CHUYÊN ĐỀ 6: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC CÂU TOÁN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CĂN THỨC BẬC 2

□ Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.

□ Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a:

$$\begin{cases} a \ge 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

□ Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \le \sqrt{b} \Leftrightarrow a \le b$.

□ Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

+ $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \ge 0 \\ -A & A < 0 \end{cases}$

+ $\sqrt{A^2 B} = |A|\sqrt{B} = A\sqrt{B}$ với $A, B \ge 0$; $\sqrt{A^2 B} = |A|\sqrt{B} = -A\sqrt{B}$ với $A < 0; B \ge 0$

+ $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \sqrt{\dfrac{A.B}{B^2}} = \dfrac{\sqrt{A.B}}{|B|}$ với $AB \ge 0, B \ne 0$

+ $\dfrac{M}{\sqrt{A}} = \dfrac{M.\sqrt{A}}{A}$ với $A > 0$;(Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu)

+ $\dfrac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{M\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right)}{A - B}$ với $A, B \ge 0, A \ne B$ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)

2. CĂN THỨC BẬC 3.

□ Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$

□ Cho $a \in R; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

□ Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.

□ Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.

□ Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.

□ Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.

□ $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ với mọi $b \ne 0$.

□ $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$ với mọi a, b.

□ $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

□ $A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3 B}$.

□ $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{AB^2}}{B}$ với $B \ne 0$

□ $\dfrac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\dfrac{A}{B^3}}$

$\square$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B}}=\dfrac{\sqrt[3]{A^2}\mp\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}{A\pm B}$ với $A\neq\pm B$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU TẬP

Dạng 1: Rút gọn biểu thức không chứa biến

1. Phương pháp

1. $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases}A, & A\geq 0\\ -A, & A<0\end{cases}$
2. $\sqrt{AB}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$ (Với $A\geq 0;B\geq 0$)
3. $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A\geq 0;B>0$)
4. $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}$ (Với $B\geq 0$)
5. $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$ (Với $A\geq 0;B\geq 0$)
6. $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}$ (Với $A<0;B\geq 0$)
7. $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (Với $A\geq 0;B>0$)
8. $\dfrac{A}{\sqrt{B}}=\dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B>0$)
9. $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm B}=\dfrac{C\left(\sqrt{A}\pm B\right)}{A-B^2}$ (Với $A\geq 0;A\neq B^2$)
10. $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{C\left(\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\right)}{A-B}$ (Với $A\geq 0;B\geq 0;A\neq B$)
11. $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3=\sqrt[3]{A^3}=A$

2. Câu tập

Câu 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$M=\sqrt{45}+\sqrt{245}-\sqrt{80}$ $N=5\sqrt{8}+\sqrt{50}-2\sqrt{18}$ $P=\sqrt{125}-4\sqrt{45}+3\sqrt{20}-\sqrt{80}$

$A=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$ $B=2\sqrt{3}+3\sqrt{27}-\sqrt{300}$ $C=(2\sqrt{3}-5\sqrt{27}+4\sqrt{12}):\sqrt{3}$

Câu 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$ b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2}-\sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$ c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ e) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$ f) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

Câu 3: Rút gọn biểu thức

a) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ b) $B=\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

c) $C=\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ d) $D=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$

e) $E=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ f) $F=\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{20}+\dfrac{1}{2}\sqrt{8}$

Câu 4: Rút gọn biểu thức: (áp dụng các kiến thức tổng hợp)

$A=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\quad$ $B=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$C=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ $\quad$ $D=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$E=\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$ $\quad$ $F=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}$

Câu 5: Thu gọn các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{18}-2\sqrt{50}+3\sqrt{8}$

b) $B=\sqrt{27}-6\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\dfrac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$

c) $C=\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{2}$

Câu 6: Thực hiện phép tính

a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{48}-2\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}}+5\sqrt{1\dfrac{1}{3}}$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt[3]{8}$

c) $5\sqrt{2a}-\sqrt{50a}-2\sqrt{a^3}+4\sqrt{32a}$ với $a\ge 0$

Câu 7: Thu gọn các biểu thức sau: $A=\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{5}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Câu 8: Tính $B=21\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2-6\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2-15\sqrt{15}$.

Dạng 2: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

1. Phương pháp

	BIỂU THỨC - ĐKXĐ:		CÂU		
1.	$\sqrt{A}$	ĐKXĐ: $A\ge 0$	Câu: $\sqrt{x-2018}$	ĐKXĐ:	$x\ge 2018$
2.	$\dfrac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B\ne 0$	Câu: $\dfrac{x+4}{x-7}$	ĐKXĐ:	$x\ne 7$
3.	$\dfrac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B>0$	Câu: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$x>3$
4.	$\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A\ge 0; B>0$	Câu: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$\begin{cases}x\ge 0\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow x>3$
5.	$\sqrt{\dfrac{A}{B}}$	ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A\le 0\\ B<0\end{cases}\\ \begin{cases}A\ge 0\\ B>0\end{cases}\end{array}\right.$	Câu: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$	ĐKXĐ:	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\le 0\\ x+2<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+1\ge 0\\ x+2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\ x\ge 1\end{array}\right.$

6.	Cho a > 0 ta có: $x^2 > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{array}\right.$.	Câu: $x^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{array}\right.$
7.	Cho a > 0 ta có: $x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$	Câu: $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

2. Câu tập

Câu 1: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

a. $\sqrt{-5x}$

b. $\sqrt{4-3x}$

c. $\sqrt{-3x+2}$

Câu 2: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

a. $\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}$

b. $\sqrt{\dfrac{4}{2x+3}}$

c. $\sqrt{\dfrac{-2}{x+1}}$

Câu 3: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

a. $\dfrac{x-1}{x+2}+\sqrt{x-2}$

b. $\dfrac{2x}{x-4}+x^2\sqrt{x-2}$

Câu 4: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau

a. $A=\dfrac{2x-1}{\sqrt{3-4x}}$

b. $B=\dfrac{3x-2}{x-1}+\dfrac{4}{\sqrt{5-7x}}$

c. $C=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{9-x^2}$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa biến và các câu hỏi phụ

1. Phương pháp

Bước 1: Tìm điều kiện xác định (nếu đề Câu chưa cho)

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích đa thức thành nhân tử

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung

Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn

2. Bài tập

Câu 1: Rút gọn $B=\left(\dfrac{x}{x+3\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{x+3\sqrt{x}}\right)\ (x>0)$.

Câu 2: Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x}+x\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$, với $x>0, x\neq 2$ **7).**

Câu 3: Thu gọn các biểu thức sau: $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}\right).\dfrac{\sqrt{x}+3}{x+9}$ với $x\geq 0, x\neq 9$.

Câu 4: Rút gọn các biểu thức:

a) $A=\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{4}}$ khi $x\geq 0$.

b) $B=\sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}}+\sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}$ khi $x\geq\dfrac{1}{4}$.

Câu 5: Cho các số thực dương a,b; $a\neq b$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\dfrac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\dfrac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}=0$.

Câu 6: Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-9}+\dfrac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12}-\dfrac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}}; x>0, x\neq 9$.

Câu 7: Cho biểu thức $P=\dfrac{3x+5\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$ (với $x\geq 0; x\neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x sao cho $P=\dfrac{1}{2}$.

Câu 8: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{4\sqrt{y}}{2+\sqrt{y}}+\dfrac{8y}{4-y}\right):\left(\dfrac{\sqrt{y}-1}{y-2\sqrt{y}}-\dfrac{2}{\sqrt{y}}\right)$, với $y>0; y\neq 4; y\neq 9$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm y để $A=-2$.

Câu 9: Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\dfrac{10\sqrt{x}}{x-25}-\dfrac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x\geq 0, x\neq 25$.

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tính giá trị của A khi $x=9$.

Câu 10: Cho $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}$, với $x\geq 0, x\neq 9$.

1) Rút gọn P.

2) Tìm giá trị của x để $P=\dfrac{1}{3}$.

3) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Câu 11: Cho biểu thức $P=\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}.\dfrac{x+y}{x^2-y^2}, x\neq y$.

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tính giá trị của P khi $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ và $y=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Câu 12: Cho biểu thức $A=\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{4-x}$ $(x\geq 0, x\neq 4)$. Rút gọn A và tìm x để $A=\dfrac{1}{3}$.

Câu 13: Cho biểu thức $C=\dfrac{a}{a-16}-\dfrac{2}{\sqrt{a}-4}-\dfrac{2}{\sqrt{a}+4}$.

1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C.

2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a=9-4\sqrt{5}$.

Câu 14: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ $(x>0, x\neq 4)$.

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 15: Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0$ và $x\neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm các giá trị của x để $2P=2\sqrt{x}+5$.

Câu 16: Cho biểu thức $P=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa

b) Rút gọn P

c) Tính giá trị của P khi $a=2\sqrt{3}; b=\sqrt{3}$

Câu 17: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A khi $|a-1|=1$

Câu 18: Cho $A=\left(1-\dfrac{a-3\sqrt{a}}{a-9}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3}+\dfrac{\sqrt{a}-3}{2-\sqrt{a}}-\dfrac{9-a}{a+\sqrt{a}-6}\right)$, với $a\geq 0; a\neq 4; a\neq 9$

a) Rút gọn A

b) Tìm a để $A+|A|=0$.

Câu 19: Cho ba biểu thức $M=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{3+\left(\sqrt{x}+1\right)^2};N=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3-\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{(x-4)(3x+1)};P=\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

a) Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $M=x-4$

b) Trong trường hợp các biểu thức M,N và P xác định, rút gọn biểu thức $Q=MN+P$

Câu 20: Cho biểu thức $P=\dfrac{x+4\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh với mọi $m<0;m\neq 1$ thì phương trình $P=3+m\sqrt{x}$ luôn có một nghiệm duy nhất

Câu 21: Cho biểu thức: $B=\left(\dfrac{1}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}\right).\dfrac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, (với $x>0;x\neq 9$).

Rút gọn biểu thức và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B>\dfrac{1}{2}$.

Câu 22: Cho hai biểu thức $T=\left(\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}\right):\dfrac{a+1}{a-1}$ với $a>0;a\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức T

b) Tìm các giá trị nguyên của a để T nhận giá trị nguyên

Câu 23: Cho biểu thức $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x\geq 0$, $x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x là số chính phương để $2019A$ là số nguyên.

Câu 26: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất

Câu 27: Cho biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{3}{x\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Câu 28: Cho biểu thức $P=\dfrac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1}-\dfrac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Câu 29: Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{P}$

Câu 30: Cho biểu thức $A=(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}).\dfrac{x^2-2x+1}{2}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để $A\geq 0$

c) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 31: Cho biểu thức $Q=\dfrac{x+2\sqrt{x}-10}{x-\sqrt{x}-6}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\left(x\geq 0;x\neq 9\right)$

1. Rút gọn biểu thức Q

2. Tính giá trị của Q khi $x=16$

3. Tìm giá trị của x khi $Q=\dfrac{1}{3}$

4. Tìm giá trị của x sao cho $Q>\dfrac{1}{9}$

5. Tìm giá trị lớn nhất của Q.

Câu 32: Cho biểu thức $P=\dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{3\left(3\sqrt{x}-5\right)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị của P, biết $x=4+2\sqrt{3}$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 33: Cho biểu thức $Q=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right):\dfrac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$

a) Rút gọn Q;

b) Tìm x để $Q=2$;

c) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Câu 34: Cho biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}-\dfrac{3}{\sqrt{a}+3}-\dfrac{a-2}{a-9}$ với $a\geq 0;a\neq 9$

a) Rút gọn B

b) Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên

Câu 35: Cho biểu thức $A=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (Với $x>0,x\neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Câu 36: Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x\geq 0;x\neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P=\dfrac{7}{12}$

c) Tìm x để $P>\dfrac{1}{2}$

d) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $\dfrac{1}{P}$ nhận giá trị nguyên.

e) Tìm tất cả các giá trị hữu tỷ của của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 37: Cho biểu thức $P=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$, (với $x>0$ và $x\neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x=\sqrt{2022+4\sqrt{2018}}-\sqrt{2022-4\sqrt{2018}}$.

Câu 38: Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x\geq 0, x\neq 25$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.

b) Chứng minh rằng $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $A=B.|x-4|$.

Câu 39: Cho biểu thức $B=\dfrac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x\geq 0; x\neq 16$

a) Rút gọn B

b) Tìm giá trị của x để $B=1$

c) Tính giá trị của x sao cho B không vượt quá $\dfrac{3}{2}$

d) Tìm giá trị của B khi x thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{2x-1}=x$

e) Tìm x để giá trị của B là một số nguyên.

Câu 40: Cho biểu thức $P=1:\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$ với $x>0$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x=7-4\sqrt{3}$

c) Tìm x để $P=2\sqrt{x}-1$

d) Tìm m để có giá trị x thoả mãn $P=m$

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Câu 41: Cho biểu thức $P=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6}\right)$

với $x\ge 0; x\ne 4$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

c) Tìm $x\in Z$ để $P\in Z$

d) So sánh P với 1

e) Tìm các giá trị của x để $P=\sqrt{x}-3$.

Câu 42: Cho biểu thức: $A=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ với $x\ge 0$

a) Khi $x=6-2\sqrt{5}$ tính giá trị biểu thức A

b) Rút gọn biểu thức $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x\ge 0; x\ne 5$

c) Tìm x để biểu thức $M=B-A$ nhận giá trị nguyên.

Dạng 4: Câu tập chinh phục điểm 9,10

Câu 1: Cho $a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng $a^2-2a-2=0$.

Câu 2:

a) Cho $x=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{x^4-4x^3+x^2+6x+12}{x^2-2x+12}$.

b) Cho $x=1+\sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B=x^4-2x^4+x^3-3x^2+1942$.

c) Cho $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $P=x^5-4x^4+x^3-x^2-2x+2015$

Câu 3: Tính $C=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{8+10\sqrt{7-4\sqrt{3}}}}}$

Câu 4: Chứng minh:

a) $A=\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ là số nguyên.

b) $B=\sqrt[3]{1+\dfrac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên

Câu 5: Chứng minh rằng: $x=\sqrt[3]{a+\dfrac{a+1}{3}\sqrt{\dfrac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\dfrac{a+1}{3}\sqrt{\dfrac{8a-1}{3}}}$ với $a\ge\dfrac{1}{8}$ là số tự nhiên.

Câu 6: Tính $x+y$ biết $\left(x+\sqrt{x^2+2015}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2015}\right)=2015$.

Câu 7:

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}>2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Chứng minh: $2\sqrt{n}-2<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$ với mọi số nguyên dương $n\geq 2$.

Câu 8: Cho $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ và $B=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{35}}$.

Chứng minh rằng $B>A$.

Câu 9: Cho $A=\frac{x\left(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\right)}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x>4$

a) Rút gọn A.Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 10: Cho $a=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T=\frac{a^2-4a^3+a^2+6a+4}{a^2-2a+12}$.

Câu 11: Cho $a=\sqrt{2}+\sqrt{7-\sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}}+1$.

a) Chứng minh rằng: $a^4-14a^2+9=0$.

b) Giả sử $f(x)=x^5+2x^4-14x^3-28x^2+9x+19$. Tính $f(a)$.

Câu 12: Cho $a=\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

Giả sử có đa thức $f(x)=\left(x^3+3x+1940\right)^{2016}$. Hãy tính $f(a)$.

Câu 13: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n>3$, ta có

$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<\frac{65}{54}$.

Câu 14: Chứng minh rằng: $\frac{43}{44}<\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}}<\frac{44}{45}$

CHUYÊN ĐỀ 6: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC CÂU TOÁN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CĂN THỨC BẬC 2

□ Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.

□ Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a:

$$\begin{cases} a \ge 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

□ Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \le \sqrt{b} \Leftrightarrow a \le b$.

□ Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

+ $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \ge 0 \\ -A & A < 0 \end{cases}$

+ $\sqrt{A^2 B} = |A|\sqrt{B} = A\sqrt{B}$ với $A, B \ge 0$; $\sqrt{A^2 B} = |A|\sqrt{B} = -A\sqrt{B}$ với $A < 0; B \ge 0$

+ $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \sqrt{\dfrac{A.B}{B^2}} = \dfrac{\sqrt{A.B}}{|B|}$ với $AB \ge 0, B \ne 0$

+ $\dfrac{M}{\sqrt{A}} = \dfrac{M.\sqrt{A}}{A}$ với $A > 0$;(Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu)

+ $\dfrac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{M\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right)}{A - B}$ với $A, B \ge 0, A \ne B$ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)

2. CĂN THỨC BẬC 3.

□ Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$

□ Cho $a \in R; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

□ Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.

□ Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.

□ Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.

□ Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.

□ $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ với mọi $b \ne 0$.

□ $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$ với mọi a, b.

□ $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

□ $A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3 B}$.

□ $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{AB^2}}{B}$ với $B \ne 0$

□ $\dfrac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\dfrac{A}{B^3}}$

$\square$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B}}=\dfrac{\sqrt[3]{A^2}\mp\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}{A\pm B}$ với $A\neq\pm B$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU TẬP

Dạng 1: Rút gọn biểu thức không chứa biến

1. Phương pháp

1. $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases}A \text{ nÕu A}\geq 0\\ -A \text{ nÕu A}<0\end{cases}$
2. $\sqrt{AB}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$ (Với $A\geq 0;B\geq 0$)
3. $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A\geq 0;B>0$)
4. $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}$ (Với $B\geq 0$)
5. $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$ (Với $A\geq 0;B\geq 0$)
6. $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}$ (Với $A<0;B\geq 0$)
7. $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (Với $A\geq 0;B>0$)
8. $\dfrac{A}{\sqrt{B}}=\dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B>0$)
9. $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm B}=\dfrac{C\left(\sqrt{A}\pm B\right)}{A-B^2}$ (Với $A\geq 0;\text{A}\neq\text{B}^2$)
10. $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{C\left(\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\right)}{A-B}$ (Với $A\geq 0;B\geq 0;\text{A}\neq\text{B}$)
11. $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3=\sqrt[3]{A^3}=A$

2. Câu tập

Câu 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$M=\sqrt{45}+\sqrt{245}-\sqrt{80}$ $\quad N=5\sqrt{8}+\sqrt{50}-2\sqrt{18}$ $\quad P=\sqrt{125}-4\sqrt{45}+3\sqrt{20}-\sqrt{80}$

$A=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$ $\quad B=2\sqrt{3}+3\sqrt{27}-\sqrt{300}$ $\quad C=(2\sqrt{3}-5\sqrt{27}+4\sqrt{12}):\sqrt{3}$

Lời giải

$M=\sqrt{45}+\sqrt{245}-\sqrt{4^2.5}$
$=\sqrt{3^2.5}+\sqrt{7^2\cdot 5}-\sqrt{4^2.5}$
$=3\sqrt{5}+7\sqrt{5}-4\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

$N=5\sqrt{8}+\sqrt{50}-2\sqrt{18}$
$=5.2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-2.3\sqrt{2}$
$=10\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}$
$=(10+5-6)\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

$P=5\sqrt{5}-12\sqrt{5}+6\sqrt{5}-4\sqrt{5}$
$=-5\sqrt{5}$

$A=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$
$=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}$
$=\sqrt{3}$

$B=2\sqrt{3}+3\sqrt{27}-\sqrt{300}$
$=2\sqrt{3}+3\sqrt{3^2.3}-\sqrt{10^2.3}$
$=2\sqrt{3}+3.3.\sqrt{3}-10\sqrt{3}$
$=\sqrt{3}$

$C=(2\sqrt{3}-5\sqrt{27}+4\sqrt{12}):\sqrt{3}$
$=(2\sqrt{3}-5.3\sqrt{3}+4.2\sqrt{3}):\sqrt{3}$
$=-5\sqrt{3}:\sqrt{3}=-5$

Nhận xét: Đây là một dạng toán dễ. Học sinh có thể bấm máy tính để kiểm tra kết quả, đa phần áp dụng kiến thức đưa thừa số ra ngoài dấu căn để giải toán. $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}\ \ (B\ge 0)$

Câu 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$ b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2}-\sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$ c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ e) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$ f) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}=|3-2\sqrt{2}|+|3+2\sqrt{2}|=3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}=6$

Lưu ý: $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases}A\ \ nÕu\ \ A\ge 0\\ -A\ \ nÕu\ \ A<0\end{cases}$

Kết quả: *b)* $-4\sqrt{6}$ *c)* 1 *d)* 4 *e)* $2\sqrt{5}$ *f)* $2\sqrt{2}-4$

Câu 3: Rút gọn biểu thức

a) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ b) $B=\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

c) $C=\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ d) $D=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$

e) $E=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ f) $F=\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{20}+\frac{1}{2}\sqrt{8}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}+1$

b) $B=\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{\left(\sqrt{15}-1\right)^2}=\sqrt{15}-1$

c) $C=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-2$

d) $D=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{14+2\sqrt{13}}-\sqrt{14-2\sqrt{13}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\left(\sqrt{13}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{13}-1\right)^2}\right]=\sqrt{2}$

e) $E=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=|\sqrt{5}+1|-|\sqrt{5}-1|=\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1=2$

f) $F=\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{20}+\frac{1}{2}\sqrt{8}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}+2\sqrt{5}+\frac{1}{2}.2\sqrt{2}$

$=\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|+2\sqrt{5}+\sqrt{2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}=3\sqrt{5}$

Câu 4: Rút gọn biểu thức: (áp dụng các kiến thức tổng hợp)

$A=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $B=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$C=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ $D=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$E=\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$ $F=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}$

Lời giải

a) $A=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=2$

b) $B=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\dfrac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}+\dfrac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)$

$=\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{5}=2\sqrt{6}$

c) $C=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+...+\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)=9$

d) $D=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{1}+2-\sqrt{3}=4$

e) $E=\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}=\sqrt{\dfrac{\left(3\sqrt{3}-4\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1}}-\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3}+4\right)\left(5+2\sqrt{3}\right)}{5^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{22-11\sqrt{3}}{11}}-\sqrt{\dfrac{26+13\sqrt{3}}{13}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sqrt{3}-1\right|-\sqrt{3}-1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.(-2)=-\sqrt{2}$

f) $F=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-2\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+2\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2.\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{3\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{3(3-1)}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Kinh nghiệm: Đôi khi một số Câu toán rút gọn căn thức sẽ thực hiện dễ dàng hơn nếu chúng ta ***trục căn thức*** hoặc ***rút gọn được một hạng tử*** trong đề toán. Nếu quy đồng mẫu số thì việc thực hiện các phép tính rất phức tạp. Vì vậy trước khi làm Câu toán rút gọn, học sinh cần quan sát kỹ đề toán từ đó có định hướng giải đúng đắn để lời giải được ngắn gọn, chính xác.

Câu 5: Thu gọn các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{18}-2\sqrt{50}+3\sqrt{8}$

b) $B=\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$

c) $C=\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{2}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{18}-2\sqrt{50}+3\sqrt{8}=\sqrt{3^2.2}-2\sqrt{5^2.2}+3\sqrt{2^2.2}=3\sqrt{2}-10\sqrt{2}+6\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

b) $B=\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3^2.3}-6.\frac{\sqrt{3}}{3}+1-\sqrt{3}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$

c) $C=\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{2}=\frac{5\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}-\sqrt{7-2\sqrt{7}+1}+\sqrt{2}$

$=\sqrt{7}-\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}+\sqrt{2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}-\left|\sqrt{7}-1\right|+\sqrt{2}$

$=\sqrt{7}-\sqrt{2}-\left(\sqrt{7}-1\right)+\sqrt{2}=1$ (Vì $\sqrt{7}>1$)

Câu 6: Thực hiện phép tính

a) $\frac{1}{2}\sqrt{48}-2\sqrt{75}-\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}}+5\sqrt{1\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt[3]{8}$

c) $5\sqrt{2a}-\sqrt{50a}-2\sqrt{a^3}+4\sqrt{32a}$ với $a\geq 0$

Lời giải

a) $\frac{1}{2}\sqrt{48}-2\sqrt{75}-\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}}+5\sqrt{1\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2.3}-2\sqrt{5^2.3}-\frac{\sqrt{3}.\sqrt{11}}{\sqrt{11}}+5\sqrt{\frac{4}{3}}$

$=2\sqrt{3}-10\sqrt{3}-\sqrt{3}+5\sqrt{\frac{2^2}{3}}=-9\sqrt{3}+\frac{10\sqrt{3}}{3}=\frac{-17\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt[3]{8}=\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}-\sqrt[3]{2^3}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}-2$

$=\left|\sqrt{5}+1\right|-\left|\sqrt{5}-1\right|-2$

$= \sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1-2$ (Vì $\sqrt{5}>1$)

$=0$

c) $5\sqrt{2a}-\sqrt{50a}-2\sqrt{a^3}+4\sqrt{32a}=5\sqrt{2a}-\sqrt{5^2.2a}-2\sqrt{a^2.a}+4\sqrt{4^2.2a}$

$=5\sqrt{2a}-5\sqrt{2a}-2|a|\sqrt{a}+16\sqrt{2a}=-2a\sqrt{a}+16\sqrt{2a}$ (Vì $a\geq 0$)

Câu 7: Thu gọn các biểu thức sau: $A=\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{5}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Lời giải

$A=\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}+\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}-\dfrac{3\sqrt{5}\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$

$=3\sqrt{5}-5+\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}-\dfrac{9\sqrt{5}-15}{4}=3\sqrt{5}-5+\dfrac{5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4}$

$=3\sqrt{5}-5+5-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

Câu 8: Tính $B=21\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2-6\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2-15\sqrt{15}$.

Lời giải

$B=\dfrac{21}{2}\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-3\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}++\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2-15\sqrt{15}$

$=\dfrac{21}{2}\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1\right)^2-3\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}+1\right)^2-15\sqrt{15}=\dfrac{15}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-15\sqrt{15}=60$.

Dạng 2: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

1. Phương pháp

	BIỂU THỨC - ĐKXĐ:		CÂU		
1.	$\sqrt{A}$	ĐKXĐ: $A\geq 0$	Câu: $\sqrt{x-2018}$	ĐKXĐ:	$x\geq 2018$
2.	$\dfrac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B\neq 0$	Câu: $\dfrac{x+4}{x-7}$	ĐKXĐ:	$x\neq 7$
3.	$\dfrac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B>0$	Câu: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$x>3$
4.	$\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A\geq 0; B>0$	Câu: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$\begin{cases}x\geq 0\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow x>3$

5.	$\sqrt{\frac{A}{B}}$	ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A\le 0\\B<0\end{cases}\\\begin{cases}A\ge 0\\B>0\end{cases}\end{array}\right.$	Câu: $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$	ĐKXĐ:	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\le 0\\x+2<0\end{cases}\\\begin{cases}x+1\ge 0\\x+2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\x\ge 1\end{array}\right.$
6.	Cho a > 0 ta có: $x^2>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\sqrt{a}\\x<-\sqrt{a}\end{array}\right.$.		Câu: $x^2>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\sqrt{a}\\x<-\sqrt{a}\end{array}\right.$		
7.	Cho a > 0 ta có: $x^2<a \Leftrightarrow -\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$		Câu: $x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$		

2. Câu tập

Câu 1: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

a. $\sqrt{-5x}$

b. $\sqrt{4-3x}$

c. $\sqrt{-3x+2}$

Lời giải

a) $\sqrt{-5x}$ có nghĩa khi $-5x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 0$

b) $\sqrt{4-3x}$ có nghĩa khi $4-3x\ge 0 \Leftrightarrow x\le \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{-3x+2}$ có nghĩa khi $-3x+2\ge 0 \Leftrightarrow x\le \frac{2}{3}$

Câu 2: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

a. $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$

b. $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$

c. $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$

a) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ có nghĩa khi $\begin{cases}3-2x\ne 0\\\frac{1}{3-2x}\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne \frac{3}{2}\\1.(3-2x)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne \frac{3}{2}\\3-2x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 3-2x>0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$

b) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$ có nghĩa khi $\begin{cases}4.(2x+3)\ge 0\\2x+3\ne 0\end{cases} \Rightarrow 2x+3>0 \Leftrightarrow x>\frac{-3}{2}$

c) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$ có nghĩa khi $\begin{cases}-2(x+1)\ge 0\\x+1\ne 0\end{cases} \Rightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$

Câu 3: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

a. $\frac{x-1}{x+2}+\sqrt{x-2}$

b. $\frac{2x}{x-4}+x^2\sqrt{x-2}$

Lời giải

a) $\frac{x-1}{x+2}+\sqrt{x-2}$ có nghĩa khi $\begin{cases}x-2\ge 0\\ x+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x\ne -2\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$

b) $\frac{2x}{x-4}+x^2\sqrt{x-2}$ có nghĩa khi $\begin{cases}x-2\ge 0\\ x^2-4\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x\ne \pm 2\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

Câu 4: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau

a. $A=\frac{2x-1}{\sqrt{3-4x}}$

b. $B=\frac{3x-2}{x-1}+\frac{4}{\sqrt{5-7x}}$

c. $C=\frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4x+3}+\frac{1}{9-x^2}$

Lời giải

a) $A=\frac{2x-1}{\sqrt{3-4x}}$ có nghĩa khi $3-4x>0\Leftrightarrow x<\frac{3}{4}$

b) $B=\frac{3x-2}{x-1}+\frac{4}{\sqrt{5-7x}}$ có nghĩa khi $\begin{cases}x-1\ne 0\\ 5-7x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 1\\ x<\frac{5}{7}\end{cases}\Leftrightarrow x<\frac{5}{7}$

c) $C=\frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4x+3}+\frac{1}{9-x^2}$ có nghĩa khi $\begin{cases}1-x\ge 0\\ x^2-4x+3\ne 0\\ 9-x^2\end{cases}$

Ta có: $1-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 1; x^2-4x+3\ne 0\Leftrightarrow (x-2)^2-1\ne 0\Leftrightarrow (x-3)(x-1)\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 1\\ x\ne 3\end{cases}$

$9-x^2\ne 0\Leftrightarrow (3-x)(3+x)\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 3\\ x\ne -3\end{cases}$

Vậy $\begin{cases}x<1\\ x\ne -3\end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa biến và các câu hỏi phụ

1. Phương pháp

Bước 1: Tìm điều kiện xác định (nếu đề Câu chưa cho)

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích đa thức thành nhân tử

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung

Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn

2. Bài tập

Câu 1: Rút gọn $B=\left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x+3\sqrt{x}}\right)\ (x>0)$.

Lời giải

$B=\left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x+3\sqrt{x}}\right)(x>0)$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}:\left(\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}\right)=\left(\sqrt{x}+1\right).\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=1$$

Câu 2: Rút gọn biểu thức $P=\frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x}+x\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$, với $x>0, x\neq 2$ **7).**

Lời giải

Với điều kiện đã cho thì:

$$P=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}x\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}+\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=1.$$

Câu 3: Thu gọn các biểu thức sau: $A=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{3}{\sqrt{x}-3}\right).\frac{\sqrt{x}+3}{x+9}$ với $x\geq 0, x\neq 9$.

Lời giải

Với $x\geq 0$ và $x\neq 9$ ta có:

$$A=\left(\frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}+9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+3}{x+9}=\frac{1}{\sqrt{x}}-3.$$

Câu 4: Rút gọn các biểu thức:

a) $A=\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{x}+\frac{1}{4}}$ khi $x\geq 0$.

b) $B=\sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}}+\sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}$ khi $x\geq\frac{1}{4}$.

Lời giải

a) $A=\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{x}+\frac{1}{4}}=\sqrt{x}-\sqrt{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{x}-\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|$

+ Nếu $\sqrt{x}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{1}{2}$.

+ Nếu $\sqrt{x}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\leq x<\frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|=-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\Rightarrow A=2\sqrt{x}-\frac{1}{2}$

b)

$$B=\sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}}+\sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}=\sqrt{4x-1-2\sqrt{4x-1}+1}+\sqrt{4x-1+2\sqrt{4x-1}+1}$$

Hay $B=\sqrt{\left(\sqrt{4x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{4x-1}+1\right)^2}=\left|\sqrt{4x-1}-1\right|+\left|\sqrt{4x-1}+1\right|=\left|\sqrt{4x-1}-1\right|+\sqrt{4x-1}+1$

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1\ge 0\Leftrightarrow 4x-1\ge 1\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$ thì $\left|\sqrt{4x-1}-1\right|=\sqrt{4x-1}-1$ suy ra $B=2\sqrt{4x-1}$.

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1<0\Leftrightarrow 4x-1<1\Leftrightarrow \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}$ thì $\left|\sqrt{4x-1}-1\right|=-\sqrt{4x-1}+1$ suy ra $B=2$.

Câu 5: Cho các số thực dương a,b; $a\ne b$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\dfrac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}=0$.

Lời giải

Ta có: $Q=\dfrac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\dfrac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}$

$=\dfrac{\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}-\dfrac{3\sqrt{a}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=0$

$=\dfrac{a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}-\dfrac{3\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$

$=\dfrac{3a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}=0$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-9}+\dfrac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12}-\dfrac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}}$; $x>0, x\ne 9$.

Lời giải

$A=\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-9}+\dfrac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12}-\dfrac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{x-7\sqrt{x}+19}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+4\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+4}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{x}-8+x-7\sqrt{x}+19-x+8\sqrt{x}-15}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+4\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+4\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.

Câu 7: Cho biểu thức $P=\dfrac{3x+5\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$ (với $x\ge 0; x\ne 1$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x sao cho $P=\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Với $x\ge 0;x\ne 1$ ta có:

$$P=\frac{3x+5\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}=\frac{3x+5\sqrt{x}-4-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+3\right)^2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{3x+5\sqrt{x}-4-\left(x-1\right)-\left(x+6\sqrt{x}+9\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{x-\sqrt{x}-12}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{x-4\sqrt{x}+3\sqrt{x}-12}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)+3\left(\sqrt{x}-4\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}.$$

b) $P=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-8=\sqrt{x}-1\Leftrightarrow\sqrt{x}=7\Leftrightarrow x=49$ (thoả điều kiện)

Vậy khi $x=49$ thì $P=\frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho biểu thức $A=\left(\frac{4\sqrt{y}}{2+\sqrt{y}}+\frac{8y}{4-y}\right):\left(\frac{\sqrt{y}-1}{y-2\sqrt{y}}-\frac{2}{\sqrt{y}}\right)$, với $y>0;y\ne 4;y\ne 9$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm y để $A=-2$.

Lời giải

Ta có: $A=\frac{4\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\right)-8y}{\left(\sqrt{y}-2\right)\left(\sqrt{y}+2\right)}:\left(\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\right)}-\frac{2}{\sqrt{y}}\right)=\frac{-4y-8\sqrt{y}}{\left(\sqrt{y}-2\right)\left(\sqrt{y}+2\right)}:\frac{\sqrt{y}-1-2\left(\sqrt{y}-2\right)}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\right)}$

$=\frac{-4\sqrt{y}\left(\sqrt{y}+2\right)}{\left(\sqrt{y}-2\right)\left(\sqrt{y}+2\right)}:\frac{-\sqrt{y}+3}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\right)}=\frac{-4\sqrt{y}}{\left(\sqrt{y}-2\right)}.\frac{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\right)}{-\sqrt{y}+3}=\frac{4y}{\sqrt{y}-3}$ (với $y>0;y\ne 4;y\ne 9$)

1) Tìm y để $A=-2$

Ta có $A=-2$ $A=-2\Leftrightarrow\frac{4y}{\sqrt{y}-3}=-2\Leftrightarrow 4y=-2\left(\sqrt{y}-3\right)\Leftrightarrow 4y+2\sqrt{y}-6=0$

Đặt $\sqrt{y}=t>0$ ta có phương trình $4t^2+2t-6=0$

Ta có $a+b+c=0$ nên phương trình có hai nghiệm:

$t_1=1$ (thỏa mãn điều kiện)

$t_2=-6$ (không thỏa mãn điều kiện)

Với $t=1$, ta có $y=1$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $A=-2\Leftrightarrow y=1$.

Câu 9: Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\dfrac{10\sqrt{x}}{x-25}-\dfrac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x\ge 0, x\ne 25$.

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tính giá trị của A khi $x=9$.

Lời giải

$$A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\frac{10\sqrt{x}}{x-25}-\frac{5}{\sqrt{x}+5}=\frac{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+5\right)-10\sqrt{x}-5.\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$$

$$=\frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}=\frac{x-10\sqrt{x}+25}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-5\right)^2}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}.$$

Với $x=9$ ta có: $\sqrt{x}=3$. Vậy $A=\dfrac{3-5}{3+5}=\dfrac{-2}{8}=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 10: Cho $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}$, với $x\ge 0, x\ne 9$.

1) Rút gọn P.

2) Tìm giá trị của x để $P=\dfrac{1}{3}$.

3) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Lời giải

1) $P=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-3x-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$

2) $P=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\sqrt{x}+3=9\Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

3) Với $x\ge 0, P=\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}\le\dfrac{3}{0+3}=1\Rightarrow P_{\max}=1$ khi $x=0$ (TM).

Câu 11: Cho biểu thức $P=\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}.\dfrac{x+y}{x^2-y^2}, x\ne y$.

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tính giá trị của P khi $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ và $y=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Lời giải

1) $P=\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}.\dfrac{x+y}{\left(x-y\right)\left(x+y\right)}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

2) Với $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ và $y=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

Thay vào P ta được: $P=\dfrac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{3}}=-\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12: Cho biểu thức $A=\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{4-x}$ $\left(x\ge 0,x\ne 4\right)$. Rút gọn A và tìm x để $A=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

$A=\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{4-x}=\dfrac{4}{4-x}-\dfrac{2\sqrt{x}}{4-x}=\dfrac{2\left(2-\sqrt{x}\right)}{4-x}=\dfrac{2}{2+\sqrt{x}}$. Với $A=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2}{2+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=16$ (nhận).

Vậy $A=\dfrac{1}{3}$ khi $x=16$.

Câu 13: Cho biểu thức $C=\dfrac{a}{a-16}-\dfrac{2}{\sqrt{a}-4}-\dfrac{2}{\sqrt{a}+4}$.

1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C.

2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a=9-4\sqrt{5}$.

Lời giải

1) Biểu thức C có nghĩa khi: $\begin{cases}a\ge 0\\ a-16\ne 0\\ \sqrt{a}-4\ne 0\\ \sqrt{a}+4\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\ge 0\\ a\ne 16\\ a\ne 16\\ \forall a\ge 0\end{cases}\Rightarrow a\ge 0,a\ne 16$.

Rút gọn $C=\dfrac{a}{a-16}-\dfrac{2}{\sqrt{a}-4}-\dfrac{2}{\sqrt{a}+4}=\dfrac{a}{\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)}-\dfrac{2}{\sqrt{a}-4}-\dfrac{2}{\sqrt{a}+4}$

$=\dfrac{a-2\left(\sqrt{a}+4\right)-2\left(\sqrt{a}-4\right)}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}=\dfrac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}=\dfrac{a-4\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-4\right)}{\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}$.

2) Giá trị của C khi $a=9-4\sqrt{5}$.

Ta có: $a=a=9-4\sqrt{5}=4-4\sqrt{5}+5=\left(2-\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow\sqrt{a}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-2$

Vậy $C=\dfrac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+4\right)}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2+4}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=9-4\sqrt{5}$.

Câu 14: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ $\left(x>0,x\neq 4\right)$.

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải

1) Với $x>0,x\neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$A=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{2\sqrt{3}+3}{5x-10\sqrt{x}}$$

$$=\dfrac{2\left(2\sqrt{x}+1\right)+3\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(5\sqrt{x}-7\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}:\dfrac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{2\sqrt{x}+3}=\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

Vậy với $x>0,x\neq 4$ thì $A=\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Ta có $\sqrt{x}>0,\forall x>0,x\neq 4$ nên $A=\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}>0,x>0,x\neq 4$

$A=\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{2\left(2\sqrt{x}+1\right)}<\dfrac{5}{2},x>0,x\neq 4\Rightarrow 0<A<\dfrac{5}{2}$, kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A\in\left\{1,2\right\}$.

$A=1\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=2\sqrt{x}+1\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

$A=2\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=4\sqrt{x}+2\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy với $x=\dfrac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

Câu 15: Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0$ và $x\neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm các giá trị của x để $2P=2\sqrt{x}+5$.

Lời giải

$$P=\left(\dfrac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\left(\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

b) Theo câu a) $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow 2P=2\sqrt{x}+5\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+5\ \ 2\sqrt{x}+2=2x+5\sqrt{x}\Leftrightarrow 2x+3\sqrt{x}-2=0$ và $x>0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}.$

Câu 16: Cho biểu thức $P=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa

b) Rút gọn P

c) Tính giá trị của P khi $a=2\sqrt{3};b=\sqrt{3}$

Lời giải

a) Để P có nghĩa thì $\begin{cases}a\ge 0\\ b\ge 0\\ ab\ge 0\\ \sqrt{a}+\sqrt{b}\ne 0\\ \sqrt{ab}\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ b>0\end{cases}$

Vậy P có nghĩa khi $a>0$ và $b>0$

b) Với $a>0$ và $b>0$ ta có: $P=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}=a-b$

Vậy $P=a-b\left(a>0;b>0\right)$

c) Ta có $\begin{cases}a=2\sqrt{3}\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện) thay vào biêu thức P ta được $P=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}.$

Vậy $P=\sqrt{3}$ khi $a=2\sqrt{3};b=\sqrt{3}$.

Câu 17: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A khi $\left|a-1\right|=1$

Lời giải

a) Điều kiện để A có nghĩa là: $a>0;a\ne 1$

$A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=\left(\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}\right).\left(\dfrac{-4a}{a-1}\right)=-2\sqrt{a}$

Vậy $A=-2\sqrt{a}\left(a>0;a\ne 1\right)$

b) Ta có $\left|a-1\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-1=1\\ a-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\left(tm\right)\\ a=0\left(loai\right)\end{array}\right.$

Thay $a=2$ vào biểu thức A ta được $A=-2\sqrt{2}.$

Câu 18: Cho $A=\left(1-\dfrac{a-3\sqrt{a}}{a-9}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3}+\dfrac{\sqrt{a}-3}{2-\sqrt{a}}-\dfrac{9-a}{a+\sqrt{a}-6}\right)$, với $a\ge 0;a\ne 4;a\ne 9$

a) Rút gọn A

b) Tìm a để $A+\left|A\right|=0$.

Lời giải

a) Ta có $1-\dfrac{a-3\sqrt{a}}{a-9}=1-\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-3\right)}{\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+3\right)}=1-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}=\dfrac{3}{\sqrt{a}+3}$

$\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3}+\dfrac{\sqrt{a}-3}{2-\sqrt{a}}-\dfrac{9-a}{a+\sqrt{a}-6}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-2\right)^2-\left(\sqrt{a}+3\right)\left(\sqrt{a}-3\right)-9+a}{\left(\sqrt{a}+3\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3}$

$\Rightarrow A=\dfrac{3}{\sqrt{a}+3}.\dfrac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2}=\dfrac{3}{\sqrt{a}-2}$

b) Ta có $A+\left|A\right|=0\Leftrightarrow\left|A\right|=-A\Leftrightarrow A\le 0\Leftrightarrow\dfrac{3}{\sqrt{a}-2}<0\Leftrightarrow\sqrt{a}-2<0\Leftrightarrow\sqrt{a}<2\Leftrightarrow 0\le a<4$

Vậy $0\le a<4$ là giá trị cần tìm.

Câu 19: Cho ba biểu thức $M=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{3+\left(\sqrt{x}+1\right)^2};N=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3-\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{\left(x-4\right)\left(3x+1\right)};P=\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

a) Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $M=x-4$

b) Trong trường hợp các biểu thức M,N và P xác định, rút gọn biểu thức $Q=MN+P$

Lời giải

a) Ta có $M=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{3+\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3-2^3}{3+\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{3+x+2\sqrt{x}+1}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{x+2\sqrt{x}+4}=\sqrt{x}-2$

Khi đó $M=x-4\Leftrightarrow\sqrt{x}-2=x-4=\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2\Leftrightarrow\sqrt{x}-2=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-2=0\\\sqrt{x}+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn)

Vậy $x=4$ thì $M=x-4$

b) Điều kiện $x\ge 0;x\ne 4$

Ta có $M=\sqrt{x}-2;P=\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

$N=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3-\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{\left(x-4\right)\left(3x+1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1\right)\left[\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)^2\right]}{\left(x-4\right)\left(3x+1\right)}$

$=\dfrac{2\left(x+2\sqrt{x}+1+x-1+x-2\sqrt{x}+1\right)}{\left(x-4\right)\left(3x+1\right)}=\dfrac{2\left(3x+1\right)}{\left(x-4\right)\left(3x+1\right)}=\dfrac{2}{x-4}$

$\Rightarrow Q = M.N + P = \left(\sqrt{x}-2\right).\dfrac{2}{x-4} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{2}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 1$

Vậy $Q = 1$.

Câu 20: Cho biểu thức $P = \dfrac{x+4\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh với mọi $m < 0; m \neq 1$ thì phương trình $P = 3 + m\sqrt{x}$ luôn có một nghiệm duy nhất

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow P = \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$

b) Ta có $P = 3 + m\sqrt{x}\left(x \geq 0; x \neq 1\right) \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} = 3 + m\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}+5 = 3\sqrt{x}+6+mx+2m\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow mx + \left(2m+2\right)\sqrt{x} + 1 = 0$

Đặt $\sqrt{x} = t$ (vì $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow t \geq 0; t \neq 1$).

Ta có phương trình $mt^2 + \left(2m+2\right)t + 1 = 0 (*)$

Khi $m < 0$, ta có phương trình (*) là phương trình bậc nhất hai ẩn t, ta có:

$\Delta' = \left(m+1\right)^2 - m = m^2 + m + 1 = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0 \Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2. Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{2m+2}{m} \\ t_1 t_2 = \dfrac{1}{m} \end{cases}$

Xét $f\left(t\right) = mt^2 + \left(2m+2\right)t + 1 \Rightarrow f\left(1\right) = m.1^2 + \left(2m+2\right).1 + 1 = 3m+3$

Nhận thấy, khi $m < 0; m \neq -1$, ta có $\begin{cases} f\left(1\right) \neq 0 \\ t_1 t_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu và nghiệm dương khác 1

Vậy với mọi $m < 0; m \neq -1$ thì phương trình $P = 3 + m\sqrt{x}$ luôn có một nghiệm duy nhất.

Câu 21: Cho biểu thức: $B = \left(\dfrac{1}{3-\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3+\sqrt{x}}\right).\dfrac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, (với $x > 0; x \neq 9$).

Rút gọn biểu thức và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B > \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $B = \left(\dfrac{1}{3-\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3+\sqrt{x}}\right).\dfrac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{3+\sqrt{x}-\left(3-\sqrt{x}\right)}{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}.\dfrac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{2\sqrt{x}}{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}.\dfrac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{2}{3-\sqrt{x}}.$

$$B>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{3-\sqrt{x}}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{3-\sqrt{x}}-\frac{1}{2}>0\Leftrightarrow\frac{4-\left(3-\sqrt{x}\right)}{2\left(3-\sqrt{x}\right)}>0\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{x}}{2\left(3-\sqrt{x}\right)}>0;(*)$$

Vì $1+\sqrt{x}>0$ nên $(*)\Leftrightarrow 3-\sqrt{x}>0\Leftrightarrow\sqrt{x}<3\Leftrightarrow 0<x<9$

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Câu 22: Cho hai biểu thức $T=\left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}\right):\frac{a+1}{a-1}$ với $a>0;a\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức T

b) Tìm các giá trị nguyên của a để T nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) Ta có

$$T=\left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}\right):\frac{a+1}{a-1}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3-1}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{a}}-\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3+1}{\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}}=\frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}-\frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}=2$$

$$\Rightarrow T=2:\frac{a+1}{a-1}=\frac{2(a-1)}{a+1}$$

b) Ta có $\Rightarrow T=\frac{2(a-1)}{a+1}=2-\frac{4}{a+1}$. Do đó $T\in Z$, khi $a+1$ là ước của 4

Vì $a>0,a\neq 1$ nên ta có $a+1=4\Rightarrow a=3$.

Vậy $a=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 23: Cho biểu thức $A=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x\geq 0$, $x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x là số chính phương để $2019A$ là số nguyên.

Lời giải

$$a)\ A=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2-3\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$=\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{2x-2\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$b)\ 2019A=\frac{2019\left(2\sqrt{x}+2-3\right)}{\sqrt{x}+1}=4038-\frac{6057}{\sqrt{x}+1}$$

$2019A$ là số nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}+1$ là ước nguyên dương của 6057 gồm: $1;3;9;673,2019;6057$.

+) $\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow x=0$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x}+1=3\Leftrightarrow x=4$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x}+1=9 \Leftrightarrow x=64$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x}+1=673 \Leftrightarrow x=451584$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x}+1=2019 \Leftrightarrow x=4072324$, thỏa mãn.

+) $\sqrt{x}+1=6057 \Leftrightarrow x=36675136$, thỏa mãn.

Câu 24: Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+3}{x-9}\right):\left(\dfrac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}-1\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm GTNN của P

Lời giải

a) Điều kiện $x\ge 0;x\ne 9 \Rightarrow P=\dfrac{-3}{\sqrt{x}+3}$

b) Với $x\ge 0;x\ne 9 \Rightarrow \sqrt{x}+3\ge 3 \Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+3}\le 1 \Rightarrow P=\dfrac{-3}{\sqrt{x}+3}\ge -1$, dấu "=" xảy ra khi $x=0$

Vậy $P_{min}=-1$ khi $x=0$.

Câu 25: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)\left(x\ge 0;x\ne 4;x\ne 9\right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Với giá trị nào của x thì $\dfrac{1}{A}$ đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

a) Với $x\ge 0;x\ne 4;x\ne 9 \Rightarrow A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

b) Ta có $\dfrac{1}{A}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)-3}{\sqrt{x}+1}=1-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$

Với $x\ge 0;x\ne 4;x\ne 9 \Rightarrow \sqrt{x}+1\ge 1 \Rightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{3}+1}\ge -3 \Rightarrow \dfrac{1}{A}=1-\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}\ge -2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn). Khi đó $\left(\dfrac{1}{A}\right)_{min}=-2 \Leftrightarrow x=0$

Câu 26: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

a) Điều kiện $0\le x\ne 1 \Rightarrow A=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}$

b) Ta có $A=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}$, với $0\le x\ne 1 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1\ge 1 \Rightarrow A=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}\le 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0 \Rightarrow A_{max}=2 \Leftrightarrow x=0$.

Câu 27: Cho biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{3}{x\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

a) Điều kiện $x\ge 0\Rightarrow P=\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

b) Ta có

$$\begin{cases} x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\forall x\ge 0 \\ \sqrt{x}\ge 0,\forall x\ge 0 \end{cases}\Rightarrow P=\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\ge 0,\forall x\ge 0\Rightarrow P_{min}=0\Leftrightarrow x=0.$$

Câu 28: Cho biểu thức $P=\dfrac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1}-\dfrac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

a) Điều kiện $a\ge 0\Rightarrow P=a-\sqrt{a}$

b) Ta có $P=a-\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. Vì $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{2}\right)^2\ge 0$ với mọi $a>0\Rightarrow P\ge\dfrac{-1}{4}$, dấu "=" xảy ra khi $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy $P_{min}=\dfrac{-1}{4}$.

Câu 29: Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{P}$

Lời giải

a) Điều kiện $x>0;x\ne 1\Rightarrow P=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$

b) Với $x>0,$ nên $\sqrt{P}$ có nghĩa khi $P>0\Rightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}>0\Rightarrow x>1$

Do $P>0$ với mọi $x>1\Rightarrow\sqrt{P}_{min}\Leftrightarrow P_{min}$

Xét $\dfrac{1}{P}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}\Rightarrow P\ge 4,$ dấu "=" xảy ra khi $x=4$

$\Rightarrow P_{min}=4\Rightarrow\sqrt{P}_{min}=2$ khi $x=4$.

Câu 30: Cho biểu thức $A=(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}).\dfrac{x^2-2x+1}{2}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để $A\ge 0$

c) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Lời giải

a) Điều kiện $x \ge 0; x \ne 1 \Rightarrow A = -x + \sqrt{x}$

b) Ta có

$$A \ge 0 \Leftrightarrow -x + \sqrt{x} \ge 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \ge 0; x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x < 1$$

c) $A = -x + \sqrt{x} = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4} \forall x \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow GTLNA = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Câu 31: Cho biểu thức $Q = \frac{x + 2\sqrt{x} - 10}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \left(x \ge 0; x \ne 9\right)$

1. Rút gọn biểu thức Q

2. Tính giá trị của Q khi $x = 16$

3. Tìm giá trị của x khi $Q = \frac{1}{3}$

4. Tìm giá trị của x sao cho $Q > \frac{1}{9}$

5. Tìm giá trị lớn nhất của Q.

Lời giải

1. Với $x \ge 0; x \ne 9$ thì

$$Q = \frac{x + 2\sqrt{x} - 10}{x - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x + 2\sqrt{x} - 10}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 3\right) + 2\left(\sqrt{x} - 3\right)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{x} - 10}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{x} - 10 - \left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right) - \left(\sqrt{x} - 3\right)}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{x} - 10 - x + 4 - \sqrt{x} + 3}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 3}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

Vậy với $x \ge 0; x \ne 9$ thì $Q = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$

2. Thay $x = 16$ (thỏa mãn $x \ge 0; x \ne 9$) vào Q ta được:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{16} + 2} = \frac{1}{4 + 2} = \frac{1}{6}$$

Vậy khi $x=16$ thì $Q=\dfrac{1}{6}$

3. $Q=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3=\sqrt{x}+2\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn $x\ge 0;x\ne 9$)

Vậy với $x=1$ thì $Q=\dfrac{1}{3}$

4. $Q>\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}>\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{1}{9}>0\Leftrightarrow\dfrac{9-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}>0\Leftrightarrow\dfrac{7-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}>0\ (1)$

Vì $\sqrt{x}\ge 0$ với mọi $x\ge 0;x\ne 9$ nên $\sqrt{x}+2>0$ với mọi $x\ge 0;x\ne 9$

$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow 7-\sqrt{x}>0\Leftrightarrow\sqrt{x}<7\Leftrightarrow x<49$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 0;x\ne 9$ nên $\begin{cases}0\le x<49\\ x\ne 9\end{cases}$

Vậy với $\begin{cases}0\le x<49\\ x\ne 9\end{cases}$ thì $Q>\dfrac{1}{9}$

5. Vì $\sqrt{x}\ge 0$ với mọi $x\ge 0;x\ne 9$ nên $\sqrt{x}+2\ge 2$ với mọi $x\ge 0;x\ne 9$

$\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\le\dfrac{1}{2}$ với mọi $x\ge 0;x\ne 9$

Vậy Q đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $x=0$ (thỏa mãn $x\ge 0;x\ne 9$)

Câu 32: Cho biểu thức $P=\dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{3\left(3\sqrt{x}-5\right)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị của P, biết $x=4+2\sqrt{3}$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ge 0;\ x\ne 9$.

a) $P=\dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3\left(3\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$=\dfrac{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)+\left(2\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+3\left(3\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$=\dfrac{3x-9\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6+2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3-9\sqrt{x}+15}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$$=\frac{5x-17\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{5x-15\sqrt{x}-2\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(5\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$$

b) Ta có $x=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{3}+1$;

Do đó: $P=\frac{5\left(\sqrt{3}+1\right)-2}{\left(\sqrt{3}+1\right)+1}=\frac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}=\frac{\left(5\sqrt{3}+3\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=7\sqrt{3}-9$.

c) Ta có $P=\frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\frac{5\sqrt{x}+5-7}{\sqrt{x}+1}$

$P=5-\frac{7}{\sqrt{x}+1}$.

Vì $\frac{7}{\sqrt{x}+1}>0$ nên P có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow\frac{7}{\sqrt{x}+1}$ lớn nhất

$\Leftrightarrow\sqrt{x}+1$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=0$.

Khi đó min $P=5-7=-2$.

Câu 33: Cho biểu thức $Q=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right):\frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$

a) Rút gọn Q;

b) Tìm x để $Q=2$;

c) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Lời giải

ĐKXĐ: $x>0;\ x\neq4;\ x\neq9$.

a) $Q=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right):\frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)-2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(5\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}:\frac{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2-2x+4\sqrt{x}-5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{-x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$$

b) $Q = 2 \Leftrightarrow = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = 2\sqrt{x}-6$

$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64$.(Thỏa mãn ĐKXĐ).

c) $Q < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0$ (vì $\sqrt{x}+2 > 0$) $\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $Q < 0$ khi $0 < x < 9$ và $x \neq 4$.

Câu 34: Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9}$ với $a \geq 0; a \neq 9$

a) Rút gọn B

b) Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) Với $a \geq 0; a \neq 9$ ta có:

$$B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{3(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$= \frac{a+3\sqrt{a}-3\sqrt{a}+9-a+2}{\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \frac{11}{a-9}$$

b) Để $B \in Z \Leftrightarrow \frac{11}{a-9} \in Z \Leftrightarrow 11 \vdots (a-9) \Leftrightarrow (a-9) \in$ Ư(11)

Ư$(11) = \{1;11;-1;-11\}$. Khi đó ta có bảng giá trị

$a-9$	-11	-1	1	11
a	-2	8	10	20
	Không thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $a \in \{8;10;20\}$ thì $B \in Z$

Câu 35: Cho biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

a) $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$.

b) Cách 1: Với $x>0, x\neq 1 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1>\sqrt{x}+1>1$.

Vậy $0<A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}<\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}<2$.

Vì A nguyên nên A = 1 $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow x=1$ (Không thỏa mãn).

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giả trị A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \text{Ax+(A}-1)\sqrt{x}+A-2=0$

Trường hợp 1: $A=0 \Rightarrow \sqrt{x}=-2 \Rightarrow x\in\varnothing$

Trường hợp 2: $A\neq 0 \Rightarrow \Delta=(\text{A}-1)^2-4A(A-2)=-3A^2+6A+1\geq 0 \Leftrightarrow A^2-2A-\dfrac{1}{3}\leq 0$

$\Leftrightarrow A^2-2A+1\leq\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow(\text{A}-1)^2\leq\dfrac{4}{3}\Rightarrow A\in\{1;2\}\, do A\in Z, A>0$

Với A = 1 => x = 1 (loại)

Với A = 2 $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}=2 \Leftrightarrow x=0$ (loại).

Câu 36: Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x\geq 0; x\neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P=\dfrac{7}{12}$

c) Tìm x để $P>\dfrac{1}{2}$

d) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $\dfrac{1}{P}$ nhận giá trị nguyên.

e) Tìm tất cả các giá trị hữu tỷ của của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x\geq 0; x\neq 4$ thì $P=\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-2\left(\sqrt{x}+3\right)}$

$$=\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-2\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2-9+x}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{9-x+\left(\sqrt{x}-2\right)^2-9+x}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy với $x\ge 0; x\ne 4$ thì $P=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$

b) $P=\frac{7}{12}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}=\frac{7}{12}\Leftrightarrow 12\sqrt{x}-24=7\sqrt{x}+21\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=45$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=9\Leftrightarrow x=81$ (thỏa mãn $x\ge 0; x\ne 4$)

Vậy với $x=81$ thì $P=\frac{7}{12}$

c) $P>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}-\frac{1}{2}>0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}-4-\sqrt{x}-3}{2\left(\sqrt{x}+3\right)}>0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+3}>0\ (3)$

Vì $\sqrt{x}\ge 0$ với mọi $x\ge 0; x\ne 4$ nên $\sqrt{x}+3>0$ với mọi $x\ge 0; x\ne 4$

Nên $(3)\Leftrightarrow\sqrt{x}-7>0\Leftrightarrow\sqrt{x}>7\Leftrightarrow x>49$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 0; x\ne 4$.

Vậy $x>49$ thì $P>\frac{1}{2}$

d) Ta có $\frac{1}{P}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x}-2}=1+\frac{5}{\sqrt{x}-2}$

$\frac{1}{P}$ nguyên $\Leftrightarrow\frac{5}{\sqrt{x}-2}$ nguyên $\Leftrightarrow 5\vdots\left(\sqrt{x}-2\right)\Leftrightarrow\sqrt{x}-2$ là Ư $(5)=\{\pm 1;\pm 5\}$

Lập bảng:

$\sqrt{x}-2$	-1	1	-5	5
$\sqrt{x}$	1	3	-3	7
x	1	9		49
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Loại	Thỏa mãn

Vậy $x\in\{1;9;49\}$ thì $\frac{1}{P}$ nguyên.

e) Ta có $P=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}+3-2}{\sqrt{x}+3}=1-\frac{2}{\sqrt{x}+3}$

Vì $\frac{2}{\sqrt{x}+3}>0$ nên $P<1$ với mọi $x\ge 0;x\ne 4$

Mà $\sqrt{x}+3\ge 3\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+3}\le \frac{2}{3}\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{x}+3}\ge -\frac{2}{3}\Rightarrow 1-\frac{2}{\sqrt{x}+3}\ge 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Do đó $\frac{1}{3}\le P<1$. Vậy không có giá trị hữu tỷ nào của x để P nguyên.

Câu 37: Cho biểu thức $P=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$, (với $x>0$ và $x\ne 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x=\sqrt{2022+4\sqrt{2018}}-\sqrt{2022-4\sqrt{2018}}$.

Lời giải

a) Ta có $1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

Và $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\frac{x-1+1-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ nên $P=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Có $x=\sqrt{2022+4\sqrt{2018}}-\sqrt{2022-4\sqrt{2018}}=\sqrt{\left(\sqrt{2018}+2\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2018}-2\right)^2}$

$=\left|\sqrt{2018}+2\right|-\left|\sqrt{2018}-2\right|=\sqrt{2018}+2-\sqrt{2018}+2=4$ thỏa mãn điều kiện $x>0$ và $x\ne 1$.

+ Vậy giá trị của biểu thức P tại $x=4$ là: $\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$.

Câu 38: Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\frac{3}{\sqrt{x}+5}+\frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x\ge 0,x\ne 25$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.

b) Chứng minh rằng $B=\frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $A=B.\left|x-4\right|$.

Lời giải

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.

Khi $x=9$ ta có $A=\frac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-5}=\frac{3+2}{3-5}=-\frac{5}{2}$

b) Chứng minh rằng $B=\frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

Với $x \ge 0, x \ne 25$ thì $B = \dfrac{3}{\sqrt{x}+5} + \dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-15} = \dfrac{3}{\sqrt{x}+5} + \dfrac{20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}$

$= \dfrac{3\left(\sqrt{x}-5\right)+20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)} = \dfrac{3\sqrt{x}-15+20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)} = \dfrac{\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$ *(đpcm)*

c) Tìm tất cả các giá trị của để $A = B.\left|x-4\right|$.

Với $x \ge 0, x \ne 25$ Ta có: $A = B.\left|x-4\right|$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-5}.\left|x-4\right| \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = \left|x-4\right|$ (*)

Nếu $x \ge 4, x \ne 25$ thì (*) trở thành: $\sqrt{x}+2 = x-4$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right) = 0$

Do $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

Nếu $0 \le x < 4$ thì (*) trở thành: $\sqrt{x}+2 = 4-x$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right) = 0$

Do $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy có hai giá trị $x = 1$ và $x = 9$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 39: Cho biểu thức $B = \dfrac{2\left(x+4\right)}{x-3\sqrt{x}-4} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x \ge 0; x \ne 16$

a) Rút gọn **B.**

b) Tìm giá trị của x để $B = 1$

c) Tính giá trị của x sao cho B không vượt quá $\dfrac{3}{2}$

d) Tìm giá trị của B khi x thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{2x-1} = x$

e) Tìm x để giá trị của B là một số nguyên.

Lời giải

a) Với $x \ge 0; x \ne 16$ thì $B = \dfrac{2\left(x+4\right)}{x+\sqrt{x}-4\sqrt{x}-4} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{8}{\sqrt{x}-4}$

$= \dfrac{2\left(x+4\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-4\left(\sqrt{x}+1\right)} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{8}{\sqrt{x}-4} = \dfrac{2\left(x+4\right)}{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{8}{\sqrt{x}-4}$

$=\dfrac{2x+8+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)-8\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{2x+8+x-4\sqrt{x}-8\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{3x-12\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$

$\dfrac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)}{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ Vậy với $x\ge 0;x\ne 16$ thì $B=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

b) $B=1\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=\sqrt{x}+1\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

(thỏa mãn $x\ge 0;x\ne 16$). Vậy $x=\dfrac{1}{4}$ thì $B=1$

c) B không vượt quá $\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow B\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{3}{2}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{6\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\le 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}-3}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\le 0$ (*)

Vì $\sqrt{x}\ge 0$ với mọi $x\ge 0;x\ne 16$ nên $\sqrt{x}+1>0$ với mọi $x\ge 0;x\ne 16$

Suy ra (*) $\Leftrightarrow\sqrt{x}-1\le 0\Leftrightarrow\sqrt{x}\le 1\Leftrightarrow x\le 1$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 0;x\ne 16$

Vậy $0\le x\le 1$ thì B không vượt quá $\dfrac{3}{2}$

d) Ta có $\sqrt{2x-1}=x$ $(x\ge 0;x\ne 16)\Leftrightarrow 2x-1=x^2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (

thỏa mãn $x\ge 0;x\ne 16$) $\Rightarrow B=\dfrac{3\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{3}{2}$ Vậy $\sqrt{2x-1}=x$ thì $B=\dfrac{3}{2}$

e) $B=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{3\sqrt{x}+3-3}{\sqrt{x}+1}=3-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}<3$ (vì $\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}>0$ với $x\ge 0;x\ne 16$)

Vì $\sqrt{x}\ge 0$ với mọi $x\ge 0;x\ne 16$ nên $\sqrt{x}+1\ge 1$ với mọi $x\ge 0;x\ne 16$

$\Rightarrow\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\le 3\Rightarrow-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\ge -3\Rightarrow 3-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\ge 0$

Suy ra $0\le B<3$ Mà $B\in Z$ nên $B\in\left\{0;1;2\right\}$

TH1: $B=0\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}=0\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

TH2: $B=1\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}=1\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=\sqrt{x}+3\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn)

TH3: $B=2\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}=2\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=2\sqrt{x}+6\Leftrightarrow\sqrt{x}=6\Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn)

Vậy $x\in\left\{0;\dfrac{9}{4};36\right\}$ thì $B\in Z$

Câu 40: Cho biểu thức $P=1:\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$ với $x>0$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x=7-4\sqrt{3}$

c) Tìm x để $P=2\sqrt{x}-1$

d) Tìm m để có giá trị x thoả mãn $P=m$

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

a) Với $x\ge 0$ thì $P=1:\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$

$=1:\left[\dfrac{x+2\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right]$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{x+2\sqrt{x}-2-x+1+x-\sqrt{x}+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{x+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Vậy với $x>0$ thì $P=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Với $x=7-4\sqrt{3}=4-2.2.\sqrt{3}+3=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$ thỏa mãn điều kiện $x>0$

$\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}$ (vì $2>\sqrt{3}$)

$\Rightarrow P=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{7-4\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=3$

Vậy với $x=7-4\sqrt{3}$ thì $P=3$

c) $P=2\sqrt{x}-1\Leftrightarrow\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-1\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1=2x-\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn $x>0$)

Vậy với $x=1$ thì $P=2\sqrt{x}-1$

d) $P=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=m\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1=m\sqrt{x}\Leftrightarrow x-\left(m+1\right)\sqrt{x}+1=0\,(1)$

Vì $1\ne 0$ nên (1) là phương trình bậc hai.

Đặt $t=\sqrt{x}\left(t>0\right)$

(1) trở thành $t^2-\left(m+1\right)t+1=0\,(2)$

Ta có $\Delta=\left(m+1\right)^2-4=m^2+2m-3=m^2-m+3m-3$

$=m\left(m-1\right)+3\left(m-1\right)=\left(m-1\right)\left(m+3\right)$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm dương

TH1: Phương trình (2) có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)(m+3) \geq 0 \\ S = m+1 > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

TH2: Phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow S = 1 < 0$ (vô lý) $\Rightarrow$ Loại

TH3: Phương trình (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0

Với $t = 0$ thay vào (2) ta được $0^2 - (m+1).0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ (vô lý) $\Rightarrow$ Loại

Vậy $m \geq 1$ là giá trị cần tìm.

e) $P = \dfrac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1$

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0; \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $\sqrt{x}; \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn $x > 0$)

$\Rightarrow P \geq 2 - 1 = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 1$ khi $x = 1$

Câu 41: Cho biểu thức $P = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6}\right)$

với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

c) Tìm $x \in Z$ để $P \in Z$

d) So sánh P với 1

e) Tìm các giá trị của x để $P = \sqrt{x} - 3$.

Lời giải

a) Với $x \ge 0; x \ne 4$

$$P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-2\left(\sqrt{x}-3\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-4-x+9+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} . \frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}+3}$$

$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Vậy với $x \ge 0; x \ne 4$ thì $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

b) Với $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-2.\sqrt{5}.1+1}{4} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}$ thỏa mãn $x \ge 0; x \ne 4$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}} = \frac{\left|\sqrt{5}-1\right|}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (vì } \sqrt{5} > 1)$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-2}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1} = \frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}+1} = \frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}-5-5+\sqrt{5}}{4} = \frac{6\sqrt{5}-10}{4} = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}$$

c) $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

$P \in Z \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \in Z \Leftrightarrow 3 \vdots \left(\sqrt{x}+1\right) \Leftrightarrow \sqrt{x}+1$ là Ư(3)

Ư(3)=$\{\pm 1; \pm 3\}$

Mà $\sqrt{x} \ge 0 \forall x \ge 0; x \ne 4 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 0 \forall x \ge 0; x \ne 4$ nên:

TH1: $\sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

TH2: $\sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

Vậy $x \in \{0\}$ thì $P \in Z$

d) Xét hiệu $P-1=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}-1=\dfrac{\sqrt{x}-2-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}<0 \ \forall x \geq 0; x \neq 4$

Suy ra $P<1$

e) $P=\sqrt{x}-3 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-3 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2=\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2=x-3\sqrt{x}+\sqrt{x}-3 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}-1=0 \ (2)$

Đặt $\sqrt{x}=t \ \left(t \geq 0; t \neq 2\right)$

(2) trở thành: $t^2-3t-1=0$

$\Delta=\left(-3\ \right)^2-4.1.(-1)=13$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \ (TM) \\ t=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \ (loai) \end{array}\right. \Rightarrow x=\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2=\dfrac{22+6\sqrt{13}}{4}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x=\dfrac{22+6\sqrt{13}}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 42: Cho biểu thức: $A=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$

a) Khi $x=6-2\sqrt{5}$ tính giá trị biểu thức A

b) Rút gọn biểu thức $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0; x \neq 5$

c) Tìm x để biểu thức $M=B-A$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x=6-2\sqrt{5}$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$

Ta có $x=6-2\sqrt{5}=5-2\sqrt{5}+1=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}-1$ (vì $\sqrt{5}>1$)

$\Rightarrow A=\dfrac{1-\left(\sqrt{5}-1\right)}{1+\sqrt{5}-1}=\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}-5}{5}$

b) Với $x \geq 0; x \neq 5$ thì

$B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}=\left[\dfrac{15-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right]:\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$

$=\dfrac{15-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-10}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}:\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}=\dfrac{5+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}.\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

Vậy với $x \ge 0; x \ne 5$ thì $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

c) Ta có $M = B - A = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{-1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} = -1 + \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$

Vì $\sqrt{x} \ge 0 \forall x \ge 0; x \ne 5 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \ge 1 \forall x \ge 0; x \ne 5$

$\Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} \le 3 \Rightarrow M = -1 + \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} \le -1+3 = 2$

Lại có $\dfrac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \Rightarrow -1 + \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} > -1$

$\Rightarrow -1 < M \le 2$. Mà $M \in Z \Rightarrow M \in \{0;1;2\}$

TH1: $M = 0 \Rightarrow \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \ (TM)$

TH2: $M = 1 \Rightarrow \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4} \ (TM)$

TH3: $M = 2 \Rightarrow \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ (TM)$

Vậy $x \in \left\{0; 4; \dfrac{1}{4}\right\}$ thì $M \in Z$

Dạng 4: Câu tập chinh phục điểm 9,10

Câu 43: Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Giải

$a^2 = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + 3 - \sqrt{5+2\sqrt{3}} + 2\sqrt{9-\left(5+2\sqrt{3}\right)} = 6 + 2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$= 6 + 2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = 6 + 2\left(\sqrt{3}-1\right) = 4 + 2\sqrt{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$. Do $a > 0$ nên $a = \sqrt{3}+1$. Do đó $\left(a-1\right)^2 = 3$ hay $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Câu 44:

a) Cho $x = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức: $P = \dfrac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}$.

b) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = x^4 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1942$.

c) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$

Giải

a) Ta có:

$x^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2 = 8 + 2\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$\Leftrightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = 8 + 2\left(\sqrt{5}-1\right) = 6 + 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}+1\right)^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}+1$. Từ

đó ta suy ra $(x-1)^2=5\Leftrightarrow x^2-2x=4$. Ta biến đổi:

$$P=\frac{(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)+12}{x^2-2x+12}=\frac{4^2-3.4+12}{4+12}=1.$$

b) Ta có $x=1+\sqrt[3]{2}\Rightarrow(x-1)^3=2\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-3=0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P=x^2(x^3-3x^2+3x-3)+x(x^3-3x^2+3x-3)+(x^3-3x^2+3x-3)+1945=1945$$

c) Để ý rằng: $x=\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2}-1$ để tận dụng hằng đẳng thức: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Khi đó ta có: $(\sqrt[3]{2}-1)x=(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)$

$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{2}-1)x=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{2}x=x+1\Leftrightarrow 2x^3=(x+1)^3\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x-1=0$.

Ta biến đổi: $P=x^5-4x^4+x^3-x^2-2x+2015=(x^2-x+1)(x^3-3x^2-3x-1)+2016=2016$

Câu 45: Tính $C=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{8+10\sqrt{7-4\sqrt{3}}}}}$

Giải

Để ý rằng: $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2\Rightarrow\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

Suy ra $C=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{8+10(2-\sqrt{3})}}}=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}$

$=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}}}$ .Hay $C=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}}=\sqrt{9-\sqrt{25}}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$

Câu 46: Chứng minh:

a) $A=\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ là số nguyên.

b) $B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên

Lời giải

a) Dễ thấy $A<0$,

Ta có $A^2=\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2=7-2\sqrt{6}+7+2\sqrt{6}-2\sqrt{7-2\sqrt{6}}.\sqrt{7+2\sqrt{6}}=14-2.5=4$

Suy ra $A=-2$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$. Ta có:

$$B^3=\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)^3=1+\frac{\sqrt{84}}{9}+1-\frac{\sqrt{84}}{9}+3\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}.\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)$$

$$\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right).\text{ Hay}$$

$B^3=2+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1-\frac{\sqrt{84}}{9}\right)}.B \Leftrightarrow B^3=2+3\sqrt[3]{1-\frac{84}{81}}B \Leftrightarrow B^3=2-B \Leftrightarrow B^3+B-2=0$

$\Leftrightarrow (B-1)\left(B^2+B+2\right)=0$ mà $B^2+B+2=\left(B+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ suy ra $B=1$. Vậy B là số nguyên.

Câu 47: Chứng minh rằng: $x=\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a\geq\frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

Lời giải

Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$

Ta có $x^3=2a+(1-2a)x \Leftrightarrow x^3+(2a-1)x-2a=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2a\right)=0$

Xét đa thức bậc hai x^2+x+2a với $\Delta=1-8a\geq 0$

+ Khi $a=\frac{1}{8}$ ta có $x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=1$.

+ Khi $a>\frac{1}{8}$, ta có $\Delta=1-8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x=1$ Vậy với mọi $a\geq\frac{1}{8}$ ta có: $x=\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1$ là số tự nhiên.

Câu 48: Tính $x+y$ biết $\left(x+\sqrt{x^2+2015}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2015}\right)=2015$.

Lời giải

Nhận xét: $\left(\sqrt{x^2+2015}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2015}-x\right)=x^2+2015-x^2=2015$.

Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{x^2+2015}-x=\sqrt{y^2+2015}+y$

$\Rightarrow \sqrt{y^2+2015}+y+\sqrt{x^2+2015}+x=\sqrt{x^2+2015}-x+\sqrt{y^2+2015}-y \Leftrightarrow x+y=0$

Câu 49:

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}>2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Chứng minh: $2\sqrt{n}-2<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$ với mọi số nguyên dương $n\geq 2$.

Lời giải

a) Xét $A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$, $B=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+..+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Dễ thấy $A>B$.

Ta có $A+B=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}+\dfrac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Mặt khác ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\dfrac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

Suy ra $A+B=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+...+\left(\sqrt{81}-\sqrt{80}\right)=\sqrt{81}-1=8$. Do $A>B$ suy ra $2A>A+B=8\Leftrightarrow A>4$.

b) Để ý rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}<\dfrac{1}{2k\sqrt{k+1}}$ với mọi k nguyên dương.

Suy ra $VT>2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+..+2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Đặt $P=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{2\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ với mọi số tự nhiên $n\geq 2$.

Từ đó suy ra $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{2}{2\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ hay

$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\dfrac{2}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

Do đó: $2\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+...+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]<T$ và

$T<1+2\left[\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+....\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\right]$.

Hay $2\sqrt{n}-2<T<2\sqrt{n}-1$.

Câu 50: Cho $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ và $B=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{35}}$.

Chứng minh rằng $B>A$.

Lời giải

Ta có: $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$

$=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}+...+\dfrac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{\left(\sqrt{120}+\sqrt{121}\right)\left(\sqrt{120}-\sqrt{121}\right)}$

$=\dfrac{1-\sqrt{2}}{-1}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}+...+\dfrac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{-1}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-2+...+\sqrt{121}-\sqrt{120}=-1+\sqrt{121}=10$

(1)

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

Do đó $B = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{35}} \Rightarrow B > 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{36}-\sqrt{35}\right)$

$\Rightarrow B > 2\left(-\sqrt{1}+\sqrt{36}\right) = 2\left(-1+6\right) = 10$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $B > A$.

Câu 51: Cho $A = \frac{x\left(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\right)}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$

a) Rút gọn A.Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$A = \frac{x\left(\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x-4\right)^2}} = \frac{x\left(\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|\right)}{\left|x-4\right|} =$

$\frac{x\left(\sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|\right)}{x-4}$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên $A = \frac{x\left(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}\right)}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4+\frac{16}{x-4}$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$A = \frac{x\left(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2\right)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4}+\frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8$ (Theo bất đẳng thức Cô si). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

b) Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4+\frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in Z$ khi và chỉ khi $\frac{16}{x-4} \in Z \Leftrightarrow x-4$ là ước số nguyên dương của 16. Hay $x-4 \in \{1;2;4;8;16\} \Leftrightarrow x = \{5;6;8;12;20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x = 5$ hoặc $x = 6$.

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2+4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có:

$A = \frac{2\left(m^2+4\right)}{m} = 2m+\frac{8}{m}$ suy ra $m \in \{2;4;8\} \Leftrightarrow x \in \{8;20;68\}$.

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5;6;8;20;68\}$.

Câu 52: Cho $a=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T=\dfrac{a^2-4a^3+a^2+6a+4}{a^2-2a+12}$.

Giải

$a^2=8+2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)}=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}=8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=8+2\left(\sqrt{5}-1\right)=6+2\sqrt{5}$. Vì $a>0$ nên $a=\sqrt{5}+1$. Do đó $\left(a-1\right)^2=5$ hay $a^2-2a=4$. Biểu diễn

$T=\dfrac{\left(a^2-2a\right)^2-3\left(a^2-2a\right)+4}{a^2-2a+12}=\dfrac{4^2-3.4+4}{4+12}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 53: Cho $a=\sqrt{2}+\sqrt{7-\sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}}+1$.

a) Chứng minh rằng: $a^4-14a^2+9=0$.

b) Giả sử $f\left(x\right)=x^5+2x^4-14x^3-28x^2+9x+19$. Tính $f\left(a\right)$.

Giải:

a) Vì $\sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\left(1+2\sqrt{5}\right)^3}=1+2\sqrt{5}$

Từ đó $a=\sqrt{2}+\sqrt{7-1-2\sqrt{5}}+1=\sqrt{2}+\sqrt{5}$

$\Rightarrow a^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow a^2-7=2\sqrt{10}\Rightarrow a^4-14a^2+9=0$.

b) Do $f\left(x\right)=\left(x^4-14x^2+9\right)\left(x+2\right)+1$ và $x^4-14a^2+9=0$ nên ta được $f\left(a\right)=1$.

Câu 54: Cho $a=\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

Giả sử có đa thức $f\left(x\right)=\left(x^3+3x+1940\right)^{2016}$. Hãy tính $f\left(a\right)$.

Giải

Vì $a^3=38+17\sqrt{5}+38-17\sqrt{5}+3.3.\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}.\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$

$\Rightarrow a^3=76-3a\Rightarrow a^3+3a=76\Rightarrow f\left(a\right)=\left(76+1940\right)^{2012}=2016^{2016}$.

Câu 55: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n>3$, ta có

$\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{65}{54}$.

Giải:

Đặt $P=\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{n^3}$. Thực hiện làm trội mỗi phân số ở vế trái bằng cách làm giảm mẫu, ta có:

$$\frac{2}{k^3}<\frac{2}{k^3-k}=\frac{2}{(k-1)(k+1)}=\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)},\forall k>1$$

Cho $k=4,5,...,n$ thì

$$2P<2\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+\left(\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}\right)+...+\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$=\frac{251}{108}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{n(n+1)}<\frac{251}{108}+\frac{1}{3.4}=\frac{65}{27}.$$ Do đó $P<\frac{65}{64}$ (đpcm).

Câu 56: Chứng minh rằng: $\frac{43}{44}<\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}}<\frac{44}{45}$

Giải:

Đặt $S_n=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

Để ý rằng:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}},\forall k\geq 1$$

Cho $k=1,2,...,n$ rồi cộng vế với vế ta có:

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Do đó $S_{2001}=1-\frac{1}{\sqrt{2002}}$

Như vậy ta phải chứng minh:

$$\frac{43}{44}<1-\frac{1}{\sqrt{2002}}<\frac{44}{45}\Leftrightarrow\frac{1}{45}<\frac{1}{\sqrt{2002}}<\frac{1}{44}$$

$$\Leftrightarrow 44<\sqrt{2002}<45\Leftrightarrow 1936<2002<2025$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.