CHƯƠNG I: KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

BÀI 1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. LÍ THUYẾT

I – KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.

Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.

II – KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như trên được gọi là một mặt của hình đa diện.

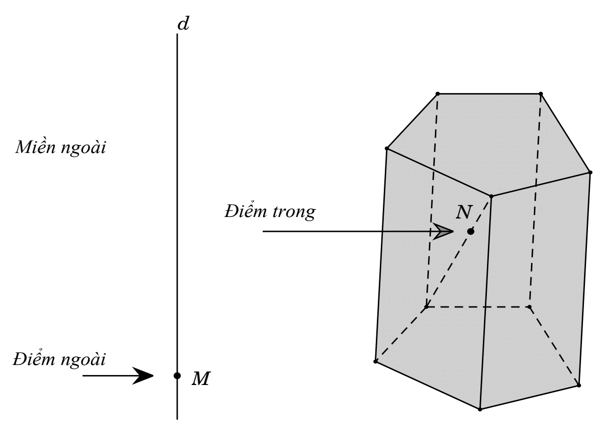
Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, các cạnh của hình đa diện.

2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

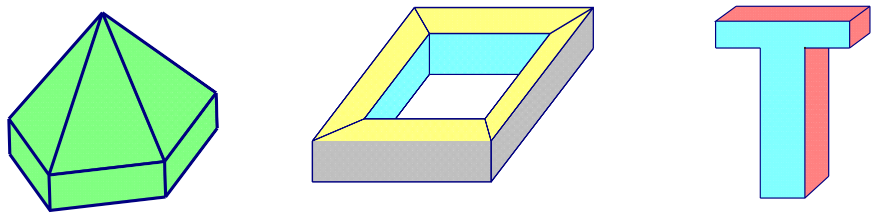
Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với đa diện ấy được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi một hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài… của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài… của hình đa diện tương ứng.

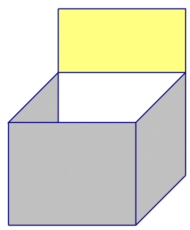


Ví dụ

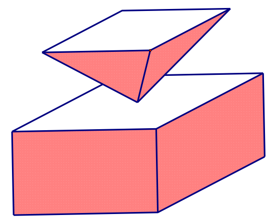
- Các hình dưới đây là những khối đa diện:



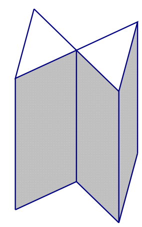
- Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện:



Hình a



Hình b



Hình c

Giải thích: Hình a không phải là hình đa diện vì tồn tại cạnh không phải là cạnh chung của hai mặt; Hình b không phải là hình đa diện vì có một điểm đặc biệt trong hình, điểm đó không phải là đỉnh chung của hai đa giác; Hình c không phải là hình đa diện vì tồn tại một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác.

III – HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. Kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình $(\mathscr{H})$ thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của $(\mathscr{H})$.

c) Phép đối xứng tâm O là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'.

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình $(\mathscr{H})$ thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của $(\mathscr{H})$.

d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ là là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'.

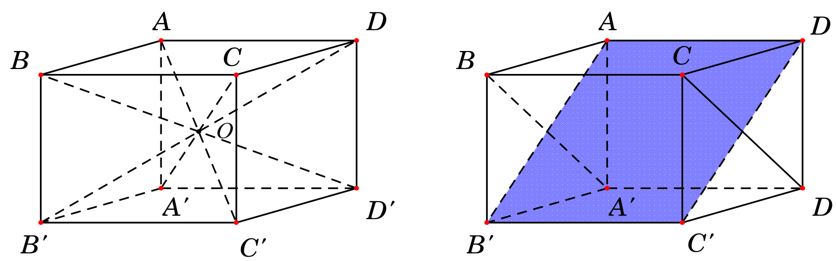
Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình $(\mathscr{H})$ thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của $(\mathscr{H})$.

Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện $(\mathscr{H})$ thành đa diện $(\mathscr{H}')$, biến đỉnh, cạnh, mặt của $(\mathscr{H})$ thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của $(\mathscr{H}')$.

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

- Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp $A.A'B'C'D'$ biến thành hình chóp $C'.ABCD$).
- Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng qua mặt phẳng $(AB'C'D)$ thì hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biến thành hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$).



2. Hai hình bằng nhau

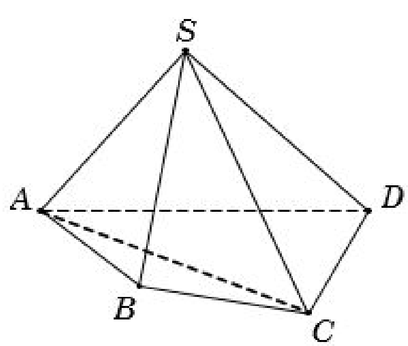
Hai hình được gọi là nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Đặc biệt, hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này đa diện kia.

IV – PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện $(\mathscr{H})$ là hợp của hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ sao cho $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể phân chia được khối đa diện $(\mathscr{H})$ thành hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$. Khi đó ta cũng nói có thể ghép hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ để được khối đa diện $(\mathscr{H})$.

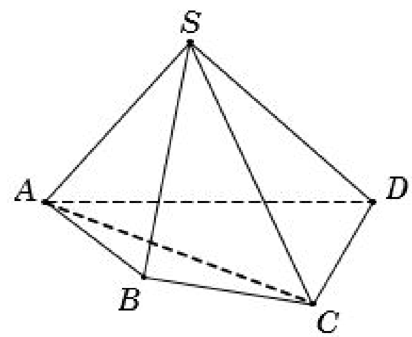
Ví dụ 1. Với khối chóp tứ giác $S.ABCD$, xét hai khối chóp tam giác $S.ABC$ và $S.ACD$.



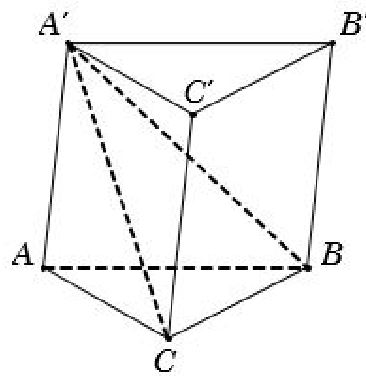
Ta thấy rằng:

● Hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ không có điểm trong chung (tức là không tồn tại điểm trong của khối chóp này là điểm trong của khối chóp kia và ngược lại).

● Hợp của hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ chính là khối chóp $S.ABCD.$ Vậy khối chóp $S.ABCD$ được phân chia thành hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ hay hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ được ghép lại thành khối chóp $S.ABCD.$



Ví dụ 2. Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng $(A'BC)$.



Khi đó, khối lăng trụ được phân chia thành hai khối đa diện $A'ABC$ và $A'BCC'B'$.

Nếu ta cắt khối chóp $A'BCC'B'$ bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ thì ta chia khối chóp $A'BCC'B'$ thành hai khối chóp $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

Vậy khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối tứ diện là $A'ABC$, $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

+) Kết quả 1: Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt.

+) Kết quả 2: Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

+) Kết quả 3: Cho (H) là đa diện mà tất các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Nếu số mặt của (H) là lẻ thì p phải là số chẵn.

+) Kết quả 4: Cho (H) là đa diện có m mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Khi đó số cạnh của (H) là $c=\frac{pm}{2}$.

+) Kết quả 5: Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

+) Kết quả 6: Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia thành những khối tứ diện

+) Kết quả 7: Mỗi đỉnh của một đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

+) Kết quả 8: Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.

Tổng quát: Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng đỉnh là một số chẵn.

+) Kết quả 9: Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

+) Kết quả 10: Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

+) Kết quả 11: Với mỗi số nguyên $k \geq 3$ luôn tồn tại một hình đa diện có $2k$ cạnh.

+) Kết quả 12: Với mỗi số nguyên $k \geq 4$ luôn tồn tại một hình đa diện có $2k+1$ cạnh.

+) Kết quả 13: Không tồn tại một hình đa diện có

+) Số mặt lớn hơn hoặc bằng số cạnh;

+) Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh.

+) Kết quả 14: Tồn tại khối đa diện có $2n$ mặt là những tam giác đều.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Điều kiện để một hình là hình đa diện – khối đa diện.

1. Phương pháp giải

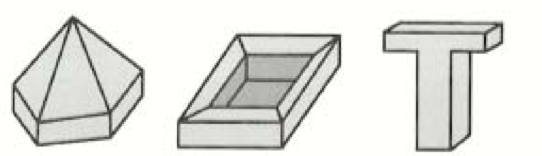
Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

+) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

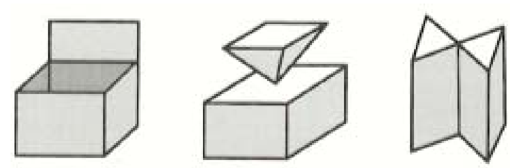
+) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Ví dụ:

Các hình dưới đây là những khối đa diện :

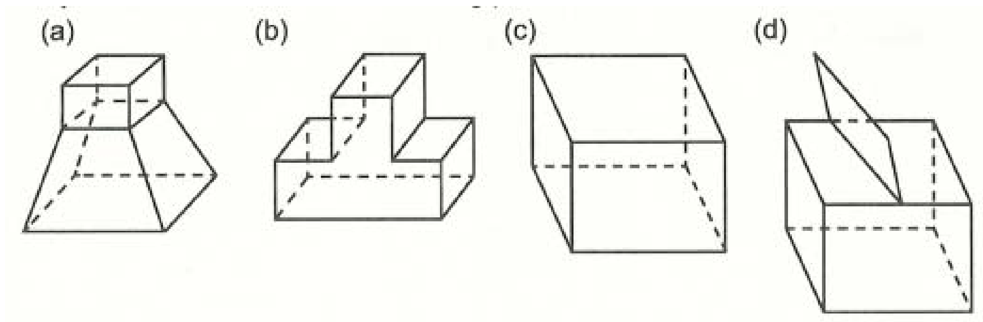


Các hình dưới đây không phải là khối đa diện:



2. Bài tập

Bài tập 1: Cho các hình sau. Hình không phải hình đa diện là



A. Hình (a). **B.** Hình (b). **C.** Hình (c). **D.** Hình (d).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

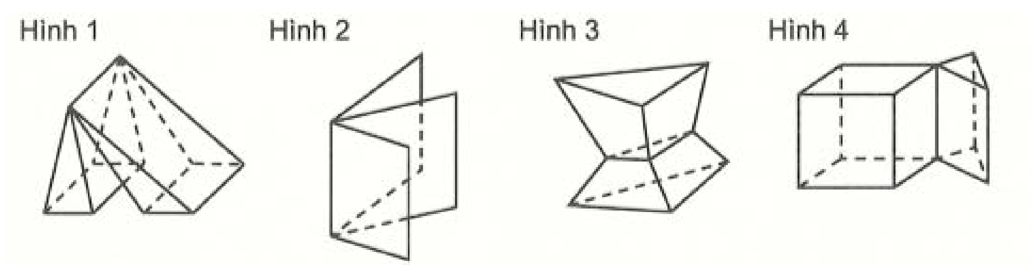
Áp dụng các tính chất của hình đa diện:

Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt;

Hai mặt bất kì hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung, hoặc không có điểm chung nào.

Hình d vi phạm quy tắc: có cạnh trên cùng chỉ là cạnh của một mặt.

Bài tập 2: Trong các hình dưới đây, hình nào là hình đa diện?



A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hình 1 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 4 đa giác, loại A.

Hình 2 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 3 đa giác, loại B.

Hình 4 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 4 đa giác, loại D.

Hình 3 là hình đa diện vì nó thỏa mãn khái niệm hình đa diện.

Dạng 2. Xác định số đỉnh, cạnh, mặt của một khối đa diện

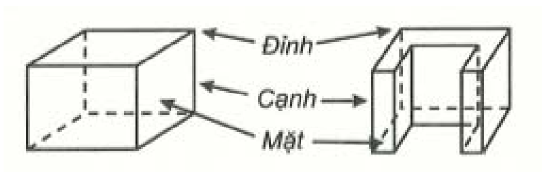
1. Phương pháp giải

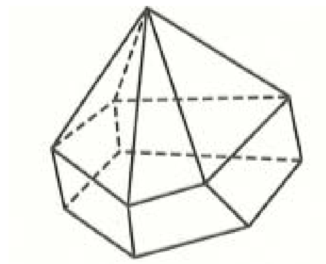
Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện.

Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.

Ví dụ:

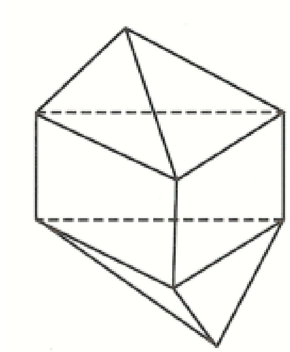
Hình sau đây có 11 đỉnh, 20 cạnh, 11 mặt





2. Bài tập

Bài tập 1. Số mặt của hình đa diện ở hình vẽ dưới đây là ?



A. 11. **B.** 10.

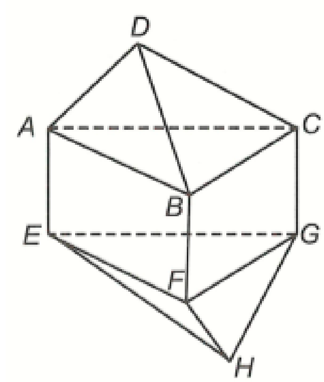
C. 12. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

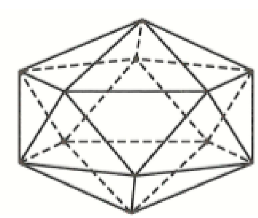
Chọn D

Hình đa diện trên có 9 mặt là

$(ABD);(BDC);(ADC);(ABFE);(BFGC);(ACGE);$
$(HFE);(HFG);(EHG)$.



Bài tập 2: Cho hình đa diện như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nối 2 đỉnh của hình đa diện nhưng không là cạnh của hình đa diện?



A. 66. **B.** 30.

C. 36. **D.** 102.

Chú ý:

Hình đa diện có n đỉnh thì sẽ có C_n^2 cạnh nối 2 đỉnh của hình đa diện

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có khối đa 20 mặt có 12 đỉnh.

Số đoạn thẳng được tạo thành 12 đỉnh trên là C_{12}^2 cạnh.

Số cạnh của khối 20 mặt trên là 30 cạnh.

Vậy số đoạn thẳng nối hai đỉnh của hình đa diện nhưng không phải là cạnh của hình đa diện là $C_{12}^2-30=36$.

nhưng không là cạnh của hình đa diện là hiệu của C_n^2 và số cạnh khối đa diện.

Bài tập 3. Cho một hình chóp có số đỉnh là 2018, số cạnh của hình chóp đó là

A. 2019..
B. 1009.
C. 4036.
D. 4034.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình chóp có 2018 đỉnh thì đa giác đáy có 2017 đỉnh, nên có 2017 cạnh đáy và 2017 cạnh bên.

Vậy hình chóp có $2017+2017=4034$ cạnh

Chú ý:

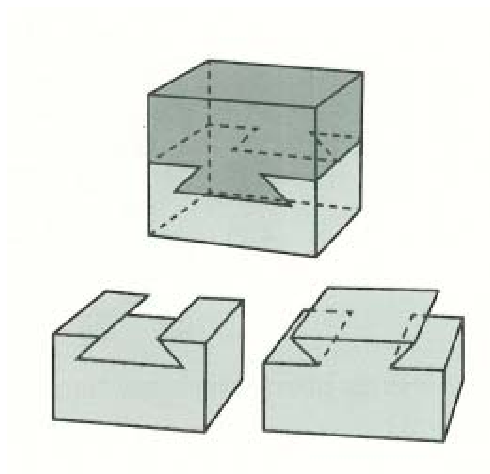
+ Hình chóp có n đỉnh thì sẽ có $2.(n-1)$ cạnh.

+ Hình chóp có n đỉnh thì sẽ có n mặt.

Dạng 3. Phân chia, lắp ghép các khối đa diện

1. Phương pháp giải

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện $(H_1),(H_2)$ sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H).



2. Bài tập

Bài tập 1. Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (CDM) và (ABN), ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện nào sau đây ?

A. $MANC, BCDN, AMND, ABND.$

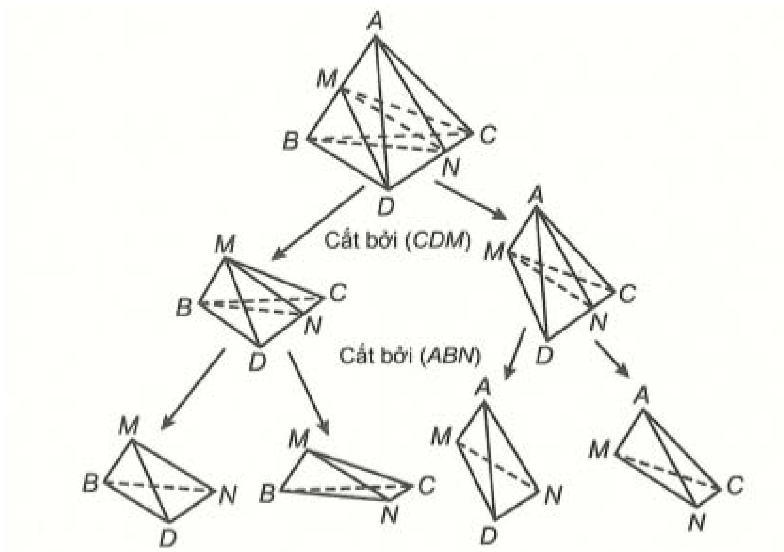
B. $NACB, BCMN, ABND, MBND.$

C. $ABCN, ABND, AMND, MBND.$

D. $MBND, MBNC, AMDN, AMNC.$

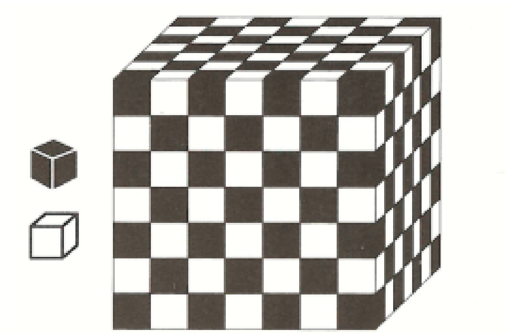
Hướng dẫn giải

Chọn D.



Dựa vào hình vẽ, ta thấy hai mặt phẳng (CDM) và (ABN) chia khối tứ diện $ABCD$ thành bốn khối tứ diện là $MBDN, MBNC, AMDN, AMNC.$

Bài tập 2. Các khối lập phương đen và trắng xếp chồng lên nhau xen kẽ màu tạo thành một khối rubik $7\times5\times7$ (như hình vẽ).



Gọi x là số khối lập phương nhỏ màu đen, y khối lập phương nhỏ màu trắng. Giá trị $x-y$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Có 7 lớp hình vuông xếp chồng lên nhau. Mỗi lớp có $7\times 5=35$ khối nhỏ.

Ta thấy hai lớp dưới đáy, một khối đen chồng lên một khối trắng (hay ngược lại) nên số lượng khối đen, trắng bằng nhau.

Tương tự 6 lớp bên dưới có số lượng khối đen, trắng bằng nhau.

Ta xét lớp trên cùng có $4+3+4+3+4=18$ khối màu đen và có $3+4+3+4+3=17$ khối màu trắng $\Rightarrow x-y=1$.

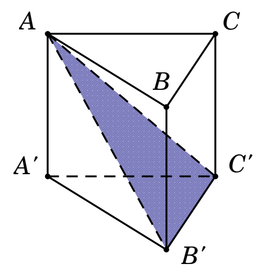
Bài tập 3. Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
B. Hai khối chóp tam giác.
C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
D. Hai khối chóp tứ giác.

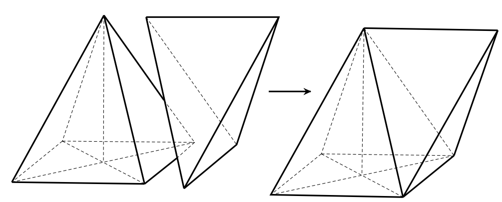
Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựa vào hình vẽ, ta thấy mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối chóp tam giác $A.A'B'C'$ và khối chóp tứ giác $A.BCC'B'$.



Bài tập 4. Lắp ghép hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$ để tạo thành khối đa diện $(\mathscr{H})$, trong đó $(\mathscr{H}_1)$ là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a, $(\mathscr{H}_2)$ là khối tứ diện đều cạnh a sao cho một mặt của $(\mathscr{H}_1)$ trùng với một mặt của $(\mathscr{H}_2)$ như hình vẽ. Hỏi khối da diện $(\mathscr{H})$ có tất cả bao nhiêu mặt?



A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khối đa diện $(\mathscr{H})$ có đúng 5 mặt.

Sai lầm hay gặp: Khối chóp tứ giác đều có 5 mặt. Khối tứ diện đều có 4 mặt.
Ghép hai hình lại như hình vẽ ta được khối đa diện $(\mathscr{H})$ có 8 mặt.

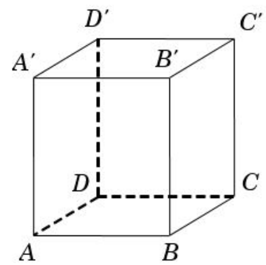
Bài tập 5. Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Lần lượt dùng mặt phẳng $(BDD'B')$ ta chia thành hai khối lập phương thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.



● Với khối $ABD.A'B'D'$ ta lần lượt dùng các mặt phẳng $(AB'D')$ và $(AB'D)$ chia thành ba khối tứ diện bằng nhau.

● Tương tự với khối $BCD.B'C'D'$.

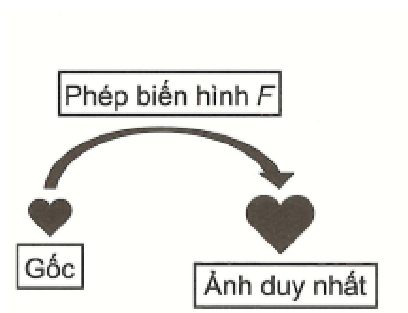
Vậy có tất cả 6 khối tứ diện bằng nhau.

Dạng 4: Phép biến hình trong không gian

1. Phương pháp giải

Phép biến hình F biến điểm M thành điểm M' duy nhất và kí hiệu $M' = F(M)$.

Qua phép biến hình F, mỗi hình (H) được biến thành hình (H') gồm tất cả các ảnh của các điểm thuộc hình (H).



Hai hình (H) và (H') gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

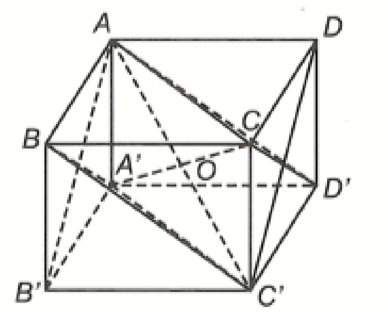
Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Khi đó:

\+ Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp $A.A'B'C'D'$ biến thành hình chóp $C'.ABCD$).

\+ Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau (qua phép đối xứng qua mặt phẳng $(AB'C'D)$ thì hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biến thành hình lăng trụ

$AA'D'.BB'C'$.



+ Hai hình tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là:

$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$, $AC = A'C'$, $BD = B'D'$.

Hình (H) được gọi là đồng dạng với hình (H') nếu có phép vị tự biến hình (H) thành hình (H_1) mà hình (H_1) bằng hình (H').

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Ảnh của đoạn thẳng AB qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CC'}$ là:

A. Đoạn thẳng $C'D'$.

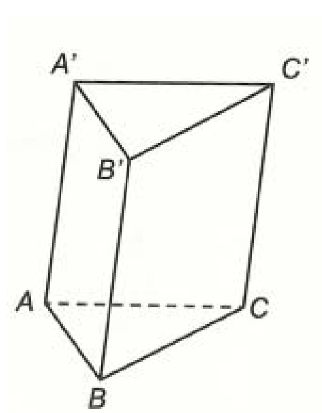
B. Đoạn thẳng DD'.

C. Đoạn thẳng CD.

D. Đoạn thẳng $A'B'$.

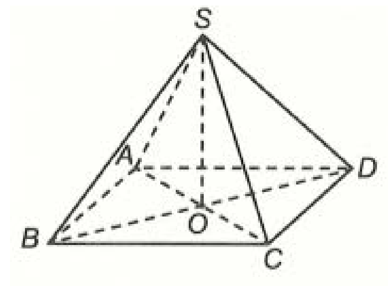
Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $\begin{cases} T_{\overrightarrow{CC'}}(A)=A' \\ T_{\overrightarrow{CC'}}(B)=B' \end{cases} \Rightarrow T_{\overrightarrow{CC'}}(AB)=AB'$.

Bài tập 2: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ như hình vẽ. Phép đối xứng qua mặt phẳng (SAC) biến hình chóp S.ABD thành hình chóp nào sau đây?



A. $S.ABC$.

B. $S.AB$D.

C. $S.ABO$.

D. $S.A$DC.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} Đ_{(SAC)}(S)=S \\ Đ_{(SAC)}(A)=A \\ Đ_{(SAC)}(B)=D \\ Đ_{(SAC)}(D)=B \end{cases} \Rightarrow Đ_{(SAC)}(S.AB\text{D})=S.ADB.$

.

Bài tập 3. Cho hai đường thẳng song song d, d' và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến d thành d'?

A. Có một. **B.** Không có.

C. Có hai. **D.** Có một hoặc không có.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Trong trường hợp O, d, d' đồng phẳng thì tồn tại duy nhất phép vị tự tâm O biến d thành d'.

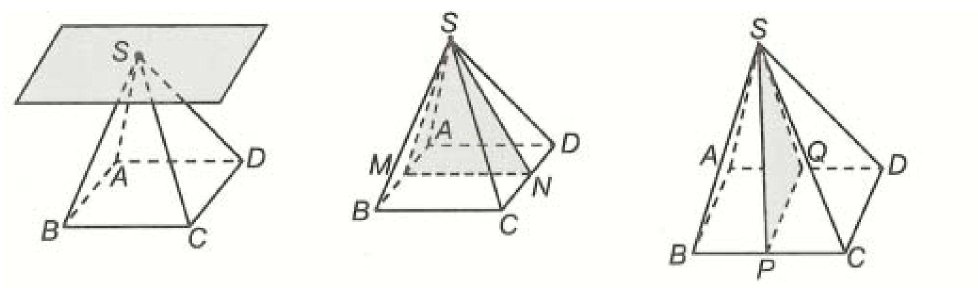
+ Trong trường hợp $O \notin (\text{d}, \text{d}')$ thì không tồn tại phép vị tự tâm O biến d thành d'.

Bài tập 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Số mặt phẳng qua điểm S và cách đều các điểm $A, B, C,$ D là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Có ba mặt phẳng gồm:

+ Một mặt phẳng qua đỉnh hình chóp và song song với $(ABCD)$.

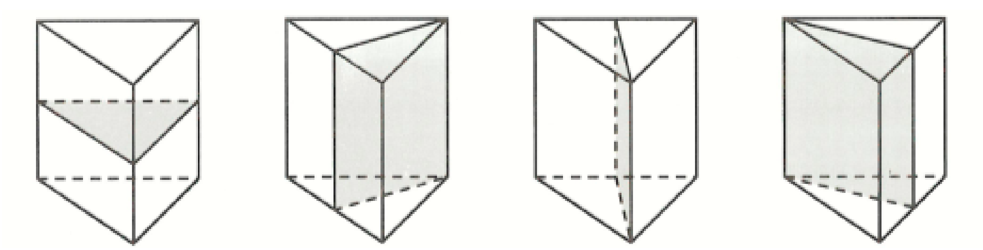
+ Hai mặt phẳng qua đỉnh hình chóp và qua hai trung điểm của cặp cạnh đối của hình vuông $ABCD$.

Bài tập 5. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Hình lăng trụ tam giác đều có bốn mặt đối xứng gồm:

Ba mặt là mặt phẳng chứa một cạnh bên và hai trung điểm của hai cạnh đáy không chung đỉnh với cạnh bên đó.

Một mặt phẳng chứa trung điểm của ba cạnh bên của hình lăng trụ.

Bài tập 6. Gọi n_1, n_2, n_3 lần lượt là số trục đối xứng của khối tứ diện đều, khối chóp tứ giác đều và khối lập phương. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 6.$ **B.** $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 9.$

C. $n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 9.$ **D.** $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 3.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Khối tứ diện đều có 3 trục đối xứng (đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện). Khối chóp tứ giác đều có 1 trục đối xứng (đi qua đỉnh và tâm của mặt tứ giác). Khối lập phương có 9 trục đối xứng (Loại 1: đi qua tâm của các mặt đối diện ; Loại 2: đi qua trung điểm các cặp cạnh đối diện).

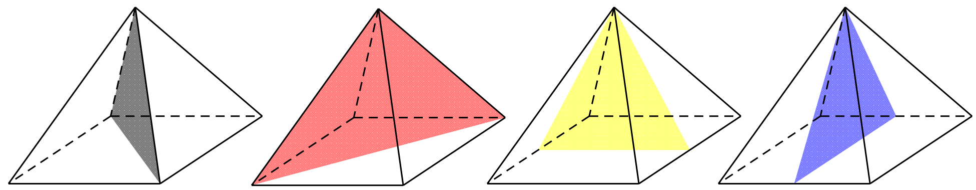
Bài tập 7. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường trung bình của đáy.
- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường chéo của đáy.

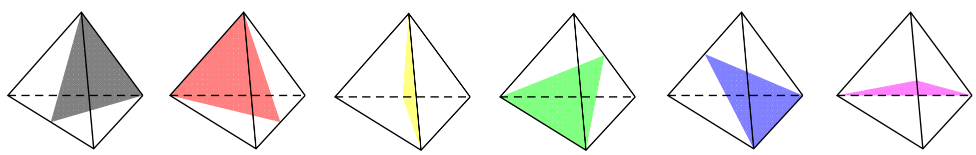
Bài tập 8. Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là:

A. 4 mặt phẳng. **B.** 6 mặt phẳng. **C.** 8 mặt phẳng. **D.** 10 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là các mặt phẳng chứa một cạnh và qua trung điểm cạnh đối diện.



Vậy hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng.

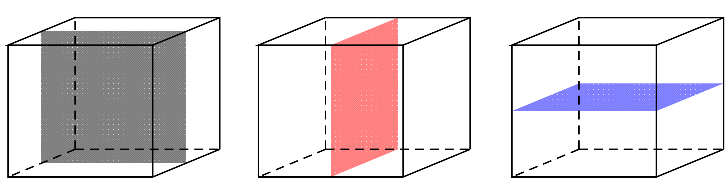
Bài tập 9. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 6 mặt phẳng. **C.** 9 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình hộp chữ nhật (không là hình lập phương) có các mặt phẳng đối xứng là các mặt các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối.



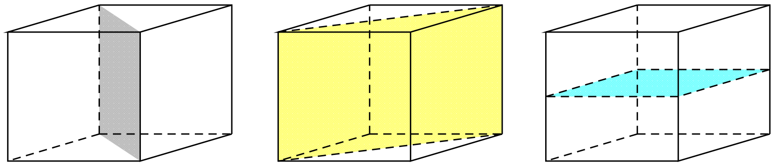
Bài tập 10. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình chữ nhật) có 3 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng chứa đường chéo của đáy và vuông góc với đáy.
- Một mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của cạnh bên.

Bài tập 11. Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

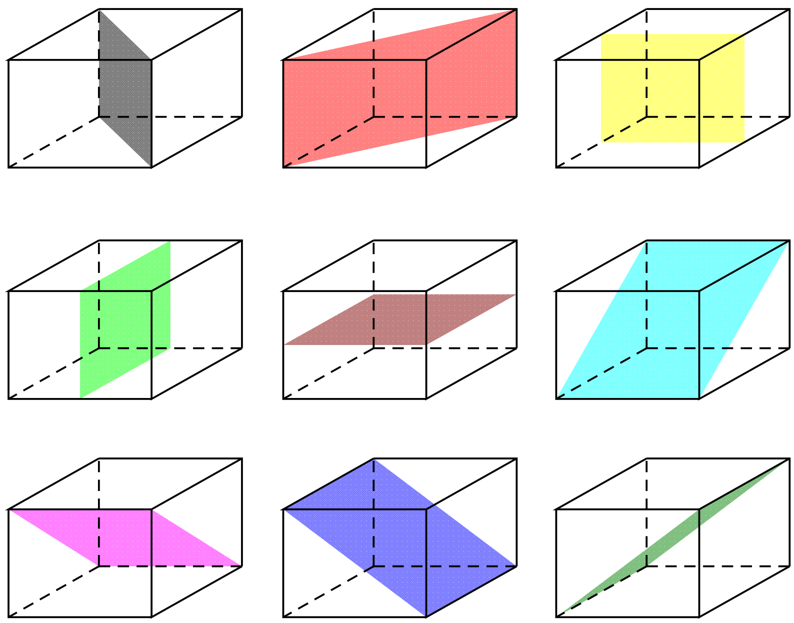
A. 8 mặt phẳng. **B.** 9 mặt phẳng.

C. 10 mặt phẳng. **D.** 12 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Có 9 mặt đối xứng (như hình vẽ sau).



Bài tập 12. Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

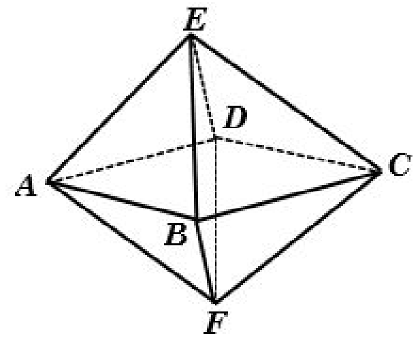
A. 4 mặt phẳng. **B.** 9 mặt phẳng.

C. 6 mặt phẳng. **D.** 12 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi bát diện đều $ABCDEF$. Có 9 mặt phẳng đối xứng, bao gồm: 3 mặt phẳng $(ABCD)$, $(BEDF)$, $(AECF)$ và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).



Bài tập 13. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của một tứ diện?

A. 1 mặt phẳng. **B.** 4 mặt phẳng.

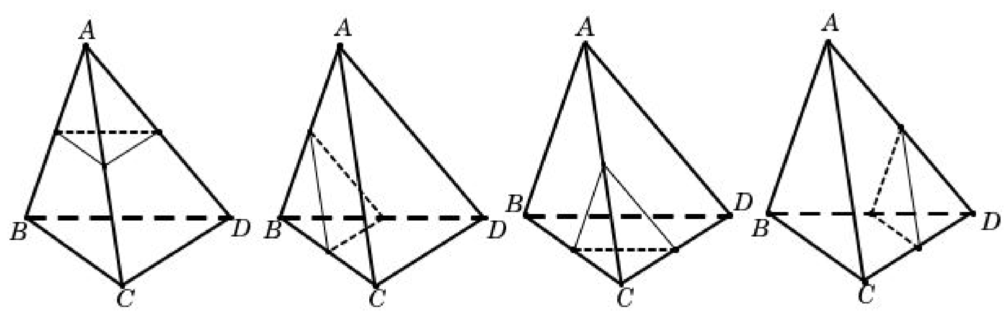
C. 7 mặt phẳng. **D.** Có vô số mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn C

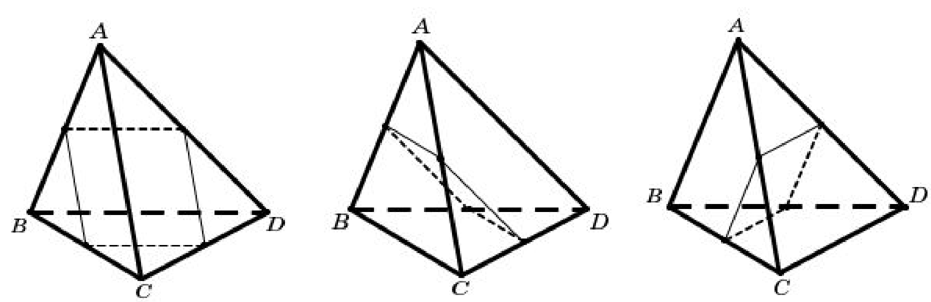
Có 2 loại mặt phẳng thỏa mãn đề bài là:

● Loại 1: Mặt phẳng qua trung điểm của 3 cạnh bên có chung đỉnh. Có 4 mặt phẳng thỏa mãn loại này (vì có 4 đỉnh)



Nhận xét. Loại này ta thấy có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại.

● Loại 2: Mặt phẳng qua trung điểm của 4 cạnh (4 cạnh này thuộc 2 cặp cạnh, mỗi cặp cạnh là chéo nhau). Có 3 mặt phẳng như thế.



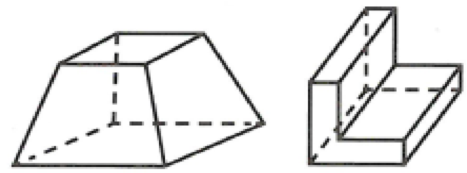
Nhận xét. Loại này ta thấy có 2 điểm nằm khác phía với 2 điểm còn lại.

BÀI 2: KHỐI ĐA DIỆN LỒI – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

A. LÍ THUYẾT

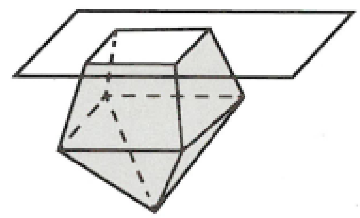
1. Khối đa diện lồi

Khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của khối đa diện thuộc khối đa diện.



Khối đa diện lồi *Khối đa diện không lồi*

Lưu ý: *Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.*

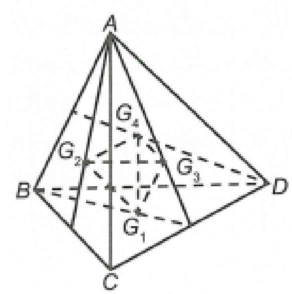


Một số kết quả quan trọng về khối đa diện lồi

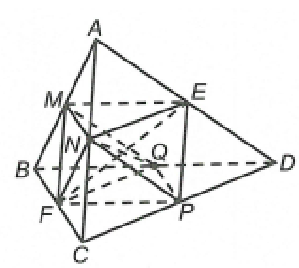
Bài tập:

Cho một khối tứ diện đều: Khi đó:

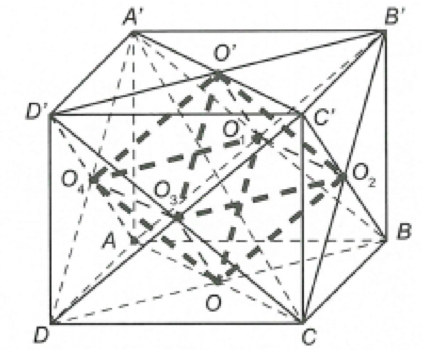
+) Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều.



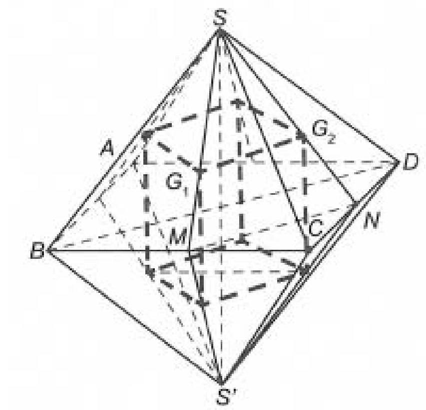
+) Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối bát diện đều (khối tám mặt đều).

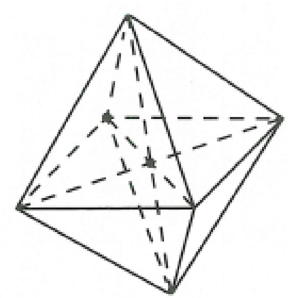


Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều.



Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.





Hai đỉnh của một khối bát diện đều được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo của khối bát diện đều. Khi đó:

+) Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

+) Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau.

+) Ba đường chéo bằng nhau.

2. Khối đa diện đều

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau đây:

+) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều *n* cạnh.

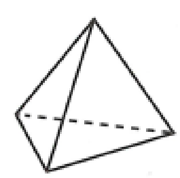
+) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng *p* mặt.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{n;p\}$.

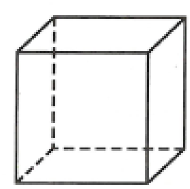
Định lí: Chỉ có năm loại khối đa điện đều.

Đó là loại $\{3;3\},\{4;3\},\{3;4\},\{5;3\}$ và $\{3;5\}$.

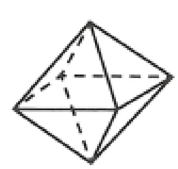
Các khối đa diện đều:



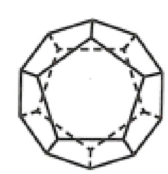
Tứ diện đều



Khối lập phương

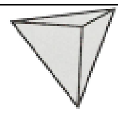
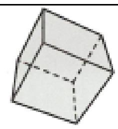
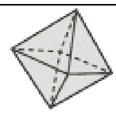
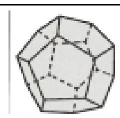
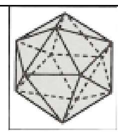


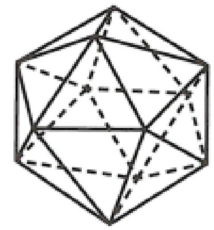
Khối bát diện đều



Khối 12 mặt đều

Bảng tóm tắt năm loại khối đa diện đều

Khối đa diện đều		***Số đỉnh***	***Số cạnh***	***Số mặt***	***Loại***	***Số MPĐX***
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$	6
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$	9
Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$	9
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$	15
Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$	15



Khối 20 mặt đều

Chú ý: *Giả sử khối đa diện đều loại $\{n;p\}$ có Đ đỉnh, C cạnh và M mặt. Khi đó: p.Đ = 2C = n.M.*

Công thức Ơ-le: Trong một đa diện lồi nếu gọi *Đ* là số đỉnh, *C* là số cạnh, *M* là số mặt thì ta có: *Đ* – *C* + *M* = 2.

Tâm đối xứng của một hình: Nếu phép đối xứng qua tâm I biến hình (H) thành chính nó thì I là tâm đối xứng của hình (H).

Mặt phẳng đối xứng của một hình: Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) là mặt phẳng đối xứng qua hình (H).

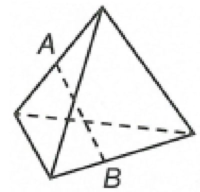
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Nhận diện đa diện lồi, đa diện đều

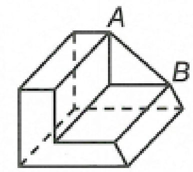
1. Phương pháp giải

Khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của khối đa diện thuộc khối đa diện.

Ví dụ:



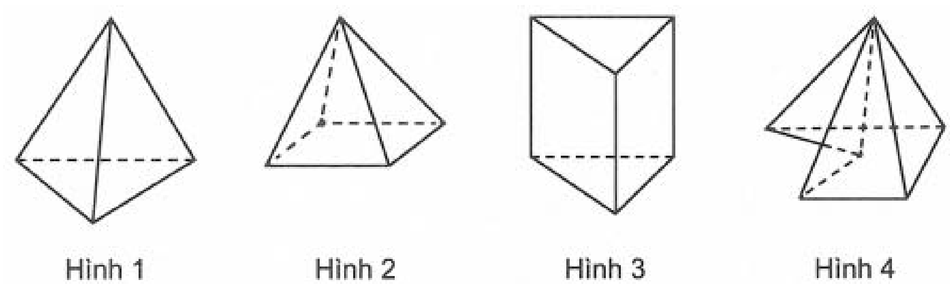
Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong các hình dưới đây hình nào không phải khối đa diện lồi?

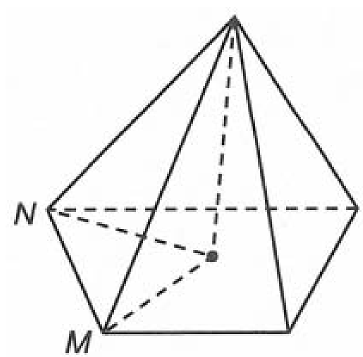


A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường nối đoạn *MN* không thuộc khối hình 4 nên hình 4 không phải khối đa diện lồi.



Bài tập 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình hộp là đa diện lồi.

B. Tứ diện là đa diện lồi.

C. Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép vào nhau là một hình đa diện lồi.

D. Hình lập phương là đa diện lồi.

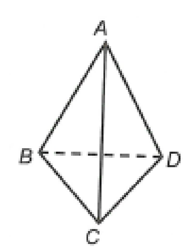
Hướng dẫn giải

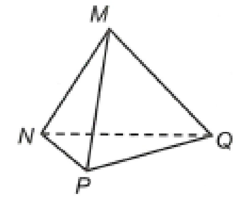
Chọn C.

Các đáp án **A, B, D** đều đúng dựa vào khái niệm hình đa diện lồi.

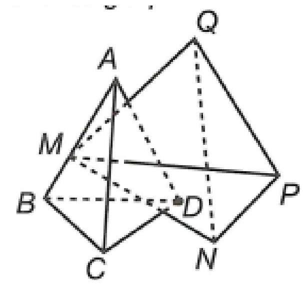
Hai tứ diện đều ghép vào nhau có thể không tạo thành một hình đa diện lồi.

Hai tứ diện (đều là các đa diện lồi) nhưng khi ghép với nhau có thể không tạo thành một hình đa diện lồi.





Hai tứ diện ABCD và MNPQ trước khi ghép.



Sau khi ghép hai tứ diện ABCD và MNPQ ta được hình mới không phải hình đa diện lồi.

Dạng 2: Các đặc điểm của khối đa diện đều

1. **Phương pháp giải**

Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là loại $\{3;3\},\{4;3\},\{3;4\},\{5;3\}$ và $\{3;5\}$.

Dựa vào bảng tóm tắt phần lý thuyết các thông số: Đỉnh cạnh mặt của các khối đa diện để giải toán.

Dựa vào tính chất phép biến hình để tìm mặt phẳng đối xứng, tâm đối xứng, trục đối xứng,… của các loại khối đa diện.

Công thức Ơ-le: Trong một đa diện lồi nếu gọi $Đ$ là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt thì ta có công thức $Đ - C + M = 2$.

2. **Bài tập**

Bài tập 1: Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu cạnh?

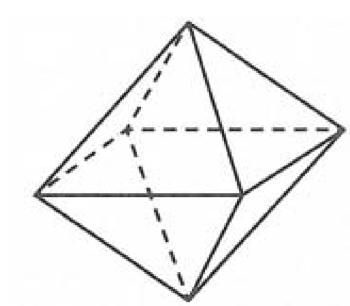
A. 6 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 20

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hình bát diện đều có 12 cạnh.

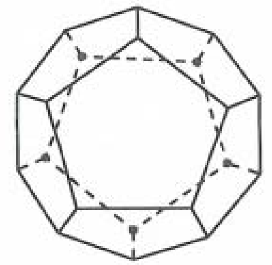
Hình bát diện đều



Bài tập 2: Khối mười hai mặt đều có bao nhiêu đỉnh?

Khối mười hai mặt đều

A. 12 **B.** 16 **C.** 20 **D.** 36



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Khối mười hai mặt đều có 20 đỉnh.

Bài tập 3: Cho khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng các góc phẳng tại một đỉnh của khối đa điện đó bằng

A. $180°$ **B.** $240°$ **C.** $324°$ **D.** $360°$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là khối bát diện đều. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt.

Vậy tổng các góc phẳng tại một đỉnh của khối đa diện đó bằng $60°.4 = 240°$.

Bài tập 4: Cho hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4a^2.$ **B.** $S = 6a^2.$ **C.** $S = 8a^2.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh a. Vậy hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 6a^2.$

Bài tập 5: Cho hình bát diện đều cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\sqrt{3}\,a^2.$ **B.** $S = \sqrt{3}\,a^2.$ **C.** $S = 2\sqrt{3}\,a^2.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hình bát diện đều là hình có tám mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều. Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh $a \longrightarrow S_0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Vậy diện tích S cần tính là $S = 8.S_0 = 8.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}\,a^2$.

Bài tập 6: Cho hình 20 mặt đều có cạnh bằng $2.$ Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 10\sqrt{3}.$ **B.** $S = 20\sqrt{3}.$ **C.** $S = 20.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hình 20 đều là hình có 20 mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều.

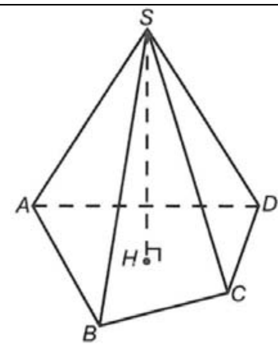
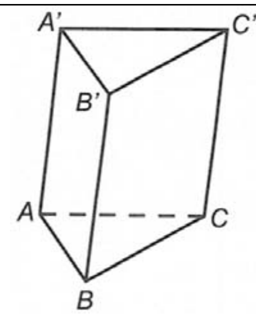
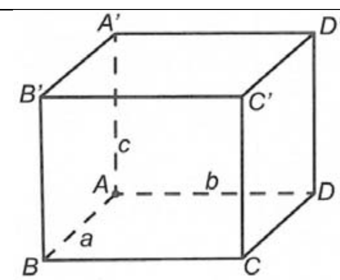
Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh bằng $2 \longrightarrow S_0 = \dfrac{2^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$

Vậy diện tích S cần tính là $S = 20.S_0 = 20\sqrt{3}$.

BÀI 3. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A. LÍ THUYẾT

Công thức tính thể tích khối chóp, lăng trụ

Thể tích khối chóp: $\boxed{V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h}$. Trong đó: $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy. *h*: Độ dài chiều cao khối chóp.	
Thể tích khối lăng trụ: $V = S_{đáy}.h$ Trong đó: $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy. *h*: Chiều cao của khối chóp.	
Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ Thể tích khối lập phương: $V = a^3$	***Chú ý:*** *Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.*
	***Chú ý:*** *+) Đường chéo của hình vuông cạnh a là:* $a\sqrt{2}$. *+) Đường chéo của hình lập phương cạnh a là:* $a\sqrt{3}$ *+) Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là:* $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. *+) Đường cao của tam giác đều cạnh a là:* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG CẦN NẮM

1. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Cho ΔABC vuông tại *A*, đường cao *AH*.

+) $AB^2 + AC^2 = BC^2$; +) $AC^2 = CH.BC$;

+) $AH.BC = AB.AC$; +) $AB^2 = BH.BC$;

+) $AH^2 = BH.HC$; +) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$;

+) $AB = BC.\sin C = BC.\cos B = AC.\tan C = AC.\cot B$.

b) Cho ΔABC có độ dài ba cạnh *a, b, c*; độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c ; bán kính đường tròn ngoại tiếp *R;* bán kính đường tròn nội tiếp *r,* nửa chu vi *p.*

+) Định lí hàm số cosin:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$;

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 = 2ab.\cos C$.

+) Định lí hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

+) Độ dài trung tuyến:

$m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$; $m_b^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$; $m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

2. Các công thức tính diện tích

a) Tam giác:

+) $S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c$

+) $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\text{ca}\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

+) $S = \dfrac{abc}{4R}$

+) $S = pr$ (*p*: nửa chu vi của tam giác).

+) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

+) ΔABC vuông tại *A*: $S = \dfrac{AB.AC}{2} = \dfrac{BC.AH}{2}$

+) ΔABC đều, cạnh *a*: $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Hình vuông: $S = a^2$ (a: cạnh hình vuông)

c) Hình chữ nhật: $S = ab$ (a, b: hai kích thước)

d) Hình bình hành:

$S =$ đáy $\times$ chiều cao $= AB.AD.\sin\widehat{BAD}$

e) Hình thoi: $S = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \frac{1}{2}AC.BD$

f) Hình thang: $S = \frac{1}{2}\left(a+b\right)h$ (a, b: hai đáy, h: chiều cao)

g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2}AC.BD$

NHẮC LẠI CÁCH XÁC ĐỊNH CAC GÓC TRONG KHÔNG GIAN

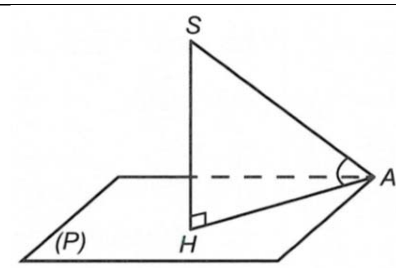
<table>
<tr><td>

Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy

Để tính góc $\left(\widehat{SA,(P)}\right)$, ta gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (P). Khi đó HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (P).

Vậy $\left(\widehat{SA,(P)}\right) = \left(\widehat{SA,AH}\right) = \widehat{SAH}$.

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Góc giữa cạnh bên và mặt đứng

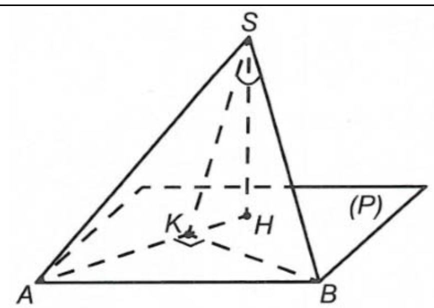
Để tính góc $\left(\widehat{SB,(SAH)}\right)$ biết $(SAH) \perp (P)$ ta dựng $BK \perp AH\left(K \in AH\right)$. Vì $\begin{cases} BK \perp AH \\ BK \perp SH \end{cases}$ nên $BK \perp (SAH)$

Khi đó K là hình chiếu vuông góc của B trên (SAH)

$\Rightarrow$ SK là hình chiếu vuông góc của SB trên (SAH)

Vậy $\left(\widehat{SB,(SAH)}\right) = \left(\widehat{SB,SK}\right) = \widehat{BSK}$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến.

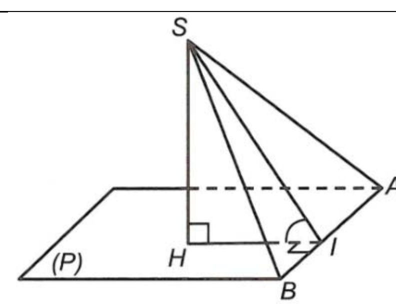
</td><td></td></tr>
<tr><td>

Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy

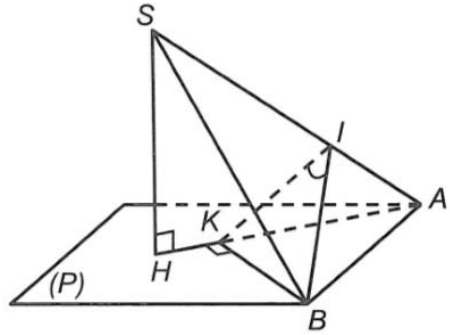
Để tính góc $\left(\widehat{(SAB),(P)}\right)$, ta gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (P).

Kẻ $HI \perp AB\left(I \in AB\right)$

</td><td>



</td></tr>
</table>

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow AB \perp SI$ Vậy $\widehat{((SAB),(P))} = \widehat{(SI,HI)} = \widehat{SIH}$.	
Góc giữa mặt bên và mặt đứng Để tính góc $\widehat{((SAB),(SAH))}$ biết $(SAH) \perp (P)$, ta kẻ $BK \perp HA (K \in HA) \Rightarrow \begin{cases} BK \perp HA \\ BK \perp SH \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SHA)$. Kẻ $KI \perp SA (I \in SA)$ $\Rightarrow \begin{cases} SA \perp KI \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BKI) \Rightarrow SA \perp BI$ Vậy $\widehat{((SAB),(SAH))} = \widehat{(KI,BI)} = \widehat{BIK}$.	

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

MÔ HÌNH 1

Hình chóp $S.ABC$, cạnh SA vuông góc với đáy.

+ Đáy là tam giác *ABC*.

+ Đường cao *SA*.

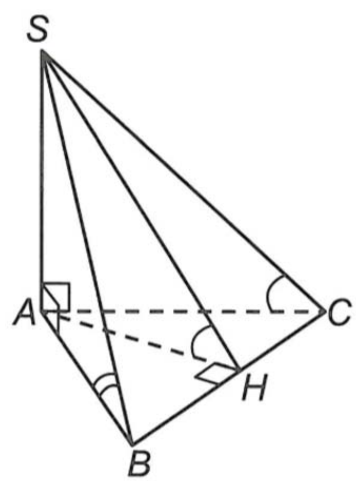
+ Cạnh bên *SB, SC, SA*.

+ ΔSAB, ΔSAC là các tam giác vuông tại *A*.

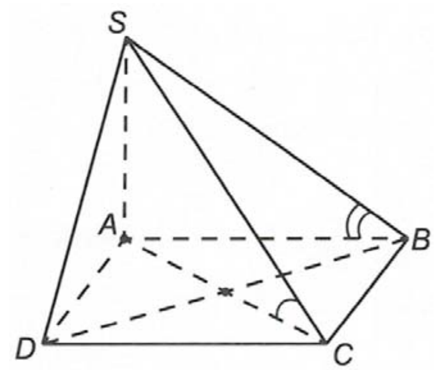
+ Góc giữa cạnh *SB* với đáy *ABC* là góc $\widehat{SBA}$.

+ Góc giữa cạnh *SC* với đáy *ABC* là góc $\widehat{SCA}$.

+ Góc giữa mặt bên *SBC* với đáy là góc $\widehat{SHA}$ với *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *BC*.



MÔ HÌNH 2



Hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (hình vuông) và SA vuông góc với đáy.

+ Đáy là hình chữ nhật (hình vuông) $ABCD$.

+ Đường cao SA.

+ Cạnh bên SA, SB, SC, SD.

+ ΔSAB, ΔSAC, ΔSAD là các tam giác vuông tại A.

+ Góc giữa cạnh SB với đáy $ABCD$ là $\widehat{SBA}$.

+ Góc giữa cạnh SC với đáy $ABCD$ là $\widehat{SCA}$.

+ Góc giữa cạnh SD với đáy $ABCD$ là $\widehat{SDA}$.

+ Góc giữa mặt bên SBC với đáy $ABCD$ là $\widehat{SBA}$

+ Góc giữa mặt bên SCD với đáy $ABCD$ là $\widehat{SDA}$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Diện tích tam giác SBC bằng $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Chọn C.

Đặt cạnh hình vuông là $x > 0$.

Suy ra $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Dễ thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ nên ta có $\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}SB.BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2}.x \longrightarrow x = a.$

Vậy thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3}{3}$.

Bài tập 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải.

Chọn C.

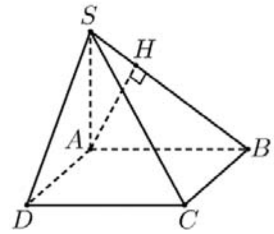
Gọi H là hình chiếu của A trên SB.

Dễ dang chứng minh được

$$AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A,(SBC)] = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \longrightarrow SA = a.$

Vậy thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{a^3}{3}.$



Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60°$ cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng $45°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có ΔABC vuông tại B nên

$BC = AB.\cot\widehat{ACB} = a.\cot 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

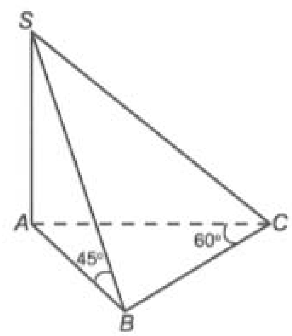
Ta có AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC)

$\Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB,AB}\right) = \widehat{SBA} = 45°$

ΔSAB vuông tại A nên

$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = AB.\tan 45° = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}\frac{a^2.\sqrt{3}}{6}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

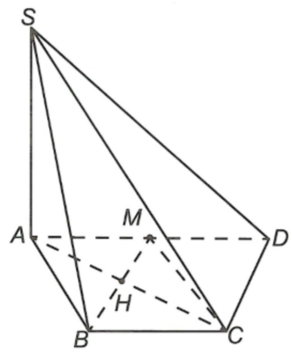


Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $(AD \parallel BC)$, cạnh $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy góc $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi M là trung điểm AD. Ta chia hình thang cân $ABCD$ thành ba tam giác ABM, BCM, CDM, ba tam giác này là các tam giác đều cạnh a.

Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Lại có AH là đường cao trong tam giác đều ABM nên $AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AH = a\sqrt{3}$.

ΔSAC vuông tại A nên

$SA = AC.\tan\widehat{SCA} = AC.\tan 60^\circ = 3a$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2.\sqrt{3}}{4}.3a = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Nhận xét: *Việc chia nhỏ hình thang cân ABCD thành ba tam giác đều sẽ giúp ta thuận tiện trong việc tính diện tích đáy.*

Chú ý: *Nếu ABC là tam giác đều thì* $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi $AC = 2a$, $BD = 3a$, $AC \perp BD$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{2a^3}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{a^3}{4}$ **D.** $\dfrac{a^3}{12}$

Hướng dẫn giải

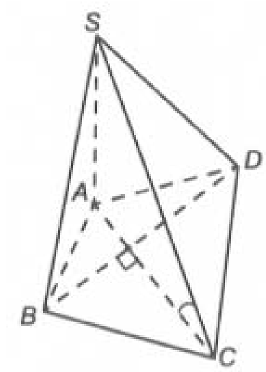
Chọn A.

Ta có $AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD}{2} = 3a^2$.

Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$ nên $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA} = \alpha$

$\Rightarrow SA = AC.\tan\alpha = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{S.ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}3a^2.\dfrac{2a}{3} = \dfrac{2a^3}{3}$.

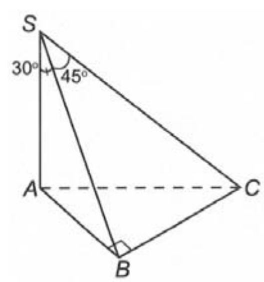


Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $SB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BSC} = 45°$, $\widehat{ASB} = 30°$. Thể tích khối chóp $SABC$ là *V*. Tỉ số $\dfrac{a^3}{V}$ là

A. $\dfrac{8}{3}$ **B.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

Mà $\begin{cases} (SBC) \perp (SAB), (ABC) \perp (SAB) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \Delta ABC, \Delta SBC$ là các tam giác vuông tại *B*.

Xét ΔSAB vuông tại *A* có: $AB = SB.\sin\widehat{ASB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = SB.\cos\widehat{ASB} = \dfrac{3a}{2}$

Xét ΔSBC vuông tại *B* có: $BC = SB.\tan\widehat{BSC} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^2}{4}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2}{4}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3}{8} \Rightarrow \dfrac{a^3}{V} = \dfrac{8}{3}$

Tổng quát:

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA *vuông góc với mặt phẳng* (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) *vuông góc với nhau,* $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{ASB} = \beta$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ *là:* $V_{S.ABC} = \dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$

Chứng minh:

Xét ΔSAB *vuông tại A có:* $AB = SB.\sin\alpha$ *;* $SA = SB.\cos\alpha$

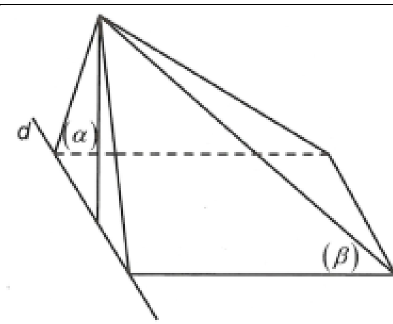
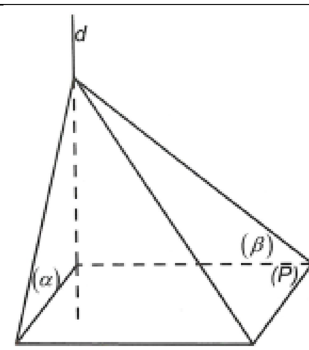
Xét ΔSBC *vuông tại B có:* $BC = SB.\tan\beta$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}.SB^2.\sin\alpha.\tan\beta$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{SB^2\sin\alpha\tan\beta SB\cos\alpha}{6} = \dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\alpha}{12}$

Dạng 2. Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì chân đường cao nằm trên giao tuyến của mặt phẳng đó và đáy. Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\perp(\beta)\\(\alpha)\cap(\beta)=d\\a\subset(\alpha)\\a\perp d\end{cases}\Rightarrow a\perp(\beta)$.	
Hình chóp có hai mặt vuông góc với đáy thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với đáy. Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\perp(P)\\(\beta)\perp(P)\\(\alpha)\cap(\beta)=d\end{cases}\Rightarrow d\perp(P)$.	

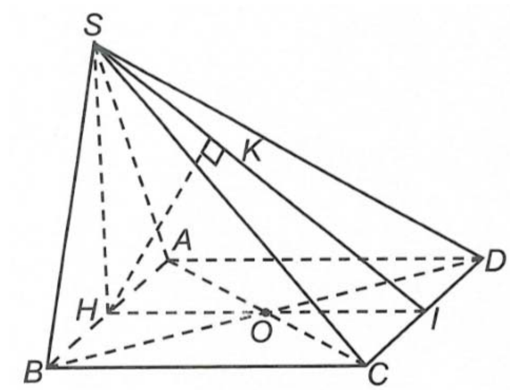
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách giữa AB và SC bằng $\dfrac{3a}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = a^3\sqrt{3}$ **B.** $V = 2a^3\sqrt{3}$ **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V = 3a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi *H, I* lần lượt là trung điểm của *AB, CD,* kẻ $HK \perp SI$.

Vì tam giác *SAB* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy

Suy ra $SH \perp \left(ABCD \right)$.

$$\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp \left(SIH \right) \Rightarrow CD \perp HK \Rightarrow HK \perp \left(SCD \right)$$

$$CD \,//\, AB \Rightarrow d\left(AB, SC \right) = d\left(AB, \left(SCD \right) \right) = d\left(H, \left(SCD \right) \right) = HK$$

Suy ra $HK = \dfrac{3a}{2}; HI = AD = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông *SHI* ta có $SH = \sqrt{\dfrac{HI^2.HK^2}{HI^2 - HK^2}} = 3a$

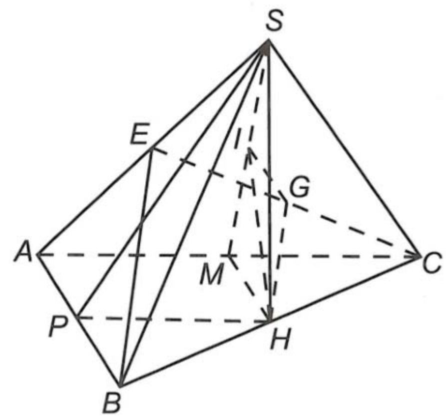
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} 3a.a^2\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, $AB = A\sqrt{2}$, $AC = A\sqrt{5}$. Hình chiếu của điểm *S* trên mặt phẳng $\left(ABC \right)$ trùng với trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Biết rằng góc giữa mặt phẳng $\left(SAB \right)$ và mặt phẳng $\left(SAC \right)$ bằng $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{5a^3\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\dfrac{5a^3\sqrt{10}}{12}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{210}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có $(SAB)\cap(SAC)=SA$, kẻ $BE\perp SA$ và $GH\ //\ BE$,

Suy ra $\left(\widehat{(SAC),(SAB)}\right)=\left(\widehat{GH,(SAC)}\right)=\widehat{HGI}=60^\circ$.

Đặt $SH=h$, ta tính được $SA=\sqrt{h^2+\frac{7a^2}{4}}$ và $SP=\sqrt{h^2+\frac{5a^2}{4}}$.

Vậy $BE=\frac{2S_{SAB}}{SA}=\frac{a\sqrt{2}.\sqrt{h^2+\frac{5a^2}{4}}}{\sqrt{h^2+\frac{7a^2}{4}}}\Rightarrow HG=\frac{BE}{2},\ HI=\frac{SH.HM}{SM}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.h}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}}$

Tam giác GIH vuông tại I có

$$\frac{IH}{HG}=\sin 60^\circ\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{h^2+\frac{5a^2}{4}}}{\sqrt{h^2+\frac{7a^2}{4}}}=\frac{h.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}}$$

$$\Rightarrow h^4+\frac{7a^2}{4}h^2-\frac{15a^4}{8}=0\Rightarrow h=\frac{2a\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $V_{SABC}=\frac{1}{6}AB.AC.SH=\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAC) vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác *SAB, SBC, SAC* lần lượt là 20 cm^2, 27 cm^2, 30 cm^2. Thể tích khối chóp $SABC$ là

A. $40\sqrt{3}\text{ cm}^3$ **B.** 40 cm^3 **C.** 60 cm^3 **D.** $60\sqrt{3}\text{ cm}^3$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAC) vuông góc với nhau từng đôi một nên $SA \perp SB$, $SA \perp SC$, $SB \perp SC$.

$S_{SAB} = 20 \text{ cm}^2 \Rightarrow SA.SB = 40 \text{ cm}^2$

$S_{SBC} = 27 \text{ cm}^2 \Rightarrow SB.SC = 54 \text{ cm}^2$

$S_{SAC} = 30 \text{ cm}^2 \Rightarrow SA.SC = 60 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow (SA.SB.SC)^2 = 40.54.60 = 129600 \Rightarrow SA.SB.SC = 360$

Do $(SAB),(SBC),(SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một $\Rightarrow AS \perp (SBC)$.

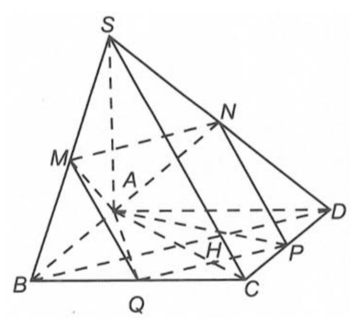
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{6}SA.SB.SC = 60 \text{ cm}^3$.

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh *a*, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, biết $SC = a\sqrt{3}$. Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của *SB, SD, CD, BC.* Thể tích của khối chóp $A.MNPQ$ là

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3}{12}$ **D.** $\frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $\begin{cases} MN // PQ \\ MN = PQ \\ NP \perp PQ(BD \perp SC) \end{cases}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật.

Suy ra $V_{A.MNPQ} = 2V_{A.MQP} = 2V_{M.AQP}$

Ta có $d(M;(AQP)) = \frac{1}{2}SA$

Mà $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a \Rightarrow d(M;(AQP)) = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$

$S_{\Delta AQP} = \frac{1}{2}AH.QP = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}AC.\frac{1}{2}BD = \frac{3}{16}AC.BD = \frac{3}{16}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3}{8}a^2$

Do đó: $V_{M.AQP} = \frac{1}{3}d(M;(AQP)).S_{\Delta AQP} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{3}{8}a^2 = \frac{a^3}{16}$

Vậy $V_{A.MNPQ} = 2V_{M.AQP} = 2.\frac{a^3}{16} = \frac{a^3}{8}$

Dạng 3. Thể tích khối chóp đều

1. Phương pháp

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Trong hình chóp đều:

+) Đáy là một đa giác đều

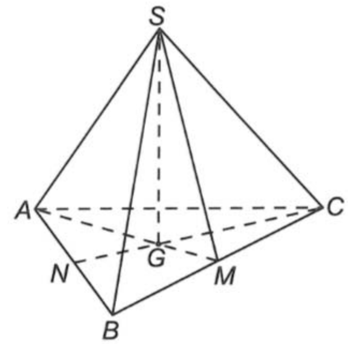
+) Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.

+) Các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau .

Đường cao vẽ từ đỉnh của một mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp đều.

+) Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau

+) Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.



Chú ý:

+) Phân biệt hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều. Hình chóp tam giác đều là hình chóp có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Nói một cách khác, hình chóp tam giác đều là ***hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại không đúng.***

+) Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

2. Bài tập

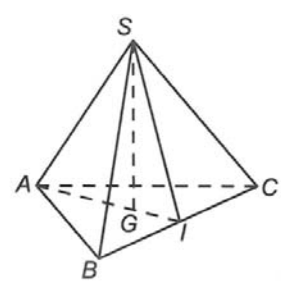
Bài tập 1. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng *a* và cạnh bên bằng *2a.* Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V=\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$ **B.** $V=\frac{\sqrt{13}a^3}{12}$ **C.** $V=\frac{\sqrt{11}a^3}{6}$ **D.** $V=\frac{\sqrt{11}a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và G là trọng tâm tam giác *ABC*. Khi đó $SG\perp(ABC)$. Do đáy là tam giác đều nên gọi *I* là trung điểm cạnh *BC,* khi đó *AI* là đường cao của tam giác đáy.



Theo định lý Pi-ta-go ta có

$AI=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, và $AG=\frac{2}{3}AI=\frac{2a\sqrt{3}}{3.2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác *SGA* vuông tại *G* ta có $SG=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}$.

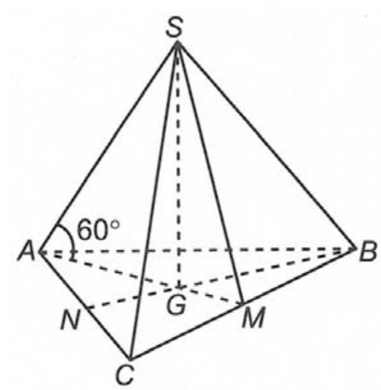
Vậy $V=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$

Bài tập 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng *a*, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $V=\frac{a^3.\sqrt{5}}{12}$ **D.** $V=\frac{a^3.\sqrt{3}}{10}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Khi đó $SG\perp(ABC)$.

Vì *G* là trọng tâm tam giác *ABC* nên

$AG=\frac{2}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác *SAG* vuông tại *G* có

$SG=AG.\tan 60°=a$

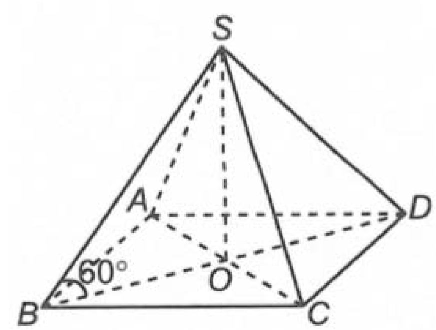
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SG.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Bài tập 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng *a* và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $S_{ABCD}=a^2$.

Gọi $O=AC\cap BD$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $\left(\widehat{SB,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SB,OB}\right)=\widehat{SBO}$.

Tam giác *SOB* vuông tại *O,* có

$SO=OB.\tan\widehat{SBO}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60°=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

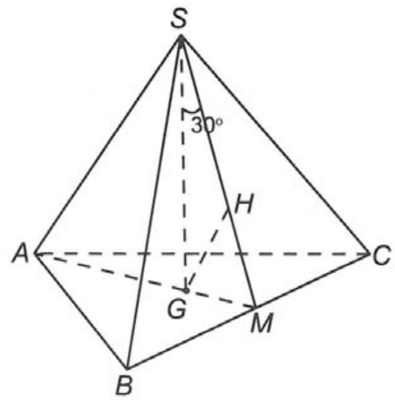
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Bài tập 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hạ $GH \perp SM\,(H \in SM) \Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow \left(\widehat{SG,(SBC)}\right) = \widehat{GSM} = 30°$.

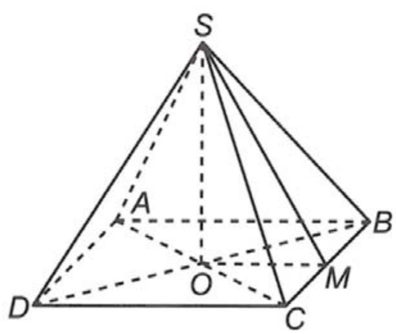
$SG = GM.\cot\widehat{GSM} = \frac{1}{3}.AM.\cot 30° = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SG = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Bài tập 5. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, đường cao của một mặt bên là $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối chóp đó là

A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$ **B.** $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$ **C.** $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ **D.** $V = \frac{\sqrt{2}}{9}a^3$

Hướng dẫn giải

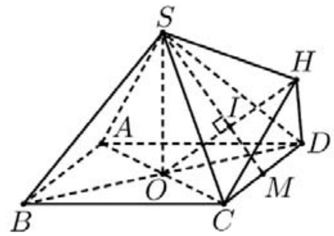


Ta có $SM = a\sqrt{3}$. Do ΔSBC đều nên $SC = BC = 2a$.

$\Rightarrow SO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp đó là $V=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{2}.4a^2=\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Bài tập 6. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a. Cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CD, H là điểm đối xứng của O qua SM (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối đa diện $ABCDSH$ bằng



A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{18}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{24}$. **D.** $\frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.

Lời giải.

Chọn D.

Khối đa diện $ABCDSH$ được chia thành hai khối chóp $S.ABCD$ và $H.SCD$.

• $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}S_{ABCD}.\sqrt{SB^2-OB^2}=\frac{a^3\sqrt{10}}{6}$.

• Vì H đối xứng với O qua SM nên $d[O,(SCD)]=d[H,(SCD)]$.

Suy ra $V_{HSCD}=V_{OSCD}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{10}}{24}$.

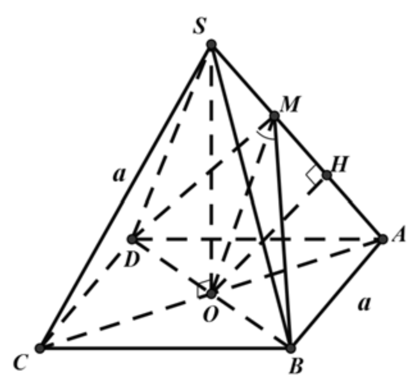
Vậy thể tích khối đa diện cần tính: $V=V_{S.ABCD}+V_{H.SCD}=\frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Cho điểm $M\in SA$ sao cho diện tích S của ΔMBD nhỏ nhất. Giá trị S bằng

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi S là diện tích ΔMBD

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}BD.MO=\frac{1}{2}a\sqrt{2}.MO \quad (1)$

$\Rightarrow \min S$ xảy ra $\Leftrightarrow \min MO$ xảy ra

Nhưng $\min MO=d[O,SA]=OH$

Vì tứ diện đều nên $O=AB\cap CD$ thì SO là đường cao.

$\Rightarrow \Delta SOA$ vuông tại O $\quad (2)$

Trong đó:

$$\begin{cases} OA=\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}\Delta SOA$ vuông cân tại $O\Rightarrow OH=OA.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{2}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}\min S=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{4}$ xảy ra khi H là trung điểm SA.

Dạng 4. Thể tích khối chóp biết trước một đường thẳng vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

Việc tính *SH* ta thường dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Đề bài thường cho mối quan hệ về góc giữa đường thẳng với mặt phẳng hoặc góc giữa hai mặt phẳng xác định độ dài đường cao.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại *A*, cạnh $BC=2a$, gọi *M* là trung điểm *BC,* hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của *AM*, tam giác *SAM* vuông tại *S*. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

Chú ý:

Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

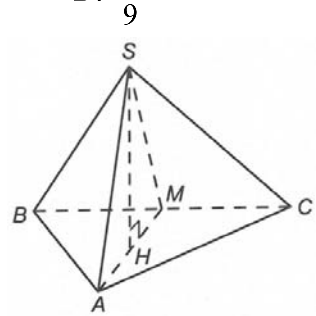
A. $\frac{a^3}{6}$ **B.** $\frac{a^3}{2}$ **C.** $\frac{a^3}{3}$ **D.** $\frac{a^3}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có ΔABC vuông cân tại *A*, $BC=2a$

$\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}=a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AM.BC=a^2$



Xét ΔSAM vuông tại S có: $SH = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{a}{2}$

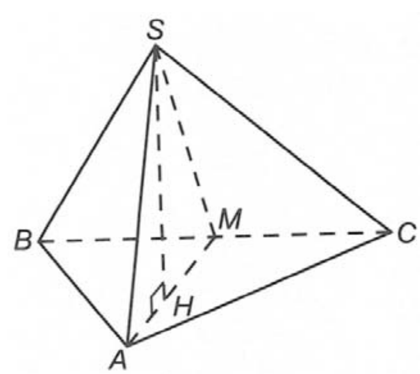
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{6}$

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = 19$ cm, $BC = 20$ cm, $AC = 37$ cm, cạnh bên SA=$\sqrt{985}$ cm. Gọi M là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AM}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. 570cm^3 **B.** 760cm^3 **C.** 1520cm^3 **D.** 1140cm^3

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 38$ cm.

$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{38(38-19)(38-20)(38-37)} = 114\text{ cm}^2$.

$AM = \sqrt{\dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}} = 3\sqrt{85}$ cm

$\Rightarrow AH = \dfrac{1}{3}AM = \sqrt{85}$ cm

ΔSAH vuông tại H có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 30$ cm

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.114.30 = 1140\text{ cm}^3$

Chú ý:

Khi biết độ dài ba cạnh thì diện tích tam giác được tính theo công thức Hê-rông.

Tam giác ABC có:

$BC = a; AC = b; AB = c$

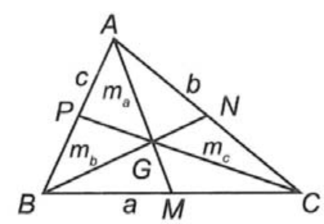
Nửa chu vi: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Khi đó:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

.

Công thức độ dài trung tuyến:



$m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

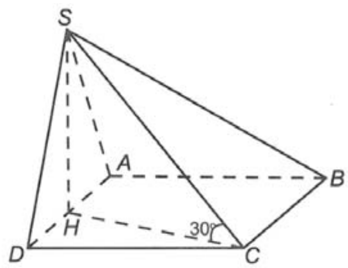
$m_b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$.

$m_c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD. Cạnh SC tạo với đáy một góc bằng $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải



Chọn B.

Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$.

Do HC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCH} = 30°$

+ Xét tam giác DHC vuông tại D có:

$HC = \sqrt{DH^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$

+ Xét tam giác SHC vuông tại H có:

$SH = HC.\tan\widehat{SCH} = HC.\tan 30° = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.2a^2.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$.

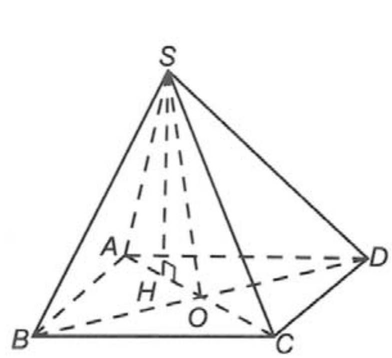
Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, cạnh $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, tam giác SAC vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn AO. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{4}$ **C.** $\frac{a^3}{6}$ **D.** $\frac{a^3}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Xét ΔABC vuông tại B có:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

Xét ΔSAC vuông tại S có:

$SO = AO = \frac{AC}{2} = a \Rightarrow HO = \frac{AO}{2} = \frac{a}{2}$

Xét ΔSHO vuông tại H có:

$SH = \sqrt{SO^2 - HO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAC} = 60°$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\widehat{BAC} = 60°$ nên tam giác ABC đều

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Gọi $O = AC \cap BD$

Ta có $AC \perp BD, AC \perp SG$

$\Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO$

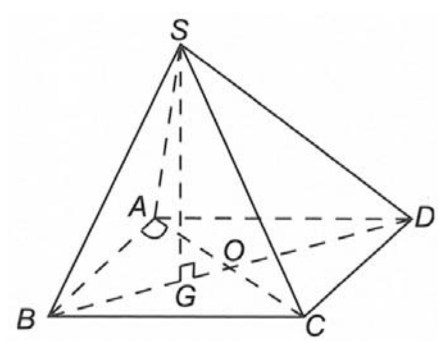
Mặt khác $OB \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{((SAC),(ABCD))} = \widehat{SOB} = 45°$

Xét tam giác SOG vuông tại G:

$SG = OG.\tan\widehat{SOB} = OG.\tan 45° = \frac{1}{3}BO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SG.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{12}$.



Dạng 5. Thể tích khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên, mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau

1. Phương pháp

- Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc cạnh bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC có $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 14$ cm, các mặt bên đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.

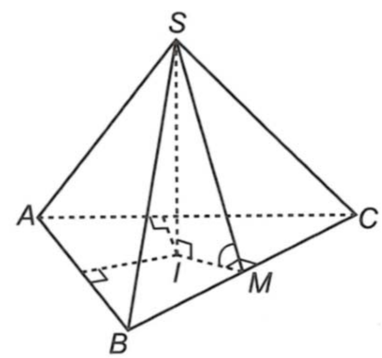
- Hình chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm đường tròn nội tiếp mặt đáy.

cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và đều bằng α thỏa mãn $\tan\alpha = 3$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. 228 cm^3 **B.** 576 cm^3

C. 192 cm^3 **D.** 384 cm^3

Hướng dẫn giải



Ta có $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 18(\text{cm})$

$S = \sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)} = 24\sqrt{6}\left(\text{cm}^2\right)$

Các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau nên hình chiếu của *S* trên (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow SI \perp (ABC)$.

$S = p.r \Rightarrow IM = r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}(\text{cm})$

ΔSIM vuông tại *I* có

$SI = IM.\tan\widehat{SMI} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}.3 = 4\sqrt{6}(\text{cm})$.

Vậy

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABBC}.SI = \dfrac{1}{3}.24\sqrt{6}.4\sqrt{6} = 192\left(\text{cm}^3\right)$

Chọn C.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng *a*, các cạnh bên bằng nhau và đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$

Các cạnh bên bằng nhau nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do ΔABC đều nên

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

ΔABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

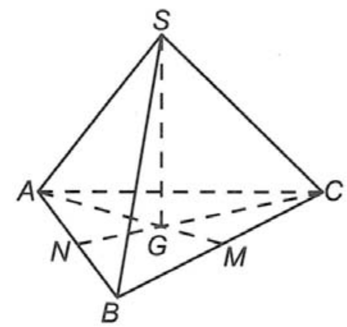
ΔSGA vuông tại G có

$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SG = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{2a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trọng tâm G

$\Rightarrow SG \perp (ABC)$



Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3}{4}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{a^3}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc $30°$ nên hình chiếu O của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow SO \perp (ABC)$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SA),(ABC)}\right) = \widehat{SAO} = 30°$

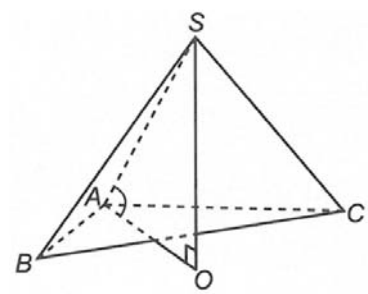
ΔABC có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC}} = a\sqrt{3}$

$S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow \dfrac{a.a.a\sqrt{3}}{4.OA} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow OA = a$

ΔSAO có $SO = AO.\tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

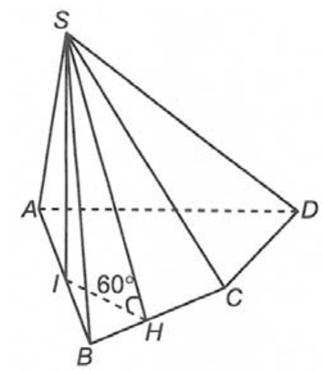
Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3}{12}$

Cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc $30°$ nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



$\left(\widehat{(SA),(ABC)}\right) = \widehat{SAO} = 30°$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD), (SDA) với mặt đáy lần lượt là $90°$, $60°$, $60°$, $60°$. Biết rằng tam giác SAB vuông cân tại S, $AB = a$ và chu vi tứ giác $ABCD$ là $9a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.



A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

C. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $V = a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm AB.

Kẻ $IH \perp BC(H \in BC)$, ta có góc giữa $\widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SHI}$

Do các mặt (SBC), (SCD), (SDA) tạo với $(ABCD)$ các góc bằng nhau và bằng $60°$ nên các khoảng cách từ I đến các cạnh CD, DA bằng nhau và bằng IH.

Ta có $SI = IH.\tan 60° \Rightarrow IH = \dfrac{SI}{\tan 60°} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(BC + CD + DA).HI = \dfrac{1}{2}(9a - AB).\dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2a^2\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\dfrac{2a^2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Kẻ $IH \perp BC$ ta có $\widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SHI}$.

Do các mặt (SBC), (SCD), (SDA) tạo với $(ABCD)$ các góc bằng nhau nên các khoảng cách từ I đến các cạnh CD, DA bằng nhau từ đó tính được $SI = IH.\tan\widehat{SIH}$

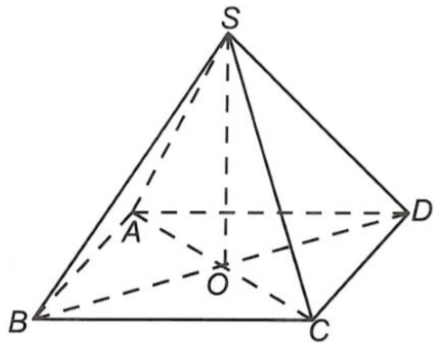
Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Đỉnh S cách đều các đỉnh A, B, C, D, của mặt đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{8}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Đỉnh S cách đều các đỉnh A, B, C, D nên tâm hình chữ nhật là chân đường cao hạ từ đỉnh xuống đáy.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$.

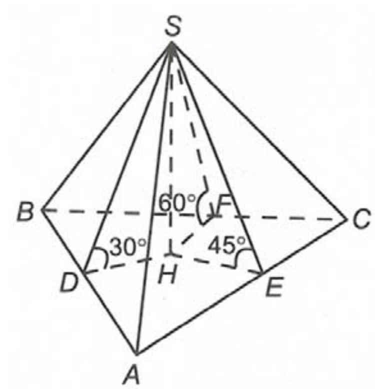
$AC \cap DB = \{O\}$. Do S các đều các đỉnh $A, B, C, D \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow SB = SD = BD = a\sqrt{5}$ nên ΔSBD là tam giác đều $\Rightarrow SO = \frac{BD\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh *a*. Các mặt bên (SAB), (SAC), (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc là $30°$, $45°$, $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của *S* trên (ABC) nằm trong tam giác *ABC*.



A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng (ABC).

Kẻ $HD \perp AB(D \in AB)$, $HE \perp AC(E \in AC)$, $HF \perp BC(F \in BC)$.

Ta có $HD = SH.\cot 30° = \sqrt{3}SH$, $HE = SH.\cot 45° = SH$,

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).

Kẻ $HD \perp AB(D \in AB)$

$HE \perp AC(E \in AC)$

$HF \perp BC(F \in BC)$

$HF = SH.\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}SH$

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ mà $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HAC}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}SH\left(1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right).a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SH = \frac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$

Tam giác ABC bị chia thành 3 tam giác nhỏ do đó $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HAC}$.

Diện tích các tam giác nhỏ biểu diễn theo cạnh SH và hệ thức lượng các tam giác vuông. Từ đó tìm được SH.

Dạng 6. Thể tích lăng trụ đứng

1. Phương pháp

Hình lăng trụ đứng: Là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Các mặt bên là các hình chữ nhật. Các mặt bên đều vuông góc với đáy.

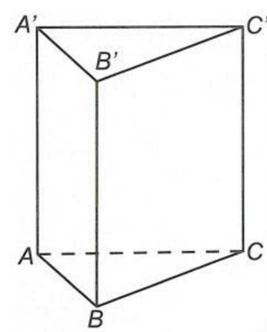
Hình lăng trụ đều: Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Các mặt bên đều là các hình chữ nhật bằng nhau.

Ví dụ: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải



Ta có ΔABC đều cạnh a $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn B.

2. Bài tập

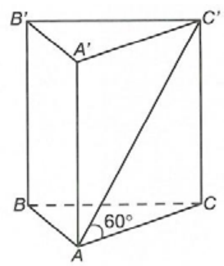
Bài tập 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB=a,\widehat{ABC}=30^\circ$ cạnh $C'A$ hợp với mặt đáy góc 60°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



ΔABC vuông tại A có $AC=AB.\tan\widehat{ABC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $\left(\widehat{C'A\left(ABC\right)}\right)=\widehat{C'AC}=60^\circ$.

$\Delta ACC'$ vuông tại C có $CC'=AC.\tan\widehat{C'AC}=a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.CC'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}.a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

ΔABC vuông tại A có:

$AC=AB.\tan\widehat{ABC}$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.$

Ta có $\left(\widehat{C'A\left(ABC\right)}\right)=\widehat{C'AC}$

$=60^\circ$

từ đó dựa vào hệ thức lương trong $\Delta ACC'$ vuông tại C tính được

$CC'=AC.\tan\widehat{C'AC}.$

Bài tập 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AC=a,\widehat{ABC}=30^\circ$, cạnh BC' hợp với mặt bên $\left(ACC'A\right)$ góc 30°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

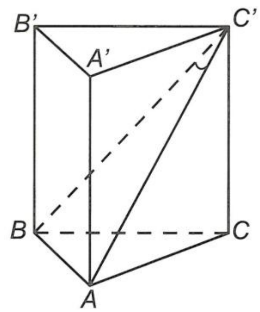
C. $2a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

ΔABC vuông tại A có:

$AB=AC.\cot\widehat{ABC}$



$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC$

dựa vào hệ thức lượng trong ΔABC vuông tại A tính được $AC' = AB.\cot \widehat{AC'B}$.

$\Delta ACC'$ vuông tại C tính được chiếu cao lăng trụ $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2}$

Ta có $BA \perp (ACC'A') \Rightarrow \left(\widehat{BC', (ACC'A')}\right) = \widehat{BC'A} = 30°$.

ΔABC vuông tại A có $AB = AC.\cot \widehat{ABC} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$\Delta ABC'$ vuông tại A có

$AC' = AB.\cot \widehat{AC'B} = a\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3a$.

$\Delta ACC'$ vuông tại C có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.CC' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a\sqrt{2} = a^3\sqrt{6}$.

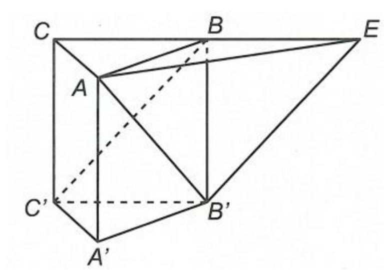
Bài tập 3: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $V = \frac{7a^3}{8}$. **B.** $V = a^3\sqrt{6}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi E là điểm đối xứng của C qua điểm $B \Rightarrow AB = \frac{1}{2} CE = a$.

Khi đó tam giác ACE vuông tại $A \Rightarrow AE = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Tứ giác $BC'B'E$ là hình bình hành $\Rightarrow BC' // B'E$.

Do $AB' \perp BC' \Rightarrow AB' \perp B'E$.

Ta lấy điểm E là điểm đối xứng với C qua B.

Khi đó tam giác ACE vuông tại A.

Tứ giác $BC'B'E$ là hình bình hành $\Rightarrow BC' // B'E$.

Do $AB' \perp BC'$

$\Rightarrow AB' \perp B'E$.

Ta có $BC' = B'E = AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B'.

Nên tính được $AB' = \frac{AE}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác, ta có $BC' = B'E = AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B'

$\Rightarrow AB' = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét tam giác $AA'B'$ vuông tại A'

$\Rightarrow AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Dựa vào định lý Py-ta-go trong tam giác $AA'B'$ vuông tại A tính được

$AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2}$.

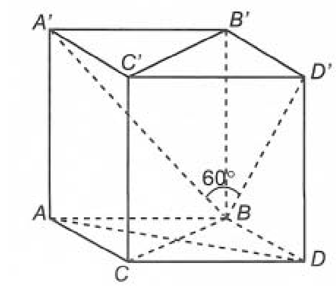
Bài tập 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại *A,* cạnh $BC = a\sqrt{2}$, góc giữa hai đường thẳng AC' và BA' bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Lấy D, D' sao cho $ABDC.A'B'D'C$ là hình hộp

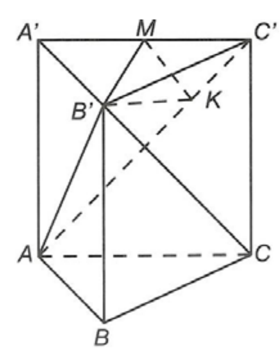
$\Rightarrow BD'//AC' \Rightarrow \widehat{A'BD'} = \left(\widehat{AC', BA'}\right) = 60°$

Mà $AB = AC \Rightarrow A'B = BD' \Rightarrow \Delta A'BD'$ đều.

Do $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật, $A'D' = B'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow A'B = a\sqrt{2} = AA' = a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{a^3}{2}$.

Bài tập 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng $60°$. Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ bằng



A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi M là trung điểm của $A'C'$. Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $B'M \perp A'C' \Rightarrow MB' \perp (AA'C'C)$.

Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ là $V_{B'.ACC'A'} = \frac{1}{3}B'M.AA'.AC$.

Ta có $B'M = \frac{a\sqrt{2}}{2}, AC = a\sqrt{2}$.

Do $MB' \perp (AA'C'C) \Rightarrow MB' \perp AC'$.

Kẻ $MK \perp AC' \Rightarrow B'K \perp AC'$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ là $\widehat{MKB'} \Rightarrow \widehat{MKB'} = 60°$.

Trong tam giác vông MKB' ta có $\tan 60° = \frac{MB'}{MK} \Rightarrow MK = \frac{MB'}{\tan 60°} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Trong tam giác vuông MKC' ta có

$$\tan\widehat{MC'K} = \frac{MK}{\sqrt{MC^2 - MK^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{6a^2}{36}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mặt khác trong tam giác vuông $AA'C$ ta có

$$AA' = A'C'.\tan\widehat{MC'K} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = a$$

Vậy $V_{B'.AA'C'C} = \frac{1}{3}B'M.AA'.AC = \frac{1}{3}a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^3}{3}$.

Gọi M là trung điểm của $A'C'$.

Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $B'M \perp A'C'$ $\Rightarrow MB' \perp (AA'C'C)$.

Dạng 7. Thể tích lăng trụ xiên

1. Phương pháp

Lăng tru xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy. Chiều cao là khoảng cách từ một đỉnh bất kì của mặt đáy này đến mặt đáy đối diện. Để tính chiều cao ta dựa vào hệ thức lượng trong tam giác.

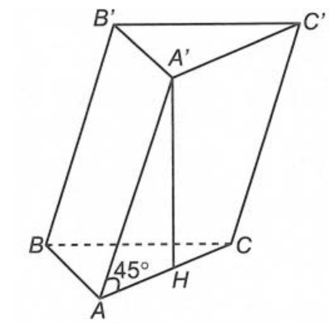
Ví dụ: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tam giac ABC vuông cân tại A, cạnh $AA' = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trong điểm của AC, góc tạo bởi AA' với (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$;

$\widehat{(AA',(ABC))} = \widehat{A'AH} = 45°$.

Xét tam giác $A'HA$ vuoong cân tại H có

$A'H = AA'.\sin\widehat{A'AH} = a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$,

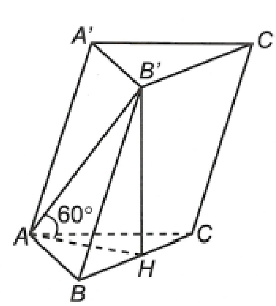
$\Rightarrow AH = AH' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AB = AC = 2AH = a\sqrt{6}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = 3a^2$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = 3a^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đây là tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với chân đường cao H kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC, góc tạo bởi AB' với (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là



A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3}{3}$. D. a^3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}a.a\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $B'H\perp(ABC)$

$\Rightarrow\widehat{\left(AB',(ABC)\right)}=\widehat{B'AH}=60°$

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$AH=\frac{AB.AC}{BC}=\frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác AHB' vuông tại H có

$B'H=AH.\tan\widehat{B'AH}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.\tan 60°=a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.B'H=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}=a^3$

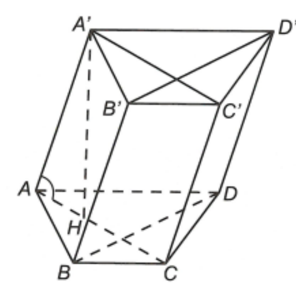
Ta có $\widehat{\left(AB',(ABC)\right)}=\widehat{B'AH}$

$=60°$

Tam giác ABC vuông tại A có nên: $AH=\frac{AB.AC}{BC}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AHB' vuông tại H ta tính được chiều cao: $B'H=AH.\tan\widehat{B'AH}$

Bài tập 2. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình thang cân $ABCD$ có $AC\perp BD, AC=2a$, cạnh AA' tạo với mặt phẳng đáy góc $60°$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm *H* thuộc đoạn *AC* sao cho $AH=\frac{1}{3}HC$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là



A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $a^3\sqrt{3}$.

Hưỡng dẫn giải

Chọn D

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AC=BD=2a$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=2a^2$

$AH=\frac{1}{3}HC\Rightarrow AH=\frac{1}{4}AC=\frac{a}{2}$

$\widehat{\left(AA',(ABCD)\right)}=\widehat{A'AH}=60°$

Xét tam giác $A'HA$ vuoong tại H có

Tứ giác ABCD có hai đường chéo $AC\perp BD$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD.$

$\widehat{\left(AA',(ABCD)\right)}=\widehat{A'AH}=60°$

$A'H = AH.\tan\widehat{A'AH} = \frac{a}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

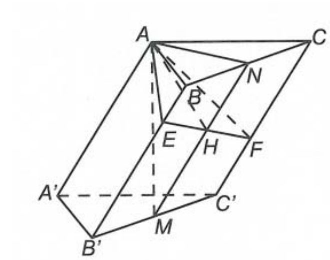
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = 2a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $A'HA$ vuông tại H ta tính được chiều cao: $A'H = AH.\tan\widehat{A'AH}$

Bài tập 3. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ *C* đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ *A* đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc *A* lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm *M* của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 1.

C. 2. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi *N* là trung điểm *BC*, $AN = A'M = 2$.

Kẻ $AE \perp BB'$ tại *E*, $AF \perp CC'$ tại *F*.

Ta có $EF \cap MN = \{H\}$ nên *H* là trung điểm *EF*.

Lại có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF) \Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$.

Khi đó

$d(A,BB') = AE = 1, d(A,CC') = AF = \sqrt{3}, d(C,BB') = EF = 2$

Ta có $AE^2 + AF^2 = EF^2 \Rightarrow \Delta AEF$ vuông tại $A \Rightarrow AH = \frac{EF}{2} = 1$.

Mặt khác $\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ MN // AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AEF) \Rightarrow MN \perp AH$.

Xét ΔAMN vuông tại *A* có $AM = \frac{AH.AN}{\sqrt{AN^2 - AH^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\begin{cases} (AA'NM) \perp (ABC) \\ (AA'NM) \perp (AEF) \\ (AA'NM) \cap (ABC) = AN \\ (AA'NM) \cap (AEF) = AH \end{cases} \Rightarrow \widehat{((ABC),(AEF))} = \widehat{HAN}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}AE.AF = S_{\Delta ABC}.\frac{AH}{AN} \xrightarrow{\frac{AH}{AN} = \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = AE.AF = \sqrt{3}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = 2$.

Gọi N là trung điểm BC. $AN = A'M = 2$.

Kẻ $AE \perp BB'$ tại E, $AF \perp CC'$ tại F.

Ta có $EF \cap MN = \{H\}$ nên H là trung điểm EF.

Ta có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA'' \end{cases}$

$\Rightarrow AA' \perp (AEF)$

$\Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$

Khi đó $d(A,BB') = AE = 1$,

$d(A,CC') = AF = \sqrt{3}$,

$d(C,BB') = EF = 2$.

ΔAMN vuông tại A ta tính được chiều cao AM.

Diện tích tam giác AEF tính theo công thức

$S_{\Delta AEF} = S_{\Delta ABC}.\cos\widehat{HAN}$

Tổng quát các dạng bài này:

$$V=\frac{d_{(A,BB')}.d_{(A,CC')}.A'M^2}{\sqrt{4A'M^2-d_{(C,BB')}^2}}$$

Dạng 8 . Thể tích hình hộp

1. Phương pháp

Hình hộp: Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình bình hành.

Hình hộp đứng: Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình chữ nhật.

Hình hộp chữ nhật: Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Sau mặt của hình hộp chữ nhât đều là các hình chữ nhật.

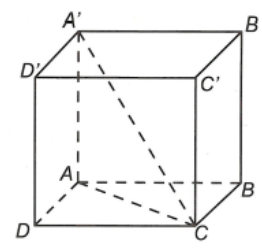
Hình lập phương: Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. Sáu mặt đều là các hình vuông.

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'C=4\sqrt{3}$. Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $2\sqrt{3}.$ **B.** $4\sqrt{3}.$

C. 64. **D.** 125.

Hướng dẫn giải



Đặt $AB=x\Rightarrow AC=x\sqrt{2}.$

$\Delta A'AC$ vuông tại A có

$A'C=\sqrt{AA^2+AC^2}=\sqrt{2x^2+x^2}=x\sqrt{3};$

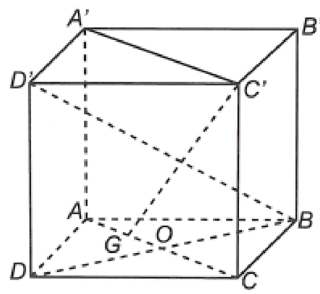
$A'C=4\sqrt{3}\Rightarrow x\sqrt{3}=4\sqrt{3}\Rightarrow x=4.$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=4^3=64$.

Chọn C.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=120°$ .Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, góc tạo bởi $C'G$ và mặt đáy bằng $30°$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là **A.** $a^3.$ **B.** $\frac{a^3}{3}.$ **C.** $\frac{a^3}{6}.$ **D.** $\frac{a^3}{12}.$ ***Hướng dẫn giải***	



Ta có $S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Do $\widehat{BAD} = 120° \Rightarrow \Delta ACD$ đều $\Rightarrow AC = a$ và $CG = CO + OG = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2a}{3}$.

Lại có $\left(\widehat{C'G,(ABCD)}\right) = \widehat{C'GC} = 30°$

Xét $\Delta C'CG$ vuông tại C có $CC' = CG.\tan\widehat{C'GC} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{9}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.CC' = \dfrac{a^3}{3}$

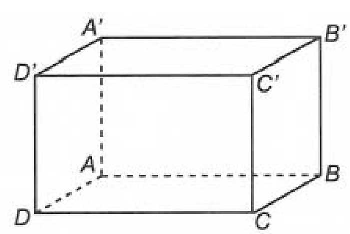
Chọn B.

Bài tập 2. Một tấm bìa hình vuông có cạnh 50cm. Người ta cắt bỏ đi ở một góc tấm bìa hình vuông cạnh 16cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nahat không có nắp. Thể tích khối hộp chữ nhật là

A. 5184 cm^3. **B.** 8704 cm^3.

C. 4608 cm^3. **D.** 18496 cm^3.

Hướng dẫn giải



$AA' = BB' = CC' = DD' = 16cm$ nên $ABCD$ là hình vuông có $AB = 50 - 2.16 = 18(cm)$.

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AC.AD = 18.18.16 = 5184(cm^3)$.

Chọn A.

$S_{ABCD} = AD.AD.\sin\widehat{BA}$

Góc tạo bởi C'G và mặt đáy

$\left(\widehat{C'G,(ABCD)}\right) = \widehat{C'}$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\Delta C'CG$ vuông tại C tính được

$CC' = CG.\tan\widehat{C'GC}$

.

Khi cắt bỏ một góc tấm bìa một hình vuông cạnh 16cm thì cạnh đáy còn lại là

$50 - 2.16 = 18(cm)$,

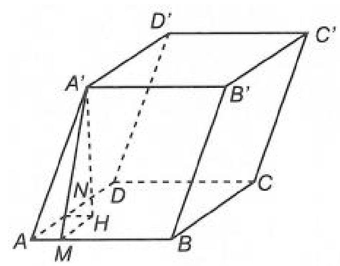
chiều cao là 16cm.

Bài tập 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=\sqrt{15}$, $AD=5$. Hai mặt bên $\left(ABB'A'\right)$ và $\left(ADD'A'\right)$ lần lượt tạo với mặt phẳng đáy những góc 30° và 60°, cạnh bên có độ dài bằng 1. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. 21. **B.** $\dfrac{15\sqrt{65}}{12}$.

C. $\dfrac{15\sqrt{65}}{13}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $S_{ABCD}=AB.AD=5\sqrt{15}$

Kẻ $A'H\perp\left(ABCD\right), MH\perp AB, NH\perp AD\left(M\in AB; N\in AD\right)$

$\Rightarrow\left(\widehat{\left(ABB'A'\right),\left(ABCD\right)}\right)=\widehat{A'MH}=30^\circ;$

$\left(\widehat{\left(ADD'A'\right),\left(ABCD\right)}\right)=\widehat{A'NH}=60^\circ$

Đặt $A'H=x$, khi đó $A'N=\dfrac{x}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$,

$AM=NH=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}, A'M=2x$.

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại M có

$A'A^2=AM^2+A'M^2\Rightarrow 1=4x^2+\dfrac{x^2}{3}\Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt{39}}{39}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'H=5\sqrt{15}.\dfrac{3\sqrt{39}}{39}=\dfrac{15\sqrt{65}}{13}$.

Chọn B.

Ta có

$S_{ABCD}=AB.AD=5\sqrt{\ }$

Kẻ

$A'H\perp\left(ABCD\right),$

$MH\perp AB, NH\perp A$

$\Rightarrow\left(\widehat{\left(ABB'A'\right),\left(ABCD\right)}\right)$

$\left(\widehat{\left(ADD'A'\right),\left(ABCD\right)}\right.$

Xét $\Delta A'AM$ *vuông tại M có*

$A'A^2=AM^2+A'M^2$

Mà $A'N=\dfrac{A'H}{\sin 60^\circ}$,

$AM=NH, A'M=2$

	Từ đó suy ra $A'H$.

Dạng 9. Tỉ số thể tích khối chóp

1. Phương pháp

So sánh thể tích khối chóp cần tính với một khối đa diện khác đã biết trước hoặc dễ dàng tính thể tích.

Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của các bài toán sau

Kết quả 1.

Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy A',B',C' tương ứng trên các cạnh SA,SB,SC

Khi đó

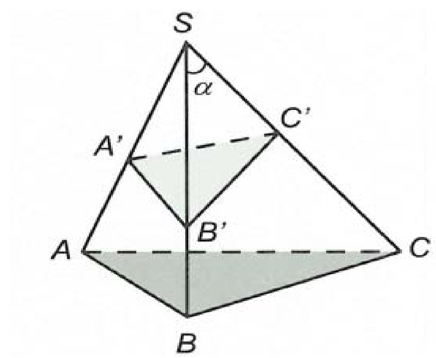
$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}}$$

Chú ý: Kết quả trên vẫn đúng nếu như trong các điểm A',B',C' có thể có điểm $A\equiv A',B\equiv B',C\equiv C'$

Thông thường, đối với bài toán này, đề thường cho điểm chia đoạn theo tỉ lệ, song song, hình chiếu…

Công thức chỉ đúng khi đáy là tam giác. Nếu đáy là tứ giác, ngũ giác… ta phải phân chia đáy thành các tam giác và tính tổng thể tích các khối có đáy là tam giác.

Chứng minh



Đặt $\alpha=\widehat{B'SC'}=\widehat{BSC}$

Ta có $\dfrac{d\left(A',(SBC)\right)}{d\left(A,(SBC)\right)}=\dfrac{SA'}{SA}$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{A'.SB'C'}}{V_{A.SBC}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A',(SB'C')\right).S_{\Delta SB'C'}}{\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).S_{\Delta SBC}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}d\left(A',(SBC)\right).\frac{1}{2}SB'.SC'.\sin\alpha}{\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).\frac{1}{2}SB.SC.\sin\alpha}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

(điều phải chứng minh)

Kết quả 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt

Chứng minh

1. Chứng minh $a+c=b+d$

SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' với

$$\frac{SA}{SA'} = a; \frac{SB}{SB'} = b; \frac{SC}{SC'} = c; \frac{SD}{SD'} = d$$

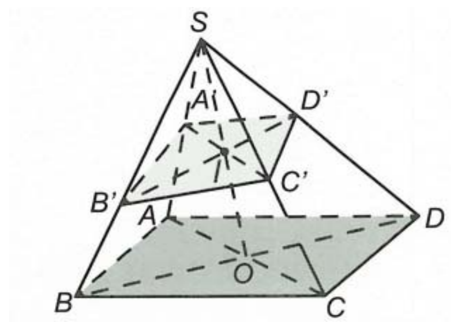
$(a; b; c; d > 0)$

Khi đó ta có hai công thức quan trọng sau

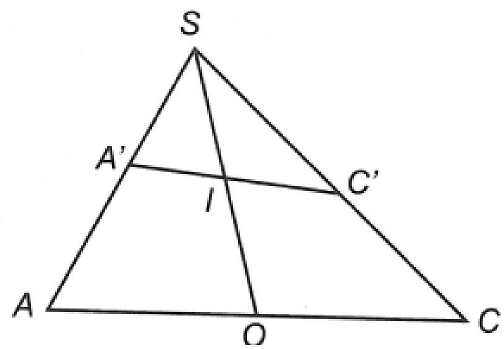
1. $$\boxed{a + c = b + d}$$

2. $$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}}$$

Chú ý: Các công thức 1, 2 chỉ áp dụng cho hình chóp có đáy là hình bình hành. Các công thức này được ứng dụng rất nhiều trong các bài toán tìm thiết diện cũng như thể tích khối đa diện nên tận dụng khi làm trắc nghiệm để không phải làm theo phương pháp chia nhỏ đáy thành các tam giác.



Gọi O là tâm hình bình hành, I là giao điểm của SO và



$(A'B'C'D')$

Ta có $S_{SAO} = S_{SOC} \Rightarrow \frac{S_{SA'I}}{S_{SAO}} + \frac{S_{SC'I}}{S_{SCO}} = \frac{2S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$

$$\Leftrightarrow \frac{SA'.SI.\sin\widehat{A'SI}}{SA.SO.\sin\widehat{ASO}} + \frac{SC'.SI.\sin\widehat{C'SI}}{SC.SO.\sin\widehat{CSO}}$$

$$= 2.\frac{SA'.SC'\sin\widehat{A'SC'}}{SA.SC\sin\widehat{ASC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA'.SI}{SA.SO} + \frac{SC'.SI}{SC.SO} = 2.\frac{SA'.SC'}{SA.SC}$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức với $\frac{SA.SC.SO}{SA'.SC'.SI}$

ta được $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2.\frac{SO}{SI}$ (1)

Chứng minh tương tự $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2.\frac{SO}{SI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$

Hay $a + c = b + d$ (điều phải chứng minh)

2. Chứng minh $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{a+b+c+d}{4abcd}$

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{2V_{S.ABC}}+\dfrac{V_{S.A'D'C'}}{2V_{S.ADC}}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}+\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{abc}+\dfrac{1}{acd}\right)=\dfrac{d+b}{2abcd}$

Do $a+c=b+d$ suy ra $b+d=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

Vậy $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{a+b+c+d}{4abcd}$

(điều phải chứng minh)

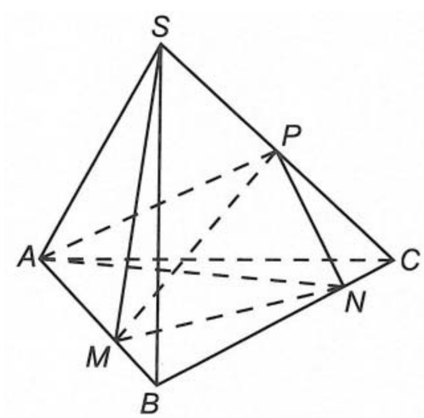
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp SABC, trên các cạnh AB, BC, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM=2MB, BN=4NC, SP=PC$. Tỉ số thể tích của hai khối chóp S.BMN và A.CPN là

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{V_{B.MNS}}{V_{\text{B.ACS}}}=\dfrac{BM}{BA}.\dfrac{BN}{BC}.\dfrac{BS}{BS}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{15}$

$\dfrac{V_{A.CPN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{V_{C.ANP}}{V_{\text{C.ABS}}}=\dfrac{CA}{CA}.\dfrac{CN}{CB}.\dfrac{CP}{CS}=\dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}$

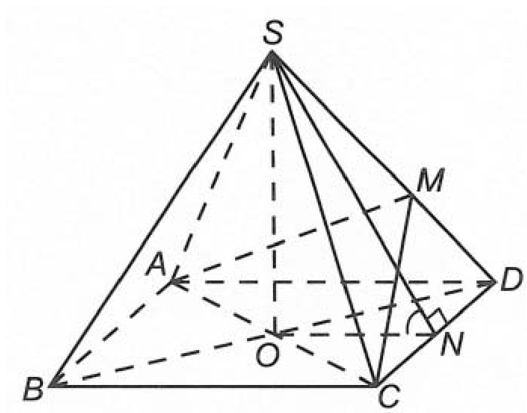
$\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{A.CNP}}=\dfrac{4}{15}:\dfrac{1}{10}=\dfrac{8}{3}$

Bài tập 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ lệ $\frac{V_1}{V_2}$ gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $0,11$.   **B.** $0,13$.   **C.** $0,7$.   **D.** $0,9$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$

Gọi N là trung điểm CD

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp SN, CD \perp ON \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SNO} = \alpha$$

Kẻ $CM \perp SD$

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$

$\Rightarrow SD \perp (ACM) \Rightarrow (ACM) \perp (SAD)$ nên mặt phẳng (P) là (ACM)

Xét tam giác SON vuông tại O có $SN = \dfrac{ON}{\cos\widehat{SNO}} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3a}{2}$

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$$

Xét tam giác SOD vuông tại O có

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Ta có $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}CM.SD = \frac{1}{2}SN.CD \Rightarrow CM = \frac{SN.CD}{SD} = \frac{\frac{3a}{2}.a}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$

Xét tam giác MCD vuông tại M có

$$DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{10}$$

Ta có $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MACD}}{2.V_{SACD}} = \frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}.\frac{DA}{DA}.\frac{DC}{DC} = \frac{1}{2}.\frac{DM}{DC} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow V_{MACD} = \frac{1}{10}V_{SABCD}$$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối $MACD$ và $SABCM$

$$V_{SABCD} = V_{MACD} + V_{SABCM} \Rightarrow V_{SABCM} = \frac{9}{10}V_{SABCD}$$

Do đó $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}} = \frac{1}{9} \approx 0,11$

Tổng quát: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số thể tích của hai khối đa diện là $\frac{V_1}{V_2} = \cos^2\alpha$

Hướng dẫn giải

Ta có $SD = \sqrt{SN^2 + ND^2} = \sqrt{ON^2.\frac{1}{\cos^2\widehat{SNO}} + ND^2}$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 1} = \frac{a}{2.\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha + 1}$$

Ta có $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}CM.SD = \frac{1}{2}SN.CD$

$$\Rightarrow CM = \frac{SN.CD}{SD} = \frac{\frac{a}{2}\frac{1}{\cos\alpha}.a}{\frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha + 1}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \cos^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{1+\cos^2\alpha}} = \frac{a.\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

$$\frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MACD}}{2.V_{SACD}} = \frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}.\frac{DA}{DA}.\frac{DC}{DC} = \frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}}{\frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$$

$$V_{MACD} = \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}V_{SABCD} \Rightarrow V_{SABCM} = \left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}\right)V_{SABCD} = \frac{1}{1+\cos^2\alpha}V_{SABCD}$$

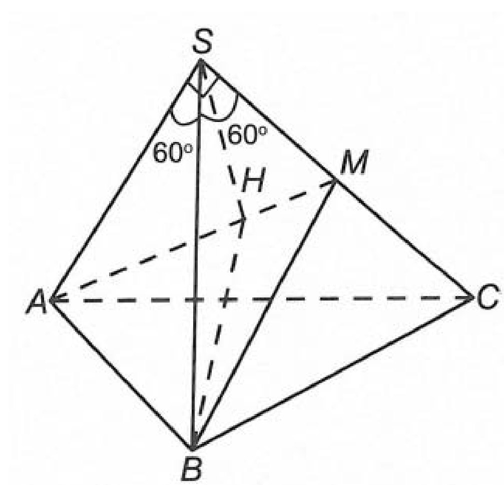
Do vậy $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}} = \cos^2\alpha$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = a; SC = 2a, \widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^0, \widehat{ASC} = 90^0$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng V. Tỉ số $\frac{6V}{a^3}$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Gọi M là trung điểm SC.

Ta có $SM = a \Rightarrow \Delta SAM$ vuông cân tại S.

Gọi H là trung điểm của AM.

Ta có $AM^2 = \sqrt{SA^2 + SM^2} = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow SH = \frac{1}{2}AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vì $SM = SB = a$ và $\widehat{BSC} = 60^0$ nên ΔBSM đều

$\Rightarrow BM = a$

ΔSAB có $SA = SB = a; \widehat{ASB} = 60^0$ nên là tam giác đều $\Rightarrow AB = SA = a$

Suy ra $AB = BM = a \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại B.

Mặt khác $AB^2 + BM^2 = 2a^2$ và $AM^2 = 2a^2 \Rightarrow AB^2 + BM^2 = AM^2$

$\Rightarrow \Delta ABM$ vuông cân tại B (định lý Py-ta-go đảo) $\Rightarrow BH = \frac{1}{2}AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $SH^2 + BH^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow SH^2 + BH^2 = SB^2 = a^2$

$\Rightarrow \Delta SHB$ vuông cân tại H (định lý py-ta-go đảo).

Ta có $SH \perp AM, SH \perp HB \Rightarrow SH \perp (ABM)$.

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AB.BM = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABM}} = \frac{SC}{SM} = 2 \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V_{S.ABM} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \frac{6V}{a^3} = \sqrt{2}$$

Tổng quát: Cho chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b; SC = c$ và $\widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{ASC} = \gamma$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

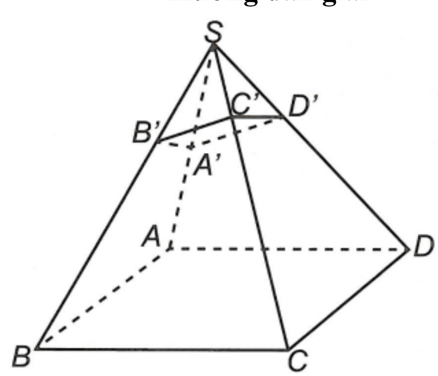
$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA = 2SA'; SB = 3SB'; SC = 4SC'$, mặt phẳng $(A'B'C')$ cắt cạnh SD tại D'. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{24}$. **B.** $\frac{1}{26}$. **C.** $\frac{7}{12}$. **D.** $\frac{7}{24}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Cách 1. Phân chia đáy thành 2 tam giác

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}\Rightarrow 2+4=3+\frac{SD}{SD'}\Rightarrow\frac{SD}{SD'}=3\Rightarrow SD=3SD'$$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\Rightarrow V_{S.A'B'C}=\frac{1}{24}S_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\Rightarrow V_{S.A'B'C}=\frac{1}{24}S_{S.ACD}$$

$$\Rightarrow V_{S.A'B'C'D'}=V_{S.A'B'C'}+V_{S.A'C'D'}=\frac{V_{S.ABC}+V_{S.ACD}}{24}\Rightarrow\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{24}$$

Cách 2. Áp dụng trực tiếp công thức

Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}+\frac{SD}{SD'}}{4.\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SD}{SD'}}=\frac{2+4+3+3}{4.2.4.3.3}=\frac{1}{24}$

Dạng 10. Tỉ số thể tích khối lăng trụ

1. Phương pháp

Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của bài toán

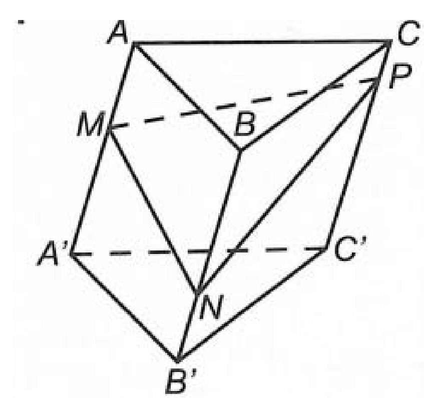
Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho

$$\frac{AM}{AA'}=a,\frac{BN}{BB'}=b,\frac{CP}{CC'}=c$$

Khi đó $\frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{a+b+c}{3}$

Đặc biệt: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{a}{3},\frac{V_{M.BCPN}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{b+c}{3}$

Chứng minh



Ta có

$$V_{A.BCC'B'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{A.A'B'C'}$$

$$=V_{ABC.A'B'C'}-\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2V_{ABC.A'B'C'}}{3}$$

Ta có $\frac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{3}d\left(M;(ABC)\right).S_{ABC}}{d\left(A';(ABC)\right).S_{ABC}}$

$$=\frac{1}{3}\frac{d\left(M;\left(ABC\right)\right)}{d\left(A';\left(ABC\right)\right)}=\frac{1}{3}\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{3}a$$

Suy ra $\boxed{V_{M.ABC}=\frac{a}{3}.V_{ABC.A'B'C'}}$

Ta có

$$AM//\left(BCC'B'\right)\Rightarrow d\left(M;BCPN\right)=d\left(A;BCPN\right)$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN}=V_{A.BCPN}$$

Suy ra $\frac{V_{M.BCPN}}{V_{A.BCC'B'}}=\frac{V_{A.BCPN}}{V_{A.BCC'B'}}=\frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(BN+CP\right).d\left(C;BB'\right)}{BB'.d\left(C;BB'\right)}=\frac{BN+CP}{2BB'}$$

$$=\frac{BN}{2BB'}+\frac{CP}{2BB'}=\frac{BN}{2BB'}+\frac{CP}{2CC'}=\frac{b+c}{2}$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN}=\frac{b+c}{2}V_{A.BCC'B'}$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN}=\frac{b+c}{2}.\frac{2V_{ABC.A'B'C'}}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{M.BCPN}=\frac{b+c}{3}.V_{ABC.A'C'B'}}$$

Mặt khác

$$V_{ABCMNP}=V_{M.ABC}+V_{M.BCPN}=\frac{a+b+c}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$$

$\frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{a+b+c}{3}$ (điều phải chứng minh).

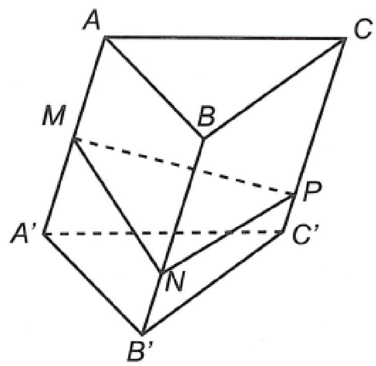
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM=MA', BN=3NB', CP=3PC'$. Đặt V_1 là thể tích của khối đa diện $ABCMNP, V_2$ là thể tích khối đa diện còn lại. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $MA = MA' \Rightarrow \dfrac{MA}{AA'} = \dfrac{1}{2}; BN = 3NB' \Rightarrow \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{3}{4}; CP = 3PC' \Rightarrow \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{3}{4}$

Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$

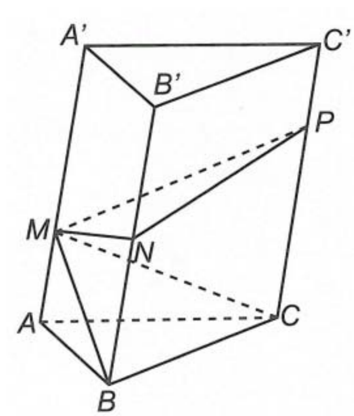
Suy ra $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_1 = \dfrac{2}{3}V \Rightarrow V_2 = V - V_1 = \dfrac{1}{3}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = 2$

Bài tập 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V và độ dài cạnh bên $AA' = 6$. Trên cạnh $A'A, B'B, C'C$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = 2, BN = x, CP = y$ với x, y là các số dương thỏa mãn $xy = 12$. Biết rằng thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\dfrac{1}{2}V$. Giá trị của $x^2 + y^2$ bằng

A. 24. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 17.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{3}; \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{x}{6}; \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{y}{6}; \dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $x + y = 7 \Rightarrow (x+y)^2 = 49 \Rightarrow x^2 + y^2 = 49 - 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Dạng 11: Tỉ số thể tích khối hộp

1. Phương pháp

Cho hình khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, mặt phẳng (α) cắt các cạnh $AA', BB', CC', \mathrm{DD}'$ lần lượt tại M, N, P, Q sao cho

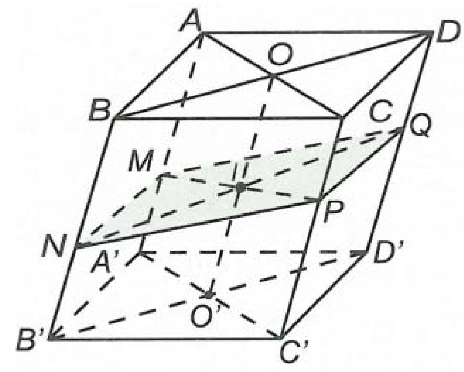
$$\frac{AM}{AA'}=a, \frac{BN}{BB'}=b, \frac{CP}{CC'}=c, \frac{DQ}{\mathrm{DD}'}=d$$

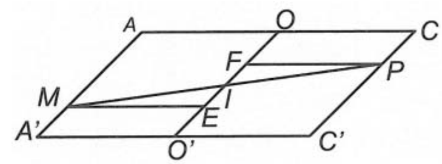
Khi đó ta có

$$\frac{V_{ABDC.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)$$

Chứng minh





Xét mặt phẳng $ACC'A'$

Từ M, P ta lần lượt kẻ các đường thẳng song song với AC cắt OO' theo thứ tự E, F

Ta có $\frac{AM}{AA'}+\frac{CP}{CC'}=\frac{OE}{\mathrm{OO}'}+\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OO}'}$

$$=\frac{OI+IE}{\mathrm{OO}'}+\frac{\mathrm{OI - IF}}{\mathrm{OO}'}=\frac{2OI}{\mathrm{OO}'}$$

Tương tự xét mặt phẳng $B\mathrm{DD}'B$

Ta cũng có $\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{\mathrm{DD}'}=\frac{2OI}{\mathrm{OO}'}$

Do đó

$$\frac{AM}{AA'}+\frac{CP}{CC'}=\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{\mathrm{DD}'} \Rightarrow a+c=b+d$$

Chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối $ABC.A'B'C'$ và $ACD.A'C'D'$

Áp dụng tỉ số thể tích của khối lăng trụ tam giác ta được

$$\boxed{\frac{V_{ABDC.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{4}(a+b+c+d)=\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)}$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có N là trung điểm CC'. Mặt phẳng (α) đi qua AN cắt các cạnh BB', DD' lần lượt tại M, P. (α) chia khối lập phương thành hai phần có thể tích tương ứng bằng V_1 và $V_2\left(V_1 < V_2\right)$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\frac{5}{2}$.

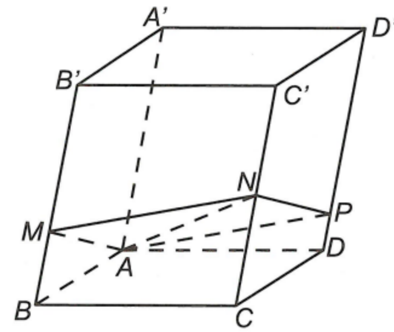
Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có

$$\frac{V_{ABCDPNM}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{AA}{AA'} + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Vậy $\frac{V_{ABCDPNM}}{V_{AMNPA'B'C'D'}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 3$

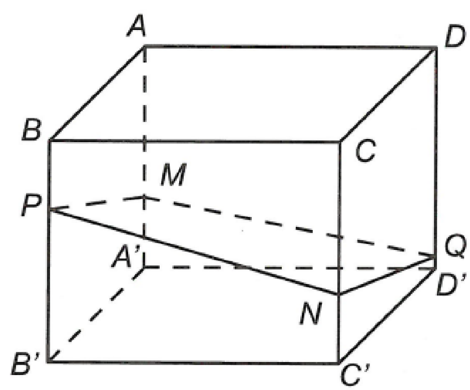


Bài tập 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $36cm^3$. Gọi hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AA', CC' sao cho $AM = 2A'M, CN = 3C'N$. Một mặt phẳng đi qua M, N lần lượt cắt cạnh BB', DD' tại P và Q. Thể tích khối $ABCDMPNQ$ bằng

A. $18cm^3$. **B.** $22cm^3$. **C.** $10,5cm^3$. **D.** $25,5cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $\frac{V_{ABCDMPNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{17}{24}$

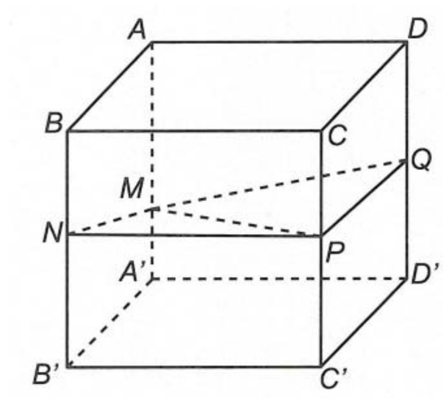
$$V_{ABCDMPNQ} = \frac{17}{24} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{17}{24}.36 = 25,5cm^3$$

Bài tập 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', DD' sao cho $AM = 2A'M, 2BN = 3B'N; 3CP = 4C'P; 4DQ = 5D'Q$. Thể tích khối $ABCDMNPQ$ bằng

A. $\frac{572V}{945}$. **B.** $\frac{13V}{21}$. **C.** $\frac{26V}{45}$. **D.** $\frac{559V}{945}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có $\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{26}{21}; \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} = \frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{52}{45}$

$\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} > \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$

Cạnh MP sẽ lệch trên. Khối đa diện lồi $ABCDMNPQ$ được chia thành hai khối đa diện theo cạnh MP là BACNMP và DACQMP.

Ta có $\frac{V_{BACNMP}}{V_{BACB'A'C'}} = \frac{1}{3}\left(\frac{BN}{BB'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{193}{315}$

$\Rightarrow V_{BACNMP} = \frac{193}{315} V_{BACB'A'C'} = \frac{193V}{630}$.

$\frac{V_{DACQMP}}{V_{DACD'A'C'}} = \frac{1}{3}\left(\frac{DQ}{DD'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{113}{189}$

$\Rightarrow V_{DACQMP} = \frac{113}{189} V_{DACD'A'C'} = \frac{113V}{378}$

Vậy $V_{ABCDMNPQ} = V_{BACNMP} + V_{DACQMP} = \frac{193V}{630} + \frac{113V}{378} = \frac{572V}{945}$

Dạng 12. Tách hình để tính thể tích

1. Phương pháp

Để tính thể tích các khối da diện phức tạp ta không tính trực tiếp mà tính gián tiếp thông

Ví dụ: Cắt khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bởi các mặt phẳng $(AB'D'), (CB'D'), (B'AC)$

qua việc tính thể tích các khối đơn giản (khối chóp, khối lăng trụ).

+ Khối đa diện A được tạo bởi các khối đơn giản $A_1, A_2, ...A_n$. Khi đó

$V_A = V_{A_1} + V_{A_2} + ... + V_{A_n}$.

+ Khối đa diện A được bổ sung thêm các khối cơ bản $A_1, A_2, ...A_n$ để tạo thành khối cơ bản B

Khi đó $V_A = V_B - \left(V_{A_1} + V_{A_2} + ... + V_{A_n}\right)$.

+ Ta có thể sử dụng khôi phục lại hình ẩn ban đầu để tính toán dễ dàng hơn.

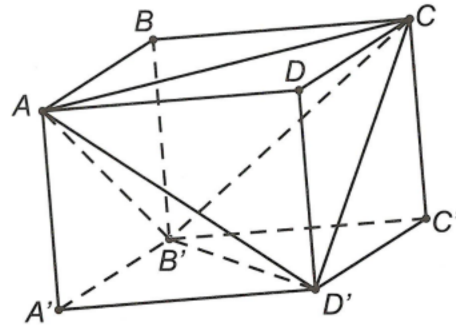
+ Sử dụng phương pháp trải hình trên mặt phẳng để dễ hình dung và tính toán thuận tiện hơn.

$,(D'AC)$ ta được khối đa diện có thể tích lớn nhất là

A. $A'AB'D'$. **B.** $D'ADC$.

C. $ACB'D'$. **D.** $CC'B'D'$.

Hướng dẫn giải



Cắt khối hộp bởi các mặt phẳng $(AB'D')$, $(CB'D')$, $(B'AC)$, $(D'AC)$ ta được 5 khối tứ diện $AA'B'D'$, $B'ABC$, $CC'B'D'$, $D'DAC$, $AB'D'C$.

Gọi V là thể tích của khối hộp.

$V_{AA'B'D'} = V_{B'ABC} = V_{CC'B'D'} = V_{D'ADC} = \dfrac{1}{6}V$

Suy ra $V_{ACB'D'} = \dfrac{1}{3}V$ nên tứ diện $ACB'D'$ có thể tích lớn nhất

Chọn C.

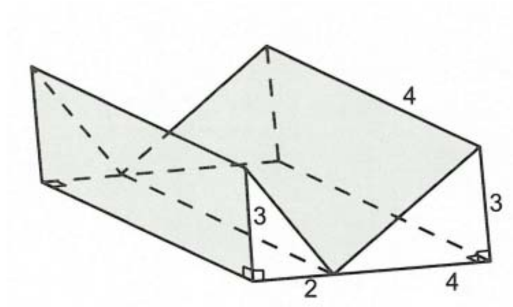
2. Bài tập

Bài tập 1. Một khúc gỗ có dạng và độ dài các cạnh được cho như hình vẽ. Thể tích khúc gỗ là

A. V = 12. **B.** V = 96. **C.** V = 36. **D.** V = 24.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Khúc gỗ được chia thành 2 phần, mỗi phần là một lăng trụ tam tam giác có đáy là các tam giác vuông, chiều cao khối lăng trụ bằng 4.

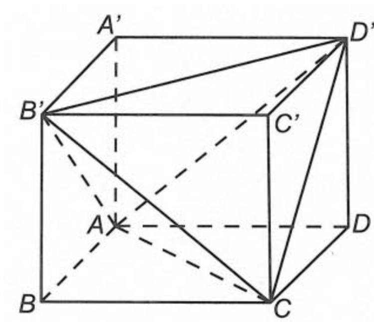
Thể tích khối gỗ là $V = V_1 + V_2 = 4.\frac{1}{2}.3.2 + 4.\frac{1}{2}.3.4 = 36$.

Bài tập 2. Một hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có ba kích thước là 2 cm, 3 cm và 6 cm. Thể tích của khối tứ diện A.CB’D’ bằng

A. $8cm^3$. **B.** $12cm^3$. **C.** $16cm^3$. **D.** $4cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Khối hộp được tạo thành từ 5 khối B.AB’C; D.ACD’; A’.B’AD’; C.B’C’D’; A.CB’D’.

Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{B.AB'C} + V_{D.ACD'} + V_{A'.B'AD'} + V_{C.B'C'D'} + V_{A.CB'D'}$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4V_{B.AB'C} + V_{A.CB'D'} \Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{B.AB'C}$

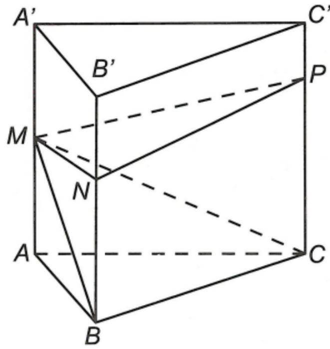
$\Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}.2.3.6 = 12cm^3$.

Bài tập 3. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AA’, BB’, CC’ sao cho AM = $\frac{1}{2}$AA’; BN = $\frac{2}{3}$BB’; CP = $\frac{3}{4}$CC’. Thể tích khối chóp M.BCPN là

A. $\frac{7V}{36}$. **B.** $\frac{17V}{36}$. **C.** $\frac{7V}{18}$. **D.** $\frac{11V}{18}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $V = V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC}$

$\Rightarrow V_{M.ABC} = V_{M.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}MA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.AA'.S_{ABC} = \dfrac{V}{6}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{A'M}{AA'} + \dfrac{B'N}{BB'} + \dfrac{C'P}{CC'}\right)$

$\Rightarrow V_{A'B'C'.MNP} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right)V_{A'B'C'.ABC} \Rightarrow V_{A'B'C'.MNP} = \dfrac{13}{36}V$.

$\Rightarrow V_{M.BCPN} = V_{A'B'C'.ABC} - V_{M.ABC} - V_{A'B'C'.MNP} = V - \dfrac{V}{6} - \dfrac{13}{36}V = \dfrac{17V}{36}$.

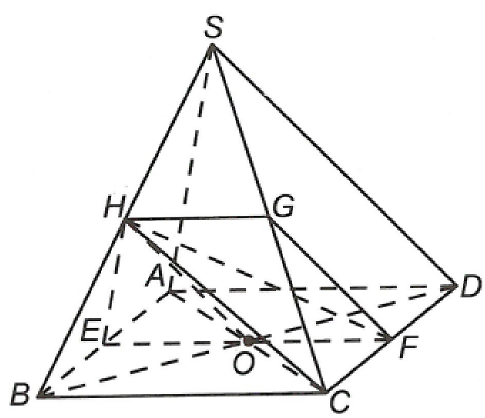
Bài tập 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Hai cạnh AC, BD cắt nhau tại O. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SAD) cắt khối chóp S.ABCD tạo thành hai khối có thể tích lần lượt là V_1; $V_2 (V_1 < V_2)$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{5}{11}$.   **B.** $\dfrac{3}{5}$.   **C.** $\dfrac{7}{13}$.   **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1:



Gọi h, V, S_{ABCD} lần lượt là chiều cao, thể tích và diện tích đáy của hình chóp S.ABCD. Mặt phẳng (P) cắt hình chóp S.ABCD tạo thành thiết diện như hình vẽ. Khi đó $V_{HGFCBE} = V_1$ và thể tích phần còn lại là $V_2 (V_1 < V_2)$.

Ta có $V_{HGFCBE} = V_{H.BEO} + V_{H.BOC} + V_{H.OCF} + V_{G.HCF}$

$$= \frac{1}{3}.\frac{h}{2}S_{\triangle BEO} + \frac{1}{3}.\frac{h}{2}S_{\triangle BOC} + \frac{1}{3}.\frac{h}{2}S_{\triangle OCF} + \frac{1}{2}V_{B.GCF}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{h}{2}\left(S_{\triangle BEO} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle OCF}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S_{\triangle BCF}\right)$$

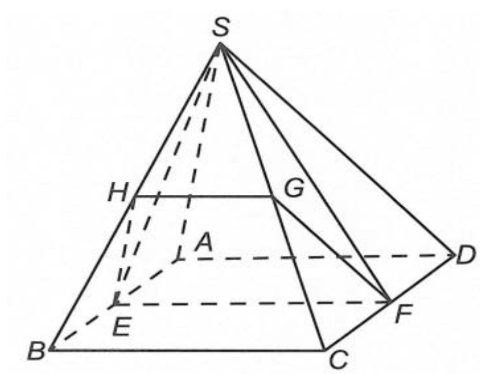
$$= \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S_{BEFC} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{S_{ABCD}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.h.\frac{S_{ABCD}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{3}h.S_{ABCD}\right) = \frac{1}{4}V + \frac{1}{16}V = \frac{5}{16}V.$$

Suy ra $V_1 = \frac{5}{16}V$. Do đó $V_2 = V - V_1 = V - \frac{5}{16}V = \frac{11}{16}V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$.

Cách 2:



Ta có $V_{S.ADFE} = \frac{1}{3}.h.S_{ADFE} = \frac{1}{3}.h.\frac{S}{2} = \frac{V}{2}$.

Lại có $\frac{V_{S.EFGH}}{V_{S.EFCB}} = \frac{\frac{SE}{SE} + \frac{SF}{SF} + \frac{SB}{SH} + \frac{SC}{SG}}{4.\frac{SE}{SE}.\frac{SF}{SF}.\frac{SB}{SH}.\frac{SC}{SG}} = \frac{1+1+2+2}{4.1.1.2.2.} = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow V_{S.EFGH} = \frac{3}{8}V_{S.EFCB} = \frac{3V}{16}$.

Do đó $V_{SADFGHE} = V_{S.ADFE} + V_{S.EFGH} = \frac{V}{2} + \frac{3V}{16} = \frac{11V}{16} = V_2$ suy ra $V_1 = \frac{5}{16}V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$.

Bài tập 5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh 2a, gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N. Thể tích khối đa diện AMNPBCD bằng

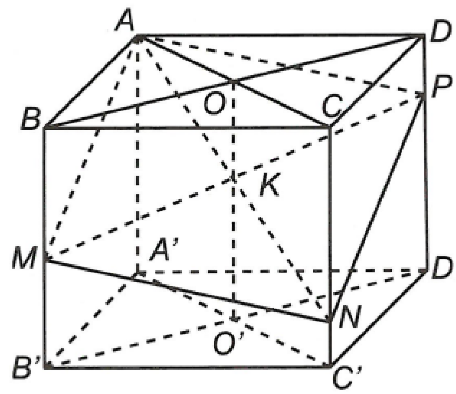
A. $V = 2a^3$. **B.** $V = 3a^3$. **C.** $V = \frac{9a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{11a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Thể tích khối lập phương ABCD.A'B'C'D' là $V = (2a)^3 = 8a^3$.

Cách 1: Gọi O, O' lần lượt là tâm hai hình vuông ABCD và A'B'C'D', gọi K=OO'$\cap$MP, khi đó N=AK$\cap$CC'.



Ta có $OK = \frac{1}{2}(DP + BM)$

$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{3a}{4} \Rightarrow CN = 2OK = \frac{3a}{2}$.

$S_{BMNC} = \frac{1}{2}(BM + CN).BC = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{2}\right).2a = \frac{5a^2}{2}$.

$V_{A.BMNC} = \frac{1}{3}.S_{BMNC}.AB = \frac{1}{3}.\frac{5a^2}{2}.2a = \frac{5a^3}{3}$.

$S_{DPNC} = \frac{1}{2}(DP + CN).CD = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right).2a = 2a^2$.

$V_{A.DPNC} = \frac{1}{3}.S_{DPNC}.AD = \frac{1}{3}.2a^2.2a = \frac{4a^3}{3}$.

$V = V_{A.BMNC} + V_{A.DPNC} = \frac{5a^3}{3} + \frac{4a^3}{3} = 3a^3$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích khối hộp, ta có

$$\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2}.\left(\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'}\right) \Rightarrow \frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

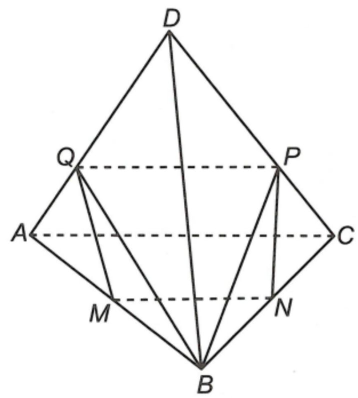
$\Rightarrow V_{AMNPBCD} = \frac{3}{8}.8a^3 = 3a^3$.

Bài tập 6. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC. Điểm P trên cạnh CD sao cho PD=2CP. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Thể tích khối đa diện BMNPQD bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{16}$. **B.** $\frac{25\sqrt{2}}{432}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{48}$. **D.** $\frac{13\sqrt{2}}{432}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có MN//AC và PQ = (MNP) $\cap$ (ACD) $\Rightarrow$ PQ//AC $\Rightarrow \dfrac{DQ}{DA} = \dfrac{DP}{DC} = \dfrac{2}{3}$.

Thể tích khối tứ diện đều ABCD là $V = V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Chia khối đa diện cần tính thành các khối tứ diện D.PQB; B.MNQ; B.PQN.

Ta có $V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}$.

Trong đó $V_{D.PQB} = \dfrac{DQ}{DA}.\dfrac{DB}{DB}.\dfrac{DP}{DC}.V = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 V = \dfrac{4}{9}V$.

$V_{B.MNQ} = \dfrac{BM}{BA}.\dfrac{BN}{BC}.\dfrac{BQ}{BQ}.V_{B.ACQ} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2.V_{B.ACQ} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{S_{ACQ}}{S_{ACD}}.V = \dfrac{1}{4}.\dfrac{AQ}{AD}.V = \dfrac{1}{12}V$.

$V_{B.PQN} = \dfrac{BP}{BP}.\dfrac{BQ}{BQ}.\dfrac{BN}{BC}.V_{B.PQC} = \dfrac{1}{2}.V_{B.PQC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{S_{PQC}}{S_{ACD}}.V = \dfrac{1}{6}V$.

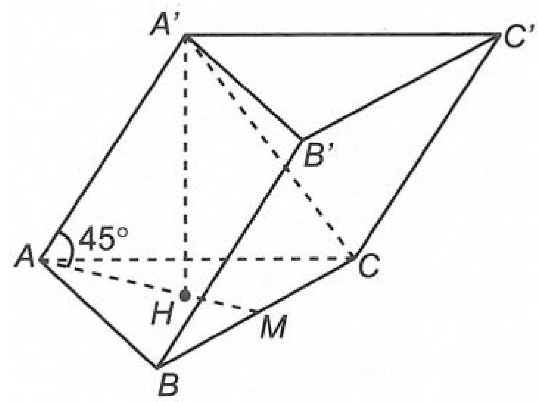
Vậy $V_{BMNPQD} = \left(\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6}\right)V = \dfrac{25\sqrt{2}}{432}$.

Bài tập 7. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh AA’=2a và tạo với đáy một góc 45°. Thể tích khối tứ diện ACA’B’ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là hình chiếu của A’ trên (ABC).

$\vartriangle ABC$ đều cạnh a $\Rightarrow S_{\vartriangle ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $\left(\widehat{AA',(ABC)}\right)=\widehat{A'AH}=45^\circ$.

$\vartriangle A'AH$ vuông tại H có $A'H=AA'.\sin\widehat{A'AH}=a\sqrt{2}$.

$V_{ABC.A'B'C'}=S_{\vartriangle ABC}.A'H=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Khối lăng trụ được chia làm ba khối chóp C.A’B’C’, B’.ABC và A.CA’B’.

Ta có $V_{C.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$ và $V_{B'.ABC}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

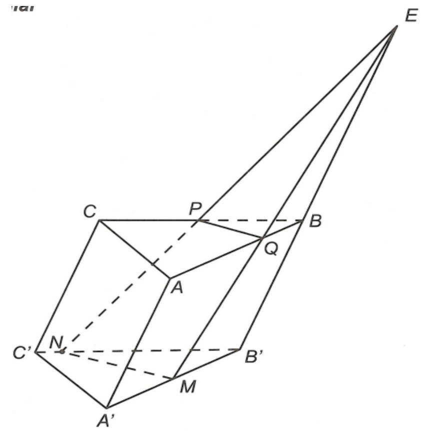
$\Rightarrow V_{ACA'B'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{C.A'B'C'}-V_{B'.ABC}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Bài tập 8. Cho lăng trụ ABC.A’B’C’ có thể tích bằng 15. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh A’B’, B’C’, BC sao cho M là trung điểm của A’B’, B’N= $\dfrac{4}{5}B'C'$ và BP=$\dfrac{3}{5}BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB’ tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích khối đa diện lồi AQPCA’MNC’ bằng

A. $\dfrac{23}{64}$. **B.** $\dfrac{49}{16}$. **C.** $\dfrac{83}{8}$. **D.** $\dfrac{45}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $\dfrac{EB}{EB'}=\dfrac{EQ}{EM}=\dfrac{EP}{EN}=\dfrac{BP}{B'N}=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{d\left(E,\left(A'B'C'\right)\right)}{d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right)}=\dfrac{EB'}{BB'}=4\Rightarrow d\left(E,\left(A'B'C'\right)\right)=4d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right)$

Lại có $\dfrac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}}=\dfrac{B'M}{B'A'}.\dfrac{B'N}{B'C'}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}$.

$\Rightarrow V_{E.MB'N}=\dfrac{1}{3}d\left(E,(MB'N)\right).S_{MB'N}=\dfrac{1}{3}.4d\left(B,(A'B'C')\right).\dfrac{2}{5}S_{A'B'C'}$

$=\dfrac{8}{15}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{8}{15}.15=8$.

$\dfrac{V_{E.QPB}}{V_{E.MB'N}}=\dfrac{EP}{EN}.\dfrac{EQ}{EM}.\dfrac{EB}{EB'}=\left(\dfrac{EB}{EB'}\right)^3=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}\Rightarrow V_{E.QPB}=\dfrac{27}{64}V_{E.MB'N}$.

Suy ra $V_{BQP.B'MN}=V_{E.MB'N}-V_{E.BQP}=V_{E.MB'N}-\dfrac{27}{64}V_{E.MB'N}=\dfrac{37}{64}V_{E.MB'N}=\dfrac{37}{64}.8=\dfrac{37}{8}$.

Vậy $V_{AQPCA'MNC'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{BQP.B'MN}=15-\dfrac{37}{8}=\dfrac{83}{8}$.

Dạng 13. Phục hình và trải phẳng

Bài tập 1. Cho tứ diện ABCD có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90^\circ$; AB=a; $AC=a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC}=135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng 30°. Thể tích của tứ diện ABCD bằng

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

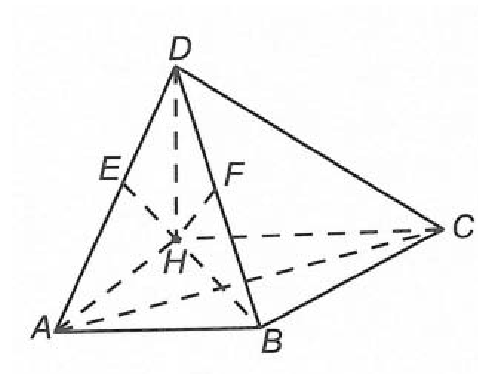
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dựng $DH\perp(ABC)$.

Ta có $\begin{cases}BA\perp DA\\ BA\perp DH\end{cases}\Rightarrow BA\perp AH$;

$\begin{cases}BC\perp DB\\ BC\perp DH\end{cases}\Rightarrow BC\perp BH$.



Tam giác AHB có AB=a, $\widehat{ABH}=45^\circ$

$\Rightarrow$ $\triangle HAB$ vuông cân tại A

$\Rightarrow$AH=AB=a.

Áp dụng định lý cosin, ta có BC=$a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}.BA.BC.\sin\widehat{CBA}=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases}HE\perp DA\left(E\in AD\right)\\ HF\perp DB\left(F\in BD\right)\end{cases}\Rightarrow HE\perp(DAB)$ và $HF\perp(DBC)$.

Suy ra $\left(\widehat{(DBA),(DBC)}\right)=\left(\widehat{HE,HF}\right)=\widehat{EHF}$

Đặt $DH=x$, khi đó $HE=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}, HF=\frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}$.

Suy ra $\cos\widehat{EHF}=\frac{HE}{HF}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{x^2+2a^2}}{\sqrt{2x^2+2a^2}}\Rightarrow x=a$.

Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.DH.S_{\triangle ABC}=\frac{a^3}{6}$.

Bài tập 2 Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=4; AC=BD=5;$ $AD=BC=6$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{15\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\frac{15\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{45\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{45\sqrt{6}}{2}$

Chú ý: Cho khối tứ diện gần đều có độ dài các cạnh

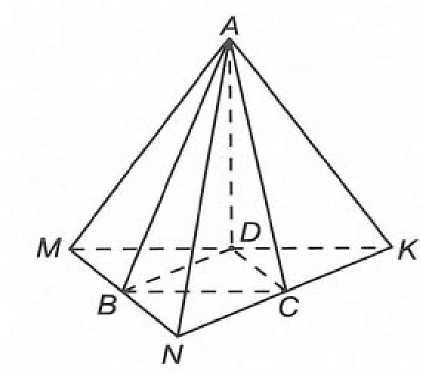
$\begin{cases}AB=CD=a\\ AC=BD=b\\ AD=BC=c\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựng tứ diện AMNK sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm của các cạnh MN, NK, KM.

Tứ diện AMNK có AM, AN, AK đôi một vuông góc.



Đặt

$$\begin{cases} x = a^2 + b^2 - c^2 \\ y = b^2 + c^2 - a^2 \\ z = a^2 + c^2 - b^2 \end{cases}$$

Khi đó

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{xyz}$$

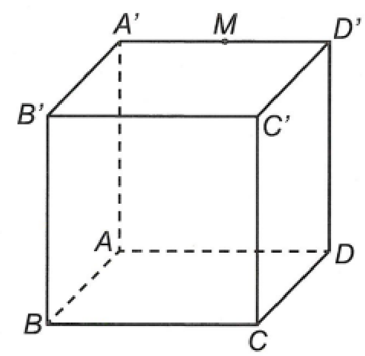
$$\begin{cases} AM^2 + AN^2 = 64 \\ AN^2 + AK^2 = 100 \\ AK^2 + AM^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = 54 \\ AN^2 = 10 \\ AK^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = 3\sqrt{6} \\ AN = \sqrt{10} \\ AK = 3\sqrt{10} \end{cases}$$

$$V_{AMNK} = \frac{1}{6}AM.AN.AK = \frac{1}{6}.3\sqrt{6}\sqrt{10}.3\sqrt{10} = 15\sqrt{6}$$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{V_{AMNK}}{4} = \frac{15\sqrt{6}}{4}$

Bài tập 3. Một con kiến đang ở vị trí M là trung điểm cạnh $A'D'$ của một chiếc hộp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 5cm.

Con kiến muốn bò qua sáu mặt của chiếc hộp rồi quay trở lại M. Quãng đường bò đi ngắn nhất của con kiến là

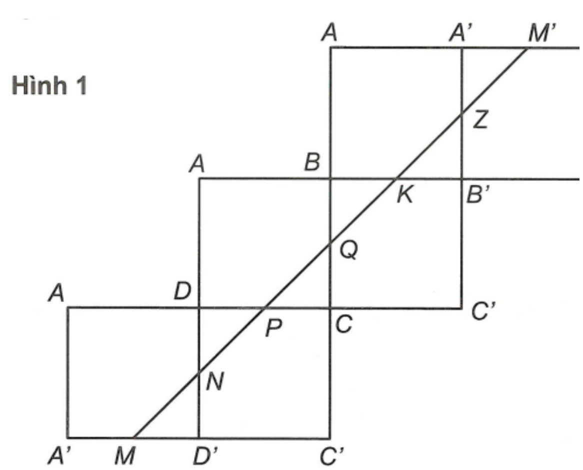


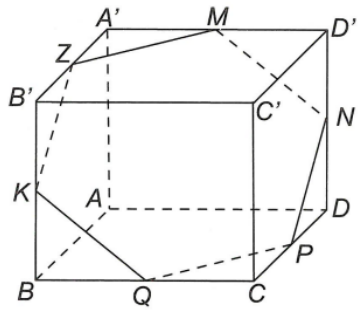
A. $16\sqrt{2}cm$.	**B.** $15\sqrt{2}cm$.

C. $12\sqrt{2}cm$.	**D.** $13\sqrt{2}cm$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.





Trải sáu mặt phẳng của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ 1. Để đi đường ngắn nhất từ M đến $M'(M \equiv M'$ hay M' là trung điểm $A'D'$ trên mặt khai triển) thì con kiến cần bò theo đoạn MM'. Trên chiếc hộp, đường đi ngắn nhất của con kiến là đường $MNPQKZM$ như hình 2 với N, P, Q, K, Z lần lượt là trung điểm của $DD', CD, BC, BB', A'B'$.

Quãng đường ngắn nhất con kiến bò là đoạn $MNPQKZM$.

Ta có $MNPQKZM = MN + NP + PQ + QK + KZ + ZM$.

Các đoạn thẳng con kiến bò trên các mặt hình lập phương đều có độ dài bằng nửa độ dài đường chéo hình vuông.

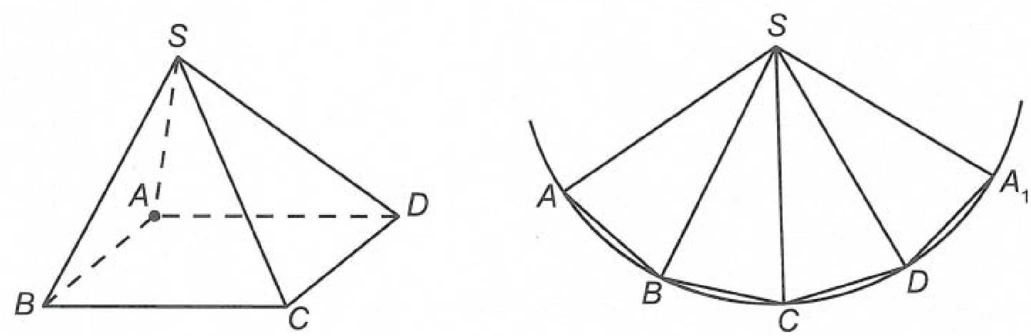
Do đó quãng đường con kiến bò ngắn nhất là $6.\dfrac{5\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$

Bài tập 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ một con kiến bò từ đỉnh A của đáy để đi tất cả các mặt xung quanh rồi trở về vị trí A. Biết cạnh bên bằng 6cm, cạnh đáy bằng 4cm. Quãng đường ngắn nhất mà con kiến đi là

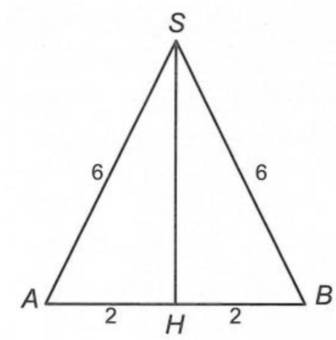
A. $13,48cm$. **B.** $10,25cm$. **C.** $12,05cm$. **D.** $11,73cm$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Trải hình chóp thành hình như hình vẽ trên. Khi đó quãng đường ngắn nhất con kiến phải bò là AA_1



Ta có $\sin\widehat{\mathrm{AS}H}=\dfrac{AH}{SA}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\widehat{\mathrm{AS}H}=19^0 28'\Rightarrow\widehat{\mathrm{ASA}_1}=8.19^0 28'=155^0 46'$

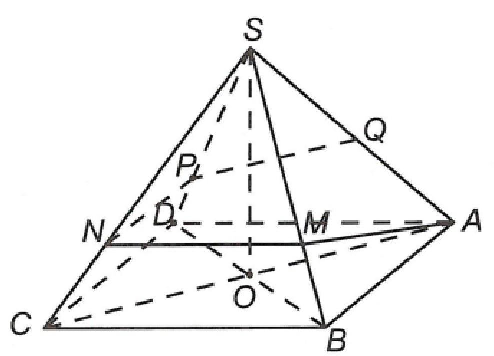
$\Rightarrow AA_1=\sqrt{SA^2+SA_1^2-2SA.SA_1\cos\widehat{\mathrm{AS}A_1}}=11,73cm$

Bài tập 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=a$ và $\widehat{SAB}=\dfrac{11\pi}{24}$. Gọi Q là trung điểm cạnh SA. Trên các cạnh SB,SC,SD lần lượt lấy các điểm M,N,P không trùng với các đỉnh của hình chóp. Giá trị nhỏ nhất của tổng $AM+MN+NP+PQ$ theo a là

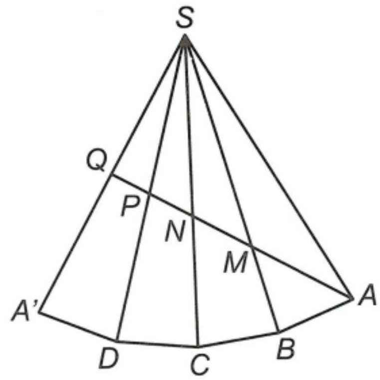
A. $\dfrac{a\sqrt{2}\sin\dfrac{11\pi}{24}}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}\sin\dfrac{11\pi}{12}}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Trải phẳng



Do hình chóp tứ giác đều nên mỗi mặt bên đều là các tam giác cân, theo giả thiết $\widehat{SAB}=\frac{11\pi}{24}$ nên

$\widehat{ASB}=\pi-\frac{22\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$ (1)

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải các mặt bên thành một mặt phẳng ta được hình vẽ như trên sao cho khi ghép lại thì $A\equiv A'$. Khi đó, tổng $AM+MN+NP+PQ$ là tổng các đường gấp khúc nên tổng này nhỏ nhất nếu xảy ra các điểm A,Q,M,N,P thẳng hàng và Q là hình chiếu của A trên SA'.

Đồng thời theo (1) ta có $\widehat{\mathrm{AS}A'}=4.\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$ (2)

Suy ra $\Delta \mathrm{ASA}'$ là tam giác đều.

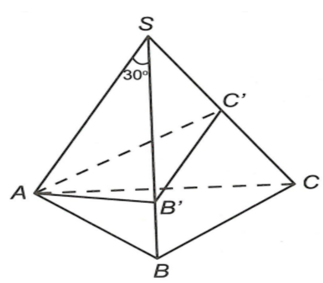
Vậy $AQ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ hay GTNN của tổng $AM+MN+NP+PQ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài tập 6 Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=30^0, SA=1$. Lấy B',C' lần lượt thuộc cạnh SB,SC sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tỉ số $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

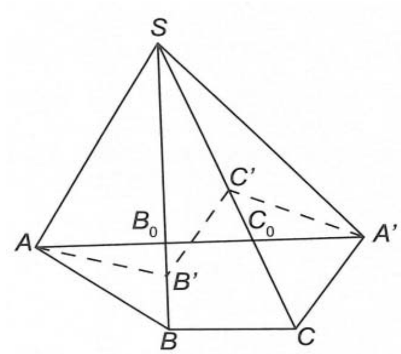
A. $0,55$. **B.** $0,65$. **C.** $0,45$. **D.** $0,75$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Trải phẳng



Cắt tứ diện theo các cạnh SA, AC, AB rồi trải lên mặt (SBC).

Tam giác SBC giữ nguyên; tam giác SAB lật thành tam giác ΔSAB; tam giác SAC thành tam giác $\Delta SCA'$

Do đó $AC' = A'C', SA' = SA = 1$

$\widehat{ASA'} = \widehat{ASB} + \widehat{BSC} + \widehat{CSA'} = 3.30^0 = 90^0$ và $SA' = SA = 1$ nên $\Delta SAA'$ là tam giác vuông cân tại S.

$C_{AB'C'} = AB' + B'C' + AC' = AB' + B'C' + A'C' \geq AA' = \sqrt{2}$ không đổi.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A, B', C', A' thẳng hàng tức là khi $B' = B_0, C' = C_0$.

Ta có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SB_0}{SB} = \dfrac{SB_0}{SA} = \dfrac{\sin \widehat{SAB_0}}{\sin \widehat{SB_0A}} = \dfrac{\sin 45^0}{\sin 105^0} = -1 + \sqrt{3}$

Vậy $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \left(\dfrac{SB'}{SB}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$.

Dạng 14.Bài toán cực trị liên quan đến thể tích khối đa diện

1. Phương pháp

Bước 1: Chọn ẩn. Ẩn này có thể là góc α hoặc cạnh thích hợp trong khối đa diện.

Bước 2: Với ẩn số được chọn ở bước 1, ta xem đó như là các yếu tố đã cho để tính thể tích V của khối đa diện theo các phương pháp đã biết.

Bước 3: Ta có một hàm số $f(x), \forall x \in D$ mà cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó.

Dùng bất đẳng thức cổ điển

(Cô-si hay Bunhiacopxki) hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

1. Bất đẳng thức Cô-si.

$a)$ Cho $a \geq 0, b \geq 0$ ta có $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

$b)$ Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ ta có $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

$c)$ Cho $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ \ldots, \ a_n \geq 0$

Ta có $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Các bất đẳng thức cơ bản.

Các dạng hay sử dụng.

$+)$ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0;$ $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \geq \dfrac{8}{(a+b)^2};$ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$

$+)$ $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

$+)$ $3(ab + bc + ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

$+)$ $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right) \geq n^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} \geq \dfrac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

a. Dạng đa thức Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Cho 2 bộ số $(n \in Z, n \geq 2): a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ta có

$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$

$\geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

b. Dạng phân thức

Cho 2 bộ số $(n \in Z, n \geq 2): a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ với $\forall b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$.

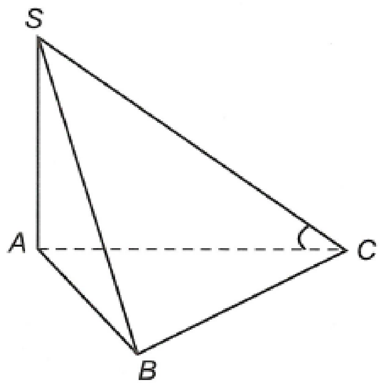
Ta có $\dfrac{a_1^2}{b_1} + \dfrac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \dfrac{a_n^2}{b_n} \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$.

Bài tập: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho $SC = a$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc α. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{a^3}{16}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $\widehat{\left(\left(SBC\right),\left(ABC\right)\right)}=\left(\widehat{SC,AC}\right)=\widehat{SCA}=\alpha$

Xét ΔSAC vuông tại A có

$$\begin{cases} SA=SC.\sin\alpha=a\sin\alpha \\ AC=SC.\cos\alpha=a\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}AC^2\right).SA=\frac{1}{6}.\left(a\cos\alpha\right)^2.a\sin\alpha=\frac{a^3}{6}\cos^2\alpha.\sin\alpha.$$

$V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi biểu thức

$P=\cos^2\alpha.\sin\alpha.=\left(1-\sin^2\alpha\right).\sin\alpha$ đạt giá trị lớn nhất

Cách 1:

Đặt $t=\sin\alpha$. Vì $0<\alpha<90^\circ$ nên $0<\sin\alpha<1$

$\Rightarrow 0<t<1$

Ta có $P=f\left(t\right)=\left(1-t^2\right)t=-t^3+t$ xác định và liên tục trên $\left(0;1\right)$.

$$f'\left(t\right)=-3t^2+1\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\quad \text{(nhan)} \\ t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \text{(loai)} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	$+\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1	$-\infty$
$f'(t)$		0		$+$	0	$-$		
$f(t)$				$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$		

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{(0;1)} f\left(t\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\max V_{S.ABC}=\frac{a^3}{6}.P_{\max}=\frac{a^3}{6}.\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{a^3\sqrt{3}}{27}$ khi và chỉ khi $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:

Vì $0<\alpha<90^\circ \Rightarrow \sin\alpha>0$

$\Rightarrow P^2=\left(1-\sin^2\alpha\right)^2\sin^2\alpha \qquad =\dfrac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right)}{2}$.

Áp dụng Cô-si cho 3 số dương $1-\sin^2\alpha, 1-\sin^2\alpha$ và $2\sin^2\alpha$, ta được:

$\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right)$

$\le\left[\dfrac{\left(1-\sin^2\alpha\right)+\left(1-\sin^2\alpha\right)+\left(2\sin^2\alpha\right)}{3}\right]^3=\dfrac{8}{27}$

$\Rightarrow\dfrac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right)}{2}\le\dfrac{4}{27}$

$\Rightarrow P^2{}_{\max}=\dfrac{4}{27}\Rightarrow P_{\max}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi $1-\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\max V_{S.ABC}=\dfrac{a^3}{6}.P_{\max}=\dfrac{a^3}{6}.\dfrac{2\sqrt{3}}{9}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}$.

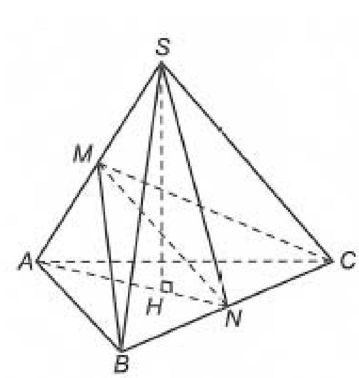
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho $SA=x$, $x\in\left(0;\sqrt{3}\right)$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{1}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{16}$ **C.** $\dfrac{1}{12}$ **D.** $\dfrac{1}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Tổng quát:

Cho hình chóp S.ABC có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho SA=x, các cạnh còn lại đều bằng a (a là hằng số) với

Ta có tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và BC.

Ta có ΔSAB và ΔSAC là hai tam giác cân tại B và C nên $\begin{cases} SA\perp BM \\ SA\perp CM \end{cases}$

$\Rightarrow SA\perp (BCM)\Rightarrow SA\perp BC.$

Mặt khác $BM=CM=\sqrt{AB^2-(AM)^2}=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\Rightarrow \Delta BMC$ cân tại M.

Suy ra $MN\perp BC\Rightarrow BC\perp (SAN)$.

Kẻ $SH\perp AN$. Do $BC\perp (SAN)\Rightarrow BC\perp SH\Rightarrow SH\perp (ABC)$.

Ta có $MN=\sqrt{SN^2-SM^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3-x^2}$.

$S_{\Delta SAN}=\dfrac{1}{2}SA.NM=\dfrac{1}{2}SH.AN\Rightarrow SH=\dfrac{SA.NM}{AN}\Rightarrow SH=\dfrac{x\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta .ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta .ABC}.SH=\dfrac{x\sqrt{3-x^2}}{12}\le \dfrac{1}{12}.\left(\dfrac{x^2+3-x^2}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$.

Vậy $\max V_{S.ABC}=\dfrac{1}{8}$ đạt được khi và chỉ khi $x^2=3-x^2\Leftrightarrow x^2=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$x\in\left(0;a\sqrt{3}\right)$. *Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là* $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3}{8}$.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC), với $\alpha<45°$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $4a^3$ **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$

C. $\dfrac{4a^3}{3}$ **D.** $\dfrac{2a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

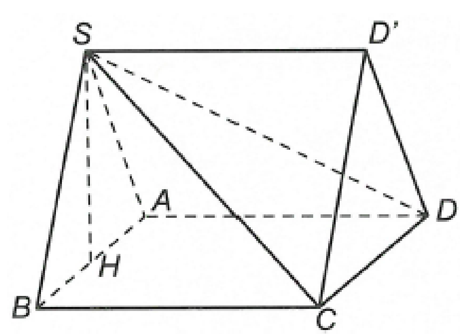
Chọn C

Gọi D' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SADD'$.

Khi đó $DD'//SA$ mà $SA\perp (SBC)$

Nên $DD'\perp (SBC)$

Ta có $\left(\widehat{SD,(SBC)}\right)=\alpha=\widehat{DSD'}=\widehat{SDA}$,



Do đó $SA = AD.\tan\alpha = 2a\tan\alpha.$

Đặt $\tan\alpha = x,\ x \in (0;1)$

Gọi H là hình chiếu của S lên AB, ta có

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{4a^2}{3}.SH.$$

Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi SH lớn nhất.

Vì ΔSAB vuông tại S nên

$$SH = \frac{SA.SB}{AB} = \frac{SA\sqrt{AB^2 - SA^2}}{AB} = \frac{2ax\sqrt{4a^2 - 4a^2x^2}}{2a} = 2ax\sqrt{1-x^2}.$$

$$\Rightarrow SH \le 2a.\frac{x^2 + 1 - x^2}{2} = a.$$

Từ đó $\max SH = a$ khi $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Vậy $\max V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a.4a^2 = \frac{4a^3}{3}.$

Bài tập 3. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SC = a,$ cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{3a^3}{8}$ **D.** $\frac{a^3}{4}$

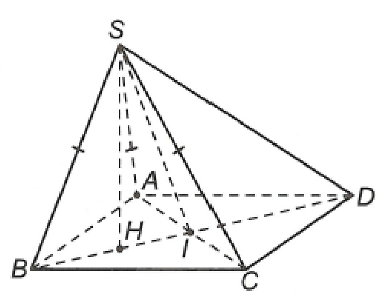
Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi I là tâm hình thoi $ABCD$, H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra $H \in BI$.

Ta có $SI^2 = SA^2 - IA^2 = a^2 - IA^2$,

$IB^2 = AB^2 - IA^2 = a^2 - IA^2$ suy ra $SI = IB$.



Khi đó tam giác SBD vuông tại S.

Đặt $SD = x$.

Ta có $SB.SD = SH.BD \Leftrightarrow a.x = SH.BD \Leftrightarrow SH = \dfrac{a.x}{BD}$

Ta có $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SH.\dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{ax}{BD}.\dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{6}ax.AC.$

Lại có $BD^2 = SB^2 + SD^2 = a^2 + x^2$ suy ra $IB^2 = \dfrac{a^2 + x^2}{4}$

$\Rightarrow IA^2 = a^2 - \dfrac{a^2 + x^2}{4} = \dfrac{3a^2 - x^2}{4}.$

Suy ra $AC = 2IA = 2\sqrt{\dfrac{3a^2 - x^2}{4}} = \sqrt{3a^2 - x^2}.$

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{6}ax.\sqrt{3a^2 - x^2} \le \dfrac{a}{6}.\dfrac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \dfrac{a^3}{4}.$

Bài tập 4 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T = \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $T = 2.$ **B.** $T = \dfrac{5}{4}.$

C. $T = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}.$ **D.** $T = \dfrac{13}{9}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

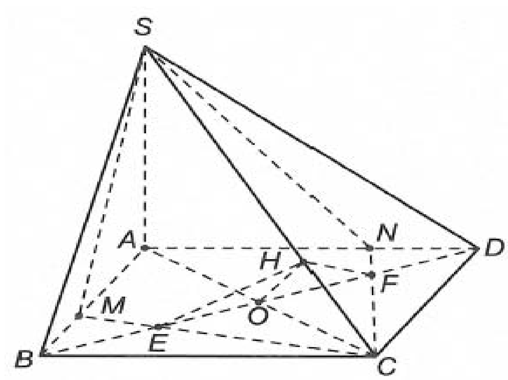
Đặt $AM = x, AN = y.$

Gọi

$\{O\} = AC \cap DB;$ $\{E\} = BD \cap CM;$

$\{F\} = BD \cap CN.$

H là hình chiếu vuông góc của O trên SC, khi đó: $HO = \sqrt{\dfrac{2}{3}}.$



Ta có $\begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}.$

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF. Suy ra $HE \perp HF$.

Mặt khác $V_{S.AMCN}=\frac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\frac{2}{3}\left(x+y\right)$.

Ta có $x>0,y>0$ và nếu $x\neq 2,y\neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM, khi đó

$\frac{OE}{EB}=\frac{KM}{MB}=\frac{x}{4-2x}\Rightarrow\frac{OE}{x}=\frac{EB}{4-2x}=\frac{OB}{4-x}\Rightarrow OE=\frac{x\sqrt{2}}{4-x}$.

Tương tự $OF=\frac{y\sqrt{2}}{4-y}$ mà $OE.OF=OH^2\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(y+2\right)=12$.

Nếu $x=2$ hoặc $y=2$ thì ta có $OE.OF=OH^2\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(y+2\right)=12$.

Suy ra $V_{S.AMCN}=\frac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\frac{2}{3}\left(x+y\right)=\frac{2}{3}\left[\left(x+2\right)+\left(y+2\right)-4\right]$

$=\frac{2}{3}\left[\left(x+2\right)+\frac{12}{x+2}-4\right]$.

Do đó $\max V_{S.AMCN}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow T=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB=1,AC=\sqrt{3}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là điểm H sao cho các mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAC\right)$ cùng tạo với SH góc $30°$ và mặt phẳng $\left(SBC\right)$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V_{\max}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.
B. $V_{\max}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.
C. $V_{\max}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.
D. $V_{\max}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

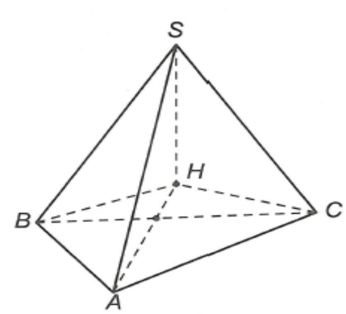
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\widehat{\left(SH,\left(SAB\right)\right)}=\widehat{\left(SH,\left(SAC\right)\right)}=30°$ nên hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAC\right)$ sẽ cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$.

Suy ra $d\left(H,AB\right)=d\left(H,AC\right)=d\left(H,BC\right)$

tức H hoặc là tâm nội tiếp hoặc là tâm bàng tiếp các góc A,B,C của tam giác.



Ta có $S=\frac{\sqrt{3}}{2};p=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ còn các cạnh $a=2,b=\sqrt{3},c=1$.

Khi đó $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};r_a=\dfrac{S}{p-a}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2};$

$r_b=\dfrac{S}{p-b}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};r_c=\dfrac{S}{p-c}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}.$

Chiều cao chóp lớn nhất khi $SH_{\max}=r_a\sqrt{3}=\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V_{\max}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}.$

Bài tập 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α với $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{4a^3\sqrt{7}}{49}$. **B.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{27}$.

C. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4a^3\sqrt{15}}{75}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$AC\cap BD=\{O\}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$

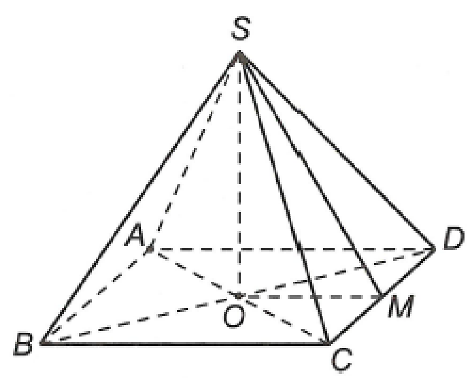
Gọi M là trung điểm của CD

$\Rightarrow\widehat{((SCD),(ABCD))}=\widehat{SMO}=\alpha.$

Gọi độ dài một cạnh hình vuông là x.

Tam giác SMC vuông tại M có

$SM=\sqrt{SC^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{x^2}{4}}.$



Tam giác SOM vuông tại O có:

$OM=SM.\cos\widehat{SMO}=\cos\alpha.\sqrt{a^2-\dfrac{x^2}{4}}$

$\Rightarrow\dfrac{x}{2}=\cos\alpha.\sqrt{a^2-\dfrac{x^2}{4}}\Rightarrow\dfrac{x^2}{4}=\left(a^2-\dfrac{x^2}{4}\right)\cos^2\alpha$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{4a^2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}=\dfrac{4a^2.\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}}{1+\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}}=\dfrac{4a^2}{2+\tan^2\alpha}\Rightarrow x=\dfrac{2a}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}}.$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{4a^2}{2+\tan^2\alpha}.$

Ta có: $SO = OM.\tan\widehat{SMO} = \dfrac{x}{2}.\tan\alpha = \dfrac{a.\tan\alpha}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}}$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.\frac{4a^2}{2+\tan^2\alpha}.\frac{a.\tan\alpha}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}} = \frac{4a^3.\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}.$$

Do $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan\alpha > 0$. Thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất khi $\dfrac{4}{3}.\dfrac{a^3.\tan\alpha}{\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta xét $f\left(\alpha\right) = \dfrac{\tan^2\alpha}{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\dfrac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha};\dfrac{1}{2+\tan^2\alpha};\dfrac{1}{2+\tan^2\alpha}$.

Ta có $f\left(\alpha\right) = \dfrac{\tan^2\alpha}{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3} = \dfrac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha}.\dfrac{1}{2+\tan^2\alpha}.\dfrac{1}{2+\tan^2\alpha}$

$$\le \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha}+\frac{1}{2+\tan^2\alpha}+\frac{1}{2+\tan^2\alpha}\right)\right]^3 = \frac{1}{27}.$$

$$f\left(\alpha\right) = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha} = \frac{1}{2+\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $\max V_{SABCD} = \dfrac{4a^3}{3\sqrt{\left(2+1\right)^3}} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{27}$.

Bài tập 7. Một hình hộp chữ nhật có diện tích toàn phần là S. Thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật là

A. $\dfrac{S\sqrt{S}}{3}$.

B. $\dfrac{S\sqrt{S}}{36}$.

C. $\dfrac{S\sqrt{6S}}{36}$.

D. $\dfrac{S\sqrt{3S}}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật lần lượt là a,b,c với $a,b,c > 0$.

Ta có $S = 2ab + 2ac + 2bc$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$:

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \ge 3\sqrt[3]{2ab.2ac.2bc} = 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le S \Rightarrow a^2b^2c^2 \le \dfrac{S^3}{216} \Rightarrow abc \le \sqrt{\dfrac{S^3}{216}} = \dfrac{S\sqrt{6S}}{36}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hình hộp chữ nhật trở thành hình lập phương.

Trong các hình hộp chữ nhật có cùng diện tích toàn phần thì hình lập phương thì có thể tích lớn nhất.

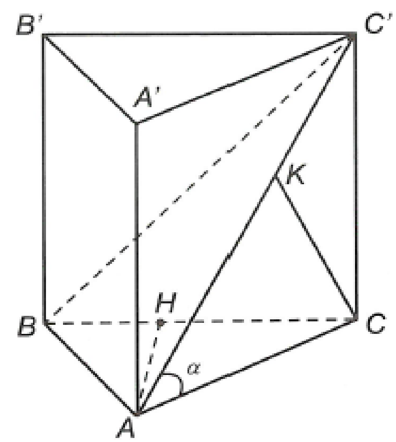
Bài tập 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ AA' đến $\left(BCC'B'\right)$ và khoảng cách từ C đến $\left(ABC'\right)$ đều bằng x không đổi, góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABC'\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất thì góc α có giá trị gần nhất giá trị nào sau đây?

A. $25°$ **B.** $35°$

C. $45°$ **D.** $55°$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Dựng $AH \perp BC$ $\left(H \in BC\right)$,

$CK \perp AC'(K \in AC')$

Ta có $d\left(AA';\left(BCC'B'\right)\right) = AH = x$ và

$d\left(C;\left(ABC'\right)\right) = CK = x$

$\widehat{\left(\left(ABC'\right);\left(ABC\right)\right)} = \widehat{CAC'} = \alpha$.

Xét tam giác ACK vuông tại K có

$AC = \dfrac{CK}{\sin\alpha} = \dfrac{x}{\sin\alpha}$.

Xét tam giác ACC' vuông tại C có $CC' = AC.\tan\alpha = \dfrac{x}{\sin\alpha}.\tan\alpha = \dfrac{x}{\cos\alpha}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AB = \frac{AH.AC}{\sqrt{AH^2 - AC^3}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\sin^2\alpha\right)}} = \frac{x}{\cos\alpha}.$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}AB.AC.CC' = \frac{x^3}{2\sin\alpha\cos^2\alpha}.$$

Để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là nhỏ nhất thì $\sin\alpha\cos^2\alpha$ lớn nhất.

Ta có $\sin^2\alpha\cos^4\alpha = \dfrac{1}{2}2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha}{3}\right) = \frac{8}{54} \Rightarrow \sin\alpha\cos^2\alpha \le \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \ge \frac{3x^3\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $V_{\min} = \dfrac{3x^3\sqrt{3}}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha \approx 35°$.

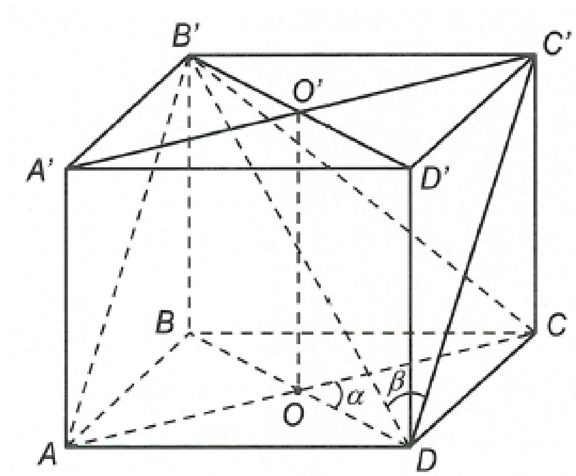
Bài tập 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB < BC$ và $BD = 3cm$. Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ hợp với nhau một góc $\alpha\left(0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Đường chéo $B'D$ hợp với mặt phẳng $(CDD'C')$ một góc $\beta\left(0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Hai góc α, β thay đổi nhưng thỏa mãn hình hộp $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều. Giá trị lớn nhất thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

A. $\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **B.** $2\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

C. $6\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **D.** $12\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $\left(\widehat{(ACC'A');(BDD'B')}\right) = \widehat{COD} = \alpha$

$\Rightarrow \widehat{CBD} = \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow BC = BD.\cos\widehat{CBD} = 3\cos\dfrac{\alpha}{2}$

Lại có $CD = BD.\sin\widehat{CBD} = 3\sin\dfrac{\alpha}{2}$

Ta có $\left(\widehat{B'D;(CDD'C')}\right) = \widehat{B'DC'} = \beta$

Do $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều nên $BC = CC'$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = BC.CD.CC' = 27.\sin\dfrac{\alpha}{2}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

Xét $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^4\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}.2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=2\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\le\frac{2\sqrt{3}}{9}\Rightarrow V\le 6\sqrt{3}.$$

Dạng 15: Sử dụng thể tích để tính khoảng cách

1. Phương pháp

- Để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta sử dụng phương pháp đổi đỉnh và áp dụng công thức $V=\frac{1}{3}h.S\Rightarrow h=\frac{3V}{S}$.
- Trong đó V là thể tích khối đa diện, S là diện tích đáy và h là khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy.
- Để tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau ta áp dụng công thức $V=\frac{1}{6}AB.CD.\sin\left(\widehat{AB,CD}\right)d\left(AB;CD\right)\Rightarrow d\left(AB;CD\right)=\frac{6V}{AB.CD.\sin\left(\widehat{AB,CD}\right)}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở B. Cạnh SA vuông góc với đáy. Biết $SA=a, AB=b.$ Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **B.** $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. **D.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

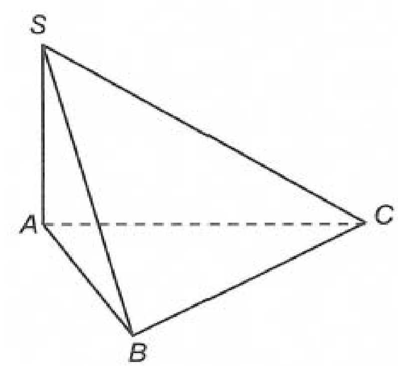
Hướng dẫn giải

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng chiều cao của hình chóp $A.SBC$.

Do đó:

$d\left(A,(SBC)\right)=$

Chọn D



Ta có $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{3V_{A.SBC}}{S_{SBC}}$.

Ta có:

$V_{A.SBC}=V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{6}SA.AB.BC.$

Mặt khác $SA\perp\left(SBC\right)\Rightarrow SA\perp BC$ mà ΔABC vuông tại B nên $BC\perp BA.$

Suy ra $BC\perp SB$ hay ΔSBC vuông tại B

$\Rightarrow S_{SBC}=\dfrac{1}{2}BC.BS.$

Vậy $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{3.\dfrac{1}{6}SA.AB.BC}{\dfrac{1}{2}SB.BC}=\dfrac{SA.AB}{SB}=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

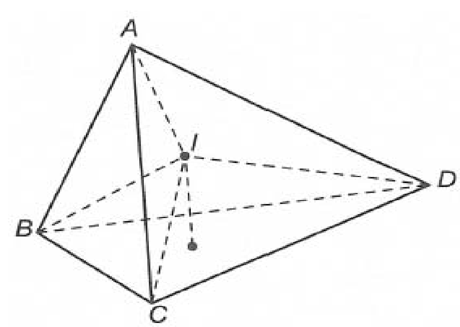
Bài tập 2. Cho tứ diện đều cạnh bằng 1 và điểm I nằm trong tứ diện. Tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện là

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Xét tứ diện đều $ABCD$ có diện tích đáy là $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ nên thể tích tứ diện đều $ABCD$ là $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Gọi h_1,h_2,h_3,h_4 lần lượt là khoảng cách từ I đến các mặt $\left(BCD\right)$, $\left(ACD\right)$, $\left(ABD\right)$, $\left(ABC\right)$.

Cách trắc nghiệm:

Chọn đặc biệt $I\equiv A$. Khi đó tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện bằng khoảng cách từ A đến $\left(BCD\right)$ và bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Đặt $V_1=V_{IBCD}$, $V_2=V_{IACD}$, $V_3=V_{IABD}$, $V_4=V_{IABC}$.

Ta có $V=V_1+V_2+V_3+V_4$.

$V_1 = \frac{1}{3}h_1.S_{BCD} \Rightarrow h_1 = \frac{3V_1}{S_{BCD}}$.

Tương tự $h_2 = \frac{3V_2}{S_{ACD}}, h_3 = \frac{3V_3}{S_{ABD}}, h_4 = \frac{3V_4}{S_{ABC}}$.

Vậy $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3V_1}{S_{BCD}} + \frac{3V_2}{S_{ACD}} + \frac{3V_3}{S_{ABD}} + \frac{3V_4}{S_{ABC}}$.

Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên $S_{BCD} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3V}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

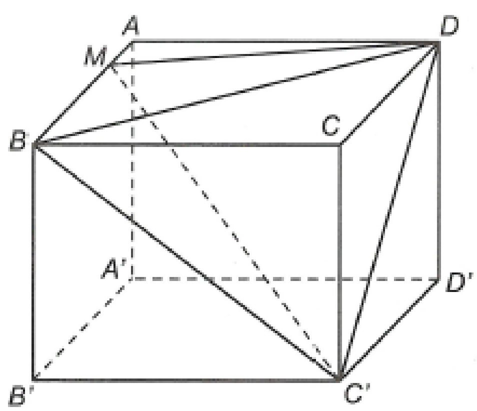
Bài tập 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3, AD = 4, AA' = 5$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $BM = 4AM$. Khoảng cách từ C' đến BD bằng 4. Khoảng cách từ điểm M đến $\left(BC'D\right)$ là

A. 2 **B.** $\frac{12}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $BM = 4AM \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow V_{M.BC'D} = \frac{4}{5}V_{A.BC'D}$

Mà $V_{A.BC'D} = V_{C'.ABD} = \frac{1}{3}CC'.S_{ABD} = \frac{1}{6}CC'.AB.AD = 10 \Rightarrow V_{M.BC'D} = 8$.

Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5, S_{C'BD} = \frac{1}{2}d_{(C',BD)}.BD = 10$.

Ta có $V_{M,BC'D}=\frac{1}{3}d_{(M,(BC'D))}.S_{BC'D}\Rightarrow d_{(M,(BC'D))}=\frac{3V_{M.BC'D}}{S_{BC'D}}=\frac{12}{5}$.

Bài tập 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=4,\ AC=BD=5,\ AD=BC=6.$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(BCD\right)$ là

A. $\frac{3\sqrt{6}}{7}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{3\sqrt{42}}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối tứ diện gần đều, ta có

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(-4^2+5^2+6^2\right)\left(4^2-5^2+6^2\right)\left(4^2+5^2-6^2\right)}=\frac{15\sqrt{6}}{4}.$$

Ta có $p=\frac{BC+CD+DB}{2}=\frac{4+5+6}{2}=\frac{15}{2}$.

Suy ra $S_{\Delta BCD}=\sqrt{p\left(p-4\right)\left(p-5\right)\left(p-6\right)}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

Ta có $d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{3V_{A.BCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{3.\frac{15\sqrt{6}}{4}}{\frac{15\sqrt{7}}{4}}=\frac{3\sqrt{42}}{7}$.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=2,\ SB=3,\ SC=4$ .Góc $\widehat{ASB}=45^\circ,\widehat{BSC}=60^\circ,\widehat{CSA}=90^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\frac{6\sqrt{34}}{17}$.

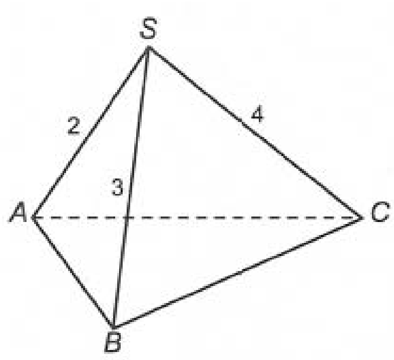
B. $\frac{4\sqrt{34}}{17}$.

C. $\frac{7\sqrt{34}}{17}$.

D. $\frac{3\sqrt{34}}{17}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Hình chóp $S.ABC$ có $SA = a,\ SB = b,\ SC = c$ và $\widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{CSA} = \gamma$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma} \Rightarrow V_{S.ABC} = 2.$$

Ta có: $AC = \sqrt{20};\ BC = \sqrt{13}.$

$$\cos\left(SA, BC\right) = \left|\frac{SB^2 - SC^2 + AC^2 - AB^2}{2SA.BC}\right| = \left|\frac{3^2 - 4^2 + 20 - 13 + 6\sqrt{2}}{2.2.\sqrt{13}}\right| = \frac{3}{\sqrt{26}}.$$

Suy ra $\sin\left(SA, BC\right) = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}.$

Suy ra $d\left(SA, BC\right) = \frac{6V}{SA.BC.\sin\widehat{\left(SA, BC\right)}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}.$

Bài tập 6. Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Trên AB lấy hai điểm M, N trên CD lấy hai điểm P, Q thỏa mãn $2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} = 1$. Thể tích khối MNPQ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{V}{8}$.

B. $\frac{V}{16}$.

C. $\frac{V}{24}$.

D. $\frac{V}{32}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

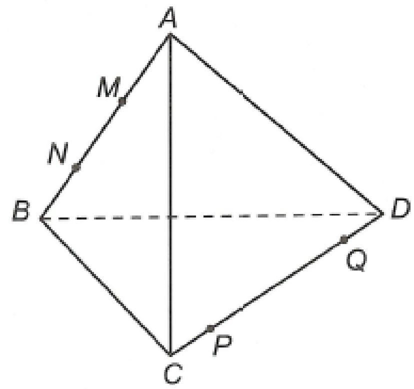
$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.d\left(AB, CD\right).\sin\left(AB, CD\right);$

$V_{MNPQ} = \frac{1}{6} MN.PQ.d\left(MN, PQ\right).\sin\left(MN, PQ\right).$

Do $d\left(AB, CD\right) = d\left(MN, PQ\right)$ và

$\sin\left(AB, CD\right) = \sin\left(MN, PQ\right)$ nên

$\frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{MN.PQ}{AB.CD}.$



Ta có $2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} \geq 2\sqrt{2\frac{MN}{CD}.3\frac{PQ}{AB}} = 2\sqrt{6\frac{MN}{CD}.\frac{PQ}{AB}}$

$\Rightarrow \sqrt{6\frac{MN}{CD}.\frac{PQ}{AB}} \leq \frac{1}{2}$ do $2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} = 1$

$\Rightarrow \frac{MN}{CD}.\frac{PQ}{AB} \leq \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} \leq \frac{1}{24}.$

Vậy $V_{MNPQ} \leq \frac{V}{24} \Rightarrow MaxV_{MNPQ} = \frac{V}{24}.$