SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
LIÊN CỤM TRƯỜNG THPT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 10, LỚP 11
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn thi: **TOÁN LỚP 11**
Ngày thi: 09/3/2024
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I *(5 điểm)* Cho phương trình $\cos 2x - 3\sin x - m + 4 = 0$ với m là tham số thực.

a) Giải phương trình khi $m = 0.$

b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right).$

Câu II *(4 điểm)* Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{ax^2+b}{4x-4} & \text{khi } x<1 \\ \dfrac{x+1-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{khi } x>1 \end{cases}.$

a) Tính $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right).$

b) Biết $f\left(1\right) = \frac{3}{4},$ tìm tất cả các cặp số thực a,b để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1.$

Câu III *(3 điểm)* Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số sao cho trong mỗi số đó, các chữ số $1,2,3$ đều xuất hiện 2 lần.

a) Tính số phần tử của tập hợp $S.$

b) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc $S.$ Tính xác suất để số đó là số chẵn.

c) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc $S.$ Tính xác suất để số đó có các chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.

Câu IV *(5 điểm)* Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A,$ $B = 60^\circ,$ $AB = a.$ Đường thẳng SB vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SB = a.$ Gọi O,E lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng BC và $AB.$

a) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và $CE.$ Tính $\cos\alpha.$

b) Một mặt phẳng song song với hai đường thẳng $OA, SB,$ cắt các cạnh AB, SA, SC, BC của hình chóp $S.ABC$ lần lượt tại các điểm $M,N,P,Q.$ Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $MNPQ.$

Câu V *(3 điểm)* Cho dãy số $\left(u_n\right)$ được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 - 3u_n + 4, \forall n = 1,2,3,... \end{cases}.$

a) Chứng minh $u_n > 2, \forall n = 1,2,3,...$

b) Chứng minh $\left(u_n\right)$ là dãy số tăng.

c) Chứng minh $\dfrac{1}{u_1 - 1} + \dfrac{1}{u_2 - 1} + ... + \dfrac{1}{u_{2024} - 1} < 1.$

-----------------**HẾT**-----------------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:…………………………………… Số báo danh:………………..

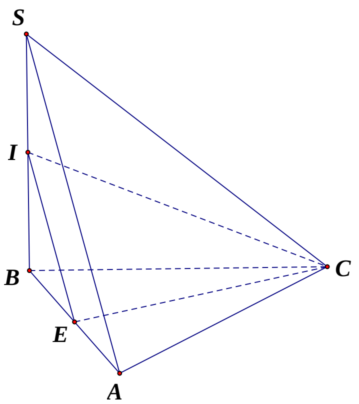
Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
LIÊN CỤM TRƯỜNG THPT

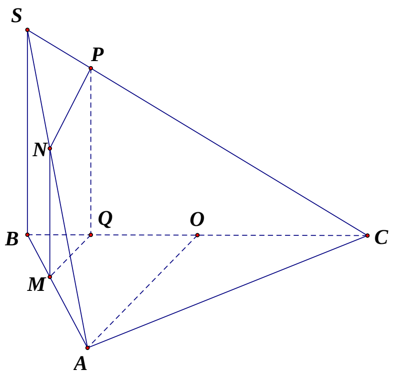
KỲ THI OLYMPIC DÀNH CHO HỌC SINH
LỚP 10, LỚP 11
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn thi: **TOÁN LỚP 11**
Ngày thi: 09/3/2024

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
I	a)	Với $m=0$, phương trình đã cho trở thành $\cos 2x-3\sin x+4=0$ $\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-5=0$	1,0
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{5}{2}(l)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$	1,0
	b)	Ta có $m=-2\sin^2 x-3\sin x+5$ Đặt $t=\sin x$, khi $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $t\in\left(-1;1\right]$. Xét hàm số $y=-2t^2-3t+5$ trên $t\in\left(-1;1\right]$.	1,0
		Ta có Bảng biến thiên $\begin{array}{c\|ccccc} t & -1 & & -\dfrac{3}{4} & & 1 \\ \hline y & & & \dfrac{49}{8} & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & 6 & & & & 0 \end{array}$	1,0
		Suy ra phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ khi và chỉ khi $0\le m\le \dfrac{49}{8}$.	1,0
II	a)	Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1-\sqrt{x+3}}{x-1}$	1,0
		$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-2}{\left(x-1\right)\left(x+1+\sqrt{x+3}\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x+1+\sqrt{x+3}}=\dfrac{3}{4}$	1,0
	b)	Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=f\left(1\right)=\dfrac{3}{4}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\dfrac{3}{4}$.	1,0

		Do $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{4x-4}$ khi $x<1$ nên để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ thì $a.1^2+b=0 \Leftrightarrow b=-a$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax^2+b}{4x-4}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{a(x+1)}{4}=\dfrac{a}{2}$. Suy ra $f(x)$ liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{4}\\ b=-a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$	1,0
III	a)	Số các số tự nhiên có 6 chữ số trong đó các chữ số 1,2,3 đều xuất hiện 2 lần là: $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ (số).	1,0
	b)	Số các số tự nhiên chẵn có 6 chữ số trong đó các chữ số 1,2,3 đều xuất hiện 2 lần là: $C_5^2C_3^2=30$ (số).	0,5
		Vậy xác suất cần tính là $P=\dfrac{30}{90}=\dfrac{1}{3}$.	0,5
	c)	Gọi A_i là tập hợp các số tự nhiên thuộc S sao cho 2 chữ số i đứng cạnh nhau $(i=1;2;3)$. Ta có $\lvert A_i\rvert=C_5^2C_3^2=30$ $\lvert A_i\cap A_j\rvert=C_4^2P_2=12$ $\lvert A_1\cap A_2\cap A_3\rvert=P_3=6$ Do đó số số tự nhiên thuộc S có 2 chữ số giống nhau đứng cạnh nhau là: $\lvert A_1\rvert+\lvert A_2\rvert+\lvert A_3\rvert-\lvert A_1\cap A_2\rvert-\lvert A_2\cap A_3\rvert-\lvert A_1\cap A_3\rvert+\lvert A_1\cap A_2\cap A_3\rvert=60$	0,5
		Suy ra số số tự nhiên thuộc S có 2 chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau là: $90-60=30$. Vậy xác suất cần tính là $P=\dfrac{30}{90}=\dfrac{1}{3}$.	0,5
IV	a)	 Gọi I là trung điểm SB $\Rightarrow EI\,//\,SA \Rightarrow (SA,CE)=(EI,CE)$.	0,5
		Tính được $CE=\dfrac{a\sqrt{13}}{2};\ IE=\dfrac{a\sqrt{2}}{2};IC=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.	0,5
		Từ đó tính được $\cos IEC=-\dfrac{\sqrt{26}}{26}$. Suy ra $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{26}}{26}$	1,0

b)



Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\cap(SAB)=MN\\ SB\subset(SAB)\\ SB\,//\,(\alpha)\end{cases}\Rightarrow MN\,//\,SB.$

$\begin{cases}(\alpha)\cap(ABC)=MQ\\ OA\subset(ABC)\\ OA\,//\,(\alpha)\end{cases}\Rightarrow MQ\,//\,OA.$

0,5

$\begin{cases}(\alpha)\cap(SBC)=PQ\\ SB\subset(SBC)\\ SB\,//\,(\alpha)\end{cases}\Rightarrow PQ\,//\,SB.$

0,5

Do $MN\,//\,PQ\Rightarrow MNPQ$ là hình thang.

0,5

c)

$\left.\begin{matrix}MN\,//\,SB\\ SB\perp MQ\end{matrix}\right\}\Rightarrow MN\perp MQ\Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông.

$S_{MNPQ}=\dfrac{MQ.(MN+PQ)}{2}.$

0,5

Đặt $BM=x(0<x<a).$

Ta có $\operatorname{Cos}B=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow BC=\dfrac{AB}{\cos B}=2a.$

Do O là trung điểm của $BC\Rightarrow AO=OB=\dfrac{1}{2}BC=a.$

$\Rightarrow\Delta BAO$ đều, mà $MQ\,//\,AO\Rightarrow\Delta BMQ$ đều $\Rightarrow MQ=BM=x.$

Xét ΔSAB ta có $\dfrac{MN}{SB}=\dfrac{AM}{AB}\Rightarrow MN=a-x.$

Xét ΔSBC ta có $\dfrac{PQ}{SB}=\dfrac{CQ}{CB}\Rightarrow\dfrac{PQ}{a}=\dfrac{2a-x}{2a}\Rightarrow PQ=\dfrac{2a-x}{2}$

0,5

Vậy $S_{MNPQ}=\dfrac{x\left(a-x+\dfrac{2a-x}{2}\right)}{2}=\dfrac{3x(4a-3x)}{12}\leq\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{3x+4a-3x}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{3}.$

Vậy diện tích lớn nhất là $S=\dfrac{a^2}{3}.$

0,5

V

a)

Ta chứng minh $u_n>2,\forall n\in\mathbb{N}^*.$

Với $n=1$ ta có $u_1=3>2.$ Vậy khẳng định đúng với $n=1.$

Giả sử khẳng định đúng với $n=k,$ tức là $u_k>2.$

0,5

Khi đó $u_{k+1}-2=u_k^{\,2}-3u_k+2=(u_k-1)(u_k-2)>0\Rightarrow u_{k+1}>2.$

Theo nguyên lý quy nạp thì $u_n>2,\forall n\in\mathbb{N}^*.$

0,5

	b)	Ta có $u_{n+1}-u_n=u_n^{\ 2}-4u_n+4=\left(u_n-2\right)^2>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$	0,5
		$\Rightarrow u_{n+1}>u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$ Suy ra $\left(u_n\right)$ là dãy số tăng.	0,5
	c)	Ta có $u_{n+1}-2=\left(u_n-1\right)\left(u_n-2\right)>0$ $\Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{\left(u_n-1\right)\left(u_n-2\right)}=\dfrac{1}{u_n-2}-\dfrac{1}{u_n-1},\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow \dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{1}{u_n-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}$	0,5
		Suy ra $S=\dfrac{1}{u_1-1}+\dfrac{1}{u_2-1}+...+\dfrac{1}{u_{2024}-1}$ $=\left(\dfrac{1}{u_1-2}-\dfrac{1}{u_2-2}\right)+\left(\dfrac{1}{u_2-2}-\dfrac{1}{u_3-2}\right)+...+\left(\dfrac{1}{u_{2024}-2}-\dfrac{1}{u_{2025}-2}\right)$ $=\dfrac{1}{u_1-2}-\dfrac{1}{u_{2025}-2}<1$	0,5