TRƯỜNG THCS NGÔ SĨ LIÊN
NĂM HỌC 2025-2026

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI TOÁN 9

Ngày thi: 02/10/2025

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I *(5,0 điểm)*

1) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x}{x^2+5}-\dfrac{3}{x^3-2x^2+5x-10}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)$ với $x\neq 2; x\neq 3$.

   a) Rút gọn biểu thức A.

   b) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để A nhận giá trị là số nguyên.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^3-2x=y^3+3y \end{cases}$.

Bài II *(5,0 điểm)*

1) Chứng minh $n\left(n^4+59\right)$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên n.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x^2-xy-2y^2+x+4y=6$.

3) Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $8n+1$ và $24n+1$ là các số chính phương. Chứng minh $8n+3$ là hợp số.

Bài III *(3,0 điểm)*

Với a,b,c là các số thực không âm, thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=8$

1) Chứng minh $b+c\leq 4$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{bc+2}+\dfrac{b}{ca+2}+\dfrac{c}{ab+2}$.

Bài IV *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$, đường cao AD $(D\in BC)$. Tia phân giác của góc ADB cắt cạnh AB tại E, tia phân giác của góc ADC cắt cạnh AC tại F.

a) Chứng minh $AF=AC\cdot\dfrac{\sin C}{\sin C+\cos C}$.

b) Chứng minh tam giác DEF đồng dạng với tam giác ABC.

c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF, đường thẳng BM cắt đường thẳng CE tại P. Chứng minh tia PM là tia phân giác góc APC.

Bài V *(1,0 điểm)*

Cho tập hợp A gồm 2025 số nguyên dương liên tiếp. Một tập hợp con của tập hợp A là tập hợp mà mọi phần tử của tập hợp đó đều là phần tử của A. Một tập hợp con B của A được gọi là "tốt" nếu hai phần tử x,y phân biệt bất kì thuộc B đều thỏa mãn tính chất: $x+y$ không là bội của $x-y$. Hỏi tập hợp B như vậy thì có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

--------- HẾT ---------

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên học sinh: ……………………………………………………………… *Lớp:* ………

Lời giải

Bài I.

(1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2+5} - \frac{3}{x^3-2x^2+5x-10}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{x-3}\right)$ với $x \neq 2; x \neq 3$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị là số nguyên.

(2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^3-2x=y^3+3y \end{cases}$

Lời giải

1. (a) Ta có

$$A = \left(\frac{x}{x^2+5} - \frac{3}{(x^2+5)(x-2)}\right) \cdot \frac{x-2}{x-3} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+5)(x-3)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+5)(x-3)} = \frac{x+1}{x^2+5}.$$

(b) Giả sử A là số nguyên. Do đó, cũng có $A \cdot x$ nguyên mà

$$A \cdot x = \frac{x^2+x}{x^2+5} = 1 + \frac{x+1}{x^2+5} - \frac{6}{x^2+5} = 1 + A - \frac{6}{x^2+5},$$

nên $\frac{6}{x^2+5}$ nguyên. Suy ra $x^2+5 \in \text{Ư}(6)$, mà $x^2+5 \geq 5$ nên $x = \pm 1$.
Thử lại, ta thấy chỉ có trường hợp $x=-1$ thoả mãn. Vậy $x=-1$.

2. Ta có phương trình thứ hai của hệ tương đương $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 2x+3y$, kết hợp với phương trình đầu tiên ta có $2x+3y = 7(x-y)$, hay $5x = 10y$ suy ra x=2y.

Do đó thay vào phương trình 2 ta có $7y^3 = 7y$ tương đương $y \in \{0, 1, -1\}$.

Thay vào tìm được nghiệm $(x, y) = (2, 1), (-2, -1)$.

Bài II (5,0 điểm)

1. Chứng minh $n(n^4+59)$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên n.

2. Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2-xy-2y^2+x+4y=6$.

3. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $8n+1$ và $24n+1$ là các số chính phương. Chứng minh $8n+3$ là hợp số.

Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned} n(n^4+59) &= n^5 - n + 60n = n(n-1)(n+1)(n^2+1) + 60n \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2-4) + 5n(n-1)(n+1) + 60n \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1) + 60n. \end{aligned}$$

Mà $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ chia hết cho $2, 3, 5$ vì là tích của 5 số nguyên liên tiếp, $5(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 2, 3, 5 vì là tích của 5 và 3 số nguyên liên tiếp và $60n$ chia hết cho 30. Từ đó suy ra $n(n^4+59)$ chia hết cho 30 với mọi n nguyên.

2. Ta có phương trình đã cho tương đương $(x-2y)(x+y)+x+4y=6$, tương đương $(x-2y)(x+y)+2(x+y)-(x-2y)=6$. Hay tương đương $(x-2y+2)(x+y-1)=4$, mà do x,y nguyên nên $x-2y+2 \in \text{Ư}(4)=\{\pm1,\pm2,\pm4\}$.

   Xét các trường hợp của $x-2y+2$ và kết hợp điều kiện x,y nguyên ta có các cặp nghiệm nguyên (x,y) là $(-2,2)$, $(-2,1)$, $(-3,0)$, $(3,2)$, $(2,1)$ và $(2,0)$.

3. Giả sử $8n+1=a^2$ và $24n+1=b^2$, a,b nguyên dương. Ta có $8n+3=4(8n+1)-(24n+1)=4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$.

   Giả sử $8n+3$ là số nguyên tố, khi đó ta có $2a-b=1$, suy ra $4a^2=b^2+2b+1$, hay $4(8n+1)=24n+1+2\sqrt{24n+1}+1$, tương đương $4n+1=\sqrt{24n+1}$. Bình phương hai vế ta đưa về phương trình bậc hai $16n^2-16n=0$, tương đương $n=0$ hoặc $n=1$, mâu thuẫn vì $n>1$.

   Vậy giả sử là sai, ta có $8n+3$ là hợp số.

Bài III (3,0 điểm)

Với a,b,c là các số thực không âm, thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=8$.

1. Chứng minh $b+c \le 4$.
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{bc+2}+\dfrac{b}{ca+2}+\dfrac{c}{ab+2}$.

Lời giải.

1. Ta có bất đẳng thức quen thuộc

$$(b+c)^2 \le 2(b^2+c^2) \le 2(a^2+b^2+c^2)=16,$$

   suy ra $b+c\le 4$.

2. Ta chứng minh

$$2bc+4 \ge a+b+c,$$

   Từ giả thiết ta có $8+2bc=a^2+(b+c)^2 \ge \dfrac{1}{2}(a+b+c)^2$. Suy ra $a+b+c \le \sqrt{16+4bc} \le \sqrt{16+16bc+4(bc)^2}=2bc+4$.
   Tương tự ta có $2ca+4 \ge a+b+c$ và $2ab+4 \ge a+b+c$.

   Từ đó ta có

$$P \le \frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=2.$$

   Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(2,2,0)$ và các hoán vị.

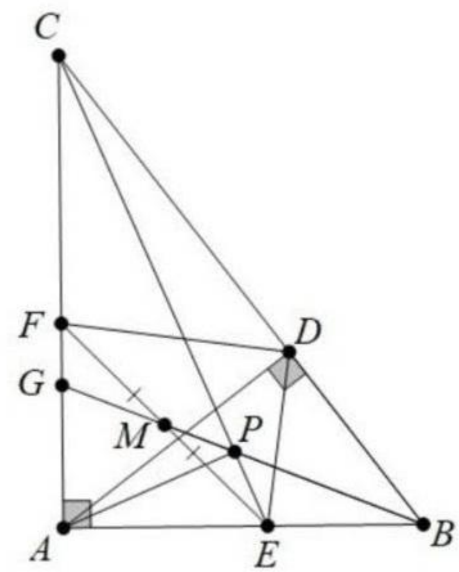
   Vậy $\max P=2$.

Bài IV (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$, đường cao AD $(D\in BC)$. Tia phân giác của góc ADB cắt cạnh AB tại E, tia phân giác của góc ADC cắt cạnh AC tại F.

a) Chứng minh $AF=AC\cdot\dfrac{\sin C}{\sin C+\cos C}$.

b) Chứng minh tam giác DEF đồng dạng với tam giác ABC.



c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF, đường thẳng BM cắt đường thẳng CE tại P. Chứng minh tia PM là tia phân giác góc APC.

Lời giải.

a) Ta có $\sin C = \dfrac{AD}{AC}$ nên cần chứng minh

$$AF = \frac{AD}{\sin C + \cos C} \Longleftrightarrow \sin C + \cos C = \frac{AD}{AF} \Longleftrightarrow \frac{DA + DC}{AC} = \frac{AD}{AF}$$

.

Điều này đúng do DF là phân giác $\angle CDA$.

b) Ta có DF vuông góc DE do chúng lần lượt là phân giác ngoài và trong của $\angle ADB$.

Ta có $\Delta DAC \backsim \Delta DBA$ nên tỉ lệ cạnh của 2 tam giác cũng bằng tỉ lệ phân giác.

Hay $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{AC}{AB}$.

Do đó ta có đpcm.

c) **Cách 1.** Xét $\triangle BDE$ và $\triangle ADF$ có $\angle DBE = \angle DAF$ và $\angle BDE = 45^\circ = \angle ADF$.

$\Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle ADF$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{AE}{AD}$ (tính chất đường phân giác trong)

$\Rightarrow \triangle AEF$ vuông cân

$\Rightarrow AE^2 = EM \cdot EF$ và $\angle BEM = 135^\circ = \angle EFC$.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong của góc ADB và ADC, và $\triangle ADC \sim \triangle BDA$, ta có:

$\Rightarrow \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{DB}{DA} = \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{FA}{FC}$

$\Rightarrow BE \cdot FC = AE \cdot FA = EM \cdot EF$

$\Rightarrow \dfrac{BE}{EM} = \dfrac{EF}{FC}$

$\Rightarrow \triangle BEM \sim \triangle EFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle MEP = \angle MBE$, nên $\triangle MEP \sim \triangle MBE$ (g.g)

$\Rightarrow MP \cdot MB = ME^2 = MA^2$

$\Rightarrow \triangle MPA \sim \triangle MAB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle MPA = \angle MAB = 45^\circ$, kết hợp $\angle MPE = \angle MEB = 135^\circ$, cho $\angle MPC = 45^\circ$

$\Rightarrow PM$ là tia phân giác của góc APC. (đpcm)

Cách 2.

Trước hết, ta các đoạn AE, BE theo AB, AC. Vì AE là phân giác trong $\angle ADB$, ta có

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BE}{BD} = \frac{AB}{AD+DB}.$$

Suy ra

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AD+BD}{BD} = 1 + \frac{AD}{BD} = 1 + \frac{AC}{AB},$$

do đó

$$BE = \frac{AB^2}{AB+AC}$$

và

$$AE = AB - BE = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC}.$$

Tương tự ta có

$$AF = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC}, \quad CF = \frac{AC^2}{AB+AC}.$$

- Ta chứng minh $\dfrac{PE}{PC} = \dfrac{AE^2}{AC^2}$. Gọi G là giao điểm của BM và AC.

Xét $\triangle CEF$ và bộ 3 điểm thẳng hàng (P, M, G), theo định lí Menelaus ta có

$$\frac{PE}{PC} \cdot \frac{GC}{GF} \cdot \frac{MF}{ME} = 1, \text{ suy ra } \frac{PC}{PE} = \frac{GC}{GF}. \qquad (1)$$

Xét $\triangle AEF$ và bộ 3 điểm thẳng hàng (B, M, G), theo định lí Menelaus ta có

$$\frac{GA}{GF} = \frac{BA}{BE} \cdot \frac{ME}{MF} = \frac{BA}{BE}. \qquad (2)$$

Suy ra

$$\frac{GF}{BE} = \frac{GA}{BA} = \frac{GF+GA}{BE+BA} = \frac{FA}{BA+BE}.$$

Suy ra

$$GF = \frac{FA \cdot BE}{BA+BE} = \frac{\dfrac{AB \cdot AC}{AB+AC} \cdot \dfrac{AB^2}{AB+AC}}{AB + \dfrac{AB^2}{AB+AC}} = \frac{AB^2 \cdot AC}{(2AB+AC)(AB+AC)}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{PC}{PE} = \frac{GC}{GF} = 1 + \frac{FC}{GF} = 1 + \frac{\dfrac{AC^2}{AB+AC}}{\dfrac{AB^2 \cdot AC}{(2AB+AC)(AB+AC)}} = 1 + \frac{AC(2AB+AC)}{AB^2}$$
$$= \frac{(AB+AC)^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{\dfrac{AB^2 \cdot AC^2}{(AB+AC)^2}} = \frac{AC^2}{AE^2}.$$

Từ đó suy ra $AP \perp EC$. (Chứng minh bằng kĩ thuật điểm trùng nhau: gọi P' là hình chiếu của A lên EC, ta cũng có $\dfrac{P'C}{P'E} = \dfrac{AC^2}{AE^2} = \dfrac{PC}{PE}$, kết hợp P, P' đều thuộc đoạn CE). Suy ra

$$\frac{PA}{PC} = \frac{AE}{AC}.$$

Lại có, áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle ACE$ và bộ 3 điểm thẳng hàng B, P, G, ta có

$$\frac{GA}{GC} = \frac{PE}{PC} \cdot \frac{BA}{BE} = \frac{AE^2}{AC^2} \cdot \frac{AB}{BE} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AE \cdot AB}{AC \cdot BE} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AD}{BD} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AC}.$$

Vậy $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{GA}{GC}$, suy ra đpcm.

Bài V (1,0 điểm)

Cho tập hợp A gồm 2025 số nguyên dương liên tiếp. Một tập hợp con của tập hợp A là tập hợp mà mọi phần tử của tập hợp đó đều là phần tử của A. Một tập hợp con B của A được gọi là "tốt" nếu hai phần tử x, y phân biệt bất kì thuộc B đều thỏa mãn tính chất: $x + y$ không là bội của $x - y$. Hỏi tập hợp B như vậy thì có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải.

Giả sử $A = \{a, a+1, .., a+2024\}$

Ta thấy rằng $x, x+1$ (x thuộc A) không thể cùng thuộc tập B, Do tổng của chúng sẽ chia hết cho 1.

Đồng thời $x, x+2$ cũng không thể cùng thuộc tập B do tổng của chúng sẽ chia hết cho 2.

Do đó ta xét các tập : $\{a, a+1, a+2\}, \{a+3, a+4, a+5\}, ..., \{a+2022, a+2023, a+2024\}$ là 675 tập, mỗi tập gồm 3 phần tử.

Tập B chỉ có thể chứa 1 phần tử ở mỗi tập, nên tập B có tối đa 675 phần tử.

Nếu a chia hết cho 3 thì ta chọn tập $B = \{a+1, a+4, a+7, .., a+2023\}$. Tập này có 675 phần tử và thoả mãn, do 2 phần tử bất kì thuộc B có tổng chia 3 dư 2 trong khi hiệu của chúng chia hết cho 3.

Nếu a không chia hết cho 3 thì ta chọn $B = \{a, a+3, .., a+2022\}$. Tập này có 675 phần tử và tương tự như trên có thoả mãn

Vậy tập B có tối đa 675 phần tử.