TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ THI KHẢO SÁT NĂNG LỰC
HỌC SINH LỚP 9
Môn Toán (Vòng 2 - Đợt 1)
Ngày 27 tháng 4 năm 2025
Thời gian 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I (3 điểm).

1) Giải phương trình
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}=3.$$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases}3x^2+2y^2+7xy=12\\ x^3+3x^2y+2y^2x+2x+4y=12.\end{cases}$$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x, y nguyên thỏa mãn
$$y=\frac{x+1}{x^4+1}.$$

2) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=2a^2+b^2+c^2.$$

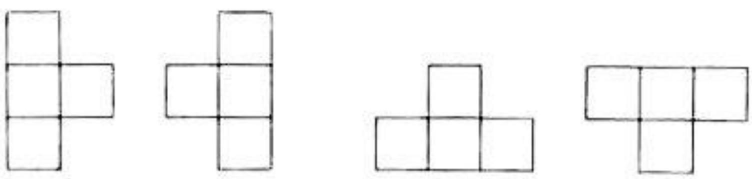
Câu III (3 điểm). Cho hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $AD \parallel BC$ và $AD < BC$. Giả sử tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi P là điểm đối xứng của A qua BC.

1) Chứng minh rằng DP đi qua trung điểm M của BC.

2) Gọi K là trung điểm AP. Chứng minh rằng KD đi qua trọng tâm tam giác ABC.

3) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Giả sử có F nằm trên đường thẳng BD sao cho $AF \perp HM$. Chứng minh rằng FK, AC, PD đồng quy.

Câu IV (1 điểm). Với n nguyên, $n \geq 3$, hãy tìm n để có thể viết các số $1, 2, 3, \ldots, n^2$ vào các ô vuông của bảng $(n \times n)$ mỗi ô đúng một số, sao cho tổng 4 số trên các hình bất kỳ dạng



của bảng đều là số chẵn.

......Hết ......

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN
(Ngày thứ 2)

Câu I (3 điểm).

1) Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} \to t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$

$\to \sqrt{1-x^2} = \dfrac{t^2-2}{2}$. Ta thu được $t + \dfrac{t^2-2}{2} = 3$

$\leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \leftrightarrow (t-2)(t+4) = 0 \leftrightarrow t = 2$

Thu được

$\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = 2 \leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} + 2 = 4$

$\leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \leftrightarrow 1 - x^2 = 1 \leftrightarrow x = 0$. Đáp số $x = 0$.

2) Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}(x+2y)(3x+y) = 12\\(x+2y)(x^2+xy+2) = 12\end{cases}$$

suy ra $x^2 + xy + 2 = 3x + y$

$\leftrightarrow x(x+y) + 2 = (x+y) + 2x$

$\leftrightarrow (x-1)(x+y-2) = 0$

- Giải $\begin{cases}x = 1\\(2y+1)(y+3) = 12 \to 2y^2 + 7y - 9 = 0 \to y = 1,\ y = -\dfrac{9}{2}\end{cases}$
- Giải $\begin{cases}x + y = 2\\(y+2)(6-2y) = 12 \leftrightarrow (y+2)(3-y) = 6 \leftrightarrow y^2 - y = 0 \leftrightarrow y = 0,\ y = 1\end{cases}$

Câu II (3 điểm).

1) Suy ra $x^4 + 1 \mid x + 1 \to x^4 + 1 \mid (x+1)(x-1)(x^2+1) = x^4 - 1$

$$\to x^4 + 1 \mid (x^4+1) - 2 \to x^4 + 1 \mid 2 \to x^4 + 1 \in \{1, 2\}$$

- $x^4 + 1 = 1 \to x = 0 \to y = 1$
- $x^4 + 1 = 2 \to x = 1, y = 1$ hoặc $x = -1, y = 0$.

2) Ta có

$$\begin{cases}a^2 + \alpha^2 b^2 \geq 2\alpha ab\\a^2 + \alpha^2 c^2 \geq 2\alpha ac\\\alpha(b^2+c^2) \geq 2\alpha bc\end{cases}$$

$$\to 2a^2 + (\alpha^2+\alpha)(b^2+c^2) \geq 2\alpha(ab+bc+ca) \quad (1)$$

(Đẳng xảy ra $\leftrightarrow b = c = \frac{1}{\alpha}a$)

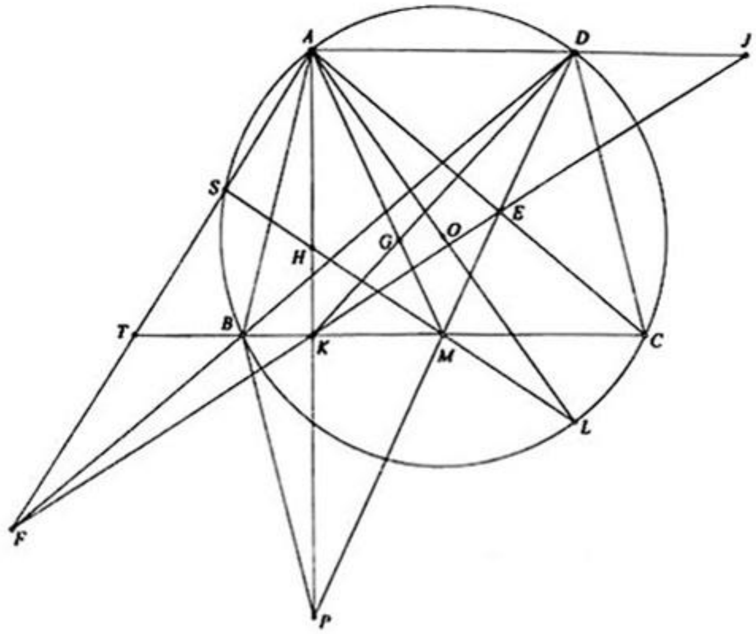
Chọn $\alpha > 0$ là nghiệm của phương trình

$$\alpha^2 + \alpha = 1 \leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \to \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Thay vào (1) ta thu được

$$2a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{5} - 1 \to P_{\min} = \sqrt{5} - 1 \quad \text{khi } b = c = \frac{2}{\sqrt{5}-1}a.$$

Câu III (3 điểm).



Hình 2: Hình minh họa.

1) (1.5 điểm) Dễ thấy $ABCD$ là hình thang cân. Theo tính chất đối xứng và tính chất hình thang cân thì $\angle PBC = \angle ABC = \angle DCB$. Từ đó $PB \parallel CD$. Mà $PB = AB = CD$. Từ đó $DBPC$ là hình bình hành, hay PD đi qua trung điểm M của BC.

2) (1.0 điểm) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì $\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} = \frac{KM}{AD}$. Đẳng thức cuối có do tính chất đường trung bình trong tam giác PAD. Từ đó hai tam giác GMK và GAD đồng dạng c.g.c nên K, G, D thẳng hàng.

3) (0.5 điểm) Gọi AL là đường kính của (O). Dễ thấy $BHCL$ là hình bình hành nên HL đi qua trung điểm M của BC. Gọi giao điểm thứ hai của LH và (O) là S. Dễ thấy $AS \perp HM$ nên S thuộc AF. (Vì theo giả thiết $AF \perp HM$). Gọi T là giao điểm của AF và BC, dễ thấy H là trực tâm tam giác ATM. Từ đó

$$KT \cdot KM = KH \cdot KA = KB \cdot KC.$$

Hệ quả là

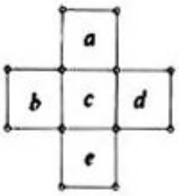
$$\frac{KT}{KC} = \frac{KB}{KM} = \frac{KT - KB}{KC - KM} = \frac{TB}{MC}. \tag{1}$$

Gọi E là giao điểm của MD và AC. Ta sẽ chứng minh F, K, E thẳng hàng. Thật vậy, gọi giao điểm của FK với AD là J, ta đưa về chứng minh K, E, J thẳng hàng. Sử dụng (1), và định lý Thales ta thấy

$$\frac{KC}{AJ} = \frac{KC}{KT} \cdot \frac{KT}{AJ} = \frac{MC}{TB} \cdot \frac{TB}{AD} = \frac{MC}{AD} = \frac{EC}{EA}. \tag{2}$$

Đẳng thức (2) kết hợp với $\angle ECK = \angle EAJ$ (do $CK \parallel AJ$) thể hiện hai tam giác ECK và EAJ đồng dạng (c.g.c) hay K, E, J thẳng hàng. Kết thúc chứng minh.

Câu IV (1 điểm). Xét hình chữ thập



Ta có

$$(a+b+c+d)-(c+b+d+e)=(a-e) \text{ chẵn} \rightarrow a, e \text{ cùng tính chẵn lẻ} \rightarrow a \equiv e \pmod 2$$

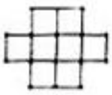
$\rightarrow a+e$ chẵn
Ta có $a+b+c+e$ chẵn
Kết hợp hai điều trên $\rightarrow b+c$ chẵn $\rightarrow b \equiv c \pmod 2$
Ta lại có

$$(b+a+c+e)-(d+a+c+e)=b-d \text{ chẵn} \rightarrow b \equiv d \pmod 2$$

$\rightarrow b+d$ chẵn.
Ta có $a+b+c+d$ chẵn.
Kết hợp hai điều trên $\rightarrow a+c$ chẵn $\rightarrow a \equiv c \pmod 2$.
Tóm lại

$$a \equiv e \equiv c \equiv b \equiv d \pmod 2\text{\_5 số trong hình chữ thập cùng tính chẵn lẻ}$$

- Xét liên tiếp các hình chữ thập để kề nhau



Suy ra tất cả các ô trong (trừ 4 ô góc) cùng tính chẵn lẻ.
Xét $n \geq 4$, ta có $n^2 \geq 16 \rightarrow$ có ≥ 8 ô chứa số chẵn hoặc ≥ 8 ô chứa số lẻ.
Vì có ≥ 8 ô chứa số chẵn $\rightarrow$ tồn tại 1 ô trong chứa số chẵn
$\rightarrow$ Tất cả các ô đều chứa số chẵn $\rightarrow$ số ô chứa số lẻ ≤ 4 (ô góc) (Mâu thuẫn) $\rightarrow$ Không xếp được.
Với $n = 3$ thỏa mãn với cách xếp sau

2	1	4
5	3	7
8	9	6

Đáp số $n = 3$.