

CHUYÊN ĐỀ 2_PƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ HỆ THỨC VIẾT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt ($ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$.)

Dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

Lưu ý: • Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.

• Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

• Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

4. Định lý Vi-et

Ta có định lý Viète như sau:

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

5. Áp dụng định lý Vi-et để tính nhanh nghiệm

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

6. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

MỘT SỐ LƯU Ý VÀ CÁC KẾT QUẢ CẦN NHỚ KHI GIẢI CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỊNH LÝ VI-ET

Bài toán thường gặp : Tìm m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2 thỏa mãn một biểu thức đối xứng đối với x_1, x_2

Quy trình

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2

- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$ ($\Delta' \geq 0$)
- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)

Bước 2. Biến đổi biểu thức đối xứng đối với x_1, x_2 về tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 \cdot x_2$

Bước 3. Sử dụng định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ và thay vào biểu thức chứa tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 x_2$ ở trên. Giải ra m , đối chiếu điều kiện ở bước 1.

Một số phép biến đổi thường gặp

- $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]$

Hoặc $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2(x_1 + x_2)$.

- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$.
- $|x_1 - x_2|$ thì xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$.
- $|x_1| + |x_2|$ thì xét $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1| \cdot |x_2|$
 $= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2|$.

Chú ý : $|A|^2 = A^2$, $|A \pm B|^2 = (A \pm B)^2$, $|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$.

THỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ VIÉT

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 .

Định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\frac{a}{b}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Hệ quả 1. Nếu $x = 1$ là nghiệm của phương trình thì

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \text{ hay } a + b + c = 0.$$

Ngược lại, nếu $a + b + c = 0$ thì $x = 1$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $x = \frac{c}{a}$

Hệ quả 2. Nếu $x = -1$ là một nghiệm của phương trình thì

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \text{ hay } a - b + c = 0.$$

Ngược lại, nếu $a - b + c = 0$ thì $x = -1$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $x = -\frac{c}{a}$.

Hệ quả 3. Nếu a và c trái dấu thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, đồng thời hai nghiệm luôn trái dấu nhau.

Hệ quả 4. Điều kiện để $x_1 > 0, x_2 > 0$ (cả hai nghiệm đều dương) là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Hệ quả 5. Điều kiện để $x_1 < 0, x_2 < 0$ (cả hai nghiệm đều âm) là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Hệ quả 6. Điều kiện để $x_1 < 0 < x_2$ (cả hai nghiệm trái dấu) là $x_1 x_2 < 0$ hay a và c trái dấu.

DẠNG TOÁN CÓ THÊM ĐIỀU KIỆN PHỤ

Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

Nếu có $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ ta cần thêm điều kiện phụ là $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$

Nếu x_1, x_2 là độ dài hai cạnh đa giác ta cần thêm điều kiện phụ là: $x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

DẠNG TOÁN SO SÁNH NGHIỆM VỚI SỐ 0 VÀ SỐ α

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < 0, x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2 < 0$$

$$x_1 > \alpha, x_2 > \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha > 0, x_2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < \alpha, x_2 < \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0, x_2 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0, x_2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 1: phương trình bậc hai và ứng dụng vi-ét (không chứa tham số)

Câu 1: Giải phương trình sau: $x^2 + 2\sqrt{2}x = 6$

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 10 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1}$

Câu 3: Cho phương trình $3x^2 - 2x - 4 = 0$ (1). Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Câu 4: Cho phương trình $3x^2 - 11x - 15 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{3x_1}{x_2} + \frac{3x_2}{x_1}$

- Câu 5:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 4 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$.
- Câu 6:** Cho phương trình: $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = (x_1 - x_2)^2$.
- Câu 7:** Cho phương trình $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 , không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức: $Q = x_1^3 + x_2^3$
- Câu 8:** Cho phương trình: $4x^2 - 5x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $S = x_1 + x_2$; $P = x_1x_2$; $F = (x_1 + 1)(x_2 + 1) - (x_1 - x_2)^2$.
- Câu 9:** Cho phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính:

$$P = \frac{2x_2^2}{x_1 + x_2} + 2x_1$$
- Câu 10:** a). Hãy tìm một phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số a, b, c là số nguyên nhận $x = \frac{\sqrt{5} - 2}{3}$ làm nghiệm.
 b). Tính tổng lập phương hai nghiệm của phương trình vừa tìm được ở câu a)
- Câu 11:** Cho phương trình $x^2 - 5x + a = 0$. Biết phương trình có một nghiệm là $x = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x_1^3 - x_1 + x_2^3 - x_2 - 285$
- Câu 12:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức $D = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}$.
- Câu 13:** Cho phương trình $x^2 + 5x - 7 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.
- Câu 14:** Cho phương trình $3x^2 - 12x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $T = \frac{x_1^2 + 4x_2 - x_1x_2}{4x_1 + x_2^2 + x_1x_2}$
- Câu 15:** Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$.
- Câu 16:** Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$
- Câu 17:** Cho phương trình $-\sqrt{2}x^2 + 2x + 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_2 + 1}{1 - x_1} + \frac{x_1 + 1}{1 - x_2}$

Câu 18: Cho phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{5x_1 - x_2}{x_1} - \frac{x_1 - 5x_2}{x_2}$.

Câu 19: Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{|x_1| + |x_2|}{2x_1^2 + 24x_2 - 4}$

Câu 20: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x - 7 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$.

Câu 21: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 , không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1}$

Câu 22: Cho phương trình: $x^2 - 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Hãy tính giá trị của biểu thức sau: $A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}$

Câu 23: Cho phương trình: $x^2 + 3x - 10 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$

Câu 24: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_2 + 1}{x_1}; \frac{x_1 + 1}{x_2}$

Câu 25: Cho phương trình $3x^2 - 6x + 2 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.

Bài toán 2: các bài toán có liên qua đến tham số

Câu 1: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 6x + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 2x_2$. Tính giá trị biểu thức $S = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

Câu 2: Cho phương trình: $x^2 + 5x + m = 0$ (*) có một nghiệm là $\frac{-\sqrt{13} - 5}{2}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Câu 3: Cho phương trình $mx^2 + 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ (m là tham số). Khi phương trình có nghiệm, tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho không phụ thuộc vào m .

Câu 4: Biết phương trình $2x^2 + 4x + m = 0$ (m là tham số) có 1 nghiệm bằng 1. Tính tổng bình phương hai nghiệm của phương trình.

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - (m + 1)x - 1 = 0$ có nghiệm $x = 1 - \sqrt{2}$. Tính bình phương của hiệu hai nghiệm trong phương trình trên.

- Câu 6:** Biết rằng phương trình $x^2 - 5x + a = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , biết $x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.
- Câu 7:** Cho phương trình $x^2 - 6x - 2m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 20$.
- Câu 8:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$.
- Câu 9:** Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 2x + m = 0$ có một nghiệm là $x = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$. Tính tổng nghịch đảo bình phương hai nghiệm của phương trình trên.
- Câu 10:** Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 + 6x + a = 0$ có một nghiệm là $x = -3 + \sqrt{14}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.
- Câu 11:** Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt sao cho tổng các bình phương của hai nghiệm bằng 13.
- Câu 12:** Phương trình $x^2 - 2x - m + 1 = 0$ (m là tham số) có một nghiệm là $x = 1 + \sqrt{7}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2x_2 + x_2^2x_1$.
- Câu 13:** Phương trình $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$ có x_1, x_2 hai nghiệm và $x_1 = -1$, tính giá trị của biểu thức $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$.
- Câu 14:** Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 + 4x + m = 0$ có một nghiệm là $x = -\sqrt{3}$. Tìm tổng các nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên.
- Câu 15:** Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1x_2 - 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
- Câu 16:** Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - m - 3 = 0$. Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Câu 17:** Biết rằng phương trình bậc hai $2x^2 - 4x + m = 0$ có một nghiệm $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$. Tính tổng nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên.
- Câu 18:** Cho phương trình $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9$.
- Câu 19:** Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 4m - m^2 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- Câu 20:** Cho phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$.
- Câu 21:** Cho phương trình $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.
- Câu 22:** Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = -5x_1$.
- Câu 23:** Cho phương trình $x^2 - 2(k-1)x - 4k = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 2$.
- Câu 24:** Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = x_1^2$.
- Câu 25:** Cho phương trình $x^2 - (m-3)x - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là các số nguyên.
- Câu 26:** Cho phương trình $x^2 - 20x + m + 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là các số nguyên tố.
- Câu 27:** Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$.
- Câu 28:** Cho phương trình $x^2 - (2m+5)x + 2m+1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà biểu thức $M = \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Câu 29:** Cho phương trình $x^2 - 5x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2x_1 = \sqrt{x_2}$.
- Câu 30:** Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m+6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài của hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.
- Câu 31:** Cho phương trình $x^2 - (m-2)x + m-3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.
- Câu 32:** Cho phương trình $x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 \leq x_2$.
Vậy $m > -4$ là giá trị cần tìm.
- Câu 33:** Cho phương trình $x^2 + (m-2)x + m-5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2$.
- Câu 34:** Cho phương trình $x^2 + 2mx + 4m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2, x_2 < 2$.

Câu 35: Cho phương trình $x^2 - (m + 3)x + m - 1 = 0$ Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 < -\frac{3}{2} < x_2$.

CHUYÊN ĐỀ 2_PƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ HỆ THỨC VIẾT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt ($ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$.)

Dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

Lưu ý: • Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.

• Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

• Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

4. Định lý Vi-et

Ta có định lý Viète như sau:

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

5. Áp dụng định lý Vi-et để tính nhanh nghiệm

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

6. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

MỘT SỐ LƯU Ý VÀ CÁC KẾT QUẢ CẦN NẮM KHI GIẢI CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỊNH LÝ VI-ET

Bài toán thường gặp : Tìm m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2 thỏa mãn một biểu thức đối xứng đối với x_1, x_2

Quy trình

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2

- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$ ($\Delta' \geq 0$)
- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)

Bước 2. Biến đổi biểu thức đối xứng đối với x_1, x_2 về tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 \cdot x_2$

Bước 3. Sử dụng định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ và thay vào biểu thức chứa tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 x_2$ ở trên. Giải ra m , đối chiếu điều kiện ở bước 1.

Một số phép biến đổi thường gặp

- $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]$

Hoặc $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2(x_1 + x_2)$.

- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$.
- $|x_1 - x_2|$ thì xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$.
- $|x_1| + |x_2|$ thì xét $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1| \cdot |x_2|$
 $= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2|$.

Chú ý : $|A|^2 = A^2$, $|A \pm B|^2 = (A \pm B)^2$, $|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$.

THỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ VIÉT

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 .

Định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\frac{a}{b}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Hệ quả 1. Nếu $x = 1$ là nghiệm của phương trình thì

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \text{ hay } a + b + c = 0.$$

Ngược lại, nếu $a + b + c = 0$ thì $x = 1$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $x = \frac{c}{a}$

Hệ quả 2. Nếu $x = -1$ là một nghiệm của phương trình thì

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \text{ hay } a - b + c = 0.$$

Ngược lại, nếu $a - b + c = 0$ thì $x = -1$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $x = -\frac{c}{a}$.

Hệ quả 3. Nếu a và c trái dấu thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, đồng thời hai nghiệm luôn trái dấu nhau.

Hệ quả 4. Điều kiện để $x_1 > 0, x_2 > 0$ (cả hai nghiệm đều dương) là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Hệ quả 5. Điều kiện để $x_1 < 0, x_2 < 0$ (cả hai nghiệm đều âm) là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Hệ quả 6. Điều kiện để $x_1 < 0 < x_2$ (cả hai nghiệm trái dấu) là $x_1 x_2 < 0$ hay a và c trái dấu.

DẠNG TOÁN CÓ THÊM ĐIỀU KIỆN PHỤ

Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

Nếu có $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ ta cần thêm điều kiện phụ là $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$

Nếu x_1, x_2 là độ dài hai cạnh đa giác ta cần thêm điều kiện phụ là: $x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

DẠNG TOÁN SO SÁNH NGHIỆM VỚI SỐ 0 VÀ SỐ α

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < 0, x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2 < 0$$

$$x_1 > \alpha, x_2 > \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha > 0, x_2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < \alpha, x_2 < \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0, x_2 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0, x_2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 1: phương trình bậc hai và ứng dụng vi-ét (không chứa tham số)

Câu 1: Giải phương trình sau: $x^2 + 2\sqrt{2}x = 6$

Lời giải

Ta có $x^2 + 2\sqrt{2}x = 6$ đưa về $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

Tính được $\Delta' = 2 + 6 = 8 > 0$.

Khi đó, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{8}}{1} = \sqrt{2} \text{ và } x_2 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{8}}{1} = -3\sqrt{2}$$

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 10 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính

giá trị của biểu thức: $A = \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1}$

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (-10) = 49 > 0$. Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo hệ thức Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -10 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1} \\ &= \frac{x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{3^2 - 2 \cdot (-10) + 3}{-10} = -\frac{16}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = -\frac{16}{5}.$$

Câu 3: Cho phương trình $3x^2 - 2x - 4 = 0$ (1). Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Lời giải

Phương trình $3x^2 - 2x - 4 = 0$ (1)

Ta có: $a \cdot c = 3 \cdot (-4) = -12 < 0$

Suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ trái dấu

Áp dụng hệ thức Ta-lét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

$$A = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

$$A = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

$$A = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

$$A = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right)}{\left(\frac{-4}{3}\right)^2} = \frac{7}{4}$$

Vậy $A = \frac{7}{4}$

Câu 4: Cho phương trình $3x^2 - 11x - 15 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{3x_1}{x_2} + \frac{3x_2}{x_1}$

Lời giải

Ta có

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) + x_2 = 6$$

$$\Rightarrow x_2 = -9$$

Vì $x = -9$ là nghiệm của phương trình nên ta có $(-9)^2 - 5(-9) + m + 4 = 0$.

Tìm được $m = -3 \pm \sqrt{13}$

Câu 5: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 4 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$.

Lời giải

Áp dụng định lí Vi-ét cho phương trình $2x^2 - 3x - 4 = 0$, ta có :

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, x_1x_2 = -2.$$

Suy ra : $A = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2) = \frac{1}{4}$.

Câu 6: Cho phương trình: $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là $x_1; x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = (x_1 - x_2)^2$.

Lời giải

Phương trình có $ac = -6 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = -\frac{3}{2}$

Ta có:

$$A = (x_1 - x_2)^2$$

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$A = 2^2 - 4 \cdot \left(\frac{-3}{2} \right)$$

$$A = 10$$

Vậy $A = 10$.

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$, không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức: $Q = x_1^3 + x_2^3$

Lời giải

Phương trình $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$

$\Delta' = (2\sqrt{3})^2 - 8 = 4 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 4\sqrt{3}$ và $x_1 x_2 = 8$

Ta có: $Q = x_1^3 + x_2^3$

$$Q = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$Q = (x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 x_2)$$

$$Q = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]$$

$$Q = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

Thay $x_1 + x_2 = 4\sqrt{3}$ và $x_1 x_2 = 8$ vào Q ta được:

$$Q = (4\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

Câu 8: Cho phương trình: $4x^2 - 5x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $S = x_1 + x_2$; $P = x_1 x_2$; $F = (x_1 + 1)(x_2 + 1) - (x_1 - x_2)^2$.

Lời giải

Theo định lí Viète, ta có: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{4}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{4}$.

Ta có: $F = (x_1 + 1)(x_2 + 1) - (x_1 - x_2)^2$

$$F = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 - x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2$$

$$F = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 - x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_2^2 + 4x_1 x_2$$

$$F = 5x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 - (x_1 + x_2)^2$$

$$F = 5 \cdot \frac{-3}{4} + \frac{5}{4} + 1 - \left(\frac{5}{4} \right)^2 = \frac{-49}{16}.$$

Câu 9: Cho phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính:

$$P = \frac{2x_2^2}{x_1 + x_2} + 2x_1$$

Lời giải

Chứng minh PT có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Theo định lý Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-5}{3} \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$$

Theo đề Câu ta có :

$$\frac{2x_2^2}{x_1 + x_2} + 2x_1 = \frac{2x_2^2 + 2x_1^2 + 2x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 2x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{-86}{15}$$

Câu 10: a). Hãy tìm một phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số a, b, c là số nguyên nhận

$$x = \frac{\sqrt{5} - 2}{3} \text{ làm nghiệm.}$$

b). Tính tổng lập phương hai nghiệm của phương trình vừa tìm được ở câu a)

Lời giải

$$\text{a). Ta có } x = \frac{\sqrt{5} - 2}{3}$$

$$3x = \sqrt{5} - 2$$

$$3x + 2 = \sqrt{5}$$

$$(3x + 2)^2 = 5$$

$$9x^2 + 12x + 4 = 5$$

$$9x^2 + 12x - 1 = 0$$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $9x^2 + 12x - 1 = 0$

$$\text{b). Theo hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{9} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = \left(\frac{-4}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{9}\right)\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{-76}{27}$$

Câu 11: Cho phương trình $x^2 - 5x + a = 0$. Biết phương trình có một nghiệm là $x = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x_1^3 - x_1 + x_2^3 - x_2 - 285$

Lời giải

$$\text{Ta có } x = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

Vì phương trình có một nghiệm là $x = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$ nên thay $x = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$ vào phương trình ta có $a = -11 + 7\sqrt{5}$

Áp dụng hệ thức Viets ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= x_1^3 - x_1 + x_2^3 - x_2 - 285 \\ &= x_1^3 + x_2^3 - (x_1 + x_2) - 185 \\ &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) - 5 - 285 \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2] - 290 \\ &= 5 \cdot [5^2 - 3 \cdot (-11 + 7\sqrt{5})] \\ &= -105\sqrt{5} \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A là $-105\sqrt{5}$

Câu 12: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức $D = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}$.

Lời giải

Phương trình có tích $ac = 3 \cdot (-6) = -18 < 0$ nên có nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo định lý Viète, ta có $x_1 + x_2 = \frac{-5}{3}$ và $x_1 x_2 = -2$.

$$x_1, x_2 \neq -2$$

$$D = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2} = \frac{x_1(x_1 + 2) + x_2(x_2 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$$

$$D = \frac{(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}$$

$$D = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}$$

$$D = \frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^2 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)}{(-2) + 2 \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) + 4} = \frac{-31}{12}$$

Câu 13: Cho phương trình $x^2 + 5x - 7 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$.

Lời giải

$\Delta = 25 + 28 = 53 > 0$ nên pt có 2 nghiệm x_1, x_2 . Theo Vi-et ta có

$$x_1 \cdot x_2 = -7; \quad x_1 + x_2 = -5$$

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (-5)^2 - 4 \cdot (-7) = 53$$

Vậy $A = 53$

Câu 14: Cho phương trình $3x^2 - 12x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính

giá trị của biểu thức: $T = \frac{x_1^2 + 4x_2 - x_1x_2}{4x_1 + x_2^2 + x_1x_2}$

Lời giải

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai của x có: $ac = 3 \cdot (-5) < 0$

Nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

- Theo định lý Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{12}{3} = 4 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } T = \frac{x_1^2 + 4x_2 - x_1x_2}{4x_1 + x_2^2 + x_1x_2} = \frac{x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2 - 2x_1x_2}{4x_1 + x_2^2 + x_1x_2} = \frac{x_1(x_1 + x_2) + 4x_2 - 2x_1x_2}{4x_1 + x_2(x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{4x_1 + 4x_2 - 2x_1x_2}{4x_1 + 4x_2} = \frac{4(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{4(x_1 + x_2)} = \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)}{4 \cdot 4} = \frac{29}{24}$$

Vậy giá trị của biểu thức $T = \frac{29}{24}$

Câu 15: Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương

trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$.

Lời giải

$$x^2 - 12x + 4 = 0$$

Xét $\Delta' = b'^2 - ac = (-6)^2 - 1 \cdot 4 = 32 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = 12; x_1x_2 = 4 \Rightarrow x_1 > 0, x_2 > 0$

Ta có:

$$T^2 = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right)^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \frac{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2}{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}} = \frac{(12^2 - 2 \cdot 4)^2}{12 + 2\sqrt{4}} = 1156$$

Nhận xét $x_1^2 + x_2^2 > 0$ và $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ với mọi $x_1, x_2 > 0$ suy ra $T > 0$

$$\Rightarrow T = \sqrt{T^2} = \sqrt{1156} = 34$$

Vậy $T = 34$.

Câu 16: Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

Theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = -3$

Khi đó $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$

$$= 3x_1x_2(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)$$

$$= (3x_1x_2 + 1)(x_1 + x_2)$$

$$= [3 \cdot (-3) + 1] \cdot 1 = -8$$

Câu 17: Cho phương trình $-\sqrt{2}x^2 + 2x + 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_2 + 1}{1 - x_1} + \frac{x_1 + 1}{1 - x_2}$

Lời giải

$$\text{Vì } \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot 3 = 4 + 12\sqrt{2} > 0$$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo định lí Viète, ta có: } S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{-\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A &= \frac{x_2 + 1}{1 - x_1} + \frac{x_1 + 1}{1 - x_2} = \frac{(x_2 + 1)(1 - x_2)}{(1 - x_1)(1 - x_2)} + \frac{(x_1 + 1)(1 - x_1)}{(1 - x_2)(1 - x_1)} = \frac{x_2 - x_2^2 + 1 - x_2 + x_1 - x_1^2 + 1 - x_1}{1 - x_2 - x_1 + x_1x_2} \\ &= \frac{2 - (x_1^2 + x_2^2)}{1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2} = \frac{2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]}{1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2} = \frac{2 - (S^2 - 2P)}{1 - S + P} = \frac{2 - \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \right) \right]}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Câu 18: Cho phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{5x_1 - x_2}{x_1} - \frac{x_1 - 5x_2}{x_2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$\text{Vì } \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0.$$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo định lí Vi-et, ta có: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 4 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}.$$

$$A = \frac{5x_1 - x_2}{x_1} - \frac{x_1 - 5x_2}{x_2} = \frac{(5x_1 - x_2) \cdot x_2 - (x_1 - 5x_2) \cdot x_1}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{5x_1 \cdot x_2 - x_2^2 - x_1^2 + 5x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{10x_1 \cdot x_2 - (x_1^2 + x_2^2)}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{10 \cdot P - (S^2 - 2 \cdot P)}{P} = \frac{10 \cdot 3 - (4^2 - 2 \cdot 3)}{3} = \frac{20}{3}$$

Câu 19: Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình hãy

tính giá trị của biểu thức $T = \frac{|x_1| + |x_2|}{2x_1^2 + 24x_2 - 4}$

Lời giải

Theo hệ thức Viet có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases}$

Nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

Suy ra $|x_1| + |x_2| = x_1 + x_2 = 12$

x_1 là nghiệm của PT đã cho nên $x_1^2 - 12x_1 + 4 = 0$ hay $x_1^2 = 12x_1 - 4$ hay $2x_1^2 = 24x_1 - 8$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + 24x_2 - 4 &= 24x_1 - 8 + 24x_2 - 4 \\ &= 24(x_1 + x_2) - 12 = 24 \cdot 12 - 12 = 276 \end{aligned}$$

Vậy $T = \frac{12}{276} = \frac{1}{24}$

Câu 20: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x - 7 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá

trị của biểu thức $T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$.

Lời giải

Phương trình có $ac = -7 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = 4; x_1 x_2 = -7$.

Khi đó ta có: $T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} - 2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} - 2 = \frac{4^2 - 2 \cdot (-7)}{-7} - 2 = \frac{-44}{7}$

Vậy $T = -\frac{44}{7}$

Câu 21: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 , không giải phương trình hãy tính giá

trị của biểu thức $A = \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1}$

Lời giải

Xét phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ (1) có $a = 2, b = -3, c = -1$

Do $a \cdot c = -2 < 0$ nên pt(1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Áp dụng hệ thức viete có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A &= \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2}{x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2) + 1} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2}{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1} = \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) - 2}{\frac{-1}{2} + \frac{3}{2} + 1} = \frac{\frac{9}{4} + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Câu 22: Cho phương trình: $x^2 - 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Hãy tính giá trị của biểu thức sau: $A =$

$$\frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}$$

Lời giải

PT: $x^2 - 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = -6 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1} = \frac{x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$$A = \frac{x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2)}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$$

$$\text{Vậy: } A = \frac{5^2 - 2 \cdot (-6) - 5}{-6 - 5 + 1} = \frac{-16}{5}$$

Câu 23: Cho phương trình: $x^2 + 3x - 10 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$

Lời giải

Phương trình $x^2 + 3x - 10 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Theo định lý Viète, ta có

$$x_1 + x_2 = -3; x_1 \cdot x_2 = -10$$

$$A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1} = \frac{x_1(x_1 + 2) + x_2(x_2 + 2)}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2) + (2x_1 + 2x_2)}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2)}{x_1 \cdot x_2}$$

$$A = \frac{(-3)^2 - 2(-10) + 2(-3)}{-10}$$

$$A = \frac{-23}{10}$$

Câu 24: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_2 + 1}{x_1}; \frac{x_1 + 1}{x_2}$

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ (1)

Ta có: $ac = -1 < 0$ nên PT (1) luôn có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Xét } \frac{x_2 + 1}{x_1} + \frac{x_1 + 1}{x_2} = \frac{x_2^2 + x_2 + x_1^2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1^2 + 2 - 1}{-1} = -2$$

$$\frac{x_2 + 1}{x_1} \cdot \frac{x_1 + 1}{x_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-1 + 1 + 1}{-1} = -1$$

Do đó: $\frac{x_2 + 1}{x_1}; \frac{x_1 + 1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn t sau: $t^2 + 2t - 1 = 0$.

Câu 25: Cho phương trình $3x^2 - 6x + 2 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$.

Lời giải

Phương trình $3x^2 - 6x + 2 = 0$ có $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 2^2 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Vậy $A = 2$.

Bài toán 2: các bài toán có liên qua đến tham số

Câu 1: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 6x + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 2x_2$. Tính giá trị biểu thức $S = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$.

Lời giải

Áp dụng định lý Vi - ét ta có:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{6}{1} = 6.$$

$$P = x_1 x_2 = c$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{Nên } \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } S = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^3 = (2 + 4)^3 = 216.$$

Câu 2: Cho phương trình: $x^2 + 5x + m = 0$ (*) có một nghiệm là $\frac{-\sqrt{13}-5}{2}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

Thay $x = \frac{-\sqrt{13}-5}{2}$ vào phương trình (*) ta được:

$$\left(\frac{-\sqrt{13}-5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{-\sqrt{13}-5}{2}\right) + m = 0$$

$$m = 3$$

$$\text{Phương trình (*): } x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$\text{Theo định lí Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$$

Tổng bình phương hai nghiệm là:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-5)^2 - 2 \cdot 3 = 19$$

Câu 3: Cho phương trình $mx^2 + 2(m-2)x + m-3 = 0$ (m là tham số). Khi phương trình có nghiệm, tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho không phụ thuộc vào m.

Lời giải

$$\text{Ta có } \Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m = -m + 4$$

Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta' \geq 0$ hay $-m + 4 > 0$ suy ra $m < 4$.

Khi đó theo Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m-2)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 + \frac{4}{m} \\ x_1 x_2 = 1 - \frac{3}{m} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 3(x_1 + x_2) = -6 + \frac{12}{m} \quad (1) \\ 4x_1 x_2 = 4 - \frac{12}{m} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Công hai vế của (1) và (2) ta có } 3(x_1 + x_2) + 4x_1 x_2 = -2$$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m.

Câu 4: Biết phương trình $2x^2 + 4x + m = 0$ (m là tham số) có 1 nghiệm bằng 1. Tính tổng bình phương hai nghiệm của phương trình.

Lời giải

Vì phương trình có một nghiệm bằng 1 nên ta có: $2.1 + 4.1 + m = 0$ suy ra $m = -6$

Với $m = -6$ phương trình (*) có dạng: $2x^2 + 4x - 6 = 0$

Ta có $a + b + c = 2 + 4 - 6 = 0$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = -6$

Vậy tổng bình phương 2 nghiệm là: $1^2 + (-6)^2 = 1 + 36 = 37$

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - (m+1)x - 1 = 0$ có nghiệm $x = 1 - \sqrt{2}$. Tính bình phương của hiệu hai nghiệm trong phương trình trên.

Lời giải

Ta có $ac = -1 < 0$ nên PT có 2 nghiệm phân biệt trái dấu hay PT có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

Ta có $x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow (1 - \sqrt{2})x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2} + 1$

$$(x_1 - x_2)^2 = \left[(\sqrt{2} + 1) - (1 - \sqrt{2}) \right]^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

Câu 6: Biết rằng phương trình $x^2 - 5x + a = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , biết $x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.

Lời giải

Thay $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ vào phương trình đã cho ta có:

$$\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)^2 - 5 \cdot \frac{5 - \sqrt{13}}{2} + a = 0, \text{ tìm được } a = 3$$

Với $a = 3$, pt đã cho là $x^2 - 5x + 3 = 0$. Theo Viet có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$

$$\text{Biến đổi: } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 5^2 - 3 \cdot 3 = 16$$

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 6x - 2m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Lời giải

Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm là: $\Delta' = 2m + 6 \geq 0$ hay $m \geq -3$.

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -2m + 3 \end{cases}$ nên

$$x_1^2 + x_2^2 = 20$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 20$$

$$4m = 10$$

$$m = \frac{5}{2} \text{ (TM)}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{5}{2}.$$

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi

$$\Delta' > 0$$

$$m^2 - 4m + 4 > 0$$

$$(m - 2)^2 > 0$$

$$m - 2 \neq 0$$

$$m \neq 2$$

Với $m \neq 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m; x_1x_2 = \frac{c}{a} = 4m - 4$

Theo đề Câu ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 8 = 0$$

$$(2m)^2 - 2.(4m - 4) - 8 = 0$$

$$4m^2 - 8m + 8 - 8 = 0$$

$$4m^2 - 8m = 0$$

$$4m(m - 2) = 0$$

$$4m = 0 \text{ hoặc } m - 2 = 0$$

$m = 0$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $m = 2$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m = 0$.

Câu 9: Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 2x + m = 0$ có một nghiệm là $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$. Tính tổng nghịch đảo bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

Ta có $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$, thay vào phương trình ta được

$$(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1) + m = 0$$

$$4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 + m = 0$$

$$2 + m = 0$$

$$m = -2$$

Mà theo hệ thức Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m = -2 \end{cases}$

$$\text{Do đó } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{2^2 - 2 \cdot (-2)}{(-2)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

Câu 10: Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 + 6x + a = 0$ có một nghiệm là $x = -3 + \sqrt{14}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

Vì phương trình bậc hai $x^2 + 6x + a = 0$ có một nghiệm là $x = -3 + \sqrt{14}$ nên tổng hai nghiệm của phương trình $x^2 + 6x + a = 0$ là $S = \frac{-b}{a} = -6$. Suy ra nghiệm còn lại là

$$x = -6 - (-3 + \sqrt{14}) = -3 - \sqrt{14}. \text{ Khi đó, tổng bình phương hai nghiệm của phương trình}$$

$$x^2 + 6x + a = 0 \text{ là: } (-3 + \sqrt{14})^2 + (-3 - \sqrt{14})^2 = 9 - 6\sqrt{14} + 14 + 9 + 6\sqrt{14} + 14 = 46$$

Vậy tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên là 46.

Câu 11: Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt sao cho tổng các bình phương của hai nghiệm bằng 13.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số)

Ta có: $a = 1; b = -5; c = m$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 25 - 4m$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì: $\Delta > 0$

$$25 - 4m > 0$$

$$m < \frac{25}{4}$$

Với $m < \frac{25}{4}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$, theo định lý Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$\text{Nên: } 5^2 - 2m = 13$$

$$2m = 12$$

$$m = 6 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy với $m = 6$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn tổng các bình phương của hai nghiệm bằng 13.

Câu 12: Phương trình $x^2 - 2x - m + 1 = 0$ (m là tham số) có một nghiệm là $x = 1 + \sqrt{7}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2x_2 + x_2^2x_1$.

Lời giải

Thay $x = 1 + \sqrt{7}$ vào phương trình ta có:

$$(1 + \sqrt{7})^2 - 2(1 + \sqrt{7}) - m + 1 = 0$$

$$8 + 2\sqrt{7} - 2 - 2\sqrt{7} - m + 1 = 0$$

$$m = 7$$

Phương trình có dạng $x^2 - 2x - 6 = 0$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi - ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -6 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } A = x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1 + x_2) = -6 \cdot 2 = -12$$

$$\text{Vậy } A = -12$$

Câu 13: Phương trình $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$ có x_1, x_2 hai nghiệm và $x_1 = -1$, tính giá trị của biểu thức

$$N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$$

Lời giải

Thay $x_1 = -1$ vào phương trình đã cho ta có

$$(-1)^2 + m \cdot (-1) + 2m - 4 = 0$$

$$m = 3$$

$$\text{Ta có } N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3} = \frac{x_1 + x_2 + 6}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} \text{ (điều kiện } x_1 \neq -3, x_2 \neq -3)$$

$$N = \frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9}$$

$$N = \frac{-m+6}{2m-4+3(-m)+9} = \frac{6-m}{5-m} = \frac{6-3}{5-3} = \frac{3}{2}.$$

Câu 14: Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 + 4x + m = 0$ có một nghiệm là $x = -\sqrt{3}$. Tìm tổng các nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

Vì $x = -\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 4x + m = 0$ nên ta có:

$$(-\sqrt{3})^2 + 4(-\sqrt{3}) + m = 0$$

$$\Rightarrow m = 4\sqrt{3} - 3$$

Với $m = 3$ phương trình đã cho trở thành: $x^2 + 4x + 4\sqrt{3} - 3 = 0$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = 2^2 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} > 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 + x_2 = -4$; $x_1 \cdot x_2 = 4\sqrt{3} - 3$

Vậy tổng các nghịch đảo hai nghiệm của phương trình là:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-4}{4\sqrt{3} - 3} = \frac{-1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Câu 15: Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1 x_2 - 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Lời giải

Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1) với m là tham số.

$$\Delta' = 1 - m + 1 = 2 - m$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Áp dụng Định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Có: } x_1 x_2 - 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$x_1 x_2 - 1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$m - 1 - 1 = \frac{2}{m - 1} \quad (\text{Điều kiện: } m \neq 1)$$

$$(m - 2)(m - 1) = 2$$

$$m^2 - 3m = 0$$

$$m = 0(TM); m = 3(KTM)$$

Vậy $m = 0$

Câu 16: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$. Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1).

$$(1) \text{ có } \Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (-m-3) = m^2 - 2m + 1 + m + 3 = m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ với}$$

mọi m Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo hệ thức Vi-et, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = -m-3 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A = x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = [2(m-1)]^2 - 2(-m-3) = 4m^2 - 8m + 4 + 2m + 6 = 4m^2 - 6m + 10 \\ &= \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10 = \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} \geq \frac{31}{4} \text{ với mọi } m. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{31}{4} \text{ khi } m = \frac{3}{4}.$$

Câu 17: Biết rằng phương trình bậc hai $2x^2 - 4x + m = 0$ có một nghiệm $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$. Tính tổng nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên.

Lời giải

$$2x^2 - 4x + m = 0 \text{ có nghiệm } x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \text{ nên ta thay } x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \text{ vào phương trình:}$$

$$2\left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2 + \sqrt{10}}{2} + m = 0$$

$$7 + 2\sqrt{10} - 4 - 2\sqrt{10} + m = 0$$

$$m = -3$$

$$\text{Phương trình: } 2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\text{Theo định lí Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Tổng nghịch đảo 2 nghiệm: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2}{\frac{-3}{2}} = \frac{-4}{3}$$

Câu 18: Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = [-(m+3)]^2 - 1 \cdot (m^2 + 3) = (m+3)^2 - m^2 - 3 = 6m + 6$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

$$\text{Có } (2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9 \Leftrightarrow 4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 9 \quad (*)$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m+3), \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = m^2 + 3$$

$$\text{Thay vào } (*) \text{ ta được } 4(m^2 + 3) - 4(m+3) + 1 = 9 \Leftrightarrow (2m-1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2m-1 = \pm 3 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại)}, m = 2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 19: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m - m^2 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = [-(m+1)]^2 - 1 \cdot (4m - m^2) = (m+1)^2 - 4m + m^2 = 2m^2 - 2m + 1 > 0 \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Có } A^2 = |x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2.$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m+1), \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = 4m - m^2$$

Thay vào $A^2 = |x_1 - x_2|^2$ ta được

$$A^2 = |x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$A^2 = 4(m+1)^2 - 4(4m - m^2) = 8m^2 - 8m + 4 = 8\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow A \geq \sqrt{2} \Rightarrow \text{Min } A = \sqrt{2} \text{ khi } m = \frac{1}{2}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 20: Cho phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$.

Lời giải

Có $ac = -3 < 0 \forall m$ do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -m, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = -3$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } (|x_1| + |x_2|)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| \\ &= m^2 - 2 \cdot (-3) + 2|-3| = m^2 + 12 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } |x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow m^2 + 12 = 16 \Rightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 21: Cho phương trình $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = (-m)^2 - 4 \cdot (2m - 4) = m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 4$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } (|x_1| + |x_2|)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| \\ &= m^2 - 2 \cdot (2m - 4) + 2|2m - 4| = m^2 - 4m + 8 + 4|m - 2| = (m - 2)^2 + 4|m - 2| + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Nên } |x_1| + |x_2| = 3 \Rightarrow (m - 2)^2 + 4|m - 2| + 4 = 9$$

$$(m - 2)^2 + 4|m - 2| - 5 = 0 \Rightarrow |m - 2| = 1 \Rightarrow m = 1, m = 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = 1, m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 22: Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = -5x_1$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (-m^2 - 1) = m^2 + 5 > 0 \forall m.$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 - 1$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x_2 = -5x_1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow -5x_1 + x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 5.$$

$$\text{Thay } x_1 = -1, x_2 = 5 \text{ vào } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 - 1, \text{ ta được } m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 23: Cho phương trình $x^2 - 2(k - 1)x - 4k = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = [-(k - 1)]^2 - 1 \cdot (-4k) = (k - 1)^2 + 4k = (k + 1)^2$$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $k \neq -1$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2k - 2, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4k$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2k - 2 \end{cases} \Rightarrow 4x_1 = 2k \Rightarrow x_1 = \frac{k}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3k - 4}{2}.$$

$$\text{Thay } x_1 = \frac{k}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3k - 4}{2} \text{ vào } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4k, \text{ ta được}$$

$$\frac{k}{2} \cdot \frac{3k - 4}{2} = -4k \Leftrightarrow 3k^2 + 12k = 0 \Leftrightarrow k = 0, k = -4 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $k = 0, k = -4$ là giá trị cần tìm.

Câu 24: Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = x_1^2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = (-3)^2 - 1 \cdot (m + 3) = 6 - m.$$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m + 3$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \Rightarrow x_1 = 2.$$

□ Với $x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 9$ thay vào $x_1 x_2 = m + 3 \Rightarrow m = -30$ (thỏa mãn)

□ Với $x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 4$ thay vào $x_1 x_2 = m + 3 \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $m = -30$; $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 25: Cho phương trình $x^2 - (m - 3)x - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là các số nguyên.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = [-(m - 3)]^2 - 4 \cdot (-5) = (m - 3)^2 + 20 > 0 \quad \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Cách 1: (Theo định lý Viét)

Theo định lý Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m - 3$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -5$

$$\text{Từ } x_1 x_2 = -5, x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Thay vào $x_1 x_2 = m - 3 \Rightarrow m = 7; m = -1$

Vậy $m = 7; m = -1$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: (Sử dụng Δ phải là số chính phương)

Từ $x_1 + x_2 = m - 3 \in \mathbb{Z}$

Do đó để $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ thì trước hết $\Delta = (m - 3)^2 + 20$ phải là số chính phương

$$\Rightarrow (m - 3)^2 + 20 = n^2, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (m - 3 - n)(m - 3 + n) = -20$$

Mà $m - 3 - n < m - 3 + n$ và tổng $(m - 3 - n) + (m - 3 + n) = 2m - 6$ chẵn và tích $(m - 3 - n)(m - 3 + n) = -20$ chẵn nên $m - 3 - n$; $m - 3 + n$ phải cùng chẵn, do đó:

$$* \begin{cases} m - 3 - n = -2 \\ m - 3 - n = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ n = 6 \end{cases} \text{ thử lại thỏa mãn}$$

$$* \begin{cases} m - 3 - n = -10 \\ m - 3 - n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 6 \end{cases} \text{ thử lại thỏa mãn}$$

Vậy $m = 7, m = -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 26: Cho phương trình $x^2 - 20x + m + 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là các số nguyên tố.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = (-10)^2 - 1(m+5) = 95 - m$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 95 - m > 0 \Leftrightarrow m < 95$.

$$\text{Theo định lý Viét, ta có: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 20, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m + 5$$

Từ $x_1 + x_2 = 20$ và x_1, x_2 là các số nguyên tố, suy ra:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 17 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 17 \\ x_2 = 3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 13 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

Thay vào $x_1 x_2 = m + 5 \Rightarrow m = 46, m = 86$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 46, m = 86$ là giá trị cần tìm.

Câu 27: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m-1) = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall m.$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1.$$

$$\text{Để tồn tại } \sqrt{x_1}; \sqrt{x_2} \text{ ta cần có } x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 0 \\ m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

$$\text{Có } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) + 2\sqrt{x_1 x_2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} = 2 - m.$$

Điều kiện để có bình phương hai vế của $\sqrt{m-1} = 2 - m$ là $1 \leq m \leq 2$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{m-1} = 2 - m \Leftrightarrow m - 1 = (2 - m)^2 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kết hợp các điều kiện ta được $m = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$. Vậy $m = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: bài này ta cần lưu ý điều kiện $1 \leq m \leq 2$ trong quá trình giải.

Câu 28: Cho phương trình $x^2 - (2m+5)x + 2m+1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà biểu thức $M = \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Có } \Delta &= [-(2m+5)]^2 - 4 \cdot (2m+1) = (2m+5)^2 - 8m - 4 \\ &= 4m^2 + 12m + 21 = (2m+3)^2 + 12 > 0 \quad \forall m \end{aligned}$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m+5, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m+1$$

$$\text{Để tồn tại } \sqrt{x_1}; \sqrt{x_2} \text{ ta cần có } x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+5 \geq 0 \\ 2m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Xét } M^2 = \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right|^2 = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m+5, x_1 x_2 = 2m+1$ vào M^2 ta được

$$M^2 = 2m + 5 - 2\sqrt{2m+1} = (2m+1 - 2\sqrt{2m+1} + 1) + 3$$

$$= (\sqrt{2m+1} - 1)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow M \geq \sqrt{3}. \text{ Vậy min } M = \sqrt{3} \text{ khi } \sqrt{2m+1} = 1 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 29: Cho phương trình $x^2 - 5x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2x_1 = \sqrt{x_2}$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = (-5)^2 - 4.1.(m-1) = 29 - 4m.$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi } \Delta > 0 \Leftrightarrow 29 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{29}{4}.$$

$$\text{Theo định lý Viét ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$$

$$\text{Điều kiện để bình phương hai vế của } 2x_1 = \sqrt{x_2} \text{ là } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geq 0 \\ m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

$$\text{Khi đó } 2x_1 = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_2 = 4x_1^2 \text{ thay vào } x_1 + x_2 = 5 \text{ ta được}$$

$$4x_1^2 + x_1 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ (thỏa mãn), } x_1 = -\frac{5}{4} \text{ (loại).}$$

$$\text{Với } x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 4 \text{ thay vào } x_1 x_2 = m - 1 \text{ ta được } 1.4 = m - 1 \Leftrightarrow m = 5 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta cần lưu ý điều kiện $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ trong quá trình giải.

Câu 30: Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m+6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài của hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = [-(m+5)]^2 - 4.1.(3m+6) = (m+5)^2 - 12m - 24 = (m-1)^2$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ phân biệt khi } \Delta > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m+5, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 3m+6.$$

$$\text{Do } x_1, x_2 \text{ là độ dài hai cạnh của một tam giác nên } x_1 > 0, x_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+5 > 0 \\ 3m+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

$$\text{Do độ dài cạnh huyền bằng 5 nên } x_1^2 + x_2^2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 25$$

$$\text{Thay } x_1 + x_2 = m+5, x_1 x_2 = 3m+6 \text{ vào } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 25 \text{ ta được}$$

$$(m+5)^2 - 2(3m+6) = 25 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 = 16 \Leftrightarrow m+2 = \pm 4 \Leftrightarrow m = -6 \text{ (loại), } m = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta cần lưu ý đến điều kiện $m > -2$ trong quá trình giải.

Câu 31: Cho phương trình $x^2 - (m-2)x + m-3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = [-(m-2)]^2 - 4.1.(m-3) = (m-2)^2 - 4m + 12 = (m-4)^2$$

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m-4)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m-2, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m-3$.

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ m-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Vì $\Delta = (m-4)^2$ nên hai nghiệm của phương trình là $x = \frac{m-2 \pm (m-4)}{2} \Leftrightarrow x = 1, x = m-3$

Do $x_1 \neq x_2$ nên x_1, x_2 không thể cùng là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông cân. Giả sử x_1 là độ dài cạnh huyền, x_2 là độ dài cạnh góc vuông thì theo định lý Pytago ta có

$$x_1^2 = x_2^2 + x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2}x_2.$$

Trường hợp 1. Xét $x_1 = 1, x_2 = m-3$, thay vào $x_1 = \sqrt{2}x_2$ ta được

$$1 = \sqrt{2}(m-3) \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 2. Xét $x_1 = m-3, x_2 = 1$ thay vào $x_1 = \sqrt{2}x_2$ ta được

$$m-3 = \sqrt{2}.1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2} + 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3, m = \sqrt{2} + 3$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: ta có thể nhận xét $a + b + c = 0$ để được hai nghiệm của phương trình (*) là $x = 1, x = m-3$.

Câu 32: Cho phương trình $x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 \leq x_2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = (m+2)^2 - 4.1.(-m-4) = m^2 + 8m + 20 = (m+4)^2 + 4 > 0 \quad \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

Trường hợp 1: Xét riêng $x_2 = 0$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$0^2 + (m+2).0 - m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

Thay $m = -4$ vào phương trình đã cho ta được

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = 2 \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow a$ và c trái dấu

$$\Leftrightarrow 1.(-m-4) < 0 \Leftrightarrow m > -4$$

Vậy $m > -4$ là giá trị cần tìm.

Câu 33: Cho phương trình $x^2 + (m-2)x + m - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = (m-2)^2 - 4.1.(m-5) = m^2 - 8m + 24 = (m-4)^2 + 8 > 0 \quad \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

Trường hợp 1: Xét riêng $x_1 = 0$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$0^2 + (m-2) \cdot 0 + m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$$

Thay $m = 5$ vào phương trình đã cho ta được $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3$ (loại).

Trường hợp 2: xét $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow a$ và c trái dấu $\Leftrightarrow 1 \cdot (m-5) < 0 \Leftrightarrow m < 5$. Vậy $m < 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 34: Cho phương trình $x^2 + 2mx + 4m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 2, x_2 < 2$

Lời giải

Ta có $\Delta' = m^2 - 1 \cdot (4m - 4) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Cách 1: (sử dụng định lý Viète)

Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2m, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 4m - 4$.

$$x_1 < 2, x_2 < 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < 0, x_2 - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m - 4 < 0 \\ 4m - 4 + 4m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Kết hợp với $m \neq 2$ ta được $m > 0; m \neq 2$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: (Giải x_1, x_2 dựa vào $\Delta' = (m - 2)^2$)

Do $\Delta' = (m - 2)^2$ nên hai nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = -m \pm (m - 2) \Leftrightarrow x = -2, x = -2m + 2$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 2 \\ -2m + 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Kết hợp với $m \neq 2$ ta được $m > 0; m \neq 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 35: Cho phương trình $x^2 - (m + 3)x + m - 1 = 0$ Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 < -\frac{3}{2} < x_2$.

Lời giải

Ta có $\Delta = [-(m + 3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) = (m + 3)^2 - 4m + 4 = m^2 + 2m + 13 = (m + 1)^2 + 12 > 0 \forall m$

Do phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

Theo định lý Viète, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m + 3; x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$.

$$\text{Có } x_1 < -\frac{3}{2} < x_2 \Leftrightarrow x_1 + \frac{3}{2} < 0 < x_2 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)\left(x_2 + \frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{9}{4} < 0$$

Thay $x_1 + x_2 = m + 3$; $x_1 x_2 = m - 1$ ta được

$$(m-1) + \frac{3}{2}(m+3) + \frac{9}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}m + \frac{23}{4} < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{23}{10}$$

Vậy: $m < -\frac{23}{10}$ là giá trị cần tìm.

CHUYÊN ĐỀ 3: TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ VI-ET VỚI NHỮNG BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG

Câu 1: Biết rằng phương trình $x^2 - 19x + 7 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 , không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức: $P = x_2(2x_1^2 - 38x_1 + x_1x_2 - 3)^2 + x_1(2x_2^2 - 38x_2 + x_1x_2 - 3)^2$

Câu 2: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4m - 5 = 0$ (1) (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -2$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{2}x_1^2 - (m-1)x_1 + x_2 - 2m + \frac{33}{2} = 4059$$

Câu 3: Cho phương trình $x^2 - 4(m+1)x + 3m^2 + 2m - 5 = 0$, với m là tham số. Xác định giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4(m+1)x_2 + 3m^2 + 2m - 5 = 9$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = -3$

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 2$

b) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + mx_2 - x_2 = 4$

Câu 6: Cho phương trình $x^2 - mx - 8 = 0$. Chứng minh với mọi m , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và giá trị của biểu thức $H = \frac{2x_1^2 + 5x_1 - 16}{3x_1} = \frac{2x_2^2 + 5x_2 - 16}{3x_2}$ không phụ thuộc vào m .

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_2 + 1} = \frac{1}{4}$.

Câu 8: Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $P = \frac{2x_1x_2 + 1}{x_1^2 - 2mx_2 + 1 - 2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 9: Cho phương trình $x^2 - 2(m-5)x + 1 - 2m = 0$ (1), với x là ẩn số

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$

b) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

c) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 1) = 64$$

Câu 10: Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 6m - 4 = 0$ (*) với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 - 2mx_1 - 6m + 13)x_2^2 - 24x_1 - 100 = 0$.

CHUYÊN ĐỀ 3: TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ VI-ET VỚI NHỮNG BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG

Câu 1: Biết rằng phương trình $x^2 - 19x + 7 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 , không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức: $P = x_2(2x_1^2 - 38x_1 + x_1x_2 - 3)^2 + x_1(2x_2^2 - 38x_2 + x_1x_2 - 3)^2$

Lời giải

Xét phương trình có $\Delta = 19^2 - 4 \cdot 7 = 333 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt

Áp dụng hệ thức Vi - ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 19 \\ x_1x_2 = 7 \end{cases}$

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho $\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 19x_1 + 7 = 0 \\ x_2^2 - 19x_2 + 7 = 0 \end{cases}$

Theo đề Câu ta có:

$$\begin{aligned} P &= x_2(2x_1^2 - 38x_1 + x_1x_2 - 3)^2 + x_1(2x_2^2 - 38x_2 + x_1x_2 - 3)^2 \\ &= x_2[2(x_1^2 - 19x_1 + 7) - 14 + x_1x_2 - 3]^2 + x_1[2(x_2^2 - 19x_2 + 7) - 14 + x_1x_2 - 3]^2 \\ &= x_2(x_1x_2 - 17)^2 + x_1(x_1x_2 - 17)^2 = (x_1x_2 - 17)^2(x_1 + x_2) = (7 - 17)^2 \cdot 19 = 1900 \end{aligned}$$

Câu 2: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4m - 5 = 0(1)$ (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -2$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{2}x_1^2 - (m-1)x_1 + x_2 - 2m + \frac{33}{2} = 4059$$

Lời giải

a) Giải phương trình khi $m = -2$

Thay $m = -2$ vào phương trình (1) ta có: $x^2 + 4x + 3 = 0$

Ta có $a - b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Vậy khi $m = -2$ thì tập nghiệm là $S = \{-1; -3\}$

b) Tìm m

Phương trình (1) có $\Delta' = m^2 - (4m - 5) = m^2 - 4m + 5 = (m - 2)^2 + 1 > 0, \forall m$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m

Áp dụng hệ thức Vi - et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -4m - 5 \end{cases}$

Theo Câu a ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_1^2 - (m-1)x_1 + x_2 - 2m + \frac{33}{2} &= 4059 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2x_2 - 4m + 33 &= 8118 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2x_1 + 2x_2 - 4m &= 8085 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 - 4m - 5 + 2x_1 + 2x_2 &= 8085 - 5 \\ \Leftrightarrow (x_1^2 - 2mx_1 - 4m - 5) + 2(x_1 + x_2) &= 8080\end{aligned}$$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có $x_1^2 - 2mx_1 - 4m - 5 = 0$. Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = 8080 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4040 \Leftrightarrow 2m = 4040 \Leftrightarrow m = 2020$$

Vậy $m = 2020$

Câu 3: Cho phương trình $x^2 - 4(m+1)x + 3m^2 + 2m - 5 = 0$, với m là tham số. Xác định giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4(m+1)x_2 + 3m^2 + 2m - 5 = 9$.

Lời giải

$$\begin{aligned}x^2 - 4(m+1)x + 3m^2 + 2m - 5 &= 0(1) \\ \Delta' &= [-2(m+1)]^2 - (3m^2 + 2m - 5) = m^2 + 2m + 9 = (m+1)^2 + 8 > 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, áp dụng Vi et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m + 4 \\ x_1 x_2 = 3m^2 + 2m - 5 \end{cases}$$

Vì x_1 là một nghiệm của phương trình (1)

$$\begin{aligned}\Rightarrow x_1^2 + 4(m+1)x_2 + 3m^2 + 2m - 5 &= 9 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 4(m+1)x_1 + 3m^2 + 2m - 5 + 4(m+1)x_1 + 4(m+1)x_2 &= 9 \\ \Leftrightarrow 0 + 4(m+1)(x_1 + x_2) &= 9\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (4m+4)(4m+4) = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+4 = 3 \\ 4m+4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ m = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \in \left\{ -\frac{1}{4}; -\frac{7}{4} \right\}$$

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = -3$

Lời giải

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thì:

$$\begin{aligned}\Delta' &= (m-1)^2 - (m^2 - 6) \geq 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - m^2 + 6 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2m + 7 &\geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Khi đó áp dụng định lý Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = m^2 - 6 \end{cases}$

Theo Caura ta có:

$$\begin{aligned}x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 &= -3 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 6 + 2x_1 + 2x_2 &= m^2 - 6 - 3 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 6 + 2(x_1 + x_2) &= m^2 - 9 (*)\end{aligned}$$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình đã cho nên $x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 6 = 0$, do đó:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = m^2 - 9 \Leftrightarrow 2(2m - 2) = m^2 - 9 \\ \Leftrightarrow 4m - 4 &= m^2 - 9 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + m - 5m - 5 &= 0 \Leftrightarrow m(m+1) - 5(m+1) = 0 \\ \Leftrightarrow (m+1)(m-5) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ m-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1(tm) \\ m=5(ktm) \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $m = -1$

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$

- Giải phương trình khi $m = 2$
- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + mx_2 - x_2 = 4$

Lời giải

a) Khi $m = 2$, pt thành $x^2 - 4x + 1 = 0$

Ta có: $\Delta' = (-2)^2 - 1.1 = 3 > 0$, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}; x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

b) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Xét phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (*) ta có:

$$\Delta' = m^2 - 1.(m-1) = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} > 0 (\forall m)$$

$$\Rightarrow \Delta' > 0 (\forall m)$$

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

c) Với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, áp dụng hệ thức

Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$. Theo Caura ta có:

$$\begin{aligned}
x_1^2 x_2 + m x_2 - x_2 &= 4 \Leftrightarrow x_1^2 x_2 + x_2(m-1) = 4 \\
\Leftrightarrow x_1^2 x_2 + x_2 x_1 x_2 &= 4 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 4 \\
\Leftrightarrow (m-1) \cdot 2m &= 4 \Leftrightarrow m(m-1) = 2 \\
\Leftrightarrow m^2 - m - 2 &= 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + m - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow m(m-2) + (m-2) &= 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $m = -1, m = 2$ thỏa đề.

Câu 6: Cho phương trình $x^2 - mx - 8 = 0$. Chứng minh với mọi m , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và giá trị của biểu thức $H = \frac{2x_1^2 + 5x_1 - 16}{3x_1} = \frac{2x_2^2 + 5x_2 - 16}{3x_2}$ không phụ thuộc vào m .

Lời giải

Có $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = m^2 + 32 > 0 \quad \forall m$.

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

Theo định lý Viét, ta có $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -8 < 0 \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx - 8 = 0$ nên

$$\begin{cases} x_1^2 - mx_1 - 8 = 0 \\ x_2^2 - mx_2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = mx_1 + 8 \\ x_2^2 = mx_2 + 8 \end{cases}$$

Thay vào H , ta được

$$\begin{aligned}
H &= \frac{2(mx_1 + 8) + 5x_1 - 16}{3x_1} - \frac{2(mx_2 + 8) + 5x_2 - 16}{3x_2} \\
&= \frac{2(mx_1 + 8) + 5x_1 - 16}{3x_1} - \frac{2(mx_2 + 8) + 5x_2 - 16}{3x_2} \\
&= \frac{2mx_1 + 5x_1}{3x_1} - \frac{2mx_2 + 5x_2}{3x_2} = \frac{2m+5}{3} - \frac{2m+5}{3} = 0
\end{aligned}$$

Không phụ thuộc vào m (đpcm).

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_2 + 1} = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (m-1) = 2 - m$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ nên

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + m - 1 = 0 \\ x_2^2 - 2x_2 + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 2x_1 - m + 1 \\ x_2^2 = 2x_2 - m + 1 \end{cases}$$

Thay vào $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_2 + 1} = \frac{1}{4}$, ta được

$$\frac{x_1}{2x_2 + 2x_1 - m + 2} + \frac{x_2}{2x_1 + 2x_2 - m + 2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2(x_1 + x_2) - m + 2} = \frac{1}{4}.$$

Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$ nên ta được

$$\frac{2}{2 \cdot 2 - m + 2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{6 - m} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 6 - m = 8 \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 8: Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $P = \frac{2x_1x_2 + 1}{x_1^2 - 2mx_2 + 1 - 2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = m^2 - 1 \cdot (-2m - 1) = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Do x_1 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 1 = 0$ nên

$$x_1^2 + 2mx_1 - 2m - 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 = -2mx_1 + 2m + 1.$$

$$\text{Thay vào P, ta được } P = \frac{2x_1x_2 + 1}{-2mx_1 + 2m + 1 - 2mx_2 + 1 - 2m} = \frac{2x_1x_2 + 1}{-2m(x_1 + x_2) + 2}$$

Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2m$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2m - 1$ nên ta được

$$P = \frac{2 \cdot (-2m - 1) + 1}{-2m \cdot (-2m) + 2} = \frac{-4m - 1}{4m^2 + 2}$$

$$\Rightarrow P(4m^2 + 2) = -4m - 1 \Leftrightarrow 4P \cdot m^2 + 4m + 2P + 1 = 0$$

$$* P = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

$$* P \neq 0 \Rightarrow \Delta_M' = 4 - 4P(2P + 1) \geq 0 \Rightarrow 2P^2 + P - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq P \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy $\text{Min} P = -1$ khi $-4m^2 + 4M - 1 = 0 \Rightarrow M = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Câu 9: Cho phương trình $x^2 - 2(m - 5)x + 1 - 2m = 0$ (1), với x là ẩn số

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$

b) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

c) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 1) = 64$$

Lời giải

a) Với $m = 3$ thì phương trình (1) trở thành: $x^2 + 4x - 5 = 0$ (2)

+) Phương trình (2) có $a + b + c = 1 + 4 + (-5) = 0$

nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$.

Vậy với $m = 3$ thì phương trình (1) có tập nghiệm $S = \{1; -5\}$.

b) Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac$

$$= [- (m - 5)]^2 - 1 \cdot (1 - 2m)$$

$$= m^2 - 10m + 25 - 1 + 2m$$

$$= m^2 - 8m + 24$$

$$= m^2 - 2 \cdot m \cdot 4 + 4^2 + 8$$

$$= (m - 4)^2 + 8 \geq 8 > 0 \text{ với mọi } m.$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

c) Theo câu b) phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m nên

$$\text{theo định lí Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-[-2(m-5)]}{1} = 2(m-5) = 2m-10 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1-2m}{1} = 1-2m \end{cases}.$$

$$+) \text{ Vì } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình (1) nên ta có } \begin{cases} x_1^2 - 2(m-5)x_1 + 1 - 2m = 0 \\ x_2^2 - 2(m-5)x_2 + 1 - 2m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + 10x_1 + 1 - 2m = 0 \\ x_2^2 - 2mx_2 + 10x_2 + 1 - 2m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + 1 = 2m - 10x_1 \\ x_2^2 - 2mx_2 + 1 = 2m - 10x_2 \end{cases}$$

$$+) \text{ Mặt khác ta có: } (x_1^2 - 2mx_1 + 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 1) = 64$$

$$\Leftrightarrow (2m - 10x_1)(2m - 10x_2) = 64$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20mx_1 - 20mx_2 + 100x_1x_2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20m(x_1 + x_2) + 100x_1x_2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20m(2m - 10) + 100(1 - 2m) = 64$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 40m^2 + 200m + 100 - 200m - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow -36m^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Vậy $m = 1, m = -1$.

Câu 10: Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 6m - 4 = 0$ (*) với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 - 2mx_1 - 6m + 13)x_2^2 - 24x_1 - 100 = 0$.

Lời giải

a. Khi $m = 2$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=1 \\ x+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-4 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-4; -2\}$ khi $m = 2$.

$$\text{b. } x^2 + 2(m+1)x + 6m - 4 = 0 \quad (*)$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 6m + 4 > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 + 1 > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + 1 > 0 \text{ (đúng với mọi } m \text{)}$$

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

$$\text{Theo hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2(m+1) \quad (1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 6m - 4 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) = -6m - 6 \Leftrightarrow 3x_2 + 6m = -3x_1 - 6 \quad (2)$$

Vì x_1 là nghiệm của $(*)$ nên: $x_1^2 + 2mx_1 + 2x_1 + 6m - 4 = 0$

$$\Rightarrow 4x_1 - 2mx_1 - 6m + 13 = x_1^2 + 6x_1 + 9$$

$$= (x_1 + 3)^2$$

Theo đề bài: $(4x_1 - 2mx_1 - 6m + 13)x_2^2 - 24x_1 - 100 = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 + 3)^2 x_2^2 - 24x_2 - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 x_2 + 3x_2)^2 - 24x_1 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow (6m - 4 + 3x_2)^2 - 24x_1 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow (-3x_1 - 10)^2 - 24x_1 - 100 = 0 \text{ (do (2))}$$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2 + 36x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x_1(x_1 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = -4 \end{cases}$$

□ □ Với $x_1 = 0$

$$(1) \Leftrightarrow 6m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

□ □ Với $x_1 = -4$

$$(1) \Leftrightarrow -2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m \in \left\{ \frac{2}{3}; 2 \right\}$ thoả bài toán.

