

UBND XÃ DIỄN CHÂU

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP XÃ LỚP 9 NĂM HỌC 2025 - 2026

Môn: Toán (Thời gian làm bài 150 phút)

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Chứng minh rằng: $A = 2024m^3 + m$ là hợp số, với m là số nguyên dương.

b) Chị Mai cần một số tiền để mua xe, chị vay tiền ngân hàng và bạn bè. Biết rằng nếu chị Mai vay ở ngân hàng với lãi suất 1,2%/tháng và vay ở bạn bè 0,8%/tháng thì lãi hàng tháng chị phải trả là 540.000 đồng. Nếu chị Mai vay ở ngân hàng với lãi suất 0,9%/tháng và ở bạn bè 0,5%/tháng thì tiền lãi hàng tháng chị phải trả 390.000 đồng. Hỏi Chị Mai vay ở mỗi nơi bao nhiêu tiền?

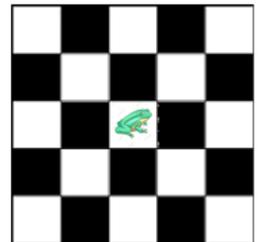
Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (-3-2x)^3 = 0$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 = (2+y)(4-2y) \\ 2x^3 = (x+y)(4-xy) \end{cases}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Một con ếch đang ở giữa một bảng có 5×5 ô vuông được tô hai màu trắng và đen (như hình vẽ). Mỗi bước nhảy con ếch nhảy sang một ô khác có chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô trước đó. Tính xác suất sau hai bước nhảy con ếch ở ô màu đen.



b) Một công ty chuyên sản xuất đĩa quang với chi phí mỗi đĩa là 40 (nghìn đồng). Theo nghiên cứu, nếu mỗi đĩa bán ra với giá x (nghìn đồng) thì số lượng đĩa bán được sẽ $120 - x$ ($x \in \mathbb{N}^*$). Hãy xác định giá bán của mỗi đĩa sao cho lợi nhuận mà công ty thu được là cao nhất?

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BH, CH. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại F. Gọi O là giao điểm của AH và DE.

a) Chứng minh rằng: $AH^2 = BH \cdot CH$ và $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

b) Gọi P là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $HF = HA \cdot \tan \angle OPF$

c) Giả sử đường cao AH cố định; B và C thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn $\triangle ABC$ vuông tại A và $AB < AC$. Chứng minh rằng, trực tâm của $\triangle AMN$ là một điểm cố định.

Câu 5. (1,0 điểm)

Trên bàn có 2026 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 2026. Hai bạn An và Bình tiến hành trò chơi bằng cách thay phiên nhau lấy thẻ, đến lượt chơi mỗi bạn sẽ lấy một thẻ cho đến khi hết tám thẻ trên bàn. Sau đó mỗi người cộng số trên các thẻ mà mình có, ai ra số chẵn sẽ thắng. Nếu An chơi trước thì bạn nào có chiến thuật để luôn thắng và chiến thuật đó như thế nào?

.....Hết.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1. (4,0 điểm) a) Cho m là số nguyên dương. Chứng minh rằng $2024m^3 + m$ là hợp số. b) Chị Mai cần một số tiền để mua xe, chị vay tiền ngân hàng và bạn bè. Biết rằng nếu chị Mai vay ở ngân hàng với lãi suất 1,2%/tháng và vay ở bạn bè 0,8%/tháng thì lãi hàng tháng chị phải trả là 540.000 đồng. Nếu chị Mai vay ở ngân hàng với lãi suất 0,9%/tháng và ở bạn bè 0,5%/tháng thì tiền lãi hàng tháng chị phải trả 390.000 đồng. Hỏi Chị Mai vay ở mỗi nơi bao nhiêu tiền?		
a 1,5đ	Với m nguyên dương Ta có $2024m^3 + m = 2025m^3 - (m^3 - m) = 2025m^3 - m(m-1)(m+1)$ Có $2025 \div 3$, $m(m-1)(m+1)$ là tích của 3 số tự nhiên nên chia hết cho 3. $\Rightarrow 2024m^3 + m \div 3$ Mà $2024m^3 + m > 3$ Vậy $2024m^3 + m$ là hợp số	0,5 0,5 0,5
b 1,0đ	Gọi x là số tiền vay ngân hàng, y là số tiền vay ở bạn bè ($x, y > 0$; đồng) Theo đề bài ta có hệ: $\begin{cases} 0,012x + 0,008y = 540.000 \\ 0,009x + 0,005y = 390.000 \end{cases}$ Giải hệ ra được $x = 35.000.000$; $y = 15.000.000$ Vậy An vay ngân hàng 35 triệu đồng, vay bạn bè 15 triệu đồng	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 2. (6,0 điểm) a) Giải phương trình: $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (3-2x)^3 = 0$ b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 = (4-2y)(2+y) \\ 2x^3 = (x+y)(4-xy) \end{cases}$		
a 3,0đ	Ta có: $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (-3-2x)^3 = 0$ (1) Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = x+2 \\ c = -3-2x \end{cases}$, khi đó $a+b+c=0 \Rightarrow c = -a+b$ (2) Ta có: $(1) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + [-a+b]^3 = 0$ (do (2)) $\Rightarrow a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = 0$ $\Rightarrow -(3a^2b + 3ab^2) = 0 \Rightarrow -3ab(a+b) = 0 \Rightarrow 3abc = 0$ (do (2)) $\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+2=0 \\ -3-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$ Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-1; -\frac{3}{2}; -2\right\}$	0,75 0,75 0,75 0,75
b 3,0đ	$\begin{cases} 2x^2 = (4-2y)(2+y) \\ 2x^3 = (x+y)(4-xy) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4-y^2 \\ 2x^3 = (x+y)(4-xy) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (1) \\ 2x^3 = (x+y)(4-xy) & (2) \end{cases}$	1,0

Thế (1) vào (2) ta được: $2x^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$	1,0
Thay $x = y$ vào (1) được $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$	1,0
Hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (x;y) = (\sqrt{2};\sqrt{2});(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$	

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Một con ếch đang ở giữa một bảng có 5×5 ô vuông được tô hai màu trắng và đen (như hình vẽ). Mỗi bước nhảy con ếch nhảy sang một ô khác có chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô trước đó. Tính xác suất sau hai bước nhảy con ếch ở ô màu đen.

b) Một công ty chuyên sản xuất đĩa quang với chi phí mỗi đĩa là 40 (nghìn đồng). Theo nghiên cứu, nếu mỗi đĩa bán ra với giá x (nghìn đồng) thì số lượng đĩa bán được sẽ $120 - x (x \in N^*)$. Hãy xác định giá bán của mỗi đĩa sao cho lợi nhuận mà công ty thu được là cao nhất?

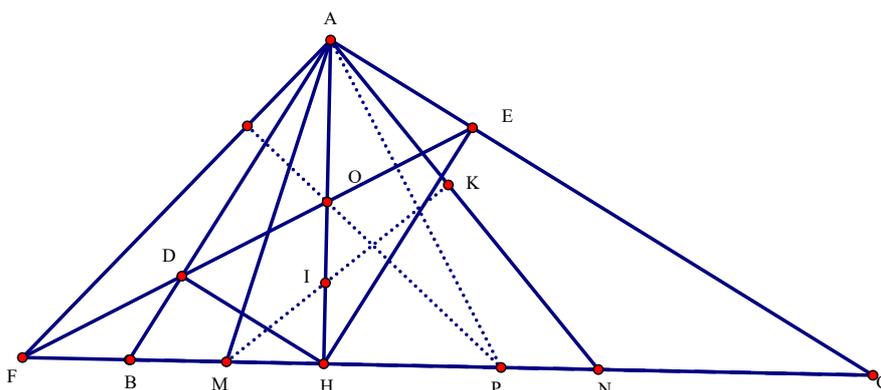
a	Số các kết quả có thể xảy ra là $8.8 = 64$ Gọi A là biến cố sau hai bước nhảy con ếch ở ô được tô màu đen Số các kết quả thuận lợi cho biến cố A là $8.4 = 32$ Vậy xác suất của biến cố A là: $\frac{32}{64} = \frac{1}{2}$	0,5 0,5 0,5
---	--	-------------------

b	Chi phí mà công ty bỏ ra để sản xuất đĩa là: $(120 - x).40 = 4800 - 40x$ (nghìn đồng) Số tiền mà công ty thu về từ việc bán đĩa là: $(120 - x).x = 120x - x^2$ (nghìn đồng) Lợi nhuận mà công ty thu được từ việc bán đĩa là: $L = (120x - x^2) - (4800 - 40x) = -x^2 + 160x - 4800$ (nghìn đồng) Ta có: $L = 1600 - (x^2 - 160x + 6400) = 1600 - (x - 80)^2 \geq 1600$ Đẳng thức xảy ra khi $x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = 80$ (nghìn đồng) Vậy với mỗi đĩa CD bán ra với giá 80 nghìn đồng thì sẽ thu được lợi nhuận cao nhất.	0,5 0,5 0,5 0,5
---	---	--------------------------

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BH, CH. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại F. Gọi O là giao điểm của AH và DE.

- a) Chứng minh rằng: $AH^2 = BH.CH$ và $AD.AB = AE.AC$
b) Gọi P là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $HF = HA.tanOPF$
c) Giả sử đường cao AH cố định; B và C thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn ΔABC vuông tại A và $AB < AC$. Chứng minh rằng, trực tâm của tam giác AMN là một điểm cố định.



a 3,0đ	- Chứng minh được: $\triangle ABH \sim \triangle CAH \Rightarrow AH^2 = BH.CH$ - Chứng minh được: $\triangle ABH \sim \triangle AHD \Rightarrow AH^2 = AD.AB$ - Chứng minh được: $\triangle HAE \sim \triangle CAH \Rightarrow AH^2 = AE.AC$ $\Rightarrow AD.AB = AE.AC$	1,0 1,0 1,0
b 2,5đ	Chứng minh được $AP \perp DE$ Chứng minh được O là trực tâm tam giác FAP $\Rightarrow PO \perp AF$ Khi đó chứng minh được $OPH = HAF$ Mà $HF = AH.tanHAF$ nên $HF = AH.tanOPF$	1,0 0,5 0,5 0,5
c 1,5đ	Gọi I là trung điểm của OH; gọi K là giao điểm của MI và AN. Khi đó I cố định $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH $\Rightarrow AH^2 = BH.CH \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$ $\Rightarrow \frac{AH}{2.BH} = \frac{CH}{2AH} \Rightarrow \frac{OH}{BH} = \frac{NH}{AH}$ Chứng minh được $\triangle BHO \sim \triangle AHN$ (c.g.c) $\Rightarrow OBH = NAH \Rightarrow BO \perp AN$ Lại có MI là đường trung bình của $\triangle HBO \Rightarrow MI // BO \Rightarrow MK \perp AN$ Mặt khác $AH \perp MN$. Vậy trực tâm của tam giác AMN là trung điểm I của OH là 1 điểm cố định	0,5 0,25 0,25 0,5
Câu 5. (1,0 điểm) Trên bàn có 2026 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 2026. Hai bạn An và Bình tiến hành trò chơi bằng cách thay phiên nhau lấy thẻ, đến lượt chơi mỗi bạn sẽ lấy một thẻ cho đến khi hết tấm thẻ trên bàn. Sau đó mỗi người cộng số trên các thẻ mà mình có, ai ra số chẵn sẽ thắng. Nếu An chơi trước thì bạn nào có chiến thuật để luôn thắng và chiến thuật đó như thế nào?		
	An là người có chiến thuật để luôn thắng An rút trước và rút một thẻ đánh số chẵn Trên bàn còn lại 1013 thẻ đánh số lẻ và 1012 thẻ đánh số chẵn Sau đó An sẽ rút các thẻ đánh số cùng tính chẵn cùng lẻ với Bình đã rút Khi đó An sẽ luôn có 506 thẻ đánh số lẻ và 507 thẻ đánh số chẵn. Suy ra An luôn có chiến thuật chiến thắng.	0,5 0,5

Lưu ý: - Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

- Câu 4 không vẽ hình hoặc vẽ sai không chấm điểm.