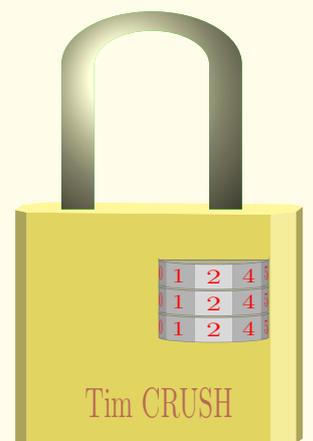
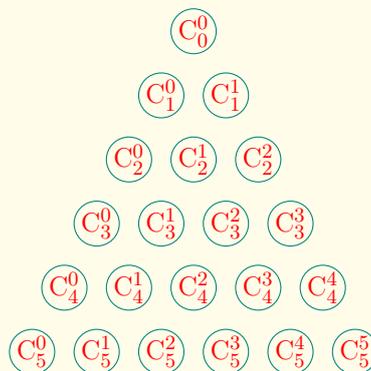


CHUYÊN ĐỀ TOÁN 11 - HK1

CHUYÊN ĐỀ TOÁN 11 - HK1

Chương 2. Dãy số - Cấp số cộng - Cấp số nhân



MỤC LỤC

Chương II. Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân

3

- 🍏 Chuyên đề 1. **Dãy số** 3
- 🍏 Chuyên đề 2. **Cấp số cộng** 18
- 🍏 Chuyên đề 3. **Cấp số nhân** 32
- 🍏 Chuyên đề 4. **Ôn tập chương 2** 45

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

Mục lục của chương

Chuyên đề 1. Dãy số	3
Chuyên đề 2. Cấp số cộng	18
Chuyên đề 3. Cấp số nhân	32
Chuyên đề 4. Ôn tập chương 2	45

1 DÃY SỐ

I. DÃY SỐ LÀ GÌ?

1) Khái niệm dãy số



Hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương \mathbb{N}^* được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số), nghĩa là

$$u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u_n = u(n).$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n) .

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1; u_2; \dots; u_n; \dots$



🔔 LƯU Ý.

- $u_1 = u(1)$ gọi là số hạng đầu, $u_n = u(n)$ gọi là số hạng thứ n (hay số hạng tổng quát) của dãy số.
- Nếu $u_n = C$ với mọi n , ta nói (u_n) là dãy số không đổi.

2) Dãy số hữu hạn



Hàm số u xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của dãy số này là u_1, u_2, \dots, u_m , trong đó u_1 là số hạng đầu và u_m là số hạng cuối.

👉 Ví dụ 1



Cho dãy số

$$v : \{1; 2; 3; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto v(n) = 2n.$$

Hãy tính $v(1), v(2), v(3), v(4), v(5)$.

👉 *Hướng dẫn giải.* Ta có $v(1) = 2.1 = 2; v(2) = 2.2 = 4; v(3) = 2.3 = 6;$
 $v(4) = 2.4 = 8; v(5) = 2.5 = 10.$

Ví dụ 2

Cho dãy số

$$u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u_n = n^3.$$

- Hãy cho biết dãy số trên là hữu hạn hay vô hạn.
- Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Hướng dẫn giải.

- Dãy số trên là dãy số vô hạn.
- Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là: $u_1 = 1^3 = 1, u_2 = 2^3 = 8,$
 $u_3 = 3^3 = 27, u_4 = 4^3 = 64, u_5 = 5^3 = 125.$

Ví dụ 3

Cho 5 hình tròn theo thứ tự có bán kính 1; 2; 3; 4; 5.

- Viết dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn này.
- Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số trên.

Hướng dẫn giải.

- Dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn này là:

$$v : \{1; 2; 3; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto v(n) = \pi n^2.$$

- Số hạng đầu của dãy số là: $v(1) = \pi \cdot 1^2 = \pi.$

Số hạng cuối của dãy số là: $v(5) = \pi \cdot 5^2 = 25\pi.$

1 Cho (p_n) là dãy số, trong đó p_n là số nguyên tố thứ n . Xác định p_2, p_5 và p_9 .

2

- Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.
- Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu a. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

II. CÁCH XÁC ĐỊNH DÃY SỐ



Thông thường một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

- ◇ **Cách 1:** Liệt kê các số hạng (với các dãy số hữu hạn).
- ◇ **Cách 2:** Cho công thức của số hạng tổng quát u_n .
- ◇ **Cách 3:** Cho hệ thức truy hồi, nghĩa là
 - ☆ Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);
 - ☆ Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).
- ◇ **Cách 4:** Cho bằng cách mô tả.

👉 Ví dụ 4



Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3n^2 - 1$.

- a) Hãy viết bảy số hạng đầu của dãy số.
- b) Số 2699 có là một số hạng của dãy số (u_n) hay không?

👉 Hướng dẫn giải.

- a) Bảy số hạng đầu của dãy số là $u_1 = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$, $u_2 = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$, $u_3 = 26$, $u_4 = 47$, $u_5 = 74$, $u_6 = 107$ và $u_7 = 146$.
- b) Nếu 2699 là số hạng thứ n của dãy số thì số nguyên dương n thoả mãn $2699 = 3n^2 - 1$.

Giải phương trình này, ta được $n = 30$. Vậy 2699 là số hạng thứ 30 của dãy số.

👉 Ví dụ 5



Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

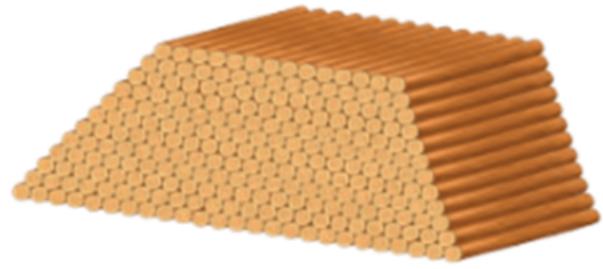
- a) Tính u_2, u_3, u_4 .
- b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

👉 Hướng dẫn giải.

- a) Ta có $u_2 = 2u_1 = 2 \cdot 3 = 6$; $u_3 = 2u_2 = 2 \cdot 6 = 12$; $u_4 = 2 \cdot 12 = 24$.
- b) Ta có $u_2 = 2^1 \cdot 3 = 6$; $u_3 = 2^2 \cdot 3 = 12$; $u_4 = 2^3 \cdot 3 = 24$.
Dự đoán $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Ví dụ 6

Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình vẽ). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:



- Viết công thức số hạng tổng quát u_n .
- Viết hệ thức truy hồi.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có: $u_1 = 14$ khi đó:

$$u_2 = 14 + 1 = 15; u_3 = 15 + 1 = 14 + 2.1; u_4 = 14 + 3.1$$

Khi đó công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = 14 + (n - 1).1 = 14n - 14$.

b) Hệ thức truy hồi
$$\begin{cases} u_1 = 14 \\ u_{n-1} = u_n + 1 \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

Ví dụ 7

Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

- Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3 . Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n .
- Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Hướng dẫn giải.

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_1 = A_0(1 + 3\%) - 120\,000 = 1,03A_0 - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_2 = A_1(1 + 3\%) - 120\,000 = 1,03A_1 - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_3 = A_2(1 + 3\%) - 120\,000 = 1,03A_2 - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

Tương tự, vào cuối năm thứ n ($n \geq 1$), số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_n = 1,03A_{n-1} - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4 với $A_0 = 10\,000\,000$:

$$A_1 = 10\,180\,000; A_2 = 10\,365\,400;$$

$$A_3 = 10\,556\,362; A_4 = 10\,753\,053.$$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10 753 053 đồng.

3

a) Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$. Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số.

b) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}.$$

4

Cho dãy số (u_n) có năm số hạng đầu tiên lần lượt là $-1; 1; -1; 1; -1$. Hãy dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

5

Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng, sau 3 tháng.

b) Dự đoán công thức của P_n .

III. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM



Cho dãy số (u_n) .

◇ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

◇ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 8

Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau:

a) (u_n) với $u_n = 3n - 2$.

c) (x_n) với $x_n = \frac{n+2}{4^n}$.

b) (v_n) với $v_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

d) (t_n) với $t_n = (-1)^n \cdot n^2$.

Hướng dẫn giải.

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 1$.

Xét: $u_{n+1} - u_n = (3n + 1) - (3n - 2) = 3 > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là một dãy số tăng.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $v_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$. Xét hiệu:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 + 3n - 2}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $v_{n+1} > v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (v_n) là dãy số tăng.

c) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $x_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{4^{n+1}} = \frac{n+3}{4 \cdot 4^n}$. Xét hiệu:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{n+3}{4 \cdot 4^n} - \frac{n+2}{4^n} = \frac{n+3 - 4(n+2)}{4 \cdot 4^n} \\ &= \frac{n+3 - 4n - 8}{4 \cdot 4^n} = \frac{-3n - 5}{4 \cdot 4^n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Suy ra $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (x_n) là dãy số giảm.

d) Ta có $t_1 = (-1)^1 \cdot 1^2 = -1; t_2 = (-1)^2 \cdot 2^2 = 4; t_3 = (-1)^3 \cdot 3^2 = -9$.

Suy ra $t_1 < t_2; t_2 > t_3$. Vậy (t_n) là dãy số không tăng, không giảm.

⑥ Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n) biết:

a) $u_n = \frac{n-3}{n+2}$.

b) $u_n = \frac{3^n}{2^n \cdot n!}$.

c) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

IV. DÃY SỐ BỊ CHẶN



◇ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

◇ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

◇ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 9

Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \cos \frac{\pi}{n}$.

c) (c_n) với $c_n = \frac{1}{n^2 + n}$.

b) (b_n) với $b_n = \frac{n}{n+1}$.

d) (d_n) với $d_n = 2n - 1$.

Hướng dẫn giải.

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $-1 \leq \cos \frac{\pi}{n} \leq 1$. Do đó (a_n) là dãy số bị chặn.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b_n < 1 \quad (1)$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $b_n = \frac{n}{n+1} > 0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra (b_n) là dãy số bị chặn.

c) Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $c_n = \frac{1}{n^2 + n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra (c_n) bị chặn dưới.

Mặt khác, do $n^2 + n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $c_n \leq \frac{1}{2}$. Suy ra (c_n) bị chặn trên.

Do đó (c_n) bị chặn.

d) Ta có: $d_n = 2n - 1 \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, dãy số (d_n) bị chặn dưới.

Dãy số (d_n) không bị chặn trên vì không có số M nào thỏa mãn:

$$d_n = 2n - 1 \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (d_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên nên không bị chặn.

7 Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 4}$ là bị chặn.

8 Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1-n}{n+1}$.

9 Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25 \quad \text{với } n \geq 2.$$

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

❖ **Câu 10.** Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1} .

(A) $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$.

(B) $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^n - 1$.

(C) $u_{2n-1} = 3^{2n-1}$.

(D) $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

❖ **Câu 11.** Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 5^n$. Tìm số hạng u_{n-1} .

(A) $u_{n-1} = 5^{n-1}$.

(B) $u_{n-1} = 5^n$.

(C) $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$.

(D) $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

❖ **Câu 12.** Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

(A) $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.

(B) $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

(C) $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

(D) $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

❖ **Câu 13.** Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

(A) $u_n = \frac{n+1}{n}$.

(B) $u_n = \frac{n}{n+1}$.

(C) $u_n = \frac{n-1}{n}$.

(D) $u_n = \frac{n^2-n}{n+1}$.

❖ **Câu 14.** Dãy số có các số hạng đầu là: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

(A) $u_n = 1$.

(B) $u_n = -1$.

(C) $u_n = (-1)^n$.

(D) $u_n = (-1)^{n+1}$.

❖ **Câu 15.** Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số

hạng nào dưới đây?

(A) $u_n = n^{n-1}$.

(B) $u_n = 2^n$.

(C) $u_n = 2^{n+1}$.

(D) $u_n = 2$.

❖ **Câu 16.** Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là

số hạng nào dưới đây?

(A) $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$.

(B) $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.

(C) $u_n = \frac{1}{2} - 2n$.

(D) $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

❖ **Câu 17.** Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- (A) $u_n = 2 + (n - 1)^2$. (B) $u_n = 2 + n^2$.
 (C) $u_n = 2 + (n + 1)^2$. (D) $u_n = 2 - (n - 1)^2$.

❖ **Câu 18.** Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- (A) $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (B) $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.
 (C) $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. (D) $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

❖ **Câu 19.** Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- (A) $u_n = \frac{-n+1}{n}$. (B) $u_n = \frac{n+1}{n}$.
 (C) $u_n = \frac{-n+1}{n}$. (D) $u_n = \frac{-n}{n+1}$.

❖ **Câu 20.** Cho dãy số (a_n) được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$. (B) $a_{10} = \frac{3}{512}$.
 (C) $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$. (D) $a_n = \frac{3}{2^{n-1}}$.

❖ **Câu 21.** Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

- (A) 1; 1; 1; 1; 1; 1; ... (B) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$
 (C) 1; 3; 5; 7; 9; ... (D) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; 1; \frac{1}{16}; \dots$

❖ **Câu 22.** Dãy số nào là dãy số tăng?

- (A) $u_n = \frac{1}{2^n}$. (B) $u_n = \frac{1}{n}$.
 (C) $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$. (D) $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

❖ **Câu 23.** Dãy số nào là dãy số tăng?

- (A) $u_n = \frac{2}{3^n}$. (B) $u_n = \frac{3}{n}$. (C) $u_n = 2^n$. (D) $u_n = (-2)^n$.

❖ **Câu 24.** Dãy số nào là dãy số giảm?

(A) $u_n = \frac{1}{2^n}$.

(B) $u_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$.

(C) $u_n = n^2$.

(D) $u_n = \sqrt{n + 2}$.

❖ **Câu 25.** Dãy số nào là dãy số giảm?

(A) $u_n = \sin x$.

(B) $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.

(C) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n - 1}$.

(D) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

❖ **Câu 26.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.

(B) Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy giảm.

(C) Dãy số $u_n = \frac{n - 1}{n + 1}$ là dãy giảm.

(D) Dãy số $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$ là dãy tăng.

❖ **Câu 27.** Trong các dãy số (u_n) xác định như sau, dãy số giảm là?

(A) $u_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$.

(B) $u_n = n^3$.

(C) $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$.

(D) $u_n = \sqrt{n}$.

❖ **Câu 28.** Trong các dãy số sau, dãy số nào bị chặn?

(A) $u_n = \frac{2n + 1}{n + 1}$.

(B) $u_n = 2n + \sin n$.

(C) $u_n = n^2$.

(D) $u_n = n^3 - 1$.

❖ **Câu 29.** Trong các dãy số sau, dãy số nào bị chặn?

(A) $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$.

(B) $u_n = 2^n + 1$.

(C) $u_n = n + \frac{1}{n}$.

(D) $u_n = \frac{n}{n + 1}$.

❖ **Câu 30.** Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \cos n$. Dãy số (u_n) là:

(A) Dãy số tăng.

(B) Dãy số giảm.

(C) Dãy số bị chặn.

(D) Dãy số bị chặn dưới, không bị chặn trên.

 **2** Tự luận

❖ **Bài 1.** Viết bốn số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$
.

Bài 20. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn Ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn ecoli sẽ nhân đôi 1 lần.

- Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.
- Dự đoán công thức tính số lượng vi khuẩn sau n giờ.

Bài 21. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

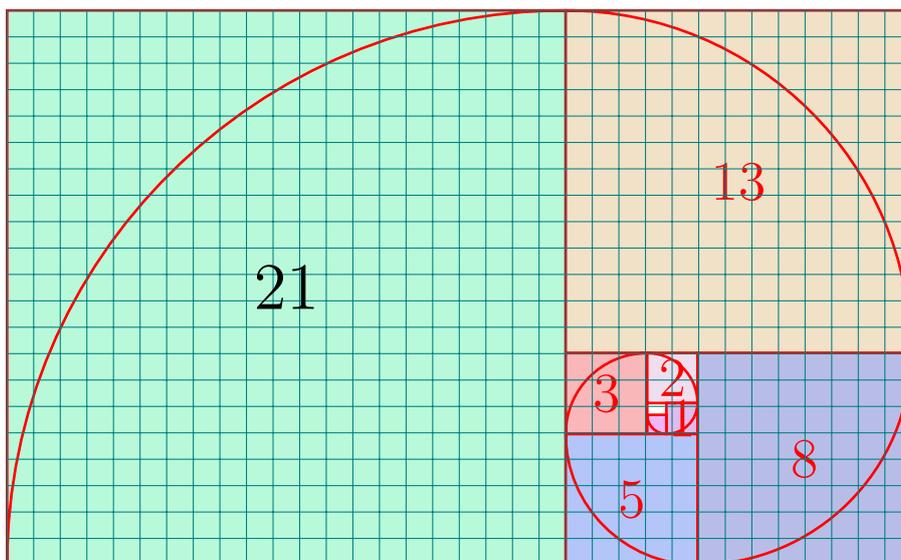
$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n .$$

- Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.
- Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Bài 22. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng. Gọi A_n , ($n \in \mathbb{N}$) là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

- Tìm $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.
- Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

Bài 23. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình vẽ . Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Bài 24. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Bài 25. Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n \quad (\text{tỉ đồng}).$$

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

Bài 26. Bác An gửi tiết kiệm có kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% mỗi năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200 \left(1 + \frac{0,03}{4} \right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Viết ba số hạng đầu của dãy số.
- Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Bài 27. Vi khuẩn *E. Coli* sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn *E. Coli* phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn *E. Coli* trong cơ thể?

Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn *E. Coli* duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn *E. Coli* trong cơ thể?

Bài 28. Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

- Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.
- Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

2 CẤP SỐ CỘNG

I. CẤP SỐ CỘNG



Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hoặc hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \quad \text{với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

◆ **Nhận xét:** Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad (k \geq 2).$$



🔔 **LƯU Ý.** • Để chứng minh (u_n) là cấp số cộng, hãy chứng minh hiệu hai số hạng liên tiếp $u_n - u_{n-1}$ không đổi.

• Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có: $d = u_n - u_{n-1}$.

☞ Ví dụ 1



Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định công sai của mỗi cấp số cộng đó.

- 3; 7; 11; 15; 19; 23.
- Dãy số (u_n) với $u_n = 9n - 9$.
- Dãy số (v_n) với $v_n = an + b$, trong đó a và b là các hằng số.

👉 Hướng dẫn giải.

- Dãy số 3; 7; 11; 15; 19; 23 là cấp số cộng với công sai $d = 4$.
- Ta có: $u_1 = 9 \cdot 1 - 9 = 0$, $u_{n+1} = 9(n+1) - 9 = u_n + 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy dãy số (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 0$ và công sai $d = 9$.
- Ta có: $v_1 = a \cdot 1 + b = a + b$, $v_{n+1} = a(n+1) + b = an + b + a = v_n + a, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy dãy số (v_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = a + b$ và công sai là $d = a$.

☞ Ví dụ 2



Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo ba góc đó.

Hướng dẫn giải. Giả sử tam giác vuông thỏa mãn điều kiện bài toán là tam giác ABC vuông tại A .

Đặt $\widehat{B} = \alpha, \widehat{C} = \beta, \widehat{A} = 90^\circ$ ($\alpha < \beta < 90^\circ$).

Vì $\alpha, \beta, 90^\circ$ lập thành cấp số cộng nên $\beta = \frac{\alpha + 90^\circ}{2}$ (*). Mặt khác, ta có

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \quad (**)$$

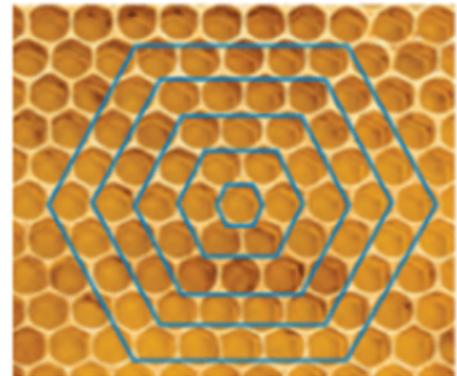
Thay (*) vào (**) ta được

$$\alpha + \frac{\alpha + 90^\circ}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ.$$

Vậy số đo ba góc của tam giác vuông đó lần lượt là $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$.

Ví dụ 3

Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ ba, các ong thợ sẽ tạo ra 18 ô bao quanh vòng 2, cứ thế tiếp tục (Hình bên). Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có, tìm công sai của cấp số cộng này.



Hướng dẫn giải. Dãy số chỉ số ô trên các vòng là: $u_1 = 6; u_2 = 12; u_3 = 18$.

Ta thấy $u_{n+1} = u_n + 6$.

Vậy ô trên các vòng theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 6$.



① Chứng tỏ rằng dãy số (u_n) với $u_n = 4 - n$ là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của nó.



② Tìm x sao cho $x + 3, 2x + 1$ và $5x + 2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ CỘNG



Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d, \quad n \geq 2.$$

Ví dụ 4



Tìm số hạng tổng quát của các cấp số cộng sau:

- a) Cấp số cộng (a_n) có $a_1 = 5$ và $d = -5$;
- b) Cấp số cộng (b_n) có $b_1 = 2$ và $b_{10} = 20$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $a_n = a_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1).(-5) = -5n + 10$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = -5n + 10$.

b) Số hạng tổng quát là: $b_n = b_1 + (n - 1)d$.

Ta có $b_{10} = b_1 + 9d \Leftrightarrow 20 = 2 + 9.d \Leftrightarrow d = 2$.

Số hạng tổng quát $b_n = 2 + (n - 1).2 = 2n$.

Ví dụ 5



Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (c_n) có $c_4 = 80$ và $c_6 = 40$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $c_4 = c_1 + 3d = 80$ và $c_6 = c_1 + 5d = 40$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c_1 + 3d = 80 \\ c_1 + 5d = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 140 \\ d = -20 \end{cases} .$$

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số cộng trên là:

$$c_n = 140 + (n - 1).(-20) = -20n + 160.$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng (c_n) là: $c_n = -20n + 160$.

Ví dụ 6



Theo số liệu của Tổng cục Thống kê, dân số của Việt Nam vào năm 2018 là 96 triệu người. Nếu thực hiện tốt kế hoạch hoá gia đình thì bình quân mỗi năm, dân số nước ta tăng 1 triệu người. Giả sử chương trình kế hoạch hoá gia đình được duy trì tốt và ổn định trong nhiều năm, hãy tính dân số của nước ta vào năm 2030.

Hướng dẫn giải. Theo giả thiết, ta có mức tăng dân số hằng năm ổn định 1 triệu người. Do vậy, tính từ năm 2018 thì dân số hằng năm lập thành cấp số cộng với công sai $d = 1$ triệu (người).

Dân số năm 2018 là $u_1 = 96$ triệu, dân số năm 2030 là số hạng thứ 13 của cấp số cộng nên:

$$u_{13} = u_1 + 12d = 96 \text{ triệu} + 12 \text{ triệu} = 108 \text{ triệu (người)}.$$



③ Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.



④

Một thửa ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao 950 m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,5 m. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 cao bao nhiêu mét so với mực nước biển?



⑤ Kiến vàng là loài kiến có lợi trong nông học, sinh học. Nó giúp nhà nông ngăn ngừa côn trùng, giảm sử dụng các loại thuốc trừ sâu. Ở đồng bằng sông Cửu Long, nhà nông thường tách đàn kiến sang cây trồng khác để bảo vệ cây. Giả sử một đàn kiến vàng có 4 000 con vào đầu tháng 6 năm 2018, mỗi tháng đàn kiến tăng thêm 900 con. Một nhà nông muốn tách đàn khi đàn kiến đạt khoảng 20 000 con. Đến thời điểm nào người đó có thể tách đàn?

III. TỔNG CỦA n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ CỘNG



Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

☛ Ví dụ 7



- Tính tổng 50 số tự nhiên chẵn đầu tiên.
- Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Tính tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.
- Cho cấp số cộng (v_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

☛ Hướng dẫn giải.

- 50 số tự nhiên chẵn lập thành một cấp số cộng, có $u_1 = 0$, công sai $d = 2$.

Khi đó tổng của 50 số này là: $S_{50} = \frac{50(0 + 50)}{2} = 1250$.

b) Ta có: $u_3 + u_{28} = u_1 + 2d + u_1 + 27d = 2u_1 + 29d = 100$.

Tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là:

$$S_{30} = \frac{30(u_1 + u_{30})}{2} = \frac{30(u_1 + u_1 + 29d)}{2} = \frac{30(2u_1 + 29d)}{2} = \frac{30 \cdot 100}{2} = 1500.$$

c) Ta có: $S_6 = \frac{6(u_1 + u_6)}{2} = \frac{6(u_1 + u_1 + 5d)}{2} = \frac{6(2u_1 + 5d)}{2} = 18 \Leftrightarrow 2u_1 + 5d = 6$.

Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là:

$$S_{10} = \frac{10(u_1 + u_{10})}{2} = \frac{10(u_1 + u_1 + 9d)}{2} = \frac{10(2u_1 + 9d)}{2} = 110 \Leftrightarrow 2u_1 + 9d = 22.$$

Khi đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2u_1 + 5d = 6 \\ 2u_1 + 9d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4 \end{cases}.$$

Tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là:

$$S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(u_1 + u_1 + 19d)}{2} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = \frac{20(2 \cdot (-7) + 19 \cdot 4)}{2} = 620.$$

Ví dụ 8



Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế,... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng (Hình vẽ).



- Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.
- Tính tổng các số ghế có trong rạp.

Hướng dẫn giải.

a) Số ghế của mỗi hàng lập thành một cấp số cộng, có số hạng đầu là $u_1 = 17$, công sai $d = 3$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n - 1)d = 17 + (n - 1) \cdot 3$.

Số ghế có ở hàng cuối cùng (hàng số 20) là: $u_{20} = 17 + (20 - 1) \cdot 3 = 74$.

b) Tổng số ghế có trong rạp là tổng của 20 số hạng đầu trong cấp số cộng và bằng:

$$S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(17 + 74)}{2} = 910.$$

Vậy tổng số ghế trong rạp là 910 ghế.



6 Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_5 + 3u_3 - u_2 = -21$ và $3u_7 - 2u_4 = -34$. Tính $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$.

❖ **Câu 14.** Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng. Ba số hạng đó lần lượt là

- (A) 7; 12; 17. (B) 6; 10; 14. (C) 8; 13; 18. (D) 6; 12; 18.

❖ **Câu 15.** Cho (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu bằng 2, công sai bằng 5. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng?

- (A) -410. (B) -205. (C) 245. (D) -230.

❖ **Câu 16.** Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 + u_7 = 19$. Giá trị $u_2 + u_{10}$ bằng

- (A) 38. (B) 29. (C) 12. (D) 19.

❖ **Câu 17.** Cho (u_n) là cấp số cộng có $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu u_1 và công sai của cấp số cộng đó là

- (A) $u_1 = 3, d = 2$. (B) $u_1 = 5, d = 2$.
(C) $u_1 = 8, d = -2$. (D) $u_1 = -5, d = 2$.

❖ **Câu 18.** Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Tìm n .

- (A) 9. (B) 11. (C) 12. (D) 10.

❖ **Câu 19.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng 40 số hạng đầu là 3320. Công sai cấp số cộng đó bằng

- (A) -4. (B) 8. (C) -8. (D) 4.

❖ **Câu 20.** Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_3 + u_{13} = 80$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng

- (A) 800. (B) 600. (C) 570. (D) 630.

❖ **Câu 21.** Cho cấp số cộng 1; 4; 7; ... Số hạng thứ 100 của cấp số cộng là

- (A) 297. (B) 301. (C) 295. (D) 298.

❖ **Câu 22.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và công sai $d = -3$. Biết rằng -289 là một số hạng của cấp số cộng trên. Hỏi đó là số hạng bao nhiêu?

- (A) 98. (B) 99. (C) 100. (D) 101.

❖ **Câu 23.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 3 - 2n$. Tính S_{60} .

- (A) -6960. (B) -117. (C) -3840. (D) -116.

❖ **Câu 24.** Lan đang tiết kiệm để mua laptop. Trong tuần đầu tiên, cô ta để dành 200 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, cô ta đã thêm 16 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Chiếc laptop Lan cần mua có giá 1000 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì cô ấy có đủ tiền để mua chiếc laptop đó?

- (A) 49. (B) 50. (C) 51. (D) 52.

❖ **Câu 25.** Người ta trồng 820 cây theo một hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

- (A) 42. (B) 40. (C) 41. (D) 39.

❖ **Câu 26.** Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

- (A) 2250. (B) 1740. (C) 4380. (D) 2190.

❖ **Câu 27.** Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

- (A) $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$. (B) $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{3}$. (C) $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$. (D) $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

2 Tự luận

❖ **Bài 1.** Xác định công sai, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số cộng sau:

- a) 4, 9, 14, 19, ...; b) 1, -1 - 3, -5, ...

❖ **Bài 2.** Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xét xem nó có phải là cấp số cộng không. Nếu dãy số đó là cấp số cộng, hãy tìm công sai d và viết số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

- a) $u_n = 3 + 5n$; c) $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + n$;
b) $u_n = 6n - 4$; d) $u_1 = 2, u_{n-1} + 3$.

❖ **Bài 3.** Cho (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -10$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n .

❖ **Bài 4.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$.

- a) Tìm u_{12} .
b) Số 195 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

Bài 5. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 3 - 4n$; b) $u_n = \frac{n}{2} - 4$; c) $u_n = 5^n$; d) $u_n = \frac{9 - 5n}{3}$.

Bài 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$.

- Viết công thức của số hạng tổng quát u_n .
- Số 492 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?
- Số 300 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

Bài 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -1$.

- Tìm công sai d và viết công thức của số hạng tổng quát u_n .
- Số -67 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?
- Số 7 có phải là một số hạng của cấp số cộng trên không?

Bài 8. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 7n - 3$.

- Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) .
- Tìm u_{2012} .
- Tính tổng của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) .
- Số 1208 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n) ?

Bài 9. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_1 = 5$ và $d = 3$.

- Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) .
- Tìm u_{99} .
- Số 1502 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n) ?
- Cho biết $S_n = 34275$. Tìm n .

Bài 10. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

a) $\begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8 \cdot u_3 = 24 \end{cases}$

Bài 11. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

a) $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_7 = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} S_{10} = 165 \\ S_{20} = 630 \end{cases}$

Bài 12. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} u_1 + u_6 = 18 \\ u_3 + u_7 = 22 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} u_9 - u_4 = 15 \\ u_3 \cdot u_8 = 184 \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases} \end{array}$$

Bài 13. Cho ba số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài 14. Tìm x để ba số $10 - 3x, 2x^2 + 3, 7 - 4x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Bài 15. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_2 + u_4 = 22, u_1 \cdot u_5 = 21$ và công sai $d > 0$.

a) Tính u_{100}, S_{100} . b) Tính tổng $u_1 + u_5 + u_9 + \dots + u_{101}$.

Bài 16. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_1 + u_5 + u_9 + u_{13} + u_{17} + u_{21} = 234$.

a) Tính $u_2 + u_8 + u_{14} + u_{20}$. b) Tìm u_1, d biết $u_{10} = 37$.

Bài 17. Một cấp số cộng có số hạng thứ 5 bằng 18 và số hạng thứ 12 bằng 32. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số cộng này.

Bài 18. Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 5 và công sai bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để có tổng bằng 2700?

Bài 19. Phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu là 78 và công sai là -4 để được tổng là 702?

Bài 20. Giải phương trình $1 + 8 + 15 + 22 + \dots + x = 7944$.

Bài 21. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 10 000. Tính tổng $S = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{99} u_{100}}$.

Bài 22. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

Bài 23. Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = -2, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu, công sai của cấp số cộng đó.

b) Tìm công thức của v_n, u_n tính theo n .

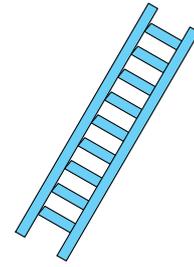
c) Tính tổng $S = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{20}}$.

Bài 24. Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Bài 25. Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Bài 26. Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Bài 27. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, ..., 31 cm.



- Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
- Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Bài 28. Khi một vận động viên nhảy dù nhảy xa khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

- Tính công sai của cấp số cộng trên.
- Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.



Bài 29. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức $x_n = 75 + 5 \cdot (n - 1)$. (Nguồn: <https://bibabo.vn>).

- Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?
- Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Bài 30. Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene $aabb$ có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene $AABB$ có chiều cao bao nhiêu?

Bài 31. Khi kí kết hợp đồng với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau

- ☞ *Phương án 1:* Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.
- ☞ *Phương án 2:* Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp, em sẽ chọn phương án nào khi

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
- b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Bài 32. Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau:

- Năm thứ nhất: 240 triệu;
- Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Bài 33. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

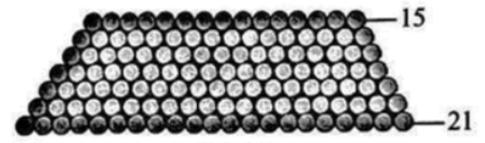
Bài 34. Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

Bài 35. Trên Mặt Trăng, khi một vật được thả rơi tự do, ở giây đầu tiên nó đi được một đoạn dài 80,772 cm. Mỗi giây sau nó đi được một đoạn nhiều hơn đoạn đường đi trong giây ngay trước đó 161,554 cm. Tìm độ dài của đoạn đường đã đi được trong 10 giây của một vật rơi tự do trên Mặt Trăng.

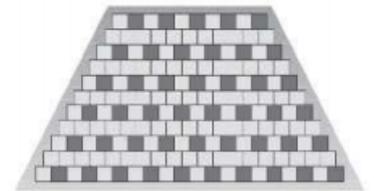
Bài 36. Nhà hát bậc dốc hình tròn đã được xây dựng từ thời La Mã. Các dãy chỗ ngồi được xếp theo hình cung tròn mà số chỗ ngồi tăng dần từ trong ra ngoài. Một nhà hát như thế có số chỗ ngồi ở các dãy tính từ trong ra ngoài lập thành cấp số cộng 12,16,20,... Số chỗ ngồi của dãy cuối cùng là 72. Tính tổng số chỗ ngồi trong nhà hát.



Bài 37. Các khúc gỗ được xếp như Hình bên. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc,..., lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.



Bài 38. Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng 2,4 m ở đáy và rộng 1,2 m ở đỉnh (hình vẽ bên). Các viên gạch hình vuông có kích thước 10 cm × 10 cm phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?



Bài 39. Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2 040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chỗ ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

Bài 40. Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

- a) Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?
- b) Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

Bài 41. Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35 000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1 400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319 200 đô la?

3 CẤP SỐ NHÂN

I. CẤP SỐ NHÂN



Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.



LƯU Ý. • Dãy số (u_n) là cấp số nhân thì $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ với $n \geq 2$.

• Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q và $u_n \neq 0$ với mọi $n \geq 1$ thì với số tự nhiên $n \geq 2$ ta có $\frac{u_n}{u_{n-1}} = q$.

☞ Ví dụ 1



Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$. Chứng minh rằng dãy số này là một cấp số nhân. Xác định số hạng đầu và công bội của nó.

Hướng dẫn giải. Với mọi $n \geq 2$, ta có:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{1}{3^{n-2}}} = \frac{3^{n-2}}{3^{n-1}} = \frac{1}{3}$$

tức là $u_n = \frac{1}{3} \cdot u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3^0} = 1$ và công bội $q = \frac{1}{3}$.



Để chứng minh dãy số (u_n) gồm các số khác 0 là một cấp số nhân, hãy chứng minh tỉ số $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ không đổi.

☞ Ví dụ 2



Cho ba số tự nhiên m, n, p theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba số $2^m, 2^n, 2^p$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Hướng dẫn giải. Ba số tự nhiên m, n, p theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên ta có

$$2n = m + p \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{m+p} \Rightarrow (2^n)^2 = 2^m \cdot 2^p$$

Vậy ba số $2^m, 2^n, 2^p$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 3 ★ ★ ★ ★ ★

Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Hướng dẫn giải. Giả sử dân số của quốc gia đó từ năm 2011 đến năm 2021 là dãy số (u_n) với $u_1 = P$. Ta có:

$$\begin{aligned} u_1 &= P \\ u_2 &= u_1 + u_1 \cdot \frac{a}{100} = u_1 \left(1 + \frac{a}{100}\right) \\ u_3 &= u_2 + u_2 \cdot \frac{a}{100} = u_2 \left(1 + \frac{a}{100}\right) \\ u_4 &= u_3 + u_3 \cdot \frac{a}{100} = u_3 \left(1 + \frac{a}{100}\right) \\ &\dots\dots\dots \\ u_{11} &= u_{10} + u_{10} \left(1 + \frac{a}{100}\right) \end{aligned}$$

Vậy dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân với công bội $q = 1 + \frac{a}{100}$.

Ví dụ 4 ★ ★ ★ ★ ★

Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân. Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là 415 Hz và 466 Hz (theo: [https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_\(nốt_nhạc\)](https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt_nhạc))). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải. Vì tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si tạo thành một cấp số nhân nên ta có tần số của phím La bằng: $\sqrt{415 \cdot 466} \approx 440$.

1 Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -6, u_2 = -2$.

a) Tìm công bội q .

b) Viết năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

2

Tìm x để $x - 1$, x và $x + 2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

3

Chứng tỏ rằng dãy số (u_n) với $u_n = 3 \cdot 4^n$ là cấp số nhân. Tìm số hạng đầu và công bội của nó.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ NHÂN



Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2.$$

Ví dụ 5



Viết công thức số hạng tổng quát u_n theo số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân sau:

a) 5; 10; 20; 40; 80; ...

b) $1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{10\,000}$.

Hướng dẫn giải.

a) Cấp số nhân 5; 10; 20; 40; 80; ... có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = 2$.

Khi đó công thức số hạng tổng quát:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}, \quad n \geq 2$$

b) Cấp số nhân $1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{10\,000}$ có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

Khi đó công thức số hạng tổng quát:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10^{n-1}}, \quad n \geq 2$$

Ví dụ 6



Cho một cấp số nhân gồm các số hạng dương. Biết số hạng thứ 10 bằng 1 536 và số hạng thứ 12 bằng 6 144. Tìm số hạng thứ 20 của cấp số nhân đó.

Hướng dẫn giải.

Giả sử u_1 là số hạng đầu và q là công bội của cấp số nhân đã cho.

Ta có:

$$\begin{cases} u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 1\,536 & (1) \\ u_{12} = u_1 \cdot q^{11} = 6\,144 & (2) \end{cases}$$

III. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ NHÂN



Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$



LƯU Ý. Khi $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$.

Ví dụ 8



Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) trong các trường hợp sau:

a) $u_1 = 10^5; q = 0,1; n = 5;$

b) $u_1 = 10; u_2 = -20; n = 5.$

Hướng dẫn giải.

a) (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10^5$ và công bội $q = 0,1$.

Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) là: $S_5 = \frac{10^5[1 - (0,1)^5]}{1 - 0,1} = 111110.$

b) Ta có $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-20}{10} = -2.$

Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) là: $S_5 = \frac{10[1 - (-2)^5]}{1 + 2} = 110.$

Ví dụ 9



Tính tổng: $S = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{20}.$

Hướng dẫn giải.

Nhận thấy S là tổng 20 số hạng đầu của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công bội $q = 10$. Vậy $S = \frac{10(1 - 10^{20})}{1 - 10} = \frac{10^{21} - 10}{9}.$

Ví dụ 10



Người ta thiết kế một tòa tháp có 9 tầng, tầng thứ nhất có diện tích 1 000 m², mỗi tầng tiếp theo có diện tích bằng $\frac{2}{3}$ tầng trước đó. Tính tổng diện tích các tầng của tháp (làm tròn đến hàng đơn vị của m²).

Hướng dẫn giải.

Diện tích các tầng của tháp lập thành cấp số nhân với $u_1 = 1000$ và $q = \frac{2}{3}$. Khi đó, tổng diện tích các tầng của tháp là

$$S_9 = \frac{1000 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^9 \right]}{1 - \frac{2}{3}} \approx 2922 \text{ m}^2.$$

Ví dụ 11



Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm (hình bên). Sau mỗi lần lắc liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.



- a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?
- b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?

(Kết quả tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.)

Hướng dẫn giải. Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Độ lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm, sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0,98$.

- a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 46 \cdot 0,98^9 \approx 38,35$ (cm).
- b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S = u_1 \cdot \frac{1 - q^{15}}{1 - q} = 46 \cdot \frac{1 - 0,98^{15}}{1 - 0,98} \approx 546,85 \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 12



Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

Hướng dẫn giải. Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n . Ta có: $u_1 = 60$;

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,08 = u_{n-1}(1 + 0,08) = u_{n-1} \cdot 1,08$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1,08$.

Áp dụng công thức tính tổng S_n ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm là:

$$S_{10} = \frac{60(1 - 1,08^{10})}{1 - 1,08} \approx 869,194 \text{ (triệu đồng)}.$$

❖ **Câu 4.** Trong các dãy số (u_n) sau, dãy nào là cấp số nhân?

(A) $u_n = n^2 + n + 1$.

(B) $u_n = (n + 2) \cdot 3^n$.

(C)
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{6}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
.

(D) $u_n = (-4)^{2n+1}$.

❖ **Câu 5.** Dãy số $u_n = 3 + 3^n$ là một cấp số nhân với:

(A) Công bội là 3 và số hạng đầu là 1.

(B) Công bội là 4 và số hạng đầu là 2.

(C) Công bội là 2 và số hạng đầu là 1.

(D) Công bội là 2 và số hạng đầu là 2.

❖ **Câu 6.** Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số nhân?

(A) $u_n = 5^n$.

(B) $u_n = 1 + 5n$.

(C) $u_n = 5^n + 1$.

(D) $u_n = 5 + n^2$.

❖ **Câu 7.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

(A) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.

(B) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.

(C) Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.

(D) Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

❖ **Câu 8.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công bội của cấp số nhân bằng

(A) -6 .

(B) 3 .

(C) $\frac{1}{3}$.

(D) 6 .

❖ **Câu 9.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_2 bằng

(A) 8 .

(B) 9 .

(C) $\frac{3}{2}$.

(D) 6 .

❖ **Câu 10.** Tìm tất cả các giá trị của x để ba số $2x - 1, x, 2x + 1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

(A) $x = \pm \frac{1}{3}$.

(B) $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(C) $x = \pm \sqrt{3}$.

(D) $x = \pm 3$.

❖ **Câu 11.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_4 = 9$ và $u_5 = 81$. Công bội cấp số nhân đó bằng

(A) 3 .

(B) 72 .

(C) 18 .

(D) 9 .

❖ **Câu 12.** Tìm công bội q của cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_6 = 16$.

(A) $q = \frac{1}{2}$.

(B) $q = -2$.

(C) $q = 2$.

(D) $q = -\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 13.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = -2$. Giá trị u_5 bằng

- (A) -32 . (B) -16 . (C) -6 . (D) 32 .

❖ **Câu 14.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 2$ và $u_9 = 6$. Tính u_{21} .

- (A) 18 . (B) 54 . (C) 162 . (D) 486 .

❖ **Câu 15.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, q = 2$. Hỏi 1024 là số hạng thứ mấy?

- (A) 11 . (B) 9 . (C) 8 . (D) 10 .

❖ **Câu 16.** Cho dãy số $4; 12; 36; 108; 324; \dots$. Số hạng thứ 10 của dãy số đó là

- (A) 73872 . (B) 77832 . (C) 72873 . (D) 78732 .

❖ **Câu 17.** Viết bốn số hạng xen giữa các số 1 và -243 để được một cấp số nhân có 6 số hạng. Bốn số hạng đó lần lượt là:

- (A) $-3; -9; -27; -81$. (B) $3; -9; 27; -81$.
 (C) $3; 9; 27; 81$. (D) $-3; 9; -27; 81$.

❖ **Câu 18.** Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_2 \cdot u_6 = 64$. Giá trị $u_3 \cdot u_5$ là

- (A) -8 . (B) -64 . (C) 64 . (D) 8 .

❖ **Câu 19.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

- (A) $S_{10} = -511$. (B) $S_{10} = 1023$.
 (C) $S_{10} = 1025$. (D) $S_{10} = -1025$.

❖ **Câu 20.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_8 = 729$. Tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

- (A) $\frac{1 - 3^8}{2}$. (B) $\frac{3^8 - 1}{6}$. (C) $\frac{3^8 - 1}{2}$. (D) $\frac{1 - 3^8}{6}$.

❖ **Câu 21.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 12, u_5 = 48$ có công bội âm. Tổng 7 số hạng đầu tiên cấp số nhân đó bằng

- (A) 129 . (B) -129 . (C) 128 . (D) -128 .

❖ **Câu 22.** Ba số lập thành một cấp số nhân. Nếu số hạng thứ hai cộng thêm 2 ta được một cấp số cộng. Sau đó cộng thêm 9 với số hạng thứ ba ta lại được một cấp số nhân. Tính tổng ba số đó

- (A) $\frac{16}{25}$. (B) $\frac{52}{25}$. (C) $\frac{4}{25}$. (D) $-\frac{64}{25}$.

❧ Bài 4. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$.

- a) Tìm u_9 .
- b) Số -320 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân trên?
- c) Số 160 có phải là một số hạng của cấp số nhân trên không?

❧ Bài 5. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$, $u_3 = \frac{27}{4}$.

- a) Tìm công bội q và viết năm số hạng đầu của cấp số nhân trên.
- b) Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân trên.

❧ Bài 6.

- a) Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân. Tìm số đo của bốn góc đó biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.
- b) Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu?

❧ Bài 7. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} \end{array}$$

❧ Bài 8. Tính các tổng sau:

$$\text{a) } S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}; \quad \text{b) } S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots 9}_{n \text{ chữ số } 9}.$$

❧ Bài 9. Cho một cấp số nhân có tất cả các số hạng đều dương. Số hạng thứ tư của cấp số nhân là 125 và số hạng thứ 10 là $\frac{125}{64}$. Tìm số hạng thứ 14 của cấp số nhân này.

❧ Bài 10. Ba số phân biệt tạo thành một cấp số nhân có tổng bằng 78 ; đồng thời chúng là số hạng thứ nhất, thứ ba và thứ chín của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

❧ Bài 11. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

❧ Bài 12. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1% /năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

- a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020 .
- b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 .

Bài 13. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50 mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kế trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Bài 14. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi tiền đặt lần trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu?

Bài 15. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
- Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Bài 16. Một tảng băng khối lượng 1 tấn đang tan chảy. Cứ mỗi giờ, tảng băng mất đi $\frac{1}{5}$ khối lượng của nó. Tính khối lượng còn lại của tảng băng sau 6 giờ.

Bài 17. Iodine -131 là một đồng vị phóng xạ được sử dụng trong chẩn đoán y tế. Chu kỳ bán rã của nó là tám ngày. Nghĩa là sau tám ngày, khối lượng của nó chỉ còn một nửa. Tính khối lượng còn lại của 160 mg Iodine -131 sau 64 ngày. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị (mg).

Bài 18. Một tỉnh B có dân số 1 500 000 người vào năm 2014. Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi là 1,25%/năm. Tính dân số của tỉnh đó vào năm 2025. Làm tròn kết quả đến hàng chục.

Bài 19. Vào tháng 4/2022, giá thuê một căn hộ là 4 triệu đồng/tháng. Sau mỗi quý thì giá thuê tăng thêm 5%/tháng so với giá của quý trước đó. Tính giá thuê căn hộ đó vào tháng 01/2025.

Bài 20. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

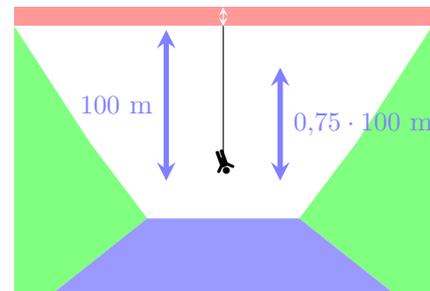
- Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;
- Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Bài 21. Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

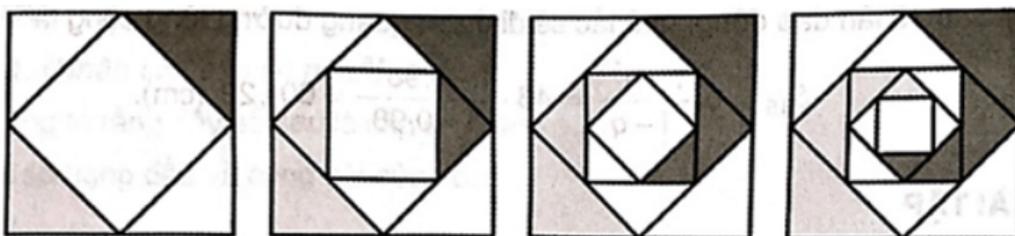
Bài 22. Nếu một kĩ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5%, thì mức lương của người kĩ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

Bài 23. Để tích lũy tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích lũy này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích lũy được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Bài 24. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Bài 25. Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16 cm. Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu. Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.



4 ÔN TẬP CHƯƠNG 2

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

❖ **Câu 1.** Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{1}{n}$. Khẳng định nào đúng?

- (A) Dãy số (u_n) có $u_6 = \frac{1}{6}$.
- (B) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- (C) Dãy số (u_n) là dãy số không tăng không giảm.
- (D) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

❖ **Câu 2.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

- (A) $u_n = \frac{1}{9^n}$.
- (B) $u_n = 9^n$.
- (C) $u_n = \sqrt{9n+1}$.
- (D) $u_n = n^9$.

❖ **Câu 3.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

- (A) $u_n = \frac{1}{2^n}$.
- (B) $u_n = \frac{1}{n}$.
- (C) $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$.
- (D) $u_n = \frac{2n-1}{2n+1}$.

❖ **Câu 4.** Cho cấp số cộng (u_n) , $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng.

- (A) $u_3 = 4$.
- (B) $u_3 = 2$.
- (C) $u_3 = -5$.
- (D) $u_3 = -7$.

❖ **Câu 5.** Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = 5$. Số hạng thứ tư của cấp số cộng đó là

- (A) $u_4 = 23$.
- (B) $u_4 = 18$.
- (C) $u_4 = 8$.
- (D) $u_4 = 14$.

❖ **Câu 6.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

- (A) $S_{16} = 24$.
- (B) $S_{16} = 26$.
- (C) $S_{16} = 25$.
- (D) $S_{16} = 20$.

❖ **Câu 7.** Một cấp số nhân có sáu số hạng, số hạng đầu là 2 và số hạng thứ sáu bằng 486.

Gọi q là công bội của cấp số nhân đó. Giá trị của q là

- (A) $q = 2$.
- (B) $q = 3$.
- (C) $q = 6$.
- (D) $q = 4$.

❖ **Câu 17.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -1$ và công sai $d = 3$. Khi đó S_5 bằng

- (A) 11. (B) 50. (C) 10. (D) 25.

❖ **Câu 18.** Có bao nhiêu số x để $2x - 1; x; 2x + 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 19.** Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

- (A) $1; 1; 1; 1; 1; 1; \dots$ (B) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$
 (C) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$ (D) $1; 3; 5; 7; 9; \dots$

❖ **Câu 20.** Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

- (A) $u_3 = -\frac{8}{3}$. (B) $u_3 = 2$. (C) $u_3 = -2$. (D) $u_3 = \frac{8}{3}$.

❖ **Câu 21.** Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- (A) $u_n = 2^n$. (B) $u_n = 2^{n+1}$. (C) $u_n = 2$. (D) $u_n = n^{n-1}$.

❖ **Câu 22.** Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

- (A) 9. (B) 6. (C) 10. (D) 8.

❖ **Câu 23.** Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5, ... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n . Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

- (A) 100. (B) 102. (C) 98. (D) 104.

❖ **Câu 24.** Nếu các số $5 + m; 7 + 2m; 17 + m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

- (A) $m = 3$. (B) $m = 2$. (C) $m = 4$. (D) $m = 5$.

❖ **Câu 25.** Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- (A) $u_n = 7 - 3^n$. (B) $u_n = 7 - 3n$.
 (C) $u_n = 7 \cdot 3^n$. (D) $u_n = \frac{7}{3n}$.

❖ **Câu 26.** Cho các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x .

- (A) $x = 10$. (B) $x = 12$. (C) $x = 11$. (D) $x = 7$.

❖ **Câu 27.** Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

- (A) 78. (B) 156. (C) 300. (D) 48.

❖ **Câu 28.** Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

- (A) 10.125.000 đồng. (B) 4.000.000 đồng.
(C) 4.245.000 đồng. (D) 5.2500.000 đồng.

❖ **Câu 29.** Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

- (A) $d = 6$. (B) $d = 4$. (C) $d = 5$. (D) $d = 7$.

❖ **Câu 30.** Cho cấp số cộng (u_n) , biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Khẳng định nào đúng?

- (A) $d = -9$. (B) $d = -7$. (C) $d = 9$. (D) $d = 7$.

❖ **Câu 31.** Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ... Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

- (A) 75. (B) 73. (C) 77. (D) 79.

❖ **Câu 32.** Cho các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x .

- (A) $x = 10$. (B) $x = 12$. (C) $x = 11$. (D) $x = 7$.

❖ **Câu 33.** Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}$. (B) $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}$.
(C) $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}$. (D) $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}$.

❖ **Câu 34.** Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

- (A) 1635. (B) 2055. (C) 1792. (D) 3125.

❖ **Câu 35.** Cho dãy số $\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; \dots$ là cấp số cộng với:

- (A) Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $-\frac{1}{2}$.
- (B) Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $\frac{1}{2}$.
- (C) Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $-\frac{1}{2}$.
- (D) Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 36.** Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

- (A) 45° và 45° .
- (B) 20° và 45° .
- (C) 30° và 60° .
- (D) 20° và 70° .

❖ **Câu 37.** Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots + (2n - 1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

- (A) $S = 0$.
- (B) $S = -1$.
- (C) $S = n$.
- (D) $S = -n$.

❖ **Câu 38.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- (A) Số hạng thứ 104.
- (B) Không là số hạng của cấp số đã cho.
- (C) Số hạng thứ 105.
- (D) Số hạng thứ 103.

❖ **Câu 39.** Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + \dots + 7515$.

- (A) $T = 5651625$.
- (B) $T = 5651265$.
- (C) $T = 5651526$.
- (D) $T = 5651256$.

❖ **Câu 40.** Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là

- (A) $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$.
- (B) $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}$.
- (C) $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.
- (D) $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$.

❖ **Câu 41.** Tính tổng 100 số hạng đầu tiên, tính từ 1.

- (A) 10 000.
- (B) 10 100.
- (C) 20 000.
- (D) 20 200.

❖ **Câu 42.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

- (A) $-2; -10; -50; -250$.
- (B) $-2; 10; -50; 250$.
- (C) $-2; 10; 50; -250$.
- (D) $-2; 10; 50; 250$.

❖ **Câu 43.** Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là

- (A) 81. (B) 64. (C) 720. (D) 56.

2 Trắc nghiệm đúng sai

❖ **Câu 1.** Cho dãy số (u_n) , biết
$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$
 với $n \geq 1$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
(A) Năm số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là $-1; 2; 5; 8; 11$.		
(B) Số hạng thứ tám của dãy là 19.		
(C) Công thức số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 2n - 3$.		
(D) 104 là số hạng thứ 36 của dãy số đã cho.		

❖ **Câu 2.** Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 + u_5 = 51; u_2 + u_6 = 102$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
(A) Số hạng đầu $u_1 = 3$.		
(B) Số hạng $u_4 = 48$.		
(C) Số 12 288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân (u_n) .		
(D) Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là 765.		

❖ **Câu 3.** Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$$

Phát biểu	Đ	S
(A) Công sai cấp số cộng bằng -2 .		
(B) Số hạng đầu $u_1 = 21$.		
(C) Số hạng $u_{11} = -9$.		
(D) Số -6048 là số hạng thứ 2024.		

❖ **Câu 4.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -2, d = -5$.

Phát biểu	Đ	S
-----------	---	---

A $u_2 = -7$.		
B Tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) là -24950 .		
C Số -902 là số hạng thứ 180 của dãy số (u_n) .		
D Dãy số (u_n) là một dãy số tăng .		

❖ **Câu 5.** Cho dãy số (a_n) xác định bởi hệ thức truy hồi $a_1 = 2, a_{n+1} = -2a_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Phát biểu	Đ	S
A (a_n) là một cấp số nhân với $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -2 \end{cases}$.		
B Số hạng thứ 8 của dãy bằng 256 .		
C Số -2048 là một số hạng của dãy .		
D $S_{10} = -682$.		

❖ **Câu 6.** Cho dãy số (u_n) với $u_3 = 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Phát biểu	Đ	S
A $u_4 < 100$.		
B $\frac{u_1 + u_9}{2} = u_5$.		
C Dãy số tăng và bị chặn .		
D $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2024} = \frac{u_{2024} - 1}{2}$.		

❖ **Câu 7.** Cho cấp số nhân (u_n) có công bội dương và các số hạng thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_3 = 36 \end{cases}$.

Phát biểu	Đ	S
A $q = 3$.		
B Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = 9 \cdot 2^{n-1}$.		
C Số 576 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân .		
D Tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599 .		

❖ **Câu 8.** Cho cấp số nhân có hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng $\frac{1}{16}$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A Công bội q của cấp số nhân đã cho là số dương .		
B Số hạng đầu của cấp số nhân đã cho là $u_1 = 2$.		
C Số hạng thứ 10 của cấp số nhân là $u_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$.		
D Tổng của 10 số hạng đầu của cấp số nhân bằng $\frac{1023}{256}$.		

❖ **Câu 9.** Cho dãy số (u_n) với $u_2 = 2 + \frac{5}{5^n}$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{5^n}$.		
B Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn .		
C Dãy số (u_n) là dãy số giảm .		
D $\frac{255}{12}$ là số hạng thứ 5 của dãy số .		

❖ **Câu 10.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$ và công sai $d = \frac{1}{2}$.

Phát biểu	Đ	S
A Công thức số hạng tổng quát $u_n = 1 + \frac{n}{3}$.		
B $\frac{15}{4}$ là một số hạng của cấp số cộng đã cho .		
C 5 là số hạng thứ 8 của cấp số cộng đã cho .		
D Tổng 100 số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) bằng 2620 .		

❖ **Câu 11.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A Dạng khai triển của dãy số là 3;5;7;9;11;... .		
B Số hạng đầu $u_1 = 2$.		
C Dãy số đã cho là một cấp số cộng .		
D Tổng của 24 số hạng đầu là $S_{24} = 650$.		

❖ **Câu 12.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$. Biết tổng 20 số hạng đầu tiên bằng 460.

Phát biểu	Đ	S	Phát biểu	Đ	S
A $d = 2$.			C $S_{10} = 120$.		
B $u_4 = 8$.			D $u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 = 60$.		

❖ **Câu 13.** Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế của hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60.000 đồng.

Phát biểu	Đ	S
A Số ghế ở mỗi hàng ghế trong rạp hát tạo thành một cấp số cộng với $u_1 = 20, d = 1$.		
B Hàng thứ 15 có 35 ghế .		
C Tổng số ghế trong rạp hát là 600 (ghế) .		
D Tổng số tiền vé thu được của rạp là 35.400.000 đồng. Biết rằng mỗi người một vé chỉ ngồi được một ghế .		

❖ **Câu 14.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và $u_2 = 9$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A Công sai của cấp số cộng $d = 6$.		
B Số hạng thứ 85 là 341 .		
C Số hạng thứ 10 là 42 .		
D Tổng 85 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_{85} = 14\ 705$.		

❖ **Câu 15.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n + 1}{n + 2}$.

Phát biểu	Đ	S
A $u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}$.		
B Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n) .		
C $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.		
D Dãy (u_n) là dãy số bị chặn .		

❖ **Câu 16.** Cho dãy số (u_n) với
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + 3 \quad (n \geq 2, n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Phát biểu	Đ	S
A $u_2 = 5; u_6 = 16$.		
B $u_{n+1} - u_n = 3 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.		
C Dãy số (u_n) đã cho là một cấp số cộng.		
D Dãy số (u_n) đã cho có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.		

❖ **Câu 17.** Cho cấp số cộng có $u_1 = -2$ và công sai $d = 4$.

Phát biểu	Đ	S
A Dãy số trên có công thức truy hồi là $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$.		
B Số hạng tổng quát của cấp số cộng đã cho là $u_n = 4n - 4$.		
C Tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho là 19600 .		
D $s_n = n \left(\frac{u_n + 6}{4} - 2 \right)$ (với s_n là tổng n số hạng đầu, u_n là số hạng tổng quát).		

❖ **Câu 18.** Trong một hội chợ đón Xuân, một gian hàng sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo quy luật là hàng trên cùng có 1 hộp sữa, mỗi hàng ngay phía dưới lần lượt được xếp nhiều hơn 2 hộp so với hàng trên nó.

Phát biểu	Đ	S
A Số hộp sữa ở các hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.		
B Hàng thứ 10 có 20 hộp sữa .		
C 23 hộp là số hộp sữa ở hàng thứ 12 .		
D Cần 30 hàng để xếp hết tất cả số hộp sữa lên gian hàng .		

❖ **Câu 19.** Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_5 - u_2 = 256 \\ u_6 - u_3 = 468 \end{cases}$$
 .

Phát biểu	Đ	S
A Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 3 .		
B Số hạng thứ 5 của cấp số nhân bằng 160 .		
C Tổng của 12 số hạng đầu tiên bằng 531440 .		
D Số 39366 là số hạng thứ 10 của cấp số nhân .		

❖ **Câu 20.** Cho dãy số (u_n) với
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1} \end{cases}$$

Phát biểu	Đ	S
A Ba số hạng đầu của dãy là 3; 9; 26 .		
B Dãy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$.		
C Số hạng thứ 10 của dãy là $u_{10} = 59\,049$.		
D Tổng 11 số hạng đầu của dãy trên là 88 572 .		

3 Tự luận

❖ **Bài 1.** Xét tính tăng, giảm và bị chặn của mỗi dãy số (u_n) sau, biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \frac{n^2}{n+1}$; b) $u_n = \frac{2}{n^5}$; c) $u_n = (-1)^n \cdot n^2$.

❖ **Bài 2.** Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết:

a)
$$\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$$
.

❖ **Bài 3.** Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết:

a)
$$\begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} u_4 + u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$$
.

❖ **Bài 4.** Chu vi của một đa giác là 213 cm, số đo các cạnh của nó lập thành cấp số cộng với công sai $d = 7$ cm và cạnh lớn nhất bằng 53 cm. Tính số cạnh của đa giác đó.

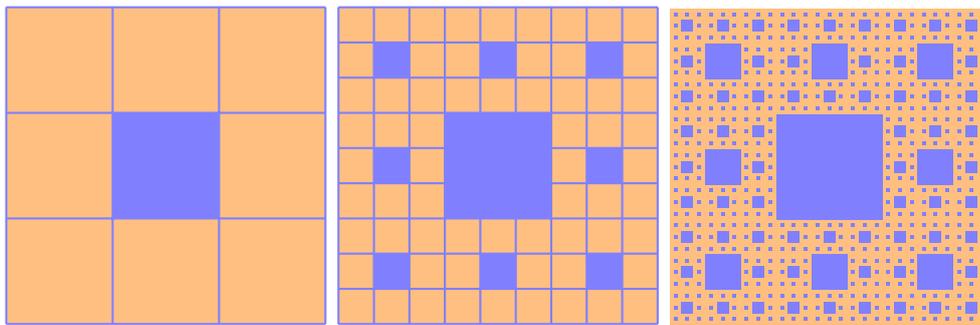
❖ **Bài 5.** Tứ giác $ABCD$ có số đo bốn góc A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Biết số đo góc C gấp 5 lần góc A . Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$ theo đơn vị độ.

Bài 6. Tìm ba số, biết theo thứ tự đó chúng lập thành cấp số cộng và có tổng bằng 21, và nếu lần lượt cộng thêm các số 2; 3; 9 vào ba số đó thì được ba số lập thành một cấp số nhân.

Bài 7. Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16 cm.

- Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.
- Tính độ cao của sân tầng hai so với mặt sân.

Bài 8. Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình vẽ. Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là bao nhiêu?



Bài 9. Giả sử quần thể động vật này ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/năm, xuất cư 2%/năm, tử vong 8%/năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau 2 năm.

Bài 10. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ>). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Bài 11. Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo Niên giám thống kê năm 2020). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

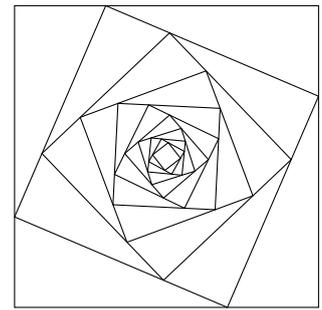
Bài 12. Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi

giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ (đơn vị độ C).

Bài 13. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Bài 14. Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Bài 15. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng tỏ rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Bài 16. Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối tháng ông trả ngân hàng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Bài 17. Một kỹ sư ra trường làm việc tại một công ty A với mức lương tháng khởi điểm là 7 triệu đồng và cứ sau mỗi hai quý liên tiếp, lương tháng sẽ tăng thêm 7%. Tiền lương của anh kỹ sư chỉ để dành mua xe ô tô. Hỏi sau hai năm thì anh kỹ sư mua được ô tô với giá 500 triệu đồng được không, biết rằng anh kỹ sư được gia đình hỗ trợ 30% giá trị chiếc xe (tiền lương được làm tròn đến hàng triệu đồng, biết 1 quý bằng 3 tháng).

Bài 18. Trực khuẩn E. Coli là loại vi khuẩn sinh sống trong đường tiêu hoá của người. Nó có lợi ích như ngăn chặn sự tấn công của vi khuẩn vào đường tiêu hóa, kích thích hệ miễn dịch của cơ thể và một số lợi ích khác, nhưng cũng là tác nhân gây bệnh tiêu chảy. Nó sinh sản theo hình thức phân bào. Trong điều kiện thích hợp thì cứ 20 phút, số tế bào E. Coli tăng gấp đôi. Nếu ban đầu có 1000 tế bào E. Coli, trong điều kiện thích hợp thì sau 5 giờ số tế bào E. Coli là bao nhiêu?

Bài 19. Anh Nam là một cầu thủ bóng đá chuyên nghiệp. Anh vừa kí hợp đồng 5 năm với một câu lạc bộ với mức lương năm khởi điểm là 300 triệu đồng. Chủ tịch câu lạc bộ đưa ra cho anh Nam ba phương án về lương như sau:

- ☞ *Phương án 1:* Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng.
- ☞ *Phương án 2:* Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.
- ☞ *Phương án 3:* Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Em hãy tính giúp anh Nam xem với phương án lương nào thì tổng lương sau 5 năm của anh Nam là lớn nhất?

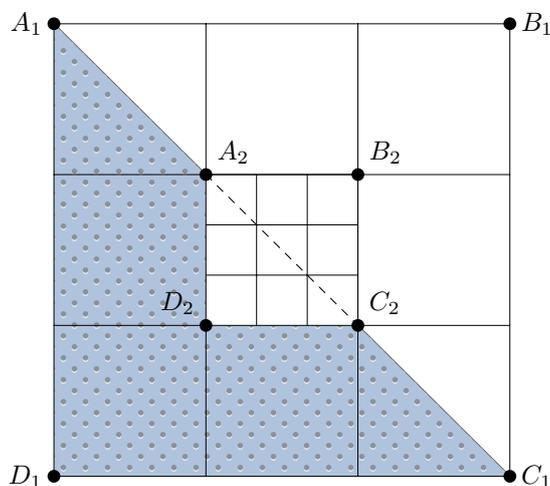
Bài 20. Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như hình được gọi là cách tô màu “đẹp”. Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:

Bước 1: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

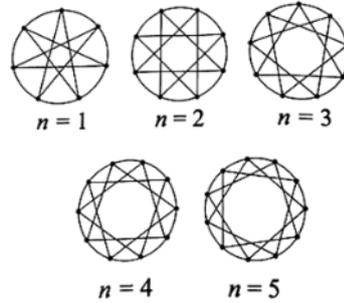
Bước 2: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy.

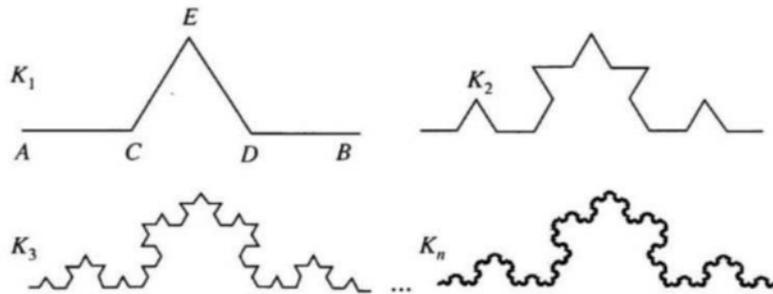
Hỏi cần ít nhất mấy bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm nhiều hơn 99,99%.



Bài 21. Với mỗi số nguyên dương n , lấy $n + 6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình vẽ. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n) . Tính u_{12} .



Bài 22. Đường Von Kốc (von Koch) là một hình được xây dựng bằng phương pháp lặp như sau: Từ đoạn thẳng AB ban đầu ta chia nó thành ba phần bằng nhau $AC = CD = DB$, dựng tam giác đều CED rồi bỏ đi khoảng CD ta được đường gấp khúc $ACEDB$ kí hiệu là K_1 . Lặp lại quy tắc đó cho các đoạn AC, CE, ED, DB ta được đường gấp khúc K_2 (hình vẽ Tài họa). Tiếp tục quá trình này ta được các đường gấp khúc K_3, K_4, \dots . Biết đoạn thẳng AB có độ dài 2 mét. Tính độ dài đường gấp khúc K_{10} (đơn vị: mét, làm tròn đến hàng phần chục).



Bài 23. Năm 2018 anh Tài tốt nghiệp trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội. Vừa ra trường anh Tài đã được nhận vào làm việc tại một công ty Điện Tử ở Hà Nội. Tháng đầu tiên đi làm, anh Tài được công ty trả lương 5 triệu đồng, nhờ chăm chỉ làm việc và hoàn thành tốt các công việc được giao nên cứ mỗi tháng sau công ty đó lại tăng 5% lương so với tháng trước. Mỗi khi lĩnh lương anh Tài đều cất đi phần lương tăng so với tháng trước để tiết kiệm, phần lương còn lại anh Tài dùng cho chi phí sinh hoạt. Hỏi sau 5 năm (tính từ thời điểm bắt đầu làm việc tại công ty) thì anh Tài tiết kiệm được bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)?

Bài 24. Trong một buổi sinh hoạt trải nghiệm của học sinh trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, học sinh được tham gia trò chơi mang tên: ĐI TÌM TỪ KHOÁ và trò chơi sẽ kết thúc khi có học sinh nói đúng từ khoá. Học sinh sẽ trả lời từ khoá sau mỗi gợi ý của Ban tổ chức.

Quy tắc của trò chơi:

- ☞ Học sinh nào trả lời đúng đáp án sau gợi ý thứ nhất sẽ được nhận nửa số kẹo Ban tổ chức đang có.
- ☞ Nếu học sinh trả lời đúng đáp án sau gợi ý thứ hai thì số kẹo nhận được sẽ bị giảm một nửa.

Tiếp tục quy luật đó: mỗi lần thêm một gợi ý, số kẹo nhận được sẽ bị giảm một nửa. Sau mỗi lượt gợi ý, nếu không có học sinh nào nói đúng từ khoá thì sẽ chuyển số kẹo ở lượt đó cho câu lạc bộ CKTU-CKT Union. Biết rằng trong buổi sinh hoạt này, học sinh trả lời đúng đáp án sau 6 gợi ý và Ban tổ chức chỉ còn lại 1 cái kẹo sau khi kết thúc trò chơi. Hỏi câu lạc bộ CKTU-CKT Union nhận được từ Ban tổ chức bao nhiêu cái kẹo?

