SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2024-2025 VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2025-2026**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Khóa ngày 31 tháng 3 năm 2025**
	Môn thi: TOÁN HỌC
	BÀI THI THỨ NHẤT
SỐ BÁO DANH:……………	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang và 04 câu

Câu 1 (*2,5 điểm*):

a) Giải phương trình $\sin 2x-\cos 2x-5\sin x-3\cos x+4=0.$

b) Bác Bình vay của Ngân hàng Chính sách xã hội với số tiền 360 triệu đồng để xây nhà. Sau mỗi tháng, bác Bình phải trả lãi cho Ngân hàng với lãi suất $0,4\%$/tháng và cứ sau 6 tháng thì bác Bình phải trả 36 triệu đồng tiền gốc cho Ngân hàng. Cứ như vậy, sau 60 tháng thì bác Bình đã trả hết tiền cho Ngân hàng. Tìm tổng số tiền lãi mà bác Bình phải trả.

Câu 2 (*2,5 điểm*):

a) Cho 2024 số thực $a_1,a_2,...,a_{2024}$ thỏa mãn $a_1,a_2,...,a_{2024}\in[0;2025)$. Chứng minh phương trình $x^{2024}-2025(a_1+a_2+...+a_{2024})x+a_1^2+a_2^2+...+a_{2024}^2-1=0$ luôn có nghiệm.

b) Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=2.$ Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)}+\sqrt[3]{f(x)+7}-3}{x^3+x-2}.$

Câu 3 (*1,5 điểm*):

a) Biển số xe ôtô của tỉnh Quảng Bình có dạng $73\text{A}-abc.de$ (trong đó: 73A là mã số cố định của tỉnh Quảng Bình; a,b,c,d,e là các chữ số không đồng thời bằng 0). Một biển số xe ôtô được gọi là biển số "***đẹp***" nếu thỏa mãn $a\le b\le c\le d\le e.$ Bác An chọn ngẫu nhiên một biển số xe ôtô của tỉnh Quảng Bình. Tính xác suất để bác An chọn được biển số "***đẹp***".

b) Sắp xếp 3 bạn nam $B_1,\ B_2,\ B_3$ và 5 bạn nữ vào 8 cái ghế được xếp theo hàng ngang (mỗi bạn ngồi một cái ghế). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp thỏa mãn tất cả các điều kiện sau: $B_1,\ B_2,\ B_3$ ngồi theo thứ tự đó từ trái qua phải; giữa B_1 và B_2 có ít nhất 1 bạn nữ; giữa B_2 và B_3 có nhiều nhất 2 bạn nữ.

Câu 4 (*3,5 điểm*): Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và điểm M di động trên cạnh AB thỏa mãn $\dfrac{AM}{AB}=x\ (0<x<1)$. Mặt phẳng (α) đi qua M song song với các đường thẳng $AC',\ A'B$ và cắt các cạnh $AA',\ A'C',\ C'B',\ BC$ tương ứng tại các điểm $N,\ P,\ Q,\ K.$

a) Chứng minh giao điểm của MN và QK luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Nêu cách dựng các điểm $N,\ P,\ Q,\ K.$

b) Tính tỉ số $\dfrac{QB'}{QC'}$ khi $x=\dfrac{2}{3}.$

c) Trong trường hợp $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh bằng 1, tìm giá trị lớn nhất của diện tích ngũ giác $MNPQK.$

-------------HẾT -------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2024-2025 VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2025-2026**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Khóa ngày 31 tháng 3 năm 2025**
	Môn thi: TOÁN HỌC
	BÀI THI THỨ HAI
SỐ BÁO DANH:……………	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang và 05 câu

Câu 1 (*2,0 điểm*):

a) Tìm tất cả các bộ ba số thực x, y, z thỏa mãn $2025^{x^2-3y+z}+2025^{y^2-3z+x}+2025^{z^2-3x+y}=\dfrac{3}{2025}$.

b) Cho đa thức bậc hai $f(x)=x^2+bx+c$ với b, c là hai số nguyên. Chứng minh luôn tồn tại số nguyên a thỏa mãn $f(a)=f(2024).f(2025)$.

Câu 2 (*2,0 điểm*): Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=5 \\ u_{n+1}=u_n^{2025}-3u_n^{2024}+u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$.

a) Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

b) Với mỗi số nguyên dương n, đặt $v_n=\dfrac{1}{\left(u_1^{2024}+1\right)\left(u_2^{2024}+1\right)...\left(u_n^{2024}+1\right)}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

Câu 3 (*3,5 điểm*): Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF $(E\in AC, F\in AB)$ cắt nhau tại H. Gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB, AH. Tia MH cắt (O) tại L.

a) Chứng minh AL, BC, EF đồng quy tại một điểm T.

b) Gọi K là giao điểm của NP và EF. Chứng minh AK vuông góc với OH.

c) Đường thẳng đi qua A song song với BC cắt OQ tại D. Chứng minh giao điểm (khác M) của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MNP và MLT nằm trên đường thẳng DM.

Câu 4 (*1,5 điểm*): Cho n-giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 3)$. Mỗi một đỉnh của n-giác đều $A_1A_2...A_n$ được tô bởi một màu trong m màu cho trước $(m\in\mathbb{N}, m\geq 3)$ sao cho hai đỉnh kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau. Tìm số cách tô màu có thể thực hiện được trong các trường hợp sau:

a) Khi $n=4, m=5$.

b) Khi $n=2024, m=2025$.

Câu 5 (*1,0 điểm*): Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m; n)$ thỏa mãn m^2-2 chia hết cho $m.n+2$.

-------------HẾT -------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2024-2025**
<u>HƯỚNG DẪN CHẤM</u>	**VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2025-2026**
	Khóa ngày 31 tháng 3 năm 2025
	Môn thi: TOÁN HỌC
	BÀI THI THỨ NHẤT
	Đáp án này gồm có 07 trang

YÊU CẦU CHUNG

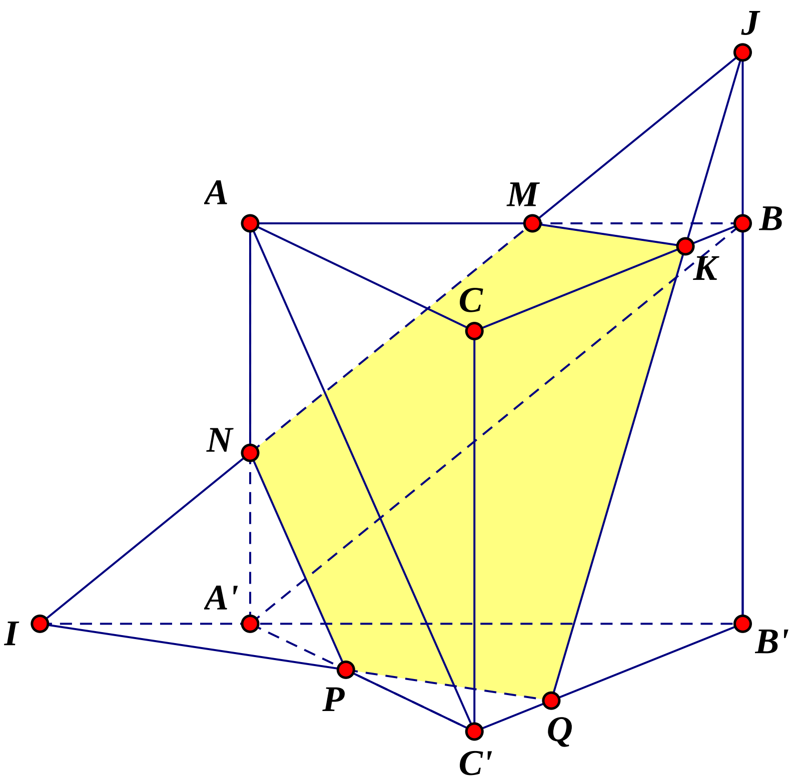
* *Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lôgic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.*
* *Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.*
* *Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình ở phần nào thì cho điểm 0 ở phần đó.*
* *Điểm thành phần của mỗi câu được chia đến 0,25 điểm.*
* *Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng câu.*
* *Điểm của toàn bài là tổng điểm (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

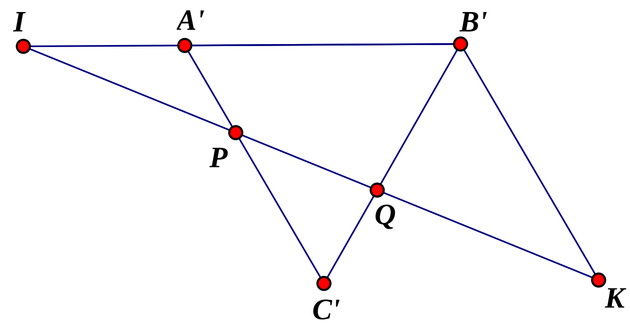
Câu	Nội dung	Điểm
1a	Giải phương trình $\sin 2x-\cos 2x-5\sin x-3\cos x+4=0\ (*)$	**1,25**
	Ta có: $(*)\Leftrightarrow \sin 2x+\left(2\sin^2 x-1\right)-5\sin x-3\cos x+4=0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x+\left(2\sin^2 x-5\sin x+3\right)-3\cos x=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \cos x.(2\sin x-3)+(2\sin x-3)(\sin x-1)=0$ $\Leftrightarrow (2\sin x-3)(\cos x+\sin x-1)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x-3=0\\ \cos x+\sin x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{3}{2}(VN)\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (1)\end{array}\right.$	0,25
	Giải (1) ta có: $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$. Vậy phương trình có hai họ nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=k2\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.	0,25
1b	Bác Bình vay của Ngân hàng Chính sách xã hội với số tiền 360 triệu đồng để xây nhà. Sau mỗi tháng, bác Bình phải trả lãi cho Ngân hàng với lãi suất $0,4\%$/tháng và cứ sau 6 tháng thì bác Bình phải trả 36 triệu đồng tiền gốc cho Ngân hàng. Cứ như vậy, sau 60 tháng thì bác Bình đã trả hết tiền cho Ngân hàng. Tìm tổng số tiền lãi mà bác Bình phải trả.	**1,25**

	Gọi S_n là số tiền lãi sau 6 tháng lần thứ n $\left(n=\overline{1;10}\right)$. Sau 6 tháng lần thứ 1 số tiền lãi là $S_1=6.0,4\%.360$.	0,25
	Sau 6 tháng lần thứ 2 số tiền lãi là $S_2=6.0,4\%.(360-36)$. Sau 6 tháng lần thứ 3 số tiền lãi là $S_3=6.0,4\%.(360-36.2)$.	0,25
	… Sau 6 tháng lần thứ 10 số tiền lãi là $S_{10}=6.0,4\%.(360-36.9)$.	0,25
	Tổng số tiền lãi là $S=S_1+S_2+...+S_{10}=6.0,4\%\left[10.360-36(1+2+...+9)\right]$.	0,25
	$S=\dfrac{1188}{25}=47,52$ (triệu đồng). Vậy tổng số tiền lãi mà bác Bình phải trả là $47,52$ (triệu đồng).	0,25
2a	Cho 2024 số thực $a_1,a_2,...,a_{2024}$ thỏa mãn $a_1,a_2,...,a_{2024}\in[0;2025)$. Chứng minh phương trình $x^{2024}-2025(a_1+a_2+...+a_{2024})x+a_1^2+a_2^2+...+a_{2024}^2-1=0$ luôn có nghiệm.	**1,25**
	Xét $f(x)=x^{2024}-2025(a_1+a_2+...+a_{2024})x+a_1^2+a_2^2+...+a_{2024}^2-1$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.	0,25
	Ta có $f(1)=a_1(a_1-2025)+a_2(a_2-2025)+...+a_{2024}(a_{2024}-2025)\le 0$. Dấu "=" xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_{2024}=0$.	0,25
	$f(-1)=a_1(a_1+2025)+a_2(a_2+2025)+...+a_{2024}(a_{2024}+2025)\ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_{2024}=0$.	0,25
	TH1: Nếu $a_1=a_2=...=a_{2024}=0$ thì $(*)$ có hai nghiệm $x=1;x=-1$.	0,25
	TH2: Nếu tồn tại $a_i\ne 0,i=\overline{1;2024}$ thì $f(-1).f(1)<0$. Do đó (*) có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$. Vậy (*) luôn có nghiệm.	0,25
2b	Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=2$. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)}+\sqrt[3]{f(x)+7}-3}{x^3+x-2}$.	**1,25**
	Vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=2$ nên $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-1\right)=0\Rightarrow f(1)=1$.	0,25
	Ta có $\dfrac{\sqrt{f(x)}+\sqrt[3]{f(x)+7}-3}{x^3+x-2}=\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{(x-1)(x^2+x+2)}+\dfrac{\sqrt[3]{f(x)+7}-2}{(x-1)(x^2+x+2)}$.	0,25

	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{(x-1)\left(x^2+x+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{f(x)-1}{x-1}.\dfrac{1}{\left(x^2+x+2\right)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}\right)=2.\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$.	0,25
	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)+7}-2}{(x-1)\left(x^2+x+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{f(x)-1}{x-1}.\dfrac{1}{\left(x^2+x+2\right)\left(\sqrt[3]{\left(f(x)+7\right)^2}+2.\sqrt[3]{f(x)+7}+4\right)}\right)$ $=2.\dfrac{1}{48}=\dfrac{1}{24}$.	0,25
	Vậy $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{f(x)}+\sqrt[3]{f(x)+7}-3}{x^3+x-2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{7}{24}$.	0,25
3a	Biển số xe ôtô của tỉnh Quảng Bình có dạng $73A-abc.de$ (trong đó: $73A$ là mã số cố định của tỉnh Quảng Bình; a,b,c,d,e là các chữ số không đồng thời bằng 0). Một biển số xe ôtô được gọi là biển số "***đẹp***" nếu thỏa mãn $a\le b\le c\le d\le e$. Bác An chọn ngẫu nhiên một biển số xe ôtô của tỉnh Quảng Bình. Tính xác suất để bác An chọn được biển số "***đẹp***".	**0,75**
	Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=10^5-1=99999$. Gọi A là biến cố: "bác An chọn được biển số xe "***đẹp***". Ta có $0\le a\le b\le c\le d\le e\le 9$. Đặt $b_1=b+1, c_1=c+2, d_1=d+3, e_1=e+4$. Lúc đó $0\le a<b_1<c_1<d_1<e_1\le 13$.	0,25
	Ta thấy, mỗi cách lấy một bộ $\{a;b;c;d;e\}$ thỏa mãn $0\le a\le b\le c\le d\le e\le 9$ tương ứng với mỗi cách lấy một bộ $\{a;b_1;c_1;d_1;e_1\}$ thỏa mãn $0\le a<b_1<c_1<d_1<e_1\le 13$. Số cách lấy một bộ $\{a;b_1;c_1;d_1;e_1\}$ thỏa mãn $0\le a<b_1<c_1<d_1<e_1\le 13$ là $C_{14}^5=2002$.	0,25
	Vì a,b,c,d,e là các chữ số không đồng thời bằng 0 nên số biển số xe ôtô "***đẹp***" của tỉnh Quảng Bình là $2002-1=2001$. Số phần tử thuận lợi cho biến cố A là $n(A)=2001$. Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{2001}{99999}=\dfrac{667}{33333}$.	0,25
3b	Sắp xếp 3 bạn nam B_1,B_2,B_3 và 5 bạn nữ vào 8 cái ghế được xếp theo hàng ngang (mỗi bạn ngồi một cái ghế). Tìm số cách sắp xếp thỏa mãn tất cả các điều kiện sau: B_1,B_2,B_3 ngồi theo thứ tự đó từ trái qua phải; giữa B_1 và B_2 có ít nhất 1 bạn nữ; giữa B_2 và B_3 có nhiều nhất 2 bạn nữ.	**0,75**
	Gọi x là số bạn nữ ngồi bên trái B_1 $(x\in\mathbb{N})$.	0,25

	y là số bạn nữ ngồi giữa B_1 và B_2 $\left(y \in \mathbb{N}^*\right)$. z là số bạn nữ ngồi giữa B_2 và B_3 $\left(z \in \mathbb{N},\, z \le 2\right)$. t là số bạn nữ ngồi bên phải B_3 $\left(t \in \mathbb{N}\right)$. Đặt $y_1 = y - 1$. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} x + y_1 + z + t = 4 \\ z \le 2 \\ x, y_1, z, t \in \mathbb{N} \end{cases}$ $(*)$	
	Sử dụng kết quả của bài toán "số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ với $n, m \in \mathbb{N}^*$ là C_{m+n-1}^{n-1}" ta có các trường hợp sau: **TH1:** $z = 0$ thì số nghiệm của (*) bằng C_6^2. **TH2:** $z = 1$ thì số nghiệm của (*) bằng C_5^2. **TH3:** $z = 2$ thì số nghiệm của (*) bằng C_4^2.	0,25
	Do đó, số cách sắp xếp thỏa mãn bài toán là $\left(C_6^2 + C_5^2 + C_4^2\right).5! = 31.5! = 3720$.	0,25
4	Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và điểm M di động trên cạnh AB thỏa mãn $\dfrac{AM}{AB} = x \left(0 < x < 1\right)$. Mặt phẳng (α) đi qua M song song với các đường thẳng AC', $A'B$ và cắt các cạnh AA', $A'C'$, $C'B'$, BC tương ứng tại các điểm N, P, Q, K. **a)** Chứng minh giao điểm của MN và QK luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Nêu cách dựng các điểm N, P, Q, K. **b)** Tính tỉ số $\dfrac{QB'}{QC'}$ khi $x = \dfrac{2}{3}$. **c)** Trong trường hợp $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh bằng 1, tìm giá trị lớn nhất của diện tích ngũ giác $MNPQK$.	**3,5**
4a	Chứng minh giao điểm của MN và QK luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Nêu một cách dựng các điểm N, P, Q, K.	**1,5**

4a	 ***Chú ý**: Nếu học sinh vẽ các đoạn thẳng* $A'N, A'P, A'I, BM$ *(theo hình biểu diễn trên) bằng nét liền vẫn chấp nhận được.*	
	Ta có $MN = (\alpha)\cap(ABB'A')$; $QK = (\alpha)\cap(BCC'B')$; $BB' = (ABB'A')\cap(BCC'B')$.	0,25
	Mà MN và BB' luôn cắt nhau. Nên theo định lý ba giao tuyến thì MN, QK, BB' đồng quy. Do đó giao điểm của MN và QK luôn nằm trên đường thẳng BB' cố định (*đpcm*)	0,25
	Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, kẻ $MN \parallel A'B, N \in AA'$.	0,25
	Gọi I, J tương ứng là giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng $A'B'$ và BB'.	0,25
	Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, kẻ $NP \parallel AC', P \in A'C'$.	0,25
	Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, Q là giao điểm của IP với $B'C'$. Trong mặt phẳng $(BCC'B')$, K là giao điểm của JQ với BC.	0,25
4b	Tính tỉ số $\dfrac{QB'}{QC'}$ khi $x = \dfrac{2}{3}$.	**1,0**
	Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, có $MN \parallel A'B$ nên $\dfrac{NA}{NA'} = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{x}{1-x}$; có $IA' \parallel AM$ nên $\dfrac{AM}{IA'} = \dfrac{NA}{NA'} = \dfrac{x}{1-x}$.	0,25

	Suy ra $\frac{IB'}{IA'}=\frac{IA'+A'B'}{IA'}=1+\frac{AB}{IA'}=1+\frac{1}{x}.\frac{AM}{IA'}=\frac{2-x}{1-x}\ (1)$	0,25
	Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, có $NP \parallel AC'$ nên $\frac{PC'}{PA'}=\frac{NA}{NA'}=\frac{x}{1-x}\Rightarrow PC'=\frac{x}{1-x}PA'\ (2)$	0,25
	Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $B'K \parallel A'C', K \in IP$  Ta có $\frac{QB'}{QC'}=\frac{KB'}{PC'}=\frac{(1-x)KB'}{xPA'}=\frac{(1-x)IB'}{xIA'}=\frac{2-x}{x}\ (3)$. Vậy khi $x=\frac{2}{3}$ thì $\frac{QB'}{QC'}=2$. ***Chú ý:*** *Nếu học sinh sử dụng trực tiếp định lý Menelaus trong mặt phẳng để tìm tỉ số $\frac{QB'}{QC'}$ vẫn cho điểm tối đa của phần này (nếu đúng).*	0,25
4c	Trong trường hợp $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh bằng 1, tìm giá trị lớn nhất của diện tích ngũ giác $MNPQK$.	**1,0**
	Theo (1) ta có $IB'=(2-x).A'B'=2-x$. Theo (3) ta có $QB'=\frac{2-x}{2}.B'C'=\frac{2-x}{2}$. Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, có $\frac{JB}{JB'}=\frac{MB}{IB'}=\frac{1-x}{2-x}\Rightarrow JB'=(2-x).BB'=2-x$. Xét tam giác IJB' vuông tại B' ta có: $IJ=\sqrt{IB'^2+JB'^2}=(2-x)\sqrt{2}$. Tương tự, ta có $JQ=\sqrt{JB'^2+QB'^2}=(2-x).\frac{\sqrt{5}}{2}$. Áp dụng định lý cosin cho tam giác IQB' ta có $IQ=\sqrt{IB'^2+QB'^2-2IB'.QB'.\cos IB'Q}=(2-x).\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta thấy, $IJ^2=IQ^2+JQ^2$ nên tam giác IJQ vuông tại Q. Do đó, diện tích tam	0,25

	giác IJQ là $S_{\Delta IJQ}=\frac{1}{2}.IQ.JQ=\frac{\sqrt{15}}{8}(2-x)^2$.	
	Ta có $\frac{S_{\Delta JMK}}{S_{\Delta IJQ}}=\frac{JM}{JI}.\frac{JK}{JQ}=\left(\frac{JB}{JB'}\right)^2=\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^2\Rightarrow S_{\Delta JMK}=\frac{\sqrt{15}}{8}.(1-x)^2$.	0,25
	Vì $AM=x$ nên $A'N=1-x, A'I=1-x, A'P=1-x$. Xét tam giác INA' vuông tại A' ta có $IN=\sqrt{A'I^2+A'N^2}=(1-x)\sqrt{2}$. Tương tự, ta có $NP=\sqrt{A'N^2+A'P^2}=(2-x).\sqrt{2}$. Áp dụng định lý cosin cho tam giác IPA' ta có $IP=\sqrt{A'I^2+A'P^2-2A'I.A'P.\cos IA'P}=(1-x).\sqrt{3}$. Do đó, diện tích tam giác INP là $S_{\Delta INP}=\frac{\sqrt{15}}{4}(1-x)^2$	0,25
	Diện tích hình ngũ giác *MNPQK* là $S=S_{\Delta IJQ}-(S_{\Delta JMK}+S_{\Delta INP})=\frac{\sqrt{15}}{8}(1+2x-2x^2)$. $S=\frac{\sqrt{15}}{8}(1+2x-2x^2)=\frac{\sqrt{15}}{8}\left[-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\right]\le\frac{3\sqrt{15}}{16}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của diện tích ngũ giác *MNPQK* bằng $\frac{3\sqrt{15}}{16}$ khi M là trung điểm của *AB*.	0,25

-------------HẾT -----------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

HƯỚNG DẪN CHẤM

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2024-2025 VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2025-2026

Khóa ngày 31 tháng 3 năm 2025

Môn thi: TOÁN HỌC

BÀI THI THỨ HAI

Đáp án này gồm có 07 trang

YÊU CẦU CHUNG

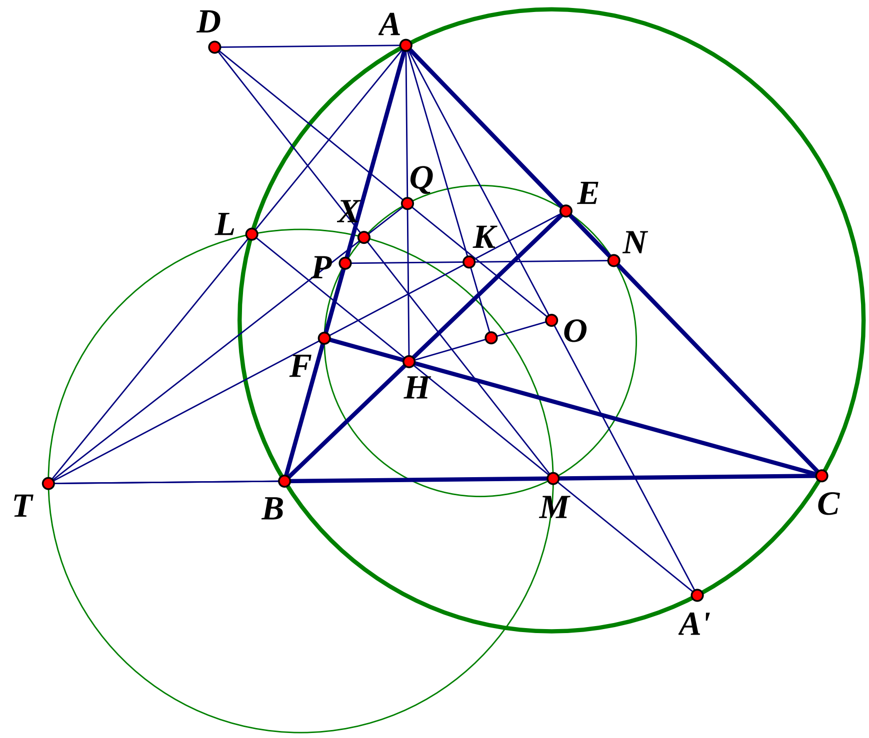
* *Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lôgic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.*
* *Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.*
* *Ở câu 3 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai ở ý nào thì cho điểm 0 đối với ý đó.*
* *Điểm thành phần của mỗi câu được chia đến 0,25 điểm. Đối với những phần được chia đến 0,5 điểm thì tổ giám khảo thống nhất để chia đến 0,25 điểm.*

** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng câu.*

** Điểm của toàn bài là tổng điểm (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

Câu	Nội dung	Điểm
1a	Tìm tất cả các bộ ba số thực x,y,z thỏa mãn $2025^{x^2-3y+z}+2025^{y^2-3z+x}+2025^{z^2-3x+y}=\dfrac{3}{2025}$ (*)	**1,0**
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2025^{x^2-3y+z}+2025^{y^2-3z+x}+2025^{z^2-3x+y}\geq 3.\sqrt[3]{2025^{x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)}}$ (1)	0,25
	Mặt khác, ta có $x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-3\geq -3$ (2) Dấu $"="$ khi $x=y=z=1$.	0,25
	Vì $2025>1$ nên từ (2) suy ra: $2025^{x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)}\geq 2025^{-3}=\dfrac{1}{2025^3}$ (3) Từ (1) và (3) suy ra $2025^{x^2-3y+z}+2025^{y^2-3z+x}+2025^{z^2-3x+y}\geq\dfrac{3}{2025}$ (4)	0,25
	Từ (4) suy ra: $(*)\Leftrightarrow x=y=z=1$. Vậy $x=y=z=1$ thỏa mãn bài toán.	0,25
1b	Cho đa thức bậc hai $f(x)=x^2+bx+c$ với b,c là hai số nguyên. Chứng minh luôn tồn tại số nguyên a thỏa mãn $f(a)=f(2024).f(2025)$.	**1,0**
	Với mỗi $x\in\mathbb{R}$ ta có: $f(x).f(x+1)=f(x)\left((x+1)^2+b(x+1)+c\right)$	0,25
	$=f(x)\left(x^2+2x+1+bx+b+c\right)=f(x)\left(f(x)+2x+b+1\right)$ $=f^2(x)+2xf(x)+bf(x)+f(x)$	0,25
	$=\left(f^2(x)+2xf(x)+x^2\right)+bf(x)+bx+c$ $=\left(f(x)+x\right)^2+b\left(f(x)+x\right)+c=f\left(f(x)+x\right)$. Do đó $f\left(f(x)+x\right)=f(x).f(x+1),\forall x\in\mathbb{R}$ (*)	0,25
	Thay $x=2024$ vào (*) ta được $f\left(f(2024)+2024\right)=f(2024).f(2025)$. Vì $b,c,2024$ là ba số nguyên nên $a=f(2024)+2024$ là một số nguyên. Vậy tồn tại số nguyên $a=f(2024)+2024$ thỏa mãn $f(a)=f(2024).f(2025)$ (*đpcm*)	0,25

2	Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n^{2025} - 3u_n^{2024} + u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. **a)** Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. **b)** Với mỗi số nguyên dương n, đặt $v_n = \dfrac{1}{(u_1^{2024}+1)(u_2^{2024}+1)...(u_n^{2024}+1)}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.	**2,0**
2a	Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.	**1,25**
	Ta chứng minh bằng quy nạp: $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $(*)$ Với $n=1$ ta có $u_1 = 5 > 3$. Do đó, (*) đúng. Giả sử (*) đúng với $n = k \geq 1$ hay $u_k > 3, \forall k \geq 1$.	0,25
	Ta cần chứng minh: (*) đúng với $n = k+1$ hay $u_{k+1} > 3$ (1) Thật vậy, ta có: $u_{k+1} = u_k^{2025} - 3u_k^{2024} + u_k \Leftrightarrow u_{k+1} - 3 = u_k^{2025} - 3u_k^{2024} + u_k - 3$ $\Leftrightarrow u_{k+1} - 3 = (u_k^{2024}+1)(u_k - 3) > 0 \Rightarrow u_{k+1} > 3$ (vì $u_k > 3; u_k^{2024} + 1 > 0, \forall k \geq 1$). Do đó (1) đúng. Vậy theo nguyên lý quy nạp $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $(*)$	0,25
	Ta cũng có : $u_{n+1} = u_n^{2025} - 3u_n^{2024} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = u_n^{2024}(u_n - 3) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, dãy số (u_n) là dãy số tăng.	0,25
	Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ $(L \geq u_1 = 5)$. Lấy giới hạn hai vế công thức truy hồi ta được: $L = L^{2025} - 3L^{2024} + L \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L = 0 \\ L = 3 \end{array}\right.$ (vô lý)	0,25
	Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (*đpcm*)	0,25
2b	Với mỗi số nguyên dương n, đặt $v_n = \dfrac{1}{(u_1^{2024}+1)(u_2^{2024}+1)...(u_n^{2024}+1)}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.	**0,75**
	Ta có: $u_{n+1} - 3 = u_n^{2025} - 3u_n^{2024} + u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow u_{n+1} - 3 = (u_n^{2024}+1)(u_n - 3), \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,25

	$\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n^{2024}+1}=\dfrac{u_n-3}{u_{n+1}-3},\forall n\in\mathbb{N}^*.$	
	Do đó $v_n=\dfrac{u_1-3}{u_2-3}.\dfrac{u_2-3}{u_3-3}...\dfrac{u_{n-1}-3}{u_n-3}.\dfrac{u_n-3}{u_{n+1}-3}=\dfrac{u_1-3}{u_{n+1}-3}=\dfrac{2}{u_{n+1}-3},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$	0,25
	Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{u_{n+1}-3}=0.$	0,25
3	Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF $(E\in AC, F\in AB)$ cắt nhau tại H. Gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB, AH. Tia MH cắt (O) tại L. **a)** Chứng minh AL, BC, EF đồng quy tại một điểm T. **b)** Gọi K là giao điểm của NP và EF. Chứng minh AK vuông góc với OH. **c)** Đường thẳng đi qua A song song với BC cắt OQ tại D. Chứng minh giao điểm (khác M) của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MNP và MLT nằm trên đường thẳng DM.	**3,5**
	*Quy ước*: Trong bài toán này ký hiệu $(XY),(XYZ)$ tương ứng là ký hiệu của đường tròn đường kính XY và đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.	
3a	Chứng minh AL, BC, EF đồng quy tại một điểm T.	**1,25**
	Gọi A' là giao điểm của AO với (O). Vì $BHCA'$ là hình bình hành nên H, M, A' thẳng hàng.	0,5
	Do đó: L, H, M, A' thẳng hàng nên $ALA'=90^\circ \Rightarrow ALH=90^\circ \Rightarrow L\in(AH)$ (1)	0,25

	AL là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (AH). BC là trục đẳng phương của hai đường tròn (BC) và (O). EF là trục đẳng phương của hai đường tròn (AH) và (BC).	0,25
	Suy ra AL, BC, EF đồng quy tại tâm đẳng phương T của ba đường tròn (O), (BC) và (AH) (*đpcm*)	0,25
3b	Gọi K là giao điểm của NP và EF. Chứng minh AK vuông góc với OH.	**1,25**
	Vì E, F, N, P cùng nằm trên đường tròn Euler (MNP) của tam giác ABC nên $\overline{KE}.\overline{KF} = \overline{KN}.\overline{KP}$ (2)	0,25
	Vì $AEH = AFH = 90°$ nên $E, F \in (AH)$, do đó $P_{K/(AH)} = \overline{KE}.\overline{KF}$ (3) Vì $ANO = APO = 90°$ nên $N, P \in (AO)$, do đó $P_{K/(AO)} = \overline{KN}.\overline{KP}$ (4).	0,25
	Từ (2), (3), (4) suy ra $P_{K/(AH)} = P_{K/(AO)}$, do đó AK là trục đẳng phương của hai đường tròn (AH) và (AO) (5)	0,25
	Gọi Q' là trung điểm của AO thì Q' là tâm đường tròn (AO). Vì QQ' là đường trung bình của tam giác AHO nên $QQ' \parallel OH$ (6)	0,25
	Từ (5) suy ra $AK \perp QQ'$ (7) Từ (6), (7) suy ra $AK \perp OH$ (*đpcm*)	0,25
3c	Đường thẳng đi qua A song song với BC cắt OQ tại D. Chứng minh giao điểm (khác M) của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MNP và MLT nằm trên đường thẳng DM.	**1,0**
	Gọi X (khác M) là giao điểm của DM với (MLT). + Chứng minh T, X, Q thẳng hàng: Vì $X \in (MLT)$ và (1) suy ra $MXT = MLT = MLA = 90°$ (8)	0,25
	Vì $AD \parallel BC$ nên $ADX = XMT = ALX$ (vì $MXLT$ nội tiếp)$\Rightarrow X \in (ADL)$ (9) Vì O, Q tương ứng là tâm của (O) và (AH) nên OQ là đường trung trực của đoạn thẳng AL. Do đó $DLQ = DAQ = 90°$ nên $L \in (ADQ)$ (10)	0,25
	Từ (9), (10) suy ra: $X \in (ADQ) \Rightarrow DXQ = 180° - DAQ = 90° \Rightarrow DXQ = 90°$ (11) Từ (8) và (11) suy ra T, X, Q thẳng hàng (12)	0,25
	+ Chứng minh $X \in (MNP)$: Từ (9), (12) suy ra $\overline{TE}.\overline{TF} = \overline{TA}.\overline{TL} = \overline{TQ}.\overline{TX}$ mà $E, F, Q \in (MNP)$ $\Rightarrow X \in (MNP)$ Vậy giao điểm (khác M) của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MNP và MLT nằm trên đường thẳng DM (*đpcm*)	0,25
4	Cho n-giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$. Mỗi một đỉnh của n-giác đều $A_1A_2...A_n$	**1,5**

	được tô bởi một màu trong m màu cho trước $\left(m\in\mathbb{N}, m\geq 3\right)$ sao cho hai đỉnh kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau. Tìm số cách tô màu có thể thực hiện được trong các trường hợp sau: **a)** Khi $n=4, m=5$. **b)** Khi $n=2024, m=2025$.	
4a	Khi $n=4, m=5$.	**0,5**
	Không mất tính tổng quát giả sử ta tô màu theo thứ tự các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4. Đỉnh A_1 có 5 cách tô màu. Đỉnh A_2 có 4 cách tô màu. **TH1:** đỉnh A_3 được tô màu cùng màu với đỉnh A_1. Lúc đó, có 1 cách tô màu đỉnh A_3 và có 4 cách tô màu đỉnh A_4. Trong trường hợp này, có tất cả $5.4.1.4=80$ cách tô màu.	0,25
	TH2: đỉnh A_3 được tô màu khác màu với đỉnh A_1. Lúc đó, có 3 cách tô màu đỉnh A_3 và có 3 cách tô màu đỉnh A_4. Trong trường hợp này, có tất cả $5.4.3.3=180$ cách tô màu. Vậy có 260 cách tô màu khi $n=4, m=5$.	0,25
4b	Khi $n=2024, m=2025$.	**1,0**
	Gọi S_n là số cách tô màu *n*-giác đều $A_1A_2...A_n$ thỏa mãn bài toán. Ta giải bài toán trong trường hợp tổng quát với m, n bất kỳ thỏa mãn $m, n\in\mathbb{N}; m\geq 3; n\geq 3$. **TH1**: đỉnh A_1 và đỉnh A_{n-1} được tô bởi hai màu khác nhau. Lúc đó, đỉnh A_n được tô màu khác với màu của hai đỉnh trên nên đỉnh A_n có tất cả $m-2$ cách tô màu. Trong trường hợp này, ta có số cách tô màu là $\left(m-2\right)S_{n-1}$.	0,25
	TH2: đỉnh A_1 và đỉnh A_{n-1} được tô bởi cùng một màu. Lúc đó, đỉnh A_n được tô màu khác với màu trên nên đỉnh A_n có tất cả $m-1$ cách tô màu. Trong trường hợp này, ta có số cách tô màu là $\left(m-1\right)S_{n-2}$. Như vậy, ta có công thức truy hồi $S_n=\left(m-2\right)S_{n-1}+\left(m-1\right)S_{n-2}, \forall n\geq 5$.	0,25
	Khi $n=3$: đỉnh A_1 có m cách tô màu, đỉnh A_2 có $m-1$ cách tô màu, đỉnh A_3 có $m-2$ cách tô màu. Do đó $S_3=m\left(m-1\right)\left(m-2\right)$. Khi $n=4$ và theo câu a) ta có: $S_4=m\left(m-1\right)1\left(m-1\right)+m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\left(m-2\right)=m\left(m-1\right)\left(m^2-3m+3\right)$. Do đó, ta có dãy số $\left(S_n\right)$ xác định bởi $\begin{cases} S_3=m(m-1)(m-2) \\ S_4=m\left(m-1\right)\left(m^2-3m+3\right) \\ S_n=\left(m-2\right)S_{n-1}+\left(m-1\right)S_{n-2}, \forall n\geq 5 \end{cases}$.	0,25

	Từ hệ thức truy hồi trên, ta có $S_n=(m-1)^n+(m-1)(-1)^n$, $\forall n\ge 3;\ m\ge 3$. Thay $n=2024, m=2025$, ta được $S_{2024}=(2025-1)^{2024}+2025-1=2024^{2024}+2024$. Vậy khi $n=2024, m=2025$ ta có $2024^{2024}+2024$ cách tô màu.	0,25
5	Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m;\ n)$ thỏa mãn m^2-2 chia hết cho $m.n+2$.	**1,0**
	TH1: $m=1$ Khi đó $\dfrac{m^2-2}{m.n+2}=\dfrac{-1}{n+2}$. Vì $n>0$ nên $\dfrac{-1}{n+2}$ không thể là số nguyên. Trường hợp $m=1$ không thỏa mãn.	0,25
	TH2: $m\ge 2$ Giả sử $(m;\ n)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán. Ta có: $(m^2-2)\,\vdots\,(m.n+2)\Rightarrow n(m^2-2)\,\vdots\,(m.n+2)\Rightarrow (m(m.n+2)-2(m+n))\,\vdots\,(m.n+2)$ $\Rightarrow 2(m+n)\,\vdots\,(m.n+2)\Rightarrow 2(m+n)=k(m.n+2)$ với $k\in\mathbb{N}^*$ (1)	0,25
	TH 2.1: $k=1$ Từ (1) ta có: $2(m+n)=m.n+2\Leftrightarrow (m-2)(n-2)=2$ (2) Vì $m\ge 2$ nên $m-2\ge 0\Rightarrow n-2\ge 0$. Do đó: $(2)\Leftrightarrow \begin{cases}m-2=2\\n-2=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m-2=1\\n-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=4\\n=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m=3\\n=4\end{cases}$. Thử lại, ta thấy $\begin{cases}m=4\\n=3\end{cases}$ thỏa mãn bài toán.	0,25
	TH 2.2: $k\ge 2$ Từ (1) ta có: $2(m+n)=k(m.n+2)\ge 2(m.n+2)\Leftrightarrow m+n\ge m.n+2$ $\Leftrightarrow (m-1)(n-1)+1\le 0$ (3) Vì $m\ge 2,\ n\ge 1$ nên (3) không xảy ra. Vậy có một bộ $(m;\ n)=(4;\ 3)$ thỏa mãn bài toán.	0,25

-------- HẾT --------