

TRẮC NGHIỆM

Toán 11(HK2)



**QUẢ BẠN GẶT ĐƯỢC NGÀY MAI QUYẾT
ĐỊNH BỞI NHÂN BẠN GIEO HÔM NAY**

👍 Hệ thống bài tập đa dạng.

👍 Phân dạng rõ ràng.

👍 Hơn 700 câu trắc nghiệm.

Huỳnh Chí Dũng

CHUYÊN ĐỀ ❶.

GIỚI HẠN - HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad (q < 1); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} C = C$ 2. Định lí : a) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì $\lim (u_n + v_n) = a + b$ $\lim (u_n - v_n) = a - b$ $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{nếu } b \neq 0)$ b) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ c) Nếu $u_n \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$ d) Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim u_n = a$ 3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q} \quad (q < 1)$	1. Giới hạn đặc biệt: $\lim \sqrt{n} = +\infty \quad \lim n^k = +\infty \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n = +\infty \quad (q > 1)$ 2. Định lí: a) Nếu $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ b) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ c) Nếu $\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a \cdot v_n > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a \cdot v_n < 0 \end{cases}$ d) Nếu $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a$ thì $\lim (u_n \cdot v_n) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$ * Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

LƯU Ý:

1. Định lí kẹp: Nếu $|u_n| \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$

2. Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:

- Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.
- Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của lũy thừa cao nhất của tử và của mẫu.
- Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là $+\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là $-\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu.

3. Một số tổng thường gặp

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$S_4 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1).n = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

$$S_5 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$S_6 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DANG 1: $\frac{\infty}{\infty}$ Giới hạn các giới hạn sau:

1) $\lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$

2) $\lim \frac{2n+1}{n^3 + 4n^2 + 3}$

3) $\lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4}$

4) $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

5) $\lim \frac{1+3^n}{4+3^n}$

6) $\lim \frac{4.3^n + 7^{n+1}}{2.5^n + 7^n}$

7) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$

8) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1} + 2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1} + n}$

9) $\lim \frac{\sqrt{n^2+3} - n - 4}{\sqrt{n^2+2} + n}$

10) $\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1} + n^2}$

DANG 2: $\infty - \infty$ Giới hạn các giới hạn sau:

1) $\lim (\sqrt{n^2+2n} - n - 1)$

2) $\lim (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2})$

3) $\lim (\sqrt[3]{2n-n^3} + n - 1)$

4) $\lim (1 + n^2 - \sqrt{n^4+3n+1})$

5) $\lim (\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+1})$

6) $\lim (\sqrt[3]{n^3+3n^2} - n)$

DANG 3: GIỚI HẠN DÃY SỐ

1) $\lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$

2) $\lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right)$

3) $\lim \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

4) $\lim \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{1+3+3^2+\dots+3^n}$

5) $\lim \left[\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \right]$

6) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = 1 \\ 2u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, (n \geq 1) \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1, \forall n \geq 1$.

b) Đặt $v_n = u_n - \frac{2}{3}$. Giới hạn v_n theo n . Từ đó tìm $\lim u_n$.

DẠNG 4: CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Giới hạn tổng các CSN sau:

1) $2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \dots$

2) $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \dots$

3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots$

Viết các số sau dưới dạng phân số

1) 1,(01).

2) 2,(17).

3) 3,020202020..

4) 4,115115115....

5) 3,666666..

6) 1,(23).

7) 2,(03).

8) 4,(11).

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu [1] Giới hạn $\lim \frac{2n-1}{2+3n}$ bằng:

A. 1.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Câu [2] Giới hạn $\lim \frac{2n^2-3n+1}{2-3n+n^2}$ bằng:

A. 1.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. 2.

D. $+\infty$.

Câu [3] Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\lim 2^{-n} \neq 0$.

B. $\lim \left(\frac{3}{\pi}\right)^n = 0$.

C. $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^{-n} = 0$.

D. $\lim \left(\frac{\pi}{3}\right)^{-n} \neq 0$.

Câu [4] Giới hạn $\lim \frac{1+\sqrt[3]{n^2+n}}{n}$ bằng:

A. 0.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $+\infty$.

D. 1.

Câu [5] Giới hạn $\lim \frac{n^3-2n+1}{3n^2-4n^3+2}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu [6] Giới hạn $\lim \frac{4n-1}{n^2-6n}$ bằng:

A. 0.

B. 4.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. -1.

Câu [7] Giới hạn $\lim \frac{1-2n^2}{3n-2}$ bằng:

- A. $+\infty$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{1}{2}$. **D. $-\infty$.**

Câu [8] Giới hạn $\lim \frac{\sqrt{2n-3}}{n+1}$ bằng:

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. **C. 0.** D. $+\infty$.

Câu [9] Giới hạn $\lim \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{3\sqrt{n}+2n-1}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$.** B. $\frac{1}{3}$. C. 0. D. $+\infty$.

Câu [10] Giới hạn $\lim \frac{n\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{2n\sqrt{n^2+1}+1}$ bằng:

- A. $+\infty$. B. 0. **C. $\frac{1}{2}$.** D. 1.

Câu [11] Với a là số thực dương. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng:

A. $\lim a^n = 0 \Rightarrow a \geq 1$. **B. $\lim a^n = \infty \Rightarrow a > 1$.**

C. $\lim a^n = 0 \Rightarrow a = 1$. D. $\lim a^n = \infty \Rightarrow a \leq 1$.

Câu [12] Giới hạn $\lim (\sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2+1})$ bằng:

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. **D. $-\frac{1}{2}$.**

Câu [13] Giới hạn $\lim \frac{n - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^2+1} - n}$ bằng:

- A. $+\infty$. **B. 0.** C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu [14] Giới hạn $\lim \frac{2^n - 3^n}{4^n}$ bằng:

- A. $+\infty$. B. $\frac{1}{2}$. **C. 0.** D. $\frac{3}{4}$.

Câu [15] Giới hạn $\lim \frac{2^{2n} - 3}{1 + 3^n}$ bằng:

- A. $+\infty$.** B. 0. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu [16] Giới hạn $\lim \frac{3^{n-1} - 4^{n+1}}{3^{n+2} + 2^{2n+4}}$ bằng:

A. $-\frac{1}{7}$. B. $\frac{4}{9}$. **C. $-\frac{1}{4}$.** D. $\frac{13}{75}$.

Câu [17] Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\lim 10^{-n} \neq 0$. B. $\lim \left(\frac{5}{4}\right)^n = 0$ C. $\lim \left(\frac{2}{3}\right) = \lim \left(\frac{5}{6}\right)$. D. $\lim \left(\frac{1}{3}\right) = \lim \left(\frac{3}{2}\right)$.

Câu [18] Cấp số nhân lùi vô hạn $5, \sqrt{5}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots$ Chọn kết quả đúng trong các kết quả dưới đây:

A. $S = \frac{5}{1-\sqrt{5}}$. B. $S = \frac{1-\sqrt{5}}{5}$. C. $S = \frac{5}{1+\sqrt{5}}$. D. $S = \frac{1+\sqrt{5}}{5}$.

Câu [19] Số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,0202020202\dots$ chính xác bằng:

A. Tổng cấp số nhân lùi vô hạn, $u_1 = \frac{2}{100}, q = \frac{1}{100}$.

B. Tổng cấp số nhân lùi vô hạn, $u_1 = \frac{2}{100}, q = \frac{1}{100}$, cộng thêm 1.

C. Tổng cấp số nhân lùi vô hạn, $u_1 = 2, q = \frac{1}{100}$.

D. Tổng cấp số nhân lùi vô hạn, $u_1 = 2, q = \frac{1}{100}$, cộng thêm 1.

Câu [20] Tổng $S = 1 + 4 + 16 + \dots + 65536$ bằng:

A. $S = 21845$. B. $S = 65535$. C. $S = 262143$. **D. $S = 87381$.**

Câu [21] Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $-3; 0,3; -0,03; 0,003\dots$ là:

A. $S = -\frac{10}{3}$. **B. $S = -\frac{30}{11}$.** C. $S = \frac{10}{3}$. D. $S = \frac{30}{11}$.

Câu [22] Giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$ bằng:

A. $+\infty$. B. 0. **C. 1.** D. 2.

Câu [23] Giới hạn $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} \right)$ bằng:

A. $+\infty$. B. 0. **C. 1.** D. 3.

Câu [24] Giới hạn $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ bằng:

A. $+\infty$. B. 0. **C. 1.** D. 3.

Câu [25] Chọn câu đúng trong các câu sau:

A. $\lim \sqrt{\frac{2n^2+4}{n^n}} = 0$. B. $\lim \sqrt{\frac{2n^2+4}{n^n}} = \infty$.

C. $\lim \sqrt{\frac{2n^2 + 4}{n^n}} = 2.$

D. $\lim \sqrt{\frac{2n^2 + 4}{n^n}} = \sqrt{2}.$

II. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \text{ (c: hằng số)}$ 2. Định lí: a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}$ b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ c) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ 3. Giới hạn một bên: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{ x } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{ x } = +\infty$ 2. Định lí: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ cùng dấu} \\ -\infty & \text{nếu } L \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ trái dấu} \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } L \cdot g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } L \cdot g(x) < 0 \end{cases}$ * Khi Giới hạn giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1: GIỚI HẠN KHÔNG VÔ ĐỊNH

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x} \qquad 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1} \qquad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x^4+x-3} \qquad 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1} \qquad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$$

DẠNG 2: VÔ ĐỊNH DẠNG $\frac{0}{0}$

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5x^5 + 4x^6}{(1-x)^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{3x+1}}{x - 1}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + \sqrt{3-2x}}{x^2 + 3x}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$$

DẠNG 3: VÔ ĐỊNH DẠNG $\frac{\infty}{\infty}; \infty \cdot 0$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x + 2x}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2 + x + 1}$$

DẠNG 4: VÔ ĐỊNH DẠNG $\infty - \infty$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1} \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} \right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - x + 1})$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{5+2x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} + x)$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+3\sqrt{1-x}}{1-x}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3x}}{\sqrt{4x^2+1-x+2}}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$$

DẠNG 5: GIỚI HẠN MỘT BÊN

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-15}{x-2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1+3x-2x^2}{x-3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2-3x+2}{x+2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2+3x-4}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^3-4x+1}{x+1}$$

10) Tìm các giới hạn một bên của hàm số tại điểm được chỉ ra:

$$a) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x}-1 & \text{khi } x > 0 \\ \sqrt[3]{1+x}-1 & \text{tại } x = 0 \\ \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{khi } x < 3 \\ \frac{x-3}{1-x} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{tại } x = 3$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{8-x^3} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{x^4-16}{x-2} & \text{khi } x < 2 \end{cases} \quad \text{tại } x = 2 \quad d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1$$

11) Tìm giá trị của m để các hàm số sau có giới hạn tại điểm được chỉ ra::

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ mx+2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1 \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{khi } x > 1 \\ m^2x^2-3mx+3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x+m & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2+100x+3}{x+3} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x = 0 \quad d) f(x) = \begin{cases} x+3m & \text{khi } x < -1 \\ x^2+x+m+3 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases} \quad \text{tại } x = -1$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Sử dụng đề sau cho câu [1], [2], [3]

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ x^2 - 3x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Câu [1] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ bằng:

A.1 **B.0** **C.3** **D.-3**

Câu [2] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ bằng:

A.1 **B.0** **C.3** **D.-3**

Câu [3] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ bằng:

A.1 **B.0** **C.3** **D.Không tồn tại.**

Câu [4] Cho hàm số $f(x) = \frac{|2x-1|}{x}$. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ bằng:

A.1 **B.0** **C.2** **D.1/2**

Câu [5] Cho hàm số $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ bằng:

A.1 **B.0** **C.-1** **D. Không tồn tại.**

Câu [6] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+3a, & x < 0 \\ x^2 + a + 2, & x \geq 0 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số có giới hạn khi x tiến đến 0:

A.1 **B.0** **C.2** **D.3**

Câu [7] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+3a, & x < 0 \\ x^2 + a + 2, & x \geq 0 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số có giới hạn khi x tiến đến 0:

A.1 **B.0** **C.2** **D.3**

Câu [8] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2}$ bằng:

A.3. **B. $\frac{3}{2}$.** **C. $\frac{9}{4}$.** **D. $+\infty$.**

Câu [9] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x^2 - 2x + 1} - 3x)$ bằng:

A. $+\infty$. **B. 0.** **C. -5.** **D. $\sqrt{5} - 6$.**

Câu [10] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ bằng:

A. $+\infty$. **B. 1.** **C. -1.** **D. 3.**

Câu [11] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ bằng:

A. $+\infty$. **B. 6.** C. $-\frac{1}{3}$. D. -6 .

Câu [12] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ bằng:

A. $+\infty$. B. 0. C. -1 . **D. 6.**

Câu [13] Trong các câu sau, câu nào đúng

A. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-2x}{x-1} = +\infty$ B. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-2x}{x-1} = +\infty$ C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-2x}{x-1} = +\infty$ D. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-2x}{x-1} = -\infty$

Câu [14] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1}$ bằng:

A. $+\infty$. **B. -4 .** C. -1 . D. 0.

Câu [15] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$ bằng:

A. 1. B. $+\infty$. **C. $-\frac{1}{2}$.** D. $-\infty$.

Câu [16] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x} - 2}$ bằng:

A. 2. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{2}$. **D. $\frac{1}{2}$.**

Câu [17] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 2}{x\sqrt{2} - 2}$ bằng:

A. 2. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{2}$. **D. $\frac{1}{2}$.**

Câu [18] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3}$ bằng:

A. 1. **B. $\frac{3}{2}$.** C. $\frac{2}{3}$. D. 3.

Câu [19] Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Trong các dãy số sau, dãy nào thỏa $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$:

A. $(x_n): x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$. **B. $(x_n): x_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.** C. $(x_n): x_n = 3^n$. D. $(x_n): x_n = n^n$.

Câu [20] Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$, với dãy (x_n) bất kì thỏa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, thì $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ bằng:

A. 2. B. $\frac{3}{2}$. **C. 3.** D. $+\infty$.

III. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Hàm số liên tục tại một điểm: $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

- Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:

B1: Tính $f(x_0)$.

B2: Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp ta cần tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$)

B3: So sánh $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng: $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

3. Hàm số liên tục trên một đoạn $[a; b]$: $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

4. • Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

5. Giả sử $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

6. Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a; b)$: $f(c) = 0$.

Nói cách khác: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c \in (a; b)$.

Mở rộng: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Đặt $m = \min_{[a; b]} f(x)$, $M = \max_{[a; b]} f(x)$. Khi đó với mọi $T \in (m; M)$ luôn tồn tại ít nhất một số $c \in (a; b)$: $f(c) = T$.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu [1] Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = -1 \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x = 2 \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2+3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \quad \text{tại } x = 5$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases} \quad \text{tại } x = 0 \quad \text{f) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1$$

Câu [2] Tìm m, n để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx-3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1 \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x+m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} m & \text{khi } x = 0 \\ \frac{x^2-x-6}{x(x-3)} & \text{khi } x \neq 0, x \neq 3 \\ n & \text{khi } x = 3 \end{cases} \quad \text{tại } x = 0 \text{ và } x = 3$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x = 2$$

Câu [3] Xét Giới hạn liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x+2}{x^3+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{khi } x < 2 \\ 5 & \text{khi } x = 2 \\ 2x+1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -4 & \text{khi } x = -2 \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Câu [4] Tìm các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx+1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x+m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx-3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Câu [5] Xét Giới hạn liên tục của hàm số:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{khi } x \leq 3 \\ \frac{x^2-2x-3}{2x-6} & \text{khi } x > 3 \end{cases} \text{ trên } \mathbb{R} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{12-6x}{x^2-7x+10} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ trên } \mathbb{R} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 0 \\ 1-\sqrt{x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \text{ tại } x = 0$$

Câu [6] Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2a^2+1 & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x+a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2 \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ ax+2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Câu [7] Chứng minh rằng phương trình:

- a) $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
- b) $m(x-1)^3(x^2-4) + x^4 - 3 = 0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm với mọi giá trị của m.
- c) $(m^2+1)x^4 - x^3 - 1 = 0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm nằm trong khoảng $(-1; \sqrt{2})$ với mọi m.
- d) $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ luôn có 1 nghiệm dương.
- e) $x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

Câu [8] Cho $m > 0$ và a, b, c là 3 số thực thỏa mãn: $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$. Chứng minh rằng phương trình:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng } (0; 1).$$

HD: Xét 2 trường hợp $c = 0$; $c \neq 0$. Với $c \neq 0$ thì $f(0).f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = -\frac{c^2}{m(m+2)} < 0$

Câu [9] Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$\text{a) } x^3 - 3x + 1 = 0 \quad \text{b) } x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0 \quad \text{c) } 2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$$

Câu [10] Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

$$\text{a) } x^5 - 3x + 3 = 0 \quad \text{b) } x^5 + x - 1 = 0 \quad \text{c) } x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

Câu [11] Chứng minh rằng phương trình: $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có 5 nghiệm trên $(-2; 2)$.

Câu [12] Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

a) $m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$

b) $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$

c) $a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$ d) $(1-m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$

e) $\cos x + m \cos 2x = 0$

f) $m(2 \cos x - \sqrt{2}) = 2 \sin 5x + 1$

Câu [13] Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $ax^2 + bx + c = 0$ với $2a + 3b + 6c = 0$

b) $ax^2 + bx + c = 0$ với $a + 2b + 5c = 0$

c) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Câu [14] Chứng minh rằng phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ với $a \neq 0, 2a+6b+19c=0$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu [1] Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = \sqrt{2-x} + \frac{1}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 2]$.

C. Hàm số $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu [2] Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y = \frac{x+1}{2x-4}$ liên tục trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

B. Hàm số $y = \tan(x^2 + 1)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + x^4 + 1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y = \frac{x}{\cos^2 x}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu [3] Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - x, & x > 1 \\ 2m + 1, & x \leq 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số trên liên tục trên $\mathbb{R}$:

A. 0.

B. 1 hoặc 0.

C. -1.

D. -1/2.

Câu [4] Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. B. Hàm số $y = \sin^3(x - \pi) + x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 2}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ liên tục trên $[1; +\infty)$.

Câu [5] Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{3-x}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng:

A. Hàm số liên tục trên $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

B. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{2}{3}$.

C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty$.

D. $\lim_{x \rightarrow 3} y = 1$.

Câu [6] Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - m, & x \geq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}, & x \leq 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số trên liên tục trên $\mathbb{R}$:

A. 3.

B. -2.

C. 1.

D. -1.

Câu [7] Cho hàm số $y = \frac{x}{|x|}$. Nhận xét nào dưới đây là đúng:

A. $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0$.

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} y + \lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0$.

C. Hàm số liên tục tại $x = 0$.

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0$.

Câu [8] Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{1}{5x}, & x \geq 2 \\ \frac{x-2}{x^3-2x-4}, & x \leq 2 \end{cases}$. Nhận xét nào dưới đây là sai:

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \frac{1}{10}$.

C. Hàm số không xác định tại $x = 0$.

D. $f(1) = \frac{1}{5}$.

Câu [9] Cho hàm số $y = \frac{2x}{(5-x)\sqrt{3x+1}}$. Nhận xét nào dưới đây là sai:

A. Hàm số liên tục trên $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

B. Hàm số liên tục tại $x = 10$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$.

D. Hàm số liên tục tại $x = 1$.

Câu [10] Cho hàm số $y = \frac{2}{x-1}$. Nhận xét nào dưới đây là sai:

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1), (1; +\infty)$.

B. Hàm số liên tục trên từng khoảng xác định.

C. $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$.

D. Vì hàm số nghịch biến nên $f(0) > f(x) > f(2)$, với mọi $x \in (0; 2)$.

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1 – ÔN TẬP CHƯƠNG 4 ĐS

PHẦN 1: CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 1}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. 1.

[2] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$ bằng:

- A. 2. B. 5. C. $\frac{2}{5}$. D. $+\infty$.

[3] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n} - n)$ bằng:

- A. 0. B. -1. C. $+\infty$. D. $-\frac{1}{2}$.

[4] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ bằng:

- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 1. D. $\frac{4}{3}$.

[5] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2})$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{5}{3}$. C. 1,67. D. $-\infty$.

[6] Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) + g(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| + \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)|$.
 B. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) + g(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
 C. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) + g(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$.
 D. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) + g(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] \right|$.

[7] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$ bằng:

- A. 0. B. 2. C. 1. D. $+\infty$.

[8] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{2x^2 + 5x + 2}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. $-\frac{1}{3}$.

[9] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x^3} - \sqrt[3]{x^2 + 7}}{x^2 - 1}$ bằng:

- A. $-\frac{11}{24}$. B. $-\sqrt{5}$. C. $-\frac{7}{16}$. D. $-\infty$.

[10] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ bằng:

- A. $+\infty$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{2}{3}$.

[11] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x - 3}$ bằng:

- A. 0. B. 2. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

[12] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1})$ bằng:

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\infty$. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

[13] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$ bằng:

- A. $+\infty$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

[14] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$ bằng:

- A. 0. B. 2. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

[15] Trong các giới hạn sau, giới hạn nào không tồn tại:

- A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$. B. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{2-x}}$. C. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{-x+2}}$. D. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{2+x}}$.

[16] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - x - 1}$ bằng:

- A. 1. B. -1. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

[17] Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3-x}}$. Chọn kết quả đúng:

- A. Hàm số liên tục tại mọi $x \neq 3$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. D. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

[18] Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$. Chọn kết quả sai:

- A. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. C. Hàm số liên tục tại mọi $x \neq 3, x \neq -1$. D. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.

[19] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x-3}}, & x > 3 \\ ax + 1, & x \leq 3 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$:

- A.0. B.-1. **C.-1/3.** D.3.

[20] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x \geq 1 \\ x^2 - 3x, & x < 1 \end{cases}$. Kết quả nào sau đây là sai:

- A. Hàm số liên tục với mọi $x \in (-\infty; 1)$. **B. Hàm số liên tục với mọi $x \in [1; +\infty)$.**
C. Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R}$. D. Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $a = -4$.

[21] Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A. $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.** B. $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 1$. C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. D. $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = f(6)$.

[22] Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2}{x}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
B. Vì $f(x) = \frac{2x^2}{x} = 2x$, nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $f(10^{100000000}) > f(-10^{100000000})$.
C. Với $x < 0$, $f(x) = \frac{2x^2}{x} = 2x < 0$, nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$, do đó $f(-10^{10^{10}}) > f(-10^{10^9})$.
D. Với $x > 0$, $f(x) = \frac{2x^2}{x} = 2x$, nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$, do đó $f(10^{10^{10}}) > f(10^{10^9})$.

[23] Tổng cấp số nhân lùi vô hạn $5 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$ bằng:

- A. $\frac{25}{4}$.** B. 6. C. 4. D. $\frac{25}{6}$.

[24] Cho 3 số hạng đầu của một CSN lùi vô hạn là 1, $x\sqrt{2}$, $2 - 3x$. Tổng của CSN lùi vô hạn này là:

- A. 2. B. $\frac{1}{3}$. **C. $\sqrt{2} + 2$.** D. $-1 - \sqrt{2}$

[25] Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Khẳng định nào đúng:

- A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.
B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.
C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.

D. Phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng (0;2).

PHẦN 2: BÀI TẬP TƯ LUẬN

1. Tính các giới hạn sau: a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x - 5}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2}}{x-2}$

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}, & x \neq 1 \\ m^2 + 2m - 2, & x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục trên R.

3. Viết số sau dưới dạng phân số: 1,123123123123.....

4. CMR ptr sau luôn có nghiệm với mọi m: $\cos x(1 + 2m \cos x) = m + m\sqrt{3} \sin 2x$

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2 – ÔN TẬP CHƯƠNG 4 ĐS

PHẦN 1: CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + n^2 - 3}{-2n^2 + 3n^3 + 1}$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. 0. C. $+\infty$. D. -1.

[2] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n + 2 \cdot 7^n}$ bằng:

- A. 0. B. $-\infty$. C. $\frac{1}{5}$. D. $-\frac{1}{2}$.

[3] Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} [\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}]$.

B. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

C. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]}$.

D. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{g(x)}$.

[4] $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{8x^2 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$ bằng:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{4}{3}$.

[5] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{\sqrt{x+3} - 2}$ bằng:

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\infty$.

[6] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2 + x}}{x + 10}$ bằng :

- A. 2. B. -2. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

[7] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4}}$ bằng:

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\infty$.

[8] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2}$ bằng:

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

[9] Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-2}$ bằng phương pháp nào là ngắn và đúng nhất:

A. Nhân cả tử và mẫu với $(\sqrt{x+8}+3)$.

B. Thay $x = 1$ vào.

C. Chia cả tử và mẫu cho x .

D. Chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$.

[10] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x}$ bằng:

A.2.

B.4.

C.0.

D.1.

[11] $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-5x}{2|x|+1}$ bằng:

A. $+\infty$.

B. $-\frac{5}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D.1.

[12] $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}$ bằng:

A.0.

B. $\sqrt{3}-1$.

C. $\sqrt{3}+1$.

D. $+\infty$.

[13] $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x+x})$ bằng:

A. $+\infty$.

B.0.

C.-1.

D. $-\infty$.

[14] $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{3-\sqrt{x+7}}$ bằng:

A.1.

B.0.

C.6.

D.-6.

[15] $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

[16] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D.-1.

[17] Cho hàm số $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Chọn câu sai trong các câu dưới đây:

A. Hàm số liên tục trên $(-2;2)$.

B. Hàm số liên tục tại $x = 1$.

C. Hàm số liên tục tại $x = 2$.

D. $f(x) > 0, \forall x \in (-2;2)$ và hàm số liên tục trên $(-2;2)$ nên phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $(-2;2)$.

[18] Một CSN lùi vô hạn có tổng là $S = 4$ và số hạng đầu $u_1 = 2$. CSN đó có công bội là:

- A. $\frac{3}{4}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $-\frac{3}{4}$. **D. $\frac{1}{2}$.**

[19] Tổng $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} - \frac{1}{10^4} + \dots$ bằng:

- A. $-\frac{9}{10}$. **B. $-\frac{10}{9}$.** C. $-\frac{10}{11}$. D. $-\frac{11}{10}$.

[20] Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{(x-1)\sqrt{3-x}}$. Chọn câu sai:

- A. Hàm số không liên tục tại $x = 1$ và $x = 3$. B. Hàm số liên tục tại $x = 2$.
C. Hàm số liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; 3)$.

D. Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{5}$, $f(2) = 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

[21] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{x}, & x < 0 \\ a\sqrt{x+1}+1, & x \geq 0 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$:

- A.2. **B.1.** C.3. D.-1.

[22] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2+1}, & x < 0 \\ ax^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$:

- A.-1. B.1. C.2. **D. $\mathbb{R}$.**

[23] Cho hàm số $f(x) = \frac{2-x}{3x+1}$. Câu nào dưới đây là sai:

- A. $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} f(x) = -\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty$. **C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{3}$.** D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$.

[24] Xét phương trình $\cos x - x = 0(1)$. Phát biểu nào dưới đây là sai:

A. Vì $f(0,7) \cdot f(0,8) < 0$ nên phương trình (1) có 1 nghiệm thuộc $(0,7;0,8)$.

B. $f(x) = \cos x - x$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. C. Phương trình (1) có nghiệm.

D. Phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

[25] Vào khoảng thế kỷ thứ 6, Ấn Độ là một quốc gia rộng lớn và phát triển, có nền Toán học rất phát triển. Các nhà thông thái Ấn Độ đã phát minh ra một trò chơi gọi là “Saturanga” (ngày nay được biết đến với tên gọi Cờ vua). Người phát minh ra Saturanga muốn được ban thưởng bằng cách “ ô thứ 1 đặt 1 hạt thóc, ô thứ 2 đặt 2 hạt, ô thứ 3 đặt 6 hạt, cứ thế nhân đôi lên đến ô 64”. Nếu ban thưởng theo cách đó thì phải trả hết tất cả bao nhiêu hạt

thóc:

A. 2^{64} .

B. $2^{64} - 1$.

C. 2^{63} .

D. $2^{63} - 1$.

PHẦN 2: BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Tính các giới hạn sau: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$.

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2}, & x > 2 \\ mx+3, & x \leq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số liên tục tại $x = 2$.

3. Viết số $3,3131313131\dots$ dưới dạng phân số.

4. CMR phương trình $(m^4 + m + 1)x^{2016} + x^5 - 32 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi tham số m.

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 3 – ÔN TẬP CHƯƠNG 4 ĐS

PHẦN 1: CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Giới hạn $\lim \frac{1-2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. 1.

D. 3.

[2] Giới hạn $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+3n}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$ bằng:

A. 3.

B. $\frac{7}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{5}{2}$.

[3] Giới hạn $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$ bằng:

A. -1.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

D. $\frac{-3}{\sqrt{3}+1}$.

[4] Giới hạn $\lim \frac{1+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2}{n^3+3n}$ bằng:

A. 4.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{4}{5}$.

[5] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ bằng:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

[6] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2-3x}$ bằng:

A. $\frac{13}{3}$.

B. 7.

C. $\frac{7}{3}$.

D. 13.

[7] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4-5x^3+3x^2-1}{3x^4-8x^3+6x^2-1}$ bằng:

A. $-\infty$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{9}{8}$.

[8] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}$ bằng :

A. 1.

B. -1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

[9] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ bằng:

- A. 1. **B. -1.** C. 2. D. -2.

[10] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[(x-2) \sqrt{\frac{x}{(x-2)^2(x+1)}} \right]$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.**

[11] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^2(4x+7)^3}{(3x^3+1)(10x^2+9)}$ bằng:

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{4}{15}$. **C. $\frac{128}{15}$.** D. $\frac{64}{3}$.

[12] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^4 - x^3 + x}{x^3 + 3x^4 + 2x^2 - 7}}$ bằng:

- A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.** B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

[13] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2}$ bằng:

- A. 1. **B. $\frac{1}{3}$.** C. 2. D. $\sqrt[3]{4}$.

[14] Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

- A. $\frac{1}{n(n+1)}$. B. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. **C. $\frac{2n+1}{n}$.** D. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

[15] Cho hàm số $f(x) = \frac{x-2}{2x^2-3x+1}$. Kết quả nào sau đây là sai:

- A. TXĐ của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$. B. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

- C. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$. **D. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\frac{5}{6}$.**

[16] Cho phương trình $x^4 - x = 3$. Phương trình này có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng nào dưới đây:

- A. (0;1). B. (-1;0). **C. (1;2).** D. (2;3).

[17] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , x < -3 \\ 2x & , x \geq -3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là sai:

- A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **B. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.**

C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

D. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -6$.

[18] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}-1, & x < 1 \\ a+x, & x \geq 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{5}{2}$.

[19] Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ liên tục tại mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = \frac{1}{x^3 + 1}$ liên tục tại mọi x khác -1 .

C. Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$ liên tục tại mọi x khác 2 .

D. Hàm số $y = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$ liên tục tại mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

[20] Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{8} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ bằng

A. $\frac{1}{8}$.

B. $-\frac{1}{8}$.

C. 0 .

D. $+\infty$.

[21] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{3x-6}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. 0 .

D. $+\infty$.

[22] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 + 2x}$ bằng

A. $\frac{7}{8}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $-\frac{9}{8}$.

D. $-\infty$.

[23] Chùa Bái Đính ở Ninh Bình là ngôi chùa lớn nhất Việt Nam nắm giữ nhiều kỉ lục Việt Nam, Đông Nam Á, Châu Á. Chùa được khởi công xây dựng năm 2003 với tổng diện tích hơn 80ha. Nơi đây có bảo tháp cao 14 tầng lưu giữ xá lợi Phật được đưa về từ Ấn Độ. Nếu diện tích mặt sàn là $300m^2$. Diện tích tầng trên bằng nửa diện tích tầng dưới, và lát gạch bằng đá hoa kích thước $30 \times 30cm$ thì cần tối thiểu bao nhiêu viên gạch để có thể xây xong bảo tháp?

A. 6667 viên gạch.

B. 46667 viên gạch.

C. 3334 viên gạch.

D. 9997 viên gạch.



[24] Biết $\lim u_n = 2$. Giới hạn $\lim \left(\frac{u_n - 2}{u_n^2 - 3u_n + 2} \right)$ bằng:

- A.0. **B.1.** C.2. D.3.

[25] Cho phương trình $mx^3 - 3x^2 - 2(m-1)x + 1 = 0$ (1). Nhận xét nào dưới đây là đúng.

- A. Ptr (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-1;3)$.
B. Ptr (1) luôn có ít nhất một nghiệm thuộc $(3;5)$.
C. **Ptr (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-1;3)$.**
D. Ptr (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(3;5)$.

PHẦN 2: BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Tính các giới hạn sau: a) $\lim \frac{(-1)^n + 4 \cdot 3^n}{(-1)^{n+1} - 2 \cdot 3^n}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}$
2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} \end{cases} (n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*)$. Tính $\lim u_n$?
3. CMR phương trình $x^5 - 5x - 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm.

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 4 – ÔN TẬP KIỂM TRA GIỮA KÌ 2

PHẦN 1. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{3n + 2n^2 - 1}$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. **B. $\frac{1}{2}$.** C. $\frac{1}{3}$. D. $+\infty$.

[2] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{5n+1} + 3}{3^{5n+2} + 1}$ bằng bao nhiêu?

- A. 0.** B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{32}{243}$. D. 3.

[3] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ bằng bao nhiêu?

- A. 1. **B. -1.** C. 0. D. $-\infty$.

[4] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^2 - \sqrt{n^4 + n})$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. -1. C. $+\infty$. **D. 1.**

[5] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. -1. C. $-\frac{1}{2}$. **D. $\frac{1}{2}$.**

[6] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{2x^2 - 5x + 2}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{7}{162}$.** B. $\frac{13}{54}$. C. $\frac{19}{54}$. D. $\frac{25}{162}$.

[7] Trong các phương pháp tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$ dưới đây, phương pháp nào là phương pháp thích hợp?

A. Nhân với biểu thức liên hợp $(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})$.

B. Chia cho x^2 .

C. Chia cho x .

D. $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \rightarrow +\infty \\ \sqrt{x} \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

[8] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1 - x + 2}}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 4. D. $\frac{3}{2}$.

[9] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{24}$. B. $-\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{18}$. D. $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$.

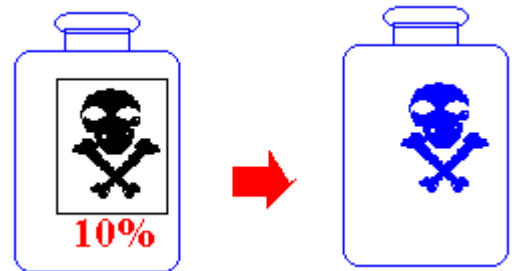
[10] Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\pi + x}$. Kết quả nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.
 B. $f(-2\pi) \cdot f(0) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $(-2\pi, 0)$.
 C. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 2\pi)$.
 D. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty$.

[11] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & x \leq 1 \\ a^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$. Với giá trị thực nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 1$?

- A. Không có giá trị thực của a thỏa đề. B. -1. C. 0. D. $\pm\sqrt{2}$.

[12] Một lọ thủy tinh dung tích 1000 ml chứa đầy 1 loại dung dịch chất độc nồng độ 10 % đã được chuyển sang bình chứa khác; nhưng dung dịch độc hại sau khi đổ hết vẫn còn dính lọ 0,1 % . Người ta dùng nước cất xúc rửa lọ thủy tinh này. Giả sử rằng mỗi lần xúc rửa, chất độc hòa tan hết trong nước và sau khi đổ đi dung dịch mới cũng vẫn còn dính lọ một lượng như nhau.



Phải xúc rửa tối thiểu bao nhiêu lần để chất độc còn trong lọ $\leq 0,001 \mu\text{g}$ nếu mỗi lần dùng 1000 ml nước cất ?

- A. 2 lần. B. 3 lần. C. 4 lần. D. 5 lần.

[13] Khẳng định nào sai

- A. Mỗi cấp số nhân với công bội $q > 1$ là một dãy số tăng.
 B. Mỗi cấp số nhân với công bội $q > 1$ là một dãy số bị chặn dưới.
 C. Dãy số mà mọi số hạng đều bằng nhau là 1 cấp số nhân.
 D. Một cấp số nhân mà mọi số hạng đều âm thì có công bội $q < 0$.

[14] Cấp số nhân $u_1 = 2; u_{n+1} = 3u_n \quad \forall n \geq 1$ có tổng của 10 số hạng đầu tiên là:

A. $S_{10} = \frac{3^{10}-1}{2}$. B. $S_{10} = \frac{3^9-1}{2}$. **C. $S_{10} = 3^{10}-1$.** D. $S_{10} = 3^9-1$.

[15] Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A,B,C,D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A,B,C,D tạo thành hình hành là:

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. **B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.**
C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. D. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

[16] Cho tứ diện A.BCD, G là trọng tâm $\triangle BCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{z}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$. B. $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$. D. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

[17] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tâm O. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. M là trung điểm BB'.
B. M là đỉnh thứ tư của hình thang OMAC, đáy $OM = \frac{1}{2}AC$.
C. M là trung điểm AA'.
D. M là trung điểm DD'.

[18] Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Nếu a và b đồng phẳng và cùng vuông góc với c thì $a // b$.
B. Nếu $a // b$ và $a \perp c$ thì $c \perp b$.
C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a // b$.
D. Nếu a và b cùng nằm trong mp chứa a và song song c thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c.

[19] Cho tứ diện A.BCD có $AB = CD = a$, $I, J = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa AB và CD là:

A. 30° . B. 45° . **C. 60° .** D. 90° .

[20] Xét bài toán “Cho tứ diện A.BCD. CMR nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD, AC \perp BD$ và $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?”

Một học sinh giải bài toán trên như sau:

Bước 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$.

Bước 2: Chứng minh tương tự ta được $AB \perp CD$ và $AD \perp BC$.

Bước 3: Khẳng định ngược lại cũng đúng vì các bước chứng minh là tương đương nhau.

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai từ bước thứ mấy?

- A. Đúng.** B. Sai, bước 1. C. Sai, bước 2. D. Sai, bước 3.

[21] Qua điểm O cho trước, xác định được bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d cho trước?

- A. 0. **B. 1.** C. 2. D. Vô số.

[22] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $SO \perp (ABCD)$. B. $CO \perp (SBD)$. C. $BO \perp (SAC)$. **D. $DO \perp (SAB)$.**

[23] Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$ và $\triangle ABC$ vuông tại B. Vẽ $SH \perp mp(ABC), H \in (ABC)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. H trùng với trọng tâm $\triangle ABC$. B. H trùng với trực tâm $\triangle ABC$.
C. H trùng với trung điểm AC. D. H trùng với trung điểm của BC.

[24] Cho tứ diện A.BCD có BA, BC, BD bằng nhau và vuông góc nhau đôi một. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$. B. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.
C. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$. D. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

[25] Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A và vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho

$$SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \text{ Số đo góc giữa SC và (ABC) bằng:}$$

- A. 30° . B. 45° . **C. 60° .** D. 90° .

PHẦN 2. BÀI TẬP TƯ LUẬN

1. Viết số $2,15151515\dots$ dưới dạng phân số.

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}, & x \neq 1 \\ m^2 + 2m - 2, & x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục trên R.

3. Cho tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. Trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) lấy điểm S sao cho $BA = 2SA = 2CD = 2AD = 2a$.

- a) CMR: $AB \perp (SAD)$
 b) CMR: $BC \perp SC$
 c) Tính góc đường SC và mặt phẳng (SAD).

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 5 – ÔN TẬP KIỂM TRA GIỮA KÌ 2

PHẦN 1. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)}$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. $\frac{3}{2}$. **C. 2.** D. $+\infty$.

[2] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. **C. $-\frac{1}{2}$.** D. $\frac{1}{2}$.

[3] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$ bằng bao nhiêu?

- A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. 1. **D. -4.**

[4] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^2-1}{x^2-1}$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. **B. -1.** C. 1. D. 2.

[5] Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} \end{cases} (n \geq 1)$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

- A. 2.** B. 1. C. 3. D. 4.

[6] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+4}{3-x}$ bằng bao nhiêu?

- A. $+\infty$. B. 1. C. -3. **D. $-\infty$.**

[7] Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x}, & x < 1 \\ \sqrt{2x-2}, & x \geq 1 \end{cases}$. Nhận xét nào dưới đây là sai?

- A. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. C. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$.
B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. D. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

[8] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$ bằng bao nhiêu?

- A. -2. **B. $-\frac{2}{5}$.** C. 2. D. $-\frac{2}{5}$.

[9] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ bằng bao nhiêu?

- A. -1. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. **D. $-\frac{1}{2}$.**

[10] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2-5x+2}{(x-2)^2}$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\infty$.** B. $\frac{5}{4}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $+\infty$.

[11] Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
 B. Phương trình $x^4 + x^2 - 3 = 0$ có tối đa 4 nghiệm trong $\mathbb{R}$.
 C. Phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1,2)$.
D. Vì $f(-3).f(3) > 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thực trong khoảng $(-3,3)$.

[12] Tìm u_1 và q của cấp số nhân biết $\begin{cases} 8u_1 + u_4 = 0 \\ 2u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$ và $u_n \neq 0 \forall n$

- A. $u_1 = -4$; $d = 2$. B. $u_1 = -2$; $d = 4$. C. $u_1 = 2$; $d = -4$. **D. $u_1 = 4$; $d = -2$.**

[13] Với giá trị nào của x thì 3 số $x-1$; $x+2$; $3x$ tạo thành một CSN:

- A.3. **B.4.** C.5. D.6.

[14] Một khách hàng có 100 triệu VNĐ muốn gửi ngân hàng, lãi suất ngân hàng được tính 12% một năm. Lãi sẽ được cộng dồn vào vốn nếu anh ta không rút lãi trong một năm gửi (cách tính này gọi là cách tính lãi kép). Với cách tính lãi như trên sau bao lâu anh ta có được cả số tiền cả vốn lẫn lãi gấp đôi số tiền ban đầu (làm tròn thành năm) ?

- A.3 năm. **B.6 năm.** C.9 năm. D.12 năm.

[15] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm BB' . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
 C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. **D. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.**

[16] Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc mp (P) thì d vuông góc với mọi đường thẳng trong mp (P).

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mp (P) thì $d \perp mp(P)$.

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mp (P) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong mp (P).

D. Nếu $d \perp mp(P)$ và $d' // mp(P)$ thì $d \perp d'$.

[17] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

A. $A'C' \perp BD$. B. $BB' \perp BD$. C. $A'B \perp C'D$. D. $C'B \perp A'D$.

[18] Cho tứ diện A.BCD, có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm AC, BC, BD, AD. Góc giữa (IE, JF) bằng:

A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

[19] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành ABCD. Kết quả nào dưới đây là đúng?

A. $OI = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$. B. $OI = -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$.

C. $OI = \frac{1}{8}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$. D. $OI = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$.

[20] Cho hình chóp S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). Khẳng định nào sau đây là sai?

A. O là trọng tâm $\triangle ABC$. B. O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

C. O là trực tâm $\triangle ABC$. D. Cả 3 câu trên đều sai.

[21] Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp(ABC), $\triangle ABC$ vuông ở B. AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $SA \perp BC$. B. $AH \perp BC$. C. $AH \perp AC$. D. $AH \perp SC$.

[22] Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc (ABCD) và đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi O là trọng tâm của tam giác ACD và I là trung điểm SC. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $BC \perp SB$. B. (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

C. $IO \perp (ABCD)$. D. Tam giác SCD vuông ở D.

[23] Cho tứ diện A.BCD, G được gọi là trọng tâm tứ diện A.BCD khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$, với I, J lần lượt là trung điểm AB và CD.

B. G là trung điểm đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD.

C. G là trung điểm đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC.

D. G là trung điểm đoạn thẳng nối A với trọng tâm $\triangle BCD$.

[24] Cho tứ diện A.BCD có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết rằng AC vuông góc BD. Độ dài MN bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. B. $a\sqrt{10}$. C. $4a$. D. $2a$.

[25] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có $\Delta AB'C$, $\Delta A'DC'$ có các góc đều nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và A'D là góc:

- A. $\widehat{DAA'C'}$. B. $\widehat{AB'C}$. C. $\widehat{DB'B}$. D. $\widehat{BDB'}$.

PHẦN 2. BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$, b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{7x-1}{x-3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{9-x^2}$.

2. Một CSN lùi vô hạn có tổng bằng 3 và công bội $\frac{2}{3}$. Số hạng thứ 20 của CSN đó bằng bao nhiêu?

3. CMR phương trình $(1-m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm với mọi giá trị của m.

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O và SA = a vuông góc đáy. M là trung điểm SD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua OM, vuông góc AD.

a) Xác định mp (P).

b) Thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp S.ABCD là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

c) Tính góc hợp bởi SO và mp(SCD).

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 6 – ÔN TẬP KIỂM TRA GIỮA KÌ 2

PHẦN 1. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2 - n)^4 (n^2 + 1)^3}{5n - 3n^{14}}$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. **B. $-\frac{16}{3}$.** C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

[2] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1} - n^2}$ bằng bao nhiêu?

- A. -2. B. -1. **C. 0.** D. $-\infty$.

[3] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.** B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$. D. 0.

[4] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-4n} - \sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1} - n}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$. B. $\frac{1}{2}$. **C. $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.** D. $-\frac{1}{2}$.

[5] Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.1^2 + 3.2^2 + \dots + (n+1)n^2}{n^4}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{12}$. B. 10. C. $\frac{1}{10}$. **D. $\frac{7}{12}$.**

[6] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} - 5}{x-2}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{5}{12}$.** B. $\frac{5-\sqrt{5}}{4}$. C. $\frac{1}{12}$. D. 0.

[7] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $+\infty$. **C. $\frac{1}{4}$.** D. $-\infty$.

[8] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt{1+6x} - 1}{x}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{24} - 1$. B. $\frac{10}{\sqrt{2}+1}$. C. 10. **D. 5.**

[9] Trong các phương pháp tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{2x + 2}$ dưới đây, phương pháp nào là phương pháp thích hợp?

- A. Nhân phân thức với biểu thức liên hợp của mẫu là $(2x - 2)$. B. Chia tử và mẫu cho x^2 .
C. Phân tích nhân tử ở tử số rồi rút gọn. D. Chia tử và mẫu cho x .

[10] Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\frac{5}{12}$. B. $\frac{5}{16}$. C. $-\frac{1}{6}$. **D. $\frac{7}{12}$.**

[11] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & x \leq 1 \\ a^2 - 2, & x > 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 1$.

- A. ± 1 .** B. 3. C. $\pm\sqrt{3}$. D. $\pm\sqrt{2}$.

[12] Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Hàm số $y = \sqrt{x-1}$ liên tục tại mọi x thuộc $\mathbb{R}$.
B. Hàm số $y = \cos x$ liên tục tại mọi x thuộc $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$ liên tục tại mọi x khác ± 1 .
 D. Hàm số $y = \tan x$ liên tục tại mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

[13] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.** B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$.
 C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$. D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$.

[14] Cho tứ diện A.BCD, có M, P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$. B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.
 C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$. **D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$.**

[15] Cho tứ diện đều A.BCD. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . **D. 90° .**

[16] Cho tứ diện đều A.BCD, M là trung điểm BC. Khi đó $\cos(\angle AB, DM)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.** B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

[17] Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a , các cạnh bên của hình chóp đều bằng $2a$. Gọi M và

N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo góc giữa (MN, SC) bằng:

- A. $79^{\circ}11'$. B. $41^{\circ}24'$. C. 60° . D. 90° .

[18] Trong không gian cho đường thẳng d và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với d cho trước?

- A.0. B.1. C.2. D. Vô số.

[19] Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
 B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
 C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.
 D. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

[20] Cho tứ diện A.BCD có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BD \perp (ABC)$. B. $AC \perp BD$. C. $CD \perp (ABD)$. D. $BC \perp AD$.

[21] Cho hình chóp S.ABC có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân tại C. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $CH \perp SA$. B. $CH \perp SB$.
 C. $AK \perp SC$. D. $AK \perp CH$.

[22] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và SA vuông góc với mp đáy. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $(IJK) \parallel (SAC)$. B. $BD \perp (IJK)$.
 C. $(SC, BD) = 60^{\circ}$. D. $BD \perp (SAC)$.

[23] Cho hình vuông ABCD có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với (ABCD) lấy điểm S. Biết số đo góc giữa SA và mp (ABCD) bằng 45° . Độ dài SO bằng:

- A. $\frac{a}{2\sqrt{2}}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $2a\sqrt{2}$.

[24] Một công ty khi tuyển dụng nhân sự vào vị trí kế toán trưởng với hợp đồng dài hạn 10 năm đã đưa ra hai hình thức trả lương như sau.

Hình thức 1: Trong năm đầu tiên nhận được 60 triệu VNĐ, mỗi năm tiếp theo nhận được tiền lương bằng số tiền năm trước nhân với 1.1.

Hình thức 2: Trong quý đầu tiên nhận được 12 triệu VNĐ, mỗi quý tiếp theo nhận được tiền lương bằng số tiền quý trước nhân với 1,05.

Nếu bạn là người nộp vào vị trí kế toán trưởng ở trên, bạn sẽ chọn hình thức nhận lương nào để thu được số tiền nhiều nhất? Vì sao?

- A. Hình thức 2, vì sau 10 năm số tiền nhận được hơn hình thức 1 hơn 500 triệu.
 B. Hình thức 1, vì sau 10 năm số tiền nhận được hơn hình thức 2 hơn 500 triệu.
 C. Hình thức 1, vì mỗi tháng hình thức 1 nhận được 5 triệu, còn hình thức hai thì chỉ 3 triệu.

D. Hai hình thức đều như nhau vì sau 10 năm số tiền thu được đều gần 1 tỉ VNĐ.

[25] Xét phương trình $3\sin x + 4\cos x + mx - 2 = 0(1), m > 0$. Đặt $f(x) = VT(1)$. Nhận xét nào dưới đây là đúng?

A. Phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(0; \frac{2}{m}\right)$.

B. Phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(0; \frac{4}{m}\right)$.

C. Phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(-\frac{2}{m}; 0\right)$.

D. Phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(-\frac{4}{m}; 0\right)$.

PHẦN 2. BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{khi } x = 2 \\ \frac{2x-4}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

2. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases} (n \geq 1)$.

a) Viết bốn số hạng đầu của dãy số $(v_n): v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

b) CM: (v_n) là một CSN.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ hình thang vuông tại A và B , $AD < BC$, SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$, $AD = AB = a$,

a) Chứng tỏ các mặt bên SAB , SAD , SBC là tam giác vuông.

b) Xác định và tính góc giữa SD và BC .

c) Xác định và tính góc giữa SO và $(ABCD)$. Với O là hình chiếu của A lên BD .

CHUYÊN ĐỀ ②.

ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Ý nghĩa của đạo hàm

- Ý nghĩa hình học:

+ $f'(x_0) = k$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0; f(x_0))$.

+ Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$ là: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

- Ý nghĩa vật lý:

+ Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$ tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.

+ Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$.

3. Quy tắc tính đạo hàm

$$(C)' = 0 \quad (x)' = 1 \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \left(\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ n > 1 \end{array} \right) \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (uv)' = u'v + v'u \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0) \quad (ku)' = ku' \quad \left(\frac{1}{v} \right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Đạo hàm của hàm số hợp: Nếu $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

4. Đạo hàm của hàm số lượng giác

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5. Vi phân: $dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$ • $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

6. Đạo hàm cấp cao: $f''(x) = [f'(x)]'$; $f'''(x) = [f''(x)]'$; $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$)

- Ý nghĩa cơ học: Gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là $a(t_0) = f''(t_0)$.

DẠNG 1: TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa ta thực hiện các bước:

B1: Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0 . Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

B2: Tính $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu [1] Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:

a) $y = f(x) = 2x^2 - x + 2$ tại $x_0 = 1$

b) $y = f(x) = \sqrt{3-2x}$ tại $x_0 = -3$

c) $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 2$

d) $y = f(x) = \sin x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$

e) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ tại $x_0 = 1$

f) $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$ tại $x_0 = 0$

Câu [2] Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 2x$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}, (x > -1)$

d) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

e) $f(x) = \sin x$

f) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Số gia của hàm số $f(x) = x^3$ ứng với $x_0 = 2$ và $\Delta x = 1$ là:

A. 19.

B. -19.

C. 7.

D. -7.

[2] Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ứng với x và Δx là:

A. $2x + \Delta x$.

B. $2x - 4\Delta x$.

C. $\Delta x(\Delta x + 2x - 4)$.

D. $\Delta x(2x - 4\Delta x)$.

[3] Số gia của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0 = -1$ là:

A. $\frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$.

B. $\frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$.

C. $\frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.

D. $\frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.

[4] Tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x) = 2x(x-1)$ theo x và Δx là:

A. $4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2\Delta x$.

B. $4x + 2(\Delta x)^2 - 2$.

C. $4x + 2\Delta x + 2$.

D. $4x + 2\Delta x - 2$.

[5] Cho hàm số $f(x) = x^2 - x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là:

A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x - 1)$.

B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x + 1)$.

C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x\Delta x - \Delta x)$.

D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x)$.

DẠNG 2: TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG CÔNG THỨC

1. $(C)' = 0.$	1. $(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'.$	$(u \pm v)' = u' \pm v'.$
2. $(x)' = 1.$	2. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$	$(uv)' = u'v + v'u.$
3. $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}.$	3. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$	4. $(\sin u)' = u'.\cos u.$	$(ku)' = k.u' (k = \text{const}).$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$	5. $(\cos u)' = -u'.\sin u.$	
6. $(\sin x)' = \cos x.$	6. $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \tan^2 u).u'.$	
7. $(\cos x)' = -\sin x.$	7. $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -(1 + \cot^2 u).u'.$	
8. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$	8. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	
9. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$		

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$ b) $y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$

c) $y = (x^3 - 2)(1 - x^2)$

d) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$ e) $y = (x^2 + 3x)(2 - x)$

f) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$

g) $y = \frac{3}{2x+1}$

h) $y = \frac{2x+1}{1-3x}$

i) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

k) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}$

l) $y = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x-3}$

m) $y = \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 3}$

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + x + 1)^4$

b) $y = (1 - 2x^2)^5$

c) $y = (x^3 - 2x^2 + 1)^{11}$

d) $y = (x^2 - 2x)^5$

e) $y = (3 - 2x^2)^4$

f) $y = \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

g) $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$

h) $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$

i) $y = \left(2 - \frac{3}{x^2}\right)^3$

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

b) $y = \sqrt{x^3 - x + 2}$

c) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

d) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 3}$

e) $y = \sqrt{(x - 2)^3}$

f) $y = (1 + \sqrt{1 - 2x})^3$

g) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 1}}$

h) $y = \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

i) $y = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x}$

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2$

b) $y = x \cdot \cos x$

c) $y = \sin^3(2x + 1)$

d) $y = \sqrt{\cot 2x}$

e) $y = \sin \sqrt{2 + x^2}$

f) $y = \sqrt{\sin x + 2x}$

g) $y = (2 + \sin^2 2x)^3$

h) $y = \sin(\cos^2 x \tan^2 x)$

i) $y = 2 \sin^2 4x - 3 \cos^3 5x$

k) $y = \cos^2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$

l) $y = \tan 2x + \frac{2}{3} \tan^3 2x + \frac{1}{5} \tan^5 2x$

Bài 5: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $(\sin^n x \cdot \cos nx)' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x$ b) $(\sin^n x \cdot \sin nx)' = n \cdot \sin^{n-1} x \cdot \sin(n+1)x$

c) $(\cos^n x \cdot \sin nx)' = n \cdot \cos^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x$ d) $(\cos^n x \cdot \cos nx)' = -n \cdot \cos^{n-1} x \cdot \sin(n+1)x$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + x + 1$ là:

A. $y' = 4x^3 - 6x^2 + x$.

B. $y' = 4x^3 - 3x^2 + x$.

C. $y' = 4x^3 - 6x^2 + 1$.

D. $y' = 4x^3 - 3x^2 + 1$.

[2] Đạo hàm của hàm số $y = 10$ là:

A. 10.

B. 0.

C. -10.

D. Không có đạo hàm.

[3] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}$ là:

A. $y' = 3x^5 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

B. $y' = 6x^5 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

C. $y' = 3x^5 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. D. $y' = 6x^5 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

[4] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2-x}{3x+1}$ là:

A. $y' = \frac{5}{(3x+1)^2}$. B. $y' = \frac{-7}{(3x+1)^2}$. C. $y' = \frac{5}{3x+1}$. D.

$y' = \frac{-7}{3x+1}$.

[5] Đạo hàm của hàm số $y = 3\sin 2x + \cos 3x$ là:

A. $y' = 3\cos 2x - \sin 3x$. B. $y' = 3\cos 2x + \sin 3x$.
C. $y' = 6\cos 2x - 3\sin 3x$. D. $y' = -6\cos 2x + 3\sin 3x$.

[6] Đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$ là:

A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. B. $y' = \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

[7] Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$ là:

A. $y' = 4x$. B. $y' = 6x^2 - 2x - 4$ C. $y' = 2x^2 - 2x + 4$. D. $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

[8] Đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x^2 - 2x}$ là:

A. $y' = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. B. $y' = \frac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$. C. $y' = \frac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$. D. $y' = \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

[9] Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$ là:

A. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$. B. $y' = \frac{-5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y' = \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$. D. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

[10] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ là:

A. $y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$

C. $y' = -\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}.$

D. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}.$

[11] Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$ là:

A. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}.$

B. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x).$

C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x).$

D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x).$

[12] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-3}{5+x} - \sqrt{2x}$ là:

A. $y' = \frac{13}{(x+5)^2} - \frac{1}{\sqrt{2x}}.$

B. $y' = \frac{17}{(x+5)^2} - \frac{1}{2\sqrt{2x}}.$

C. $y' = \frac{13}{(x+5)^2} - \frac{1}{2\sqrt{2x}}.$

D. $y' = \frac{17}{(x+5)^2} - \frac{1}{\sqrt{2x}}.$

[13] Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là:

A. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+x}}.$

B. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{2x^2+x}{2\sqrt{x^2+x}}.$

C. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{2x^2+x}{\sqrt{x^2+x}}.$

D. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{x^2+x}{2\sqrt{x^2+x}}.$

[14] Hàm số có $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$ là:

A. $y = 2 - \frac{1}{x}.$

B. $y = 2 - \frac{2}{x^3}.$

C. $y = x^2 + \frac{1}{x}.$

D. $y = x^2 - \frac{1}{x}.$

[15] Đạo hàm của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$ là:

A. $y' = 4\sin x + \sin 2x + 1.$

B. $y' = 4\sin 2x + 1.$

C. $y' = 1.$

D. $y' = 4\sin x - 2\sin 2x + 1.$

[16] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ là:

A. $y' = \frac{-\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

B. $y' = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

C. $y' = \frac{-2 - 2 \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

D. $y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$

[17] Đạo hàm của hàm số $y = \tan^2 x - \cot^2 x$ là:

A. $y' = 2 \frac{\tan x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\cot x}{\sin^2 x}.$

B. $y' = 2 \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2 \frac{\cot x}{\sin^2 x}.$

C. $y' = 2 \frac{\tan x}{\sin^2 x} + 2 \frac{\cot x}{\cos^2 x}.$

D. $y' = 2 \tan x - 2 \cot x.$

[18] Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$ là:

A. $y' = -2 \sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}.$

B. $y' = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \frac{\pi}{2}.$

C. $y' = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \frac{\pi}{2}x.$

D. $y' = -2 \sin(\pi - 4x).$

[19] Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}$ là:

A. $y' = \frac{1}{2 \sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}}.$

B. $y' = \frac{1 + \tan^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)}{2 \sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}}.$

C. $y' = \frac{1 + \tan^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)}{2 \sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$

D. $y' = \frac{1 + \tan^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)}{2 \sqrt{2 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$

[20] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 2x}{3x + 1}$ là:

A. $y' = \frac{-2 \sin 2x(3x + 1) - 3 \cos 2x}{3x + 1}.$

B. $y' = \frac{-2 \sin 2x(3x + 1) - 3 \cos 2x}{(3x + 1)^2}.$

C. $y' = \frac{2 \sin 2x(3x + 1) + 3 \cos 2x}{(3x + 1)^2}.$

D. $y' = \frac{-\sin 2x(3x + 1) - 3 \cos 2x}{(3x + 1)^2}.$

[21] Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 2x \cdot \cos x + \frac{2}{\sqrt{x}}$ là:

A. $y' = 2 \sin 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin^2 2x - 2\sqrt{x}$.

B. $y' = 2 \sin 4x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin^2 2x - \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2 \sin 4x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin^2 2x - \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2 \sin 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin^2 2x - 2\sqrt{x}$.

[22] Đạo hàm của hàm số $y = \cot^2(\cos x) + \sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}$ là:

A. $y' = -2 \cot(\cos x) \frac{1}{\sin^2(\cos x)} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

B. $y' = 2 \cot(\cos x) \frac{1}{\sin^2(\cos x)} \cdot \sin x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

C. $y' = -2 \cot(\cos x) \frac{1}{\sin^2(\cos x)} + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

D. $y' = 2 \cot(\cos x) \frac{1}{\sin^2(\cos x)} \cdot \sin x + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

[23] Đạo hàm của hàm số $y = (x \sin a + \cos a)(x \cos a - \sin a)$, với a là hằng số, là:

A. $y' = 2x \sin^2 a$.

B. $y' = x \sin 2a + \cos 2a$.

C. $y' = x \sin 2a - \cos 2a$.

D. $y' = 2x \cos^2 a$.

[24] Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

B. Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

C. Hàm số $y = x\sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

D. Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

[25] Đạo hàm của hàm số $y = \cos^2 \sqrt{\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x^2} + \frac{\pi}{4}x$ là:

A. $y' = -2x \sin \sqrt{\frac{4\pi}{3} - 2x^2} + \frac{\pi}{4}$.

B. $y' = x \sin \sqrt{\frac{4\pi}{3} - 2x^2} + \frac{\pi}{4}$.

C. $y' = -x \sin \sqrt{\frac{4\pi}{3} - 2x^2} + \frac{\pi}{4}$.

D. $y' = 2x \sin \sqrt{\frac{4\pi}{3} - 2x^2} + \frac{\pi}{4}$.

[26] Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)(1 + \sin x)}{\sin x}$ là:

A. $y' = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

B. $y' = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

C. $y' = -\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

D. $y' = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

[27] Đạo hàm của hàm số $y = (2x^2 - x)^{2016} \sqrt{\cos x}$ là:

A. $y' = 2016(2x^2 - x)^{2015} (4x - 1) \cdot \sqrt{\cos x} - (2x^2 - x)^{2016} \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$

B. $y' = 2016(2x^2 - x)^{2015} (4x - 1) \cdot \sqrt{\cos x} + (2x^2 - x)^{2016} \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}.$

C. $y' = 2016(2x^2 - x)^{2015} \cdot \sqrt{\cos x} - (2x^2 - x)^{2016} \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$

D. $y' = 2016(2x^2 - x)^{2015} \cdot \sqrt{\cos x} + (2x^2 - x)^{2016} \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}.$

DẠNG 3: ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

1. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$ là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$ (*)

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm: hệ số góc của tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ $y'(x_0) = k$

3. Nhắc lại: Cho $(\Delta): y = ax + b$. Khi đó: $(d) \parallel (\Delta) \Rightarrow k_d = a$ $(d) \perp (\Delta) \Rightarrow k_d = -\frac{1}{a}$

4. Ý nghĩa Vật lý: • Vận tốc tức thời: $v(t) = s'(t).$

- Gia tốc: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.
- Cường độ dòng điện: $i(t) = q'(t)$.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hàm số (C): $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C):

- a) Tại điểm thuộc (C) có hoành độ $x_0 = 1$.
- b) Song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$.
- c) Vuông góc với đường thẳng $x + 4y = 0$.
- d) Vuông góc với đường phân giác thứ nhất của góc hợp bởi các trục tọa độ.

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2-x+x^2}{x-1}$ (C).

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

Bài 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x+1}{1-x}$ (C).

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A(2; -7).
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
- c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
- d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x + 100$.
- e) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x + 2y - 5 = 0$.

Bài 4: Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2$.

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm I(1, -2).
- b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của đồ thị (C) không đi qua I.

Bài 5: Cho hàm số (C): $y = \sqrt{1-x-x^2}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

- a) Tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$.
- b) Song song với đường thẳng $x + 2y = 0$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + x$ tại điểm $M(-2; 8)$ là:

- A. 6. **B. -11.** C. 11. D. -12

[2] Phương trình tiếp tuyến của Parabol $f(x) = -3x^2 + x + 1$ tại điểm $M(1; -1)$ là:

- A. $y = -5x + 4$.** B. $y = -5x + 6$. C. $y = -6x + 5$. D. $y = -6x + 6$.

[3] Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ tại điểm có hoành độ là -1 có phương trình là:

- A. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.** B. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. C. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$. D. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

[4] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là:

- A. $y = \frac{1}{2}x + 1$.** B. $y = \frac{1}{2}x - 1$. C. $y = x + 1$. D. $y = x - 1$.

[5] Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là:

- A. 2.** B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[6] Cho hàm số $y = 4x^3 - 3x + 1$. Tiếp tuyến với (C) tại điểm $A(1;2)$ cắt (C) tại điểm nào dưới đây:

- A. $A(0;1)$. **B. $A(-2;-25)$.** C. $A(2;27)$. D. $A(-1;0)$.

[7] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2(C)$. Ptr tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng d: $3x - 5y - 4 = 0$ là:

- A. $y = -\frac{5}{3}x + \frac{61}{27}; y = -\frac{5}{3}x + \frac{29}{27}$.** B. $y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{5}; y = -\frac{5}{3}x - \frac{3}{7}$.

- C. $y = -\frac{5}{3}x + \frac{35}{6}; y = -\frac{5}{3}x - \frac{21}{17}$. D. $y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{9}; y = -\frac{5}{3}x - \frac{13}{41}$.

[8] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 4$ có hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3 là:

- A. $y = 3x$. B. $y = 3x - 8, y = 3x$. C. $y = 3x + 6$. **D. $y = 3x + 2, y = 3x + 6$.**

[9] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có tung độ tiếp điểm bằng 2 là:

- A. $y = 40x - 57$. **B. $y = 8x - 6, y = -8x - 6$.**

- C. $y = 8x - 6, y = -8x + 6$. D. $y = 8x - 8, y = -8x + 8$.

[10] Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là:

- A. $y = -4$.** B. $y = 4$. C. $x = 3$. D. $x = -3$

[11] Biết tiếp tuyến (d) của hàm số $y = x^3 - 2x + 2$ vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất. Phương trình (d) là:

A. $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18-5\sqrt{3}}{9}, y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18+5\sqrt{3}}{9}.$

B. $y = x, y = x + 4.$

C. $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18-5\sqrt{3}}{9}, y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18+5\sqrt{3}}{9}.$

D. $y = x - 2, y = x + 4.$

[12] Cho hai hàm $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Góc giữa hai tiếp tuyến của đồ thị mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng là:

A. $30^\circ.$

B. $45^\circ.$

C. $60^\circ.$

D. $90^\circ.$

[13] Cho hàm số: $y = \frac{1}{4}x^2(x+6)$. Để đường thẳng $y = -\frac{9}{4}x + b$ là tiếp tuyến của đồ thị thì giá trị của b là:

A. $-1; 0.$

B. $0; \frac{1}{2}.$

C. $\frac{1}{2}; 1.$

D. $1; \frac{3}{2}.$

[14] Số cặp điểm A, B trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5(C)$, mà tiếp tuyến tại A, B vuông góc với nhau là:

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số.

[15] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}(C)$. Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

[16] Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5(C)$. Với giá trị nào của k thì trên đồ thị (C) có ít nhất 1 điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y = kx$:

A. $k \neq 1.$

B. $k > 1.$

C. $k < 0.$

D. $0 < k < 1.$

[17] Cho hàm số $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}$. Với giá trị nào của m thì tại giao điểm của đồ thị với Ox, tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x + 1$:

A. $m = -1.$

B. $m = -\frac{1}{5}.$

C. $m = -3.$

D. $m = -\frac{3}{2}.$

[18] Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1(C)$. Từ điểm bất kì trên đường thẳng $x = 2$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến (C):

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

[19] Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1(C)$. Tọa độ điểm trên trục tung mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C):

- A. $A(0;1)$. B. $A\left(0;\frac{1}{3}\right)$. C. $A(0;-1)$. D. $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

[20] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}(C)$. Tọa độ điểm thuộc trục tung mà từ đó kẻ được đúng 1 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số:

- A. $A\left(0;-\frac{3}{2}\right), B\left(0;\frac{3}{2}\right)$. B. $A\left(0;\frac{1}{2}\right), B\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.
C. $A(0;1), B(0;-1)$. D. $A\left(0;\frac{3}{4}\right), B\left(0;-\frac{3}{4}\right)$.

[21] Trên đồ thị $y = \frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Tọa độ M là:

- A. $\left(4;\frac{1}{3}\right)$. B. $\left(\frac{3}{4};-4\right)$. C. $\left(-\frac{3}{4};-\frac{4}{7}\right)$. D. $(2;1)$.

[22] Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^3 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng:

- A. 14m/s. B. 7m/s. C. 15m/s. D. 12m/s.

[23] Điện lượng truyền trong dây dẫn mạch dao động LC có phương trình $q = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right)(C)$ thì cường độ dòng điện tức thời tại thời điểm $t_0 = 2s$ bằng:

- A. -1A. B. -0,9A. C. 1A. D. 0,9A.

[24] Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{1}{2}gt^2, g = 9,8m/s^2$. Vận tốc tại thời điểm $t = 3s$ là:

- A. 44,1m/s. B. 14,7m/s. C. 3,26m/s. D. 29,4m/s.

[25] Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 3t^3 - 4t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm gia tốc bằng 0 là:

- A. $\approx -0,77m/s$. B. $\approx -0,73m/s$. C. $\approx 0,77m/s$. D. $\approx 0,73m/s$.

DẠNG 4. VI PHÂN - ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN KHÁC

1. Vi phân của hàm số $y = f(x)$: $dy = f'(x)dx$

2. Để tính đạo hàm cấp 2, 3, 4, ... ta dùng công thức: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$

3. Đề tính đạo hàm cấp n:

- Tính đạo hàm cấp 1, 2, 3, ..., từ đó dự đoán công thức đạo hàm cấp n.
- Dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh công thức đúng.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu [1] Tính vi phân của các hàm số sau:

- a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \pi\right)$. b) $\cos\left(\frac{\pi}{3}x + \pi\right)$. c) $\tan\left(\frac{\pi}{3}x + \pi\right)$. d) $\cot\left(\frac{\pi}{3}x + \pi\right)$.
- e) $\sqrt{2x^2 - 3}$. f) $(x^2 - 2x)^{2016}$. g) $\frac{2x}{\sin x + 1}$. h) $\sqrt{\cos^2 x + 1}$.
- i) $x \sin^2 x$. j) $\tan^2\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) + \frac{\pi}{2}x$. k) $\frac{2\sin x - 1}{\cos x + x}$.

Câu [2] Cho hàm số $f(x) = 3(x+1)\cos x$.

- a) Tính $f'(x), f''(x)$ b) Tính $f''(\pi), f''\left(\frac{\pi}{2}\right), f''(1)$

Câu [3] Tính đạo hàm của các hàm số đến cấp được chỉ ra:

- a) $y = \cos x, y'''$ b) $y = 5x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 7, y''$ c) $y = \frac{x-3}{x+4}, y''$
- d) $y = \sqrt{2x - x^2}, y''$ e) $y = x \sin x, y''$ f) $y = x \tan x, y''$
- g) $y = (x^2 + 1)^3, y''$ h) $y = x^6 - 4x^3 + 4, y^{(4)}$ i) $y = \frac{1}{1-x}, y^{(5)}$

Câu [4] Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

- a) $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ b) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ c) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Câu [5] Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{1}{x+2}$ b) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$
- d) $y = \frac{1-x}{1+x}$ e) $y = \sin^2 x$ f) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Câu [6] Chứng minh các hệ thức sau với các hàm số được chỉ ra:

a) $\begin{cases} y = x \sin x \\ xy'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \sqrt{2x - x^2} \\ y^3 y'' + 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x \tan x \\ x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{x-3}{x+4} \\ 2y'^2 = (y-1)y'' \end{cases}$

Câu [7] Giải phương trình $f'(x) = 0$ với:

a) $f(x) = 3 \cos x - 4 \sin x + 5x$

b) $f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x + 2x - 1$

c) $f(x) = \sin^2 x + 2 \cos x$

d) $f(x) = \sin x - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 6x}{6}$

e) $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2 \cos \frac{3\pi + x}{2}$

f) $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 3(\cos x - \sqrt{3} \sin x)$

Câu [8] Giải phương trình $f'(x) = g(x)$ với:

a) $\begin{cases} f(x) = \sin^4 3x \\ g(x) = \sin 6x \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = \sin^3 2x \\ g(x) = 4 \cos 2x - 5 \sin 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = 2x^2 \cos^2 \frac{x}{2} \\ g(x) = x - x^2 \sin x \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x) = 4x \cos^2 \frac{x}{2} \\ g(x) = 8 \cos \frac{x}{2} - 3 - 2x \sin x \end{cases}$

Câu [9] Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ với:

a) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}, g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}, g(x) = x$

c) $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}, g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$

d) $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = x - x^3$

Câu [10] Xác định m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $f'(x) > 0$ với $f(x) = \frac{mx^3}{3} - 3x^2 + mx - 5$

b) $f'(x) < 0$ với $f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (m+1)x - 15$

Câu [11] Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx - 3$. Tìm m để:

a) $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất.

b) $f'(x) \geq 0$ với mọi x .

Câu [12] Cho hàm số $f(x) = -\frac{mx^3}{3} + \frac{mx^2}{2} - (3-m)x + 2$. Tìm m để:

a) $f'(x) < 0$ với mọi x .

b) $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

c) Trong trường hợp $f'(x) = 0$ có hai nghiệm, tìm hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m .

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Biết $y = \sqrt{x^2 + 2}$. Tập nghiệm của phương trình $xy' = 1$ là:

- A. $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. B. $\{-1; 2\}$.
C. $\{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}$. D. $\{\sqrt{\sqrt{2} - 1}\}$.

[2] Vi phân của hàm số $y = 5x^4 - 3x + 1$ là:

- A. $dy = (4x^3 - 3x)dx$. B. $dy = (4x^3 - 3)dx$.
C. $dy = (20x^3 - 3x)dx$. D. $dy = (20x^3 - 3)dx$.

[3] Vi phân của hàm số $y = \sin^3(3x)$ là:

- A. $dy = 3\sin^2(3x) \cdot \cos(3x)dx$. B. $dy = 9\sin^2(3x) \cdot \cos(3x)dx$.
C. $dy = 3\sin(6x)dx$. D. $dy = 3\sin^2(3x)dx$.

[4] Vi phân của hàm số $y = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$, ứng với $\Delta_x = 0,1$ là:

- A. $-0,4$. B. $-0,07$. C. $1,1$. D. 10 .

[5] Vi phân của $y = \cot(2017x)$ là:

- A. $dy = -2017 \sin(2017x)dx$. B. $dy = \frac{2017}{\sin^2(2017x)}dx$.
C. $dy = -\frac{2017}{\cos^2(2017x)}dx$. D. $dy = -\frac{2017}{\sin^2(2017x)}dx$.

[6] $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$ bằng:

- A. $\cot x$. B. $-\tan x$. C. $\tan x$. D. $-\cot x$.

[7] Tính $f''(2)$. Biết rằng $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2017x$.

- A. 2171. B. 68. C. 160. D. 154.

[8] Biết khai triển $(1+3x)^{2016} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2016}x^{2016}$. Tổng $S = a_1 + 2a_2 + \dots + 2016a_{2016}$ bằng:

- A. $2016 \cdot 4^{2016}$. B. $6048 \cdot 4^{2015}$. C. $2016 \cdot 4^{2015}$. D. $6048 \cdot 4^{2016}$.

[9] Biết $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x$. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{y'}{x^2} \geq 0$ là:

- A. $(-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $(-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{0\}$. D. $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

[10] Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là ... biết $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$:

- A. $\{\pm 2, \pm 4\}$. B. $\{4, 16\}$. C. $\{-4, -16\}$. D. $\emptyset$.

[11] Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Giá trị $f'(3) - f(3)$ là:

- A. $\frac{6}{\sqrt{7}}$. B. $\frac{8}{\sqrt{7}}$. C. $-\frac{13\sqrt{7}}{14}$. D. $-\frac{6}{\sqrt{7}}$.

[12] Tập nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, $f(x) = 5(x^2 + 1)^{2017} + x^2 + 1$ là:

- A. $\emptyset$. B. $\{0\}$. C. $\{-1\}$. D. $\{1\}$.

[13] Cho hai hàm số $f(x) = x^2 + 3$ và $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Tỉ số $\frac{f'(1)}{g'(0)}$ bằng:

- A. 1. B. -2. C. 2. D. Không xác định.

[14] Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 2017$. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{f'(x)}{\sqrt{2-x}} \leq 0$ là:

- A. $[-1; 2)$. B. $[-1; 3]$. C. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. D. $(-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$.

[15] Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là:

- A. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. B. $(0; 3)$. C. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. D. $(0; 2)$.

[16] Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$ là:

- A. $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. B. $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 2\right]$. C. $\left[0; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. D. $\left[2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

[17] Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. Với giá trị nào của m thì $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

- A. $m < 0$. B. $m < -\frac{1}{3}$. C. $m > -\frac{1}{3}$. D. $m > 0$.

[18] Cho hàm số $y = \tan x + \cot x$. Tập nghiệm của phương trình $y' = 0$ là:

- A. $\emptyset$. B. $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. C. $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

[19] Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin^2 x$ là:

- A. $-2\sin 2x$. B. $2\cos 2x$. C. $-2\cos 2x$. D. $2\sin 2x$.

[20] Hàm số nào dưới đây có đạo hàm cấp 2 là $6x$?

- A. $y = 3x^2$. B. $y = 2x^3$. C. $y = x^2$. D. $y = x^3$.

[21] Đạo hàm cấp n , với n là số tự nhiên khác 0 của hàm số $y = \cos x$ là:

- A. $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. B. $\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

C. $(-1)^n \cos(x + n\pi)$. D. $(-1)^n \sin(x + n\pi)$.

[22] Cho $y = \sqrt{2x - x^2}$. Giá trị của biểu thức $A = y^3 \cdot y''$ là:

A.2. B.-1. C.3. D. Kết quả khác.

[23] Đạo hàm cấp n (với n là số tự nhiên khác 0) của hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ là:

A. $\frac{(-1)^n n}{(x-1)^{n+1}}$. B. $\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$. C. $\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$. D. $\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^n}$.

[24] Cho $y = 3\sin x + 2\cos x$. Tính giá trị biểu thức $A = y'' + y$ là:

A. 0. B. $A = 4\cos x$. C. $A = 6\sin x + 4\cos x$. D. 2.

[25] Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = \tan x + \cot x + \sin x + \cos x$ bằng:

A.0. B. $\tan^2 x - \cot^2 x + \cos x - \sin x$. C. $\frac{2\tan x}{\cos^2 x} - \frac{2\cot x}{\sin^2 x} - \sin x + \cos x$. D. $\frac{2\tan x}{\cos^2 x} + \frac{2\cot x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x$.

CHUYÊN ĐỀ ③.

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa và các phép toán

+ **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

+ **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tùy ý. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$.

+ **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tùy ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$

+ **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tùy ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$$

+ **Điều kiện hai vector cùng phương:** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương ($\vec{a} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow \exists! k \in \mathbb{R} : \vec{b} = k\vec{a}$

2. Sự đồng phẳng của ba vector

• Ba vector được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

• **Điều kiện để ba vector đồng phẳng:** Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists! m, n \in \mathbb{R} : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

• Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tùy ý. $\exists! m, n, p \in \mathbb{R} : \vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

3. Tích vô hướng của hai vector

• **Góc giữa hai vector trong không gian:**

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = BAC \quad (0^\circ \leq BAC \leq 180^\circ)$$

• **Tích vô hướng của hai vector trong không gian:**

+ Cho $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Khi đó: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

+ Với $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$. Qui ước: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

+ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

A. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTO

- Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD, I là trung điểm của EF.
 - Chứng minh: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.
 - Chứng minh: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$, với M tùy ý.
 - Tìm điểm M thuộc mặt phẳng cố định (P) sao cho: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất.
- Chứng minh rằng trong một tứ diện bất kì, các đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối đồng qui tại trung điểm của chúng. (Điểm đồng qui đó được gọi là trọng tâm của tứ diện)
- Cho tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là các điểm chia các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số k ($k \neq 1$). Chứng minh rằng hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' có cùng trọng tâm.

DẠNG 2: CHỨNG MINH CÁC VECTO ĐỒNG PHẪNG

- Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

$$\text{ĐS: Chứng minh } \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$$

- Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi M, N, I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các cạnh AE, CG, AD, DH, GH, FG; P và Q lần lượt là trung điểm của NG và JH.

a) Chứng minh ba vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

b) Chứng minh ba vector $\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{AH}$ đồng phẳng.

$$\text{ĐS: a) } \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{PQ} \text{ có giá cùng song song với (ABCD).}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{AH} \text{ có giá cùng song song với (BDG).}$$

- Cho hình lăng trụ ABC.DEF. Gọi G, H, I, J, K lần lượt là trung điểm của AE, EC, CD, BC, BE.

a) Chứng minh ba vector $\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{GI}, \overrightarrow{HK}$ đồng phẳng.

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên AF và CE sao cho $\frac{FM}{FA} = \frac{CN}{CE} = \frac{1}{3}$. Các đường thẳng vẽ từ M và N

song song với CF lần lượt cắt DF và EF tại P và Q. Chứng minh ba vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{CF}$ đồng phẳng.

- Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện A'D'MN và BCC'D'. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song

song với nhau.

$$\text{ĐS: Chứng minh } \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{5AB} - \overrightarrow{AA'}) \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{GG'} \text{ đồng phẳng.}$$

5. Cho tứ diện OABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Phân tích vector $\overrightarrow{OG}$ theo các ba $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

b) Gọi D là trọng tâm của tứ diện OABC. Phân tích vector $\overrightarrow{OD}$ theo ba vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

$$\text{ĐS: a) } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \quad \text{b) } \overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

6. Cho hình hộp OABC.DEFG. Gọi I là tâm của hình hộp.

a) Phân tích hai vector $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{AG}$ theo ba vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.

b) Phân tích vector $\overrightarrow{BI}$ theo ba vector $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FI}$.

$$\text{ĐS: a) } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}), \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}. \quad \text{b) } \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FI}.$$

7. Cho hình lập phương ABCD.EFGH.

a) Phân tích vector $\overrightarrow{AE}$ theo ba vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.

b) Phân tích vector $\overrightarrow{AG}$ theo ba vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.

$$\text{ĐS: a) } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}) \quad \text{b) } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}).$$

DẠNG 3: TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTOR

1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a) Xác định góc giữa các cặp vector: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

b) Tính các tích vô hướng của các cặp vector: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

2. Cho hình tứ diện ABCD, trong đó $AB \perp BD$. Gọi P và Q là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và CD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD}$ ($k \neq 1$). Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$.

DẠNG 4: MỘT SỐ DẠNG TOÁN KHÁC

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là bốn điểm lấy trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng MN, PQ, AC đôi một song song thì bốn điểm P, Q, M, N đồng phẳng.

2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BB' , $A'C'$. K là điểm trên $B'C'$ sao cho $\overrightarrow{KC} = -2\overrightarrow{KB}$. Chứng minh bốn điểm A, I, J, K thẳng hàng.
3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BB'} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}$. M, N lần lượt là hai điểm nằm trên AC, DC' sao cho $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D'}$.
- a) Hãy phân tích $\overrightarrow{BD'}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
- b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = (m-n)\vec{a} + (1-m)\vec{b} + n\vec{c}$.
- c) Tìm m, n để $MN \parallel BD'$.
4. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ADD'A'$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. M, N là hai điểm nằm trên hai đường chéo BD và AD' sao cho $DM = AN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$). Chứng minh rằng: $MN \parallel (BCD'A')$.
5. Cho tứ diện $ABCD$, hai điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MC} = \vec{0}, \overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{ND} = \vec{0}$. Chứng minh khi t thay đổi thì trung điểm I của MN di chuyển trên một đường thẳng cố định.
6. Trong không gian cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng; M là một điểm di động
- a) Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ là một vectơ không phụ thuộc vào M.
- b) D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ và giả sử đường thẳng AD cắt BC tại N. Chứng minh: $\overrightarrow{NB} = 3\overrightarrow{NC}$.
7. Trong không gian cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng. Tìm tập hợp các điểm M, M thỏa mãn
- $$|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}| = |\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{BA}|.$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Điều kiện nào dưới đây là đủ để kết luận ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng:

A. $\begin{cases} \vec{a} = k_1\vec{b} \\ \vec{c} = k_2\vec{b} \end{cases} \quad (k_1.k_2 > 0).$

B. $\begin{cases} \vec{a} = k_1\vec{b} \\ \vec{c} = k_2\vec{b} \end{cases} \quad (k_1.k_2 < 0).$

C. $\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c}, \quad (k_1.k_2 \neq 0).$

D. $\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = 0 \\ \vec{b}.\vec{c} = 0 \\ \vec{a}.\vec{c} = 0 \end{cases}$

[2] Điều kiện nào dưới đây là đủ để kết luận ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng:

A. $\vec{a} \neq k_1\vec{b} + k_2\vec{c}, \quad (k_1.k_2 \neq 0).$

B. $\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c}.$

C. $\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c}, \quad (k_1.k_2 \neq 0).$

D. $\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = 0 \\ \vec{b}.\vec{c} = 0 \\ \vec{a}.\vec{c} = 0 \end{cases}$

[3] Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu $AB = \frac{1}{2}AC$ thì B là trung điểm của AC.

B. Nếu $AB = AC + 2AD$ thì A, B, C, D đồng phẳng.

C. Nếu $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ thì A là trung điểm của BC.

D. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$ thì A, B, C, D đồng phẳng.

[4] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{B'B}$.

B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{B'B}$.

D. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$.

[5] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{A'C'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{A'C'}$.

[6] Cho hình chóp S.ABC, gọi M, N là hai điểm thỏa $\overrightarrow{MS} = 2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng:

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.

D. $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.

[7] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{D'C'} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{CC'}$.

D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{C'C}$.

[8] Cho tứ diện A.BCD có trọng tâm là G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Đẳng thức nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

[9] Cho tứ diện A.BCD có G là trọng tâm ΔABC . Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$.

B. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$.

C. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DG}$.

D. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

[10] Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Vì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ nên I là trung điểm của AB.

B. Vì I là trung điểm AB nên với điểm O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO})$.

C. Vì $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ nên A, B, C, D đồng phẳng.

D. Vì $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ nên A,B,C, D đồng phẳng.

[11] Cho tứ diện A.BCD; M, N, G lần lượt là trung điểm AB, CD, MN, I là điểm bất kì trong không gian, đẳng thức nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN})$. B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GI}$. D. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{IG}$.

[12] Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O, I là trung điểm SO. đẳng thức nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD}$. B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

C. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{SO}$. D. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

[13] Trong không gian, ta xét ΔABC . M là một điểm thuộc mp(ABC), sao cho $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}$, $x, y \neq 0$. Gọi O là điểm bất kì trong không gian. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{x+y-1}\overrightarrow{OA} - \frac{x}{x+y-1}\overrightarrow{OB} + \frac{y}{x+y-1}\overrightarrow{OC}$.

B. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{x+y-1}\overrightarrow{OA} + \frac{x}{x+y-1}\overrightarrow{OB} + \frac{y}{x+y-1}\overrightarrow{OC}$.

C. $\overrightarrow{OM} = \frac{-1}{x+y-1}\overrightarrow{OA} - \frac{x}{x+y-1}\overrightarrow{OB} + \frac{y}{x+y-1}\overrightarrow{OC}$.

D. $\overrightarrow{OM} = \frac{-1}{x+y-1}\overrightarrow{OA} + \frac{x}{x+y-1}\overrightarrow{OB} + \frac{y}{x+y-1}\overrightarrow{OC}$.

[14] Cho hình chóp S.ABC. Trên SA, SB, SC lấy A', B', C' sao cho SA = aSA', SB = b.SB', SC = c.SC'. Mối liên hệ a,b,c để mp(A'B'C') đi qua trọng tâm ΔABC là:

A. $a+b+c=1$. B. $a+b+c=-1$.

C. $a+b+c=3$. D. $a+b+c=-3$.

[15] Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng:

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

[16] Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tích vô hướng $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{A'B}$ bằng:

A. 0. B. $-a^2$. C. a^2 . D. $2a^2$.

[17] Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng:

A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. D. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

[18] Trong không gian cho 4 điểm A,B,C,D tùy ý. Đẳng thức nào dưới đây là đúng

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$

[19] Cho tứ diện A.BCD, có AC vuông góc BD, AB vuông góc CD. Kết luận nào dưới đây là sai:

A. $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$ **C.** $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}.$ **D.** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$

[20] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt là trung điểm AB, A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là giao điểm của các đường chéo trong các mặt ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'. Xét các mệnh đề dưới đây.

(I) $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}.$

(II) Hai tam giác ΔPQR , $\Delta P'Q'R'$ có cùng trọng tâm.

(III) PP', QQ', RR' đồng phẳng.

Có bao nhiêu mệnh đề sai:

A.0. **B.1.** **C.2.** **D.3.**

[21] Cho tứ diện A.BCD, gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tứ diện A.BCD và ΔBCD . Khẳng định nào dưới đây là sai:

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}.$

C. A, G, G' thẳng hàng. **D.** G là trung điểm AG'.

[22] Điều kiện nào dưới đây là đủ để khẳng định ba điểm A, B, C thẳng hàng.

A. $\overrightarrow{OB} = (k-1)\overrightarrow{OA} + (k+1)\overrightarrow{OC}, \forall k \neq 0$ và O là điểm bất kì. **B.** $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, \forall k \in \mathbb{Z}.$

C. $\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}, \begin{cases} m+n=1 \\ mn \neq 0 \end{cases}$ và O là điểm bất kì. **D.** $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, \forall k \in \mathbb{R}.$

[23] Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$ và ba số thực $m, n, p \neq 0$. Đặt $\vec{x} = m\vec{a} - n\vec{b}$, $\vec{y} = p\vec{b} - m\vec{c}$, $\vec{z} = n\vec{c} - p\vec{a}$. Hệ thức liên hệ giữa ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ là:

A. $p\vec{x} + n\vec{y} + m\vec{z} = \vec{0}.$ **B.** $(p-m)\vec{x} + (n-p)\vec{y} + (m-p)\vec{z} = \vec{0}.$

C. $p\vec{x} - n\vec{y} - m\vec{z} = \vec{0}.$ **D.** $(p-m)\vec{x} - (n-p)\vec{y} - (m-p)\vec{z} = \vec{0}.$

[24] Cho tứ diện O.ABC, G là trọng tâm tứ diện O.ABC, G' là trọng tâm ΔABC . Đẳng thức nào dưới đây là sai:

A. $\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$ **B.** $2\overrightarrow{OG'} - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}.$

C. $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DO}).$ **D.** $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$

[25] Cho hình hộp OABC.O'A'B'C'. Gọi I là tâm của hình hộp. Đẳng thức nào dưới đây là đúng:

A. $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$ **B.** $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$

C. $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

D. $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

[26] Cho hình hộp OABC.O'A'B'C'. Gọi I là tâm của hình hộp. Đẳng thức nào dưới đây là đúng:

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO'}$.

[27] Cho hình hộp OABC.O'A'B'C'. Gọi I là tâm của hình hộp. Đẳng thức nào dưới đây là đúng:

A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'I}$.

B. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'I}$.

C. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{B'A'} - \overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'I}$.

D. $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'I}$.

[28] Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Đẳng thức nào dưới đây là đúng:

A. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$.

B. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$.

D. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$.

[29] Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Đẳng thức nào dưới đây là đúng:

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC})$.

[30] Cho tứ diện ABCD. Ba điểm M, N, P trong không gian thỏa mãn: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP} = (t-2)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$. Với giá trị nào của $t > 0$ thì ba vector $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ đồng phẳng:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

[31] Cho tứ diện ABCD. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa mãn $\vec{a} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\vec{c} = -2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$. Biểu diễn $\vec{v} = 5\overrightarrow{OA} + 10\overrightarrow{OB} - 15\overrightarrow{OC}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta được:

A. $\vec{v} = 20\vec{a} + 5\vec{b} + 10\vec{c}$.

B. $\vec{v} = -20\vec{a} - 5\vec{b} - 10\vec{c}$.

C. $\vec{v} = 20\vec{a} - 5\vec{b} + 10\vec{c}$.

D. $\vec{v} = 20\vec{a} - 5\vec{b} - 10\vec{c}$.

[32] Trong không gian cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng, I là trung điểm BC, G là trọng tâm ΔABC . Tập hợp các điểm M, M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ là:

A. Đường tròn tâm G, bán kính IA.

B. Đường tròn tâm G, bán kính $\frac{1}{3} IA$.

C. Mặt cầu tâm G, bán kính IA.

D. Mặt cầu tâm G, bán kính $\frac{2}{3} IA$.

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

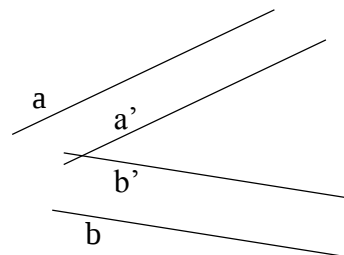
1. Góc giữa hai đường thẳng: Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song a, b .

Chú ý: Nếu $a // b$ hoặc $a \equiv b$ thì $(a, b) = 0^\circ$ và $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$

2. Hai đường thẳng vuông góc:

• $a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 90^\circ$

• Lưu ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.



A. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

ĐS: Chứng minh $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

2. Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

a) Chứng minh AO vuông góc với CD .

b) Gọi M là trung điểm của CD . Tính góc giữa AC và BM .

ĐS: b) $\cos(AC, BM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$.

a) CMR đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối diện thì vuông góc với 2 cạnh đó.

b) Tính góc hợp bởi các cạnh đối của tứ diện.

ĐS: b) $\arccos \frac{|a^2 - c^2|}{b^2}$; $\arccos \frac{|b^2 - c^2|}{a^2}$; $\arccos \frac{|a^2 - b^2|}{c^2}$.

4. Cho hình chóp $SABCD$, có đáy là hình bình hành với $AB = a$, $AD = 2a$, SAB là tam giác vuông cân tại A , M là điểm trên cạnh AD ($M \neq A$ và D). Mặt phẳng (P) qua M song song với $mp(SAB)$ cắt BC , SC , SD lần lượt tại N , P , Q .

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Đặt $AM = x$. Tính diện tích của $MNPQ$ theo a và x .

5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh rằng $AC \perp B'D'$, $AB' \perp CD'$, $AD' \perp CB'$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

- A. Trong không gian, nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song nhau.
- B. Trong không gian, nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng vuông góc nhau.
- C. Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song nhau.
- D. Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng vuông góc nhau.

[2] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

C. Cho ba đường thẳng a,b,c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.

D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (a,b).

[3] Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì song song với đường thẳng kia.

[4] Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không cùng phương và khác $\vec{0}$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $\vec{c}$ vuông góc cả hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

B. Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng vuông góc vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

C. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ luôn đồng phẳng.

D. Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng vuông góc vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

[5] Cho hình lập phương ABCD.EFGH có cạnh bằng a. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng:

A. a^2 .

B. $a^2\sqrt{2}$.

C. 0.

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

[6] Cho hình lập phương ABCD.EFGH có cạnh bằng a. Khi đó góc giữa HB và AC bằng:

A. 0° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

[7] Cho tứ diện A.BCD có $AB = AC = AD = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ, \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là:

A. 180° .

B. 120° .

C. 90° .

D. 45° .

[8] Cho tứ diện A.BCD có $AB = AC = AD = a$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD. Góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ là:

- A. 45° . B. 60° . **C. 90° .** D. 120° .

[9] Cho tứ diện A.BCD có $AB = AC = AD = a$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD. Góc giữa $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{IJ}$ là:

- A. 45° . **B. 90° .** C. 135° . D. 120° .

[10] Cho hình chóp S.ABC có $SA = SC = a, SB = 2a$ và $\widehat{ASB} = \widehat{CSA} = 45^\circ; \widehat{BSC} = 90^\circ$. Góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ là:

- A. 45° . **B. $\approx 108^\circ 26'$.** C. 90° . D. $\approx 129^\circ 13'$.

[11] Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Góc giữa $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là:

- A. 45° . B. 60° . **C. 90° .** D. 120° .

[12] Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Góc giữa $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$ là:

- A. 45° . B. 60° . C. 115° . **D. 90° .**

[13] Cho hình lập phương ABCD.EFGH, góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{GE}$ là:

- A. 135° .** B. 45° . C. 115° . D. 90° .

[14] Cho hình lập phương ABCD.EFGH, góc giữa $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ là:

- A. 45° . **B. 60° .** C. 115° . D. 90° .

[15] Cho hình lập phương ABCD.EFGH, góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$ là:

- A. 135° . B. 45° . C. 115° . **D. 90° .**

[16] Trong không gian cho hai tam giác đều ABC, ABC' nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$ là:

- A. 60° . B. 45° . **C. 90° .** D. 120° .

[17] Gọi S là diện tích $\triangle ABC$. Khi đó $S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - k(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$. Giá trị của k là:

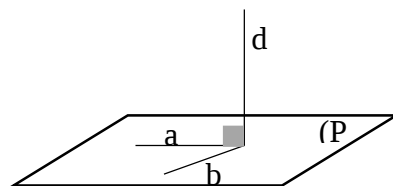
- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. **D. 1.**

III. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa: $d \perp (P) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (P)$ (vuông góc với mặt thì vuông góc với mọi đường nằm trong mặt)

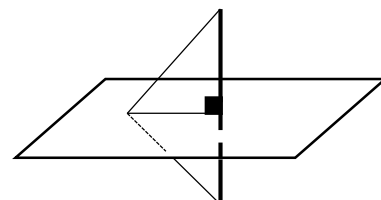
2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng :

$$\begin{cases} a, b \subset (P), a \cap b = O \\ d \perp a, d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



(đường thẳng vuông góc với mp khi vuông góc 2 đường thẳng cắt nhau nằm trong mp).

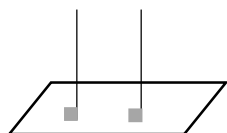
3. Mặt phẳng trung trực: của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó.



Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

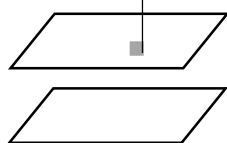
4. Một số tính chất:

$$\bullet \begin{cases} a // b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$$



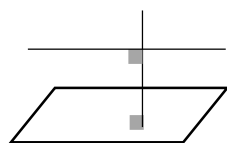
$$\bullet \begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P), b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a // b$$

$$\bullet \begin{cases} (P) // (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$$

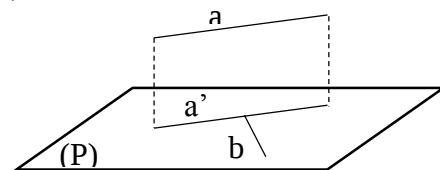


$$\bullet \begin{cases} (P) \neq (Q) \\ (P) \perp a, (Q) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q)$$

$$\bullet \begin{cases} a // (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$$



$$\bullet \begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b, (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a // (P)$$



6. Định lý ba đường vuông góc:

Cho $a \not\subset (P), b \subset (P)$, a' là hình chiếu của a trên (P) .

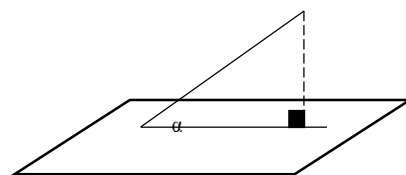
$$\text{Khi đó } b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$$

(vuông góc hình chiếu $\Leftrightarrow$ vuông góc với đường xiên)

6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

• Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90^\circ$.

• Nếu $d \not\perp (P)$ thì $(d, (P)) = (d, d')$ với d' là hình chiếu của d trên (P) .



Chú ý: $0^\circ \leq (d, (P)) \leq 90^\circ$.

A. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG

*** Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:**

$$\begin{cases} a, b \subset (P), a \cap b = O \\ d \perp a, d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P),$$

$$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$$

$$\begin{cases} a \parallel b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$$

*** Chứng minh hai đường thẳng vuông góc:** Định lý 3 đường vuông góc.

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$$

- Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông tâm O. $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.
 - CMR: $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.
 - CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra 3 đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.
 - CMR: $HK \perp (SAC)$. Từ đó suy ra $HK \perp AI$.
- Cho tứ diện SABC có tam giác ABC vuông tại B; $SA \perp (ABC)$.
 - Chứng minh: $BC \perp (SAB)$.
 - Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$. Chứng minh: $AH \perp SC$.
- Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết: $SA = SC$, $SB = SD$.
 - Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.
 - Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC. CMR: $IJ \perp (SBD)$.
- Cho tứ diện ABCD có $\triangle ABC$ và $\triangle DBC$ là 2 tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC.
 - Chứng minh: $BC \perp (AID)$.
 - Vẽ đường cao AH của $\triangle AID$. Chứng minh: $AH \perp (BCD)$.
- Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mp(ABC). Chứng minh rằng:
 - $BC \perp (OAH)$.
 - H là trực tâm của tam giác ABC.

$$c) \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

d) Các góc của tam giác ABC đều nhọn.

6. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều; SAD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. CMR: $SH \perp AC$.

c) Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho: $BM \perp SA$. Tính AM theo a.

ĐS: a) $a, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

7. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.

a) CMR: $SH \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh: $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

8. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có $SD = a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh: $SA \perp (ABCD)$ và tính SA.

b) Đường thẳng qua A và vuông góc với AC, cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Hãy xác định các giao điểm K, L của SB, SD với mp(HIJ). CMR: $AK \perp (SBC)$, $AL \perp (SCD)$.

c) Tính diện tích tứ giác AKHL.

ĐS: a) $a\sqrt{2}$. c) $\frac{8a^2}{15}$.

9. Gọi I là 1 điểm bất kì ở trong đường tròn (O;R). CD là dây cung của (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I ta lấy điểm S với $OS = R$. Gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) Tam giác SDE vuông tại S.

b) $SD \perp CE$.

c) Tam giác SCD vuông.

10. Cho ΔMAB vuông tại M ở trong mặt phẳng (P) . Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A ta lấy 2 điểm C, D ở hai bên điểm A . Gọi C' là hình chiếu của C trên MD , H là giao điểm của AM và CC' .

a) Chứng minh: $CC' \perp (MBD)$.

b) Gọi K là hình chiếu của H trên AB . CMR: K là trực tâm của ΔBCD .

11. Cho hình tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh rằng: $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

b) Từ đó suy ra nếu một tứ diện có 2 cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

DẠNG 2: TÌM THIẾT DIỆN QUA 1 ĐIỂM VÀ VUÔNG GÓC VỚI ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Tìm 2 đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với đường thẳng đã cho, khi đó mặt phẳng cắt sẽ song song (hoặc chứa) với 2 đường thẳng ấy.

1. Cho hình chóp $SABCD$, có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là 1 điểm trên cạnh AB . Mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với AB . Đặt $AM = x$ ($0 < x < a$).

a) Tìm thiết diện của hình chóp với (P) . Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x .

ĐS: a) Hình thang vuông b) $S = 2a(a - x)$.

2. Cho tứ diện $SABC$, có đáy là tam giác đều cạnh a ; $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua B và vuông góc với SC . Tìm thiết diện của tứ diện với (P) và tính diện tích của thiết diện này.

ĐS: $S = \frac{a^2 \sqrt{15}}{20}$.

3. Cho tứ diện $SABC$ với ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$. $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. M là 1 điểm tùy ý trên cạnh AB , đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB .

a) Tìm thiết diện của tứ diện với (P) .

b) Tính diện tích của thiết diện đó theo a và x . Tìm x để diện tích thiết diện có giá trị lớn nhất.

ĐS: b) $S = \sqrt{3}x(a - x)$; S lớn nhất khi $x = \frac{a}{2}$.

4. Cho hình tứ diện $SABC$ với ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) và tính diện tích thiết diện trong các trường hợp sau:

a) (P) qua S và vuông góc với BC.

b) (P) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC.

c) (P) qua trung điểm M của SC và vuông góc với AB.

ĐS: a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. b) $\frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. c) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

5. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Vẽ đường cao AH của tam giác SAB.

a) CMR: $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

ĐS: b) $S = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18}$

DẠNG 3: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Phương pháp: Xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

- Tìm giao điểm O của a với (P).
- Chọn điểm A $\in$ a và dựng AH $\perp$ (P). Khi đó $\angle AOH = (a, (P))$

1. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O; $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết $(MN, (ABCD)) = 60^\circ$.

a) Tính MN và SO.

b) Tính góc giữa MN và (SBD).

ĐS: a) $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$; $SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}$ b) $\sin(MN, (SBD)) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a) SC và (ABCD) b) SC và (SAB) c) SB và (SAC) d) AC và (SBC)

ĐS: a) 60° b) $\arctan \frac{1}{\sqrt{7}}$ c) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{14}}$ d) $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$.

3. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình chữ nhật; $SA \perp (ABCD)$. Cạnh SC = a hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB góc β .

a) Tính SA.

b) CMR: $AB = a \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}$.

ĐS: a) $a \cdot \sin \alpha$

4. Cho hình chóp SABC, có ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$, $BAC = \alpha$. Biết SA, SB, SC đều hợp với mặt phẳng (ABC) góc α .

a) CMR: hình chiếu của S trên mp(ABC) là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

b) Tính khoảng cách từ S đến mp(ABC).

ĐS: b) $\frac{a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

5. Cho lăng trụ ABC.A'B'C', có đáy là tam giác đều cạnh a, $AA' \perp (ABC)$. Đường chéo BC' của mặt bên BCC'B' hợp với (ABB'A') góc 30° .

a) Tính AA'.

b) Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến (BA'C').

c) Gọi N là trung điểm của cạnh BB'. Tính góc giữa MN và (BA'C').

ĐS: a) $a\sqrt{2}$. b) $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. c) $\arcsin \sqrt{\frac{54}{55}}$.

6. Cho lăng trụ ABC.A'B'C', có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A; $AA' \perp (ABC)$. Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của B'C' có độ dài bằng a, MN hợp với đáy góc α và mặt bên BCC'B' góc β .

a) Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α .

b) Chứng minh rằng: $\cos \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$.

ĐS: a) $AB = AC = 2a \cos \alpha$; $BC = 2a \sqrt{2} \cos \alpha$; $AA' = a \sin \alpha$.

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

A. Đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mp (P) thì nó vuông góc với mp (P).

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai mp song song nhau thì nó cũng vuông góc với mp còn lại.

C. Đường thẳng vuông góc với mp thì vuông góc với mọi đường nằm trong mp đó.

D. Một đường thẳng vuông góc với một mp cho trước thì mọi đường thẳng song song với đường thẳng đó đều vuông góc với mp.

[2] Dữ kiện nào dưới đây có thể khẳng định $d \perp (P)$:

(I) $\begin{cases} d \perp (Q) \\ (P) // (Q) \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$

(II) $\begin{cases} d' \perp (Q) \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$

(III) $\begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \\ (d_1 \cap d_2) \in (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$

(IV) $\angle(d, (P)) = 90^\circ.$

A. Chỉ có (III).

B. (I), (II), (III).

C. (III) và (IV).

D. (I), (II), (III), (IV).

[3] Cho tứ diện A.BCD cách nào dưới đây có thể xác định điểm O cách đều 4 đỉnh của tứ diện:

A. Dựng đường thẳng d vuông góc với mp(BCD) tại tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD . Dựng đường trung trực d' của AB. d cắt d' tại I, I chính là điểm cần tìm.

B. Dựng đường thẳng d vuông góc với mp(BCD) tại tâm đường tròn nội tiếp ΔBCD . Dựng mp trung trực (P) của AB. d cắt (P) tại I, I chính là điểm cần tìm.

C. Dựng đường thẳng d vuông góc với mp(BCD) tại tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD . Dựng mp trung trực (P) của AB. d cắt (P) tại I, I chính là điểm cần tìm.

D. Hạ đường cao AH của tứ diện A.BCD. Dựng mp trung trực (P) của AB. AH cắt (P) tại I, I chính là điểm cần tìm.

[4] Góc giữa đường thẳng và mp :

A. Là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của nó trên mp.

B. Là góc giữa đường thẳng và hình chiếu vuông góc của nó trên mp.

C. Có thể là góc tù.

D. Luôn luôn là góc nhọn.

[5] Chọn câu sai. Cho điểm S có hình chiếu vuông góc trên mp(P) là H, M là điểm bất kì trên (P) (M không trùng H). Khi đó ta có:

A. $\angle(SM, (P)) = \angle(SM, MH)$ (góc giữa đường với mặt bằng góc giữa đường và hình chiếu vuông góc của nó trên mặt).

B. $SM_1 > SM_2 \Leftrightarrow HM_1 > HM_2$ (hình chiếu lớn hơn khi và chỉ khi đường xiên lớn hơn).

C. $SM \leq MH$ (độ dài của đường xiên luôn nhỏ hơn hoặc bằng hình chiếu).

D. $SM_1 = SM_2 \Leftrightarrow HM_1 = HM_2$ (hình chiếu bằng nhau khi và chỉ khi đường xiên bằng nhau).

[6] Cho tứ diện A.BCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Độ dài AD bằng:

A. $AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

B. $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$

C. $AB = \sqrt{ab + bc + ac}.$

D. $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}.$

[7] Cho tứ diện A.BCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau. Khi đó CD vuông góc với mp:

A. mp(ABD).

B. mp(ABC).

C. mp trung trực của BC.

D. mp trung trực của BD.

[8] Cho tứ diện A.BCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau. Điểm cách đều bốn đỉnh A,B,C,D của hình chóp là:

- A. trung điểm AB. B. trung điểm BC. C. trung điểm CD. **D. trung điểm AD.**

[9] Cho tứ diện A.BCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Độ dài đường cao đỉnh A của tứ diện là:

- A.a.** B.b. C. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **D. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.**

[10] Cho tứ diện O.ABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = 2OB = OC$. Khi đó:

- A. $\triangle ABC$ có góc A là góc tù. C. $\triangle ABC$ có góc B là góc tù.

- B. $\triangle ABC$ có góc C là góc tù. **D. $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn.**

[11] Cho tứ diện O.ABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau. Khi đó hình chiếu vuông góc của O lên mp(ABC) là:

- A. trọng tâm $\triangle ABC$. **B. trực tâm $\triangle ABC$.**

- C. tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. D. tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

[12] Cho tứ diện O.ABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau. Độ dài đường cao đỉnh O của hình chóp là:

- A. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.** B. $h = \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}$.

- C. $h = \sqrt{OA.OB + OB.OC + OA.OC}$. **D. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA.OB} + \frac{1}{OB.OC} + \frac{1}{OA.OC}$.**

[13] Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$. Chọn câu sai trong các câu sau:

- A. $BC \perp SH$. B. AH, SK, BC đồng qui. C. $BC \perp (SAH)$. **D. $BC \perp (SAB)$.**

[14] Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$, $\triangle ABC$ đều cạnh a. Gọi H, K lần lượt là trực tâm $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$. Góc giữa SC và mp (BHK) là:

- A. 30° . B. 60° . **C. 90° .** D. 45° .

[15] Xét bài toán “ Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$. Xác định góc giữa HK và mp (SBC).”

Để giải bài toán trên, một học sinh đã làm như sau:

B1. $HK \cap (SBC) = K.$ (1)

B2. Trong mp(ABC): $AH \cap BC = I.$ (2)

B3. Ba đường thẳng AH, BC, SK đồng qui tại I. (3)

B4. Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle(HK, (SBC)) = \angle HIK.$ (4)

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Đúng. B. Sai B2. C. Sai B3. **D. Sai B4.**

[16] Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, ΔABC có ba góc nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔSBC . Chọn câu sai trong các câu dưới đây:

A. $HK \perp (SBC)$. **B. $CK \perp (SAB)$.** C. $BH \perp (SAC)$. D. $CH \perp (SAB)$.

[17] Cho hình chóp S.ABC có ΔABC đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. G là trọng tâm ΔABC . Kết luận nào sau đây là đúng:

A. $SG \perp (ABC)$. B. $AG \perp (SBC)$. C. $BG \perp (SAC)$. D. $CG \perp (SAB)$.

[18] Cho hình chóp S.ABC có ΔABC đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. G là trọng tâm ΔABC . Độ dài SG bằng:

A. $SG = \frac{\sqrt{36b^2 - 3a^2}}{6}$. B. $SG = \frac{\sqrt{36b^2 + 3a^2}}{6}$.

C. $SG = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}$. D. $SG = \frac{\sqrt{9b^2 + 3a^2}}{3}$.

[19] Cho hình chóp S.ABC có ΔABC đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Mp (P) đi qua A và vuông góc với SC. Hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại C_1 nằm trong đoạn SC?

A. $b > a\sqrt{2}$. B. $b > 2a$.
C. $a < 2b$. **D. $a < b\sqrt{2}$.**

[20] Với a, b thỏa điều kiện trên, diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp S.ABC bằng:

A. $S = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}$. B. $S = \frac{a^2 \sqrt{5b^2 - a^2}}{2b}$.

C. $S = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$. D. $S = \frac{a^2 \sqrt{5b^2 - a^2}}{4b}$.

[21] Tứ diện A.BCD gọi là tứ diện trực tâm khi nó có các cạnh đối diện vuông góc nhau. Xét các mệnh đề dưới đây.

(I) Chân đường cao từ một đỉnh trùng với trực tâm mặt đối diện.

(II) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

(III) Bốn đường cao của tứ diện đồng quy tại một điểm.

(IV) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$.

Có mấy mệnh đề có thể khẳng định tứ diện A.BCD là trực tâm.

A. 4. **B. 3.** C. 2. D. 1.

[22] Cho tứ diện A.BCD có $AB = AC = BC = BD = CD = a$, $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi H lần chân đường cao đỉnh A của

hình chóp. Độ dài BH bằng:

A. $BH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $BH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. C. $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

[23] Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông, cạnh SA vuông góc với đáy. Gọi I, J là hai điểm trên SB và SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Mệnh đề nào dưới đây là sai:

- A. $IK // mp(ABCD)$. B. $IK \perp mp(SAC)$.
 C. $IK \perp mp(SCD)$. D. $AB // mp(SCD)$.

[24] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa SC và (ABCD) bằng:

- A. 60° . B. 30° . C. $-6,147 \text{ rad}$. D. 90° .

[25] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa SC và (SAB) bằng:

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

[26] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), $SA = a$. Góc giữa SB và (SAC) bằng:

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

[27] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), $SA = 2a$. Góc giữa SC và (SBD) bằng:

- A. $20^\circ 7'$. B. $45^\circ 35'$. C. 45° . D. $20^\circ 42'$.

[28] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SO vuông góc (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC, biết $(MN, \widehat{ABCD}) = 60^\circ$. Độ dài MN là:

- A. $a \frac{\sqrt{10}}{2}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $a \frac{\sqrt{5}}{8}$. D. $a \sqrt{\frac{5}{8}}$.

[29] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SO vuông góc (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC, biết $(MN, \widehat{ABCD}) = 60^\circ$. Độ dài SO là:

- A. $a\sqrt{30}$. B. $a \frac{\sqrt{30}}{2}$. C. $a \frac{\sqrt{30}}{8}$. D. $a \frac{\sqrt{30}}{4}$.

[30] Cho tứ diện A.BCD, có AB vuông góc (BCD), $AB = a\sqrt{3}$, ΔBCD đều cạnh a. Góc giữa AC và (BCD) bằng:

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

[31] Cho tứ diện A.BCD, có AB vuông góc (BCD), $AB = a\sqrt{3}$, ΔBCD vuông cân tại C, cạnh BC = a. Góc giữa AD và (BCD) bằng:

- A. $39^\circ 17'$. B. $40^\circ 53'$. C. $50^\circ 46'$. D. $49^\circ 7'$.

[32] Cho tứ diện A.BCD, có AB vuông góc (BCD), $AB = a\sqrt{3}$, $\triangle BCD$ đều cạnh a. Góc giữa AD và (ABC) bằng:

A. $64^{\circ}20'$.

B. $25^{\circ}40'$.

C. $42^{\circ}2'$.

D. $47^{\circ}58'$.

IV. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai mặt phẳng

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow ((P), (Q)) = (a, b)$
- Giả sử $(P) \cap (Q) = c$. Từ $I \in c$, dựng $\begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow ((P), (Q)) = (a, b)$ **Chú ý:** $0^\circ \leq ((P), (Q)) \leq 90^\circ$

2. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P) , S' là diện tích của hình chiếu (H') của (H) trên (Q) , $\varphi = ((P), (Q))$.

Khi đó: $S' = S \cdot \cos \varphi$

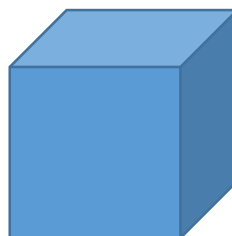
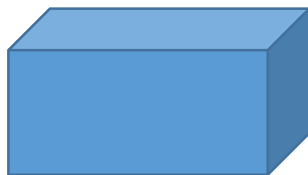
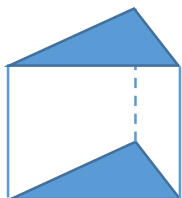
3. Hai mặt phẳng vuông góc

- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow ((P), (Q)) = 90^\circ$
- Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau: $\begin{cases} (P) \supset a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$

4. Tính chất

- $\begin{cases} (P) \perp (Q), (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$
- $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \ni A, a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$
- $\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$

5. Hình lăng trụ đứng – Hình hộp chữ nhật – Hình lập phương



A. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Phương pháp: Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- Tìm hai đường thẳng a, b: $a \perp (P)$, $b \perp (Q)$. Khi đó: $((P), (Q)) = (a, b)$.
- Giả sử $(P) \cap (Q) = c$. Từ $I \in c$, dựng $\begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow ((P), (Q)) = (a, b)$

1. Cho hình chóp SABC, có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$; $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SEF) và (SBC).

ĐS: a) $((SAC), (SBC)) = 60^\circ$ b) $\cos((SEF), (SBC)) = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

2. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O; $SA \perp (ABCD)$. Tính SA theo a để số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) bằng 60° .

ĐS: $SA = a$.

3. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD).

ĐS: a) $\tan((SAD), (SBC)) = \sqrt{7}$ b) $\cos((SBC), (SCD)) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

4. Cho hình vuông ABCD cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

a) (SBC) và (ABC) b) (SBD) và (ABD) c) (SAB) và (SCD)

ĐS: a) 60° b) $\arctan \sqrt{6}$ c) 30° .

5. Cho hình thoi ABCD cạnh a, tâm O, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $SA \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) Chứng minh ASC vuông.

b) Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

ĐS: c) 60° .

6. Cho hình chóp SABCD có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng:

a) (SBC) và (ABC) b) (SAB) và (SBC) c) (SBC) và (SCD)

ĐS: a) 45° b) 60° c) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$.

DẠNG 2. CHỨNG MINH HAI MP VUÔNG GÓC –CÁCH KHÁC CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MP

* Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Để chứng minh $(P) \perp (Q)$, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh trong (P) chứa đường thẳng a mà $a \perp (Q)$.
- Chứng minh $((P), (Q)) = 90^\circ$

* Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh $d \perp (P)$, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh $d \subset (Q)$ với $(Q) \perp (P)$ và d vuông góc với giao tuyến c của (P) và (Q).
- Chứng minh $d = (Q) \cap (R)$ với $(Q) \perp (P)$ và $(R) \perp (P)$.
- Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.

1. Cho tam giác đều ABC, cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = a\sqrt{6}$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

2. Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD cùng vuông góc với đáy BDC. Vẽ các đường cao BE, DF của $\triangle BCD$, đường cao DK của $\triangle ACD$.

a) Chứng minh: $AB \perp (BCD)$.

b) Chứng minh 2 mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với mp(ADC).

- c) Gọi O và H lần lượt là trực tâm của 2 tam giác BCD và ADC. CMR: $OH \perp (ADC)$.
3. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.
- a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.
- b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).
- c) Gọi BE, DF là hai đường cao của $\triangle SBD$. CMR: $(ACF) \perp (SBC)$, $(AEF) \perp (SAC)$.
- ĐS: b) 90° .
4. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là 2 điểm lần lượt ở trên 2 cạnh BC, DC sao cho $BM = \frac{a}{2}$, $DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh 2 mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.
5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với mp(ABC).
- a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$.
- b) Gọi AH, AK là các đường cao của $\triangle ABC$ và $\triangle AB'C'$. Chứng minh 2 mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(AB'C')$ cùng vuông góc với mặt phẳng (AHK).
6. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB.
- a) Chứng minh rằng $SI \perp (ABCD)$, $AD \perp (SAB)$.
- b) Tính góc giữa BD và mp(SAD).
- c) Tính góc giữa SD và mp(SCI).
- ĐS: b) $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ c) $\arcsin \frac{\sqrt{10}}{5}$
7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mp(ABC); S là 1 điểm di động trên (P) sao cho SABC là hình chóp có 2 mặt bên SAB, SAC hợp với đáy ABC hai góc có số đo lần lượt là α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên BC, AB, AC.
- a) Chứng minh rằng: $SH^2 = HI.HJ$.
- b) Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy tìm giá trị của α .
- ĐS: b) $SH_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{bc}$; $\alpha = \arctan \sqrt{\frac{c}{b}}$

8. Cho hình tứ diện ABCD có $AB = BC = a$, $AC = b$, $DB = DC = x$, $AD = y$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a , b , x , y để:

a) Mặt phẳng $(ABC) \perp (BCD)$.

b) Mặt phẳng $(ABC) \perp (ACD)$.

ĐS: a) $x^2 - y^2 + \frac{b^2}{2} = 0$ b) $x^2 - y^2 + b^2 - 2a^2 = 0$

9. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$; M và N là hai điểm nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt $BM = x$, $DN = y$.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là $MN \perp (SAM)$. Từ đó suy ra hệ thức liên hệ giữa x và y .

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có số đo bằng 30° là $a(x + y) + \sqrt{3}xy = a^2\sqrt{3}$.

ĐS: a) $a^2 - a(x + y) + x^2 = 0$

10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60° , cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và $SC \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh $(SBD) \perp (SAC)$.

b) Trong tam giác SCA kẻ $IK \perp SA$ tại K. Tính độ dài IK.

c) Chứng minh $\angle BKD = 90^\circ$ và từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAD)$.

ĐS: b) $IK = \frac{a}{2}$.

DẠNG 3: DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU CỦA ĐA GIÁC

Phương pháp: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P), S' là diện tích của hình chiếu (H') của (H) trên (Q), $\varphi = \angle((P), (Q))$. Khi đó: $S' = S \cdot \cos \varphi$

1. Cho hình thoi ABCD có đỉnh A ở trong mặt phẳng (P), các đỉnh khác không ở trong (P), $BD = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Chiếu vuông góc hình thoi lên mặt phẳng (P) ta được hình vuông AB'C'D'.

a) Tính diện tích của ABCD và AB'C'D'. Suy ra góc giữa (ABCD) và (P).

b) Gọi E và F lần lượt là giao điểm của CB, CD với (P). Tính diện tích của tứ giác EFDB và EFD'B'.

ĐS: a) 450 b) $S_{\text{EFDB}} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$; $S_{\text{EFD'B'}} = \frac{3a^2}{4}$

2. Cho tam giác cân ABC có đường cao $AH = a\sqrt{3}$, đáy $BC = 3a$; $BC \subset (P)$. Gọi A' là hình chiếu của A trên (P). Khi $\Delta A'BC$ vuông tại A' , tính góc giữa (P) và (ABC).

ĐS: 30°

3. Cho tam giác đều ABC cạnh a, nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với (P).

a) Chứng minh tam giác ADE vuông. Tính diện tích của tam giác ADE.

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (P).

ĐS: a) $\frac{3a^2}{4}$ b) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Cho hình chóp SABC có các mặt bên hợp với đáy một góc φ .

a) Chứng minh hình chiếu của S trên mp(ABC) là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC .

b) Chứng minh: $S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCA} = \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos \varphi}$

5. Cho tứ diện SABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Gọi H là trực tâm của ΔABC . Chứng minh rằng:

a) $SH \perp (ABC)$.

b) $(S_{\text{SBC}})^2 = S_{\text{ABC}} \cdot S_{\text{HBC}}$. Từ đó suy ra: $(S_{\text{ABC}})^2 = (S_{\text{SAB}})^2 + (S_{\text{SBC}})^2 + (S_{\text{SCA}})^2$.

6. Trong mặt phẳng (P) cho ΔOAB vuông tại O, $AB = 2a$, $OB = a$. Trên các tia vuông góc với (P) vẽ từ A và B và ở về cùng một bên đối với (P), lấy $AA' = a$, $BB' = x$.

a) Định x để tam giác $OA'B'$ vuông tại O.

b) Tính $A'B'$, OA' , OB' theo a và x. Chứng tỏ tam giác $OA'B'$ không thể vuông tại B' . Định x để tam giác này vuông tại A' .

c) Cho $x = 4a$. Vẽ đường cao OC của ΔOAB . Chứng minh rằng $CA' \perp A'B'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(OA'B')$ và (P).

ĐS: a) $x = 0$ b) $x = 4a$ c) $\arccos \frac{\sqrt{39}}{26}$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Trong các mệnh đề sau, hãy tìm mệnh đề đúng.

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.
- B. Nếu hai mặt phẳng vuông góc nhau thì mọi đường trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- C. Nếu hai mặt phẳng phân biệt $(\alpha), (\beta)$ cùng vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của $(\alpha), (\beta)$ sẽ vuông góc với mp (γ) .
- D. Hai mặt phẳng phân biệt $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau theo giao tuyến d, với mỗi điểm A thuộc (α) và B thuộc (β) thì AB vuông góc d.

[2] Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A. Qua một đường thẳng d cho trước xác định được duy nhất một mặt phẳng (P) chứa d và vuông góc mp (Q) cho trước.
- B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.
- C. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định.
- D. Hai mặt phẳng vuông góc nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng còn lại.

[3] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là sai?

- A. Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là hình chữ nhật.
- B. Hình lăng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng.
- C. Hình lăng trụ đứng có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- D. Hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy là hình lăng trụ đứng.

[4] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Để ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật thì:

- A. $A'C = AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- B. $A'C = BD' = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}$.
- C. $A'C = AC' = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}$.
- D. $A'C = BD' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

[5] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song nhau.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thì song song nhau.
- D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

[6] Chọn câu đúng. Dữ kiện nào dưới đây không thể kết luận $mp(P) \perp mp(Q)$?

- A. $\begin{cases} d \perp (P) \\ d \subset (Q) \end{cases}$.
- B. $((P), (Q)) = 90^\circ$.
- C. $\begin{cases} d \subset (Q), & d_1, d_2 \subset (P) \\ d \perp d_1, & d \perp d_2 \end{cases}$.
- D. A, B, C đều đúng.

[7] Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song nhau.

- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.
 C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
 D. Đường thẳng d không thuộc mặt phẳng (α) , d và (α) cùng vuông góc với đường thẳng d' thì $d // (\alpha)$.

[8] Độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh a là:

- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a$. D. $3a$.

[9] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Kết luận nào dưới đây là sai:

- A. $AC' \perp (A'BD)$. B. $AC' \perp (B'CD')$.
 C. $(A'BD) // (B'CD')$. D. $(A'B, \widehat{AB'C'D}) = 45^\circ$.

[10] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Mặt phẳng trung trực của AC' cắt hình lập phương theo thiết diện là hình:

- A. Tam giác đều. B. Tứ giác đều. C. Ngũ giác đều. D. Lục giác đều.

[11] Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau, điểm M nằm ngoài hai mặt phẳng đó. Qua M dựng được bao nhiêu mp vuông góc với cả $(\alpha), (\beta)$:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.

[12] Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ song song nhau, điểm M nằm ngoài hai mặt phẳng đó. Qua M dựng được bao nhiêu mp vuông góc với cả $(\alpha), (\beta)$:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.

[13] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Độ dài SO bằng:

- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

[14] Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. $(P) \cap (Q) = \Delta$, lấy A, B thuộc Δ sao cho $AB = 8\text{cm}$, C thuộc mp (P) , D thuộc mp (Q) và $AC = 6\text{cm}$, $BD = 24\text{cm}$ và AC, BD cùng vuông góc AB . Độ dài CD là:

- A. $6\sqrt{17}\text{cm}$. B. 612cm .
 C. 26cm . D. 38cm .

[15] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Mặt phẳng trung trực của AC' cắt hình lập phương theo thiết diện H , diện tích thiết diện này là:

- A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
 C. $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

[16] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của SC , góc giữa (MBD) và (SAC) bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

[17] Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm hình vuông ABCD, M là trung điểm SC. Độ dài MO bằng:

- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. a.

[18] Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm hình vuông ABCD, M là trung điểm SC. Góc giữa (MBD) và (ABCD) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

[19] Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a và $\hat{A} = 60^\circ$, $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $SC \perp (ABCD)$. Trong ΔSAC dựng OK vuông góc SA tại K. Số đo $\widehat{BKD}$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

[20] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và SA vuông góc (ABCD), $SA = x$. Với giá trị nào của x thì góc giữa 2 mp (SBC) và (SCD) là 60° ?

- A. $x = \frac{a}{2}$. B. $x = a$. C. $x = 2a$. D. $x = \frac{3a}{2}$.

[21] Cho mp(P) vuông góc mp(Q), $(P) \cap (Q) = \Delta$. A, B thuộc Δ , $C \in (P)$, $D \in (Q)$ sao cho $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp BD \end{cases}$ và $AB = AC = BD$. Gọi (α) là mp đi qua A và vuông góc với CD. Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện A.BCD là hình:

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác cân. C. Tam giác đều. D. Hình vuông.

[22] Cho mp(P) vuông góc mp(Q), $(P) \cap (Q) = \Delta$. A, B thuộc Δ , $C \in (P)$, $D \in (Q)$ sao cho $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp BD \end{cases}$ và $AB = AC = BD = a$. Gọi (α) là mp đi qua A và vuông góc với CD. Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện A.BCD có diện tích là:

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

[23] Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Mệnh đề nào dưới đây là sai.

- A. Tứ diện A.B'C'D' có các cạnh đối bằng nhau $\Rightarrow$ ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật.
 B. Tứ diện A.B'C'D' có các cạnh đối vuông góc $\Rightarrow$ ABCD.A'B'C'D' là hình hộp có các mặt bên là hình thoi.
 C. Tứ diện A.B'C'D' đều $\Rightarrow$ ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương.
 D. Cả 3 câu A, B, C đều sai.

[24] Cho hai $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ nằm trên hai mp vuông góc nhau, $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Độ dài AB bằng:

A. $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$. B. $AB = \sqrt{a^2 + x^2}$.

C. $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$. D. $AB = \sqrt{2(a^2 + x^2)}$.

[25] Cho hai $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ nằm trên hai mp vuông góc nhau, $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD . Độ dài IJ bằng:

A. $AB = \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$. B. $AB = 2\sqrt{a^2 + x^2}$.

C. $AB = 2\sqrt{2(a^2 - x^2)}$. D. $AB = \frac{\sqrt{2(a^2 + x^2)}}{2}$.

[26] Cho hai $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ nằm trên hai mp vuông góc nhau, $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì (ABC) và (ABD) vuông góc nhau?

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

[27] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Góc giữa $(ABCD)$ và (SBD) bằng:

A. 30° . B. 45° .

C. 60° . D. 90° .

[28] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Khi đó $\triangle SBD$ là:

A. Tam giác vuông tại S . B. Tam giác vuông tại B .

C. Tam giác vuông tại D . D. Tam giác cân tại B .

[29] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Đường cao đỉnh S của hình chóp $S.ABCD$ là:

A. SO , với O là giao điểm AC, BD .

B. SB .

C. SG' , G' là trọng tâm $\triangle ABC$.

D. SG , G là trọng tâm $\triangle ACD$.

[30] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh a và $\hat{A} = 60^\circ$, $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $SC \perp (ABCD)$. Góc giữa hai mp (SBD) và (SAC) bằng:

A. 30° . B. 45° .

C. 60° . D. 90° .

V. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

$$\begin{aligned}d(M, a) &= MH \\d(M, (P)) &= MH\end{aligned}$$

trong đó H là hình chiếu của M trên a hoặc (P).

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

$$d(a, (P)) = d(M, (P))$$

trong đó M là điểm bất kì nằm trên a.

$$d((P), (Q)) = d(M, (Q))$$

trong đó M là điểm bất kì nằm trên (P).

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Đường thẳng Δ cắt cả a, b và cùng vuông góc với a, b được gọi là đường vuông góc chung của a, b.
- Nếu Δ cắt a, b tại I, J thì IJ được gọi là đoạn vuông góc chung của a, b.
- Độ dài đoạn IJ được gọi là khoảng cách giữa a, b.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với nó.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

A. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH 2 ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Phương pháp: Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Cách 1: Giả sử $a \perp b$:

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a tại A.
- Dựng $AB \perp b$ tại B

$\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2: Sử dụng mặt phẳng song song.

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a.
- Chọn $M \in a$, dựng $MH \perp (P)$ tại H.
- Từ H dựng đường thẳng $a' \parallel a$, cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song MH , cắt a tại A.

$\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b .

Chú ý: $d(a,b) = AB = MH = a(a,(P))$.

Cách 3: Sử dụng mặt phẳng vuông góc.

- Dụng mặt phẳng $(P) \perp a$ tại O .
- Dụng hình chiếu b' của b trên (P) .
- Dụng $OH \perp b'$ tại H .
- Từ H , dụng đường thẳng song song với a , cắt b tại B .
- Từ B , dụng đường thẳng song song với OH , cắt a tại A .

$\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b .

Chú ý: $d(a,b) = AB = OH$.

1. Cho hình tứ diện $OABC$, trong đó $OA, OB, OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Hãy dụng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

- a) OA và BC . b) AI và OC .

ĐS: a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

2. Cho hình chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

- a) SC và BD . b) AC và SD .

ĐS: a) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

3. Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC .

- a) Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng qui.
 b) Chứng minh $SC \perp (BHK), HK \perp (SBC)$.
 c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA .

ĐS: c) Gọi $E = AH \cap BC$. Đường vuông góc chung của BC và SA là AE .

4. a) Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $AC = BD, AD = BC$ thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và CD .

b) Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì $AC = BD$, $AD = BC$.

ĐS: b) Giả sử $BC = a$, $AD = a'$, $AC = b$, $BD = b'$. Chứng minh $a = a'$, $b = b'$.

5. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, I là trung điểm của AB. Dựng $IS \perp (ABCD)$ và $IS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a) NP và AC b) MN và AP.

ĐS: a) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{a}{2}$

DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH ĐIỂM – MP; ĐƯỜNG THẲNG – MP SONG SONG, HAI MP SONG SONG

Để tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng (mặt phẳng) ta cần xác định đoạn vuông góc vẽ từ điểm đó đến đường thẳng (mặt phẳng).

1. Cho hình chóp SABCD, có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$, đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.
- a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).
- b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).
- c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp SABCD với mặt phẳng (P) song song với mp(SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

ĐS: a) $d(A, (SCD)) = a\sqrt{2}$; $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$

2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.
- a) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng ($BCC'B'$).
- b) Tính khoảng cách từ A đến ($A'BC$).
- c) Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

ĐS: a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

3. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

- a) Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC), từ C đến mp(SBD).
- b) M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh rằng MN song song với (SBD) và tính khoảng cách từ MN đến (SBD).
- c) Mặt phẳng (P) qua BC cắt các cạnh SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách (P) một khoảng là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (P) và diện tích tứ giác BCFE.

ĐS: a) $a\sqrt{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$

4. Cho hai tia chéo nhau Ax, By hợp với nhau góc 60° , nhận AB = a làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với BC = a. Gọi D là hình chiếu của C trên Ax.

a) Tính AD và khoảng cách từ C đến mp(ABD).

b) Tính khoảng cách giữa AC và BD.

ĐS: a) $AD = \frac{a}{2}; d(C, (ABD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{93}}{31}$

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $BAD = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE.

a) Chứng minh $(SOF) \perp (SBC)$.

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến (SBC).

ĐS: b) $d(O, (SBC)) = \frac{3a}{8}, d(A, (SBC)) = \frac{3a}{4}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

[1] Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A. Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng a và cũng vuông góc với đường thẳng b nên Δ là đường vuông góc chung của a và b.
- B. Gọi (P) là mp song song với hai đường chéo nhau a và b. Δ là đường vuông góc chung của a và b thì Δ vuông góc với mp(P).
- C. Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường chéo nhau a và b thì Δ là giao tuyến của 2 mp $(\Delta, a); (\Delta, b)$.
- D. Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường chéo nhau a và b. Nếu $a \perp b$ thì $a \perp mp(b, \Delta)$.

[2] Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Cho a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, M là một điểm bất kì trên a. Đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc và cắt b tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của a và b.

B. Nếu Δ là đường vuông góc chung của hai đường chéo nhau a và b thì $a \perp mp(b, \Delta)$.

C. Nếu Δ là đường vuông góc chung của hai đường chéo nhau a và b thì $b \perp mp(a, \Delta)$.

D. Cho a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, M là một điểm bất kì trên a , N là một điểm bất kì trên b . Độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất khi MN là đường vuông góc chung của a, b .

[3] Cho tứ diện đều $A.BCD$ cạnh a , khoảng cách giữa AB và CD bằng:

- A.** $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a .

[4] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Khoảng cách từ C đến AC' bằng:

- A.** $\frac{3a}{2}$. **B.** $a\sqrt{\frac{3}{2}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

[5] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S tới $mp(ABC)$ bằng:

- A.** a . **B.** $a\sqrt{\frac{17}{12}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $2a$.

[6] Cho tứ diện $A.BCD$ có $AC = BC = AD = BD = a$, $AB = c$, $CD = c'$. Khoảng cách giữa AB và CD bằng:

- A.** $\frac{\sqrt{2a^2 - c^2 - c'^2}}{2}$. **B.** $\sqrt{\frac{2a^2 - c^2 - c'^2}{2}}$.
C. $\frac{\sqrt{4a^2 - c^2 - c'^2}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{4a^2 - c^2 - c'^2}}{2}$.

[7] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Khoảng cách từ B đến $mp(ACC'A')$ bằng:

- A.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **B.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
C. $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$. **D.** $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

[8] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Khoảng cách từ BB' và AC' bằng:

- A.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **B.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
C. $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$. **D.** $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

[9] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mp đáy là 30° . Hình chiếu vuông góc H của A lên $(A'B'C')$ thuộc $B'C'$. Khoảng cách giữa hai mp đáy?

A. $a\sqrt{3}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

[10] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mp đáy là 30° . Hình chiếu vuông góc H của A lên $(A'B'C')$ thuộc $B'C'$. Khoảng cách giữa AA' và $B'C'$ bằng:

A. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

[11] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'C'$ cạnh a . Khoảng cách BC' và CD' bằng:

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

[12] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'C'$ cạnh a . Khoảng cách BD' và $B'C$ bằng:

A. $\frac{3a}{\sqrt{6}}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $a\sqrt{6}$.

[13] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Khoảng cách từ D đến mp (ACD') bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$.

D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

[14] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Khoảng cách giữa AC' và CD' bằng:

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{a}{5}$.

D. a .

[15] Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Khoảng cách giữa hai mặt đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là:

A. $\frac{3a}{2}$.

B. $a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

C. $\frac{2a}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

[16] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ S đến mp $(ABCD)$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{3a}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{5a}{4}$.

[17] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Gọi E , F lần lượt là trung điểm AB và CD , K là điểm bất kì thuộc AD . Khoảng cách giữa EF và SK bằng:

A. $\frac{3a}{7}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{7a}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

[18] Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. SO vuông góc mp (ABCD) và $SO = \frac{3a}{4}$. E là trung điểm BC, F là trung điểm BE. Góc giữa (SOF) và (SBC) bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . **D. 90° .**

[19] Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. SO vuông góc mp (ABCD) và $SO = \frac{3a}{4}$. Khoảng cách từ O đến mp (SBC) bằng:

- A. $\frac{3a}{8}$.** B. $\frac{8a}{3}$.
C. $\frac{9a}{64}$. D. $\frac{64a}{9}$.

[20] Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. SO vuông góc mp (ABCD) và $SO = \frac{3a}{4}$. Khoảng cách từ A đến mp (SBC) bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **C. $\frac{3a}{4}$.** D. $\frac{4a}{3}$.

