# CHUYÊN ĐỀ SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

## CHỦ ĐỀ 1: ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

### PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1.SỐ NGUYÊN TỐ

-Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1,chỉ có 2 ước là 1 và chính nó.

-Số nguyên tố nhỏ nhất vừa là số nguyên tố chẵn duy nhất là số 2.

-Không thể giới hạn số nguyên tố cũng như tập hợp số nguyên tố.Hay nói cách khác,số nguyên tố là vô hạn.

-Khi 2 số nguyên tố nhân với nhau thì tích của chúng không bao giờ là một số chính phương.

-Ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên được coi là số nguyên tố.

-Để kết luận số tự nhiên a là một số nguyên tố $\left( a>1 \right)$, chỉ cần chứng minh a không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a.

-Nếu tích $ab\,\vdots\, p\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} a\,\vdots\, p \\ b\,\vdots\, p \end{array} \right.$ ( $p$ là số nguyên tố)

-Đặc biệt nếu $a^n\,\vdots\, p\Rightarrow a\,\vdots\, p$ ( $p$ là số nguyên tố)

-Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: $4n\pm 1(n\in N^*)$

-Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: $6n\pm 1(n\in N^*)$

-Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị.

### 2.HỢP SỐ

-Hợp số là số tự nhiên lớn lơn 1 và có nhiều hơn 2 ước nguyên dương.

-Để chứng tỏ một số tự nhiên $a$ $\left( a>1 \right)$ là hợp số,chỉ cần chỉ ra một ước khác 1 và $a$.

-Ước số nhỏ nhất khác 1 của một hợp số là một số nguyên tố và bình phương lên không vượt quá nó.

-Một hợp số bằng tổng các ước của nó (không kể chính nó) được gọi là: Số hoàn chỉnh.

-Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất (không kể thứ tự các thừa số)

### 3.HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU

-Hai số tự nhiên được gọi là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng có ước chung lớn nhất bằng 1.

$a,b$ nguyên tố với nhau $\Leftrightarrow (a,b)=1;(a,b\in N^*)$

- Hai số tự nhiên liên tiếp luôn nguyên tố cùng nhau

- Hai số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau

- Các số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau

- Các số $a,b,c$ nguyên tố cùng nhau $(a,b,c)=1$

- $a,b,c$ nguyên tố sánh đôi khi chúng đôi một nguyên tố cùng nhau $a,b,c$ nguyên tố sánh đôi

$\Leftrightarrow (a,b)=(b,c)=(c,a)=1$

### 4.MỘT SỐ ĐỊNH LÍ ĐẶC BIỆT

**-** Định lí Đirichlet: Tồn tai vô số số nguyên tố p có dạng: $p=ax+b;x\in N^*,(a,b)=1$

- Định lí Tchebycheff: Trong khoảng từ số tự nhiên $n$ đến số tự nhiên $2n$ có ít nhất một số nguyên tố $(n>2)$

- Định lí Vinogradow: Mọi số lẻ lớn hơn $3^3$ là tổng của 3 số nguyên tố.

## PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

### Dạng 1:Tính chất đặc trưng của số nguyên tố và cách nhận biết số nguyên tố,hợp số.

#### *I.Phương pháp giải*

- Dựa vào các dấu hiệu chia hết và các tính chất về số nguyên tố ,hợp số, để giải các bài toán về chứng minh hoặc giải thích.
- Thông qua việc phân tích và xét hết khả năng có thể xảy ra, đối chiếu với giả thiết và các định lý, hệ quả đã học để loại bỏ các trường hợp mâu thuẫn và nhận biết được đâu là số nguyên tố, hợp số.

#### *II.Bài toán*

**Bài 1:** Chứng minh rằng:

a, Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: $4n\pm 1(n\in N^*)$

b, Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: $6n\pm 1(n\in N^*)$

***Lời giải:***

a, Gọi $A$ là một số tự nhiên lớn hơn 2. Khi đó $A$ sẽ có dạng $4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3 (n \in N^*)$

-Nếu $A = 4n$ hay $A = 4n+2$ thì $A \vdots 2$ và $A$ là hợp số

Suy ra nếu $A$ là số nguyên tố thì $A$ sẽ có dạng $4n+1, 4n+3$

Vì $4n+3 = 4n+4-1 = 4(k+1)-1$ nên suy ra mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: $4n \pm 1 (n \in N^*)$ (đpcm)

b, Gọi $A$ là một số tự nhiên lớn hơn 3.Khi đó $A$ sẽ có dạng $6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3 (n \in N^*)$

-Nếu $A = 6n$ hay $A = 6n+3$ thì $A \vdots 3$ và $A$ là hợp số.

-Nếu $A = 6n+2$ thì $A \vdots 2$ và $A$ là hợp số.

Suy ra nếu $A$ là số nguyên tố thì $A$ sẽ có dạng $6n+1, 6n+5$

Vì $6n+5 = 6n+6-1 = 6(k+1)-1$ nên suy ra mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: $6n \pm 1 (n \in N^*)$ (đpcm)

**Bài 2:** Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số này là số chẵn hay số lẻ?

***Lời giải:***

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 có chứa một số nguyên tố chẵn là 2, còn 24 số nguyên tố còn lại là số nguyên tố lẻ. Do đó tổng 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

**Bài 3:** Tổng 2 số nguyên tố có thể bằng 2003 được không ?

***Lời giải:***

Ta thấy 2003 là một số lẻ nên nếu 2003 là tổng của hai số nguyên tố thì một trong hai số phải là số chẵn và bằng 2. Vậy số còn lại là 2001 nhưng 2001 lại không là số nguyên tố vì $2001 = 69.29$

Vậy tổng của hai số nguyên tó không thể bằng 2003.

**Bài 4:** Cho $p$ và $p+2$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng tổng của chúng chia hết cho 12.

***Lời giải:***

Ta thấy $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ có dạng $6n \pm 1, (n \in N^*)$

TH1: $p=6n+1,(n\in N^*)$ thì $p+2=6n+3=3(2n+1)\vdots 3$

Mà $p+2$ là số lớn hơn 3 nên $p+2$ là hợp số ( Trái với GT, loại )

TH2: $p=6n-1(n\in N^*)$ thì $p+2=6n+1$

Khi đó $p+p+2=6n-1+6n+1=12n\vdots 12$

$\Rightarrow$ ĐPCM

**Bài 5:** Cho $p$ là số nguyên tố và một trong hai $8p+1,8p-1$ là số nguyên tố .Hỏi số còn lại là số nguyên tố hay hợp số.

***Lời giải:***

-Nếu $p=2$ thì $8p-1=8.2-1=15$ là hợp số

-Nếu $p=3$ thì $8p+1=8.3+1=25$ là hợp số

-Nếu $p>3$ thì $8p$ không chia hết cho 3

Vậy 1 trong 2 số $8p-1,8p+1$ sẽ chia hết cho 3 và là hợp số.

Vậy số còn lại là hợp số.

**Bài 6:** Hai số $2^n+1,2^n-1(n\in N,n>2)$ có thể cùng là số nguyên tố hay không ? Vì sao ?

***Lời giải:***

Vì $2^n+1,2^n,2^n-1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3.Mà $(2,3)=1$ và 3 là số nguyên tố nên $2^n$ không chia hết cho 3. (1)

Mà $n>2$ nên $2^n+1>3,2^n-1>3$ (2)

Từ (1),(2) suy ra 1 trong 2 số $2^n+1,2^n-1$ phải chia hết cho 3.

$\Rightarrow$ Hai số $2^n+1,2^n-1(n\in N,n>2)$ không thể cùng là số nguyên tố.

**Bài 7:** Cho 3 số nguyên tố lớn hơn 3,trong đó số sau lớn hơn số trước là $d$ đơn vị.Chứng minh rằng $d\vdots 6$.

***Lời giải***

Các số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ $(k\in N^*)$

Có 3 số mà chỉ có 2 dạng nên tồn tại hai số thuộc cùng một dạng, hiệu của chúng ( là $d$ hoặc $2d$ ) chia hết cho 3 ( theo nguyên lý Drichlet ). Mặt khác $d$ chia hết cho 2 vì $d$ là hiệu của hai số lẻ.Vậy $d$ chia hết cho 6.

**Bài 8:** Hai số nguyên tố gọi là sinh đôi nếu chúng là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 3 nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.

***Lời giải:***

Gọi $p$ là số nguyên tố lơn hơn 3 và $p$ lẻ nên $p+1\vdots 2$ (1)

Mà $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ có dạng $3k+1, 3k+2 (k \in N, k>1)$.

Dạng $p=3k+1$ không xảy ra vì nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3\vdots 3$ là hợp số (Loại)

$\Rightarrow p=3k+2 \Rightarrow p+1=3k+3\vdots 3$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow p+1\vdots 6 \Rightarrow$ ĐPCM

**Bài 9:** Cho $p$ và $p+8$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $p+100$ là số nguyên tố hay là hợp số ?

***Lời giải:***

Ta thấy $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ có dạng $6n \pm 1, (n \in N^*)$

TH1: $p=6n+1, (n \in N^*)$ thì $p+8=6n+9=3(2n+3)\vdots 3$

Mà $p+8$ là số lớn hơn 3 nên $p+8$ là hợp số ( Trái với GT, loại )

TH2: $p=6n-1 (n \in N^*)$ thì $p+8=6n+7$

Khi đó $p+100=6n-1+100=6n+99=3(2n+33)\vdots 3$

Mà $p+100$ là số lớn hơn 3 nên $p+100$ là hợp số.

**Bài 10:** Cho $p$ và $2p+1$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $4p+1$ là số nguyên tố hay hợp số ?

***Lời giải:***

Ta thấy $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $6n \pm 1, (n \in N^*)$

TH1: $p=6n+1, (n \in N^*)$ thì $2p+1=2(6n+1)+1=12n+3=3(4n+1)\vdots 3$

Mà $2p+1$ là số lớn hơn 3 nên $2p+1$ là hợp số ( Trái với GT, loại )

TH2: $p = 6n - 1 (n \in N^*)$ thì $2p + 1 = 2(6n - 1) + 1 = 12n - 1$

Khi đó $4p + 1 = 4(6n - 1) + 1 = 24n - 3 = 3(8n - 1)$

Mà $4p + 1$ là số lớn hơn 3 nên $4p + 1$ là hợp số.

**Bài 11:** Chứng minh rằng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử $p$ là số nguyên tố và $p$ có dạng $p = 30k + r = 2.3.5.k + r (k \in N^*, r \in N^*, 0 < r < 30)$

Nếu $r$ là hợp số thì $r$ có ước nguyên tố $q$ sao cho $q^2 < 30 \Rightarrow q \in \{2, 3, 5\}$

Nhưng với $q \in \{2, 3, 5\}$ thì p lần lượt chia hết cho $2, 3, 5$ ( Vô lý )

Vậy $r = 1$ hoặc $r$ là số nguyên tố.

**Bài 12:** Một số nguyên tố chia cho 30 có số dư là $r$ .Tìm $r$ biết rằng $r$ không là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Gọi số nguyên tố là $p$ ( $p \in N^*$ )

Ta có: $p = 30k + r = 2.3.5.k + r (k \in N^*, r \in N^*, 0 < r < 30)$

Vì $p$ là số nguyên tố nên r không chia hết cho $2, 3, 5$.

Số nguyên dương không là số nguyên tố nhỏ hơn 30 và không chia hết cho $2, 3, 5$ chỉ có số 1.

Vậy $r = 1$.

**Bài 13:** Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư là $r$. Tìm r biết rằng $r$ là hợp số.

***Lời giải:***

Gọi số nguyên tố là $p$ ( $p \in N^*$ )

Ta có: $p = 42k + r = 2.3.7.k + r (k \in N^*, r \in N^*, 0 < r < 42)$

Vì $p$ là số nguyên tố nên $r$ không chia hết cho $2, 3, 7$ .

Số nguyên dương là hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho $2, 3, 7$ chỉ có số 25.

Vậy $r = 25$.

**Bài 14:** Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được 1997 số liên tiếp nhau mà không có số nguyên tố nào hay không ?

***Lời giải:***

Chọn dãy số:

$a_1 = 1998! + 2$ $\qquad$ $a_1 \vdots 2$

$a_2 = 1998! + 3$ $\qquad$ $a_2 \vdots 3$

$a_3 = 1998! + 4$ $\qquad$ $a_3 \vdots 4$

………........... $\qquad$ …………

$a_{1997} = 1998! + 1998$ $\qquad$ $a_{1997} \vdots 1998$

Như vậy: Dãy số $a_1; a_2; a_3; ....; a_{1997}$ gồm có 1997 số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

**Bài 15:** Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được $n$ số liên tiếp nhau $(n > 1)$ mà không có số nguyên tố nào hay không ?

***Lời giải:***

Chọn dãy số:

$a_1 = (n+1)! + 2$ $\qquad$ $a_1 \vdots 2, a_1 > 2$ nên $a_1$ là hợp số

$a_2 = (n+1)! + 3$ $\qquad$ $a_2 \vdots 3, a_2 > 3$ nên $a_2$ là hợp số

$a_3 = (n+1)! + 4$ $\qquad$ $a_3 \vdots 4, a_3 > 4$ nên $a_3$ là hợp số

………........... $\qquad$ …………

$a_n = (n+1)! + (n+1)$ $\qquad$ $a_n \vdots (n+1), a_n > n+1$ nên $a_n$ là hợp số

Như vậy: Dãy số $a_1; a_2; a_3; ....; a_n$ gồm có $n$ số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

**Bài 16:** Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số này là số chẵn hay số lẻ?

***Lời giải:***

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 có chứa một số nguyên tố chẵn là 2, còn 24 số nguyên tố còn lại là số nguyên tố lẻ. Do đó tổng 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

**Bài 17:** Chứng minh rằng nếu tổng của $n$ lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì $(n,30)=1$

***Lời giải:***

Số nguyên tố $p$ khi chia cho 30 chỉ có thể dư là: $1,7,11,13,17,19,23,29$

Với $r=1$ thì $p^2\equiv 1(\bmod 30)$ tương tự với $r=11$, $r=9$, $r=19$

Với $r=7$ thì $p^2\equiv 19(\bmod 30)$ tương tự với $r=13$, $r=17$, $r=23$

Suy ra $p^2\equiv 1(\bmod 30)$

Giả sử $p_1,p_2,...,p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5

Khi đó $q=p_1{}^4+p_2{}^4+...+p_n{}^4\equiv n(\bmod 30)$

$\Rightarrow p=30k+n(k\in N^*)$ là số nguyên tố nên $(n,30)=1)$.

## Dạng 2:Tìm số nguyên tố p để thỏa mãn điều kiện.

***I.Phương pháp giải***

- Trong $n$ số tự nhiên liên tiếp chỉ có một và chỉ một số chia hết cho $n$.
- Nắm chắc các tính chất đặc trưng của số nguyên tố để giải bài toán.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Tìm số nguyên tố $p$ sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a, $p+10,p+14$

b, $p+2,p+6,p+8,p+12,p+14$

***Lời giải:***

a, Vì $p+10,p+14$ là số nguyên tố và 10;14 là hợp số$\Rightarrow p>2$

$\Rightarrow p$ có dạng $3k,3k+1,3k+2(k\in N^*)$.

-Nếu $p=3k+1\Rightarrow p+14=3k+15=3(k+5)\vdots 3$ là hợp số (Loại)

-Nếu $p=3k+2\Rightarrow p+10=3k+12=3(k+4)\vdots 3$ là hợp số (Loại)

-Nếu $p=3k \Rightarrow p=3$ (vì $p$ là số nguyên tố) $\Rightarrow \begin{cases} p+10=3+10=13 \\ p+14=3+14=17 \end{cases}$ (đều là số nguyên tố,thỏa mãn)

Vậy $p=3$ thì $p+10, p+14$ là số nguyên tố.

b, Vì $p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$ là số nguyên tố $\Rightarrow p>3$.

$\Rightarrow p$ có dạng $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4 (k \in N)$

-Nếu $p=5k+1 \Rightarrow p+14=5k+15 \vdots 5$ là hợp số (loại)

-Nếu $p=5k+2 \Rightarrow p+8=5k+10 \vdots 5$ là hợp số (loại)

-Nếu $p=5k+3 \Rightarrow p+12=5k+15 \vdots 5$ là hợp số (loại)

-Nếu $p=5k+4 \Rightarrow p+6=5k+10 \vdots 5$ là hợp số (loại)

-Nếu $p=5k$ mà $p$ là số nguyên tố nên $p=5 \Rightarrow p+2=7; p+6=11, p+8=13; p+12=17; p+14=19$ đều là số nguyên tố (thỏa mãn, lấy)

Vậy $p=5$ thì $p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$ là số nguyên tố.

**Bài 2**: Tìm 3 số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

***Lời giải:***

Gọi 3 số lẻ liên tiếp là: $2k+1, 2k+3, 2k+5 (k \in N^*)$

Trong 3 số lẻ liên tiếp luôn có 1 số chia hết cho 3

-Nếu $2k+3 \vdots 3 \Rightarrow 2k+3=3$ (vì $2k+3$ là số nguyên tố) $\Rightarrow k=0 \Rightarrow 2k+1=1$ (Loại vì 1 không là số nguyên tố)

-Nếu $2k+5 \vdots 3 \Rightarrow 2k+5=3$ (vì $2k+5$ là số nguyên tố) $\Rightarrow k=-1$ (Loại vì -1 không phải là số tự nhiên)

-Nếu $2k+1 \vdots 3 \Rightarrow 2k+1=3$ (vì $2k+1$ là số nguyên tố) $\Rightarrow k=1 \Rightarrow 2k+3=5; 2k+5=7$ (Thỏa mãn vì đều là số nguyên tố)

Vậy 3 số tự nhiên lẻ cần tìm là 3,5,7.

**Bài 3:** Tìm các số nguyên tố $p$ sao cho $p$ vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử $p$ là số nguyên tố cần tìm thì ta có $p = p_1 + p_2 = p_3 - p_4$ ( $p_1, p_2, p_3, p_4$ đều là các số nguyên tố và $p_3 > p_4$ )

Để $p$ là số nguyên tố thì $p_1, p_2$ có một trong hai số là số chẵn và $p_3, p_4$ cũng có một trong hai số là số chẵn.

Giả sử $p_1 > p_2$ thì $\Rightarrow p_2 = p_4 = 2$

Ta có: $p = p_1 + 2 = p_3 - 2 \Rightarrow p_3 = p_1 + 4$.

Ta thấy $p_1, p_1 + 2, p_1 + 4$ là 3 số nguyên tố lẻ liên tiếp.

Theo câu a $\Rightarrow p_1 = 3 \Rightarrow p = p_1 + 2 = 5$.

Thử lại: $p = 5 \Rightarrow 5 = 2 + 3 = 7 - 2$.

Vậy số cần tìm là 5.

**Bài 4:** Tìm $k \in N$ để dãy số $k+1, k+2, ....., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

***Lời giải:***

-Nếu $k = 0 \Rightarrow$ Ta có dãy số $1;2;3;...;10$ có các số nguyên tố là $2;3;5;7 \Rightarrow$ Có 4 số nguyên tố.

-Nếu $k = 1 \Rightarrow$ Ta có dãy số $2;3;4;...;11$ có các số nguyên tố là $2;3;5;7;11 \Rightarrow$ Có 5 số nguyên tố.

-Nếu $k = 2 \Rightarrow$ Ta có dãy số $3;4;5;...;12$ có các số nguyên tố là $3;5;7;11 \Rightarrow$ Có 4 số nguyên tố.

-Nếu $k \geq 3 \Rightarrow$ Dãy số $k+1, k+2, ..., k+10$ đều gồm các số lớn hơn 3 và bao gồm 5 số lẻ liên tiếp và 5 sô chẵn liên tiếp.

Vì các số trong dãy đều lớn hơn 3 nên suy ra 5 số chẵn liên tiếp đều là hợp số và trong 5 số lẻ liên tiếp tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3 và số này cũng là hợp số.

Vậy $k = 1$ là giá trị cần tìm.

**Bài 5:** Ta gọi $p, q$ là 2 số nguyên tố liên tiếp nếu giữa $p$ và $q$ không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp $p, q, r$ sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

+Nếu $p, q, r$ đều khác 3 mà $p, q, r$ là các số nguyên tố.

$\Rightarrow p, q, r$ chia 3 dư 1 hoặc dư 2 ( hay dư -1 ).

$\Rightarrow p^2, q^2, r^2$ chia 3 dư 1.

$\Rightarrow p^2 + q^2 + r^2$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow$ Vậy tồn tại 1 số bằng 3.

TH1: Ba số nguyên tố đó là 2, 3, 5 Khi đó $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$ là hợp số ( Loại )

TH2: Ba số nguyên tố đó là 3, 5, 7 Khi đó $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ là số nguyên tố ( Thỏa mãn )

Vậy 3 số nguyên tố liên tiếp cần tìm là: $3,5,7$.

**Bài 6:** Tìm 3 số nguyên tố $p,q,r$ sao cho: $p^q + q^p = r$.

***Lời giải:***

Vì $p^q + q^p > 2 \Rightarrow r > 2 \Rightarrow$ r là số lẻ ( $r$ là số nguyên tố ).

$\Rightarrow p^q, q^p$ có 1 số lẻ và 1 số chẵn.

Giả sử $p^q$ là số chẵn $\Rightarrow p$ chẵn $\Rightarrow p = 2$ ( vì $p$ là số nguyên tố ) $\Rightarrow 2^q + q^2 = r$

+Nếu $q > 3 \Rightarrow q \equiv \pm 1 (\bmod 3) \Rightarrow q^2 \equiv 1 (\bmod 3)$

Mặt khác $q$ là số lẻ $\Rightarrow 2^q \equiv (-1)^p = -1 (\bmod 3)$

$\Rightarrow 2^q + q^2 \equiv 0 (\bmod 3)$

$\Rightarrow 2^q + q^2 \vdots 3 \Rightarrow r \vdots 3 \Rightarrow r = 3$ ( Vì $r$ là số nguyên tố )

$\Rightarrow 2^q + q^2 = 3$ ( Loại vì $q$ là số nguyên tố nên $q^2 > 3 \Rightarrow r > 3$ )

+Nếu $q = 3$ thì $\Rightarrow r = 3^2 + 2^3 = 17$ là số nguyên tố ( Thỏa mãn )

Vậy $(p,q,r) \in \{(2,3,17);(3,2,17)\}$.

**Bài 7:** Đề thi học sinh giỏi 2020-20121,huyện Yên Mô:

Cho $a,b,c$ là 3 số nguyên tố khác nhau đôi một.Tìm 3 số $a,b,c$ để giá trị của biểu thức:

$A = \dfrac{1}{BCNN(a,b)} + \dfrac{1}{BCNN(a,c)} + \dfrac{1}{BCNN(b,c)}$ đạt GTLN.

***Lời giải:***

Ta có: $a,b,c$ là 3 số nguyên tố khác nhau nên $BCNN(a,b)=a.b$; $BCNN(a,c)=a.c$; $BCNN(b,c)=b.c$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{BCNN(a,b)}+\frac{1}{BCNN(a,c)}+\frac{1}{BCNN(b,c)}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$$

Vì vai trò $a,b,c$ như nhau nên để không mất tính mất tính tổng quát ta giả sử: $a\le b\le c$

Mà $a,b,c$ là 3 số nguyên tố nên $a\ge 2; b\ge 3; c\ge 5$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\le\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow MaxA=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=2,b=3,c=5$$

Vậy $A$ đạt GTLN khi $a=2,b=3,c=5$ và các hoán vị của nó.

**Bài 8:** Tìm 2 số nguyên tố có tổng bằng 2005.

***Lời giải:***

Ta thấy tổng số nguyên tố hai số cần tìm là số lẻ nên một trong hai số cần tìm phải là số nguyên tố chẵn và bằng 2. Khi đó số còn lại là 2003 ( là số nguyên tố, thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là 2 và 2003.

**Bài 9:** Tìm 2 số nguyên tố có tổng bằng 309.

***Lời giải:***

Ta thấy tổng số nguyên tố hai số cần tìm là số lẻ nên một trong hai số cần tìm phải là số nguyên tố chẵn và bằng 2. Khi đó số còn lại là 307 ( là số nguyên tố, thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là 2 và 307.

**Bài 10:** Tổng của 3 số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong 3 số.

***Lời giải:***

Trong ba số nguyên tố có tổng bằng 1012, phải có một số chẵn, là số 2. Đó là số nhỏ nhất trong ba số.

**Bài 11:** Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p+11$ là số nguyên tố nhỏ hơn 30.

***Lời giải:***

Vì $p$ là số nguyên tố nên $p \geq 2 \Rightarrow 4p+11 \geq 19$

Mà $4p+11$ là số nguyên tố nhỏ hơn 30 nên $4p+11 \in \{19; 23; 29\}$

+ Nếu $4p+11=19$ thì $p=2$ là số nguyên tố ( Thỏa mãn, lấy )

+ Nếu $4p+11=23$ thì $p=3$ là số nguyên tố ( Thỏa mãn, lấy )

+ Nếu $4p+11=29$ thì $p=\frac{9}{2}$ không là số nguyên tố ( Trái với GT, loại )

Vậy số nguyên tố cần tìm là 2 và 3.

**Bài 12:** Tìm các số nguyên tố $x, y$ thỏa mãn $x^2-2y^2-1=0$

***Lời giải:***

$x^2-2y^2-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)=2y^2$

Do $y$ là số nguyên tố và $x+1>x-1$ nên chỉ xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x+1=2y \\ x-1=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} x+1=2y^2 \\ x-1=1 \end{cases}$ vô nghiệm nguyên tố

TH3: $\begin{cases} x+1=y^2 \\ x-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy cặp nguyên tố duy nhất thỏa mãn đề bài là $x=3; y=2$.

**Bài 13:** Tìm các số nguyên tố $x, y, z$ thỏa mãn $x^2+y^3=z^4$.

***Lời giải:***

Ta có:

$x^2+y^3=z^4 \Leftrightarrow y^3=(z^2+x)(z^2-x)$

Mà $(z^2+x)>(z^2-x)$ ; $y$ là số nguyên tố nên

$$\begin{cases} z^2 + x = y^3 \\ z^2 - x = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

hoặc $\begin{cases} z^2 + x = y^2 \\ z^2 - x = y \end{cases} \qquad (2)$

không có $x, y, z$ thỏa mãn (1) và (2) Vậy không tồn tại $x, y, z$ nguyên tố để $x^2 + y^3 = z^4$

**Bài 14:** Tìm tất cả các bộ ba số $a, b, c$ sao cho $abc < ab + bc + ac$

***Lời giải:***

Vì $a, b, c$ có vai trò như nhau nên giả sử $a \le b \le c$ khi đó

$ab + bc + ac \le 3bc$

$\Rightarrow abc < 3bc$

$\Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 2$ vì $a$ là số nguyên tố.

Với $a = 2$ thì ta có $2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b + c) \le 4c$

$b \le 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 3 \end{array}\right.$ ( vì p là số nguyên tố )

+ Nếu $b = 2$ thì $4c < 4 + 4c$ thỏa mãn với $c$ là số nguyên tố bất kì

+ Nếu $b = 3$ thì $6c < 6 + 5c \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c \in \{3; 5\}$

Vậy các cặp số $(a, b, c)$ cần tìm là $(2, 2, p); (2, 3, 3); (2, 3, 5)$ và các hoán vị của chúng, với $p$ là số nguyên tố.

**Dạng 3: Các bài toán chứng minh số nguyên tố,hợp số**

***I.Phương pháp giải***

**-**Dựa vào các tính chất đặc trưng của số nguyên tố và hợp số để giải các bài toán về chứng minh số nguyên tố, hợp số.

***II.Bài toán***

**Bài 1:** Cho $p$ và $p + 4$ là các số nguyên tố ( $p > 3$ ).Chứng minh rằng $p + 8$ là hợp số .

***Lời giải:***

Ta có: $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ có dạng $3k+1, 3k+2 (k \in N^*)$

+Nếu $p = 3k+2$ thì $p+4 = 3k+6 \vdots 3$ là hợp số ( Trái với GT,loại )

Vậy $p$ có dạng $3k+1$, khi đó $p+8 = 3k+9 = 3(k+3) \vdots 3$ là hợp số

$\Rightarrow$ ĐPCM

**Bài 2:** Cho $p$ và $8p-1$ là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $8p+1$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Ta xét các trường hợp: $p = 3k; p = 3k+1; p = 3k+2 (k \in N^*)$

TH1: $p = 3k+2$ thì $8p-1 = 8(3k+2)-1 = 24k+15 = 3(8k+5) \vdots 3$ là các hợp số ( Trái với giả thiết,loại )

TH2: $p = 3k \Rightarrow p = 3$ ( vì $p$ là số nguyên tố ) $\Rightarrow 8p-1 = 23$ là số nguyên tố

Và khi đó $8p+1 = 25$ là hợp số (1)

TH3: $p = 3k+1$ thì $8p-1 = 24k+7$

Và khi đó $8p+1 = 24k+9 = 3(8k+3) \vdots 3$ là hợp số (2)

Từ $(1),(2)$ ta suy ra $8p+1$ là hợp số $\Rightarrow$ ĐPCM

**Bài 3:** Chứng minh rằng $(p-1)!$ chia hết cho $p$ nếu $p$ là hợp số, không chia hết cho $p$ nếu $p$ là số nguyên tố.

***<u>Lời giải:</u>***

+TH1: $p$ là hợp số:

Nếu $p$ là hợp số thì $p$ là tích các thừa số nguyên tố nhỏ hơn $p$ và số mũ các lũy thừa này không thể lớn hơn số mũ của chính các lũy thừa ấy trong $(p-1)!$.

Vậy: $(p-1)! \vdots p$ ( ĐPCM )

+TH2: $p$ là số nguyên tố:

Vì $p$ là số nguyên tố nên $p$ nguyên tố cùng nhau với mọi thừa số của $(p-1)!$

Kết hợp với $p > p-1 \Rightarrow (p-1)!$ không chia hết cho $p$ ( ĐPCM )

**Bài 4:** Cho $2^m - 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $m$ cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử $m$ là hợp số $\Rightarrow m = p.q(p,q \in N; p,q > 1)$

Khi đó: $2^m - 1 = 2^{p.q} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + ..... + 1)$

Vì $p > 1$( Giả sử ) nên $\Rightarrow 2^p - 1 > 1$ và $(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + ..... + 1) > 1$ nên $2^m - 1$ là hợp số ( Trái với giả thiết )$\Rightarrow$Giả sử là sai $\Rightarrow$ $m$ không thể là hợp số $\Rightarrow m$ là số nguyên tố (ĐPCM)

**Bài 5:** Chứng minh rằng: mọi số nguyên tố của $1994! - 1$ đều lớn hơn 1994.

***Lời giải:***

Gọi $p$ là ước số nguyên tố của $1994! - 1$

Giả sử $p \le 1994 \Rightarrow 1994.1993........3.2.1$ chia hết cho p $\Leftrightarrow 1994!$ chia hết cho $p$

Mà $(1994! - 1) \vdots p$ nên $1 \vdots p$ ( vô lý )

Vậy $p > 1994$ ( ĐPCM )

**Bài 6:** Chứng minh rằng: $n > 2$ thì giữa $n$ và $n!$ có ít nhất 1 số nguyên tố ( từ đó suy ra có vô số số nguyên tố ).

***Lời giải:***

Vì $n > 2$ nên $k = n! - 1 > 1$, do đó $k$ có ít nhất một ước nguyên tố $p$.

Ta chứng minh $p > n$.Thậy vậy: nếu $p \le n$ thì $n! \vdots p$

Mà $k \vdots p \Rightarrow (n! - 1) \vdots p$.Do đó $1 \vdots p$ ( vô lý )

Vậy $p < n < n! - 1 < n!$( ĐPCM )

**Bài 7:** Hãy chứng minh các số sau là hợp số:

a) $A = 11111..........1$( 2001 chữ số 1 );

b) $B = 1010101$

c) $C = 1! + 2! + 3! + ....... + 100!$

d) $D = 311141111$

***Lời giải:***

a) Tổng các chữ số của $A$ là: $1+1+1......+1=2001\vdots 3 \Rightarrow A\vdots 3$

mà $A>3$ nên $A$ là hợp số ( ĐPCM )

b) $B=1010101=101.10001$ là hợp số ( đpcm )

c) Vì $1!+2!=3\vdots 3$ và $3!+4!+.....+100!$ luôn chia hết cho 3 nên $C\vdots 3$

Mà $C>3$ nên $C$ là hợp số (ĐPCM )

d) $D=311141111=311110000+31111=31111(10000+1)\vdots 31111$

$\Rightarrow D$ là hợp số (ĐPCM )

**Bài 8:** Chứng minh rằng số $N=\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ là hợp số.

***Lời giải:***

Đặt $5^{25}=a$, khi đó

$N=\dfrac{a^5-1}{a-1}=a^4+a^3+a^2+a+1$

$=(a^4+9a^2+1+6a^3+6a+2a^2)-(5a^3+10a^2+1)$

$=(a^2+3a+1)^2+5a(a^2+2a+1)$

$=(a^2+3a+1)^2-5.5^{25}(a+1)^2$

$=(a^2+3a+1)^2-\left[5^{13}.(a+1)\right]^2$

$=\left[a^2+3a+1+5^{13}(a+1)\right]\left[a^2+3a+1-5^{13}(a+1)\right].$

$N$ là tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên $N$ là hợp số ( ĐPCM )

**Bài 9:** Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì $2^{2^{2n+1}}+3$ là hợp số.

***Lời giải:***

Với $2^2=4\equiv 1(\bmod 3)\Rightarrow 2^{2n}\equiv 1(\bmod 3),(n\in N^*)\Rightarrow 2^{2n}-1\vdots 3$ nên $2^{2n+1}-2=2(2^{2n}-1)\vdots 6$

Hay $2^{2n+1}=6k+2(k\in N)$

$\Rightarrow 2^{2^{2n+1}}+3=(2^6)^k.2^2+3\equiv 2^2+3\equiv 0(\bmod 7)$

Tức là $2^{2^{2n+1}}+3\vdots 7(n\in N^*)$

Mà $2^{2^{2n+1}}+3>7(n\in N^*)$ nên $2^{2^{2n+1}}+3$ là hợp số. ( ĐPCM )

**Bài 10:** Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì $19.8^n+17$ là hợp số.

**Lời giải:**

+ Nếu $n=2k(k\in N^*)$ thì $19.8^{2k}+17=18.8^{2k}+(63+1)^k+(18-1)\equiv 0(\bmod 3)$

+ Nếu $n=4k+1(k\in N^*)$ thì $19.8^n+17=13.8^{4k+1}+6.8.64^{2k}+17$

$$=13.8^{4k+1}+39.64^{2k}+9(1-65)^{2k}+(13+4)\equiv 0(\bmod 13)$$

+ Nếu $n=4k+3(k\in N^*)$ thì

$19.8^n+17=15.8^{4k+3}+4.8^3.64^{2k}+17$

$15.8^{4k+3}+4.5.10.64^{2k}+4-2(1-65)^{2k}+(25-8)\equiv 0(\bmod 5)$

Như vậy với mọi giá trị $n\in N^*$ thì số $19.8^n+17$ là hợp số.

**Bài 11:** Cho $a,n\in N^*$, biết $a^n\vdots 5$.Chứng minh rằng: $a^2+150\vdots 25$

***Lời giải:***

Ta có $a^n\vdots 5$,mà 5 là số nguyên tố nên suy ra $a\vdots 5\Rightarrow a^2\vdots 25$.

Mà $150\vdots 25$ nên $a^2+150\vdots 25\Rightarrow$ đpcm

**Bài 12:** Cho $A=n!+1, b=n+1(n\in N^*)$.Chứng minh rằng nếu $A$ chia hết cho $B$ thì $B$ là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử $B$ không là số nguyên tố.

Do đó $B$ có ước nguyên tố $p,q<B$

Do đó $p \le n! \Rightarrow n! \vdots p$.

Mặt khác $A \vdots B$, nên $A \vdots p$

$\Rightarrow A - n! \vdots p \Rightarrow 1 \vdots p$ ( Vô lí )

Mà $n$ nguyên dương nên $B \ne 0, B \ne 1$.

Vậy $B$ là số nguyên tố ( đpcm )

**Bài 13:** Cho các số nguyên dương $a,b,c,d$ thỏa mãn $a^n \vdots 5$. Chứng minh rằng $A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số.

***Lời giải:***

Giả sử $(a,c) = t(t \in N^*)$

Đặt $a = a_1 t, c = c_1 t; (a_1, c_1) = 1$

$ab = cd \Rightarrow a_1 bt = c_1 dt \Rightarrow a_1 b = c_1 d$

Mà $(a_1, c_1) = 1 \Rightarrow b \vdots c_1$

Đặt $b = c_1 k \Rightarrow d = a_1 k, (k \in N^*)$,

Ta có

$A = a^n + b^n + c^n + d^n = a_1{}^n t^n + c_1{}^n k^n + c_1{}^n t^n + a_1{}^n k^n = (a_1{}^n + c_1{}^n)(k^n + t^n)$

Vì $a_1, c_1, t, k$ là số nguyên dương nên $A$ là hợp số.

**Bài 14:** Chứng minh rằng có vô số nguyên tố có dạng: $3x - 1(x \in N^*, x > 1)$

***Lời giải:***

Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 có 1 trong 3 dạng: $3x; 3x+1; 3x-1(x \in N^*)$

+Những số có dạng $3x$ mà $x > 1$ nên là hợp số.

+Xét 2 số có dạng $3x+1$ :đó là số $(3n+1)$ và $(3m+1)$

Xét tích $(3m+1)(3n+1) = 9mn + 3m + 3n + 1 = 3x + 1$

Tích trên có dạng $3x+1$

+ Lấy một số nguyên tố $p$ có dạng $3x-1$ (với $p$ là số nguyên tố bất kỳ ) ta lập tích của $p$ với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn $p$ rời trừ đi 1 ta có:

$M = 2.3.5.7.......9-1 = 3(2.3.5.7......p)-1$

$M$ có dạng: $3x-1$

Có 2 khả năng xảy ra:

*Khả năng 1: $M$ là số nguyên tố có dang $3x-1 > p$,bài toán được chứng minh.

*Khả năng 2: $M$ là hợp số: Ta chia $M$ cho $2,3,5,......,p$ đều tồn tại một số dư khác 0 nên các ước số nguyên tố của $M$ đều lớn hơn $p$, trong các ước này không có số nào có dạng $3x+1$ (đã chứng minh trên). Do đó ít nhất một trong các ước nguyên tố của $M$ phải có dạng $3x$ ( hợp số ) hoặc $3x-1$.

Vậy có vô số nguyên tố có dạng: $3x-1(x \in N, x > 1)$

**Bài 15:** Chứng minh có vô số số nguyên tố có dạng $4x+3(x \in N)$

***Lời giải:***

Các số nguyên tố lẻ không thể có dạng $4x$ và $4x+2$.

Vậy chúng chỉ có thể tồn tại dưới dạng $4x+1$ hoặc $4x+3$

+ Xét tích 2 số có dạng $4x+1$ là: $4m+1$ và $4n+1$

Ta có: $(4m+1)(4n+1) = 16mn+4m+4n+1 = 4(4mn+m+n)+1 = 4x+1$

Vậy tích của 2 số có dạng $4x+1$ là một số cũng có dạng $4x+1$

+Lấy một số nguyên tố p bất kỳ có dạng $4x-1$, ta lập tích của $4x+1$ với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn $p$ rồi chứ đi 1 khi ta có:

$M = 2.3.5.7....p-1 = 4(2.3.5.7....p)-1$

Có 2 khả năng xảy ra:

*Khả năng 1: $M$ là số nguyên tố có dang $4x-1 > p$,bài toán được chứng minh.

*Khả năng 2: $M$ là hợp số: Ta chia M cho $2,3,5,......,p$ đều tồn tại một số dư khác 0 nên các ước số nguyên tố của $M$ đều lớn hơn $p$,trong các ước này không có số nào có dạng $4x+1$ ( đã chứng minh trên). Do đó ít nhất một trong các ước nguyên tố của $M$ phải có dạng $4x$ ( hợp số ) hoặc $4x-1$.mà ước này hiển nhiên lơn hơn $p$.

## Dạng 5: Áp dụng định lí Fermat

### I.Phương pháp giải

-Định lí Fermat nhỏ: $2^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$ với $p$ là số nguyên tố.

-Bằng cách sử dụng định lí Fermat để giải các bài toán về số nguyên tố.

### II.Bài toán

**Bài 1:** Chứng minh định lí Fermat nhỏ. Nếu $p$ là số nguyên tố và $(a,p)=1$ thì $a^{p-1}-1 \vdots p$ với mọi số nguyên dương $a$.

***Lời giải:***

Vì $a$ không chia hết cho $p$ nên các số $2a, 3a, ..., (p-1)a$ cũng không chia hết cho $p$. Giả sử khi các số $a, 2a, 3a, ..., (p-1)a$ chia cho $p$ được các số dư là $r_1; r_2; ...; r_{p-1}$.

$r_1, r_2, ..., r_{p-1}$ đôi một khác nhau.

Thật vậy nếu có $r_i = r_j (1 \le i < j \le p-1)$ thì $ia \equiv ja(\bmod p) \Leftrightarrow a(i-j) \equiv 0(\bmod p)$ (*)

Mà $a$ không chia hết cho $p$ và $i-j$ không chia hết cho $p$ nên (*) không xảy ra.

do đó $r_1.r_2...r_{p-1} = (p-1)!$

$$2a.3a....(p-1)a \equiv r_1.r_2....r_{p-1}(\bmod p)$$

$$(p-1)!a^{p-1} \equiv (p-1)!(\bmod p)$$

Vì $((p-1)!;p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$

**Bài 2:** Chứng minh rằng tổng $1^{100} - 2^{100} + 3^{100} - ... + 1981^{100} - 1982^{100} \vdots 200283$

***Lời giải:***

Vì $200283 = 1983.101$ mà $(1983;101) = 1$ nên chỉ cần chứng minh $S \vdots 1983$ và $S \vdots 101$

* Chứng minh chia hết cho 1983

$$S = (1^{100} - 1982^{100}) - (2^{100} - 1981^{100}) + (3^{100} - 1980^{100}) - (4^{100} - 1979^{100}) + .... + (991^{100} - 992^{100}) + 1983$$

$=(-1)^{k+1}\sum_{k=1}^{991}\left[k^{100}-(1983-k)^{100}\right]+1983$

Ta có :

$k^{100}-(1983-k)^{100}=k^{100}-(k^{100}+1983m)$ ($m$ nguyên )

Vậy hiệu này chia hết cho 1983. Từ đó suy ra S chia hết cho 1983. (1)

* Chứng minh chia hết cho 101

Trừ các số chia hết cho 101 là $101^{100};202^{100};....;1919^{100}$ trong tổng $S$ còn lại các số có dạng $\pm a^{100}$ với $(a,101)=1$. Mà 101 là số nguyên tố nên theo định lí Fermat nhỏ, thì các số này chia 101 dư 1. Số các số hạng mang dấu cộng bằng số số hạng mang dấu trừ. Từ đó suy ra $S$ chia hết cho 101 (2)

Từ (1) , (2) suy ra $S$ chia hết cho 200283.

**Bài 3:** Nhà toán học Pháp Fermat đã đưa ra công thức $2^{2^n}-1$

để tìm các số nguyên tố với mọi số tự nhiên $n$.

1. Hãy tính giá trị của công thức này khi $x=4$.

2. Với giá trị này hãy chứng tỏ ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối bằng tổng các chữ số còn lại.

b) Tổng bình phương các chữ số là số chính phương.

c) Hiệu giữa tổng các bình phương của hai chữ số đầu và cuối với tổng các bình phương của các chữ số còn lại bằng tổng các chữ số của số đó.

***Lời giải:***

1. Ta thay $x=4$ vào công thức Fermat và được:

$2^{2^4}-1=65537$ là số nguyên tố.

2. Số nguyên tố 65537 có ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối $6+7=13$ đúng bằng tổng ba chữ số còn lại $5+5+3=13$.

b) Tổng bình phương các chữ số $6^2+5^2+5^2+3^2+7^2=36+25+25+9+49=144=12^2$

là số chính phương.

c) Tổng bình phương của hai chữ số đầu và cuối là $6^2+7^2=36+49=85$.

Tổng các bình phương của ba chữ số còn lại là: $5^2+5^2+3^2=25+25+9=59$.

Tổng các chữ số đó là: $6+5+5+3+7=26$.

Ta nhận thấy rằng: $85-59=26$

Hiệu này đúng bằng tổng các chữ số của số nguyên tố

**Bài 4:** Cho $n\in N^*$, chứng minh rằng: $2^{10n+1}+19$ là hợp số.

***Lời giải:***

Ta chứng minh $(2^{10n+1}+19)\vdots 23$ với mọi $n\ge 1$

Ta có: $2^{10}\equiv 1(\text{mod}\,22)\Rightarrow 2^{10n+1}\equiv 2(\text{mod}\,22)\Rightarrow 2^{10n+1}=22k+2(k\in N)$.

Theo định lý Fermat:

$2^{22}\equiv 1(\text{mod}\,23)\Rightarrow 2^{10n+1}\equiv 2^{22k+2}\equiv 4(\text{mod}\,23)$

$\Rightarrow (2^{10n+1}+19)\vdots 23$

Mà $2^{10n+1}+19>23$ nên $2^{10n+1}+19$ là hợp số ( ĐPCM )

**Bài 5:** Cho $n\in N^*$, chứng minh rằng: $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5$ là hợp số.

***Lời giải:***

Theo định lí Fermat nhỏ ta có $3^{10}\equiv 1(\text{mod}\,11), 2^{10}\equiv 1(\text{mod}\,11)$ .

Ta tìm số dư trong phép chia $2^{4n+1}$ và $3^{4n+1}$ cho 10, tức là tìm chữ số tận cùng chúng.

$2^{4n+1}=2.16^n\equiv 2(\text{mod}\,10)\Rightarrow 2^{4n+1}=10k+2,(k\in N)$

$3^{4n+1}=3.81^n\equiv 3(\text{mod}\,10)\Rightarrow 3^{4n+1}=10l+3,(l\in N)$

Mà $3^{10}\equiv 1(\text{mod}\,11)$ và $2^{10}\equiv 1(\text{mod}\,11)$ nên

$2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5\equiv 3^{10k+2}+2^{10l+3}+5\equiv 3^2+2^3+5\equiv 0(\text{mod}\,11)$

Mà $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5>11$ với mọi số tự nhiên $n$ khác 0

Vậy $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5$ là hợp số với mọi số tự nhiên $n$ khác 0.

**Bài 6:** Tìm số nguyên tố p để $(2^p+1)\vdots p$

***Lời giải:***

Vì $p$ là số nguyên tố mà $(2^p+1)\vdots p \Rightarrow p\neq 2$.

Ta thấy $p$ không chia hết cho 2 vì $p\neq 2$.

Theo định lí Fermat nhỏ ta có $2^{p-1}-1\vdots p$ mà $(2^p+1)\vdots p$ ( Giả thiết )

$\Rightarrow 2.2^{p-1}-2+3\vdots p \Rightarrow 2(2^p-1)+3\vdots p \Rightarrow 3\vdots p$ ( vì $2^{p-1}-1\vdots p$ )

$\Rightarrow p=3$ ( vì $p$ là số nguyên tố )

Vậy số nguyên tố cần tìm là 3.

**Bài 7:** Cho $p$ là số nguyên tố $p$ lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên $n$ thỏa mãn $(n.2^n-1)\vdots p$

***Lời giải:***

Ta có: $2^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$, ta tìm $n=(p-1)$ sao cho $n.2^n\equiv 1(\bmod p)$.

Ta có: $n.2^n\equiv m.(p-1).2^{m(p-1)}(\bmod p) \Rightarrow n.2^n\equiv -m\equiv 1(\bmod p) \Rightarrow m=kp-1,(k\in N^*)$.

Vậy, với $n=(kp-1)(p-1),(k\in N^*)$ thì $(n.2^n-1)\vdots p$.

**Bài 8:** Cho $p$ là số nguyên tố,chứng minh rằng số $2^p-1$ chỉ có ước nguyên tố có dạng là: $2pk+1$.

***Lời giải:***

Gọi $q$ là ước nguyên tố của $2^p-1$ thì $q$ lẻ, nên theo định lý Fermat:

$2^{q-1}-1\vdots q \Rightarrow (2^p-1,2^{q-1}-1)=2^{(p.q-1)}-1\vdots q \Rightarrow q-1\vdots p$ ,vì nếu $(q-1,p)=1$ thì $1\vdots q$ ,vô lý.

Mặt khác $q-1$ chẵn $\Rightarrow q-1\vdots 2p \Rightarrow q=2pk+1$.

**Bài 9:** Chứng minh rằng dãy số $2003+23k$ với $k=1,2,3,....$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

***Lời giải:***

Gỉa sử tồn tại số nguyên tố sao cho:

$2003+23k=p^n \quad (1)$

Trong đó $k,n$ là các số nguyên dương nào đó.

Từ $(1)$ dễ thấy $p$ không chia hết cho 23 nên $(23,p)=1$.

Theo định lý Fermat thì $p^{22}-1 \vdots 23 \Rightarrow p^{22t}=1+23s$ với mọi số nguyên dương $t,s$.

Từ đó $p^{22t+n}=(1+23s)p^n=p^n+23.p^n=2003+23k+23s.p^n$ hay $p^{22t+n}=2003+23(k+sp^n)$ với mọi $t=1,2,3,....$.

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn $(1)$ .Chẳng hạn:

Với $p=2$ thì $2003+23.2=2^{12}$

Với $p=3$ thì $2003+23.8=3^7$

Với $p=2003$ thì tồn tại k theo định lí Fermat thỏa mãn $2003+23\text{k}=2003^{23}$.

**Bài 10:** Giả sử $p$ là số nguyên tố lẻ đặt $m=\dfrac{9^p-1}{8}$. Chứng minh rằng m là một hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1}\equiv 1(\bmod m)$.

***Lời giải:***

Ta có $m=\left(\dfrac{3^p-1}{2}\right)\left(\dfrac{3^p+1}{4}\right)=ab$

dễ thấy $a,b$ đều là số nguyên dương lớn hơn 1 nên $m$ là hợp số mà $m=9^{p-1}+9^{p-2}+...+1$ suy ra $m$ lẻ và chia 3 dư 1.

Theo định lí Fermat nhỏ: $9^p-9 \vdots p$ vì $(p,8)=1$

Vì $m-1$ chẵn nên cũng có $m-1 \vdots 2p$

Do đó $3^{m-1}-1 \vdots 3^{2p}-1 \vdots \dfrac{9^p-1}{8}=m \Rightarrow 3^{m-1}\equiv 1(\bmod p) \Rightarrow$ ĐPCM

**Bài 11:** Cho số nguyên tố $p$, các số dương $a\equiv 1(\bmod p^n)$. Tìm số dư khi chia $a$ cho $p^{n-1}$.

***Lời giải:;***

Xét các trường hợp sau:

1) $p=2$ .Ta có $a^2 \equiv 1(\bmod 2^n)$

$\Rightarrow$ $a$ lẻ. Đặt $a=2x+1(x \in N)$

$\Rightarrow 2(x+1)x \vdots 2^n \Rightarrow x(x+1) \vdots 2^{n-2}$

Dễ suy ra $a \equiv \pm 1(\bmod 2^{n-1})$ .

2) $p \geq 3$ ta có $t$ $a^p \equiv a \equiv 1(\bmod p)$ ( định lí Fermat nhỏ )

$\Rightarrow d=(a-1;a^{p-1}+a^{p-2}+....+a+a) \vdots p$

$\Rightarrow d=p$ vì $d$ không chia hết cho $p$

$(a-1)(a^{p-1}+a^{p-2}+.....+a+1) \vdots p^n$

mà $a^{p-1}+a^{p-2}+...+a+1 \equiv p(\bmod p^2)$

$\Rightarrow a-1 \vdots p^{n-1} \Rightarrow a \equiv 1(\bmod p^{n-1})$.

**Bài 12:** Chứng minh rằng $A=3^p-2^p-1 \vdots 42p$ ( với $p$ là số nguyên tố lớn hơn 7 )

***Lời giải:***

Ta có: $3^p-1 \equiv 0(\bmod 2) \Rightarrow A \vdots 2$

$2^p+1 \equiv 0(\bmod 3) \Rightarrow A \vdots 3$ .

vì $p$ là số nguyên tố lớn hơn 7 nên $p$ chỉ có thể có dạng $6n \pm 1(n \in N^*)$

Nếu $p=6n+1$

$A=3^{6n+1}-2^{6n+1}-1=3(3^{6n}-1)-2(2^{6n}-1).$

Vì $\begin{cases} 3^6 \equiv 1(\bmod 7) \\ 2^6 \equiv 1(\bmod 7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^6-1 \vdots 7 \\ 2^6-1 \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow A \vdots 7.$

Nếu $p=6n+5 \Rightarrow A=3^5(3^{6t}-1)-2^5(2^{6t}-1)+3^5-2^5-1$

Ta cũng có: $t\ 3^5-2^5-1\equiv 0(\bmod 7)\Rightarrow A\vdots 7$

Vậy $A$ chia hết cho 7

Mặt khác theo định lí Fermat nhỏ ta có:

$3^p\equiv 39(\bmod p)$ và $2^p\equiv 2(\bmod p)$ nên $A\equiv 0(\bmod p)$

$2,3,7,p$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên $t\ \ A\vdots(2.3.7.p)\Rightarrow A\vdots 42p$ ( đpcm )

**Bài 13:** Cho $p,q$ là hai số nguyên tố phân biệt. Chứng minh rằng: $p^{q-1}+q^{p-1}-1\vdots pq$ chia hết cho

***Lời giải:***

Áp dụng định lý Fermat nhỏ ta có: $(p^q-p)\vdots q\Rightarrow p(p^{q-1}-1)\vdots q$ do $p,q$ là số nguyên tố). (1)

Vì $p,q$ là các số nguyên tố nên $(p,q)=1$

Từ (1) suy ra $(p^{q-1}-1)\vdots q$ (2)

Từ (2) suy ra $(p^{q-1}+q^{p-1}-1)\vdots q$ (3)

Vì $p$ và $q$ có vai trò như nhau nên $(p^{q-1}+q^{p-1}-1)\vdots p$ (4)

Lại vì $(p,q)=1$ nên từ (3) và (4) ta suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 14:** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $7\vdots 2^n-1$.

***Lời giải:***

Ta có 2 không chia hết cho 7; 7 là số nguyên tố nên theo định lí Fermat ta có $2^6\equiv 1(\bmod 7)$

Ta có $2^3\equiv 8\equiv 1(\bmod 7)$

Do đó tất cả các số chia hết cho 3 đều thỏa mãn yên cầu đề bài.

**Bài 15:** Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $5^{p^2}\equiv 1(\bmod p^2)$.

***Lời giải:***

Gỉa sử số nguyên tố $p$ thỏa mãn điều kiện đã cho.

Khi đó $5^{2p^2}\equiv 1(\bmod p)$.

Vì $(p^2-1)\vdots p-1$ nên theo định lí Fermat nhỏ ta có : $5^{2(p^2-1)} \equiv 1(\text{mod } p)$.

Từ đó suy ra $5^2 \equiv 1(\text{mod } p)$ nên $p \in \{2;3\}$

Thử lại ta thấy $p=3$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

## Dạng 6: Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

### *I.Phương pháp giải*

- Sử dụng lý thuyết và tính chất của 2 số nguyên tố cùng nhau để giải các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau.

### *II.Bài toán*

**Bài 1:** Chứng minh rằng: 5 và 7 là hai số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Ta có $5=5.1$ ; $7=7.1$

$UCLN(5;7)=1$

Vậy hai số 5 và 7 là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 2:** Chứng minh rằng: Hai số tự nhiên liên tiếp khác 0 là hai số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp là: $n, n+1(n \in N^*)$

Đặt $d=(n,n+1),(d \in N^*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \vdots d \\ n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow n+1-n \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1.$$

Vậy $n$ và $n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 3:** Chứng minh rằng: Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Gọi 2 số lẻ liên tiếp là: $2k+1, 2k+3(k \in N)$.

Đặt $(2k+1;2k+3)=d(d \in N^*)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2k+1 \vdots d \\ 2k+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 2k+3-2k-1=2 \vdots d$

$\Rightarrow d \in \{1;2\}$

Mà $d$ là ước số lẻ nên $d=1$. Vậy hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 4:** Chứng minh rằng : $2n+1$ và $3n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

$(2n+1, 3n+1) = d (n \in N)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 3n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1) \vdots d \\ 2(3n+1) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3 \vdots d \\ 6n+2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 6n+3-6n-2=1 \vdots d \Rightarrow d=1$.

Vậy $2n+1$ và $3n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 5 :** Cho $a$ và $b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau: $a$ và $a+b$.

***Lời giải:***

Đặt $(a, a+b) = d (d \in N^*)$

$\Rightarrow \begin{cases} a \vdots d \\ a+b \vdots d \end{cases} \Rightarrow b \vdots d$

Mà $a$ và $b$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d=1$

Vậy $a$ và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 6:** Cho $a$ và $b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau: $a^2$ và $a+b$

***Lời giải:***

Đặt $(a^2, a+b) = d (d \in N^*)$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \vdots d \\ a+b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots d \\ a+b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots d \\ b \vdots d \end{cases}$

Mà $a$ và $b$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d=1$

Vậy $a^2$ và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 7:** Cho $a$ và $b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau: $ab$ và $a+b$.

***Lời giải:***

Đặt $(ab,a+b)=d(d\in N^*)$

$$\Rightarrow\begin{cases}ab\,\vdots\,d\\ a+b\,\vdots\,d\end{cases}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\,\vdots\,d\\ b\,\vdots\,d\end{array}\right.\\ a+b\,\vdots\,d\end{cases}$$

+ TH1: $a\,\vdots\,d\Rightarrow b\,\vdots\,d$

Mà $a$ và $b$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d=1$

Vậy $ab$ và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

+ TH2: $b\,\vdots\,d\Rightarrow a\,\vdots\,d$

Mà $a$ và $b$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d=1$

Vậy $ab$ và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 8 :** Cho $a$ và $b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau là hai số nguyên tố cùng nhau: $b$ và $a-b(a>b)$.

***Lời giải:***

Đặt $(b,a-b)=d(d\in N^*)$

$$\Rightarrow\begin{cases}ab\,\vdots\,d\\ c\,\vdots\,d\end{cases}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\,\vdots\,d\\ b\,\vdots\,d\end{array}\right.\\ c\,\vdots\,d\end{cases}$$

Mà $a$ và $b$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d=1$

Vậy $b$ và $a-b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 9:** Chứng minh rằng nếu nếu $c$ nguyên tố cùng với $a$ và $b$ thì c nguyên tố cùng nhau với tích $ab$

***Lời giải:***

Gọi $p$ là ước chung nguyên tố của $c$ và $ab$.

$\Rightarrow \begin{cases} c \vdots d \\ ab \vdots d \end{cases}$

+ TH1: $a \vdots d$

Mà $a$ và $c$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d = 1$

Vậy $ab$ và $c$ là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

+ TH2: $b \vdots d$

Mà $c$ và $b$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow d = 1$

Vậy $ab$ và $c$ là hai số nguyên tố cùng nhau. ( ĐPCM )

**Bài 10:** Tìm số tự nhiên n để các số $9n+24$ và $3n+4$ là các số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Giả sử $9n+24$ và $3n+4$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$9n+24-3(3n+4) \vdots d \Rightarrow 12 \vdots d \Rightarrow d \in \{2,3\}$.

Điều kiện để $(9n+24;3n+4)=1$ là $d \neq 2; d \neq 3$.Hiển nhiên $d \neq 3$ vì $3n+4$ không chia hết cho 3.Muốn $d \neq 2$ phải có ít nhất một trong 2 số $9n+24$ và $3n+4$ không chia hết cho 2.Ta thấy:

+ Nếu $9n+24$ là số lẻ $\Leftrightarrow 9n$ lẻ $\Leftrightarrow n$ lẻ,

+ Nếu $3n+4$ là số lẻ $\Leftrightarrow 3n$ lẻ $\Leftrightarrow n$ lẻ.

Vậy điều kiện để hai số $9n+24$ và $3n+4$ là các số nguyên tố cùng nhau là n lẻ.

**Bài 11:** Tìm số tự nhiên $n$ để các số $18n+3$ và $21n+7$ là các số nguyên tố cùng nhau.

***Lời giải:***

Giả sử $18n+3$ và $21n+7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$6(21n+7)-7(18n+3) \vdots d \Rightarrow 21 \vdots d \Rightarrow d \in \{1;3;7;21\}$.

Điều kiện để $(18n+3;21n+7)=1$ là $d \neq 3; d \neq 7; d \neq 21$.Hiển nhiên $d \neq 3; d \neq 21$ vì $21n+7$ không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 7$ thì số $18n+3$ không chia hết cho 7 (vì $21n+7$ luôn chia hết cho 7 )

$18n+3 \vdots 7 \Leftrightarrow 18n+3-21 \vdots 7 \Leftrightarrow 18(n-1) \vdots 7 \Leftrightarrow n-1 \vdots 7$.

Vậy điều kiện để hai số $18n+3$ và $21n+7$ là các số nguyên tố cùng nhau là $n \neq 7k+1, (k \in N^*)$.

**Bài 12:** Chứng minh rằng hai số $2n+5$ và $4n+12$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$ .

***Lời giải:***

Gọi $d=(2n+5;4n+12)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2n+5 \vdots d \\ 4n+12 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(2n+5) \vdots d \\ 4n+12 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4n+10 \vdots d \\ 4n+12 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow 4n+12-4n-10 \vdots d$

$\Rightarrow 2 \vdots d$

Mà $2n+5$ là số lẻ nên $d=1$

Vậy hai số $2n+5$ và $4n+12$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$.

**Bài 13:** Chứng minh rằng hai số $12n+1$ và $30n+2$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$.

***Lời giải:***

Gọi $d=(12n+1;30n+2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1 \vdots d \\ 30n+2 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1) \vdots d \\ 2(30n+2) \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 60n+5 \vdots d \\ 60n+4 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow 6n+5-6n-4 \vdots d$

$\Rightarrow 1 \vdots d$

$\Rightarrow d = 1$

Vậy hai số $12n+1$ và $30n+2$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$.

**Bài 14:** Chứng minh rằng hai số $2n+3$ và $4n+8$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$.

***Lời giải:***

Gọi $d = (2n+3; 4n+8)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2n+3 \vdots d \\ 4n+8 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3) \vdots d \\ 4n+8 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4n+6 \vdots d \\ 4n+8 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow 4n+8-4n-6 \vdots d$

$\Rightarrow 2 \vdots d$

$\Rightarrow d = 1$

Vì $2n+3$ là số lẻ.

Vậy hai số $2n+3$ và $4n+8$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$.

**Bài 15:** Chứng minh rằng hai số $3n+2$ và $5n+3$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$.

***Lời giải:***

Gọi $d = (3n+2; 5n+3)$

$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2 \vdots d \\ 5n+3 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5(3n+2) \vdots d \\ 3(5n+3) \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 15n+10 \vdots d \\ 15n+9 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow 15n+10-15n-9 \vdots d$

$\Rightarrow 1 \vdots d$

$\Rightarrow d=1$

Vậy hai số $3n+2$ và $5n+3$ là các số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$.

## PHẦN III.BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên $n$ để $A=n^{2018}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố.

*(HSG Tỉnh Quảng Ngãi 2015 – 2016).*

***Lời giải:***

Xét $n=0$ thì $A=1$ không phải là số nguyên tố
Xét $n=1$ thì $A=3$ là số nguyên tố.
Xét $n>1$: $A=n^{2018}-n^2+n^{2002}-n+n^2+n+1$

$$=n^2\left(\left(n^3\right)^{672}-1\right)+n\left(\left(n^3\right)^{667}-1\right)+\left(n^2+n+1\right)$$

Mà $\left(n^3\right)^{672}-1$ chia hết cho $n^3-1$, suy ra $\left(n^3\right)^{672}-1$ chia hết cho $n^2+n+1$.

Tương tự: $\left(n^3\right)^{667}-1$ chia hết cho $n^2+n+1$.

Vậy $A$ chia hết cho $n^2+n+1>1$ nên $A$ là hợp số. Số tự nhiên cần tìm $n=1$.

**Bài 2 :** Tìm các số nguyên tố $p$ để $p^2+2^p$ cũng là số nguyên tố.

*(HSG Thành phố Hà Nội 2016 – 2017).*

***Lời giải:***

Nếu $p=2$ thì $p^2+2^p=4+4=8$ (không thỏa mãn).

Nếu $p=3$ thì $p^2+2^p=9+8=17$ (thỏa mãn).

Nếu $p\ge 3$ thì $p^2+2^p=\left(p^2-1\right)+\left(2^p+1\right)\vdots 3$.

Kết luận $p=3$ là giá trị cần tìm.

**Bài 3:** Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $p^2-5q^2=4$.

*(Chuyên Vũng Tàu 2016 – 2017).*

***Lời giải:***

$p^2-5q^2=4 \Leftrightarrow p^2-4=5q^2 \Leftrightarrow (p-2)(p+2)=5q^2$

Do $0<p-2<p+2$ và $q$ nguyên tố nên $p-2$ chỉ có thể nhận các giá trị $1;5;q;q^2$.

Ta có bảng giá trị tương ứng:

| $p-2$ | $p+2$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $5q^2$ | 3 | 1 |
| 5 | $q^2$ | 7 | 3 |
| $q$ | $5q$ | 3 | 1 |
| $q^2$ | 5 | 3 | 1 |

Do $p,q$ là các số nguyên tố nên chỉ có cặp $(p;q)=(7;3)$ thỏa mãn.

**Bài 4:** Tìm tất cả các số tự nhiên $N$ (theo hệ thập phân) thỏa mãn các điều kiện sau: $N=\overline{aabb}$, trong đó $\overline{abb}$ và $\overline{aab}$ là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Do $\overline{aab}$ là số nguyên tố, tức là $110a+b$ là số nguyên tố ta có $b=1,3,7$ hoặc 9.

Từ điều kiện thứ nhất ta có: $N=11(100a+b)$.

Theo bảng số nguyên tố ta tìm được các cặp số nguyên tố $\overline{abb}$ và $\overline{aab}$ thỏa mãn điệu kiện thứ nhất sau đây: $(223;233)$,$(227;277)$, $(331;311)$, $(443;433)$, $(449;499)$, $(557;577)$, $(773;733)$, $(881;811)$, $(887;877)$, $(991;911)$, $(997;977)$

Tương ứng với $100a+b$ là các số sau: $203=2.29$; $207=9.23$; $301=7.43$; $403=13.31$; 409 là số nguyên tố; $507=3.13^2$; $703=19.37$; $801=3^2.89$; $807=2.269$; $901=17.53$; 907 là số nguyên tố.

Vậy $N=8877=3.11.269$

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên $p$ sao cho $p$ và $p+3$ đều là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Một số tự nhiên bất kì có 1 trong hai dạng: $2n;2n+1$ với $n\in N$. Nếu $p=2n+1$ thì $p+3=2n+4$ chia hết cho 2.

Ta có $p+3>3$ và $p+3$ chia hết cho 2. Nên $p+3$ là hợp số trái đề bài.

Do đó: $p=2n$. Nhưng $p$ nguyên tố nên $p=2$ và $p+3=5$ nguyên tố.

Vậy $p=2$.

**Bài 6:** Tìm số nguyên tố $p$ sao cho $p+4$ và $p+8$ đều là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Bất kì số tự nhiên nào cũng có một trong ba dạng: $3n;3n+1;3\text{n}+2;\text{n}\in\text{N}$. Nếu $p=3n$ thì $p+8=3n+9\vdots 3$, vô lí.

Nếu $p=3n+2$ thì $p+4=3n+6$, vô lí. Do đó $p=3n$.

Nhưng $p$ nguyên tố nên $p=3; p+4=7; p+8=11$ nguyên tố. Vậy $p=3$.

**Bài 7:** Tìm các số nguyên tố $x,y,Z$ thỏa mãn $x^y+1=Z$

***Lời giải:***

Vì $x,y$ là các số nguyên tố

$\Rightarrow x\ge 2, y\ge 2$

$\Rightarrow Z\ge 5\Rightarrow Z$ là số nguyên tố lẻ

$\Rightarrow x^y$ là số chẵn $\Rightarrow x$ chẵn

$\Rightarrow x=2$ thay vào ta có

$Z=2^y+1$

Nếu $y$ lẻ $\Rightarrow 2^y+1\vdots 3$ ($a^n+b^n\vdots a+b$ lẻ)

$\Rightarrow Z\vdots 3$ vô lí

Do đó $y$ là số chẵn $\Rightarrow y=2$

Thay $x=2, y=2\Rightarrow Z=5$

Vậy $x=2, y=2\Rightarrow Z=5$

**Bài 8:** Tìm $n\in N^*$ để $n^4+4$ là số nguyên tố

***Lời giải:***

a) $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2$

$=\left(n^2+2\right)^2-\left(2n\right)^2$

$=\left(n^2-2n+2\right)\left(n^2+2n+2\right)$

Để $n^4+4$ là số nguyên tố thì $2n^2-2n+2=1\Rightarrow n=1$

Thử lại với $n=1$ thì $n^4+4=5$ là số nguyên tố.

Vậy với $n=1$ thì $n^4+4$ là số nguyên tố.

**Bài 9:** Tìm số nguyên tố $p$ sao cho $p+2$ và $p+4$ là các số nguyên tố (trích đề thi HSG Quãng Trạch)

***Lời giải:***

Với $p=3$ thì $p+2=5$ và $p+4=7$ là các số nguyên tố

Với $p>3$ thì $p=3k\pm 1$

Nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3\vdots 3$

Nếu $p=3k-1$ thì $p+4=3k+3\vdots 3$

Vậy $p=3$ thì $p+2$ và $p+4$ là các số nguyên tố.

**Bài 10:** Tìm các số tự nhiên $n$ để $n^2+12n$ là số nguyên tố.( trích đề thi HSG Thanh Oai)

***Lời giải:***

Ta có $n^2+12n=n(n+12)$

Vì $n+12>1$ nên để $n^2+12n$ là số nguyên tố thì $n=1$

Thử lại $n^2+12n=1^2+12.1=13$ là số nguyên tố

Vậy với $n=1$ thì $n^2+12n$ là số nguyên tố

**Bài 11:** Chứng minh rằng nếu $p$ và $p^2+2$ là các số nguyên tố thì $p^3+2$ cũng là số nguyên tố. (trích đề thi HSG Nga Sơn)

***Lời giải:***

Với mọi số nguyên tố lớn hơn 3 thì chia hết cho 3 đều có dạng $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2(k\in N^*)$

Với $p=3k+1$ thì $p^2+2=9k^2+6k+3$ chia hết cho 3

Với $p=3k+2$ thì $p^2+2=9k^2-6k+6$ chia hết cho 3

Vì $p$ là số nguyên tố nên $p\geq 2$ khi đó trong cả hai trường hợp trên thì $p^2+2$ đều lớn hơn 3 và chia hết cho 3, tức là $p^2+2$ là hợp số

=> $p^2+2$ chỉ là hợp số khi $p=3$ khi đó $p^2+2=11$ là số nguyên tố

=> $p^3+2=3^3+2=29$ là số nguyên tố

Vậy nếu $p$ và $p^2+2$ là các số nguyên tố thì $p^3+2$ cũng là số nguyên tố.

**Bài 12:** *Cho* $A=3+3^2+3^3+...+3^{100}$ là số nguyên tố hay hợp số? vì sao? (trích đề thi HSG Nam Trực)

***Lời giải:***

$A=3+3^2+3^3+...+3^{100}=(3+3^2)+(3^3+3^4)+...+(3^{99}+3^{100})$

$=3(1+3)+3^3(1+3)+...+3^{99}(1+3)$

$=3.4+3^3.4+...+3^{99}.4=4(3+3^3+...+3^{99})\vdots 4$

Mà $A>4$

Nên $A=3+3^2+3^3+...+3^{100}$ là hợp số

**Bài 13:** Cho $n$ là số nguyên tố. Hỏi $n^{10}-1$ là số nguyên tố hay hợp số? (trích đề thi HSG Bá Thước)

***Lời giải:***

Ta có $n$ là số nguyên tố suy ra $n$ chia $2$ dư $1$

$=> n^{10}$ chia $2$ dư $1$

$=> n^{10}-1$ chia hết cho $2$

Vậy $n^{10}-1$ là hợp số

**Bài 14:** Tìm số tự nhiên $n$ sao cho $p=(n-2)(n^2+n-5)$ là số nguyên tố. (Trích đề thi HSG Hiệp Hòa)

***Lời giải:***

Vì $p=(n-2)(n^2+n-5)$ nên $n-2$ và $n^2+n-5\in Ư(p)$

Vì $p$ là số nguyên tố nên $n-2=1$ hoặc $n^2+n-5=1$

+ Nếu $n-2=1 => n=3$ thì $p=(3-2)(3^2+3-5)=1.7=7$ (thỏa)

+ Nếu $n^2+n-5=1 => n^2+n=6 => n(n+1)=6=2.3 => n=2$

thì $p=(2-2)(2^2+2-5)=0$ không phải là số nguyên tố, loại

Vậy $n=3$ thì $p=(n-2)(n^2+n-5)$ là số nguyên tố.

**Bài 15:** Tìm các số tự nhiên $n$ để $3^n+6$ là số nguyên tố. (trích đề thi HSG Hưng Hà).

***Lời giải:***

Với $n=0$ ta có $3^n+6=3^0+6=7$ là số nguyên tố.

Với $n\neq 0$ ta có $3^n\vdots 3, 6\vdots 3$ nên $3^n+6\vdots 3$ mà $3^n+6>3$ do đó $3^n+6$ là hợp số

Vậy $n = 0$ thì $3^n + 6$ là số nguyên tố.

**HẾT**

# CHUYÊN ĐỀ SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

## CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP DÃY SỐ ĐỂ TÌM SỐ NGUYÊN TỐ

## PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. SỐ NGUYÊN TỐ

-Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1,chỉ có 2 ước là 1 và chính nó.

-Số nguyên tố nhỏ nhất vừa là số nguyên tố chẵn duy nhất là số 2.

-Không thể giới hạn số nguyên tố cũng như tập hợp số nguyên tố.Hay nói cách khác,số nguyên tố là vô hạn.

-Khi 2 số nguyên tố nhân với nhau thì tích của chúng không bao giờ là một số chính phương.

-Ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên được coi là số nguyên tố.

-Để kết luận số tự nhiên a là một số nguyên tố ( $a > 1$ ),chỉ cần chứng minh a không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a.

-Nếu tích $ab \vdots p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots p \\ b \vdots p \end{array}\right.$ (p là số nguyên tố)

-Đặc biệt nếu $a^n \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ (p là số nguyên tố)

-Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: $4n \pm 1 (n \in N^*)$

-Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: $6n \pm 1 (n \in N^*)$

-Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị.

## PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

**Dạng 1: Tìm số nguyên tố để một hay nhiều biểu thức đồng thời là số nguyên tố.**

***I. Phương pháp giải***

-Dựa vào các dấu hiệu chia hết và các tính chất về số nguyên tố ,hợp số, để giải các bài toán về chứng minh hoặc giải thích.

- Trong $n$ số tự nhiên liên tiếp chỉ có một và chỉ một số chia hết cho $n$.
- Nắm chắc các tính chất đặc trưng của số nguyên tố để giải bài toán.

***II. Bài toán***

**Bài 1:** Tìm số nguyên tố $p$ sao cho các số sau cũng là số nguyên tố.

a, $p+10, p+14$

b, $p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$

***Lời giải:***

a,
- Với $p=2 \Rightarrow p+2=4$ là hợp số, nên $p=2$ không thỏa mãn đề bài.
- Với $p=3 \Rightarrow p+10=13, p+14=17$ đều là số nguyên tố. Do đó $p=3$ thỏa mãn đề bài.
- Với $p>3$, $p$ là số nguyên tố nên $p$ có dạng $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2, (k \in N)$

+ Nếu $p=3k+1 \Rightarrow p+14=3k+15=3(k+5) \vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+1$ không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu $p=3k+2 \Rightarrow p+10=3k+12=3(k+4) \vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+2$ không thỏa mãn đề bài.

Vậy $p=3$ thì $p+10, p+14$ là số nguyên tố.

b,
- Với $p=2 \Rightarrow p+6=8$ là hợp số, nên $p=2$ không thỏa mãn đề bài.
- Với $p=3 \Rightarrow p+6=9$ là hợp số, nên $p=3$ không thỏa mãn đề bài.
- Với $p=5 \Rightarrow p+2=7, p+6=11, p+8=13, p+12=17, p+14=19$ đều là số nguyên tố, nên $p=5$ thỏa mãn đề bài.
- Với $p>5$ và $p$ là số nguyên tố nên nên $p$ có dạng $5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4, (k \in N^*)$
+ Nếu $p=5k+1 \Rightarrow p+14=5k+15 \vdots 5$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+1$ không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu $p=5k+2 \Rightarrow p+8=5k+10 \vdots 5$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+2$ không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu $p=5k+3 \Rightarrow p+12=5k+15 \vdots 5$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+3$ không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu $p=5k+4 \Rightarrow p+6=5k+10 \vdots 5$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+4$ không thỏa mãn đề bài.

Vậy $p=5$ thì $p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$ là số nguyên tố.

**Bài 2**: Tìm 3 số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

***Lời giải:***

Gọi 3 số lẻ liên tiếp là: $2k+1, 2k+3, 2k+5 (k \in N^*)$

Trong 3 số lẻ liên tiếp luôn có 1 số chia hết cho 3.

- Nếu $2k+3 \vdots 3 \Rightarrow 2k \vdots 3 \Rightarrow k \vdots 3$ mà $2k+3$ là số nguyên tố. Mà 1 không là số nguyên tố nên .

- Nếu $2k+5 \vdots 3 \Rightarrow 2k+2 \vdots 3 \Rightarrow 2(k+1) \vdots 3 \Rightarrow (k+1) \vdots 3$. Mà $2k+5$ là số nguyên tố $\Rightarrow k=-1$ trái với điều kiện.

- Nếu $2k+1 \vdots 3 \Rightarrow 2k+1=3$ (vì $2k+1$ là số nguyên tố) $\Rightarrow k=1 \Rightarrow 2k+3=5; 2k+5=7$ đều là các số nguyên tố $\Rightarrow k=1$ thỏa mãn đề bài.

Vậy 3 số tự nhiên lẻ cần tìm là $3, 5, 7$.

**Bài 3:** Tìm các số nguyên tố $p$ sao cho $p$ vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử $p$ là số nguyên tố cần tìm thì ta có $p = p_1 + p_2 = p_3 - p_4$ ($p_1, p_2, p_3, p_4$ đều là các số nguyên tố và $p_3 > p_4$)

Để $p$ là số nguyên tố thì $p_1, p_2$ có một trong hai số là số chẵn và $p_3, p_4$ cũng có một trong hai số là số chẵn.

Giả sử $p_1 > p_2$ thì $\Rightarrow p_2 = p_4 = 2$

Ta có: $p = p_1 + 2 = p_3 - 2 \Rightarrow p_3 = p_1 + 4$.

Ta thấy $p_1, p_1 + 2, p_1 + 4$ là 3 số nguyên tố lẻ liên tiếp.

Theo câu $2 \Rightarrow p_1 = 3 \Rightarrow p = p_1 + 2 = 5$.

Thử lại: $p = 5 \Rightarrow 5 = 2 + 3 = 7 - 2$.

Vậy số cần tìm là 5.

**Bài 4:** Tìm $k \in N$ để dãy số $k+1, k+2, ....., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

***Lời giải:***

-Nếu $k = 0 \Rightarrow$ Ta có dãy số $1; 2; 3; ...; 10$ có các số nguyên tố là $2; 3; 5; 7 \Rightarrow$ Có 4 số nguyên tố.

-Nếu $k = 1 \Rightarrow$ Ta có dãy số $2; 3; 4; ...; 11$ có các số nguyên tố là $2; 3; 5; 7; 11 \Rightarrow$ Có 5 số nguyên tố.

-Nếu $k = 2 \Rightarrow$ Ta có dãy số $3; 4; 5; ...; 12$ có các số nguyên tố là $3; 5; 7; 11 \Rightarrow$ Có 4 số nguyên tố.

-Nếu $k \geq 3 \Rightarrow$ Dãy số $k+1, k+2, ..., k+10$ đều gồm các số lớn hơn 3 và bao gồm 5 số lẻ liên tiếp và 5 sô chẵn liên tiếp.

Vì các số trong dãy đều lớn hơn 3 nên suy ra 5 số chẵn liên tiếp đều là hợp số và trong 5 số lẻ liên tiếp tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3 và số này cũng là hợp số.

Vậy $k = 1$ là giá trị cần tìm.

**Bài 5**: Tìm số nguyên tố $p$ sao cho: $p + 94, p + 1994$ cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

- Với $p = 2$ là số nguyên tố nên $p + 94 = 96$ là hợp số. Do đó $p = 2$ không thỏa mãn đề bài.
- Với $p = 3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p + 94 = 97, p + 1994 = 1997$ đều là số nguyên tố. Do đó $p = 3$ thỏa mãn đề bài.
- Với $p > 3$, $p$ là số nguyên tố nên $p$ có dạng $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2, (k \in N, k > 0)$

+ Nếu $p=3k+1$ $\Rightarrow p+1994=3k+1+1994\vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+1$ không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu $p=3k+2$ $\Rightarrow p+94=3k+2+94\vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+2$ không thỏa mãn đề bài.
Vậy $p=3$ là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 6**: Tìm số nguyên tố $p$ sao cho $p+18, p+24, p+26, p+32$ cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

- Với $p=2$ ta có $p+94=96$ là hợp số $\Rightarrow p=2$ không thỏa mãn đề bài.
- Với $p=3$ ta có $p+94=97, p+1994=1997$ đều là số nguyên tố, do đó $p=3$ thỏa mãn đề bài.
- Với $p>3$, p là số nguyên tố nên p có dạng $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2,(k\in N, k>0)$

+ Nếu $p=3k+1$ $\Rightarrow p+1994=3k+1+1994\vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+1$ không thỏa mãn đề bài.
+ Nếu $p=3k+2$ $\Rightarrow p+94=3k+2+94\vdots 3$ là hợp số, do đó $\Rightarrow p=3k+2$ không thỏa mãn đề bài.
Vậy $p=3$ là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 7**: Tìm số nguyên tố $p$ sao cho: $p+2, p+8, p+16$ đều là số nguyên tố.

***Lời giải:***

- Với $p=2$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+94=96$ là hợp số $\Rightarrow p=2$ không thỏa mãn đề bài.

- Với $p=3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+94=97, p+1994=1997$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow p=3$ thỏa mãn đề bài.
- Với $p>3$, $p$ là số nguyên tố nên p có dạng $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2,\left(k\in N^*\right)$

+ Nếu $p=3k+1$ $\Rightarrow p+1994=3k+1+1994\vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+1$ không thỏa mãn đề bài.
+ Nếu $p=3k+2$ $\Rightarrow p+94=3k+2+94\vdots 3$ là hợp số, do đó $\Rightarrow p=3k+2$ không thỏa mãn đề bài.
Vậy $p=3$ là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 8**: Tìm số nguyên tố $p$ sao cho:
a, $2p-1, 4p-1$ cũng là số nguyên tố.
b, $2p+1, 4p+1$ cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

a,
- Với $p=2$ $\Rightarrow 2p-1=3, 4p-1=7$ là số nguyên tố $\Rightarrow p=2$ thỏa mãn đề bài.
- Với $p=3$ $\Rightarrow 2p-1=5, 4p-1=11$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow p=3$ thỏa mãn đề bài.
- Với $p>3$, p là số nguyên tố nên p có dạng $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2,\left(k\in N^*\right)$
+ Nếu $p=3k+1$ $\Rightarrow 4p-1=4(3k+1)-1=12k+3\vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+1$ không thỏa mãn đề bài.
+ Nếu $p=3k+2$ $\Rightarrow 2p-1=2(3k+2)-1=6k+3\vdots 3$ là hợp số nên $\Rightarrow p=3k+2$ không thỏa mãn đề bài.
Vậy $p=3$ và $p=2$ là số nguyên tố cần tìm.
b,
- Với $p=2$ là số nguyên tố $\Rightarrow 4p+1=9$ là hợp số $\Rightarrow p=2$ không thỏa mãn đề bài.

- Với $p=3$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p+1=7, 4p+1=13$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow p=3$ thỏa mãn đề bài.
- Với $p>3$, $p$ là số nguyên tố nên p có dạng $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2, \left(k\in N^*\right)$

+ Nếu $p=3k+1 \Rightarrow 2p+1=2\left(3k+1\right)+1=6k+3 \vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+1$ không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu $p=3k+2 \Rightarrow 4p+1=4\left(3k+2\right)+1=12k+9 \vdots 3$ là hợp số nên $\Rightarrow p=3k+2$ không thỏa mãn đề bài.

Vậy $p=3$ là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 9**: Tìm tất cả các số tự nhiên $n$ để $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$, $n+15$ đều là số nguyên tố

***Lời giải:***

- Với $n=0$ thì $n+9=9$ là hợp số. Do đó $n=0$ không thỏa mãn đề bài.
- Với $n=1$ thì $n+3=4$ là hợp số. Do đó $n=1$ không thỏa mãn đề bài.
- Với $n=2$ thì $n+13=15$ là hợp số. Do đó $n=2$ không thỏa mãn đề bài.
- Với $n=3$ thì $n+3=6$ là hợp số. Do đó $n=3$ không thỏa mãn đề bài.
- Với $n=4$ thì thì $n+1=5, n+3=7, n+7=11, n+9=13, n+13=17, n+15=19$ đều là các số nguyên tố.

Do đó $n=4$ thỏa mãn đề bài.

- Với $n>4$ thì n có có dạng $n=4k+1, n=4k+2, n=4k+3, (k\in N^*)$.

+ Với $n=4k+1$ thì $n+1=4k+2$ là hợp số. Do đó $n=4k+1$ không thỏa mãn.

+ Với $n=4k+3$ thì $n+1=4k+4$ là hợp số. Do đó $n=4k+3$ không thỏa mãn.

+ Với $n=4k+2$ thì $n+13=4k+2+13=4k+15$ là hợp số. Do đó $n=4k+2$ không thỏa mãn

Do đó $n=4$ thỏa mãn đề bài.

**Bài 10**: Tìm tất cả các số nguyên tố $p$, $q$ sao cho $7p+q$ và $pq+11$ cũng là số nguyên tố

***Lời giải:***

Nếu $pq+11$ là số nguyên tố thì nó phải là số lẻ vì nó là số nguyên tố lớn hơn 2

Suy ra $pq$ là số chẵn, khi đó ít nhất 1 trong 2 số $p$ hoặc $q$ bằng 2

Giả sử $p=2 \Rightarrow 7p+q=14+q$ là số nguyên tố

+ Nếu $q=2 \Rightarrow 7p+q=7.2+2=16$ là hợp số, $\Rightarrow p=2, q=2$ không thỏa mãn.

+ Nếu $q=3 \Rightarrow p.q+11=2.3+11=17$ và $7p+q=7.2+3=17$ đều là các số nguyên tố, $\Rightarrow p=2, q=3$ thỏa mãn đề bài.

+ Nếu $q>3$, $q$ là số nguyên tố nên có dạng $q=3k+1$ hoặc $q=3k+2, \left(k\in N^*\right)$

+ Với $q=3k+1 \Rightarrow 7p+q=14+3k+1 \vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow q=3k+1$ không thỏa mãn.

+ Với $q=3k+2 \Rightarrow pq+11=2q+11=2\left(3k+2\right)+11=6k+15 \vdots 3$ là hợp số $\Rightarrow q=3k+2$ không thỏa mãn.

Vậy $p=2, q=3$.

Xét tiếp TH $q=2$ làm tương tự ta được $p=3$.

Vậy $p=2, q=3$ hoặc $p=3, q=2$.

**Bài 11**: Tìm số nguyên tố $p$ sao cho $5p+7$ là số nguyên tố.

***Lời giải:***

- Nhận thấy $p=2$ là số nguyên tố, và $5p+7=17$ cũng là số nguyên tố
- Với $p>2$ và $p$ là số nguyên tố thì $p$ có dạng $p=2k+1,\left(k\in N^*\right)$

Nếu $p=2k+1\Rightarrow 5p+7=5\left(2k+1\right)+7=10k+12\,\vdots\,2$ là hợp số, nên $p=2k+1$ không thỏa mãn.

Vậy $p=2$ là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 12:** Ta gọi $p,q$ là hai số tự nhiên liên tiếp, nếu giữa $p$ và $q$ không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp $p,q,r$ sao cho $p^2+q^2+r^2$ cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Nếu 3 số nguyên tố $p,q,r$ đều khác 3 thì $p,q,r$ đều có dạng $3k\pm1$ suy ra $p^2+q^2+r^2$ chia cho 3 đều dư 1. Khi đó $p^2+q^2+r^2\,\vdots\,3$ và $p^2+q^2+r^2>3$ nên $p^2+q^2+r^2$ là hợp số. Vậy $p=3,q=5,r=7$, khi đó $p^2+q^2+r^2=3^2+5^2+7^2=83$ là số nguyên tố.

**Bài 13**: Tìm các số nguyên tố $a$ sao cho $6a+13$ là số nguyên tố và $25\le 6a+13\le 45$

***Lời giải:***

Ta có : Từ 25 đến 45 có 5 số nguyên tố là : $29;31;37;41;43$

Nên ta có bảng sau :

| $6a+13$ | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $\frac{8}{3}$ | 3 | 4 | $\frac{14}{3}$ | 5 |

Mà $a$ là số nguyên tố nên $a=3$ hoặc $a=5$.

Vậy $a=3$ hoặc $a=5$.

**Bài 14**: Tìm các số nguyên tố $a,b,c$ sao cho $a.b.c=3(a+b+c)$.

***Lời giải:***

Vì $a.b.c=3(a+b+c)\Rightarrow abc\,\vdots\,3$

Giả sử $a\,\vdots\,3$, vì $a$ là số nguyên tố $\Rightarrow a=3$.

Ta có $3.b.c=3(3+b+c)\Rightarrow bc=3+b+c$

$\Rightarrow bc-b=3+c$

$\Rightarrow b(c-1)=3+c$

$\Rightarrow b(c-1)=4+(c-1)$

$\Rightarrow (b-1)(c-1)=4$

$\Rightarrow (b,c)\in\left\{(3,3);(2,5)\right\}$

Vậy $(a,b,c)\in\left\{(3,3,3);(2,3,5)\right\}$

**Bài 15:** Ta gọi $p, q$ là 2 số nguyên tố liên tiếp nếu giữa $p$ và $q$ không có số nguyên tố nào khác.Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp $p, q, r$ sao cho $p^2+q^2+r^2$ cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

+Nếu $p, q, r$ đều khác 3 mà $p, q, r$ là các số nguyên tố.

$\Rightarrow p, q, r$ chia 3 dư 1 hoặc dư 2 ( hay dư -1 ).

$\Rightarrow p^2, q^2, r^2$ chia 3 dư 1.

$\Rightarrow p^2+q^2+r^2$ chia hết cho 3.

Vậy tồn tại 1 số bằng 3.

+ TH1: Bộ 3 số $p, q, r$ tương ứng là: $2;3;5$. Khi đó $2^2+3^2+4^2=38$ là hợp số. Do đó bộ ba số này không thỏa mãn.

+ TH2: Bộ 3 số $p, q, r$ tương ứng là: $3;5;7$ Khi đó $3^2+4^2+5^2=83$ là số nguyên tố . Do đó bộ ba số này thỏa mãn đề bài.

Vậy 3 số nguyên tố liên tiếp cần tìm là: $3, 5, 7$.

**Bài 16:** Tìm 3 số nguyên tố $p, q, r$ sao cho: $p^q+q^p=r$.

***Lời giải:***

Vì $p^q+q^p>2 \Rightarrow r>2 \Rightarrow r$ là số lẻ ( $r$ là số nguyên tố ).

$\Rightarrow p^q, q^p$ có 1 số lẻ và 1 số chẵn.

Giả sử $p^q$ là số chẵn $\Rightarrow p$ chẵn $\Rightarrow p=2$ ( vì p là số nguyên tố ) $\Rightarrow 2^q+q^2=r$

+ Nếu $q>3 \Rightarrow q \equiv \pm 1 (\bmod 3) \Rightarrow q^2 \equiv 1 (\bmod 3)$

Mặt khác $q$ là số lẻ $\Rightarrow 2^q \equiv (-1)^p = -1 (\bmod 3)$

$\Rightarrow 2^q+q^2 \equiv 0 (\bmod 3)$

$\Rightarrow 2^q+q^2 \vdots 3 \Rightarrow r \vdots 3 \Rightarrow r=3$ ( Vì $r$ là số nguyên tố ).

$\Rightarrow 2^q+q^2=3$ ( Loại vì $q$ là số nguyên tố nên $q^2>3 \Rightarrow r>3$ )

+Nếu $q=3$ thì $\Rightarrow r=3^2+2^3=17$ là số nguyên tố ( Thỏa mãn ).

Vậy $(p, q, r) \in \{(2,3,17);(3,2,17)\}$.

**Bài 17:** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố liên tiếp sao cho tổng bình phương của ba số này cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Gọi bộ ba số nguyên tố liên tiếp đó là $p,s,r,\ (p<s<r)$

Nếu $p,s,r$ đều không chia hết cho 3 thì $p^2,s^2,r^2$ đều chia 3 dư $1 \Rightarrow p^2+s^2+r^2 \vdots 3$

Mà $p^2+s^2+r^2>3$ nên $p^2+s^2+r^2$ là hợp số ( Trái với GT, loại )

Do đó có ít nhất một trong 3 số $p,s,r$ chia hết cho 3.

+ Nếu $p=3$ thì $s=3, r=5$

Khi đó $p^2+s^2+r^2=3^2+5^2+7^2=83$ là số nguyên tố ( Thỏa mãn )

+ Nếu $s=2$ thì $p=2, r=5$

Khi đó $p^2+s^2+r^2=2^2+3^2+5^2=28$ không là số nguyên tố ( Trái với GT, loại )

+Nếu $r=3$ thì $s=2; p<2$ (Vô lí vì $p$ là số nguyên tố, loại )

Vậy 3 số nguyên tố cần tìm là : $3;5;7$

**Bài 18:** Tìm tất cả các bộ ba số $a,b,c$ sao cho $abc<ab+bc+ac$

***Lời giải:***

Vì $a,b,c$ có vai trò như nhau nên giả sử $a\le b\le c$ khi đó

$ab+bc+ac\le 3bc$

$\Rightarrow abc<3bc$

$\Rightarrow a<3 \Rightarrow a=2$ vì $a$ là số nguyên tố.

Với $a=2$ thì ta có $2bc<2b+2c+bc \Rightarrow bc<2(b+c)\le 4c$

$b\le 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=3 \end{array}\right.$ ( vì $p$ là số nguyên tố )

+ Nếu $b=2$ thì $4c<4+4c$ thỏa mãn với $c$ là số nguyên tố bất kì

+ Nếu $b=3$ thì $6c<6+5c \Rightarrow c<6 \Rightarrow c\in\{3;5\}$

Vậy các cặp số $(a,b,c)$ cần tìm là $(2,2,p);(2,3,3);(2,3,5)$ và các hoán vị của chúng, với $p$ là số nguyên tố.

**Bài 19:** Tìm tất cả các số tự nhiên $n$ để :
a, $n^2+12n$ là số nguyên tố.
b, $3^n+6$ là số nguyên tố.

***Lời giải:***

a, Ta có : $n^2+12n=n(n+12)$, Vì $n+12>1 => n(n+12)$ có thêm 2 ước là $n$ và $n+12$

Để $n(n+12)$ là số nguyên tố thì $n=1 \Rightarrow n^2+12n=13$ là số nguyên tố $\Rightarrow n=1$ thỏa mãn đề bài.
b, Nếu $n=0 => 3^n+6=7$ là số nguyên tố.
Nếu $n \neq 0 => 3^n+6 \vdots 3$ là hợp số.
Vậy $n=0$.

**Bài 20:** Một số nguyên tố chia cho 30 có số dư là $r$. Tìm $r$ biết rằng $r$ không là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Gọi số nguyên tố là $p$ ($p \in N^*$).

Ta có: $p=30k+r=2.3.5.k+r(k \in N^*, r \in N^*, 0<r<30)$

Vì $p$ là số nguyên tố nên $r$ không chia hết cho $2,3,5$.

Số nguyên dương không là số nguyên tố nhỏ hơn 30 và không chia hết cho $2,3,5$ chỉ có số 1.

Vậy $r=1$.

**Bài 21:** Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư là $r$.Tìm $r$ biết rằng $r$ là hợp số.

***Lời giải:***

Gọi số nguyên tố là $p$ ($p \in N^*$)

Ta có: $p=42k+r=2.3.7.k+r(k \in N^*, r \in N^*, 0<r<42)$

Vì $p$ là số nguyên tố nên $r$ không chia hết cho $2,3,7$.

Số nguyên dương là hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho $2,3,7$ chỉ có số 25.

Vậy $r=25$.

**Bài 22:** Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số này là số chẵn hay số lẻ?

***Lời giải:***

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 có chứa một số nguyên tố chẵn là 2, còn 24 số nguyên tố còn lại là số nguyên tố lẻ. Do đó tổng 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

**Bài 23:** Tìm tất cả các số nguyên tố $p$ để $2^p+p^2$ cũng là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Với $p=2$ ta có $2^p+p^2=2^2+2^2=8$ không là số nguyên tố.

Với $p=3$ ta có $2^p+p^2=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

Với $p>3$ ta có $p^2+2^p=(p^2-1)+(2^p+1)$. Vì $p$ lẻ và $p$ không chia hết cho 3 nên $(p^2-1)\vdots 3$ và $(2^p+1)\vdots 3$, do đó $2^p+p^2$ là hợp số. Vậy với $p=3$ thì $2^p+p^2$ là số nguyên tố.

**Dạng 2 : Các bài toán chứng minh về số nguyên tố.**

**Bài 24:** Chứng minh rằng với $n\in N, n>2$ thì $2^n-1, 2^n+1$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Xét dãy số: $2^n-1; 2^n; 2^n+1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp.
Vì $(2,3)=1 \Rightarrow (2^n,3)=1$
Vì dãy số: $2^n-1; 2^n; 2^n+1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3.
Mà $(2^n,3)=1$ nên một trong hai số $2^n-1; 2^n+1$ chia hết cho 3.
Suy ra $n\in N, n>2$ thì $2^n-1, 2^n+1$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

**Bài 25:** Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n,(n>1)$ luôn tìm được $n$ số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số.

***Lời giải:***

Chọn số tự nhiên $a=2.3.4....n.(n+1)$
Khi đó ta có $n$ số tự nhiên liên tiếp là $a+2, a+3, a+4, ....., a+n, a+(n+1)$ đều là hợp số vì $n$ số trên lần lượt chia hết cho $2,3,4,....,n,n+1$ ( điều phải chứng minh).

**Bài 26:** Chứng minh rằng nếu $a, a+m, a+2m$ đều là các số gnuyeen tố lớn hơn 3 thì m chia hết cho 6.

***Lời giải:***

Các số nguyên tố lớn hơn 3 đều là số lẻ.

Nếu $m$ là số lẻ thì $a+m$ là số chẵn lớn hơn 3 nên không là số nguyên tố. Suy ra m là số chẵn.

Đặt $m=2p,(p\in N^*)$.

Nếu $p=3k+1,(k\in N)$ thì ba số đã cho là: $a, a+6k+2, a+12k+4$

Nếu $a$ chia cho 3 dư 1 thì $a+6k+2\vdots 3$, không thỏa mãn đề bài.

Nếu $a$ chia cho 3 dư 2 thì $a+12k+4\vdots 3$, không thỏa mãn đề bài.

Vậy $p$ không có dạng $p = 3k + 1, (k \in N)$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $p$ không có dạng $p = 3k + 2, (k \in N)$

Do đó $p = 3k, (k \in N) \Rightarrow m = 6k \Rightarrow m \vdots 6$

Vậy m chia hết cho 6.

**Bài 27:**

a) Chứng minh rằng số dư trong phép chia của một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố. Khi chia cho 60 thì kết quả ra sao?

b) Chứng minh rằng nếu tổng của $n$ lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì $(n, 30) = 1$

***Lời giải:***

a) Giả sử $p$ là số nguyên tố và $p = 30 + r$ với $0 < r < 30$. Nếu $r$ là hợp số thì $r$ có ước nguyên tố $q \le \sqrt{30} \Rightarrow q = 2;3;5$. Nhưng với $q = 2;3;5$ thì $r$ lần lượt chia hết cho 2; 3; 5 (vô lí). Vậy $r = 1$ hoặc $r$ là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn $p = 109 = 60.1 + 49$ mà 49 là hợp số.

b) Số nguyên tố $p$ khi chia cho 30 chỉ có thể dư là $1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29$.

Với $r = 1, 11, 19, 29$ thì $p^2 \equiv 1$ (mod 30).

Với $r = 7, 13, 17, 23$ thì $p^2 \equiv 19$ (mod 30).

Suy ra $p^4 \equiv 1$ (mod 30).

Giả sử $p_{1,} p_{2,...,} p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5.

Khi đó $q = p_1{}^4 + p_2{}^4 + ... + p_n{}^4 \equiv n \text{ (mod 30)} \Rightarrow q = 30k + n$ là số nguyên tố nên $(n, 30) = 1$.

**Bài 28:** Hai số $2^n + 1, 2^n - 1 (n \in N, n > 2)$ có thể cùng là số nguyên tố hay không ? Vì sao ?

***Lời giải:***

Vì $2^n + 1, 2^n, 2^n - 1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3.Mà $(2, 3) = 1$ và 3 là số nguyên tố nên $2^n$ không chia hết cho 3. (1)

Mà $n > 2$ nên $2^n + 1 > 3, 2^n - 1 > 3$ (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra 1 trong 2 số $2^n + 1, 2^n - 1$ phải chia hết cho 3.

$\Rightarrow$ Hai số $2^n+1, 2^n-1 (n \in N, n>2)$ không thể cùng là số nguyên tố.

**Bài 29:** Cho 3 số nguyên tố lớn hơn 3,trong đó số sau lớn hơn số trước là $d$ đơn vị.Chứng minh rằng $d \vdots 6$

***Lời giải:***

Các số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ $(k \in N^*)$

Có 3 số mà chỉ có 2 dạng nên tồn tại hai số thuộc cùng một dạng, hiệu của chúng ( là $d$ hoặc $2d$ ) chia hết cho 3. Mặt khác $d$ chia hết cho 2 vì $d$ là hiệu của hai số lẻ.Vậy $d$ chia hết cho 6.

**Bài 30:** Hai số nguyên tố gọi là sinh đôi nếu chúng là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp.Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 3 nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.

***Lời giải:***

Gọi $p$ là số nguyên tố lơn hơn 3 và $p$ lẻ nên $p+1 \vdots 2$ (1)

Mà $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ có dạng $3k+1, 3k+2 (k \in N)$.

Dạng $p=3k+1$ không xảy ra vì nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3 \vdots 3$ là hợp số (Loại)

$\Rightarrow p=3k+2 \Rightarrow p+1=3k+3 \vdots 3$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow p+1 \vdots 6 \Rightarrow$ ĐPCM

**Bài 31:** Chứng minh rằng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố.

***Lời giải:***

Giả sử $p$ là số nguyên tố và $p$ có dạng $p=30k+r=2.3.5.k+r (k \in N^*, r \in N^*, 0<r<30)$

Nếu $r$ là hợp số thì $r$ có ước nguyên tố $q$ sao cho $q^2<30 \Rightarrow q \in \{2,3,5\}$

Nhưng với $q \in \{2,3,5\}$ thì p lần lượt chia hết cho $2,3,5$ ( Vô lý )

Vậy $r=1$ hoặc $r$ là số nguyên tố.

**Bài 32:** Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ được xác định như sau:

$a_1=2, a_n$ là ước nguyên tố của $a_1a_2a_{3...}a_{n-1}+1$ với $n \geq 2$. Chứng minh rằng $a_k \neq 5, \forall k \in N*$.

***Lời giải:***

Ta có $a_1=2, a_2=3$, giả sử với $n \geq 3$ nào đó mà có số 5 là ước nguyên tố lớn nhất của số $A=2.3.a_3...a_{n-1}+1$ thì $A$ không thể chia hết cho 2, cho 3. Vậy chỉ có thể xảy ra $A=5^m$ với $m \geq 2$.

Suy ra $A-1=5^m-1\vdots 4$.

Mà $A-1=2.3.a_3...a_{n-1}$ không chia hết cho 4 do $a_3...a_{n-1}$ là các số lẻ (vô lí).

Vậy $A$ không có ước nguyên tố của 5, tức là $a\neq 5,\forall k\in N^*$.

**Bài 33:** Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được 1997 số liên tiếp nhau mà không có số nguyên tố nào hay không ?

***Lời giải:***

Chọn dãy số:

$a_1=1998!+2$ $\qquad$ $a_1\vdots 2$

$a_2=1998!+3$ $\qquad$ $a_2\vdots 3$

$a_3=1998!+4$ $\qquad$ $a_3\vdots 4$

.................... $\qquad$ ............

$a_{1997}=1998!+1998$ $\qquad$ $a_{1997}\vdots 1998$

Như vậy: Dãy số $a_1;a_2;a_3;....;a_{1997}$ gồm có 1997 số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

**Bài 34:** Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được $n$ số liên tiếp nhau $(n>1)$ mà không có số nguyên tố nào hay không ?

***Lời giải:***

Chọn dãy số:

$a_1=(n+1)!+2$ $\qquad$ $a_1\vdots 2, a_1>2$ nên $a_1$ là hợp số

$a_2=(n+1)!+3$ $\qquad$ $a_2\vdots 3, a_2>3$ nên $a_2$ là hợp số

$a_3=(n+1)!+4$ $\qquad$ $a_3\vdots 4, a_3>4$ nên $a_3$ là hợp số

.................... $\qquad$ ............

$a_n=(n+1)!+(n+1)$ $\qquad$ $a_n\vdots (n+1), a_n>n+1$ nên $a_n$ là hợp số

Như vậy: Dãy số $a_1;a_2;a_3;....;a_n$ gồm có $n$ số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

## PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

**Bài 1:** Cho $p$ và $2p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p+1$ là hợp số.

*( Trích đề HSG lớp 6 Trực Ninh năm học 2017-2018)*

***Lời giải:***

Do $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 3k+1; p = 3k-1$ với $k > 1, k \in N$.

+ Nếu $p = 3k+1$ thì $2p+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$.

Suy ra $2p+1$ là hợp số (vô lí).

+ Nếu $p = 3k-1, k > 1$ thì $4p+1 = 12k-3 = 3.(4k-1)$.

Do $k > 1$ nên $(4k-1) > 3$. Do đó $4p+1$ là hợp số.

**Bài 2:** Biết $\overline{abcd}$ là nguyên tố có bốn chữ số thỏa mãn $\overline{ab};\overline{cd}$ cũng là số nguyên tố và $b^2 = \overline{cd} + b - c$. Hãy tìm $\overline{abcd}$.

*( Trích đề HSG lớp 6 Sông Lô năm học 2018-2019)*

***Lời giải:***

Vì $\overline{ab};\overline{cd}$ là các số nguyên tố nên $b, d$ lẻ và khác 5.

Ta lại có $b^2 = b^2 = \overline{cd} + b - c \Leftrightarrow b^2 - b = 9c + d \Leftrightarrow b(b+1) = 9c + d$

Nếu $b = 1$ ( Không thỏa mãn)

Nếu $b = 3$ nên $9c + d = 6 \Rightarrow c = 0, d = 6$ ( Không thỏa mãn).

Nếu $b = 7 \Rightarrow 9c + d = 42 \Rightarrow d = 42 - 9c \Rightarrow c = 4; d = 6$ ( Loại)

Nếu $b = 9 \Rightarrow 9c + d = 72 \Leftrightarrow d = 72 - 9c \Rightarrow c = 7, d = 9$ ( thỏa mãn)

Suy ra $a \in \{1;2;7\}$.

Vậy $\overline{abcd} \in \{1979; 2979; 7979\}$.

**Bài 3:** Cho các số $p = b^c + a, q = a^b + c, r = c^a + b$ là các số nguyên tố. Chứng minh trong 3 số $p, q, r$ có ít nhất 2 số bằng nhau.

*( Trích đề HSG lớp 6 TP Bắc Ninh năm học 2018-2019)*

***Lời giải:***

Trong 3 số $a, b, c$ có ít nhất 2 số cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử hai số cùng tính chẵn lẻ là $a$ và $b$.

Suy ra $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn nên $p = 2$.

Suy ra $a=b=1$. Khi đó $q=c+1$ và $r=c+1$ nên $q=r$.

Vậy trong ba số $p,q,r$ có ít nhất 2 số bằng nhau.

**Bài 4:** Giả sử $p$ và $p+2$ là các số nguyên tố. Chứng tỏ $p^3+p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

*( Trích đề HSG lớp 6 Gia Bình năm học 2018-2019)*

***Lời giải:***

+) Với $p=2$ thì $p^2+2=8$ không là số ngàyên tố.

+) Với $p=3$ thì $p^2+2=11$ và $p^3+p^2+1=37$ đều là số nguyên tố.

+) Với $p>3 \Rightarrow p=3k\pm1 (k\in N, k\geq 2)$

$\Rightarrow p^2+2=(3k\pm1)^2+2=9k^2\pm6k+3=3(3k^2\pm2k+1)\vdots 3$ nên $p^2+2$ là hợp số.

Vậy chỉ có $p=3$ thì $p^2+2$ và $p^3+p^2+1$ đều là số nguyên tố.

**Bài 5:** Cho $p$ là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20}-1$ chia hết cho 100.

*( Trích đề HSG lớp 9 huyện Lục Nam năm học 2018-2019)*

***Lời giải:***

Ta có $p^{20}-1=(p^4-1)(p^{16}+p^{12}+p^8+p^4+1)$.

Do $p$ là sốnguyên tố lớn hơn 5 nên $p$ là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2+1$ và $p^2-1$ là các số chẵn.

$\Rightarrow p^4-1$ chia hết cho 4.

$\Rightarrow p^{20}-1$ chia hết cho 4.

Vì $p$ là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^4-1$ chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16}+p^{12}+p^8+p^4+1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20}-1$ chia hết cho 5.

Mà $(4;25)=1$ nên $(p^{20}-1)\vdots 100$ ( đpcm).

**Bài 6:** Chứng minh rằng hai số $2n+1$ và $10n+7$ là 2 số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên $n$.

*( Trích đề HSG lớp 6 Như Thanh năm học 2018-2019)*

**Lời giải:**

Đặt $d = UCLN(2n+1, 10n-7)$

$\Rightarrow (2n+1) \vdots d$. Vì vậy $5(2n+1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d$

Do đó $d = 2$ hoặc $d = 1$

+) Nếu $d = 2$ thì $(2n+1) \vdots 2$ ( Vô lý) $\Rightarrow d = 1$

$1 = UCLN(2n+1, 10n+7)$.

Vậy $2n+1$ và $10n+7$ là hai nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n.

**Bài 7:** Cho $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3.Chứng minh rằng $p^2 - 1 \vdots 24$.

*( Trích đề HSG lớp 9 huyện Kim Thành năm học 2018-2019)*

**Lời giải:**

Ta có $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Vì $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ lẻ. Do đó $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó suy ra $(p-1)(p+1) \vdots 8 \quad (1)$.

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $p-1; p; p+1$. Ta có $(p-1)p(p+1) \vdots 3$.

Mà $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ không chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên suy ra $(p-1)(p+1) \vdots 3 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) kết hợp với $(3;8) = 1$ và $3.8 = 24$ ta suy ra $p^2 - 1 \vdots 24$ (đpcm).

**Bài 8:** Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ sao cho $p^2 - 2q^2 = 1$

**Lời giải:**

Từ $p^2 - 2q^2 = 1$ ta được $p^2 = 2q^2 + 1$.

Do đó ta suy ra được $p$ là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta đặt $p = 2k+1$ với $k \in N^*$.

Khi đó ta được $(2k+1)^2 = 2q^2 + 1 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 2q^2 + 1 \Leftrightarrow 2k(k+1) = q^2$.

Do đó $q^2$ là số chẵn nên $q$ là số chẵn. Mà $q$ là số nguyên tố nên $q=2$.

Thay vào $p^2-2q^2=1$ ta suy ra được $p=3$.

Vậy cặp sô nguyên tố $(p,q)=(3,2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài 9:** Tìm số nguyên tố có hai chữ số khác nhau có dạng $\overline{xy}(x>y>0)$ sao cho hiệu của số đó với số viết theo thứ tự ngược lại cuả số đó là số chính phương.

*( Trích đề HSG lớp 6 huyện Thái Thụy năm học 2018-2019)*

***Lời giải:***

Theo đề bài ra ta có: $\overline{xy}-\overline{\text{yx}}$ là số chính phương.

Khi đó $10\text{x}+y-(10y+x)=10.(x-y)-(x-y)=9(x-y)$ là số chính phương.

Suy ra $x-y$ là số chính phương.

Vì $x>y>0$ nên $x,y\in\{1,2,....,9\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ TH1: $x-y=1$ và $\overline{xy}$ là số nguyên tố nên $\overline{xy}=43$.

+ TH2: $x-y=4$ và $\overline{xy}$ là số nguyên tố nên $\overline{xy}=73$.

+ TH3: $x-y=9$ và $\overline{xy}$ là số nguyên tố nên không có số nào thỏa mãn.

Vậy $\overline{xy}\in\{43;73\}$

**Bài 10:** Tìm các số nguyên tố $p,q$ và số nguyên $x$ thỏa mãn $x^5+p\text{x}+3q=0$.

*( Trích đề HSG lớp 6 huyện Kiến Xương năm học 2016-2017)*

***Lời giải:***

Ta có $x^5+p\text{x}+3q=0\Leftrightarrow x(x^4+p)=-3q$.

Vì $q$ là số nguyên tố và $x$ là số nguyên nên từ phương trình trên ta suy ra $x\in\{-1;-3;-q;-3q\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $x=-1$, khi đó từ phương trình trên ta được $1+p=3q$. Do $q$ là số nguyên tố nên:

- Khi $q=2$ thì ta được $p=5$.
- Khi $q>2$ thì $3q$ là số lẻ nên $p$ là số nguyên tố chẵn. Do đó $p=2$ nên $q=1$ không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $x=-3$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+81=q$. Do đó $p$ là số nguyên tố chẵn và $q$ là số nguyên tố lẻ. Từ đó ta được $p=2;q=83$.

+ Nếu $x=-q$ khi đó từ phương trình trên ta được $p+p^4$=3. Trường hợp này không xảy ra do $p$ và $q$ là số nguyên tố nên $p+p^4>3$.

+ Nếu $x=-3q$, khi đó phương trình trên ta được $p+81p^4=1$. Trường hợp này không xảy ra do $p$ và $q$ là số nguyên tố nên $p+81p^4>1$.

Vậy các bộ số $(x;p;q)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(-1;5;2),(-3;2;83)$.

**Bài 11:** Chứng minh rằng nếu $2^n-1$ là số nguyên tố $(n>2)$ thì $2^n+1$ là hợp số.

*( Trích đề HSG lớp 6 huyện Thanh Hà năm học 2015-2016)*

***Lời giải:***

Xét 3 số tự nhiên liên tiếp là $2^n-1, 2^n, 2^n+1$.

Trong ba số tự nhiên liên tiếp trên có duy nhất một số chia hết cho 3.

Do $n>2$ nên $2^n-1>3$, mà theo giả thiết thì $2^n-1$ là số nguyên tố, do đó $2^n-1$ không chia hết cho 2.

Lại có $2^n$ không chia hết cho 3. Do đó suy ra $2^n+1$ chia hết cho 3.

Mà do $n>2$ nên $2^n+1>3$. Từ đó ta được $2^n+1$ là hợp số.

**Bài 12:** Tìm các số nguyên tố $p,q,r$ thỏa mãn các điều kiện sau.

$$5\le p<q<r;\ 49\le 2p^2-r^2;\ 2q^2-r^2\le 193$$

*( Trích đề HSG lớp 6 huyện Nam Sách năm học 2012-2013)*

***Lời giải:***

Từ $49\le 2p^2-r^2; 2p^2-r^2\le 193$ ta có $2q^2-193\le r^2\le 2p^2-49$ do đó $q^2-p^2\le 72$.

Mặt khác từ điều kiện $5\le p<q<r$ ta được $r\ge 11$, do đó $2p^2\ge 49+121=170$ hay $p\ge 11$.

Vì $(q-p)(q+p)\le 72$ nên $q-p=2$ hoặc $q-p\ge 4$.

Xét hai trường hợp sau:

+ Với $q-p=2$ và $q+p\ge 36$, khi đó ta được $p=11,q=13$ hoặc $p=17,q=19$.

- Nếu $p=11,q=13$ thì $145\le r^2\le 193$, suy ra $r=13=q$ ( loại).
- Nếu $p=17,q=19$ thì $529\le r^2\le 529$, suy ra $r=23$ ( nhận).

Với $q-p\geq 4$ và $q+p\leq 18$ không tồn tại vì $p\geq 11$.

Vậy ba số nguyên tố cần tìm là $p=17;q=19;r=23$.

**Bài 13:** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố $a,b,c$ đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện:

$$20abc<30(ab+bc+ca)<21abc$$

*( Trích đề HSG lớp 6 huyện Gia Lộc năm học 2017-2018)*

***Lời giải:***

Từ giả thiết suy ra $\frac{2}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{7}{10}$. Để không giảm tính tổng quát giả sử $a>b>c>1$.

Suy ra $\frac{2}{3}<\frac{3}{c}\Rightarrow 2c<9$, do đó $c\in\{2;3\}$.

Với $c=2$ suy ra $\frac{2}{3}<\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{7}{10}\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{2}{b}$ và $\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$.

Do đó $b\in\{7;11\}$.

+ Với $b=7$, khi đó từ $\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$ suy ra $\frac{1}{42}<\frac{1}{a}<\frac{2}{35}\Rightarrow a\in\{19;23;29;31;37;41\}$.

+ Với $b=11$ từ $\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$ suy ra $\frac{5}{66}<\frac{1}{a}<\frac{6}{55}\Rightarrow a=13$ do $a>b$.

Với $c=3$ từ giả thiết suy ra $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{11}{30}\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{2}{b}\Rightarrow b<6\Rightarrow b=5$ (do $b>c$).

Thay $b=5$ vào $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{11}{30}$ ta được $6<a<\frac{15}{2}\Rightarrow a=7$.

Vậy các bộ ba số nguyên tố khác nhau $(a;b;c)$ thỏa mãn là:

$(19;7;2),(23;7;2),(29;7;2),(31;7;2),(37;7;2),(41;7;2),(13;11;2),(7;5;3)$ và các hoán vị của nó.

**Bài 14:** Tìm tất cả các bộ ba nguyên tố $(p;q;r)$ sao cho $pqr=p+q+r+160$.

*( Trích đề HSG lớp 9 Ninh Bình năm học 2018-2019).*

***Lời giải:***

Không mất tính tổng quát giả sử $p\leq q\leq r$.

Với $p=2$ thì $2qr=q+r+162\Leftrightarrow 4qr-2q-2r=324$.

$\Leftrightarrow 2q(2r-1)-(2r-1)=325 \Leftrightarrow (2q-1)(2r-1)=325=5^2.13$.

$3 \le 2q-1 \le 2r-1 \Rightarrow 9 \le (2q-1)^2 \le (2r-1)(2q-1) \Leftrightarrow 9 \le (2q-1)^2 \le 325 \Leftrightarrow 3 \le 2q-1 \le 18$.

Do $2q-1$ là ước của $5^2.13$ nên $2q-1 \in \{5;13\}$.

Nếu $2q-1=5 \Leftrightarrow q=3 \Rightarrow r=33$ ( loại).

Nếu $2q-1=13 \Leftrightarrow q=7 \Rightarrow r=13$ ( thỏa mãn).

$pqr = p+q+r+160 \Leftrightarrow p(qr-1)-q-r=160$.

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+qr-1-q-r=160 \Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+q(r-1)-(r-1)-2=160$.

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1)=162$.

Nếu $p$ lẻ $\Rightarrow q;r$ lẻ $\Rightarrow (qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1) \vdots 4$ mà $162$ không chia hết cho 4 $\Rightarrow$ ( vô lí).

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $(2;7;13)$ và các hoán vị.

**Bài 15:** Tìm hai số nguyên tố $p,q$ sao cho $8q+1=p^2$.

*( Trích đề HSG lớp 9 Phú Yên năm học 2018-2019).*

***Lời giải:***

Ta có $p^2$ chia cho $3$ dư $0$ hoặc $1$.

Xét $p^2$ chia cho $3$ dư $0$, vì $p$ là số nguyên tố nên $p=3$, suy ra $q=1$ (vô lí).

Ta có $p^2$ chia cho $3$ dư $1$ suy ra $8q$ chia hết cho $3$ mà $(8;3)=1$ nên $q=3 \Rightarrow p=5$ ( thỏa mãn).

Vậy $p=5; q=3$.

**HẾT**

# CHUYÊN ĐỀ SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

# CHỦ ĐỀ 3: CÁC BÀI TOÁN VỀ HỢP SỐ

## PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1.SỐ NGUYÊN TỐ

-Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1,chỉ có 2 ước là 1 và chính nó.

-Số nguyên tố nhỏ nhất vừa là số nguyên tố chẵn duy nhất là số 2.

-Không thể giới hạn số nguyên tố cũng như tập hợp số nguyên tố.Hay nói cách khác,số nguyên tố là vô hạn.

-Khi 2 số nguyên tố nhân với nhau thì tích của chúng không bao giờ là một số chính phương.

-Ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên được coi là số nguyên tố.

-Để kết luận số tự nhiên a là một số nguyên tố ( $a>1$ ),chỉ cần chứng minh a không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a.

-Nếu tích $ab \vdots p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots p \\ b \vdots p \end{array}\right.$ (p là số nguyên tố)

-Đặc biệt nếu $a^n \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ (p là số nguyên tố)

-Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: $4n \pm 1 (n \in N^*)$

-Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: $6n \pm 1 (n \in N^*)$

-Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị.

### 2.HỢP SỐ

-Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước nguyên dương.

-Để chứng tỏ một số tự nhiên a ( $a>1$ ) là hợp số,chỉ cần chỉ ra một ước khác 1 và a.

-Ước số nhỏ nhất khác 1 của một hợp số là một số nguyên tố và bình phương lên không vượt quá nó.

-Một hợp số bằng tổng các ước của nó (không kể chính nó) được gọi là: Số hoàn chỉnh.

-Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất(không kể thứ tự các thừa số)

### 3.HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU

-Hai số tự nhiên được gọi là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng có ước chung lớn nhất bằng 1.

a,b nguyên tố với nhau $\Leftrightarrow$ $(a,b)=1;(a,b \in N^*)$

- Hai số tự nhiên liên tiếp luôn nguyên tố cùng nhau
- Hai sô nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau
- Các số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau
- Các số $a,b,c$ nguyên tố cùng nhau $(a,b,c)=1$
- $a,b,c$ nguyên tố sánh đôi khi chúng đôi một nguyên tố cùng nhau $a,b,c$ nguyên tố sánh đôi $\Leftrightarrow (a,b)=(b,c)=(c,a)=1$

### 4.MỘT SỐ ĐỊNH LÍ ĐẶC BIỆT

- Định lí Đirichlet: Tồn tai vô số số nguyên tố p có dạng: $p=ax+b; x\in N^*, (a,b)=1$
- Định lí Tchebycheff: Trong khoảng từ số tự nhiên n đến số tự nhiên 2n có ít nhất một số nguyên tố $(n>2)$.
- Định lí Vinogradow: Mọi số lẻ lớn hơn $3^3$ là tổng của 3 số nguyên tố.

## PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

### Dạng 1: Phương pháp kiểm tra một số là hợp số

### *I.Phương pháp giải*

***Cách 1. Sử dụng định nghĩa.***

-Hợp số là số tự nhiên lớn lơn 1 và có nhiều hơn 2 ước nguyên dương.

-Để chứng tỏ một số tự nhiên a ( $a>1$ ) là hợp số,chỉ cần chỉ ra một ước khác 1 và a.

**Cách 2.** Với $n\in N^*, n>1$ ta kiểm tra theo các bước sau

- Tìm số nguyên tố k sao cho: $k^2\le n\le (k+1)^2$
- Kiểm tra xem n có chia hết cho các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng k không ?

+) Nếu có chia hết thì n là số hợp số

+) Nếu không chia hết thì n là số  nguyên tố

### *II.Bài toán*

**Bài 1:** Tổng, hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số

a) $3.4.5+6.7$

b) $5.7.9.11-2.3.4.7$

c) $16354+67541$

***<u>Lời giải</u>***

a) Ta có: $3.4.5+6.7=3\left(4.5+2.7\right)\vdots 3\Rightarrow$ tổng trên là hợp số

b) Ta có: $5.7.9.11-2.3.4.7=7\left(5.9.11-2.3.4\right)\vdots 7 \Rightarrow$ tổng trên là hợp số

c) Ta có: $16354+67541$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5, Vậy tổng trên là hợp số

**Bài 2:** Tổng, hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số

a) $5.6.7+8.9$

b) $5.7.9.11.13-2.3.7$

c) $5.7.11+13.17.19$

d) $4253\ +\ 1422$

***Lời giải***

a) Ta có : $5.6.7+8.9=3\left(5.2.7+8.3\right)\vdots 3 \Rightarrow$ tổng trên là hợp số

b) Ta có : $5.7.9.11.13-2.3.7=7\left(5.9.11.13-2.3\right)\vdots 7 \Rightarrow$ tổng trên là hợp số

c) Ta có: $5.7.11$ là 1 số lẻ và $13.17.19$ cũng là 1 số lẻ, nên tổng là số chẵn $\vdots 2 \Rightarrow$ Là hợp số

d) Ta có: $4253+1422$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5. Vậy tổng trên là hợp số

**Bài 3:** Tổng, hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số

a) $17.18.19.31+11.13.15.23$

b) $41.43.45.47+19.23.29.31$

c) $987654+54321$

***Lời giải***

a) Ta có: $17.18.19.31+11.13.15.23=3\left(17.6.19.31+11.13.5.23\right)\vdots 3 \Rightarrow 17.18.19.31+11.13.15.23$ là hợp số

b) Ta có: $41.43.45.47$ là số lẻ, $19.23.29.31$ là số lẻ, nên $41.43.45.47+19.23.29.31$ là số chẵn nên $41.43.45.47+19.23.29.31$ là hợp số

c) Ta có: $987654+54321$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5 nên tổng trên là hợp số

**Bài 4:** Các số tự nhiên $\overline{abab}$; $\overline{abcabc}$; $\overline{ababab}$ là số nguyên tố hay hợp số.

***Lời giải***

Ta có $\overline{abab}=101.\overline{ab}$ có nhiều hơn hai ước số.

$\overline{abcabc}=1001.\overline{abc}=1.11.13.\overline{abc}$ có nhiều hơn hai ước số.

$\overline{ababab}=101o1.\overline{ab}=3.7.13.37.\overline{ab}$ có nhiều hơn hai ước số.

Vậy các số tự nhiên $\overline{abab}$; $\overline{abcabc}$; $\overline{ababab}$ là hợp số.

**Bài 5:** Nếu $p$ là số nguyên tố thì

a. $p^2+p+2$ là số nguyên tố hay hợp số

b. $p^2+200$ là số nguyên tố hay hợp số

***Lời giải:***

a) Ta có: $p^2+p+2=p(p+1)+2$

Vì $p;p+1$ là hai số liên tiếp nên $p(p+1)$ là số chẵn

Nên $p^2+p+2$ là số chẵn lớn hơn 2 nên là hợp số .

b)

- Với $p=2 \Rightarrow p^2+200$ là số chẵn lớn hơn 2 $\Rightarrow p^2+200$ là hợp số

- Với $p=3 \Rightarrow p^2+200=209 \vdots 7 \Rightarrow p^2+200$ là hợp số

- Với $p>3 \Rightarrow p^2:3$ dư 1; $200 \vdots 3$ dư $2 \Rightarrow \left(p^2+200\right) \vdots 3 \Rightarrow p^2+200$ là hợp số

Vậy $p^2+200$ luôn là hợp số.

**Bài 6:** Cho $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $ab=cd$.

Chứng minh rằng: $A=a^n+b^n+c^n+d^n$ là hợp số với mọi $n \in \mathbb{N}$.

***Lời giải***

Ta có $ab=cd \Rightarrow ab:bd=cd:bd$

Hay $a:d=c:b$

Đặt $a:d=c:b=t\left(t \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow \begin{cases} a=dt \\ c=bt \end{cases}$

Khi đó:

$A=a^n+b^n+c^n+d^n$

$=(dt)^n+b^n+(bt)^n+d^n$

$=d^nt^n+b^n+b^nt^n+d^n$

$=d^n\left(t^n+1\right)+b^n\left(t^n+1\right)$

$=\left(d^n+b^n\right)\left(t^n+1\right)$

Vì $b,d,t \in \mathbb{N}^*$ nên A là hợp số.

## Dạng 2: Một số bài toán về hợp số

### *I.Phương pháp giải*

**-**Dựa vào các tính chất đặc trưng của hợp số để giải các bài toán về chứng minh hợp số.

***II.Bài toán***

**Bài 7:**

a) Cho $p$ là số nguyên tố. Hỏi $p^5-1$ là số nguyên tố hay hợp số.

b) Cho $p$ và $p+4$ là các số nguyên tố $(p>3)$. Chứng minh $p+8$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

a. Nếu $p=2 \Rightarrow p^5-1=2^5-1=31$ là số nguyên tố

- Nếu $p>2$

Vì $p$ là số nguyên tố nên $p$ là số lẻ

$\Rightarrow p^5$ là số lẻ

$\Rightarrow p^5-1$ là số chẵn lớn hơn 2

$\Rightarrow p^5-1$ là hợp số

Vậy $p^5-1$ là hợp số.

b. $p, p+4, p+8$ là dãy số cách đều 4 đơn vị $\Rightarrow$ có 1 số chia hết cho 3

Vì $p>3 \Rightarrow p+4>3, p+8>3$ và $p, p+4$ là số nguyên tố nên $p, p+4$ không chia hết cho 3

$\Rightarrow p+8 \vdots 3$ và $p+8>3 \Rightarrow p+8$ là hợp số.

**Bài 8:** Cho $p$ và $p+8$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $p+100$ là số nguyên tố hay là hợp số?

***<u>Lời giải:</u>***

Ta thấy $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ có dạng $3n+1; 3n+2, (n \in N^*)$

TH1: $p=3n+1, (n \in N^*)$ thì $p+8=3n+9=3(n+3) \vdots 3$

Mà $p+8$ là số lớn hơn 3 nên $p+8$ là hợp số ( Vô lí vì $p+8$ là số nguyên tố )

TH2: $p=3n+2 (n \in N^*)$ thì $p+8=3n+10$

Khi đó $p+100=3n+2+100=6n+102=3(2n+34) \vdots 3$

Mà $p+100$ là số lớn hơn 3 nên $p+100$ là hợp số.

**Bài 9:** Cho $p$ và $8p+1$ là các số nguyên tố $(p>3)$. Chứng minh $4p+1$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Vì $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\Rightarrow p$ có dạng $3k+1; 3k+2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow 8p + 1 = 24k + 9 = 3(8k + 3) \vdots 3 \Rightarrow 8p + 1$ là hợp số ( Vô lí vì $8p + 1$ là số nguyên tố)

Vậy $p = 3k + 2$ khi đó $4p + 1 = 12k + 9 = 3(4k + 3) \vdots 3$ và $12k + 9 > 3$ nên là hợp số.

Vậy nếu $p$ và $8p + 1$ là các số nguyên tố $(p > 3)$ thì $4p + 1$ là hợp số.

**Bài 10 :** Cho $p$ và $2p + 1$ là các số nguyên tố $(p > 3)$. Chứng minh $4p + 1$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\Rightarrow p$ có dạng $p = 3k + 1, p = 3k + 2\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

+) Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 \vdots 3$ và $6k + 3 > 3$ nên là hợp số ( mâu thuẫn với giả thiết $2p + 1$ là các số nguyên tố)

Vậy $p = 3k + 2$ Khi đó $4p + 1 = 12k + 9 \vdots 3$ và $12k + 9 > 3$ nên là hợp số.

Vậy nếu $p$ và $2p + 1$ là các số nguyên tố $(p > 3)$ thì $4p + 1$ là hợp số.(đpcm)

**Bài 11:**

a) Cho $p$ và $p + 2$ là số nguyên tố $(p > 3)$. Chứng minh $p + 1$ là hợp số và $p + 1 \vdots 6$

b) Cho $p$ và $p + 4$ là các số nguyên tố . Chứng minh $p + 2021$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

a) Với $p > 3$, ta có $p, p + 1, p + 2$ là 3 số tự nhiên liên tiếp

Do đó trong 3 số trên có 1 số chia hết cho 3 $(1)$

Mà $p; p + 2$ là các số nguyên tố nên $p + 1 \vdots 3$ và $p > 3 \Rightarrow p + 1$ là hợp số

Lại có số nguyên tố $p > 3$

Nên $p + 1$ là số chẵn $\Rightarrow p + 1 \vdots 2$ $(2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow p + 1 \vdots 6$

b) Ta có: $p + 2012 = p + 2 + 2010$

Xét dãy $p, p + 2, p + 4$

Với $p = 2 \Rightarrow p + 4 = 6 \vdots 2 \Rightarrow p + 4$ là hợp số (loại)

Với $p = 3 \Rightarrow p + 2012 = 2015 \vdots 5 \Rightarrow p + 2012$ là hợp số

Với $p > 3 \Rightarrow p$ chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\Rightarrow p$ có dạng $p = 3k + 1, p = 3k + 2\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

+) Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 \vdots 3$ và $3k + 3 > 3 \Rightarrow p + 2012 = p + 2 + 2010 \vdots$ nên là hợp số .

Vậy $p=3k+2$ Khi đó $p+4=3k+6 \vdots 3$ và $3k+6>3$ nên là hợp số( mâu thuẫn với giả thiết $p+4$ là số nguyên tố).

**Bài 12:** Cho $p$ và 10p + 1 là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: 5p + 1 là hợp số

***<u>Lời giải</u>***

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\Rightarrow p$ có dạng $p=3k+1, p=3k+2\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

+) Nếu $p=3k+2$ thì $10p+1=10(3k+2)+1=30k+21 \vdots 3$ và $30k+21>3$ nên là hợp số ( mâu thuẫn với giả thiết $10p+1$ là số nguyên tố)

Vậy $p=3k+1$ Khi đó $5p+1=15k+6 \vdots 3$ và $15k+6>3$ nên là hợp số.

Vậy nếu $p$ và $10p+1$ là các số nguyên tố $(p>3)$ thì $5p+1$ là hợp số.(đpcm)

**Bài 13:** Cho p và $8p^2+1$ là các số nguyên tố $(p>3)$.Chứng minh rằng $8p^2-1$là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Vì $p, 8p^2+1$ là 2 số nguyên tố lớn hơn 3 nên không chia hết cho 3

Khi đó ta có : $8p^2-1; 8p^2; 8p^2+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3

Mà $8p^2+1 \not\vdots 3, p \not\vdots 3 => 8p^2 \not\vdots 3$. Vậy $8p^2-1 \vdots 3$ hay là hợp số

**Bài 14:** Cho $p$ và $8p-1$ là các số nguyên tố$(p>3)$. Tìm số nguyên tố $p$ để $8p+1$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Với $p>3 \Rightarrow p,\ 8p-1$ là 2 số nguyên tố lớn hơn 3 nên không chia hết cho 3

Khi đó ta có : $8p-1;\ 8p;\ 8p+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3

Mà $8p-1 \not\vdots 3, p \not\vdots 3 => 8p \not\vdots 3$ .Vậy $8p+1 \vdots 3$ hay là hợp số

**Bài 15:** Chứng minh rằng dãy các số sau là hợp số : $121; 11211; 1112111; \underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11.....1}_{n}(n>2)$

***<u>Lời giải:</u>***

Ta có:

$121=110+11=11.10+11=11(10+1)$

$11211=1110+111=111(10^2+1)$

$1112111=1111000+1111=1111(10^3+1)$

$\underbrace{111...1}_{n}2\underbrace{111...1}_{n}=\underbrace{111...1}_{n+1}\underbrace{000...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{111....1}_{n+1}(\underbrace{10....0}_{n}+1)=\underbrace{11...1}_{n+1}(10^n+1)$ là hợp số

**Bài 16:** Chứng minh rằng $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n}(n>2)$ là hợp số.

***Lời giải:***

Ta có:

$\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n}=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00.....0}_{n}+\underbrace{22.....2}_{n}$

$\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n}=\underbrace{11...1}_{n}.1\underbrace{00.....0}_{n}+2.\underbrace{11.....1}_{n}$

$\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n}=\underbrace{11...1}_{n}.\left(1\underbrace{00.....0}_{n}+2\right)$ là hợp số

**Bài 17:** Một số nguyên tố chia cho $42$ có số dư là hợp số. Tìm số dư đó

***Lời giải:***

Gọi $p$ là số nguyên tố theo đầu bài, khi đó: $p=42.k+r=2.3.7k+r(0<r<42)$

Vì $r$ là hợp số $\Rightarrow 2\le r<42$

Vì p là số nguyên tố

$\Rightarrow r$ không chia hết cho $2,3,7$

Mà $r$ là hợp số nên $\Rightarrow r=25$ là giá trị cần tìm

Vậy $r=25$

**Bài 18:** Một số nguyên tố chia cho $60$ có số dư là $r$. Tìm số dư, biết rằng $r$ có thể là hợp số hay là số nguyên tố không?

***Lời giải:***

Giả sử p là số nguyên tố:

$p=60k+r(k\in N;0<r<60);60=2^2.3.5\Rightarrow p=2^2.3.5.k+r\Rightarrow r\not\vdots\, 2,3,5$

$\Rightarrow r=1$ hoặc $r$ là số nguyên tố hoặc là hợp số và không chia hết cho 2, 3, 5

$\Rightarrow r=1$ hoặc $r$ là số nguyên tố khác 2, 3, 5 hoặc r = 49 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} r=1 \\ r=49 \end{array}\right.$

**Bài 19:** Cho $p$ và $p+2$ là các số nguyên tố ( $p>3$ ).Chứng minh rằng tổng của hai số nguyên tố đó chia hết cho $12$.

***Lời giải:***

Đặt $A=p+(p+2)=2p+2=2(p+1)$

Và $p+2=p-1+3$

Xét 3 số liên tiếp $p-1, p, p+1$ phải có 1 số chia hết cho 3

Vì $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3, nên $p$ không chia hết cho 3,

Mặt khác $p-1 \not\vdots 3$ vì nếu chia hết cho 3 thì $p+2$ sẽ chia hết cho 3, như vậy $p+1 \vdots 3 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 3$

Lại có $p$ là số nguyên tố >3 nên $p$ lẻ => $p+1$ là số chẵn $\vdots 2$

Vậy $2(p+1) \vdots 12$

**Bài 20:** Cho $p$ là số nguyên tố lớn hơn $3$. Chứng minh rằng $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

***Lời giải:***

Vì $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ là số lẻ không chia hết cho 2 và 3

Với $p$ không chia hết cho 2 $\Rightarrow (p-1),(p+1)$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 8$

Mặt khác p không chia hết cho 3 nên $p = 3k+1, p = 3k+2$

- Nếu $p = 3k+1 \Rightarrow (p-1) \vdots 3 \Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 24$

- Nếu $p = 3k+2 \Rightarrow (p+1) \vdots 3 \Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 24$

**Bài 16:** Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100, hỏi tổng 25 số nguyên tố đó có là hợp số không?

***Lời giải***

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100, có 1 số nguyên tố chẵn là số 2

Còn lại 24 số nguyên tố còn lại là số lẻ => tổng của 24 số lẻ cho ta 1 số chẵn

Vậy xét tổng của 25 số nguyên tố đó cho ta được 1 số chẵn nên tổng 25 số nguyên tố đó có là hợp số .

**Bài 17:**

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $a \geq 2$ thì $A = a^{1966} + a^{2006} + 1$ là hợp số.

***Lời giải***

Ta có $A = a^{1966} + a^{2006} + 1 = a\left(a^{3.655} - 1\right) + a^2\left(a^{3.668} - 1\right) + \left(a^2 + a + 1\right)$

Mà $a^{3.655} - 1 = \left[\left(a^3\right)^{655} - 1\right] \vdots a^2 + a + 1;\ a^{3.668} - 1 = \left[\left(a^3\right)^{668} - 1\right] \vdots a^2 + a + 1$

Do đó $A \vdots a^2 + a + 1 > 1$

Vậy với mọi số nguyên $a \geq 2$ thì $A = a^{1966} + a^{2006} + 1$ là hợp số.

**Bài 18:** Cho $a = 2.3.4.5....1987$. Có phải 1986 số tự nhiên liên tiếp sau đều là hợp số không?

$a+2;\ a+3;\ a+4;.....;a+1987$

***Lời giải***

Do a là tích các số từ 2 đến 1987 có ngĩa là tích của a có 1996 số.

$a+2=2.3.4.5....1987+2=2(3.4.5....1987)\vdots 2$ và $a+2>2$ nên $a+2$ là hợp số.

$a+3=2.3.4.5....1987+3=3(2.4.5....1987)\vdots 3$ và $a+3>3$ nên $a+3$ là hợp số.

Chứng minh tương tự cho các trường hợp còn lại.

Vậy 1986 số tự nhiên liên tiếp $a+2;\ a+3;\ a+4;.....;a+1987$ đều là hợp số.

**Bài 19:** Cho $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\in\mathbb{Z}^+\right)$, biết $F(5)-F(3)=2010$. Chứng minh rằng: $F(7)-F(1)$ là hợp số.

***<u>Lời giải</u>***

Ta có $2010=F(5)-F(3)=\left(5^3-3^3\right)a+\left(5^2-3^2\right)b+(5-3)c=98a+16b+2c$

$\Rightarrow 16b+2c=2010-98a$

$\Rightarrow F(7)-F(1)=\left(7^3-1^3\right)a+\left(7^2-1^2\right)b+(7-1)c=342a+48b+6c$

$=342a+3(16b+2c)=342a+3(2010-98a)=48a+6030=3.(16a+2010)\vdots 3$

Vì a nguyên dương nên $16a+2010>1$.

Vậy $F(7)-F(1)$ là hợp số.

**Bài 20:** Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3, sao cho 14p + 1 cũng là số nguyên tố thì 7p + 1 là bội số của 6.

***<u>Lời giải</u>***

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ không chia hết cho 2 và 3

Khi đó $7p+1$ là 1 số chẵn nên chia hết cho 2

Mặt khác vì $p$ không chia hết cho 3 nên p có dạng $p=3k+1, p=3k+2,\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$

Với $p=3k+1$ giả sử là số nguyên tố, $=>14p+1=45k+15\vdots 3$ nên $p=3k+1(l)$

Với $p=3k+2 => 14p+1=42k+29$ giả sử là số nguyên tố, khi đó: $7p+1=21k+15\vdots 3$

Như vậy $7p+1\vdots 6$

**Bài 21:** Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương

***<u>Lời giải</u>***

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p\vdots 2$ và p không thể chia hết cho 4 (1)

- Giả sử p + 1 là số chính phương, đặt $p+1=m^2\left(m\in N\right)$

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ => $m^2$ lẻ => m lẻ

Đặt $m=2k+1\left(k\in N\right)$, ta có: $m^2=4k^2+4k+1\Rightarrow p+1=4k^2+4k+1\Rightarrow p=4k^2+4k=4k\left(k+1\right)$

Mâu thuẫn với (1)

=> p + 1 không thể là số chính phương

- Giả sử $p=2.3.5....$ là $\vdots 3$ => $p-1$ có dạng 3k+2 $\Rightarrow p-1$ không là số chính phương

Vậy nếu p là tích của $n\left(n>1\right)$ số nguyên tố đầu tiên thì p – 1 và p + 1 không là số chính phương

**Bài 22:** Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn : $10p+1$ cũng là số nguyên tố. CMR : $5p+1\vdots 6$

***<u>Lời giải</u>***

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3, nên 10p cũng không chia hết cho 3 (1)

Lại có $10p+1$ là số nguyên tố và $10p+1>3$ => $10p+1\not\vdots 3$ (2)

Ta có $10p\left(10p+1\right)\left(10p+2\right)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3

=> $10p+2\vdots 3$ => $5p+1\vdots 3$

Lại có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ => $5p+1$ là số chẵn nên chia hết cho 2, khi đó $5p+1\vdots 6$

**Bài 23:** Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2+c^2=b^2+d^2$. Chứng minh rằng: $a+b+c+d$ là hợp số

***<u>Lời giải</u>***

Ta có: $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-\left(a+b+c+d\right)=\left(a^2-a\right)+\left(b^2-b\right)+\left(c^2-c\right)+\left(d^2-d\right)$

=> $a\left(a-1\right)+b\left(b-1\right)+c\left(c-1\right)+d\left(d-1\right)\vdots 2$ mà $a^2+c^2=b^2+d^2$ => $a^2+b^2+c^2+d^2=2\left(b^2+d^2\right)\vdots 2$

Do đó $a+b+c+d\vdots 2$

Vì Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là các số nguyên dương nên $a+b+c+d\ge 4$

$\Rightarrow a+b+c+d$ là hợp số

**Bài 24:** Chứng minh các số sau là hợp số

a) $12^{11}+13^{17}+17^{19}$ b) $1+23^{23}+29^{29}+25^{125}$ c) $45^{25}+37^{15}$ d) $95^{354}+51^{25}$

***<u>Lời giải</u>***

a) Ta có:

$12^{11}$ có chữ số tận cùng là 8

$13^{17}$ có chữ số tận cùng là 3

$17^{19}$ có chữ số tận cùng là 7

$\Rightarrow 12^{11}+13^{17}+17^{19}$ có chữ số tận cùng là 8

$\Rightarrow 12^{11}+13^{17}+17^{19}$ là 1 số chẵn

$\Rightarrow 12^{11}+13^{17}+17^{19}$ là hợp số

b) Ta có :

$23^{23}$ có chữ số tận cùng là 7

$29^{29}$ có chữ số tận cùng là 9

$25^{125}$ có chữ số tận cùng là 5

$\Rightarrow 1+23^{23}+29^{29}+25^{125}$ có chữ số tận cùng là 2

$\Rightarrow 1+23^{23}+29^{29}+25^{125}$ là 1 số chẵn

$\Rightarrow 1+23^{23}+29^{29}+25^{125}$ là hợp số

c) Ta có :

$45^{25}$ có chữ số tận cùng là 5

$37^{15}$ có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow 45^{25}+37^{15}$ có chữ số tận cùng là 8

$\Rightarrow 45^{25}+37^{15}$ là 1 số chẵn

$\Rightarrow 45^{25}+37^{15}$ là hợp số

d) Ta có

$95^{354}$ có chữ số tận cùng là 5

$51^{25}$ có chữ số tận cùng là 1

$\Rightarrow 95^{354}+51^{25}$ có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow 95^{354}+51^{25}$ là 1 số chẵn

$\Rightarrow 95^{354}+51^{25}$ là hợp số

**Bài 25:** Chứng minh các số sau là hợp số

a) $10^8+10^7+7$ b) $17^5+24^4-13^{21}$ c) $425^{25}-37^{15}$

***Lời giải***

a)Ta có : $10^8+10^7+7$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên là hợp số

b) Ta có : $17^5+24^4-13^{21}$ là số chẵn nên là hợp số

c) $425^{25}-37^{15}$ là số chẵn nên là hợp số

**Bài 26:** Chứng minh các số sau là hợp số

a) $1+2^7+3^{11}+5^{13}+7^{17}+11^{19}$ b) $195^{354}-151^{25}$ c) $2^{2^{2n+1}}-1, n\in\mathbb{N}$ d) $2^{2^{4n+1}}-6, n\in\mathbb{N}$

***Lời giải***

a) $1+2^7+3^{11}+5^{13}+7^{17}+11^{19}$ là số chẵn nên là hợp số.

b) Ta có: $195^{354}-151^{25}$ là số chẵn nên là hợp số

c) Ta có : $2^{2n+1}=2^{2n}.2=4^n.2 => 2^{2^{2n+1}}=2^{4^n.2}=\left(2^{4^n}\right)^2$

Ta có :

$2^{4^n}$ có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow\left(2^{4^n}\right)^2$ có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow 2^{2^{2n+1}}-1$ có chữ số tận cùng là 5

$\Rightarrow 2^{2^{2n+1}}-1\vdots 5$ $\Rightarrow 2^{2^{2n+1}}+1$ là hợp số

d) Ta có : $2^{4n+1}=2^{4n}.2=16^n.2 => 2^{4^{2n+1}}=2^{16^n.2}=\left(2^{16^n}\right)^2$

Ta có :

$2^{16^n}$ có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow\left(2^{16^n}\right)^2$ có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow 2^{2^{4n+1}}-6$ có chữ số tận cùng là 0

$\Rightarrow 2^{2^{4n+1}}-6\vdots 5$ nên $\Rightarrow 2^{2^{4n+1}}-6$ là hợp số

**Bài 27:** Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì $2^{2^{2n+1}}+3$ là hợp số.

***Lời giải:***

Với $2^2=4\equiv 1(\bmod 3)\Rightarrow 2^{2n}\equiv 1(\bmod 3),(n\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow 2^{2n}-1\vdots 3$ nên $2^{2n+1}-2=2(2^{2n}-1)\vdots 6$

Hay $2^{2n+1}=6k+2(k\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow 2^{2^{2n+1}}+3=(2^6)^k.2^2+3\equiv 2^2+3\equiv 0(\bmod 7)$

Tức là $2^{2^{2n+1}}+3\vdots 7(n\in\mathbb{N}^*)$

Mà $2^{2^{2n+1}}+3>7(n\in\mathbb{N}^*)$ nên $2^{2^{2n+1}}+3$ là hợp số. ( đpcm )

**Bài 28:** Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì $19.8^n+17$ là hợp số.

**Lời giải:**

+ Nếu $n=2k(k\in\mathbb{N}^*)$ thì $19.8^{2k}+17=18.8^{2k}+(63+1)^k+(18-1)\equiv 0(\bmod 3)$

+ Nếu $n=4k+1(k\in\mathbb{N}^*)$ thì $19.8^n+17=13.8^{4k+1}+6.8.64^{2k}+17$

$$=13.8^{4k+1}+39.64^{2k}+9(1-65)^{2k}+(13+4)\equiv 0(\bmod 13)$$

+ Nếu $n=4k+3(k\in\mathbb{N}^*)$ thì

$19.8^n+17=15.8^{4k+3}+4.8^3.64^{2k}+17$

$15.8^{4k+3}+4.5.10.64^{2k}+4-2(1-65)^{2k}+(25-8)\equiv 0(\bmod 5)$

Như vậy với mọi giá trị $n\in\mathbb{N}^*$ thì số $19.8^n+17$ là hợp số.

**Bài 29:** Chứng minh các số sau là hợp số:

a) $\overline{abcabc}+7$ b) $\overline{abcabc}+22$ c) $\overline{abcabc}+39$

***Lời giải***

a) Ta có: $\overline{abcabc}=a.10^5+b.10^4+c.10^3+a.10^2+b.10+c+7$

$=a.100100+b.10010+1001c+7=1001\left(100a+101b+c\right)+7$

Vì 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{abcabc}\,\vdots\,7$ là hợp số

b) Tách tương tự, nhưng vì $1001\,\vdots\,11$ nên là hợp số

c) Tách tương tự, nhưng vì $1001\,\vdots\,13$ nên là hợp số

**Bài 30:** Hãy chứng minh các số sau là hợp số:

a) $A=11111..........1$ ( 2022 chữ số 1 );

b) $B=1010101$

c) $C=1!+2!+3!+.......+100!$

d) $D=311141111$

***Lời giải:***

a) Tổng các chữ số của A là: $1+1+1......+1=2022\,\vdots\,3\Rightarrow A\,\vdots\,3$

mà $A>3$ nên A là hợp số ( đpcm )

b) $B=1010101=101.10001$ là hợp số ( đpcm )

c) Vì $1!+2!=3\,\vdots\,3$ và $3!+4!+.....+100!$ luôn chia hết cho 3 nên $C\,\vdots\,3$

Mà $C>3$ nên C là hợp số (đpcm )

d) $D=311141111=311110000+31111=31111(10000+1)\vdots 31111$

$\Rightarrow$ D là hợp số (đpcm )

**Bài 31:** Chứng minh rằng số $N=\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Đặt $5^{25}=a$, khi đó

$$N=\frac{a^5-1}{a-1}=a^4+a^3+a^2+a+1$$

$$=(a^4+9a^2+1+6a^3+6a+2a^2)-(5a^3+10a^2+1)$$

$$=(a^2+3a+1)^2+5a(a^2+2a+1)$$

$$=(a^2+3a+1)^2-5.5^{25}(a+1)^2$$

$$=(a^2+3a+1)^2-\left[5^{13}.(a+1)\right]^2$$

$$=\left[a^2+3a+1+5^{13}(a+1)\right]\left[a^2+3a+1-5^{13}(a+1)\right]$$

N là tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên N là hợp số ( đpcm )

**Bài 32:** Cho các số nguyên dương $a,b,c,d$ thỏa mãn $a^n\vdots 5$ .Chứng minh rằng

$A=a^n+b^n+c^n+d^n$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Giả sử $(a,c)=t(t\in\mathbb{N}^*)$

Đặt $a=a_1t,c=c_1t;(a_1,c_1)=1$

$ab=cd\Rightarrow a_1bt=c_1dt\Rightarrow a_1b=c_1d$

Mà $(a_1,c_1)=1\Rightarrow b\vdots c_1$

Đặt $b=c_1k\Rightarrow d=a_1k,(k\in\mathbb{N}^*)$,

Ta có

$A=a^n+b^n+c^n+d^n=a_1{}^nt^n+c_1{}^nk^n+c_1{}^nt^n+a_1{}^nk^n=(a_1{}^n+c_1{}^n)(k^n+t^n)$

Vì $a_1,c_1,t,k$ là số nguyên dương nên $A$ là hợp số.

**Bài 33:** Hai số $2^n+1$ và $2^n-1\left(n>2\right)$ có thể đồng thời là số nguyên tố hay đồng thời là hợp số được không ?

**Lời giải:**

Trong ba số nguyên liên tiếp $2^n+1$, $2^n$ và $2^n-1$ có một số chia hết cho 3, nhưng $2^n \not\vdots\, 3$ do đó $2^n+1$ hoặc $2^n-1$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên $2^n+1$, $2^n-1$ không đồng thời là số nguyên tố.

Với $n=6$ thì $2^n+1$, $2^n-1$ đồng thời là hợp số.

**Bài 34:** Hai số nguyên tố lẻ liên tiếp $p_1$ và $p_2$ $\left(p_1>p_2\right)$, chứng tỏ $\dfrac{p_1+p_2}{2}$ là hợp số.

**Lời giải:**

Vì $p_1$ và $p_2$ là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp nên $p_1+p_2$ là số chẵn và $\dfrac{p_1+p_2}{2}\in\mathbb{N}$

Mặt khác $p_1>p_2$ nên $p_1+p_2>2p_2 \Rightarrow \dfrac{p_1+p_2}{2}>p_2$ và $2p_1>p_1+p_2 \Rightarrow p_1>\dfrac{p_1+p_2}{2}$

Vậy $p_2<\dfrac{p_1+p_2}{2}<p_1 \Rightarrow \dfrac{p_1+p_2}{2}$ là hợp số.

**Dạng 3:Áp dụng định lí Fermat chứng minh một biểu thức là hợp số.**

***I.Phương pháp giải***

-Định lí Fermat nhỏ: $2^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$ với p là số nguyên tố.

-Bằng cách sử dụng định lí Fermat để giải các bài toán về số nguyên tố.

***II.Bài toán***

**Bài 33:** Cho $n\in\mathbb{N}^*$, chứng minh rằng: $2^{2^{10n+1}}+19$ là hợp số.

***Lời giải:***

Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}}+19 \,\vdots\, 23$ với mọi $n\geq 1$

Ta có: $2^{10}\equiv 1(\bmod 11)\Rightarrow 2^{10n+1}\equiv 2(\bmod 22)\Rightarrow 2^{10n+1}=22k+2(k\in\mathbb{N})$.

Theo định lý Fermat:

$2^{22}\equiv 1(\bmod 23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}\equiv 2^{22k+2}\equiv 4(\bmod 23)$

$\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}+19\,\vdots\, 23$

Mà $2^{10n+1}+19>23$ nên $2^{2^{10n+1}}+19$ là hợp số ( đpcm )

**Bài 34:** Cho $n\in\mathbb{N}^*$, chứng minh rằng: $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5$ là hợp số.

***Lời giải:***

Theo định lí Fermat nhỏ ta có $3^{10} \equiv 1(\bmod 11), 2^{10} \equiv 1(\bmod 11)$ .

Ta tìm số dư trong phép chia $2^{4n+1}$ và $3^{4n+1}$ cho 10, tức là tìm chữ số tận cùng chúng.

$2^{4n+1} = 2.16^n \equiv 2(\bmod 10) \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2, (k \in \mathbb{N})$

$3^{4n+1} = 3.81^n \equiv 3(\bmod 10) \Rightarrow 3^{4n+1} = 10l + 3, (l \in \mathbb{N})$

Mà $3^{10} \equiv 1(\bmod 11)$ và $2^{10} \equiv 1(\bmod 11)$ nên

$2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5 \equiv 3^{10k+2} + 2^{10l+3} + 5 \equiv 3^2 + 2^3 + 5 \equiv 0(\bmod 11)$

Mà $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5 > 11$ với mọi số tự nhiên n khác 0

Vậy $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5$ là hợp số với mọi số tự nhiên n khác 0.

**Bài 35:** Giả sử $p$ là số nguyên tố lẻ và $m = \dfrac{9^p - 1}{8}$. Chứng minh rằng $m$ là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^m \equiv 1\left(\bmod m\right)$.

***Lời giải:***

Ta có $m = \dfrac{9^p - 1}{8} = \dfrac{3^p - 1}{2}.\dfrac{3^p + 1}{4} = a.b$ với $a = \dfrac{3^p - 1}{2}, b = \dfrac{3^p + 1}{4}$

Vì $a, b$ là các số nguyên lớn hơn 1 nên $m$ là hợp số.

Mà $m = 9^{p-1} + 9^{p-2+}.... + 9 + 1$ và $p$ là số nguyên tố lẻ nên $m$ lẻ và $m \equiv 1\left(\bmod\ 3\right)$.

Theo định lí Fermat ta có $9^p - 9 \vdots p$ và $\left(p, 8\right) = 1$ nên $9^p - 9 \vdots 8p \Rightarrow m - 1 \vdots \dfrac{9^p - 9}{8} \vdots p$

Vì $m - 1 \vdots 2$ nên $m - 1 \vdots 2p$ khi đó $3^{m-1} - 1 \vdots 3^{2p} - 1 \vdots \dfrac{9^p - 1}{8} = m$ (đpcm).

**Bài 36:** Cho $n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng: $2^{2^{4n+1}} + 7$ là hợp số.

***Lời giải:***

Với $n \in \mathbb{N}$ ta có $2^{4n} - 1 = 16^n - 1 \equiv 0(\bmod 5)$

$\Rightarrow 2^{4n+2} - 2 = 2\left(2^{4n} - 1\right) \vdots 10 \Rightarrow 2^{4n+2} = 10k + 2\left(k \in \mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow 2^{2^{4n+1}} + 7 = \left(2^{10}\right)^k.2^2 + 7 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0\left(\bmod 11\right)$

Mặt khác $2^{2^{4n+1}} + 7 > 11\left(n \in \mathbb{N}\right)$

Vậy $2^{2^{4n+1}}+7$ là hợp số.

## PHẦN III.BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG. ( Khoảng 15 bài )

**Bài 1: (HUYỆN BẠCH THÔNG NĂM 2018-2019)**

Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng $2015$ hay không ? Vì sao ?

***Lời giải:***

Tổng của hai số nguyên tố bằng 2015 là số lẻ, nên một trong hai số nguyên tố phải là 2

Khi đó số kia là 2013, số này là hợp số

Vậy không tồn tại hai số nguyên tố có tổng bằng 2015

**Bài 2: (HUYỆN TAM DƯƠNG NĂM 2017-2018)**

Cho $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $p^{2016}+2018$ là số nguyên tố hay hợp số

***Lời giải:***

Vì $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ chia cho 3 dư 1 hoặc $p$ chia cho 3 dư $2 \Rightarrow p^2$ chia cho 3 dư 1

Mà $p^{2016}=\left(p^2\right)^{1008}$ nên $p^{2016}$ chia cho $3$ dư $1$.

Mặt khác: $2018$ chia cho 3 dư 2, do đó: $\left(p^{2016}+2018\right)\vdots 3$

Vì $\left(p^{2016}+2018\right)\vdots 3$ và $\left(p^{2016}+2018\right)>3$ nên $p^{2016}+2018$ là hợp số

**Bài 3: (HUYỆN SƠN TÂY NĂM 2017-2018)**

Với $q, p$ là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng: $p^4-q^4 \vdots 240$

***Lời giải:***

Ta có: $p^4-q^4=\left(p^4-1\right)-\left(q^4-1\right); 240=8.2.3.5$

Chứng minh $p^4-1 \vdots 240$

Do $p>5$ nên $p$ là số lẻ

Mặt khác $p^4-1=(p-1)(p+1)\left(p^2+1\right)$

$\Rightarrow(p-1)$ và $(p+1)$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow(p-1)(p+1) \vdots 8$

Do $p$ là số lẻ nên $p^2$ là số lẻ $\Rightarrow p^2+1 \vdots 2$

$p>5$ nên p có dạng:

$p=3k+1 \Rightarrow p-1=3k \vdots 3 \Rightarrow p^4-1 \vdots 3$

$p=3k+2 \Rightarrow p+1=3k+3 \vdots 3 \Rightarrow p^4-1 \vdots 3$

Mặt khác p có thể là dạng :

$p=5k+1 \Rightarrow p-1=5k+1-1=5k \vdots 5 \Rightarrow p^4-1 \vdots 5$

$p=5k+2 \Rightarrow p^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+20k+5 \vdots 5 \Rightarrow p^4-1 \vdots 5$

$p=5k+3 \Rightarrow p^2+1=25k^2+30k+10 \vdots 5 \Rightarrow p^4-1 \vdots 5$

$p=5k+4 \Rightarrow p+1=5k+5 \vdots 5 \Rightarrow p^4-1 \vdots 5$

Vậy $p^4-1 \vdots 8.2.3.5$ hay $p^4-1 \vdots 240$

Tương tự ta cũng có: $q^4-1 \vdots 240$

Vậy $(p^4-1)-(q^4-1)=p^4-q^4 \vdots 240$

**Bài 4: (HUYỆN QUẢNG TIẾN)**

Nếu $p<5$ và $2p+1$ là các số nguyên tố thì $4p+1$ là số nguyên tố hay hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Xét 3 số tự nhiên liên tiếp $4p;\ 4p+1;\ 4p+2$, trong 3 số đó có 1 số là bội của 3

Mà $p<5$ và p là số nguyên tố nên p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2\,(k \in \mathbb{N})$.

Nếu $p=3k+1$ thì $4p=4(3k+1) \Leftrightarrow 3Q+1=p$ và $4p+2=4(3k+1)+2 \Leftrightarrow p=3Q \vdots 3$

Mặt khác $4p+2=2(2p+1)=3Q \vdots 3 \Rightarrow 2(2p+1) \vdots 3$ mà $(2;3)=1$ nên $2p+1 \vdots 3$ (trái với giả thiết).

Nếu $p=3k+2 \Rightarrow 4p+1=4(3k+2)+1=12k+9=3M \vdots 3 \Rightarrow 4p+1$ là hợp số.

Vậy nếu $p<5$ và $2p+1$ là các số nguyên tố thì $4p+1$ là hợp số.

**Bài 5: (HUYỆN THANH OAI NĂM 2017-2018)**

Tìm các số nguyên tố $x, y$ sao cho: $x^2+45=y^2$

***<u>Lời giải:</u>***

$x^2+45=y^2 \Rightarrow y^2>45,$ do đó . $y$ là số nguyên tố lẻ

Suy ra $x$ là số nguyên tố chẵn nên $x=2$. từ đó ta có:

$y^2=4+45=49 \Rightarrow y=7$

**Bài 6: (HSG NĂM 2018-2019)**

Cho n là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $n^2+2006$ là số nguyên tố hay hợp số

***<u>Lời giải:</u>***

$n$ là số nguyên tố nên $n > 3$ và không chia hết cho 3. Vậy $n^2$ chia cho 3 dư 1 do đó

$n^2 + 2006 = 3m + 1 + 2006 = 3m + 2007 = 3.(m + 669) \vdots 3$

Vậy $n^2 + 2006$ là hợp số.

**Bài 7: (HUYỆN HOÀNG HOÁ NĂM 2018-2019)**

Chứng tỏ rằng nếu $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - 1$ chia hết cho 3

***<u>Lời giải:</u>***

Xét số nguyên tố p khi chia cho 3. Ta có: $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = (3k+1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k \vdots 3$

Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p^2 - 1 = (3k+2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 \vdots 3$

Vậy $p^2 - 1 \vdots 3$

**Bài 8: (TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRỰC – KIM BÀI- NĂM 2017-2018)**

Cho P và $P + 4$ là các số nguyên tố với $P > 3$. Chứng minh $P - 2014$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Từ giả thiết ta có $P = 3k + 1$ hoặc $P = 3k + 2\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 3 = 3k + 6 \vdots 3$ (loại)

Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p - 2014 = 3k - 2013 \vdots 3$ (loại)

Vậy $p - 2014$ là hợp số

**Bài 9: (PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH BA)**

Cho $p$; $p + 4$ là các số nguyên tố $(p > 3)$. Chứng minh $p + 8$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

$p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ $\left(k \in N^*\right)$

Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6 \vdots 3$ mà $p + 4 > 3$ nên $p + 4$ là hợp số, trái với đề bài. Vậy $p$ có dạng $3k + 1$.

Khi đó: $p + 8 = 3k + 1 + 8 = 3k + 9 \vdots 3$

Lại có $p + 8 > 3$ nên $p + 8$ là hợp số.

Vậy nếu $p$; $p + 4$ là các số nguyên tố ( $p > 3$ ) thì $p + 8$ là hợp số.

**Bài 10: (PHÒNG GD VÀ ĐT HOẰNG HOÁ)**
Cho ba số nguyên tố lớn hơn $3$, trong đó số sau lớn hơn số trước là $d$ đơn vị. Chứng minh: $d$ chia hết cho $6$.

***<u>Lời giải:</u>***

Gọi ba số nguyên tố lớn hơn $3$ là $a,b,c$. Giả sử $a>b>c$.

Vì $a,b,c$ là ba số nguyên tố lớn hơn $3$ nên $a,b,c$ là ba số nguyên tố lẻ.

Vì số sau lớn hơn số trước là $d$ đơn vị nên $d$ là số chẵn và $\begin{cases} a-b=d \\ b-c=d \\ a-c=2d \end{cases}$

Vì $a,b,c$ là ba số nguyên tố lớn hơn $3$ nên $a,b,c$ không chia hết cho 3.

Do đó trong ba số $3$ số $a,b,c$ luôn tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho $3$ nên hiệu của hai số đó chia hết cho 3.

$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} d \vdots 3 \\ 2d \vdots 3 \end{array} \right. \Rightarrow d \vdots 3$ (vì $UCLN\left(2;3\right)=1$ )

Mà $d$ là số chẵn nên $d \vdots 2$ .

Vậy $d \vdots 6$.

**Bài 11: (PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐÔ LƯƠNG)**
Cho $p$ là số nguyên tố thỏa mãn $p+2$ và $p+4$ cũng là số nguyên tố. Tìm số nguyên $x$ sao cho
$p^3+54=\left(2x-1\right)^2$.

***<u>Lời giải:</u>***

Với $p$ là số nguyên tố

Xét $p=2$ thì $p+2=4$; $p+4=6$ đều là hợp số (loại)

Xét $p=3$ thì $p+2=5$; $p+4=7$ đều là số nguyên tố (nhận)

Xét $p>3$ thì $p$ có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$, $k$ là số nguyên dương

- Với $p=3k+1$ thì $p+2$ chia hết cho 3, $p+2>3$ nên $p+2$ là hợp số.

- Với $p=3k+2$ thì $p+4$ là hợp số.

Vậy $p=3$

Khi đó: $p^3+54=(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2=81$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=9 \\ 2x-1=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

**Bài 12: (PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN HOA LƯ)**

Cho $B=999993^{1999}-555557^{1997}$. Chứng minh rằng $B$ là hợp số.

***Lời giải:***

Số $999993^{1999}$ có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của $3^{1999}$

Mà $3^{1999}=\left(3^4\right)^{499}.3^3=81^{499}.27$ có chữ số tận cùng bằng 7

Số $555557^{1997}$ có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của $7^{1997}$

Mà $7^{1997}=\left(7^4\right)^{499}.7=2041^{499}.7$ có chữ số tận cùng bằng 7

$\Rightarrow B=999993^{1999}-555557^{1997}$ có chữ số tận cùng bằng 0

$\Rightarrow B \vdots 5$ và $B>5$ nên $B$ là hợp số.

**Bài 13: (PHÒNG GD&ĐT HUYỆN TIÊN DU)**

Chứng minh rằng nếu $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3, sao cho $2p+1$ cũng là số nguyên tố thì $4p+1$ là hợp số.

***Lời giải:***

+ Nếu $p>3$ thì $p$ có dạng $p=3k+1; p=3k+2$

+ Nếu $p=3k+1$ ta có $2p+1=2(3k+1)+1=6k+3$ chia hết cho 3 nên là hợp số (loại)

+ Nếu $p=3k+2$ ta có $2p+1=2(3k+2)+1=6k+5$ (thõa mãn)

$4p+1=4(3k+2)+1=12k+9$ chia hết cho 3 nên là hợp số

Vậy $4p+1$ là hợp số.

**Bài 14: (UBND HUYỆN PHÚ XUYÊN)**

Cho $p$ và $p+8$ đều là số nguyên tố $(p>3)$. Hỏi $p+100$ là số nguyên tố hay hợp số.

***Lời giải:***

Vì $p$ là số nguyên tố và $p>3$ nên $p \not\vdots 3$. Do đó $p$ có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2, (k \in N^*)$.

Nếu $p=3k+1$ thì $p+8=3k+9 \vdots 3 \Rightarrow p+8$ là hợp số (Không thỏa mãn).

$\Rightarrow p = 3k+2$, khi đó $p+100 = 3k+102 \vdots 3 \Rightarrow p+100$ là hợp số.

**Bài 15: (UBND HUYỆN VŨ THƯ)**

Cho $a$, $b$, $c$, $d$ là số nguyên dương thỏa mãn $a^2+b^2-c^2-d^2$ chẵn. Chứng minh $a+b+c+d$ không là số nguyên tố.

***<u>Lời giải:</u>***

Xét : A = $(a^2+b^2-c^2-d^2)+(a+b+c+d)$

$A = (a^2+a)+(b^2+b)-(c^2-c)-(d^2+d)$

$A = a.(a+1)+b.(b+1)-c.(c-1)-d.(d-1)$

Vì a là số nguyên dương nên $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a.(a+1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow a.(a+1) \vdots 2$

Tương tự chứng minh được:

$b(b+1) \vdots 2;\ c(c-1) \vdots 2;\ d(d-1) \vdots 2 \quad \forall b,c,d \in \mathbb{N}^*$

Nên ta có :

$A = \left[a(a+1)+b(b+1)-c(c-1)-d(d-1)\right] \vdots 2 \quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$

Mà giá trị biểu thức $a^2+b^2-c^2-d^2$ là số chẵn nên $(a+b+c+d) \vdots 2$ (1)

Lại có $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$ nên $a+b+c+d \geq 4(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a+b+c+d$ là hợp số

Vậy $a+b+c+d$ không là số nguyên tố

**Bài 16: (PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN LỤC NAM)**

Cho n là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $n^2+2018$ là số nguyên tố hay hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Vì n là số nguyên tố và $n > 3 \Rightarrow n = 3k+1; n = 3k+2$

-Nếu $n = 3k+1$

$\Rightarrow n^2+2018 = (3k+1)^2+2018 = 9k^2+6k+1+2018$

$= 9k^2+6k+2019 = 3(3k^2+2k+673) \vdots 3$ là hợp số.

-Nếu $n = 3k+2 \Rightarrow n^2+2018 = (3k+2)^2+2018 = 9k^2+12k+4+2018$ là hợp số.

Vậy khi n là số nguyên tố lớn hơn 3thì $n^2+2018$ là hợp số.

**Bài 17: (ĐỀ HSG LỚP 9)**

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $A = n^{2021} + n^{2020} + 1$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Với $n = 1 \Rightarrow A = 3$ không là hợp số.

Với $n > 1 \Rightarrow A = n^{2021} + n^{2020} + 1 = n^{2021} - n^2 + n^{2020} - n + n^2 + n + 1$

$= n^2\left(n^{2019} - 1\right) + n\left(n^{2019} - 1\right) + \left(n^2 + n + 1\right)$

Mà $n^{2019} - 1 = \left(n^{673}\right)^3 - 1 \vdots n^3 - 1$; $n^3 - 1 \vdots \left(n^2 + n + 1\right) \Rightarrow n^{2019} - 1 \vdots n^2 + n + 1$

$\Rightarrow A \vdots n^2 + n + 1$

Mà $n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$ nên $A = n^{2021} + n^{2020} + 1 > n^2 + n + 1 > 1$.

Vậy $A$ là hợp số với mọi số nguyên dương $n > 1$.

**Bài 18: (ĐỀ HSG LỚP 9)**

Chứng minh rằng nếu $a + b + c + d = 0$ thì $A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ là hợp số.

***<u>Lời giải:</u>***

Ta có $a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow a + c = -(b + d)$

$\Rightarrow (a + c)^3 = \left[-(b + d)\right]^3$

$\Rightarrow a^3 + c^3 + 3ac(a + c) = -b^3 - d^3 - 3bd(b + d)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ac(a + c) - 3bd(b + d)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3ac(b + d) - 3bd(b + d)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(ac - bd)(b + d) \vdots 3$

Vậy nếu $a + b + c + d = 0$ thì $A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ là hợp số.

**Bài 19: (ĐỀ THI VÔ ĐỊCH TOÁN ANH)**

Chứng minh rằng $A = 19.8^n + 17$ là hợp số với $n \in \mathbb{N}$.

***<u>Lời giải:</u>***

Xét các trường hợp $n = 2k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 3$.

Nếu $n = 2k \Rightarrow A = 19.8^{2k} + 17 = 18.8^{2k} + 8^{2k} + (18 - 1)$

Mà $8^{2k} = 64^k = (63 + 1)^k$, $63 = 3.21$ nên $8^{2k}$ : 3 dư $1 \Rightarrow A \vdots 3$.

Nếu $n = 4k+1$

$\Rightarrow A = 19.8^{4k+1} + 17 = 13.8^{4k+1} + 6.8.64^{2k} + 17$

$= 13.8^{4k+1} + 39.64^{2k} + 9.(1-65)^{2k} + (13+4)$

Chú ý rằng $65 = 135.(1-65)^{2k}$ : 3 dư 1 nên $A \vdots 3$.

Nếu $n = 4k+3 \Rightarrow A = 19.8^{4k+3} + 17 = 15.8^{4k+3} + 4.8^3.64^{2k} + 17$

$= 15.8^{4k+3} + 4.510.64^{2k} + 4.2.(1-65)^{2k} + (25-8)$

$\Rightarrow A \vdots 8$

Vậy $A = 19.8^n + 17$ là hợp số với $n \in \mathbb{N}$.

**Bài 20: (ĐỀ THI HSG TOÁN 9)**

Tìm số $p$ nguyên tố để $A = 2^p + p^2$ là hợp số .

***<u>Lời giải:</u>***

Với $p = 2 \Rightarrow A = 2^2 + 2^2 = 8$ là hợp số.

Với $p = 3 \Rightarrow A = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Với $p > 3$, $p$ nguyên tố nên $p$ lẻ.

Ta có $A = 2^p + p^2 = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$

Xét 3 số tự nhiên liên tiếp $p-1$; $p$; $p+1$ trong đó có một số chia hết cho 3, mà $p \not\vdots 3$ nên $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho $3 \Rightarrow p^2 - 1 \vdots 3$

Lại có $2^p + 1 \vdots (2+1) = 3$ và $2^p + p^2 > 3$ nên $A = 2^p + p^2$ là hợp số .

Vậy với $p = 2$ hoặc $p > 3$ thì $A = 2^p + p^2$ là hợp số .

**Bài 21: (ĐỀ THI HSG TOÁN 9)**

Chứng minh rằng $A = 2^{1975} + 5^{2010}$ là hợp số .

***<u>Lời giải:</u>***

Ta có:

+) $2^{1975} = 2^{2.987+1} = 2^{2.987}.2 = 4^{987}.2 = (3+1)^{987}.2 = (3k+1).2 = 6k+2,\ k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 2^{1975}$ : 3 dư 2 (1).

+) $5^{2010} = 5^{2.1005} = 25^{1005} = (24+1)^{1005} = (3.8+1)^{1005} = 3m+1,\ m \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 5^{2010} : 3$ dư 1 (2).

Từ (1) và (2) ta có $A = 2^{1975} + 5^{2010} \vdots 3$ và $A > 3$ nên $A$ là hợp số.

**ꕤ HẾT ꕤ**