TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm có: 01 trang

KỲ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM 2025 - LẦN 1

BÀI THI MÔN: TOÁN CHUYÊN

Dành cho các thí sinh thi thử vào chuyên Toán, chuyên Tin

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:..................

Số báo danh:........................

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a/ Giải phương trình $\sqrt{9-2x^2}+\sqrt[3]{x^2+4}=3$.

b/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $4x^2+y^2=32z^2$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z}\geq 0$.

Câu 2. *(1,0 điểm)* Tồn tại hay không một tập hợp A khác rỗng, là tập con của tập các số tự nhiên và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau?

◦ Với hai số tự nhiên phân biệt bất kỳ mà có tổng là số chẵn thì ít nhất một trong hai số đó thuộc tập hợp A.

◦ Với hai số tự nhiên phân biệt bất kỳ mà có tổng là số lẻ thì ít nhất một trong hai số đó không thuộc tập hợp A.

Câu 3. *(1,0 điểm)* Một rô-bốt di chuyển trên một bảng gồm 7 ô được đánh số từ 1 đến 7 như hình vẽ sau.

1	2	3	4	5	6	7

Ban đầu, rô-bốt đứng ở ô số 4. Mỗi bước, nó có thể nhảy sang trái hoặc sang phải, mỗi hướng có xác suất bằng nhau, và mỗi lần nhảy chỉ di chuyển đúng một ô. Tại ô số 1 và ô số 7 có đặt kẹo, và khi rô-bốt đến một trong hai ô này, nó lấy kẹo và dừng lại. Tính xác suất để rô-bốt lấy kẹo sau đúng 3 bước.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

a/ Cho a, b là hai số nguyên trái dấu. Biết rằng phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm nguyên và phương trình $x^2+bx+a=0$ có nghiệm nguyên. Chứng minh rằng $a+b=-1$.

b/ Tìm số nguyên z và các số hữu tỷ x, y thỏa mãn điều kiện $\dfrac{3}{\sqrt{2x}}-1=1-\sqrt{\dfrac{3}{y}}=\dfrac{z}{x+y}$.

Câu 5. *(3,0 điểm)* Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi AH, AD lần lượt là đường cao và đường phân giác trong góc A $(H, D\in BC)$. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Đường trung trực của đoạn thẳng AD cắt (O) tại E, F. Chứng minh rằng

a/ Trực tâm của tam giác DEF thuộc (O).

b/ Bốn điểm H, E, F, M cùng thuộc một đường tròn.

———————Hết———————

Chú ý. Thí sinh không được dùng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

TRƯỜNG THPT CHUYÊN

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

KỲ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM 2025 - LẦN 1

(Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

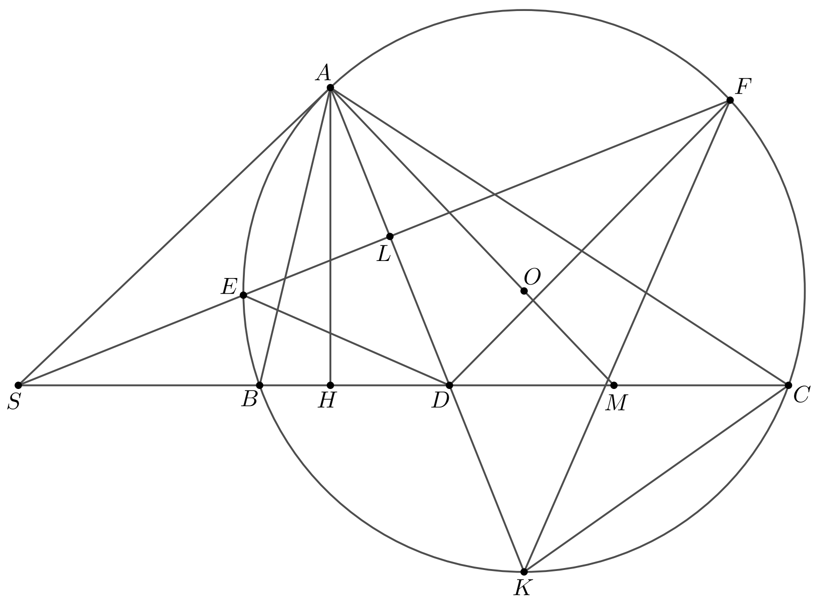
2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
1a (1,0 điểm)	Điều kiện xác định $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \le x \le \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Đặt $\sqrt{9-2x^2} = a$, $\sqrt[3]{x^2+4} = b$ $(a \ge 0, b > 0)$. Từ phương trình đã cho ta có $$\begin{cases} a+b=3 \quad (1) \\ a^2+2b^3=17 \quad (2) \end{cases}.$$ (1) $\Leftrightarrow a = 3-b$. Thay vào (2) ta được $2b^3+b^2-6b-8=0$. Phương trình này tương đương với $(b-2)(2b^2+5b+4)=0$. Do đó $b=2$. Ta có $\sqrt[3]{x^2+4}=2$. Suy ra $x=2$ hoặc $x=-2$. Thử lại thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho tập nghiệm $S=\{-2,2\}$.	1,0
1b (1,0 điểm)	Theo đề bài, $4\dfrac{x^2}{z^2}+\dfrac{y^2}{z^2}=32$. Đặt $\dfrac{x}{z}=t$ $(t>0)$. Khi đó $\dfrac{y}{z}=\sqrt{32-4t^2}=2\sqrt{8-t^2}$. Ta có: $z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)=\dfrac{z}{x}+2\dfrac{z}{y}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{2}{2\sqrt{8-t^2}}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{\sqrt{8-t^2}}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta có $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{\sqrt{8-t^2}} \ge \dfrac{(1+1)^2}{t+\sqrt{8-t^2}}=\dfrac{4}{t+\sqrt{8-t^2}}$. (1)	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $(t+\sqrt{8-t^2})^2 \le (1^2+1^2)(t^2+8-t^2)=16$. Suy ra $t+\sqrt{8-t^2} \le 4$. Kết hợp với (1), ta được $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{\sqrt{8-t^2}} \ge 1$. Do đó $z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right) \ge 1$. Vậy $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z} \ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $t=\sqrt{8-t^2} \Leftrightarrow t=2$. Khi đó $\dfrac{x}{z}=2, \dfrac{y}{z}=4$.	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
2 (1,0 điểm)	Giả sử tồn tại tập hợp A thỏa mãn điều kiện đề bài. Với $x=1, y=3$, ta có $x+y=4$ là số chẵn. Suy ra $1 \in A$ hoặc $3 \in A$. Xét hai trường hợp. *Trường hợp 1.* $1 \in A$. Với $x=1, y=2$, ta có $x+y=3$ là số lẻ. Suy ra $1 \notin A$ hoặc $2 \notin A$. Vì $1 \in A$ nên $2 \notin A$. Tương tự, $4 \notin A$. Với $x=2, y=4$, ta có $x+y=6$ là số chẵn. Suy ra $2 \in A$ hoặc $4 \in A$ (Mâu thuẫn). *Trường hợp 2.* $3 \in A$. Chứng minh tương tự. Vậy điều giả sử là sai. Do đó không tồn tại tập hợp A thỏa mãn điều kiện đề bài.	1,0
3 (1,0 điểm)	Ở mỗi ô, rô-bốt có hai sự lựa chọn để di chuyển với xác suất như nhau. Do đó số cách di chuyển sau ba bước là $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Số phần tử của không gian mẫu là 8.	0,5
	Có hai khả năng thuận lợi cho biến cố: "rô-bốt lấy kẹo sau đúng 3 bước" là $4 \to 3 \to 2 \to 1$ và $4 \to 5 \to 6 \to 7$. Xác suất cần tìm là $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.	0,5
4a (1,5 điểm)	Không mất tính tổng quát, giả sử $a > 0 > b$. Ký hiệu $x^2+ax+b=0$ (1) và $x^2+bx+a=0$ (2). Nếu $a > -b$ thì $(a+2)^2 > a^2+4a > \Delta_1 = a^2-4b > a^2$. Do đó $\Delta_1 = (a+1)^2$. Suy ra $a^2-4b=(a+1)^2 \Leftrightarrow -4b = 2a+1$ (vô lý). Vậy $a \le -b$. Nếu $a=-b$ thì $\Delta_1 = a^2+4a = k^2$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Suy ra $(a+2-k)(a+2+k)=4$. Do đó $a=0$ hoặc $a=-4$ (loại).	0,5
	Nếu $a=-b-1$ thì (1) có các nghiệm là $1, b$ và (2) có các nghiệm là $1, a$ (thỏa mãn). Nếu $a \le -b-2$ thì $-a \ge b+2$. Khi đó $\Delta_2 = b^2-4a \ge b^2+4(b+2) > (b+2)^2$. Vì $a>0$ nên $\Delta_2 = b^2-4a < b^2$. Suy ra $b^2 > \Delta_2 > (b+2)^2$. Do đó $\Delta_2 = (b+1)^2$. Ta có $\Delta_2 = b^2-4a = (b+1)^2 \Leftrightarrow -4a = 2b+1$ (vô lý). Vậy $a+b=-1$.	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
4b (1,5 điểm)	Ta có $\sqrt{2x} = \dfrac{3(x+y)}{x+y+z}$ và $\sqrt{3y} = \dfrac{3(x+y)}{x+y-z}$. Suy ra $\sqrt{2x}, \sqrt{3y} \in \mathbb{Q}$. Đặt $\sqrt{2x} = \dfrac{m}{n}, \sqrt{3y} = \dfrac{p}{q}$ với $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $(m,n) = 1, (p,q) = 1$. Khi đó $\dfrac{m(3q^2m^2 + 2p^2n^2 + 6zn^2q^2)}{n(3q^2m^2 + 2p^2n^2)} = 3$. Do đó $m(3q^2m^2 + 2p^2n^2 + 6zn^2q^2) \vdots n$. Mặt khác $(m,n) = 1$, ta suy ra $3q^2m^2 + 2p^2n^2 + 6zn^2q^2 \vdots n$. Do đó $3q^2m^2 \vdots n \to n(3q^2m^2 + 2p^2n^2) \vdots n^2$. Suy ra $m(3q^2m^2 + 2p^2n^2 + 6zn^2q^2) \vdots n^2$. Vậy $3q^2m^2 + 2p^2n^2 + 6zn^2q^2 \vdots n^2$ và $3q^2 \vdots n^2$. Suy ra $q \vdots n$. Tương tự, $n \vdots q$. Do đó $n = q$.	0,5
	Khi đó $\dfrac{m(3m^2 + 2p^2 + 6zn^2)}{n(3m^2 + 2p^2)} = 3$. Ta có: $3m^2 + 2p^2 + 6zn^2 \vdots n \to 3m^2 + 2p^2 \vdots n \to n(3m^2 + 2p^2) \vdots n^2$. Do đó $3m^2 + 2p^2 + 6zn^2 \vdots n^2$. Vậy $3m^2 + 2p^2 \vdots n^2$. Ta thấy n là lẻ vì nếu n chẵn thì $3m^2$ là số chẵn, kéo theo m là số chẵn, mâu thuẫn với $(m,n) = 1$. Đặt $3m^2 + 2p^2 = k \cdot n^2, 6z = t$ với $k \geq 1$. Khi đó $\dfrac{m(k+t)}{nk} = \dfrac{p(k-t)}{nk} = 3$. Suy ra $k + t \vdots n$ và $k - t \vdots n$. Do đó $2k, 2t \vdots n$. Vì n lẻ nên $k, t \vdots n$. Đặt $k = k_1 \cdot n, t = t_1 \cdot n$ $(k_1, t_1 \in \mathbb{N}^*)$. Tương tự, $k_1, t_1 \vdots n$. Suy ra $k, t \vdots n^s$ với mọi $s \in \mathbb{N}$. Vì $k \neq 0$ nên $n = 1$. Khi đó $mk + mt = pk - pt = 3k$.	0,5
	Với $t = 0$ thì $z = 0$. Suy ra $\sqrt{2x} = \sqrt{3y} = 3$. Do đó $x = \dfrac{9}{2}, y = 3$. Thử lại thấy thỏa mãn. Với $t > 0$ thì $mk < 3k \to m < 3$. Vậy $m = 1$ hoặc $m = 2$. Nếu $m = 1$ thì $t = 2k$, kéo theo $-pk = 3k$ (vô lý). Nếu $m = 2$ thì $t = \dfrac{k}{2}$, kéo theo $p = 6$. Khi đó $x = 2, y = 12, z = 7$. Thử lại thấy thỏa mãn. Với $t < 0$ thì $pk < 3k \to p < 3$. Vậy $p = 1$ hoặc $p = 2$. Nếu $p = 1$ thì $t = -2k$. Khi đó $-mk = 3k$ (vô lý). Nếu $p = 2$ thì $t = \dfrac{-k}{2}$, $m = 6$. Khi đó $x = 18, y = \dfrac{4}{3}, z = \dfrac{-29}{3}$ (loại vì $z \in \mathbb{Z}$). Vậy bộ (x,y,z) thỏa mãn là $\left(\dfrac{9}{2}, 3, 0\right); (2, 12, 7)$.	0,5

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>5a (1,5 điểm)</td><td>


a/ Gọi L là giao điểm của AD và EF, K là giao điểm thứ hai (khác A) của AD và (O).
Vì EF là trung trực của đoạn thẳng AD nên $LD \perp EF$ và $LA = LD$.
Ta có: $LE \cdot LF = LA \cdot LK = LD \cdot LK$. Suy ra $\dfrac{LE}{LD} = \dfrac{LK}{LF}$.
Do đó $\triangle ELD \sim \triangle KLF$ (c.g.c).
Suy ra $\angle LED + \angle LFK = \angle LKF + \angle LFK = 90^\circ$.
Vậy $DE \perp KF$. Suy ra K là trực tâm của $\triangle DEF$.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>5b (1,5 điểm)</td><td>b/ Gọi S là giao điểm của EF và BC.
Ta có: $\angle SAD = \angle SDA = \angle DAC + \angle ACD = \angle BCK + \angle ACB = \angle ACK$.
Suy ra SA là tiếp tuyến của (O). Do đó $SE \cdot SF = SA^2$.(1)
Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAM với đường cao AH, ta có: $SA^2 = SH \cdot SM$. (2)
Từ (1) và (2) ta có: $SH \cdot SM = SE \cdot SF$. Suy ra bốn điểm H, M, E, F cùng thuộc một đường tròn.</td><td>1,5</td></tr>
</table>

——————Hết——————