



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ HỒNG PHONG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KỶ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXIX - NĂM 2025**

Môn: TOÁN - Khối: 11

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: **05/4/2025**

Đề thi gồm 01 trang, 05 câu

- Lưu ý:** - Thí sinh làm mỗi câu trên một tờ giấy thi riêng và ghi rõ số câu ở trang 1 của mỗi tờ giấy thi đó;
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Câu 1. (3 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 16x^2 + \frac{7}{x} = \frac{27}{y} \\ 16y^2 + \frac{9}{y} = \frac{21}{x} \end{cases}$$

Câu 2. (4 điểm) Ký hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của số thực x . Đặt

$$f(x) = \begin{cases} x - \{x\} & \text{khi } \{x\} \leq \frac{1}{2} \\ x - \{x\} + 1 & \text{khi } \{x\} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

a. Tìm tập hợp tất cả các số nguyên n sao cho $f(\sqrt{n}) = 2025$.

b. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $u_n = \frac{1}{f(\sqrt{1})} + \frac{1}{f(\sqrt{2})} + \dots + \frac{1}{f(\sqrt{n})} - 2\sqrt{n}$.

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (4 điểm) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có thể điền vào bảng 4×4 mỗi ô một số trong tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho mỗi số $1, 2, \dots, n$ đều có mặt trong bảng, đồng thời trong mỗi hàng và trong mỗi cột không có hai số bằng nhau hoặc hơn kém nhau 1 đơn vị.

Câu 4. (4 điểm) Gọi a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a! + 2 \cdot (b!) = a^{2b}$.

a. Chứng minh $b \neq a - 2$.

b. Tìm tất cả các cặp số $(a; b)$ thỏa mãn điều kiện đã cho.

Câu 5. (5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi M, N và P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA và AB . Gọi X, Y và Z theo thứ tự là giao điểm của các tiếp tuyến khác BC, CA, AB kẻ từ N và P , kẻ từ M và P , kẻ từ M và N tới (I) , sao cho tam giác XYZ nhận (I) làm đường tròn nội tiếp và các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng YZ, ZX, XY .

a. Chứng minh đường tròn nội tiếp mỗi tam giác XPN, YPM, ZMN tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác MNP .

b. Chứng minh I là tâm đẳng phương của các đường tròn nội tiếp tam giác XPN, YPM và ZMN .

----- HẾT -----

Họ tên thí sinh: SBD:

Trường: Tỉnh/TP:

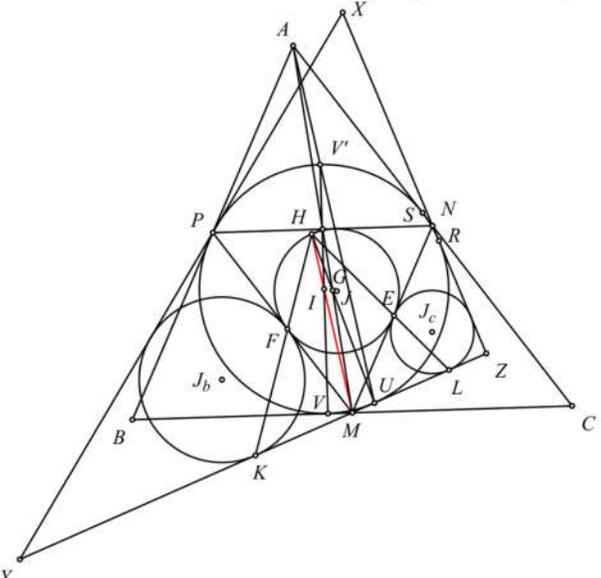
ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

Câu	Nội dung	Điểm
1	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 16x^2 + \frac{7}{x} = \frac{27}{y} \\ 16y^2 + \frac{9}{y} = \frac{21}{x} \end{cases}$	3
	Điều kiện xác định: $x \neq 0, y \neq 0$. Khi đó hệ tương đương với $\begin{cases} \frac{72}{y} = 16(3x^2 + y^2) \\ \frac{56}{x} = 16(x^2 + 3y^2) \end{cases}$	1
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{2} = 3x^2y + y^3 \\ \frac{7}{2} = x^3 + 3xy^2 \end{cases}$	1
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 = (y+x)^3 \\ 1 = (y-x)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.	1

Câu	Nội dung	Điểm
2	<p>Câu 1. Ký hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của số thực x. Đặt</p> $f(x) = \begin{cases} x - \{x\} & \text{khi } \{x\} \leq \frac{1}{2} \\ x - \{x\} + 1 & \text{khi } \{x\} > \frac{1}{2}. \end{cases}$ <p>a. Tìm tập hợp tất cả các số nguyên n sao cho $f(\sqrt{n}) = 2025$.</p> <p>b. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $u_n = \frac{1}{f(\sqrt{1})} + \frac{1}{f(\sqrt{2})} + \dots + \frac{1}{f(\sqrt{n})} - 2\sqrt{n}$.</p> <p>Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.</p>	4
a.	<p>Với mỗi số nguyên dương k, đặt N_k là tập các số nguyên dương m sao cho $f(\sqrt{m}) = k$. Ta có</p> $N_k = \left\{ m \in \mathbb{Z}^+ \mid k - \frac{1}{2} < \sqrt{m} \leq k + \frac{1}{2} \right\}$ $= \left\{ m \in \mathbb{Z}^+ \mid k^2 - k + \frac{1}{4} < m \leq k^2 + k + \frac{1}{4} \right\}$ $= [k^2 - k + 1, k^2 + k] = [(k-1)k + 1, k(k+1)].$ <p>Do vậy $\{n \mid f(\sqrt{n}) = 2025\} = N_{2025} = [2024 \cdot 2025 + 1; 2025 \cdot 2026]$.</p>	1
	<p>Dễ thấy N_k có $2k$ phần tử và mỗi số nguyên dương m nằm trong đúng một tập N_k với k nào đó.</p>	0,5
b.	<p>Đặt $\ell = f(\sqrt{n})$. Trong công thức của u_n, với mỗi số nguyên dương $k \leq \ell - 1$, hạng tử $\frac{1}{k}$ xuất hiện $2k$ lần; còn hạng tử $\frac{1}{\ell}$ xuất hiện $n - \ell(\ell - 1)$ lần (tương ứng với $m = \ell(\ell - 1) + 1, \dots, n$).</p>	0,5
	<p>Từ đó</p> $u_n = 2(\ell - 1) + \frac{n - \ell(\ell - 1)}{\ell} - 2\sqrt{n} = \frac{n - 2\sqrt{n}\ell + \ell^2}{\ell} - 1 = \frac{(\ell - \sqrt{n})^2}{\ell} - 1.$ <p>Đề ý rằng $\sqrt{n} - \ell \leq \frac{1}{2}$ và ℓ tiến ra $+\infty$ khi n tiến ra $+\infty$ nên $(u_n) \rightarrow -1$.</p>	1

Câu	Nội dung	Điểm																
3	<p>Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có thể điền vào bảng 4×4 mỗi ô một số trong tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho mỗi số $1, 2, \dots, n$ đều có mặt trong bảng, đồng thời trong mỗi hàng và trong mỗi cột không có hai số bằng nhau hoặc hơn kém nhau 1 đơn vị.</p>	4																
	<p>Xét một cách điền thỏa mãn yêu cầu. Do các số trong mỗi hàng đôi một khác nhau nên $n \geq 4$. Nói riêng số 2 buộc phải xuất hiện trong bảng. Xét hàng/cột chứa một số 2. Theo giả thiết các số trong hàng/cột này đôi một hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị nên $n \geq 8$.</p>	1,5																
	<p>Nếu $n = 8$ thì trên hàng/cột chứa số 2 phải xuất hiện các số 2, 4, 6, 8. Xét hàng/cột chứa số 7. Khi đó hàng/cột này phải chứa các số 1, 3, 5, 7. Suy ra ô giao của hàng chứa một số 2 và cột chứa một số 7 phải được điền một số vừa chẵn vừa lẻ, mâu thuẫn.</p>	1,5																
	<p>Với $n = 9$, ta có cách điền sau thỏa mãn</p> <table border="1" data-bbox="722 661 950 831" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>9</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>7</td> <td>9</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	2	4	6	8	9	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9	1	1
2	4	6	8															
9	1	3	5															
7	9	1	3															
5	7	9	1															

Câu	Nội dung	Điểm
4	Gọi a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a! + 2 \cdot (b!) = a^{2b}$. a. Chứng minh $b \neq a - 2$. b. Tìm tất cả các cặp số $(a; b)$ thỏa mãn điều kiện đã cho.	4
a.	Giả sử $b = a - 2$. Khi đó ta có $a! + 2(a - 2)! = a^{2a - 4}$. Do $b \geq 1$ nên $a \geq 3$. Rõ ràng $a = 3$ không thỏa mãn điều kiện trên nên $a \geq 4$. Khi đó $a^{2a - 4} \geq a^a$ và $a! + 2((a - 2)!) < 2(a!) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a < a^a$, vô lý. Vậy $b \neq a - 2$.	1,5
b.	Rõ ràng $a > 1$. Với $a = 2$ thì $2 + 2 \cdot (b!) = 2^{2b}$. Dễ thấy $b = 1$ thỏa mãn vì $2 + 2 \cdot 1! = 2^2$. Nếu $b \geq 2$ thì $2 b!$ do đó $2 + 2 \cdot (b!) \equiv 2 \pmod{4}$ trong khi đó $4 2^{2b}$, mâu thuẫn.	0,5
	Xét $a \geq 3$. Nếu $b \geq a - 1$ thì $(a - 1) b!$ và $(a - 1) a!$ nên ta có $(a - 1) a^{2b}$, mâu thuẫn do $a - 1 \geq 2$ và $a - 1$ nguyên tố cùng nhau với a .	1
	Suy ra $b \leq a - 3$ (do $b \neq a - 2$). Khi đó $2b! \left(1 + \frac{(b+1)(b+2)\cdots(a-1)}{2} a \right) = a^{2b}.$ Nhân tử $1 + \frac{(b+1)(b+2)\cdots(a-1)}{2} \cdot a$, lớn hơn a và nguyên tố cùng nhau với a , vì thế không thể là ước của a^{2b} được, mâu thuẫn. Vậy $(a, b) = (2, 1)$ là cặp số duy nhất thỏa mãn yêu cầu của bài toán.	1

Câu	Nội dung	Điểm
5	<p>Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N và P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA và AB. Gọi X, Y và Z theo thứ tự là giao điểm của các tiếp tuyến khác BC, CA, AB kẻ từ N và P, kẻ từ M và P, kẻ từ M và N tới (I), sao cho tam giác XYZ nhận (I) làm đường tròn nội tiếp và các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng YZ, ZX, XY.</p> <p>a. Chứng minh đường tròn nội tiếp mỗi tam giác XPN, YPM, ZMN tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác MNP.</p> <p>b. Chứng minh I là tâm đẳng phương của các đường tròn nội tiếp tam giác XPN, YPM và ZMN.</p>	5
	<p>Giả sử các điểm có vị trí như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.</p> 	
a.	<p>Gọi $(J_a), (J_b), (J_c), (J)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác XPN, YPM, ZMN, MNP và U, V, R, S lần lượt là tiếp điểm của (I) với YZ, BC, XZ, AC. Gọi E là tiếp điểm của (J_c) với MN.</p> <p>Ta có</p> $\begin{aligned} ZM - ZN &= MU + UZ - NR - RZ = MU - NR = MV - NS \\ &= VC - MC - CS + CN = CN - CM = PM - PN. \end{aligned}$	1
	<p>Do đó $ME = \frac{MN + MZ - NZ}{2} = \frac{MN + MP - PN}{2}$.</p> <p>Suy ra E cũng là tiếp điểm của (J) với MN. Suy ra (J) tiếp xúc với (J_c).</p> <p>Tương tự (J) cũng tiếp xúc với $(J_a), (J_b)$.</p>	1
b.	<p>Gọi F, K là tiếp điểm của (J_b) với MP, YZ, L là tiếp điểm của (J_c) với YZ, G là trọng tâm của tam giác ABC, VV' là đường kính của (I).</p> <p>Xét phép vị tự tâm F biến (J_b) thành (J), biến K thành H. Khi đó tiếp tuyến tại H của (J) song song với YZ. Tương tự ta thu được KF cắt EL tại H nằm trên (J).</p> <p>Ta có $ML = ME = MF = MK$ nên $KFEL$ là tứ giác nội tiếp.</p> <p>Từ đó HM là trục đẳng phương của (J_b) và (J_c).</p>	1

<p>Chú ý rằng tiếp tuyến tại U của (I) song song với tiếp tuyến tại H của (J) nên</p> $V_G^{-1} : \Delta ABC \mapsto \Delta MNP, (I) \mapsto (J), U \mapsto H.$ <p>Suy ra $MH \parallel AU$.</p>	1
<p>Mặt khác A, V', U thẳng hàng nên $IM \parallel AU$.</p>	0,5
<p>Suy ra H, I, M thẳng hàng. Suy ra I thuộc trục đẳng phương của (J_b) và (J_c). Chứng minh tương tự ta thu được điều phải chứng minh.</p>	0,5