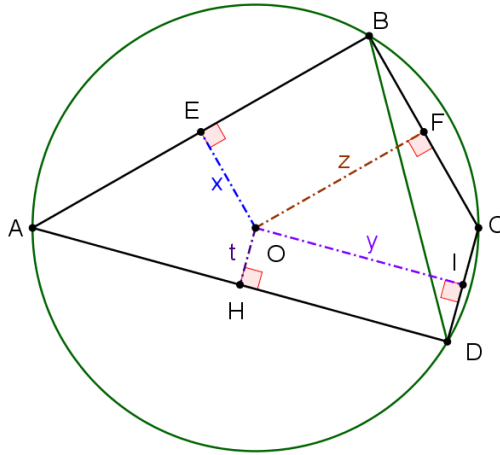
B. $\sqrt{2}R^2$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}R^2$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}R^2$.

Lời giải

Chọn C



Gọi khoảng cách từ điểm O tới AB, CD, BC, DA lần lượt là: OE, OF, OH, OI

Suy ra E, I, F, H lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, DA và
 $OE = x; OI = y; OF = z; OH = t$

Mà AC là đường kính đường tròn $(O; R)$ nên $AC = 2R$ và O là trung điểm của AC

Vậy OE là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên: $x = OE = \frac{BC}{2}$

$$y = OI = \frac{AD}{2}; z = OF = \frac{AB}{2}; t = OH = \frac{CD}{2}$$

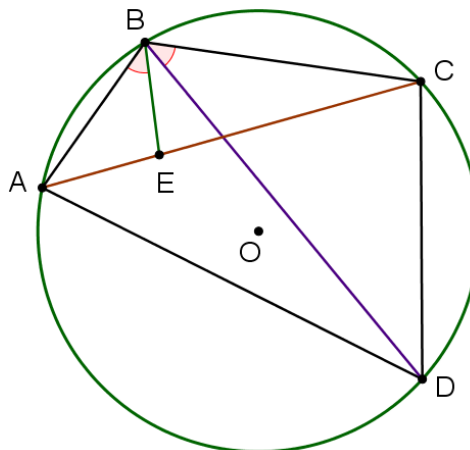
$$xy + zt = \frac{BC}{2} \cdot \frac{AD}{2} + \frac{AB}{2} \cdot \frac{CD}{2}$$

$$xy + zt = \frac{BC \cdot AD + AB \cdot CD}{4} = \frac{AC \cdot BD}{4} \text{ (định lý Ptô-lê-mê)}$$

$$xy + zt = \frac{2R \cdot R\sqrt{2}}{4} = \frac{R^2\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy: } xy + zt = \frac{R^2\sqrt{2}}{2}$$

* Chứng minh định lý Ptô-lê-mê: “Nếu một tứ giác nội tiếp một đường tròn thì tích của 2 đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối”:



Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) .

Trên đường chéo AC của tứ giác ta lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$

Khi đó ta có: $\triangle ABE$ đồng dạng với $\triangle DBC$ (do $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$, $\widehat{BAE} = \widehat{BDC}$ hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BC}$) nên

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{DC} \Rightarrow AB \cdot CD = BD \cdot AE \quad (1)$$

Xét các tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle EBC$ ta thấy:

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABE} + \widehat{EBD} = \widehat{CBD} + \widehat{EBD} = \widehat{EBC}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{EB} \quad (\text{do } \triangle ABE \sim \triangle DBC : \frac{AB}{DB} = \frac{BE}{BC})$$

Vậy $\triangle ABD \sim \triangle EBC$, do đó:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{EC} \Rightarrow BC \cdot AD = BD \cdot EC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AE + BD \cdot EC = BD(AE + EC) = BD \cdot AC$$

Câu 19: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có: $AB = 9 \text{ cm}$; $AC = 12 \text{ cm}$, bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ bằng

A. 2 cm .

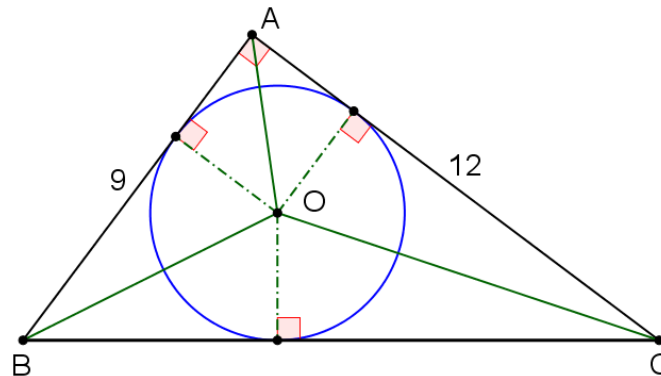
B. 3 cm .

C. 6 cm .

D. $12,5 \text{ cm}$.

Lời giải

Chọn B



$\triangle ABC$ vuông tại A có: $AB = 9 \text{ cm}$; $AC = 12 \text{ cm} \Rightarrow BC = 15 \text{ cm}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 54 \text{ cm}^2$$

Lại có: $S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot AC + \frac{1}{2} r \cdot BC$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} r \cdot (AB + AC + BC)$$

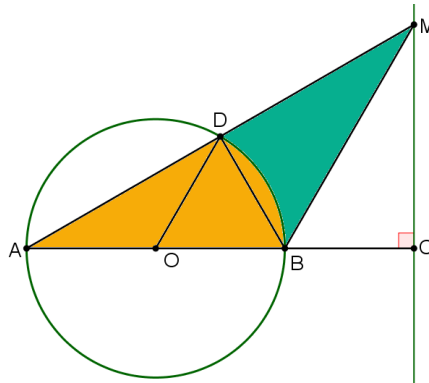
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} r \cdot C_{ABC}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2S_{ABC}}{C_{ABC}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2 \cdot 54}{9 + 12 + 15} = \frac{108}{36} = 3 \text{ cm}$$

Câu 20: Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = R$, trên đường tròn lấy điểm D sao cho $BD = R$, đường thẳng vuông góc với BC tại C

cắt tia AD ở M . Cung BD của đường tròn (O) chia $\triangle ABM$ thành hai phần. Diện tích phần của $\triangle ABM$ nằm ngoài đường tròn (O) là



A. $\frac{(2\pi + 3\sqrt{3})}{12} R^2$

B. $\sqrt{3} R^2$.

C. $\frac{(9\sqrt{3} - 2\pi)}{12} R^2$.

D. Một đáp án khác.

Lời giải

Chọn C

Cho $\triangle ABD$ vuông tại D có cạnh $AB = 2R$; $BD = R$; $AD = R\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{AOD} = \frac{S_{ABD}}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}; S_{ABM} = 2S_{ABD} = R^2 \sqrt{3}$$

$\triangle OBD$ đều nên $\widehat{BOD} = 60^\circ$

Số đo $\widehat{BD}$ là $n = \widehat{BOD} = 60^\circ$

$$\Rightarrow S_{\text{quat } BOD} = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ} = \frac{\pi R^2 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{6}$$

Diện tích phần của $\triangle ABM$ nằm ngoài đường tròn (O) là

$$S = S_{ABM} - (S_{AOD} + S_{\text{quat } BOD}) = R^2 \sqrt{3} - \left(\frac{R^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{\pi R^2}{6} \right).$$

$$\Rightarrow S = \frac{(9\sqrt{3} - 2\pi)}{12} R^2.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1 :

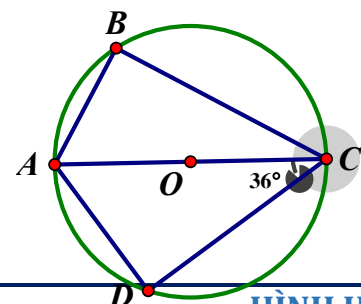
Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC . Biết góc $\widehat{DCA} = 36^\circ$. Số đo góc $\widehat{CBD}$ bằng?

HD: Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có đường kính AC ,

ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$$\Rightarrow \widehat{DCA} + \widehat{DAC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = 90^\circ - \widehat{DCA} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$



Do đó: $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = 54^\circ$.

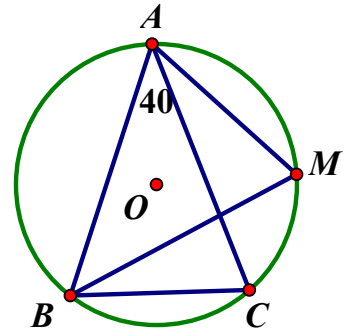
KL:

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp (O) có $\widehat{BAC} = 40^\circ$, điểm M tùy ý trên $\widehat{AC}$ nhỏ (M khác A và C). Số đo của $\widehat{AMB}$?

HD: Vì $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp (O) có:

$$sd\widehat{AB} = sd\widehat{AC} = \frac{360^\circ - 80^\circ}{2} = 140^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{AMB} = \frac{1}{2}sd\widehat{AB} = 70^\circ$$



Bài 3. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) . Biết $\widehat{BOD} = 124^\circ$ thì số đo $\widehat{BAD}$ là:

HD: Vì tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) nên ta có $\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{BOD} = \frac{1}{2}.124^\circ = 62^\circ$ (t/c)

$$\text{Mà } \Rightarrow \widehat{DCB} + \widehat{DAB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = 180^\circ - \widehat{DCB} = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$$

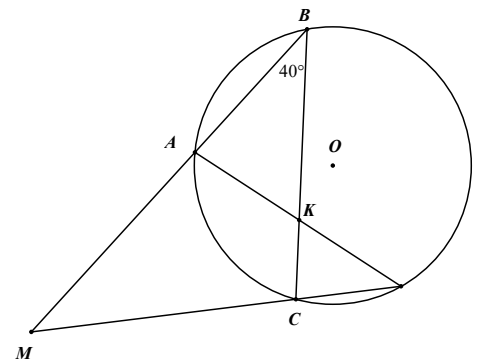
KL:

Bài 4. Cho hình vẽ, biết $\widehat{ABC} = 40^\circ$. Tính $\widehat{AKC} - \widehat{M}$

Bài 5. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có:

$$\widehat{A} = 50^\circ; \quad \widehat{B} = 70^\circ. \text{ Khi đó } \widehat{C} - \widehat{D} = ?$$

Bài 6. Cho tứ giác nội tiếp ABCD có $\widehat{A} = 70^\circ$ và $\widehat{B} = 60^\circ$. Khi đó $\widehat{C} + \widehat{D} = ?$



Dạng 2: Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ thì bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$; $BC = 10\text{cm}$ và $AC = 8\text{cm}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

$$\text{Ta có: } AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

Suy ra tam giác ABC vuông tại A.

Do đó, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm cạnh huyền BC.

Đường kính đường tròn là: $d = BC = 10\text{cm}$

Suy ra, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{d}{2} = 5\text{cm}$

Bài 3. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD. Biết $AB = BC = 2\sqrt{5}$; $CD = 6\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD

Bài 4: Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh 12 cm.



Xét tam giác OBH vuông tại H ta có: $BH = \frac{a}{2}$; $\widehat{OBH} = 30^\circ$

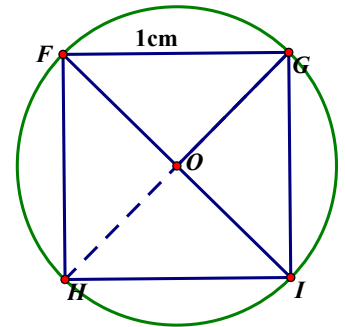
$$\tan 30^\circ = \frac{OH}{BH} \Rightarrow OH = \tan 30^\circ \cdot BH = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Bài 5: Hình vuông cạnh bằng 1cm, bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông.

Xét tam giác FGI vuông tại G ta có: $FI = \sqrt{FG^2 + GI^2} = \sqrt{2}$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông FGIH:

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Bài 6: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6\text{cm}$; $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$?

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

Bài 8: $\triangle ABC$ có $AB = 16\text{cm}$; $AC = 30\text{cm}$; $BC = 34\text{cm}$. Bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

Dạng 3: Tính các đại lượng liên quan đến đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp.

Bài 1. Một đường tròn có bán kính $R = 3\text{cm}$. Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

Ta có: Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow a = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$

Do tứ giác nội tiếp là hình vuông với $n = 4$, khi đó: $\Rightarrow a = R \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Diện tích hình vuông là: $S = a^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18\text{cm}^2$

Bài 2: Độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác cân có cạnh đáy 12cm, góc ở đáy bằng 30° là:

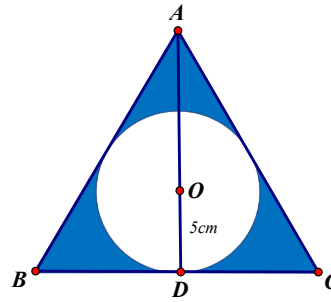
Bài 3: Cho tam giác ABC đều, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 2 cm. Diện tích tam giác ABC ?

Bài 4: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 2m. Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Diện tích của tứ giác $ADCI$ bằng

Bài 5: Cho tam giác đều, ngoại tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{3}\text{cm}$. Độ dài mỗi cạnh của tam giác đó là?

Bài 6: Diện tích của hình tròn nội tiếp hình vuông cạnh 8cm.

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ đều, ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính $OD = 5\text{cm}$. Hãy tính diện tích phần tô đậm



trong hình (kết quả làm tròn đến số thập phân thứ nhất).

Bài 8: Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} = 45^\circ$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ bằng $\sqrt{2}\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AB của $\triangle ABC$.

Bài 9: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính $BC = 10\text{cm}$. Biết cạnh $AB = 6\text{cm}$, khi đó độ dài đường cao AH là?

Bài 10: Chu vi đường tròn ngoại tiếp một tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}\text{ cm}$ bằng ?

HD : Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều $ABC \Rightarrow CO \perp AB$ tại $D \Rightarrow D$ là trung điểm của $AB \Rightarrow CO = \frac{2}{3}CD$.

$$\text{Mà } CD = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3(\text{cm}). \Rightarrow CO = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2(\text{cm}).$$

Nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $R = OC = 2\text{cm}$.

Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $C = 2\pi R = 4\pi\text{cm}$.

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A cạnh $BC = 6\text{cm}$. Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ?

HD: Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $R = \frac{BC}{2} = 3\text{cm}$.

Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $C = 2\pi R = 6\pi\text{cm}$.

Bài 12: Trên đường tròn bán kính R lần lượt đặt theo cùng một chiều, kể từ A , ba cung AB , BC , CD sao cho $\widehat{AB} = 60^\circ$; $\widehat{BC} = 90^\circ$; $\widehat{CD} = 120^\circ$;

a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ vuông góc với nhau.

c) Tính độ dài các cạnh của tứ giác $ABCD$ theo R .

$$a) \widehat{AD} = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 90^\circ$$

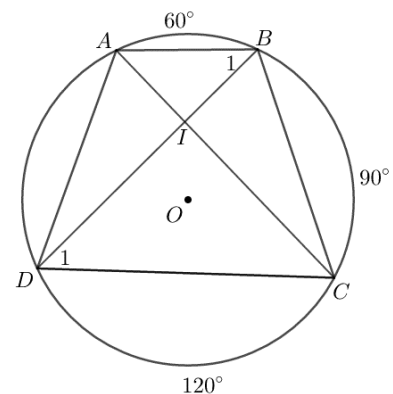
$$\Rightarrow AD = BC$$

Ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Suy ra $AB \parallel CD$, do đó tứ giác $ABCD$ là hình thang. Hình thang này nội tiếp đường tròn (O) nên nó là hình thang cân.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Góc BIC là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên

$$\widehat{BIC} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{90^\circ + 90^\circ}{2} = 90^\circ$$



Hình 76

Vậy $AC \perp BD$

c) Vì số $\widehat{AB} = 60^\circ$ nên AB là cạnh của một lục giác đều nội tiếp, do đó $AB = R$.

Vì số cung BC bằng số $\widehat{AD} = 90^\circ$ nên BC và AD là các cạnh của một hình vuông nội tiếp, do đó $BC = AD = R\sqrt{2}$

Vì số $\widehat{CD} = 120^\circ$ nên CD là cạnh của một tam giác đều nội tiếp, do đó $CD = R\sqrt{3}$

4 (Dạng 2) Cho ngũ giác đều ABCDE cạnh a. Hai đường chéo AC và AD cắt BE lần lượt tại M và N.

a) Tính tỷ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều đó.

b) Chứng minh rằng các tam giác AMN và CMB là những tam giác cân.

c) Chứng minh rằng $AC \cdot BM = a^2$

Dạng 4: Chứng minh tứ giác nội tiếp. Sử dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song, vuông góc...

Bài 1. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn. (M; N là tiếp điểm). Qua kẻ cát tuyến ABC không đi qua tâm O ($AB < AC$ và N thuộc cung nhỏ BC). Gọi H; K thứ tự là giao điểm của MN với AO và BC. Gọi I là trung điểm của dây BC.

a) Chứng minh tứ giác AMOI nội tiếp.

b) Chứng minh $AK \cdot AI = AB \cdot AC$

c) Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại E. Chứng minh khi cát tuyến ABC thay đổi thì E luôn thuộc một đường cố định.

HD:

a) Chứng minh tứ giác AMOI nội tiếp.

AM là tiếp tuyến chỉ ra được $\widehat{AMO} = 90^\circ$ Sử dụng tính chất đường kính và dây chỉ ra được $\widehat{AIO} = 90^\circ$

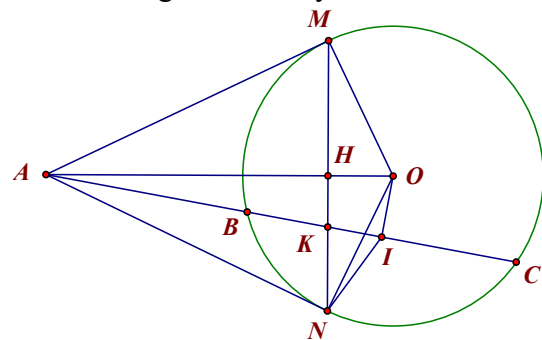
Xét tứ giác AMOI có:

$$\widehat{AMO} + \widehat{AIO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

ma $\widehat{AMO}$ và $\widehat{AIO}$ là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác AMOI nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

Vậy tứ giác AMOI nội tiếp



b) Chứng minh $AK \cdot AI = AB \cdot AC$

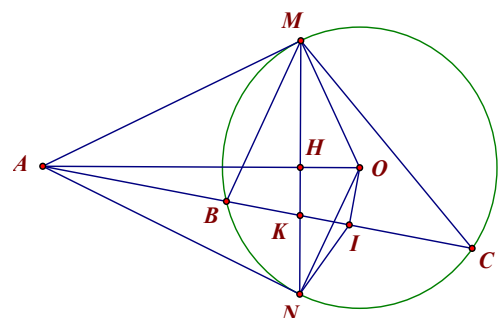
Chứng minh được $AO \perp MN$ tại H $\Rightarrow \widehat{AHK} = 90^\circ$

Chứng minh được $\triangle AHK \sim \triangle AIO \Rightarrow AK \cdot AI = AH \cdot AO$ (1)

Chứng minh được $AM^2 = AH \cdot AO$ (2)

Chứng minh được $\triangle AMB \sim \triangle ACM \Rightarrow AM^2 = AB \cdot AC$ (3)

Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow AK \cdot AI = AB \cdot AC$



c) Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại E. Chứng minh khi cát tuyến ABC thay đổi thì E luôn thuộc một đường cố định.

Chứng minh được O, I, E thẳng hàng và $ON^2 = OC^2 = OI.OE$

Chứng minh được $\triangle OIN \sim \triangle ONE \Rightarrow \widehat{ONE} = \widehat{OIN}$ (4)

Chỉ ra được N thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMOI

$\Rightarrow$ tứ giác MOIN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OIN} + \widehat{OMN} = 180^\circ$ (5)

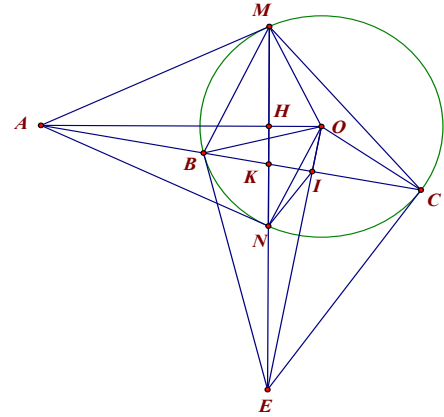
Từ (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{ONE} + \widehat{OMN} = 180^\circ$ (6)

Chứng minh $\triangle OMN$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{ONM}$ (7)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow \widehat{ONE} + \widehat{ONM} = 180^\circ \Rightarrow M, N, E$ thẳng hàng

$\Rightarrow E$ thuộc đường thẳng MN cố định

KL

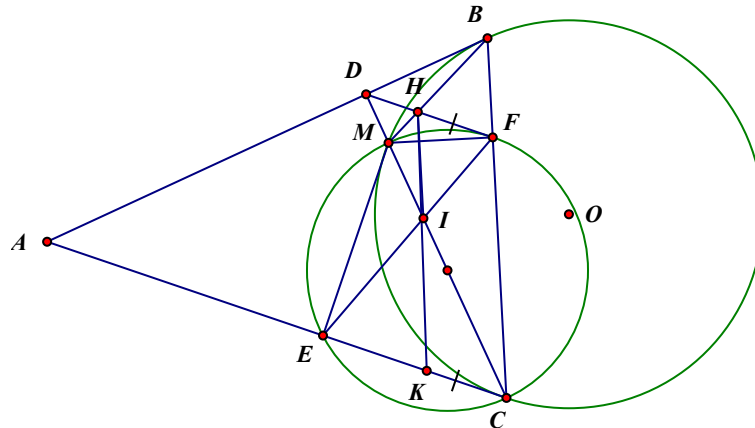


Bài 2. Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến AB; AC với (O) (B, C là tiếp điểm). Kẻ $CD \perp AB (D \in AB)$, CD cắt (O) tại M. Vẽ đường tròn đường kính MC cắt AC, BC thứ tự tại E và F. Gọi H là giao điểm của MB và FD, I là giao điểm của MC và EF.

a) Chứng minh: tứ giác MDBF nội tiếp.

b) Chứng minh: $DF^2 = DM.DC$.

c) Trên đoạn AC lấy điểm K sao cho $CK = HF$. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.



a) Ta có $CD \perp AB$ (GT) $\Rightarrow \widehat{CDB} = 90^\circ$ (đ/n) hay $\widehat{MDB} = 90^\circ$

Xét đường tròn đường kính MC có:

$\widehat{MFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MFB} = 90^\circ$ (hai góc kề bù)

Xét tứ giác MDBF có: $\widehat{MDB} + \widehat{MFB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà $\widehat{MDB}$ và $\widehat{MFB}$ là hai góc đối nhau.

Do đó tứ giác MDBF nội tiếp. (dấu hiệu nhận biết)

b) Xét đường tròn (O) có:

$$\widehat{DCF} = \widehat{DBM} \text{ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn } \widehat{BM} \text{) (1)}$$

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác MDBF có:

$$\widehat{DBM} = \widehat{DFM} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{DM} \text{) (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{DFM}$$

$$\text{Chứng minh } \triangle DFC \sim \triangle DMF \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{DF}{DM} = \frac{DC}{DF} \text{ (đ/n)}$$

$$\Rightarrow DF^2 = DM \cdot DC \text{ (tính chất)}$$

$$\text{c) Tứ giác MDBF nội tiếp} \Rightarrow \widehat{MDF} = \widehat{MBF} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MF)}$$

Xét (O) chứng minh được $\widehat{MBF} = \widehat{MCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây chắn cùng MC) từ đó ta có $\widehat{MDF} = \widehat{MCA}$ mà hai góc so le trong $\Rightarrow DF \parallel AC$ hay $HF \parallel KC$ kết hợp $HF = KC$ (GT) $\Rightarrow KHFC$ là hình bình hành $\Rightarrow HK \parallel FC$ (3)

$$\text{Chứng minh được } \widehat{MFE} = \widehat{MCE} = \widehat{MBF} \text{ mà } \widehat{DCF} = \widehat{DFM}$$

$$\Rightarrow \widehat{HFI} = \widehat{MBF} + \widehat{MCF} \Leftrightarrow \widehat{HFI} + \widehat{HMI} = \widehat{MBF} + \widehat{MCF} + \widehat{HMI} = 180^\circ$$

$$\text{Chứng minh được tứ giác MHFI nội tiếp} \Rightarrow \widehat{MIH} = \widehat{DFM} = \widehat{DCF}$$

$$\Rightarrow IH \parallel FC \text{ (4)}$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow H, I, K \text{ thẳng hàng (tiên đề Oclit)}$$

Bài 3. Trên nửa đường tròn đường kính AB , lấy hai điểm P, Q sao cho P thuộc cung AQ . Gọi C là giao điểm của tia AP và tia BQ ; H là giao điểm của hai dây cung AQ và BP .

a) Chứng minh tứ giác $CPHQ$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\triangle CBP \sim \triangle HAP$.

c) Biết $AB = 2R$, tính theo R giá trị của biểu thức: $S = AP \cdot AC + BQ \cdot BC$

HD: a) Ta có: $\widehat{APB} = \widehat{AQB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

....

$$\Rightarrow \widehat{CPH} = \widehat{CQH} = 90^\circ \dots \text{ Suy ra tứ giác CPHQ nội tiếp đường tròn.}$$

b) $\triangle CBP$ và $\triangle HAP$ có:

$$\widehat{BPC} = \widehat{APH} = 90^\circ \text{ (suy ra từ a)}$$

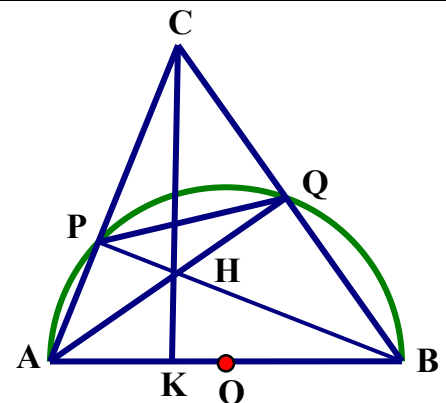
$$\widehat{CBP} = \widehat{HAP} = \frac{1}{2} sđ \widehat{PQ} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung PQ)}$$

$$\Rightarrow \triangle CBP \sim \triangle HAP \text{ (g - g)}$$

c) Gọi K là giao điểm của tia CH và AB . Từ giả thiết suy ra K thuộc cạnh AB (1)

$\triangle ABC$ có $AQ \perp BC$; $BP \perp AC$. Suy ra H là trực tâm của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow CH \perp AB \text{ tại } K$$



Từ đó suy ra: $\Delta APB \sim \Delta AKC \Rightarrow AP \cdot AC = AK \cdot AP(2)$

$+ \Delta BQA \sim \Delta BKC \Rightarrow BQ \cdot BC = BK \cdot BA (3)$

- Cộng từng vế của (2) và (3) và kết hợp với (1), ta được:

$$S = AP \cdot AC + BQ \cdot BC = AB^2 = 4R^2.$$

Bài 4. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AC , B là điểm chính giữa của cung AC . Lấy điểm N thuộc cung nhỏ AB (N khác A và B). Qua điểm N kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn đã cho, gọi K là giao điểm của CN và OB . Từ K kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt đường thẳng d ở F .

a) Chứng minh tứ giác $OKNF$ nội tiếp được một đường tròn.

b) Tính độ dài đoạn FK theo R .

c) Kẻ NH vuông góc với OB tại H . Đường tròn ngoại tiếp ΔOBC cắt NC tại điểm thứ hai là I . Chứng minh $\widehat{OHI} = 45^\circ$.

HD:

a) Do $OB \perp KF \Rightarrow \widehat{OKF} = 90^\circ (1)$

Do d là tiếp tuyến của (O) nên $ON \perp d \Rightarrow \widehat{ONF} = 90^\circ (2)$

Từ (1) và (2) lập luận $\Rightarrow N, K, O, F$ tứ giác $OKNF$ nội tiếp.

KL

b) Do B là điểm chính giữa của cung AC nên OB vuông góc với AC .

Mà FK vuông góc OB nên $KF \parallel AC (3)$

$$\Rightarrow \widehat{KFO} = \widehat{FOA} \text{ (so le trong)}$$

Mà tứ giác $OKNF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KFO} = \widehat{KNO}$

$$\Rightarrow \widehat{FOA} = \widehat{KNO} (4)$$

Tam giác ONC cân $\Rightarrow \widehat{ONC} = \widehat{OCN}$ hay $\widehat{ONK} = \widehat{OCN} (5)$

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{FOA} = \widehat{OCN} \Rightarrow OF \parallel CK (6)$

Từ (3) và (6) $\Rightarrow$ tứ giác $COFK$ là hình bình hành $\Rightarrow KF = OC = R$

KL

c) Ta có $NH \parallel OC$ (GT) $\Rightarrow \widehat{HNC} = \widehat{NCO}$ (so le trong)

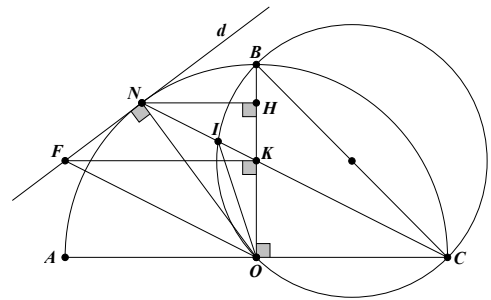
Mà $\widehat{ONC} = \widehat{OCN}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{HNC} = \widehat{CNO} (7)$

Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC ta có $\widehat{IOB} = \widehat{ICB}$ (hệ quả góc nội tiếp)

$$\text{Mà } \widehat{ICB} = \widehat{NCB} \Rightarrow \widehat{IOB} = \widehat{NCB}$$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{NCB} = \frac{1}{2} \widehat{NOB}$ (hệ quả góc nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{IOB} = \frac{1}{2} \widehat{NOB} \Rightarrow \widehat{IOB} = \widehat{ION} (8)$$



Từ (7) và (8) $\Rightarrow I$ là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ONH

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ONH . Suy ra $\widehat{OHI} = 45^\circ$.

Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$). Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ($H \in BC$). Vẽ đường tròn (O) đường kính BC , đường tròn (O) cắt AB tại E . Trên cung nhỏ BE lấy điểm D , CD cắt AH tại G .

a) Chứng minh tứ giác $BDGH$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Đường thẳng EG cắt đường tròn (O) tại điểm M . Hai đường thẳng AH và BM cắt nhau tại I .

Chứng minh $GA.GI = GE.GM$

c) Hai đường thẳng AD và CB cắt nhau tại N , DB và CI cắt nhau tại K . Chứng minh $NK \parallel AH$.

HD: a) Chỉ ra được $\widehat{BDG} = 90^\circ$;

Chỉ ra được $\widehat{BHG} = 90^\circ$.

Chỉ ra tứ giác $BDGH$ có $\widehat{BDG} + \widehat{BHG} = 180^\circ$

và $\widehat{BDG}, \widehat{BHG}$ là hai góc đối nhau.

KL tứ giác $BDGH$ nội tiếp

b) Chứng minh tứ giác $AEHC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{ECH}$ hay $\widehat{EAH} = \widehat{ECB}$

Chứng minh $\widehat{ECB} = \widehat{GMI} \Rightarrow \widehat{EAG} = \widehat{GMI}$

Từ đó chỉ ra $\triangle GAE$ đồng dạng với $\triangle GMI$ (g-g)

suy ra $GA.GI = GE.GM$

c) $GA.GI = GE.GM \Rightarrow GA.GI = GC.GD$

Suy ra tam giác GAD đồng dạng với tam giác GCI (c-g-c)

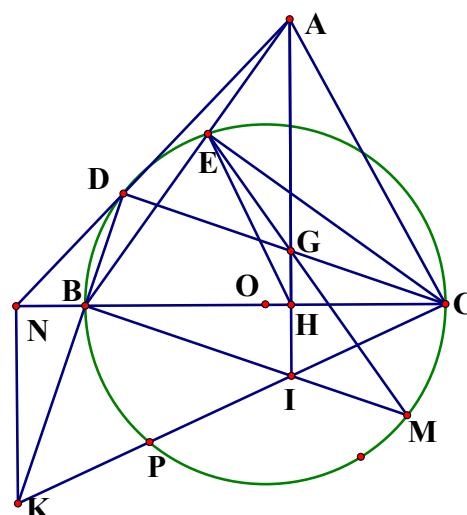
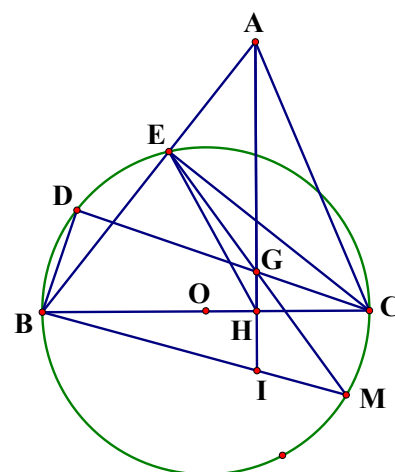
Suy ra $\widehat{DAG} = \widehat{ICG}$

Suy ra tam giác ANH đồng dạng với tam giác CKD (g-g)

Suy ra $\widehat{ANH} = \widehat{CKD} \Rightarrow \widehat{DNC} = \widehat{DKC}$

Suy ra tứ giác $DNKC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KNC} = \widehat{KDC} = 90^\circ \Rightarrow NK \perp NC \Rightarrow NK \parallel AH$



Bài 6. Cho đường tròn tâm O , bán kính R và một đường thẳng d không cắt đường tròn (O) . Dựng đường thẳng OH vuông góc với đường thẳng d tại điểm H . Trên đường thẳng d lấy điểm K (khác điểm H), qua K vẽ hai tiếp tuyến KA và KB với đường tròn (O) , (A và B là các tiếp điểm) sao cho A và H nằm về hai phía của đường thẳng OK .

a) Chứng minh tứ giác $KAOH$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) Đường thẳng AB cắt đường thẳng OH tại điểm I . Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IH \cdot IO$.

c) Khi $OK = 2R, OH = R\sqrt{3}$. Tính diện tích ΔKAI theo R .

HD:

a) Chỉ ra được: $\widehat{KAO} = 90^\circ$

Chỉ ra được: $\widehat{KHO} = 90^\circ$

Xét tứ giác $KAOH$ có $\widehat{KAO} + \widehat{KHO} = 180^\circ$

Mà hai góc $\widehat{KAO}$ và $\widehat{KHO}$ đối nhau

Kết luận tứ giác $KAOH$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Ta có $\widehat{KBO} + \widehat{KAO} = 180^\circ$ và $\widehat{KBO}, \widehat{KAO}$ đối nhau

nên tứ giác $KAOB$ là tứ giác nội tiếp

Các đỉnh H, B, A cùng nhìn cạnh OK dưới một góc vuông

nên năm điểm K, A, B, O, H cùng thuộc đường tròn đường kính OK

b) Xét tam giác IAH và tam giác IOB có:

$$\widehat{HIA} = \widehat{BIO} \text{ (đối đỉnh)}$$

và $\widehat{AHI} = \widehat{ABO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AO).

$$\text{Do đó } \Delta IAH \sim \Delta IOB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IA}{IH} = \frac{IO}{IB} \Rightarrow IA \cdot IB = IH \cdot IO.$$

c) Gọi M là giao điểm của OK và AB

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $KA = KB$;

Lại có $OA = OB = R$ nên OK là đường trung trực của AB , suy ra $AB \perp OK$ tại M và $MA = MB$.

$$\text{Theo câu b) ta có } OI = \frac{R^2}{OH} = \frac{R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét } \Delta OAK \text{ vuông tại } A, \text{ có } OA^2 = OM \cdot OK \Leftrightarrow OM = \frac{OA^2}{OK} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

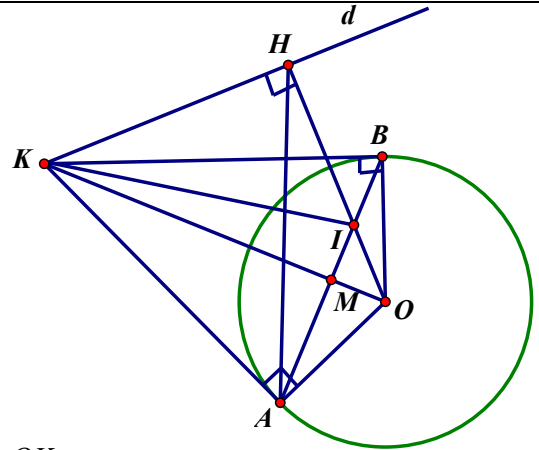
$$\text{Suy ra } KM = OK - OM = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$AM^2 = OM \cdot KM = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Xét } \Delta OMI \text{ vuông tại } M, \text{ có } MI = \sqrt{OI^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Suy ra } AI = AM + MI = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{6} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Diện tích } \Delta AKI \text{ là } S = \frac{1}{2} AI \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$



Bài 7: Cho đường tròn tâm (O) , đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm C bất kì (C

không trùng với A và B). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BC ở điểm D . Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng DO . Tia AH cắt đường tròn (O) tại điểm F (không trùng với A).

a) Chứng minh tứ giác $AHCD$ nội tiếp được một đường tròn.

b) Chứng minh ΔCFH là tam giác vuông.

c) Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{BH \cdot BC}{BF}$.

a) Do $AH \perp DH \Rightarrow \widehat{AHD} = 90^\circ$ nên A, H, D thuộc đường tròn đường kính AD (1)

Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{ACD} = 90^\circ$ nên A, C, D thuộc đường tròn đường kính AD (1)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A, H, C, D$ thuộc đường tròn đường kính AD

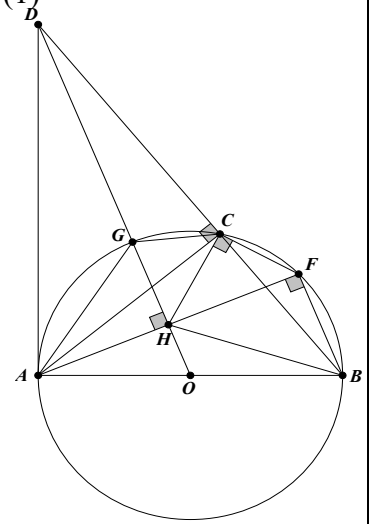
hay tứ giác $AHCD$ nội tiếp được một đường tròn.

b) Tứ giác $AHCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HCB} = \widehat{DAH}$

Ta có $\widehat{BCF}; \widehat{BAF}$ nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{BF} \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{BAF}$

$\Rightarrow \widehat{HCF} = \widehat{HCB} + \widehat{BCF} = \widehat{DAH} + \widehat{BAF} = \widehat{DAB} = 90^\circ$

Vậy tam giác CFH là tam giác vuông tại C.



c) Ta có: $\widehat{FCB} = \widehat{HAB}$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{FB}$).

Tam giác OAD vuông tại A. Khi đó $OA^2 = OH \cdot OD$

Mà $OA = OB$ nên $OB^2 = OH \cdot OD \Rightarrow \frac{OH}{OB} = \frac{OB}{OD}$

Suy ra hai tam giác OHB và OBD đồng dạng

Suy ra $\widehat{OBH} = \widehat{ODB}$ (4)

Ta lại có tứ giác $AHCD$ nội tiếp nên $\widehat{ODB} = \widehat{CAH}$ (5)

Tứ giác $ABFC$ nội tiếp nên $\widehat{CAH} = \widehat{CBF}$ (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $\widehat{OBH} = \widehat{CBF}$ (7)

Từ (3) và (7) suy ra hai tam giác HAB và FCB đồng dạng

Khi đó, ta có: $\frac{BC}{BA} = \frac{BF}{BH} \Rightarrow \frac{BC \cdot BH}{BF} = BA \Rightarrow \frac{BC \cdot BH}{BF} = 2R$.

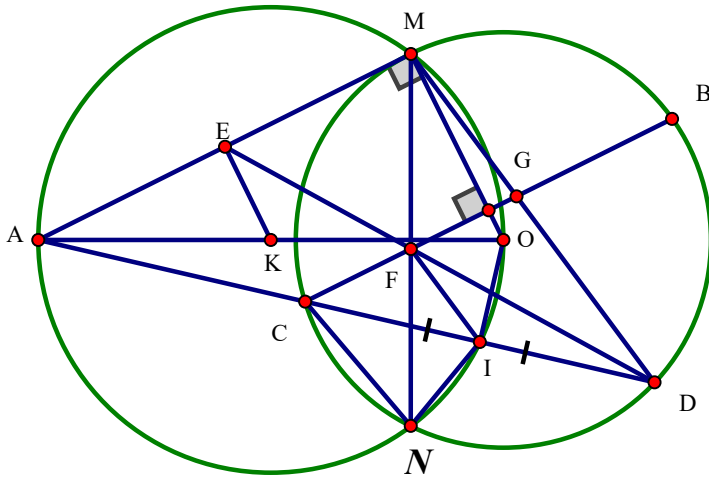
Vậy $S = \frac{BC \cdot BH}{BF} = 2R$.

Bài 8: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Vẽ tiếp tuyến AM và cát tuyến ACD (tia AO nằm giữa hai tia AM và AD). Gọi I là trung điểm của CD. Đường tròn đường kính AO cắt (O) tại N.

a) Chứng minh tứ giác AMOI nội tiếp được đường tròn. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp đó.

b) Vẽ dây CB vuông góc với MO cắt MN tại F. Chứng minh tứ giác CFIN nội tiếp

c) Tia DF cắt AM tại E. Chứng minh rằng KE vuông góc với AM



a) Xét (O) có AM là tiếp tuyến tại M của (O) (gt)

$$AM \perp MO \Rightarrow \widehat{AMO} = 90^0$$

Vì CD là dây của (O), I là trung điểm của CD (gt)

$$\Rightarrow OI \perp CD \text{ tại I} \Rightarrow \widehat{OIC} = 90^0$$

Xét tứ giác AMOI có $\widehat{AMO} = 90^0$; $\widehat{OIC} = 90^0$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \widehat{AMO} + \widehat{OIC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \quad (1)$$

Mà $\widehat{AMO}$ và $\widehat{OIC}$ là hai góc đối diện (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác AMOI nội tiếp đường tròn (K) đường kính AO (K là trung điểm của A

b) Ta có $CB \perp OM$ (gt); $AM \perp MO$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow CB // OM \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{CFN} \text{ (hai góc đồng vị)} \quad (3)$$

Xét (K) ta có tứ giác AMOI nội tiếp (K) (chứng minh trên), $N \in (K)(gt)$

$$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AIN} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN)} \quad (4)$$

Từ (3) (4) $\Rightarrow \widehat{CFN} = \widehat{AIN} \Rightarrow \widehat{CFN} = \widehat{CIN}$ (vì $I \in AC$)

Xét tứ giác $CFIN$ có $\widehat{CFN} = \widehat{CIN}$ (chứng minh trên)

Mà hai đỉnh F, I kề nhau cùng nhìn đoạn CN dưới hai góc bằng nhau.

$\Rightarrow$ tứ giác $CFIN$ nội tiếp đường tròn

c) Gọi MD cắt CB tại G ta có

$$\widehat{MDC} = \widehat{MNC} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } MC \text{ của (O))} \quad (5)$$

Mà tứ giác $CFIN$ nội tiếp đường tròn (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{FNC}$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{FIC}$ (7)

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow FI // GD$

Xét ΔCGD có FI//GD, I là trung điểm của CD, $F \in CG$

$$\Rightarrow CF=FG$$

$$\text{Xét } \triangle MDE \text{ Có } FG // ME \text{ (cùng } \perp MO \text{) } \Rightarrow \frac{FG}{ME} = \frac{DF}{DE} \quad (9)$$

$$\text{Xét } \triangle ADE \text{ Có } FC \parallel AE \text{ (cùng } \perp MO) \Rightarrow \frac{FC}{AE} = \frac{DF}{DE} \quad (10)$$

$$\text{Từ (9) (10) suy ra } \Rightarrow \frac{FG}{ME} = \frac{FC}{AE};$$

$$\text{Mà } FG = FC$$

$$\text{Suy ra } ME = EA$$

$$\Delta AMO \text{ có } \left. \begin{array}{l} AE = EM; (E \in AM) \\ AK = KO; (K \in AO) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow KE // MO$$

$$\text{Mà } MO \perp AM \Rightarrow KE \perp AM$$

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính R . Hai đường cao AE và BK của tam giác ABC cắt nhau tại H (với E thuộc BC , K thuộc AC).

a. Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b. Chứng minh $CE.CB = CK.CA$ và $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.

c. Cho B, C cố định và A di động trên (C) nhưng vẫn thoả mãn điều kiện tam giác ABC nhọn; khi đó H thuộc một đường tròn (T) cố định. Xác định tâm I và tính bán kính r của đường tròn (T) , biết $R = 3cm$.