

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm 02 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm)

Từ câu 1 đến câu 8, em hãy viết vào tờ giấy thi chữ cái (A, B, C hoặc D) trước đáp án mà em cho là đúng.

Câu 1. Điều kiện xác định của biểu thức $P(x) = \frac{2026}{x-2025}$ là

- A. $x > 2025$. B. $x < 2025$. C. $x \neq 2025$. D. $x = 2025$.

Câu 2. Cặp $(x; y) = (1; -3)$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $2x + y = -1$. B. $2x + y = 1$. C. $2x - y = -1$. D. $2x - y = 1$.

Câu 3. Tích các nghiệm của phương trình $2x^2 - 7x + 4 = 0$ bằng

- A. -2 . B. 2 . C. $\frac{-7}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 4. Độ dài cung 120° của đường tròn bán kính 9cm bằng

- A. $18\pi\text{ cm}$. B. $12\pi\text{ cm}$. C. $6\pi\text{ cm}$. D. $9\pi\text{ cm}$.

Câu 5. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ có nghiệm là

- A. $(x; y) = (1; 1)$. B. $(x; y) = (-2; -3)$. C. $(x; y) = (-1; 2)$. D. $(x; y) = (2; 3)$.

Câu 6. Phương trình $x^2 - 2x + a = 0$ có một nghiệm $x = -1$. Nghiệm còn lại của phương trình là

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = -3$. D. $x = 3$.

Câu 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , có $\widehat{ABC} = 40^\circ, \widehat{ACB} = 80^\circ$. Góc BOC có số đo bằng

- A. 60° . B. 120° . C. 40° . D. 80° .

Câu 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6\text{ cm}, BC = 8\text{ cm}$. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ bằng

- A. 5 cm . B. 10 cm . C. 6 cm . D. 8 cm .

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

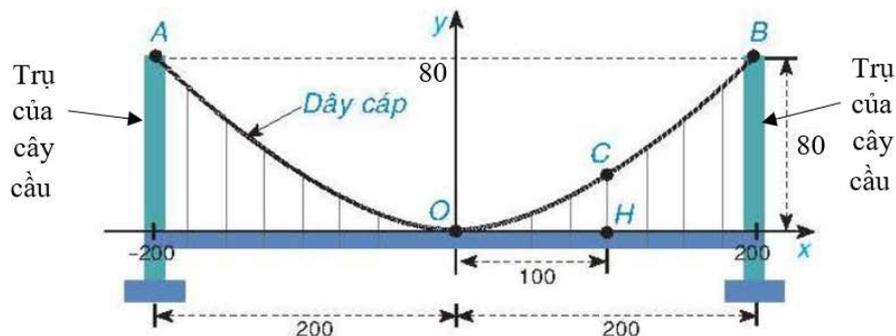
Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình $\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{-2x-6}{x^2-9}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ ($x \geq 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 3 (1,0 điểm). Một cây cầu treo có trụ tháp đôi cao $80m$ so với mặt của cây cầu và cách nhau $400m$. Các dây cáp có dạng đồ thị của parabol $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$ và được treo trên các đỉnh tháp (hình vẽ). Một người đứng tại điểm H cách tâm O của cây cầu $100m$. Chiều cao CH là khoảng cách từ chân người đó đến dây cáp. Tính CH .



Câu 4 (1,0 điểm). Hai bạn An và Bình cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Nếu mỗi bạn làm một mình thì bạn An cần ít thời gian hơn bạn Bình là 9 ngày. Hỏi nếu bạn An làm một mình 3 ngày rồi nghỉ thì Bình hoàn thành nốt công việc trong thời gian bao lâu?

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh rằng bốn điểm B, F, H, D cùng thuộc một đường tròn.
- b) Kéo dài AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là đường tròn K . Đường thẳng KF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I . Gọi N là giao điểm của CI và EF . Chứng minh rằng $CF^2 = CN.CI$.
- c) Kẻ OM vuông góc với BC tại M . Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

————— **Hết** —————

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Lưu ý:

- Hướng dẫn chỉ trình bày các bước cơ bản của 1 cách giải, nếu HS có cách giải khác và đúng vẫn cho điểm theo thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Trong một bài, thí sinh giải đúng đến đâu cho điểm đến đó.
- Bài hình học nếu không vẽ hình thì không cho điểm, nếu vẽ hình sai thì không cho điểm ứng với phần vẽ hình sai.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

I. TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm): Mỗi câu đúng được 0,25 điểm.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	C	A	B	C	D	D	B	A

II. TỰ LUẬN (8,0 điểm).

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình $\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{-2x-6}{x^2-9}$.

Nội dung	Điểm
Điều kiện xác định: $x \neq 3, x \neq -3$.	0.25
Quy đồng mẫu hai vế của phương trình ta được: $\frac{x(x-3) - 2(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{-2x-6}{x^2-9}$ $\frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 9} = \frac{-2x - 6}{x^2 - 9}$	0.25
Suy ra: $x^2 - 5x - 6 = -2x - 6$ hay $x^2 - 3x = 0(1)$ Giải phương trình (1) ta được nghiệm: $x = 0, x = 3$.	0.25
Đối chiếu điều kiện xác định, ta được nghiệm $x = 0$ thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.	0.25

Câu 2 (1,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ ($x \geq 0, x \neq 4$).

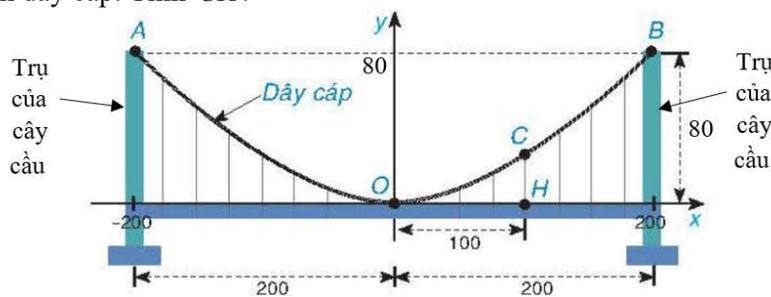
a) Rút gọn biểu thức A.

Nội dung	Điểm
$A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3}$	0.25
$= \frac{x-1-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3} = \frac{3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$	0.25

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Nội dung	Điểm
Ta có: $A = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ A nhận giá trị nguyên khi $\sqrt{x}-2$ là ước của 1. Khi đó: $\sqrt{x}-2 \in \{1; -1\}$	0.25
Suy ra: $\sqrt{x} \in \{3; 1\}$, từ đó ta có: $x \in \{9; 1\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của x cần tìm là: $x = 9, x = 1$.	0.25

Câu 3 (1,0 điểm). Một cây cầu treo có trụ tháp đôi cao $80m$ so với mặt của cây cầu và cách nhau $400m$. Các dây cáp có dạng đồ thị của parabol $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$ và được treo trên các đỉnh tháp (hình vẽ). Một người đứng tại điểm H cách tâm O của cây cầu $100m$. Chiều cao CH là khoảng cách từ chân người đó đến dây cáp. Tính CH .



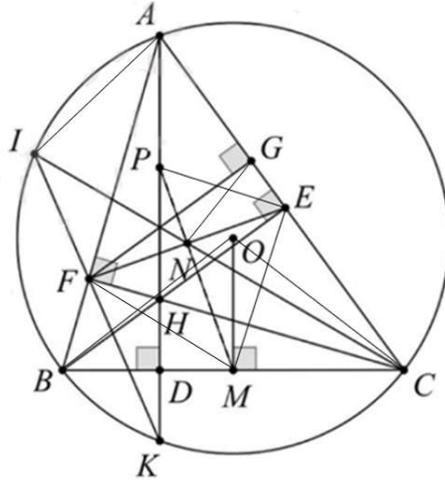
Nội dung	Điểm
Dây cáp có hình dạng là parabol $(P): y = ax^2$.	0.25
Vì (P) đi qua điểm $(200;80)$ nên ta có: $80 = 200^2 a$	
Suy ra $a = \frac{80}{200^2} = \frac{1}{500}$. Khi đó: $y = \frac{1}{500}x^2$	0.25
Gọi điểm $C(100; y)$, ta có: $y = \frac{1}{500}100^2 = 20$	0,25
Chiều cao $CH = y = 20$. Vậy, khoảng cách từ chân người đó đến dây cáp là $CH = 20m$.	0.25

Câu 4 (1,0 điểm). Hai bạn An và Bình cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Nếu mỗi bạn làm một mình thì bạn An cần ít thời gian hơn bạn Bình là 9 ngày. Hỏi nếu bạn An làm một mình 3 ngày rồi nghỉ thì Bình hoàn thành nốt công việc trong thời gian bao lâu?

Nội dung	Điểm
Gọi thời gian 2 bạn An và Bình làm riêng xong công việc lần lượt là x và y (ngày) $(x, y \in \mathbb{N}^*)$. Vì làm một mình thì bạn An cần ít thời gian hơn bạn Bình là 9 ngày, nên ta có: $y - x = 9$ suy ra $y = x + 9$	0.25
Mỗi ngày: Bạn An làm một mình được $\frac{1}{x}$ (công việc). Bạn Bình làm một mình được $\frac{1}{y}$ (công việc). Cả hai bạn làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc).	0.25
Vì hai bạn An và Bình cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày, nên ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{6}$, biến đổi ta được: $x^2 - 3x - 54 = 0 (*)$. Giải phương trình (*) ta được $x = 9$ (thoả mãn) và $x = -6$ (không thoả mãn). Với $x = 9$ ta tìm được: $y = 18$ (thoả mãn).	0,25
Một ngày An làm riêng được $\frac{1}{9}$ công việc nên trong 3 ngày An làm được $\frac{1}{3}$ công việc. Còn lại: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (công việc) Một ngày Bình làm riêng được $\frac{1}{18}$ công việc nên $\frac{2}{3}$ công việc còn lại Bình làm xong trong số ngày là: $\frac{2}{3} : \frac{1}{18} = 12$ (ngày).	0.25

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, F, H, D cùng thuộc một đường tròn.



Nội dung	Điểm
Tam giác BFH vuông tại F . Suy ra ΔBFH nội tiếp đường tròn đường kính BH .	0,25
Tam giác BDH vuông tại D . Suy ra ΔBDH nội tiếp đường tròn đường kính BH .	0,25
Suy ra ΔBFH và ΔBDH cùng nội tiếp đường tròn đường kính BH .	0,25
Vậy bốn điểm B, F, H, D cùng thuộc một đường tròn đường kính BH .	0,25

b) Kéo dài AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là đường tròn K . Đường thẳng KF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I . Gọi N là giao điểm của CI và EF . Chứng minh rằng $CF^2 = CN.CI$.

Nội dung	Điểm
Tam giác AEH vuông tại E . Suy ra ΔAEH nội tiếp đường tròn đường kính AH . Tam giác AFH vuông tại F . Suy ra ΔAFH nội tiếp đường tròn đường kính AH . Suy ra, tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .	0,25
Trong đường tròn ngoại tiếp $AEHF$, ta có: $\widehat{NFC} = \widehat{KAC} = \frac{1}{2} sđ \widehat{HE}$.	
Trong đường tròn (O) , ta có: $\widehat{FIC} = \widehat{KAC} = \frac{1}{2} sđ \widehat{KC}$. Suy ra: $\widehat{NFC} = \widehat{FIC}$.	0,5
Xét ΔNFC và ΔFIC có: $\widehat{NFC} = \widehat{FIC}$ và \widehat{FCI} chung Suy ra ΔNFC và ΔFIC đồng dạng	
Suy ra $\frac{CF}{CN} = \frac{CI}{CF}$, từ đó ta có: $CF^2 = CN.CI$.	0,25

c) Kẻ OM vuông góc với BC tại M . Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Nội dung	Điểm
Ta có tam giác OBC cân tại O ($OB = OC$), OM là đường cao đồng thời là trung tuyến của tam giác OBC , suy ra M là trung điểm của BC .	
Tam giác BFC vuông tại F , suy ra $FM = \frac{1}{2} BC$	0,25
Tam giác BEC vuông tại E , suy ra $EM = \frac{1}{2} BC$	
Từ đó suy ra $EM = FM$, hay M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng EF (*)	

<p>Vì P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF nên $PE = PF$, hay P nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng EF (**)</p> <p>Kẻ FG vuông góc với AC tại G.</p> <p>Trong tam giác vuông AFC, ta có $CF^2 = CG.CA$</p> <p>Lại có $CF^2 = CN.CI$</p> <p>Suy ra: $CG.CA = CN.CI$, suy ra $\frac{CG}{CI} = \frac{CN}{CA}$, suy ra $\triangle CGN$ đồng dạng $\triangle CIA$</p> <p>Từ đó suy ra $\widehat{NGE} = \widehat{CIA}$.</p>	0,25
<p>Ta lại có: $\widehat{CIA} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2} s\widehat{AC}$.</p> <p>Ta có $ME = MF = MB = MC = \frac{1}{2}BC$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp.</p> <p>Từ đó suy ra: $\widehat{ABC} = \widehat{NEG}$ (cùng bù với \widehat{FEC}).</p> <p>Suy ra: $\widehat{NGE} = \widehat{NEG}$, suy ra tam giác NEG cân đỉnh N. Suy ra $NE = NG$.</p>	0,25
<p>Ta có: $\widehat{NGE} + \widehat{FGN} = \widehat{NEG} + \widehat{GFN} = 90^\circ$ suy ra: $\widehat{FGN} = \widehat{GFN}$, suy ra tam giác NFG cân đỉnh N. Suy ra $NF = NG$.</p> <p>Từ đó ta có: $NE = NF$ hay N là trung điểm của EF (***) .</p> <p>Từ (*), (**), (***) suy ra: ba điểm M, N, P thẳng hàng.</p>	0,25

Câu 6 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Nội dung	Điểm
<p>Ta có: $1+b^2 \geq 2b$, đẳng thức xảy ra khi $b=1$.</p> <p>Xét $\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2) - ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$ (1). Đẳng thức xảy ra khi $b=1$.</p>	0,25
<p>Chứng minh tương tự, ta có:</p> $\frac{b}{1+c^2} = \frac{b(1+c^2) - bc^2}{1+c^2} = b - \frac{bc^2}{1+c^2} \geq b - \frac{bc^2}{2c} = b - \frac{bc}{2}$ (2). Đẳng thức xảy ra khi $c=1$. $\frac{c}{1+a^2} = \frac{c(1+a^2) - ca^2}{1+a^2} = c - \frac{ca^2}{1+a^2} \geq c - \frac{ca^2}{2a} = c - \frac{ca}{2}$ (3). Đẳng thức xảy ra khi $a=1$.	0,25
<p>Cộng (1), (2), (3) về với về ta được:</p> $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a + b + c - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}.$	0,25
<p>Ta lại có: $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$.</p> <p>Do đó: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. đpcm.</p>	0,25

---HẾT---