

NEW

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

KHỐI ĐA DIỆN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT



ÔN THI THPT QUỐC GIA NĂM 2017

MỤC LỤC

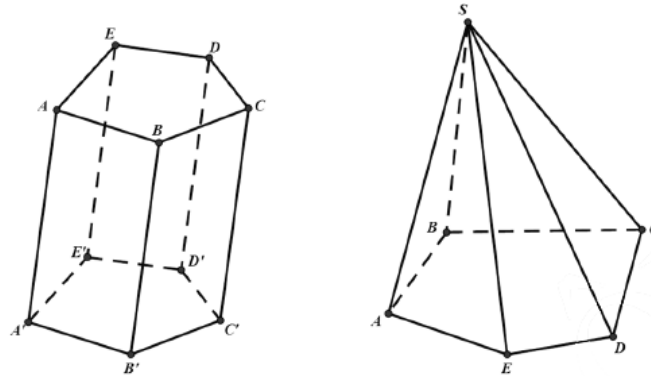
HÌNH ĐA DIỆN.....	3
A – KIẾN THỨC CHUNG	3
I. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN	3
II. HAI HÌNH BẰNG NHAU	4
III. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP KHỐI ĐA DIỆN.....	5
IV. KHỐI ĐA DIỆN LỖI	5
V. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU	6
B – BÀI TẬP	8
THỂ TÍCH HÌNH CHÓP	29
A - LÝ THUYẾT TÓM TẮT.....	29
B – BÀI TẬP	30
HÌNH CHÓP ĐỀU	30
HÌNH CHÓP CÓ MỘT CẠNH VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY.....	37
HÌNH CHÓP CÓ MẶT VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY	45
HÌNH CHÓP KHÁC	53
TỈ SỐ THỂ TÍCH.....	67
A - LÝ THUYẾT TÓM TẮT.....	67
B - BÀI TẬP	67
HÌNH LĂNG TRỤ.....	79
A - LÝ THUYẾT TÓM TẮT.....	80
B – BÀI TẬP	80
THỂ TÍCH LĂNG TRỤ ĐỨNG.....	80
THỂ TÍCH LĂNG TRỤ XIÊN	94
KHOẢNG CÁCH.....	102
A- LÝ THUYẾT TÓM TẮT.....	102
B – BÀI TẬP	103
I – KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG	103
II - KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẪNG	117
GÓC	127
A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT	127
B – BÀI TẬP.....	127

HÌNH ĐA DIỆN

A – KIẾN THỨC CHUNG

I. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện



Quan sát hình lăng trụ, hình chóp ở trên ta thấy chúng đều là những hình không gian được tạo bởi một số hữu hạn đa giác. Các đa giác ấy có tính chất

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không giao nhau, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

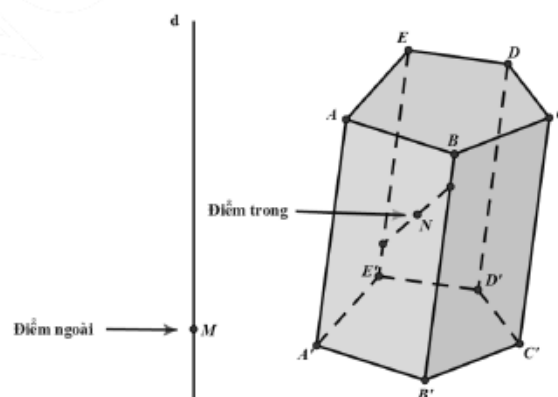
b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác. Mỗi đa giác như thế được gọi là một mặt của hình đa diện (H). Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện (H).

Người ta gọi các hình đó là hình đa diện.

Nói một cách tổng quát: Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) (H) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất trên. Mỗi đa giác như thế được gọi là các mặt của đa diện. Các đỉnh các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của đa diện.

2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện (H), kể cả hình đa diện đó.



Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là *điểm ngoài* của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện giới hạn khối đa diện ấy được gọi là *điểm trong* của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là *miền trong*, tập hợp các điểm ngoài được gọi là *miền ngoài* khối đa diện.

Mỗi đa diện (H) chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau: miền trong và miền ngoài của (H). Trong đó chỉ có duy nhất miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường –thẳng d nào đấy.

Khối đa diện (H) là hợp của hình đa diện (H) và miền trong của nó.

II. HAI HÌNH BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian và sự bằng nhau giữa các khối đa diện.

- Trong không gian quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.
- Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

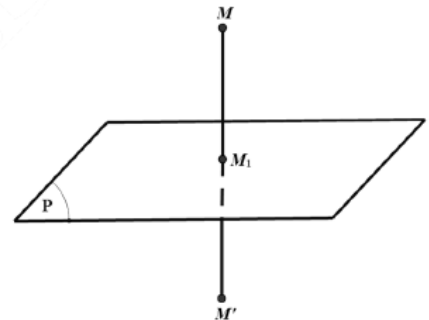
Nhận xét:

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến một đa diện thành (H) một đa diện (H'), biến các đỉnh, cạnh, mặt của đa diện (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của đa diện (H').

a) Phép dời hình tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ là phép biến hình biến điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

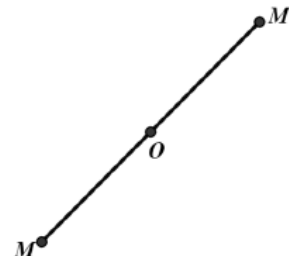
b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mọi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng chung trục của MM' .

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H).



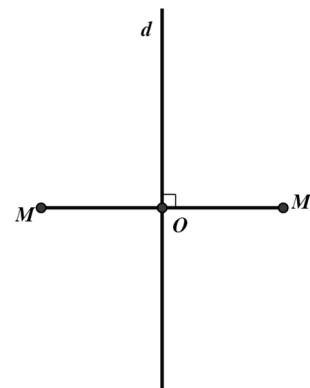
c) Phép đối xứng tâm O là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM' .

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H).



d) Phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến hình mọi điểm thuộc d thành chính nó, biến điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là trung trực của MM' . Phép đối xứng qua đường thẳng d còn được gọi là **phép đối xứng qua trục d**.

Nếu phép đối xứng qua đường thẳng d biến hình (H) thành chính nó thì d được gọi là **trục đối xứng** của (H).



2. Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Nhận xét

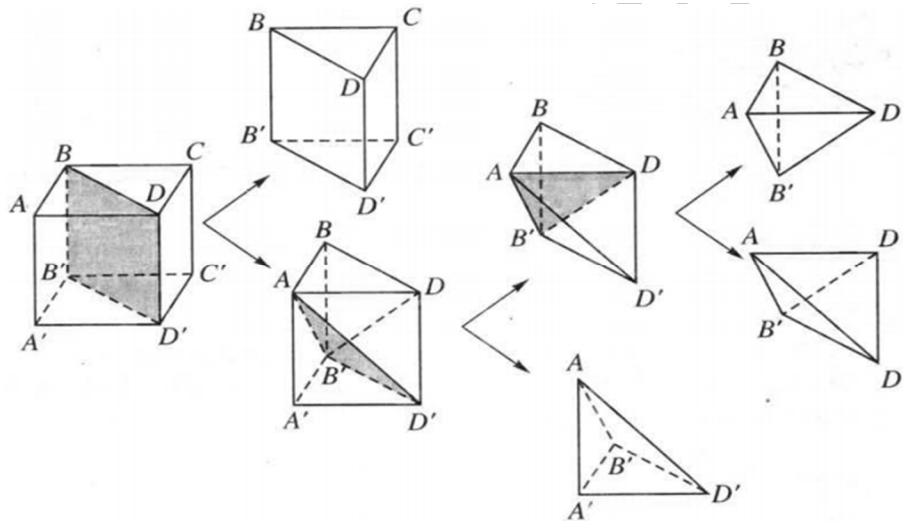
- Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình đa diện này thành hình đa diện kia.
- Hai tứ diện có các cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

III. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện $(H_1), (H_2)$, sao cho (H_1) và (H_2) không có điểm trong chung thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) , hay có thể lắp ghép được hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H).

Ví dụ. Xét khối lập phương ABCD.A'B'C'D'. Mặt phẳng BDD'B' cắt khối lập phương đó theo một thiết diện là hình chữ nhật BDD'B'. Thiết diện này chia các điểm còn lại của khối lập phương ra làm hai phần. Mỗi phần cùng với hình chữ nhật BDD'B' tạo thành khối lăng trụ, như vậy có hai khối lăng trụ: ABD.A'B'D' và BCD.B'C'D'. Khi đó ta nói mặt phẳng (P) chia khối lập phương ABCD.A'B'C'D' thành hai khối lăng trụ ABD.A'B'D' và BCD.B'C'D'.

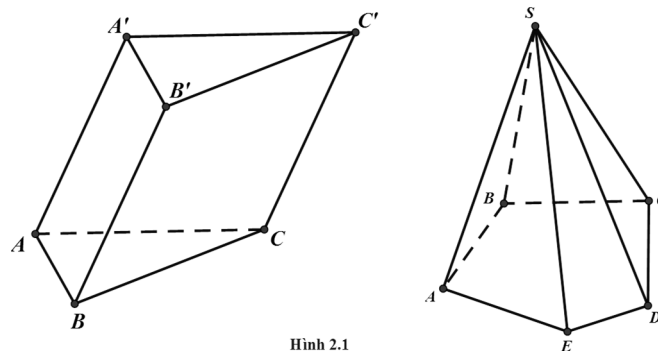
Tương tự trên ta có thể chia tiếp khối trụ ABD.A'B'D' thành ba khối tứ diện: ADBB', ADB'D' và AA'B'D'.



Nhận xét: Một khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia được thành các khối tứ diện.

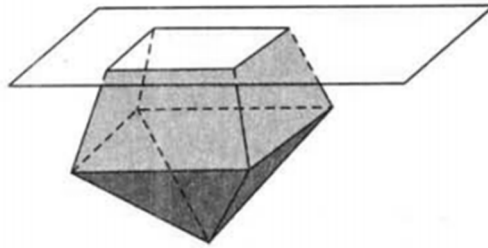
IV. KHỐI ĐA DIỆN LỖI

Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó đa diện giới hạn (H) được gọi là *đa diện lồi* (Hình 2.1).



Hình 2.1

Lưu ý: Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó. (Hình 2.2)

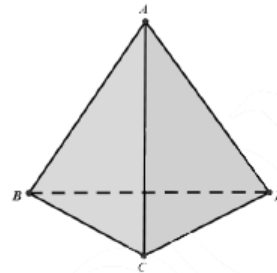


Hình 2.2

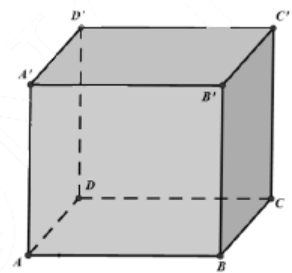
Công thức OLE: Trong một đa diện lồi nếu gọi D là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt $D-C+M=2$

V. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Quan sát khối tứ diện đều (Hình 2.2.1), ta thấy các mặt của nó là những tam giác đều, mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng ba mặt. Đối với khối lập phương (Hình 2.2.2), ta thấy các mặt của nó là những



Hình 2.2.1



Hình 2.2.2

hình vuông, mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung đúng ba mặt. Những khối đa diện nói trên được gọi là khối đa diện đều

Định nghĩa: *Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có các tính chất sau:*

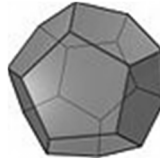
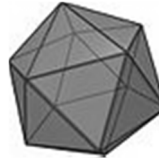
- Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
- Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p; q\}$.

Nhận xét: Các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều và bằng nhau.

Định lí: Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là các khối đa diện đều loại $\{3,3\}$, loại $\{4,3\}$, loại $\{3,4\}$, loại $\{5,3\}$, và loại $\{3,5\}$.

Tùy theo số mặt của chúng, năm loại khối đa diện đều kể trên theo thứ tự được gọi là khối đa diện đều, khối lập phương, khối tám mặt đều, khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều.

Năm khối đa diện đều				
Tứ diện đều	Khối lập phương	Khối tám mặt đều	Khối mười hai mặt đều	Khối hai mươi mặt đều
				

Nhận xét:

- Hai khối đa diện đều có cùng số mặt và có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.
- Hai khối đa diện đều có cùng số mặt thì đồng dạng với nhau.

Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Khối đa diện đều	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Ký hiệu $\{p, q\}$
------------------	---------	---------	--------	--------------------

Kí diện đều		4	6	4	{3, 3}
Khối Lập Phương		8	12	6	{4, 3}
Khối Tám Mặt Đều		6	12	8	{3, 4}
Khối Mười Hai Mặt Đều		20	30	12	{5, 3}
Khối Hai Mươi Mặt Đều		12	30	20	{3, 5}

B – BÀI TẬP**Câu 1:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Chỉ có năm loại hình đa diện đều.
 B. Hình hộp chữ nhật có diện tích các mặt bằng nhau là hình đa diện đều.
 C. Trọng tâm các mặt của hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.
 D. Hình chóp tam giác đều là hình đa diện đều.

Hướng dẫn giải:

+ Trong không gian ba chiều, có đúng 5 khối đa diện đều lồi, chúng là các khối đa diện duy nhất (xem chứng minh trong bài) có tất cả các mặt, các cạnh và các góc ở đỉnh bằng nhau.

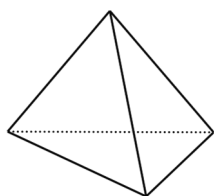
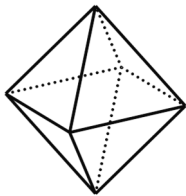
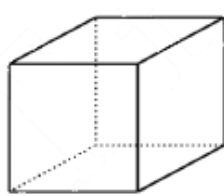
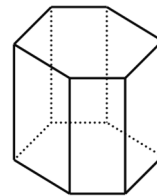
Tứ diện đều	Khối lập phương	Khối bát diện đều	Khối mười hai mặt đều	Khối hai mươi mặt đều
-------------	-----------------	-------------------	-----------------------	-----------------------

=> A đúng

+ Hình chóp tam giác đều là hình tứ diện đều → D đúng

+ Hình hộp chữ nhật có diện tích các mặt bằng nhau là khối lập phương → B đúng

+ Trọng tâm các mặt của hình tứ diện đều không thể là các đỉnh của một hình tứ diện đều → C sai.

Chọn đáp án C.**Câu 2:** Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?**A.** Tứ diện đều**B.** Bát diện đều**C.** Hình lập phương**D.** Lăng trụ lục giác đều**Chọn đáp án A.****Câu 3:** Khái niệm nào sau đây đúng với khối chóp?

- A. là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.
 B. là phần không gian được giới hạn bởi hình chóp và cả hình chóp đó.
 C. là phần không gian được giới hạn bởi hình chóp.
 D. là khối đa diện có hình dạng là hình chóp.

Hướng dẫn giải:

Nhiều độc giả có thể nhầm giữa khái niệm hình chóp và khối chóp. Nên khoan ý **A**. Tuy nhiên các bạn nên phân biệt rõ ràng giữa hình chóp và khối chóp nói chung, hay hình đa diện và khối đa diện nói riêng.

+ **Hình đa diện** là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- a, Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.
 b, Mỗi cạnh của đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

+ **Khối đa diện** là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó. Vậy khi đọc vào từng đáp án ở đây thì ta thấy ý A chính là khái niệm của hình chóp. Ý B là khái niệm của khối chóp. Ý C là mệnh đề bị thiếu, ý D sai.

Chọn đáp án B.**Câu 4:** Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất

- A.** Năm cạnh **B.** Bốn cạnh **C.** Ba cạnh **D.** Hai cạnh

Hướng dẫn giải:

Đúng theo lý thuyết SGK. Các em có thể xem thêm các dạng toán về khối đa diện đều trong sách hình học lớp 12 (các bài tập 1,2,3,4 trang 25 bài 5,6 trang 26).

Chọn đáp án C.

Câu 5: Hãy chọn cụm từ (hoặc từ) cho dưới đây để sau khi điền nó vào chỗ trống mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng:

“Số cạnh của một hình đa diện luôn.....số đỉnh của hình đa diện ấy”

- A. nhỏ hơn B. nhỏ hơn hoặc bằng C. lớn hơn D. bằng

Chọn đáp án C.

Câu 6: Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

- A. Tồn tại một đa diện đều có 2 mặt là 2 đa giác không bằng nhau.
 B. Nếu hình chóp tứ giác S.ABCD là hình chóp đều thì nó cũng là đa diện đều.
 C. Nếu một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của đúng 3 mặt thì tổng số đỉnh của nó phải là số chẵn.
 D. Nếu lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều thì nó cũng là đa diện đều.

Hướng dẫn giải:

Đa diện đều có tất cả các mặt là các đa giác bằng nhau

Không tồn tại đa diện đều có 5 và 6 đỉnh, do đó chóp S.ABCD và lăng trụ $ABC.A'B'C'$ không thể là đa diện đều.

Nếu mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng 3 mặt thì nó cũng là đỉnh chung của đúng 3 cạnh. Giả sử số đỉnh của đa diện là n thì số cạnh của nó phải là $\frac{3n}{2}$ (vì mỗi cạnh được tính 2 lần), do đó n chẵn.

Chọn đáp án C.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Nhận định nào sau đây không đúng :

- A. Hình chóp S.ABCD có các cạnh bên bằng nhau
 B. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy là tâm của đáy.
 C. ABCD là hình thoi
 D. Hình chóp có các cạnh bên hợp với mặt phẳng đáy một góc.

Hướng dẫn giải:

Nhắc lại kiến thức: Hình chóp đa giác đều: là hình chóp có đáy là đa giác đều và hình chiếu của đỉnh xuống đáy trùng với tâm của đáy. Như vậy hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD và hình chiếu của S xuống đáy là tâm hình vuông ABCD.

Chọn đáp án C.

Câu 8: Trong không gian cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Với M là điểm bất kỳ, ta gọi M_1 là ảnh của M qua phép $T_{\vec{u}}$ và M_2 là ảnh của M_1 qua phép $T_{\vec{v}}$. Khi đó phép biến hình biến điểm M thành điểm M_2 là:

- A. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} + \vec{v}$ B. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$
 C. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ D. Một phép biến hình khác

Hướng dẫn giải:

Theo định nghĩa phép tịnh tiến vector

$$\left. \begin{array}{l} T_{\vec{u}}(M) = M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = \vec{u} \\ T_{\vec{v}}(M_1) = M_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_2} = \vec{u} + \vec{v}$$

Như vậy, phép biến hình biến điểm M thành điểm M_2 là phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} + \vec{v}$.

Chọn đáp án A.

Câu 9: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành chính nó?

- A. Không có B. 1 C. 2 D. Vô số

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Câu 10: Trong không gian cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng b ?

- A. Không có B. 1 C. 2 D. Vô số

Chọn đáp án D.

Câu 11: Trong không gian cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A. Không có phép tịnh tiến nào biến (P) thành (Q)
 B. Có duy nhất một phép tịnh tiến biến (P) thành (Q)
 C. Có đúng hai phép tịnh tiến biến (P) thành (Q)
 D. Có vô số phép tịnh tiến biến (P) thành (Q)

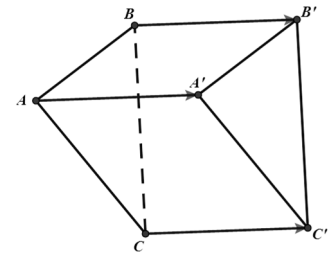
Chọn đáp án D.

Câu 12 : Trong không gian cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau ($AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $BC = B'C'$). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A. Không thể thực hiện một phép tịnh tiến nào biến tam giác này thành tam giác kia
 B. Tồn tại duy nhất một phép tịnh tiến nào biến tam giác này thành tam giác kia
 C. Có nhiều nhất hai phép tịnh tiến nào biến tam giác này thành tam giác kia
 D. Có thể thực hiện vô số phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia.

Hướng dẫn giải:

Trước hết ta nhận thấy rằng, muốn thực hiện được một phép tịnh tiến biến $\triangle ABC$ thành $\triangle A'B'C'$ thì phải có điều kiện, hai tam giác ABC và $A'B'C'$ phải nằm trên hai mặt phẳng song song (hoặc trùng nhau) và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.



Khi đó phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = \overrightarrow{A'A}$ biến $\triangle A'B'C'$ thành $\triangle ABC$ và phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = \overrightarrow{A'A}$ biến $\triangle A'B'C'$ thành $\triangle ABC$. Như vậy chỉ có hai phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC .

Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ biến tam giác $A'IJ$ thành tam giác

- A. $C'D$ B. $CD'P$ với P là trung điểm của $B'C'$
 C. KDC với K là trung điểm của $A'D'$ D. $DC'D'$

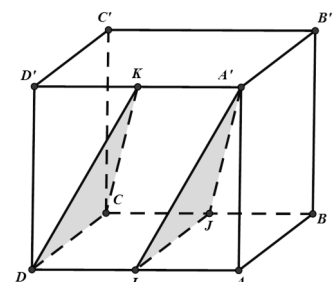
Hướng dẫn giải:

Gọi T là phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Ta có

$$T(I) = D, T(J) = C, T(A') = K$$

$$\text{Vậy } T(\triangle A'IJ) = \triangle KDC.$$

Chọn đáp án C.



Câu 14: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Với M là một điểm bất kỳ, ta gọi M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng $\mathcal{D}_\alpha$ và M_2 là ảnh của M_1 qua phép đối xứng $\mathcal{D}_\beta$. Phép biến hình $f = \mathcal{D}_\alpha \circ \mathcal{D}_\beta$. Biến điểm M thành M_2 là

A. Một phép biến hình khác

B. Phép đồng nhất

C. Phép tịnh tiến

D. Phép đối xứng qua mặt phẳng

Hướng dẫn giải:

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của

MM_1, M_1M_2 ($I \in (\alpha), J \in (\beta)$)

Ta có:

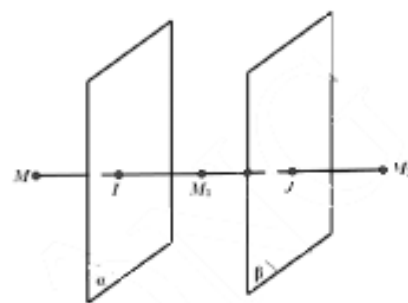
$$\mathcal{D}_\alpha(M) = M_1 \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{IM_1}$$

$$\mathcal{D}_\beta(M_1) = M_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1J}$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{MM_2} = 2(\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J}) = 2\overrightarrow{IJ} = \vec{u} \text{ (Không đổi)}$$

Vậy M_2 là ảnh của M qua phép tịnh tiến $\vec{u}$.



Chọn đáp án D.

Câu 15: Trong không gian một tam giác đều có mấy mặt phẳng đối xứng?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải:

Trong không gian, với tam giác đều bất kì ABC có bốn mặt phẳng đối xứng. Đó là: Ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh và mặt phẳng chứa $\triangle ABC$.

Chọn đáp án D.

Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước là a, b, c ($a < b < c$). Hình hộp chữ nhật này có mấy mặt đối xứng

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải:

Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có 3 mặt đối xứng, đó là các mặt phẳng trung trực AB, AD, AA' .

Chọn đáp án C.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với $(ABCD)$. Hình chóp này có mặt đối xứng nào?

A. Không có

B. (SAB)

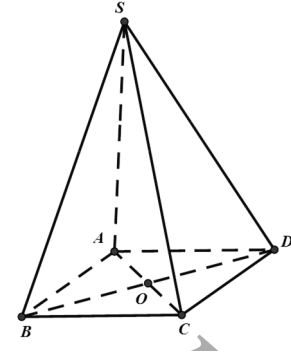
C. (SAC)

D. (SAD)

Hướng dẫn giải:

Ta có: $BD \perp (SAC)$ và O là trung điểm của BD. Suy ra (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD. Suy ra (SAC) là mặt đối xứng của hình chóp, và đây là mặt phẳng duy nhất.

Chọn đáp án C.



Câu 18: Trong không gian cho hai điểm I và J phân biệt. Với mỗi điểm M ta gọi M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_I , M_2 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_J . Khi đó hợp thành của D_I và D_J biến điểm M thành điểm M_2 là

A. Phép đối xứng qua mặt phẳng

B. Phép tịnh tiến

C. Phép đối xứng tâm

D. Phép đồng nhất

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$D_I(M) = M_1 \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{IM_1}$$

$$D_J(M_1) = M_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1J}$$

Do đó:

$$\overrightarrow{MM_2} = 2(\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J}) = 2\overrightarrow{IJ} \text{ (không đổi)}$$

Vậy M_2 là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Chọn đáp án B.

Câu 19: Trong các hình dưới đây, hình nào không có tâm đối xứng

A. Hình hộp

B. Hình lăng trụ tứ giác đều

C. Hình lập phương

D. Tứ diện đều

Hướng dẫn giải:

- Hình hộp có một tâm đối xứng là giao điểm của bốn đường chéo
- Hình lăng trụ tứ giác đều, hình lập phương là các hình hộp đặc biệt nên có một tâm đối xứng
- Tứ diện đều không có tâm đối xứng.

Thật vậy, giả sử tứ diện đều ABCD có tâm đối xứng O.

Nhận thấy các đỉnh A, B, C, D không thể là tâm đối xứng của tứ diện ABCD, nên ảnh của A qua đối xứng tâm O là một trong ba đỉnh còn lại, nếu $D_O(A) = B$ thì O là trung điểm của AB, nhưng trung điểm của AB cũng không thể là tâm đối xứng của ABCD.

Câu 20: Hình chóp tứ giác đều có mấy mặt phẳng đối xứng

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

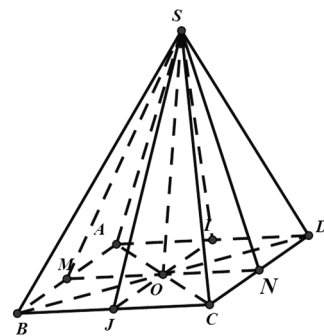
Hướng dẫn giải:

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng đó là:

$(SAC), (SBD), (SMN), (SIJ)$, với M, N, I, J lần lượt là trung điểm của

AB, CD, DA, BC

Chọn đáp án D.



Câu 21: Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' tâm O (tâm đối xứng). Ảnh của đoạn thẳng A'B qua phép đối xứng tâm D_O là đoạn thẳng

A. DC'

B. CD'

C. DB'

D. AC'

Hướng dẫn giải:

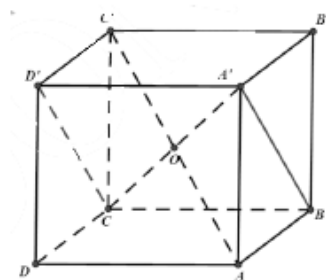
Ta có

$$D_O(A') = C; D_O(B) = D'$$

Do đó

$$D_O(A'B) = CD'$$

Chọn đáp án B.



Câu 22: Trong không gian cho hai đường thẳng song song a và b. Với mỗi điểm M ta gọi M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_a , M_2 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_b . Khi đó hợp thành của $D_a \circ D_b$ biến điểm M thành điểm M_2 là

A. Phép đối xứng trục

B. Phép đối xứng qua mặt phẳng

C. Phép đối xứng tâm

D. Phép tịnh tiến

Hướng dẫn giải:

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MM_1, M_1M_2

Các điểm M, M_1, M_2, I, J cùng nằm trên một mặt phẳng (P)

vuông góc với a và b tại I và J.

Ta có:

$$D_I(M) = M_1 \Rightarrow \overline{MM_1} = 2\overline{IM_1}$$

$$D_J(M_1) = M_2 \Rightarrow \overline{M_1M_2} = 2\overline{M_1J}$$

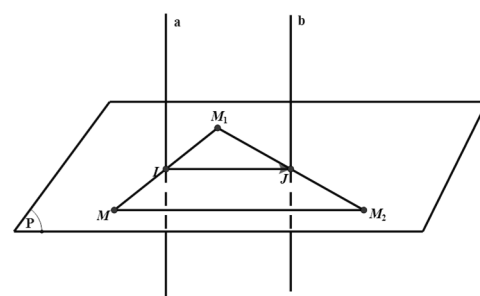
$$\text{Suy ra: } \overline{MM_2} = 2(\overline{IM_1} + \overline{M_1J}) = 2\overline{IJ} = \vec{u} \text{ (không đổi)}$$

Chọn đáp án D.

Câu 23: Trong không gian cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Với mỗi điểm M ta gọi M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_α , M_2 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_β . Khi đó hợp thành của $D_\alpha \circ D_\beta$ biến điểm M thành điểm M_2 là

A. Phép tịnh tiến

B. Phép đối xứng qua mặt phẳng



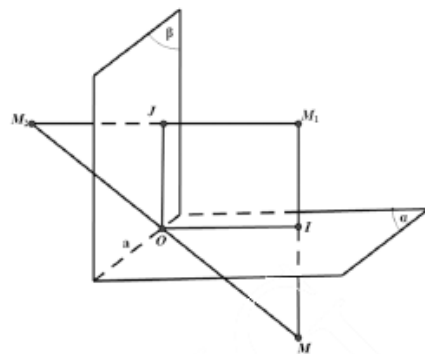
C. Phép đối xứng tâm

D. Phép đối xứng trục

Hướng dẫn giải:

Gọi I, J, O lần lượt là trung điểm của MM_1, M_1M_2, MM_2 (với $MM_1 \perp (\alpha)$ và $I \in (\alpha), M_1M_2 \perp (\beta)$ và $J \in (\beta)$)

Ta có: $IO \parallel M_1M_2$ nên $IO \perp (\beta)$, do đó nếu gọi a là giao tuyến của (α) và (β) thì $IO \perp a$ và $O \in a$. Suy ra hai điểm M và M_2 đối xứng nhau qua đường thẳng a.



Vậy hợp thành của $D_\alpha \circ D_\beta$ biến điểm M thành điểm M_2 là phép đối xứng qua đường thẳng a.

Chọn đáp án D.**Câu 24:** Tứ diện đều có mấy trục đối xứng

A. Không có

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải:

Tứ diện đều có ba trục đối xứng đó là ba đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối của nó.

Chọn đáp án D.**Câu 25:** Hình chóp tứ giác đều có mấy trục đối xứng?

A. Không có

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải:

Hình chóp tứ giác đều có 1 trục đối xứng đó là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy.

Chọn đáp án B.**Câu 26:** Hình vuông có mấy trục đối xứng?

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Hướng dẫn giải:

Trong không gian, hình vuông có 5 trục đối xứng, đó là:

- Hai đường thẳng chứa hai đường chéo AC, BD
- Đường thẳng đi qua trung điểm của AB, CD và đường thẳng đi qua trung điểm của AD và BC
- Trục ngoại tiếp đường tròn ngoại tiếp hình vuông

Chọn đáp án D.**Câu 27:** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Nếu hình H có trục đối xứng thì nó có ít nhất một tâm đối xứng.

B. Nếu hình H có mặt đối xứng thì nó có ít nhất một trục đối xứng.

C. Nếu hình H có mặt đối xứng và có trục đối xứng thì nó có ít nhất một tâm đối xứng.

D. Nếu hình H có mặt đối xứng và có tâm đối xứng nằm trên mặt đối xứng thì nó có ít nhất một tâm đối xứng.

Hướng dẫn giải:

- Hình chóp tứ giác đều có một trục đối xứng, nhưng không có tâm đối xứng. **Như vậy A sai**
- Hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ có mặt phẳng đối xứng là (SAC) , nhưng hình chóp này không có trục đối xứng. **Như vậy B sai**
- Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt đối xứng và có một trục đối xứng, nhưng không có tâm đối xứng. **Như vậy C sai**

Chọn đáp án D.

Câu 28: Cho một bát diện đều. Các khẳng định đúng là:

1. Bát diện đều có đúng 12 cạnh
2. Bát diện đều có đúng 8 đỉnh
3. Bát diện đều nếu có cạnh bằng a thì sẽ nội tiếp một mặt cầu có bán kính bằng $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
4. Ghép hai khối tứ diện đều ta được một khối bát giác đều

A. 1; 2

B. 3; 4

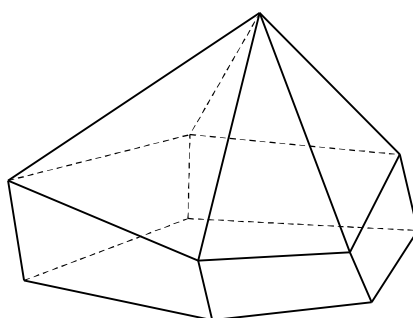
C. 1; 3

D. 1; 3; 4

Bát diện đều thì chỉ có 6 đỉnh. Ngoài ra ghép hai tứ diện đều thì không đem được kết quả gì.

Chọn đáp án C.

Câu 29: Hình đa diện trong hình vẽ có bao nhiêu mặt?



A. 6.

B. 10.

C. 12

D. 11.

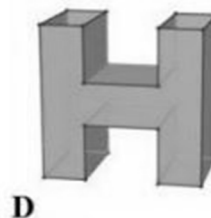
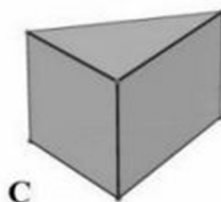
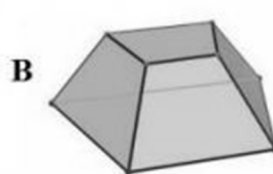
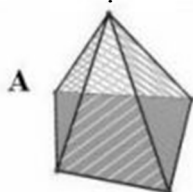
Hướng dẫn giải:

Đếm đáy hình chóp có 5 mặt và 5 mặt của lăng trụ và 1 mặt đáy. Vậy có 11 mặt.

Chọn đáp án D.

Câu 30: Cho bốn hình sau đây. Mệnh đề nào sau đây sai :

- A. Khối đa diện A không phải là khối đa diện đều.
- B. Cả 4 khối đa diện A, B, C, D đều là khối đa diện lồi.
- C. Khối đa diện C là khối đa diện lồi
- D. Khối đa diện B là khối đa diện lồi



Khối đa diện A có 5 đỉnh nên không thể là đa diện đều

Khối đa diện D không phải là khối đa diện lồi

Khối đa diện B, C là khối đa diện lồi

Chọn đáp án B.

Câu 31: Hình nào sau đây không phải là hình đa diện ?

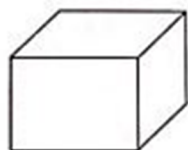
A.



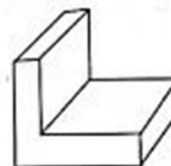
B.



C.



D.

**Hướng dẫn giải:**

Phân tích: Ta nhớ lại các kiến thức về hình đa diện như sau:

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Ta thấy hình A vi phạm tính chất thứ hai trong điều kiện để có một hình đa diện. Ta thấy cạnh ở giữa không phải là cạnh chung của đúng hai đa giác mà là cạnh chung của bốn đa giác.

Chọn đáp án A.

Câu 32: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai ?

- Lắp ghép hai khối hộp sẽ được một khối đa diện lồi
- Khối tứ diện là khối đa diện lồi
- Khối hộp là khối đa diện lồi
- Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi

Hướng dẫn giải:

Lắp ghép 2 khối hộp chưa chắc đã được 1 khối đa diện lồi

Chọn đáp án A.

Câu 33: Khối đa diện loại {3;4} là khối có :

- Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng 3 mặt
- Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng 4 mặt
- Số đỉnh là 4
- Số cạnh là 3

Chọn đáp án D.

Câu 34: Hình chóp tứ giác đều có số mặt phẳng đối xứng là:

- 1
- 2
- 3
- 4

Chọn đáp án B.

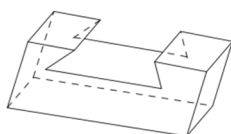
Câu 35: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

- Hình lập phương có nhiều nhất 8 mặt phẳng đối xứng
- Tồn tại một hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau
- Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh
- Hình bát diện đều chỉ có 8 cạnh bằng nhau

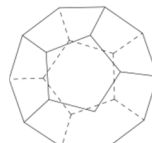
Chọn đáp án B.

Câu 36: Vật thể nào trong các vật thể sau **không** phải là khối đa diện.

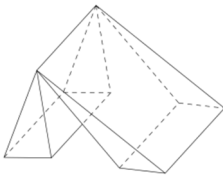
A.



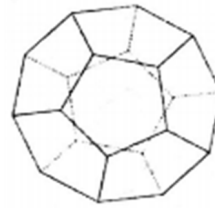
B.



C.



D.

**Chọn đáp án C.****Câu 37:** Số đỉnh của một hình bát diện đều là ?

A. Mười hai

B. Tám

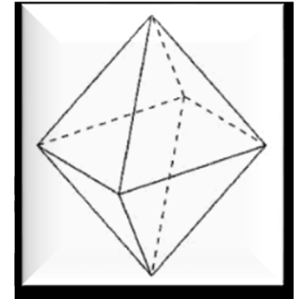
C. Mười

D. Sáu

Hướng dẫn giải:

+ Hình bát diện đều là hình có dạng như hình bên:

+ Nên số đỉnh của nó là sáu

Chọn đáp án D.**Câu 38:** Trong các hình dưới đây, hình nào là khối đa diện?

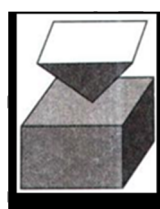
A.



B.



C.



D.

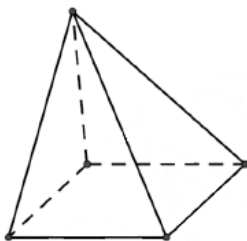
**Chọn đáp án A.****Câu 39:** Cho một hình đa diện. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh

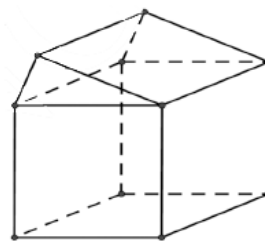
B. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt

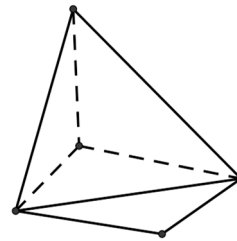
D. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh

Chọn đáp án C.**Câu 18:** Hình nào dưới đây **không** phải là hình đa diện?

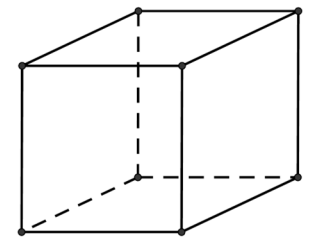
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 4.

B. Hình 3.

C. Hình 2.

D. Hình 1.

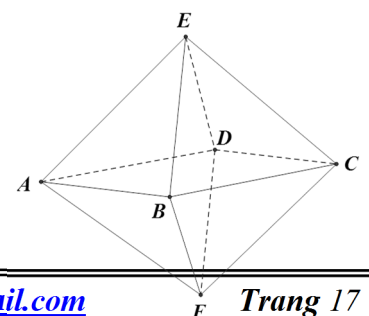
Chọn đáp án B.**Câu 40:** Trong hình bát diện đều số cạnh gấp mấy lần số đỉnh.A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{2}$

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải:

Hình bát diện đều có 12 cạnh và 6 đỉnh. Nên số cạnh gấp 2 lần số đỉnh

Chọn đáp án C.

Câu 41: Mỗi đỉnh của bát diện đều là đỉnh chung của bao nhiêu cạnh ?

- A. 3 B. 5 C. 8 D. 4

Hướng dẫn giải:

Ta có hình vẽ hình bát diện đều như sau:

Chọn đáp án D.

Câu 42: Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ có tên gọi là:

- A. Khối lập phương B. Khối bát diện đều
C. Khối mười hai mặt đều D. Khối hai mươi mặt đều.

Hướng dẫn giải:

Dễ nhận biết khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ là khối mười hai mặt đều.

Chọn đáp án C.

Câu 43: Trong các mệnh đề sau, hãy chọn mệnh đề đúng. Trong một khối đa diện thì:

- A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt. B. Hai cạnh bất kì có ít nhất một điểm chung.
C. Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung. D. Hai mặt bất kì có ít nhất một cạnh chung.

Hướng dẫn giải:

Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thì $AB \parallel A'B'$: câu B) sai
 $ABCD \parallel A'B'C'D'$: câu C) và D) sai. Vậy câu A) đúng.

Chọn đáp án A.

Câu 44: Nếu ba kích thước của một khối chữ nhật tăng lên 4 lần thì thể tích của nó tăng lên:

- A. 4 lần B. 16 lần C. 64 lần D. 192 lần

Hướng dẫn giải:

$$4^3 = 64 \text{ nên}$$

Chọn đáp án C.

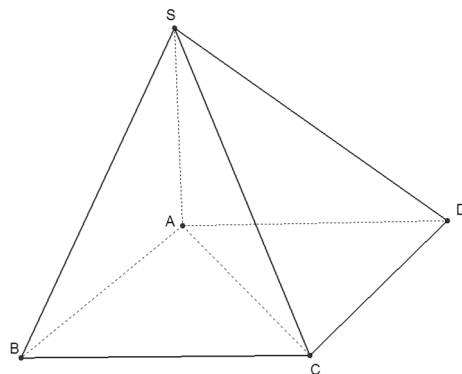
Câu 45: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (SAC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành mấy khối tứ diện.

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 6

Hướng dẫn giải:

Vậy ta có 2 các khối tứ diện là : $SABC$, $SACD$

Ta chọn đáp án C



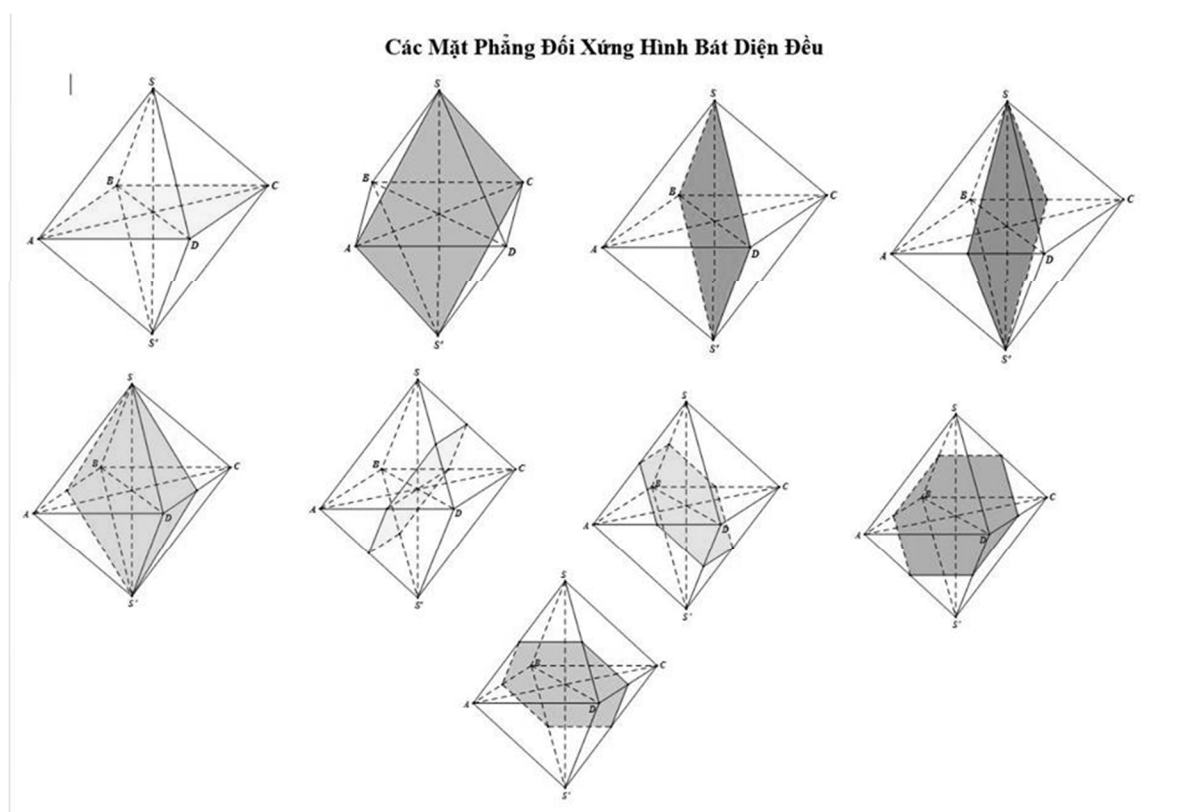
Câu 46: Hình bát diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 9

Hướng dẫn giải:

Hình bát diện đều có 9 mặt phẳng đối xứng:

Chọn đáp án D.



Quy luật tìm các mặt phẳng đối xứng: Do tính chất đối xứng nhau, nên cứ đi từ trung điểm các cạnh ra mà tìm. Đảm bảo rằng nếu chọn 1 mp đối xứng nào thì các điểm còn dư phải chia đều về 2 phía. Ví dụ chọn mặt phẳng ABCD làm mp đối xứng thì 2 điểm S và S' là 2 điểm dư còn lại phải đối xứng nhau qua ABCD. Nếu chọn SBS'D thì còn 2 điểm dư là A và C đối xứng nhau qua SBS'D,..

Câu 47: Có thể chia khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau mà mỗi tứ diện có bốn đỉnh thuộc tập các điểm $\{A, B, C, D, A', B', C', D'\}$?

A. Sáu

B. Vô số

C. Hai

D. Bốn

Hướng dẫn giải:

+ Chia khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành 2 khối lăng trụ bằng nhau $ABC.A'B'C'$ và $ADC.A'D'C'$

+ Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và nối các đường như hình vẽ sau đây
Hai khối tứ diện $ABCA', C'BCA'$ bằng nhau vì chúng đối xứng với nhau qua mặt phẳng (BCA')

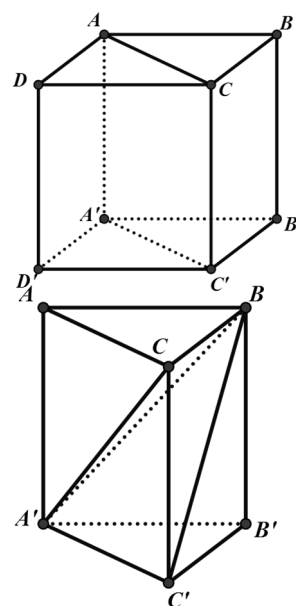
Hai khối tứ diện $C'BCA', C'BB'A'$ bằng nhau vì chúng đối xứng với nhau qua mặt phẳng $(A'BC')$

Như vậy khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành 3 khối tứ diện $ABCA', C'BCA', C'BB'A'$ bằng nhau.

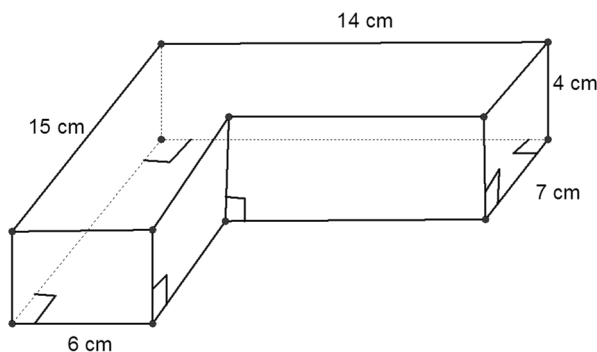
+ Làm tương tự như vậy với khối lăng trụ $ADC.A'D'C'$ ta cũng chia được 3 khối tứ diện bằng nhau.

+ Vậy, ta có thể chia khối lập phương thành 6 khối tứ diện bằng nhau.

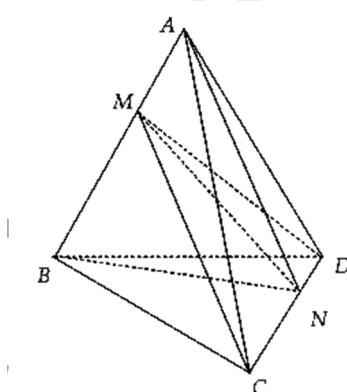
Chọn đáp án A.



Câu 48: Thể tích của khối đa diện tạo bởi hình sau là:

A. 328cm^3 B. 456cm^3 C. 584cm^3 D. 712cm^3 **Hướng dẫn giải:** V' là khối lớn có đáy $14\text{cm} \times 15\text{cm}$ V'' là khối nhỏ có đáy $8\text{cm} \times 8\text{cm}$ Thể tích khối cần tìm $V = V' - V'' = 584\text{ cm}^3$ **Chọn đáp án C.**

Câu 49: Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy một điểm M nằm giữa A và B , một điểm N nằm giữa C và D . Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB) ta chia khối tứ diện đã cho thành 4 khối tứ diện:

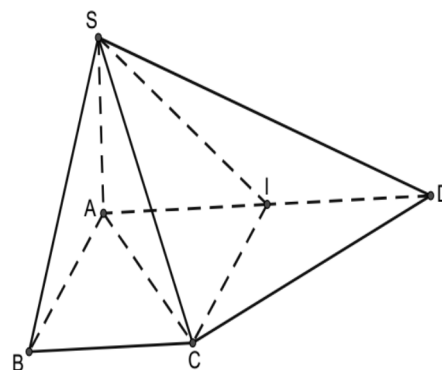
A. $AMCN$, $AMND$, $BMCN$, $BMND$ B. $AMCN$, $AMND$, $AMCD$, $BMCN$ C. $BMCD$, $BMND$, $AMCN$, $AMDN$ D. $AMCD$, $AMND$, $BMCN$, $BMND$ **Hướng dẫn giải:**

Ta có hình vẽ:

Nhìn vào hình vẽ ta thấy MN là giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (NAB) , khi đó ta thấy tứ diện đã cho được chia thành bốn tứ diện $ACMN$, $AMND$, $BMCN$, $BMND$.

Chọn đáp án D.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . $AB=BC=a$, $AD=2a$; $SA \perp (ABCD)$. Nhận định nào sau đây đúng

A. $\triangle SCD$ vuôngB. $\triangle SCD$ cânC. $\triangle SCD$ đềuD. $\triangle SCD$ vuông cân**Hướng dẫn giải:** $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ (1)Gọi I là trung điểm của AD . Tứ giác $ABCI$ là hình vuôngDo đó: $\widehat{ACI} = 45^\circ$ (*)Mặt khác, tam giác CID là tam giác vuông cân tại I $\Rightarrow \widehat{BCI} = 45^\circ$ (**) $\Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \triangle SCD$ vuông**Chọn đáp án A.**

Câu 51: Một hình hộp chữ nhật có đường chéo chính bằng 3 thì thể tích lớn nhất bằng:

A. $3\sqrt{3}$

B. 3

C. 9

D. 6

Hướng dẫn giải:

Gọi ba cạnh hình hộp chữ nhật là $a; b; c$. Khi đó: $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ và $V = abc$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có ngay: $V = abc = \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \leq \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3} = 3\sqrt{3}$

$$V = abc = \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \leq \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3} = 3\sqrt{3}$$

Vậy thể tích lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$ khi hình hộp là hình lập phương.

Chọn đáp án A.

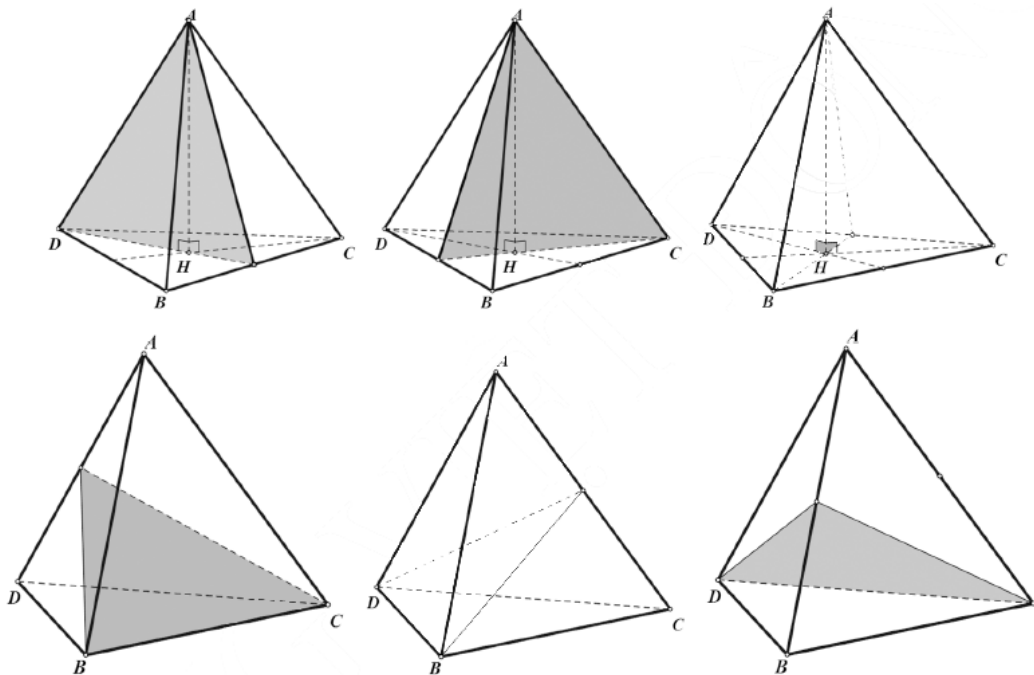
Câu 52: Số mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là:

A. 4.

B. 8.

C. 6.

D. 10.



Tứ diện đều có mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng tạo bởi một cạnh với trung điểm của cạnh đối diện của nó.

Chọn đáp án C.

Câu 53: Hình lập phương có mấy mặt phẳng đối xứng ?

A. 6

B. 7

C. 8

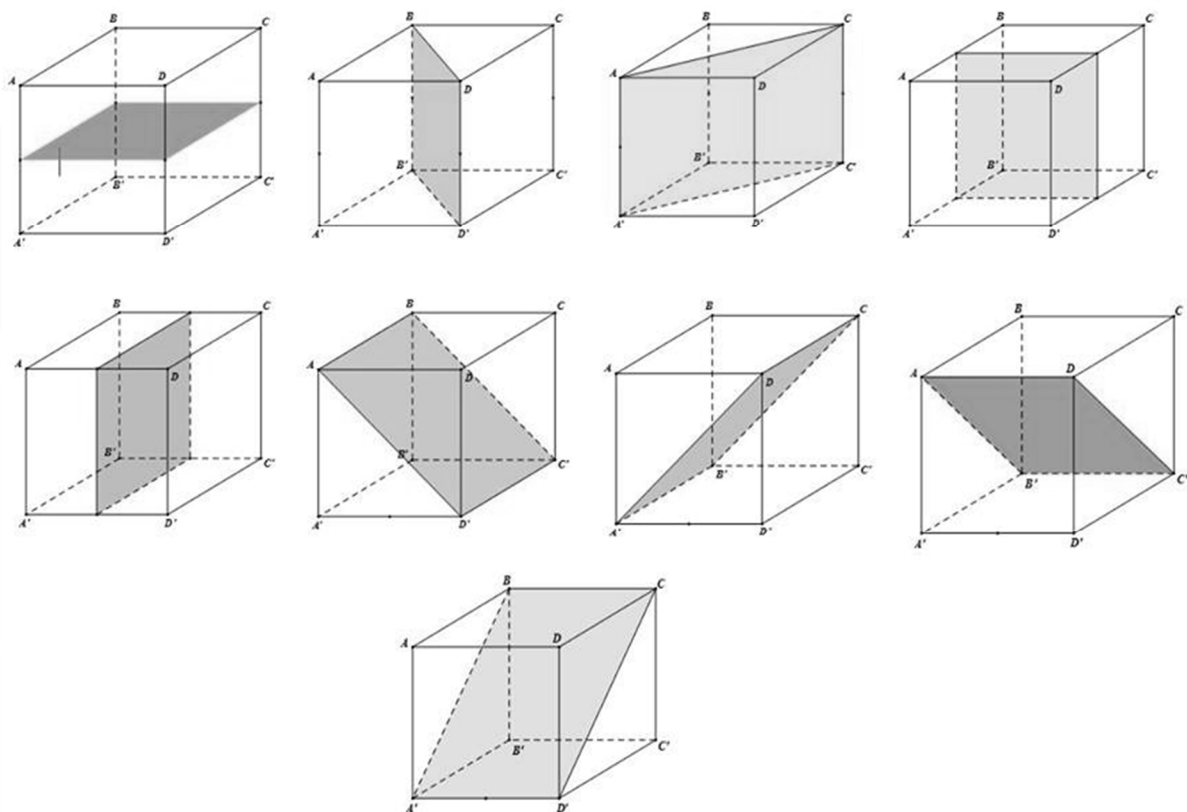
D. 9

Hướng dẫn giải:

Hình lập phương ABCD. A'B'C'D' có 9 mặt phẳng đối xứng đó là

- Ba mặt phẳng trung trực của các cạnh AB, AD, AA'
- Sáu mặt phẳng chứa 6 đường chéo của hình lập phương

Các Mặt Phẳng Đối Xứng Của Hình Lập Phương



Chọn đáp án D.

Câu 54: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Về phía ngoài khối chóp này ta ghép thêm một khối chóp tứ diện đều có cạnh bằng a , sao cho một mặt của khối tứ diện đều trùng với một mặt của khối chóp đã cho. Hỏi khối đa diện mới lập thành có mấy mặt?

A. 5

B. 6

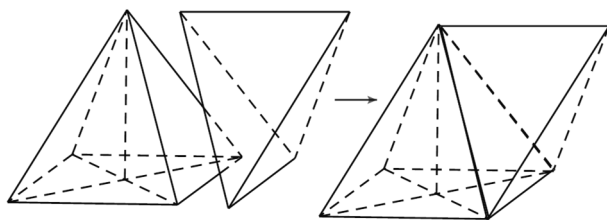
C. 7

D. 9

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Khối lăng trụ lập thành là một khối lăng trụ tam giác nên có 5 mặt



Câu 55: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Về phía ngoài khối lăng trụ này ta ghép thêm một khối lăng trụ tam giác đều bằng với khối lăng trụ đã cho, sao cho hai khối lăng trụ có chung một mặt bên. Hỏi khối đa diện mới lập thành có mấy cạnh?

A. 9

B. 12

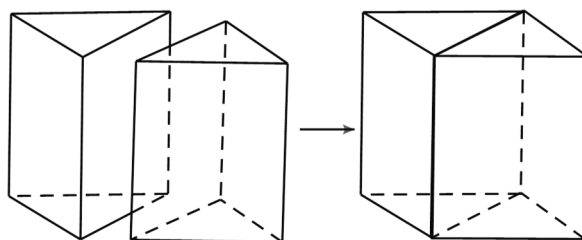
C. 15

D. 18

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Khối lăng trụ lập thành là một khối lăng trụ đứng tứ giác nên có 12 cạnh



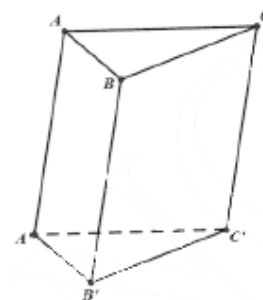
Câu 56: Trong các khối đa diện dưới đây, khối nào có số cạnh có thể là một số lẻ?

- A. Khối chóp; B. Khối tứ diện;
C. Khối hộp; D. Khối lăng trụ.

Hướng dẫn giải:

- Khối chóp n -giác có tổng số cạnh bằng $2n$
- Khối tứ diện có 6 cạnh
- Khối hộp có 12 cạnh
- Khối lăng trụ n -giác với n là một số lẻ thì số cạnh là $3n$, là một số lẻ.

Ví dụ: xét lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh là một số lẻ



Chọn đáp án D.

Câu 2. Trong các khối đa diện dưới đây, khối nào có số mặt luôn là số chẵn?

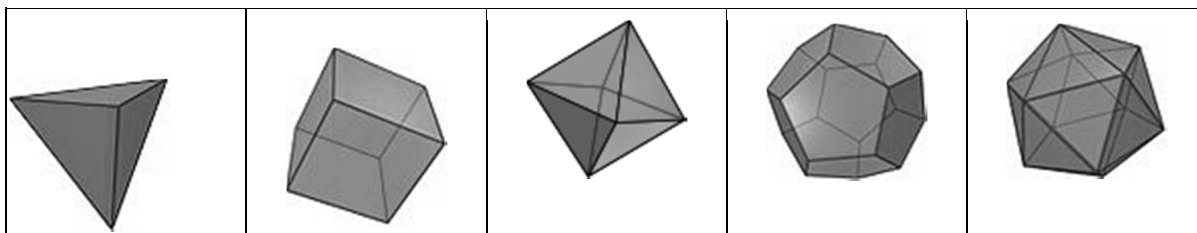
- A. Khối lăng trụ; B. Khối chóp;
C. Khối chóp cụt; D. Khối đa diện đều.

Hướng dẫn giải:

• Khối lăng trụ n-giác với n là số lẻ có số mặt bằng $n + 2$ là một số lẻ Ví dụ: Lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có số mặt là 5.	
• Khối chóp n-giác với n là số chẵn, thì số mặt của nó là $n + 1$ là một số lẻ Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác và số mặt là 5.	
• Khối chóp cụt: Tương tự như khối lăng trụ Ví dụ: Khối chóp cụt tam giác có số mặt là 5.	

- Trong không gian ba chiều, có đúng 5 khối đa diện đều, chúng là các khối đa diện duy nhất có tất cả các mặt, các cạnh và các góc ở đỉnh bằng nhau. Chúng được giới thiệu trong các hình dưới đây:

Năm khối đa diện đều				
Tứ diện đều	Khối lập phương	Khối tám mặt đều	Khối mười hai mặt đều	Khối hai mươi mặt đều



Tên của chúng gọi theo số mặt của mỗi khối tương ứng là 4, 6, 8, 12, và 20.

Các khối này đều có **số mặt là chẵn**.

Chọn đáp án D.

Câu 57: Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Khối tứ diện đều có 6 cạnh

B. Khối lập phương có 12 cạnh

C. Số cạnh của một khối chóp là chẵn

D. Khối 8 mặt đều có 8 cạnh

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Vì khối 8 mặt đều có tất cả 12 cạnh

Ta nhắc lại như sau: Mỗi khối đa diện đều có thể xác định bởi ký hiệu $\{p, q\}$ trong đó

p = số các cạnh của mỗi mặt (hoặc số các đỉnh của mỗi mặt)

q = số các mặt gặp nhau ở một đỉnh (hoặc số các cạnh gặp nhau ở mỗi đỉnh).

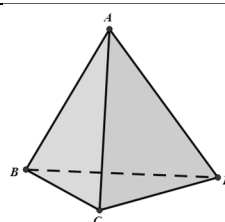
Ký hiệu $\{p, q\}$ là đặc trưng về số lượng của khối đa diện đều. Ký hiệu $\{p, q\}$ của năm khối đa diện đều được cho trong bảng sau.

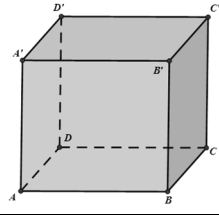
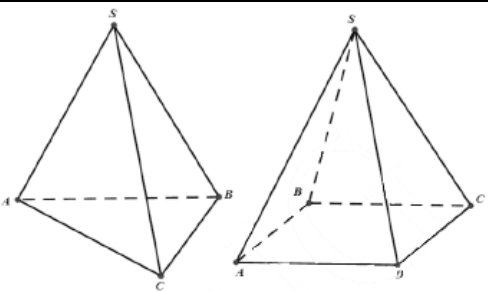
Khối đa diện đều		Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Ký hiệu $\{p, q\}$
Khối diện đều		4	6	4	$\{3, 3\}$
Khối Lập Phương		<u>8</u>	<u>12</u>	<u>6</u>	<u>$\{4, 3\}$</u>
Khối Tám Mặt Đều		6	12	8	$\{3, 4\}$
Khối Mười Hai Mặt Đều		20	30	12	$\{5, 3\}$
Khối Hai Mươi Mặt Đều		12	30	20	$\{3, 5\}$

Lời bình: Ta có thể dùng phương pháp loại trừ như sau

A. Khối tứ diện đều có 6 cạnh.

Đúng vì có 3 cạnh bên + 3 cạnh đáy. Như vậy tổng là 6.



B. Khối lập phương có 12 cạnh. Đúng vì có 4 cạnh bên + 2 mặt đáy (mỗi mặt 4 cạnh). Vậy tổng là 12	
C. Số cạnh của một khối chóp là chẵn Đúng. Ta có thể lấy 2 ví dụ sau Chóp tam giác có 6 cạnh, chóp tứ giác có 8 cạnh,...	

Chọn đáp án D.

Câu 58: Trong một khối đa diện lồi với các mặt là các tam giác, nếu gọi C là số cạnh và M là số mặt thì hệ thức nào sau đây đúng?

A. $2M = 3C$

B. $3M = 2C$

C. $3M = 5C$

D. $2M = C$

Hướng dẫn giải:

Vì mỗi mặt là tam giác và có M mặt, nên số cạnh là $3M$. Nhưng mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $C = \frac{3M}{2}$. Vậy $2C = 3M$.

Chọn đáp án B.

Câu 59: Trong một khối đa diện lồi mà mỗi đỉnh chung của ba cạnh, nếu gọi C là số cạnh và D là số mặt thì hệ thức nào sau đây đúng?

A. $3D = 2C$

B. $3D = C$

C. $4D = 3C$

D. $C = 2D$

Hướng dẫn giải:

Vì có D đỉnh, mà mỗi đỉnh có 3 cạnh chung nên số cạnh $3D$. Mà cứ một cạnh thì có 2 đỉnh nên ta có $C = \frac{3D}{2}$. Vậy $2C = 3D$.

Chọn đáp án A.

Câu 60: Một khối đa diện lồi 10 đỉnh, 7 mặt. Vậy khối đa diện này có mấy cạnh?

A. 12

B. 15

C. 18

D. 20

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lý Oler: $D - C + M = 2 \Leftrightarrow 10 - C + 7 = 2 \Leftrightarrow C = 15$.

Chọn đáp án B.

Câu 61: Khối 12 mặt đều {mỗi mặt là ngũ giác đều} có mấy cạnh?

A. 16

B. 18

C. 20

D. 30

Hướng dẫn giải:

Vì mỗi mặt là ngũ giác đều và có M mặt $\{M=12\}$. Nhưng mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $C = \frac{5M}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

Chọn đáp án D.

Câu 62: Khối 20 mặt đều {mỗi mặt là tam giác đều} có mấy cạnh?

A. 16

B. 18

C. 20

D. 30

Hướng dẫn giải:

Vì mỗi mặt là tam giác đều và có M mặt $\{M=20\}$. Nhưng mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt

$$\text{nên } C = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30.$$

Chọn đáp án D.

Câu 63: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

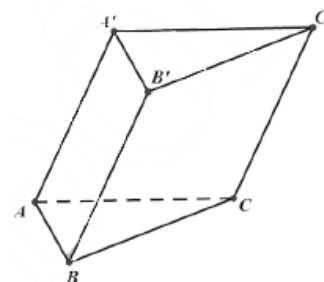
- A. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau;
- B. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số cạnh bằng nhau;
- C. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh
- D. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau

Hướng dẫn giải:

A. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau.

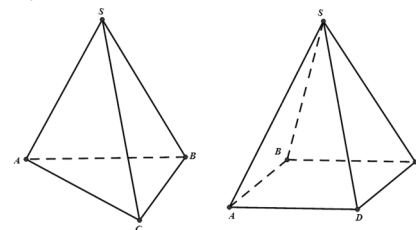
Mệnh đề sai vì

Cho hình lăng trụ ABC. A'B'C': Có 5 mặt nhưng có 6 đỉnh.



B. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số cạnh bằng nhau. **Là mệnh đề đúng**

Ví dụ: Hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác



C, D không thể xảy ra. Nên mệnh đề sai

Câu 64: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Số các cạnh của hình đa diện luôn

- A. Lớn hơn hoặc bằng 6
- B. lớn hơn 6
- C. lớn hơn 7
- D. lớn hơn hoặc bằng 8

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án A.**

Ví dụ hình chóp tam giác hoặc hình tứ diện thì cạnh của nó bằng 6.

Câu 65: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Số các đỉnh, hoặc các mặt của bất kỳ hình đa diện luôn

- A. Lớn hơn hoặc bằng 4
- B. lớn hơn 4
- C. lớn hơn 5
- D. lớn hơn hoặc bằng 5

Hướng dẫn giải:**Chọn đáp án A.**

Ví dụ hình chóp tam giác hoặc hình tứ diện thì cạnh số mặt của nó bằng 4.

Câu 66: Cho đa diện (H) có tất cả các mặt đều là tam giác. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Tổng các mặt của (H) luôn là một số chẵn
- B. Tổng các mặt của (H) luôn gấp đôi tổng số đỉnh của (H)

- C. Tổng số các cạnh của (H) là một số không chia hết cho 3
 D. Tổng số các cạnh của (H) luôn gấp đôi tổng số các mặt của (H)

Hướng dẫn giải:

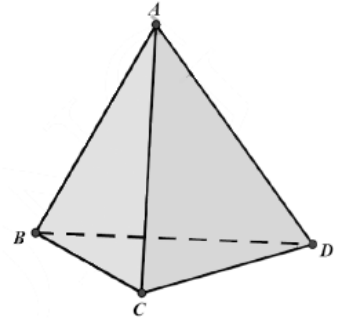
Gọi tổng số mặt của (H) là M và tổng số các cạnh của (H) là C.

Ta có: $3M = 2C$. Suy ra M là một số chẵn.

Chọn đáp án A.

Ví dụ: Xét hình tứ diện ABCD

- Tổng các mặt là 4 (chẵn)
- Tổng các mặt là 4, tổng đỉnh là 4. Như vậy, tổng các mặt của không thể gấp đôi tổng số đỉnh của, nên nó là mệnh đề sai.
- Tổng các cạnh là 6, số này chia hết cho 3. Như vậy câu C sai.
- Tổng số cạnh là 6, tổng các mặt là 4. Như vậy không thể tổng các cạnh gấp đôi tổng các mặt được.



Câu 67: Trong các loại khối đa diện đều sau, tìm khối đa diện có số cạnh gấp đôi số đỉnh

- A. Khối 20 mặt đều B. Khối lập phương
 C. Khối bát diện đều D. Khối 12 mặt đều

Hướng dẫn giải:

Khối bát diện đều có cạnh là 12 và có số đỉnh là 6.

Chọn đáp án C.

Câu 68: Trong các loại khối đa diện đều sau, tìm khối đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau

- A. Khối 12 mặt đều B. Khối lập phương
 C. Khối bát diện đều D. Khối tứ diện đều

Hướng dẫn giải:

Khối tứ diện đều có số mặt là 4 và số đỉnh là 4.

Chọn đáp án D.

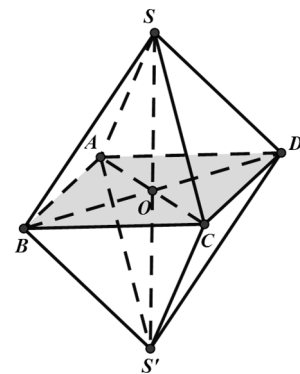
Câu 69: Mỗi đỉnh của bát diện đều là đỉnh chung của mấy cạnh?

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 5

Hướng dẫn giải:

Ta thấy mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 cạnh.

Ví dụ: Xét đỉnh B, thì B là đỉnh chung của 4 cạnh: BA, BS, BC, BS'.

Chọn đáp án B.

Câu 70: Cho khối đa diện đều. Khẳng định nào sau đây sai

- A. Số đỉnh của khối lập phương bằng 8 B. Số mặt của khối tứ diện đều bằng 4
 C. Khối bát diện đều là loại {4;3} D. Số cạnh của bảy diện đều bằng 12.

Hướng dẫn giải:

Khối bát diện đều là loại $\{3;4\}$.

Chọn đáp án C.

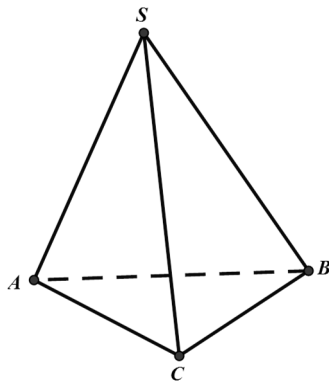
Câu 71: Cho khối chóp có đáy là n -giác. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Số mặt của khối chóp là $2n$

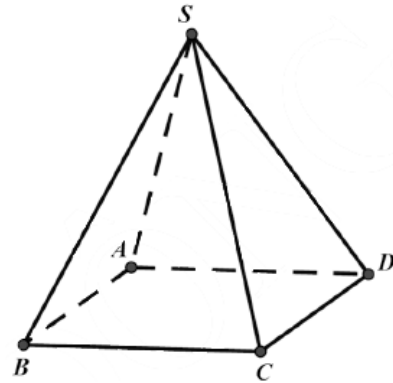
B. Số cạnh của khối chóp là $n+2$

C. Số đỉnh bằng số mặt và bằng $n+1$

D. Số đỉnh của khối chóp là $2n+1$

Hướng dẫn giải:

Hình chóp tam giác có 4 mặt và 4 đỉnh



Hình chóp tứ giác có 5 mặt và 5 đỉnh

Chọn đáp án C.

Câu 72: Khối đa diện lồi đều có số mặt nhiều nhất là:

A. 12

B. 30

C. 8

D. 20

Hướng dẫn giải:

Đa diện lồi đều có số mặt nhiều nhất là đa diện 20 mặt và nó có 30 cạnh.

Chọn đáp án D.

Câu 73: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là đúng?

A. Khối đa diện đều là khối đa diện có tất cả các cạnh bằng nhau

B. Khối đa diện đều là khối đa diện có tất cả các mặt là các đa giác đều

C. Khối đa diện đều là khối đa diện có tất cả các mặt là các đa giác đều bằng nhau và các cạnh bằng nhau

D. Có vô số khối đa diện đều lồi không có cùng số cạnh

Chọn đáp án C.

Câu 74: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hình lập phương là đa diện

B. Tứ diện là đa diện lồi

C. Hình hộp là đa diện lồi

D. Hình tạo bởi hai tứ diện chung đáy ghép với nhau là một đa diện lồi.

Hướng dẫn giải:

Hình lập phương là chắc chắn là đa diện đều nên mệnh đề A đúng

Tứ diện là đa diện lồi cũng là mệnh đề đúng

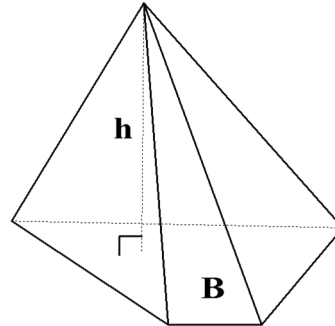
Hình hộp là đa diện lồi, đây là mệnh đề đúng

Chọn đáp án D.

THỂ TÍCH HÌNH CHÓP

A - LÝ THUYẾT TÓM TẮT

- 1) Nếu khối chóp đã cho có chiều cao h và diện tích đáy B thì thể tích tính theo công thức $V = \frac{1}{3} B.h$



- 2) Nếu khối chóp cần tính thể tích chưa biết chiều cao thì ta phải xác định được vị trí chân đường cao trên đáy.

- a) Chóp có cạnh bên vuông góc chiều cao chính là cạnh bên.
- b) Chóp có hai mặt bên vuông góc đáy đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.
- c) Chóp có mặt bên vuông góc đáy chiều cao của mặt bên vuông góc đáy.
- d) Chóp đều chiều cao hạ từ đỉnh đến tâm đa giác đáy.
- e) Chóp có hình chiếu vuông góc của một đỉnh lên xuống mặt đáy thuộc cạnh mặt đáy đường cao là từ đỉnh tới hình chiếu.

Chú ý: Các công thức tính diện tích đáy

a) Tam giác:

$$\bullet S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c \quad \bullet S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$\bullet S = \frac{abc}{4R} \quad \bullet S = pr \quad \bullet S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\bullet \Delta ABC \text{ vuông tại } A: 2S = AB.AC = BC.AH$$

$$\bullet \Delta ABC \text{ đều, cạnh } a: S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

b) Hình vuông cạnh a : $S = a^2$ (a : cạnh hình vuông)

c) Hình chữ nhật: $S = a.b$ (a, b : hai kích thước)

d) Hình bình hành ABCD: $S = \text{đáy} \times \text{cao} = AB.AD \sin \widehat{BAD}$

e) Hình thoi ABCD: $S = AB.AD \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} AC.BD$

f) Hình thang: $S = \frac{1}{2} (a + b).h$ (a, b : hai đáy, h : chiều cao)

g) Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2} AC.BD$

B – BÀI TẬP**HÌNH CHÓP ĐỀU**

Câu 1: Thể tích (cm^3) khối tứ diện đều cạnh bằng $\frac{2}{3}$ cm là :

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{81}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{81}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{18}$

Hướng dẫn giải:

Gọi cạnh tứ diện đều là a. Dễ dàng tính được $V = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$. Thay $a = \frac{2}{3}$ ta được $V = \frac{2\sqrt{2}}{81}$

Chọn đáp án B.

Câu 2: Thể tích của khối bát diện đều cạnh a là:

- A. $a^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $a^3 \frac{\sqrt{2}}{6}$ C. $a^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $a^3 \sqrt{6}$

Hướng dẫn giải:

Thể tích của khối chóp tứ giác đều có các cạnh bằng a có thể tích là $V_1 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$

Mà thể tích của khối bát diện đều bằng $2V_1$. Do đó thể tích khối bát diện đều là $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án A.

Câu 3: Kim tự tháp Kê-ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147m, cạnh đáy dài 230m. Thể tích V của khối chóp đó là?

- A. $V = 2592100 \text{ m}^3$ B. $V = 7776300 \text{ m}^3$ C. $V = 2592300 \text{ m}^3$ D. $V = 3888150 \text{ m}^3$

Hướng dẫn giải:

+ Thể tích của kim tự tháp Kê - ốp là $V = \frac{1}{3} \cdot 147 \cdot 230^2 = 2592100 \text{ m}^3$

Chọn đáp án A.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, tất cả các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp S.ABCD là:

- A. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a^3}{3}$ D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là giao điểm của AC và BD. Do S.ABCD là chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$

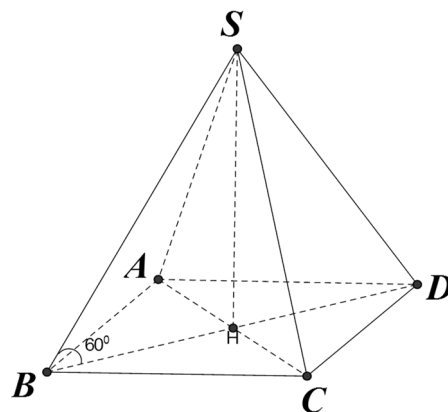
Theo giả thiết ta có $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \widehat{SDO} = 60^\circ$

Trong tam giác OBS ta có $SO = OB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{6}$

Chọn đáp án B.

Câu 5: Một khối chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b, chiều cao h. Khi đó thể tích khối chóp là:



A. $\frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)b$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)h$

C. $\frac{\sqrt{3}}{8}(b^2 - h^2)h$

D. $\frac{\sqrt{3}}{12}(b^2 - h^2)$

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm BC của hình chóp S.ABC và H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC). Khi đó $AH = \sqrt{b^2 - h^2}$,

$AM = \frac{3}{2}\sqrt{b^2 - h^2}$. Gọi x là cạnh của tam giác đều ABC suy ra

$$AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{b^2 - h^2}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2 = 3(b^2 - h^2)$$

Diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{3\sqrt{3}(b^2 - h^2)}{4} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)h$$

Chọn đáp án B.

Câu 6: Tính thể tích của khối chóp S.ABCD có tất cả các cạnh bằng 1.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm của ABCD, ta có $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{6}$

Chọn đáp án C.

Câu 7: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Hướng dẫn giải:

$$V = \frac{a^3 \tan \varphi}{12} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \text{ nên}$$

Chọn đáp án A.

Câu 8: Cho hình chóp tam giác đều S.ABCD, cạnh đáy bằng a. Mặt bên tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích V của hình chóp S.ABC.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Hướng dẫn giải:

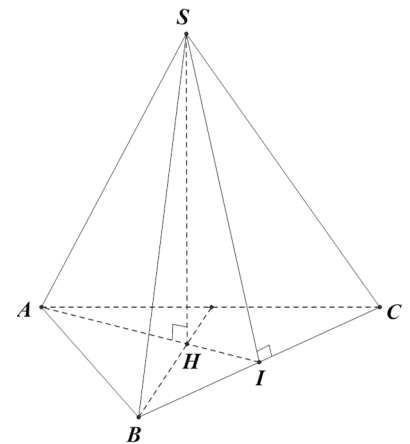
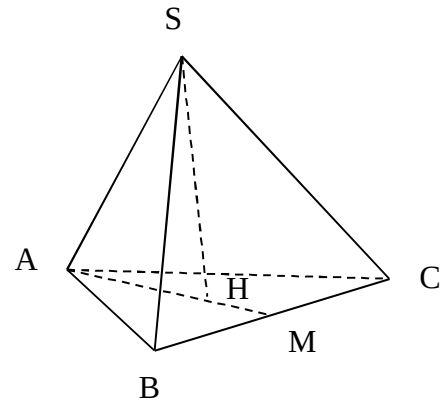
Gọi các điểm như hình vẽ. Theo đề suy ra $\widehat{SIA} = 60^\circ$

$$\text{Ta có } AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Chọn đáp án D.

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD. Tính thể tích V của tứ diện AMNP.



A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm của đáy ABCD. Tính được $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$$V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{ABSP} = \frac{1}{8} V_{ABCD} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} SO \cdot AB^2$$

Chọn đáp án .

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD

A. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$

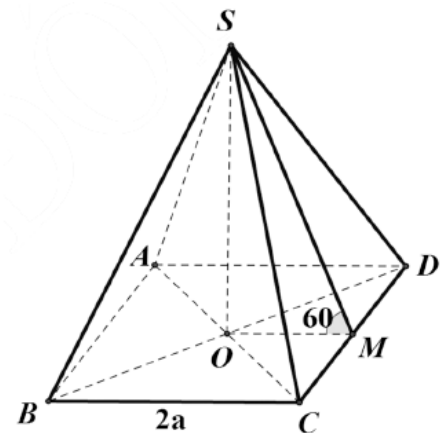
Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm hình vuông ABCD, M là trung điểm CD. Khi đó SO là đường cao hình chóp, góc SMO là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

$$OM = \frac{AD}{2} = \frac{2a}{2} = a \Rightarrow SO = OM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}. \text{ Suy ra}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} (2a)^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$$

Chọn đáp án A.



Câu 11: Khối chóp đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Khi đó độ dài đường cao h của khối chóp là:

A. $h = \sqrt{3}a$

B. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

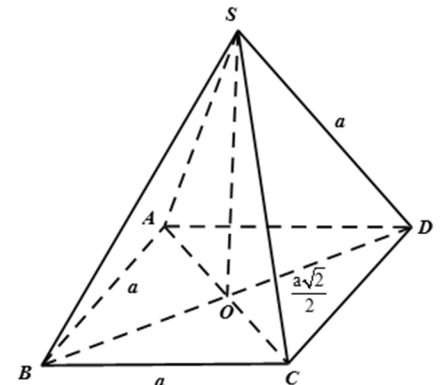
C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $h = a$

Hướng dẫn giải:

$$h = SO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Chọn đáp án B.



Câu 12: Cho tứ diện đều ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Cho biết diện tích tứ giác MNPQ bằng 1, tính thể tích tứ diện ABCD.

A. $V = \frac{\sqrt{11}}{24}$

B. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{24}$

D. $V = \frac{\sqrt{11}}{6}$

Hướng dẫn giải:

Ta chứng minh được MNPQ là hình vuông, suy ra cạnh tứ diện bằng 2, $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Chọn đáp án B.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, đường cao của một mặt bên là $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V khối chóp đó.

A. $V = a^3\sqrt{2}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

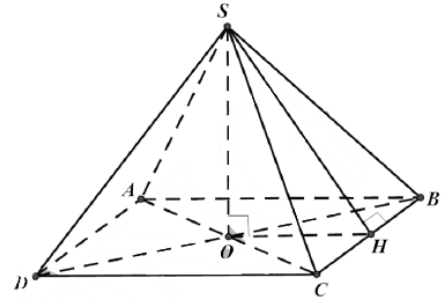
C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$

Hướng dẫn giải:

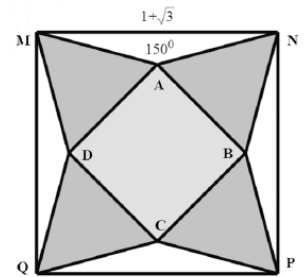
Gọi các đỉnh của hình chóp tứ giác đều như hình vẽ bên và đặt cạnh bằng $AB = 2x$. Khi đó $SO = x\sqrt{2}, OH = x$ suy ra

$$SH = x\sqrt{3}. \text{ Vậy } x = a. \text{ Khi đó } V = \frac{1}{3}SO \cdot AB^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Chọn đáp án B.

Câu 14: Để làm một hình chóp tứ giác đều từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng $1+\sqrt{3}$, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho bốn đỉnh M, N, P, Q trùng nhau (hình vẽ).

Biết rằng, các góc ở đỉnh của mỗi tam giác cân là 150° . Tính thể tích V của khối chóp đều tạo thành.



A. $V = \frac{3\sqrt{6} + 5\sqrt{2}}{24}$

B. $V = \frac{2}{3}$

C. $V = \frac{52 + 30\sqrt{3}}{3}$

D. $V = \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

$$+ \widehat{AMN} = \widehat{DMQ} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{AMD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle MAD \text{ đều.}$$

Vì vậy hình chóp tứ giác đều tạo thành có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng MA .

$$\text{Trong đó, } MA = \frac{MN}{2 \sin 75^\circ} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

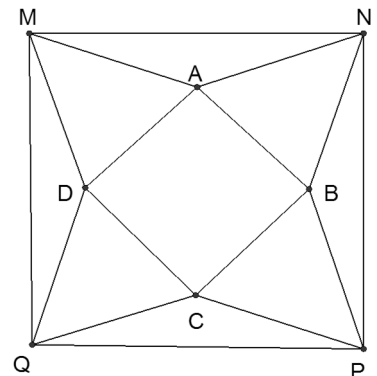
+ Dễ dàng chứng minh được rằng:

$$\text{“Một khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng } x \text{ thì có thể tích là } V = \frac{x^3\sqrt{2}}{6} \text{”}$$

$$+ \text{ Với } x = \sqrt{2} \text{ thì } V = \frac{2}{3}$$

Chọn đáp án B.

Câu 15: Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập bạn Bình lớp 12S2 của trường THPT trung Vương đã làm một hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một tấm tôn hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng a , cắt mảnh tôn theo các tam giác cân $MAN; NBP; PCQ; QDM$ sau đó gò các tam giác $ANB; BPC; CQD; DMA$ sao cho bốn đỉnh $M; N; P; Q$ trùng nhau (như hình) thể tích lớn nhất của khối chóp đều là



A. $\frac{a^3}{36}$

B. $\frac{a^3}{24}$

C. $\frac{4\sqrt{10}a^3}{375}$

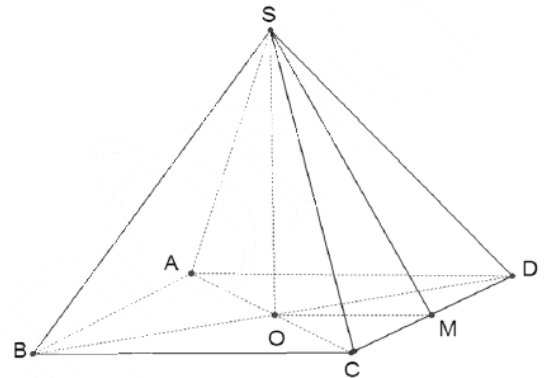
D. $\frac{a^3}{48}$

Hướng dẫn giải:

Gọi cạnh hình vuông ABCD là x thì đường cao mặt bên là: $SM = \frac{a\sqrt{2} - x}{2}$ suy ra chiều cao của phôi chóp $SO = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - 2\sqrt{2}ax}$ Vậy $V = \frac{1}{6}x^2\sqrt{2a^2 - 2\sqrt{2}ax}$ lập bbt suy ra V lớn nhất tại $x = \frac{2\sqrt{2}a}{5}$

Ta tìm $\max V = \frac{4\sqrt{10}a^3}{375}$

Chọn đáp án C.



Câu 16: Cho hình chóp lục giác đều $SABCDEF$ có $SA = 5; AB = 3$. Tính thể tích khối chóp $SABCDE$.

A. $45\sqrt{3}$

B. $18\sqrt{3}$

C. $54\sqrt{3}$

D. $15\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Lưu ý rằng lục giác $ABCDEF$ là lục giác đều và nó giống như xếp 6 tam giác đều AOB theo chiều kim đồng hồ. Ta cần xác định hai yếu tố:

Chiều cao (để ý tam giác AOB đều nên $OA = AB = 3$):

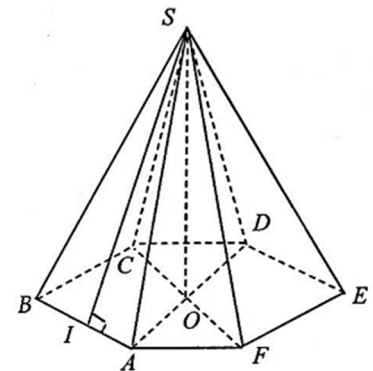
$$h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Diện tích để ý diện tích ngũ giác $ABCDE$ bằng 5 lần diện tích tam giác AOB nên ta có:

$$S = 5.S_{AOB} = 5 \cdot \frac{1}{2}AB^2 \sin(60^\circ) = \frac{45\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Do đó, ta có: } V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{45\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 15\sqrt{3}$$

Chọn đáp án D.



Câu 17: Người ta gọt một khối lập phương gỗ để lấy khối tám mặt đều nội tiếp nó (tức là khối có các đỉnh là các tâm của các mặt khối lập phương). Biết các cạnh của khối lập phương bằng a. Hãy tính thể tích của khối tám mặt đều đó:

A. $\frac{a^3}{4}$

B. $\frac{a^3}{6}$

C. $\frac{a^3}{12}$

D. $\frac{a^3}{8}$

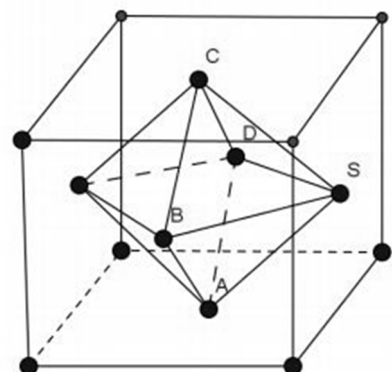
Hướng dẫn giải:

Dựng được hình như hình bên

+ Thấy được thể tích khối cần tính bằng 2 lần thể tích của hình chóp $S.ABCD$

+ Nhiệm vụ bây giờ đi tìm thể tích của $S.ABCD$

+ ABCD là hình vuông có tâm O đồng thời chính là hình chiếu của S lên mặt đáy



$SO = \frac{a}{2}$; $BD =$ cạnh của hình lập phương $= a$. Suy ra các cạnh của hình vuông $ABCD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) a^3 = \frac{a^3}{12}$$

$$V_{\text{khối đa diện}} = 2.V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{6}$$

Chọn đáp án B.

Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a , góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S . Thể tích của khối bát diện có các mặt $ABC, A'B'C', A'BC, B'CA, C'AB, AB'C', BA'C', CA'B'$ là

A. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

B. $2\sqrt{3}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Ta tính thể tích khối chóp $S.ABC$:

Gọi H là tâm tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa

đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60°

$$\Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ \Rightarrow SH = a \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$V = 2V_{B.ACA'C'} = 2.4V_{B.ACS} = 8V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 2: Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Diện tích tam giác SBC là: $S_{\triangle SBC} = \frac{a^2\sqrt{39}}{12}$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là:

$$d(A, (SBC)) = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

Tứ giác $BCB'C'$ là hình chữ nhật vì có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

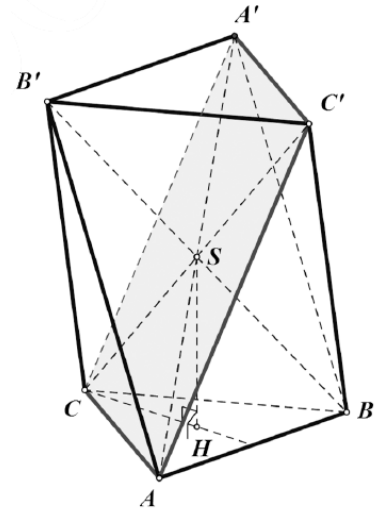
$$\text{Có } SB = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BB' = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow B'C = \frac{a\sqrt{39}}{3}.$$

$$\text{Diện tích } BCB'C' \text{ là: } S_{BCB'C'} = \frac{a^2\sqrt{39}}{3}.$$

$$\text{Thể tích khối 8 mặt cần tìm là: } V = 2 \cdot \frac{1}{3} d(A, (SBC)) \cdot S_{BCB'C'} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 3 (Tham khảo lời giải của Ngọc HuyềnLB).

$$\text{Thể tích khối bát diện đã cho là } V = 2V_{A'B'C'BC} = 2.4V_{A'.SBC} = 8V_{S.ABC} = 8 \cdot \frac{1}{3} SG \cdot S_{ABC}$$



Ta có: $\widehat{(SA; (ABC))} = \widehat{SAG} = 60^\circ$. Xét $\triangle SGA$ vuông tại G :

$$\tan \widehat{SAG} = \frac{SG}{AG} \Leftrightarrow SG = AG \cdot \tan \widehat{SAG} = a.$$

$$\text{Vậy } V = 8 \cdot \frac{1}{3} SG \cdot S_{ABC} = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}.$$

Chọn đáp án A.

HÌNH CHÓP CÓ MỘT CẠNH VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 1: Cho tứ diện ABCD có các cạnh BA, BC, BD đôi một vuông góc với nhau:

BA = 3a, BC = BD = 2a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tính thể tích khối chóp C.BDNM

- A. $V = 8a^3$ B. $V = \frac{2a^3}{3}$ C. $V = \frac{3a^3}{2}$ D. $V = a^3$

Hướng dẫn giải:

Khối chóp C.BDNM có CB là đường cao nên có thể tích

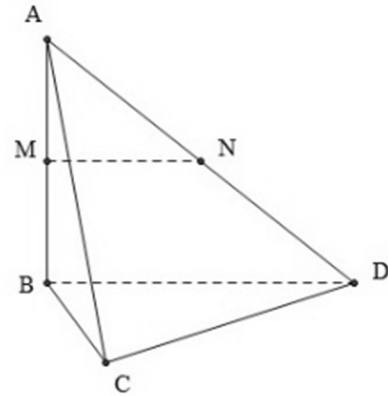
$$V = \frac{1}{3} BC \cdot S_{BDNM}, \text{ trong đó}$$

$$+ BD = 2a$$

+ Tứ giác BDNM là hình thang vuông tại B, M do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên có diện tích:

$$S_{BDNM} = \frac{(MN + BD) \cdot BM}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot \frac{3a}{2}}{2} = \frac{3a^2}{2} \text{ (đvtt)}$$

Chọn đáp án C.



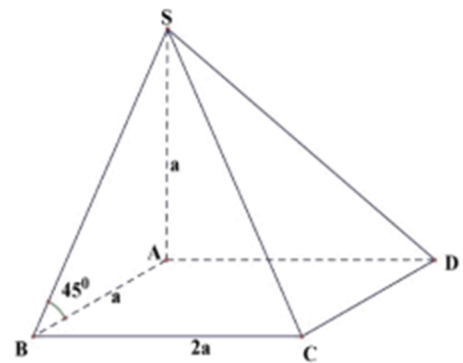
Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), AB = a, AD = 2a. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° . Thể tích hình chóp S.ABCD bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{18}$ B. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ C. $\frac{a^3}{3}$ D. $\frac{2a^3}{3}$

Hướng dẫn giải:

$$V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot 2a = \frac{2a^3}{3}$$

Chọn đáp án D.



Câu 3: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a và vuông góc với đáy, M là trung điểm của SD. Thể tích khối chóp MACD là:

- A. $\frac{a^3}{4}$ B. $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{a^3}{36}$ D. a^3

Hướng dẫn giải:

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng đáy bằng nửa khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy suy ra thể tích của khối chóp MACD là:

$$V_{MACD} = \frac{1}{2} V_{SACD} = \frac{1}{4} V_{SABCD} = \frac{1}{12} a^3.$$

Chọn đáp án B.

Câu 4: Cho hình chóp S.ABC có $AB = a, BC = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{5}$ và SA vuông góc với mặt đáy, SB tạo với đáy góc 45° . Thể tích của khối chóp S.ABC là:

- A. $\frac{\sqrt{11}}{12}a^3$ B. $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ D. $\frac{\sqrt{15}}{12}a^3$

Hướng dẫn giải:

SB tạo với đáy góc 45° nên $SA = AB = a$

Áp dụng công thức Hê rông, có

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} \quad \left(p = \frac{AB+BC+CA}{2} \right)$$

$$= \frac{a^2}{4} \sqrt{(1+\sqrt{3}+\sqrt{5})(-1+\sqrt{3}+\sqrt{5})(1-\sqrt{3}+\sqrt{5})(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}$$

(sử dụng máy tính để tính biểu thức trong dấu căn)

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{\sqrt{11}}{12}a^3$$

Chọn đáp án A.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 1. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SC = \sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $V = \sqrt{3}$ D. $V = \frac{\sqrt{15}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Đường chéo hình vuông $AC = \sqrt{2}$

Xét tam giác SAC, ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{3}$

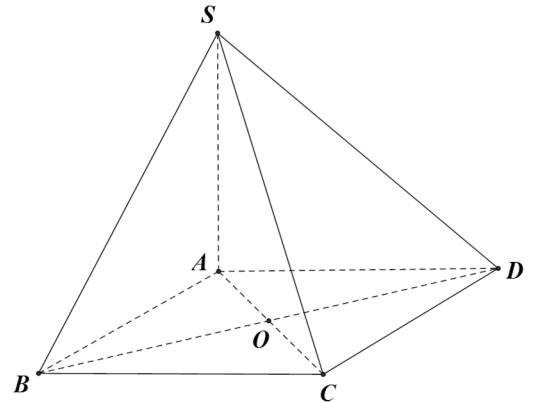
Chiều cao khối chóp là $SA = \sqrt{3}$

Diện tích hình vuông ABCD là $S_{ABCD} = 1^2 = 1$

Thể tích khối chóp S.ABCD là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (đvtt)}$$

Chọn đáp án A.



Câu 6: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mp đáy. Góc tạo bởi (SBC) và mặt đáy bằng 30° . Thể tích S.ABC bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{a^3}{9}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

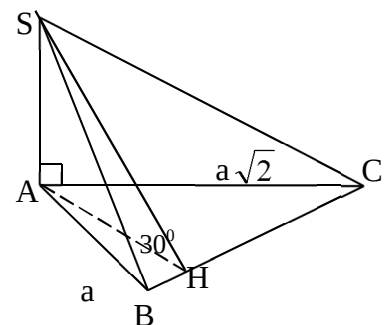
Hướng dẫn giải:

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 \Leftrightarrow BC = a\sqrt{3}$$

$$AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

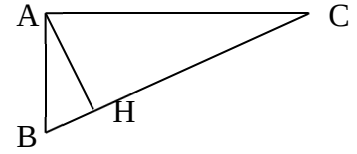
Góc tạo bởi (SBC) và (ABC) là góc SHA



$$\tan 30^\circ = \frac{SA}{AH} \Rightarrow SA = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$V_{S.ACB} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3}{9}$$

Chọn đáp án C.



Câu 7: Cho hình chóp S.ABC có $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tam giác ABC có $AB = BC = 2a$, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. $V_{S.ABC} = 3a^3\sqrt{3}$ **B.** $V_{S.ABC} = 2a^3\sqrt{3}$ **C.** $V_{S.ABC} = a^3\sqrt{3}$ **D.** $V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = a^2\sqrt{3}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = a^3\sqrt{3}$

Chọn đáp án C.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có $SC \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ **B.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ **D.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$

Hướng dẫn giải:

Kẻ $SK \perp AB$ thì:

$$CK \perp AB \Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = (SK, CK) = \widehat{ABC} = 45^\circ$$

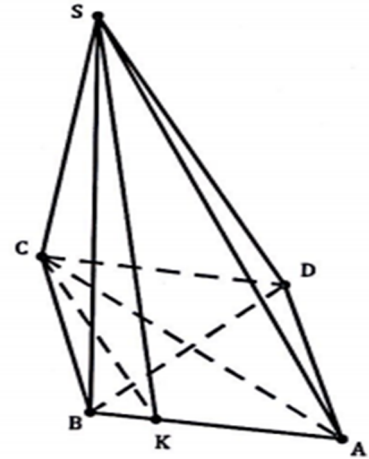
$$\widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{KBC} = 60^\circ \Rightarrow CB \sin 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow SC = CK \cdot \tan 45^\circ = \frac{3a}{2} \quad (1)$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SC \cdot S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$$

Chọn đáp án D.



Câu 9: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ góc giữa SC và đáy bằng 60° . Thể tích hình chóp S.ABCD bằng:

A. $\sqrt{2}a^3$ **B.** $3\sqrt{2}a^3$ **C.** $3a^3$ **D.** $\sqrt{6}a^3$

Hướng dẫn giải:

Theo bài ra ta có, $SA \perp (ABCD)$, nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (ABCD).

$$\Rightarrow \left[\widehat{SC, (ABCD)} \right] = \left(\widehat{SC, AC} \right) = \widehat{SCA} = 60^\circ$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B, có

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$$

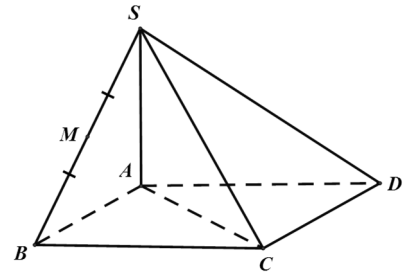
Xét $\triangle SAC$ vuông tại A, có $(SA \perp (ABCD)) \Rightarrow SA \perp AC$

Ta có:

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a$$

Vậy thể tích hình chóp S.ABCD là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$$



Chọn đáp án A.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi tâm O, $AB = a\sqrt{5}$; $AC = 4a$, $SO = 2\sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm SC. Biết SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp M.OBC.

- A. $2\sqrt{2}a^3$ B. $\sqrt{2}a^3$ C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ D. $4a^3$

Hướng dẫn giải:

Để tính được thể tích của khối hình chóp M.OBC ta cần tính được diện tích đáy OBC và khoảng cách từ M đến đáy.

Kẻ $MH \parallel SO$ ($H \in [OC]$), vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (OBC)$

Nên $d(M; (OBC)) = MH$. Áp dụng định lý Ta lét vào tam giác SOC ta có:

$$\frac{MH}{SO} = \frac{MC}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MH = a\sqrt{2}$$

$$\text{Do } AC \perp BD \text{ nên } O = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{5a^2 - (2a)^2} = a$$

$$\text{Diện tích đáy là } S_{OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2$$

$$\text{Thể tích khối chóp cần tính là } V = \frac{1}{3} MH \cdot S_{OBC} = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Chọn đáp án C.

Câu 11: Hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ góc giữa SC và đáy bằng 60° . Thể tích hình chóp S.ABCD bằng:

- A. $\sqrt{2}a^3$ B. $\sqrt{6}a^3$ C. $3a^3$ D. $3\sqrt{2}a^3$

Hướng dẫn giải:

$SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (ABCD).

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B, có

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$$

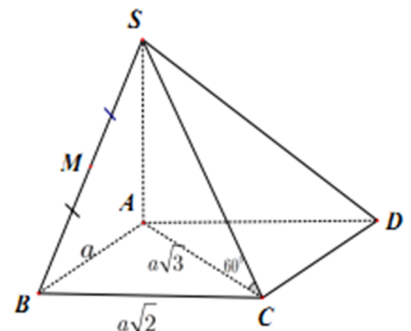
Xét $\triangle SAC$ vuông tại A, $(SA \perp (ABCD)) \Rightarrow SA \perp AC$

Ta có:

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a$$

Vậy thể tích hình chóp S.ABCD là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$$



Chọn đáp án A.

Câu 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° và $SC = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp S.ABCD.

A. $V = \frac{a^3}{2}$

B. $V = \frac{a^3}{3}$

C. $V = \frac{a^3}{6}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (ABCD).

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA} = 45^\circ$$

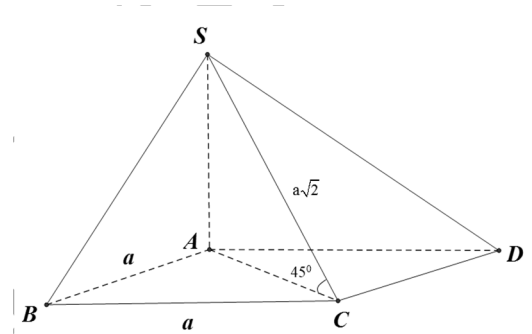
Tam giác SAC vuông tại A nên:

$$\sin \widehat{SCA} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow SA = SC \cdot \sin \widehat{SCA} = 2a \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}a$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = a^2$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$$

Chọn đáp án D.



Câu 13: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy; mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc bằng 45° . Thể tích khối chóp S.ABC theo a bằng

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$;

B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$;

C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$;

D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Hướng dẫn giải:

* Ta có : $AB = a\sqrt{2}$, $(SBC) \cap (ABC) = BC$

Gọi M là trung điểm BC

$AM \perp BC$ (vì ΔABC cân tại A)

$SM \perp BC$ (vì $AM = hc \ SM \Rightarrow$
(ABC))

$$((\widehat{SBC}), (\widehat{ABC})) = (\widehat{SM, AM}) = \widehat{SMA} = 45^\circ$$

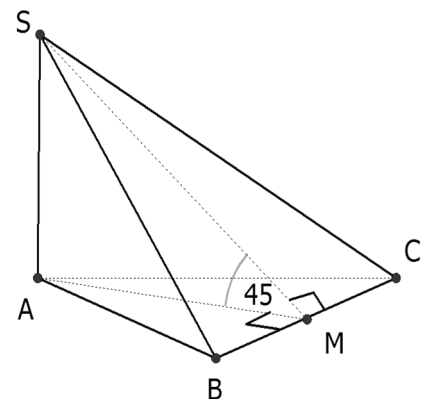
* ΔABC vuông cân tại A có, $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a$ và

$$AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

* ΔSAM vuông tại A có $AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\widehat{M} = 45^\circ \Rightarrow$

$$SA = AM \cdot \tan 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$* V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC cân tại A . Cạnh bên SB lần lượt tạo với mặt phẳng đáy, mặt phẳng trung trực của BC các góc bằng 30° và 45° , khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng a . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = a^3$ **B.** $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{2}$ **C.** $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{3}$ **D.** $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \widehat{SBA} = 30^\circ$. Gọi G là trung điểm BC , ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SAM)$ là mặt phẳng trung trực của BC và

SM là hình chiếu của SB trên $(SAM) \Rightarrow \widehat{BSM} = 45^\circ \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S . Ta có

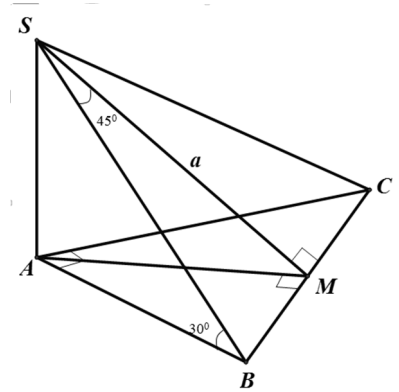
$$SM \perp BC \Rightarrow d_{(B,SC)} = SM = a \Rightarrow SB = SC = a\sqrt{2}, BC = 2a$$

Tam giác SBA vuông tại A , ta có $SA = SB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Trong tam giác vuông SAM , ta có:

$$AM = \sqrt{SM^2 - SA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{6} BC \cdot AM \cdot SA = \frac{a^3}{6}$$



Chọn đáp án D.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a , SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của DC . Tính thể tích của khối chóp $I.OBM$.

A. $V = \frac{a^3}{24}$ **B.** $V = \frac{3a^3}{24}$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\begin{cases} IO \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow IO \perp (ABCD) \Rightarrow IO = \frac{1}{2} SA = a$

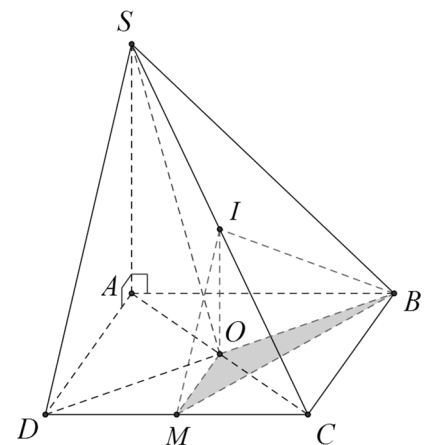
Diện tích của ΔOBM :

$$S = \frac{1}{2} OM \cdot OB \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{8}$$

Tính thể tích của khối chóp $I.OBM$:

$$V_{I.OBM} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta OBM} \cdot IO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \cdot a = \frac{a^3}{24}$$

Chọn đáp án A.



Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\angle BAD = 120^\circ$, SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và SB , góc giữa SM và $(ABCD)$ bằng 60° . Khi đó

thể tích của khối chóp IABCD bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABCD)

$$\Rightarrow (\widehat{SM; (ABCD)}) = \widehat{SMA} = 60^\circ$$

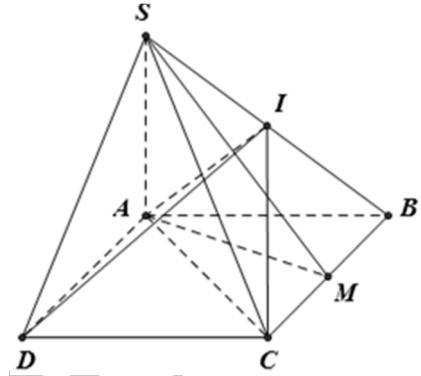
ΔABC có $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên ΔABC đều.

$$\text{Mà M là trung điểm của BC nên } AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Khi đó } \tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} \Rightarrow SA = \tan 60^\circ \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

Thể tích khối chóp I.ABCD là

$$\begin{aligned} V_{I.ABCD} &= \frac{1}{3} \cdot d(I; (ABCD)) \cdot S_{ABCD} \\ &= \frac{1}{6} \cdot d(I; (ABCD)) \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$



Chọn đáp án B.

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và góc giữa đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Gọi M là trung điểm của SA, (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với SC. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại N, E, F. Tính theo a thể tích khối chóp S.MNEF.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{72}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết ta có: $\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{BSC} = 30^\circ$ là góc giữa SC với mp (SAB)

$$\text{Từ đó: } SB = BC \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}, SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$$

$SB \perp (P)$ tại E nên thể tích khối chóp S.MNEF

$$\text{được xác định bởi: } V = \frac{1}{3} S_{MNEF} \cdot SE$$

Do $SA \perp AC$ và $SA = AC = a\sqrt{2}$, nên SAC vuông cân tại A

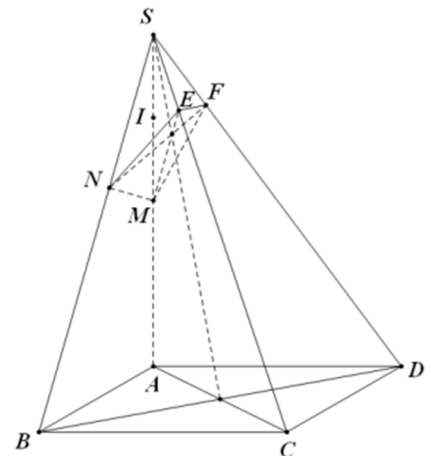
$$\Rightarrow \Delta SEM \text{ vuông cân tại E} \Rightarrow SE = \frac{SM}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MN \perp CS \text{ (do } SC \perp (P)) \\ MN \perp BC \text{ (do } BC \perp (SAB)) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \perp (SBC) \Rightarrow MN \perp NE, MI$$

$$\Rightarrow S_{MNE} = \frac{1}{2} MN \cdot NE = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{2}}{24}$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta cũng có } MF \perp EF \text{ và } S_{MEF} = \frac{a^2\sqrt{2}}{24} \Rightarrow S_{MNEF} = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}$$



$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{MNEF} \cdot SE = \frac{a^3 \sqrt{2}}{72} (\text{đvtt})$$

Chọn đáp án B.

HÌNH CHÓP CÓ MẶT VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với đáy, cạnh SC hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$

B. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$

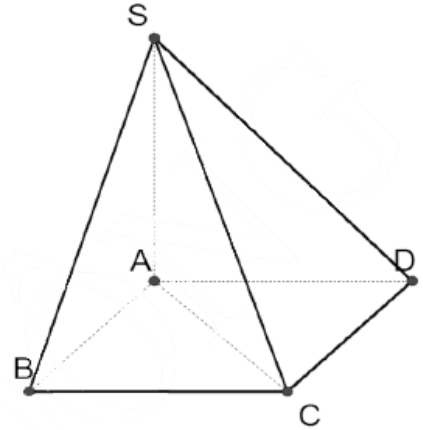
Hướng dẫn giải:

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \angle SCA = 60^\circ$.

$$\Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{a^2 + (2a)^2} \sqrt{3} = a\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} a \cdot 2a \cdot a\sqrt{15} = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}.$$

Chọn đáp án A.



Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$.

Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$.

A. $V_{S.ACD} = \frac{a^3}{3}$

B. $V_{S.ACD} = \frac{a^3}{2}$

C. $V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

D. $V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải:

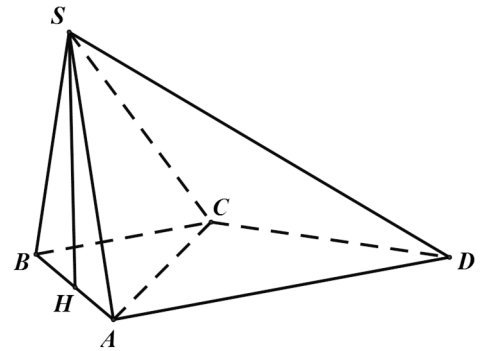
Ta chứng minh được tam giác ACD vuông cân tại C và

$$CA = CD = a\sqrt{2}, \text{ suy ra } S_{\triangle ACD} = a^2$$

Gọi H là trung điểm của AB vì tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, suy ra $SH \perp (ABCD)$

$$\text{và } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án D.



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a . Các mặt phẳng (SAB) , (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Tính thể tích V của hình chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Theo đề ta có } \widehat{SCA} = 30^\circ. AC = a\sqrt{2} \text{ suy ra } SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$$

Chọn đáp án A.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có $BC = a$. Mặt bên SAC vuông góc với đáy các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° . Thể tích khối chóp $SABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{4}$

B. $\frac{a^3}{12}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải:

Kẻ $SH \perp BC$ vì $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC

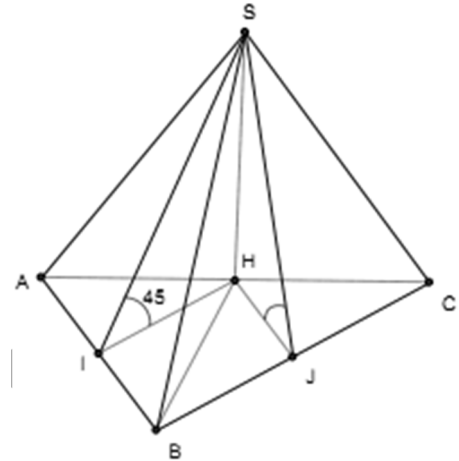
$\Rightarrow SJ \perp AB, SJ \perp BC$

Theo giả thiết $SIH = SJH = 45^\circ$

Ta có: $\triangle SHI = \triangle SHJ \Rightarrow HI = HJ$ nên BH là đường phân giác của $\triangle ABC$ từ đó suy ra H là trung điểm của AC.

$$HI = HJ = SH = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{12}$$

Chọn đáp án B.



Câu 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Thể tích của khối chóp S.ABM bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Hướng dẫn giải:

Diện tích đáy: $S = \frac{a^2}{2}$, chiều cao $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{V_{S.ABC}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Chọn đáp án D.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh $2a$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC. Hai mặt phẳng (SMC), (SNB) cùng vuông góc với đáy. Cạnh bên SB hợp với đáy góc 60° . Thể tích của khối chóp S.ABCD là:

A. $\frac{16\sqrt{15}}{5}a^3$

B. $\frac{16\sqrt{15}}{15}a^3$

C. $\sqrt{15}a^3$

D. $\frac{\sqrt{15}}{3}a^3$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là giao CM và BN thì $SH \perp (ABCD)$.

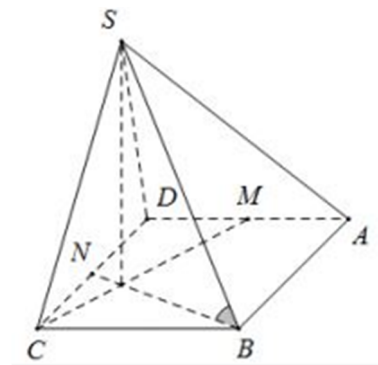
Chứng minh được $CH \perp NB$ tại H

$$\Rightarrow BH = \frac{BC^2}{BN} = \frac{BC^2}{\sqrt{BC^2 + CN^2}} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow SH = BH \cdot \tan 60^\circ = \frac{4a\sqrt{15}}{5}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{16a^3\sqrt{15}}{5}$$

Chọn đáp án A.



Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc 60° và cách đường thẳng AB một khoảng là a. Tính thể tích khối chóp theo a?

A. $\frac{8a^3}{9}$

B. $\frac{2a^3}{9}$

C. $\frac{4a^3}{9}$

D. $\frac{6a^3}{9}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H, I lần lượt là trung điểm AB và CD.

Do tam giác SAB cân tại S nên: $SH \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD)$ do đó:

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD, IH \perp CD$. Do đó: $CD \perp (SHI)$, kẻ $HK \perp SI, CD \perp HK$

Do đó ta có: $HK \perp (SCD) \Rightarrow HK = d(h, (SCD)) = d(AB, (SCD)) = a$

$$CD \perp (SHI) \Rightarrow \begin{cases} IH \perp CD \\ SI \perp CD \\ CD = (SCD) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (HI, SI) = SHI = 60^\circ$$

Trong tam giác HKI có $HI = \frac{HK}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = BC$

Trong tam giác HIS có $SH = HI \cdot \tan 60^\circ = 2a$. Diện tích ABCD là: $S_{ABCD} = BC^2 = \frac{4a^2}{3}$

Thể tích của S.ABCD là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{8a^3}{9}$

Chọn đáp án A.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt bên (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Khi đó thể tích của khối chóp S.MBND là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $a^3\sqrt{3}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

D. $a^3\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải:

Gọi h là chiều cao khối chóp. Vì tam giác SAB vuông tại S $\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích tứ giác BMDN là: $S_{BMDN} = S_{ABCD} - 2S_{\triangle NCD} = 2a^2$

Chọn đáp án A.

Câu 9: Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác BCD vuông cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Tính thể tích V của khối tứ diện ABCD.

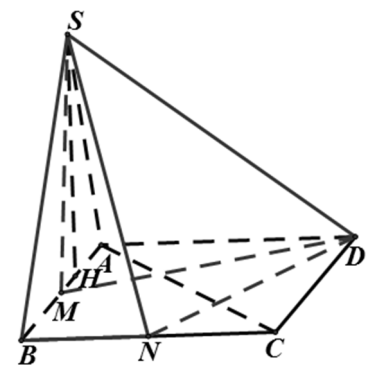
A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

B. $V = \frac{a^3}{12}$

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$

Hướng dẫn giải:



Dựng $AH \perp BC$,
 $(ABC) \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

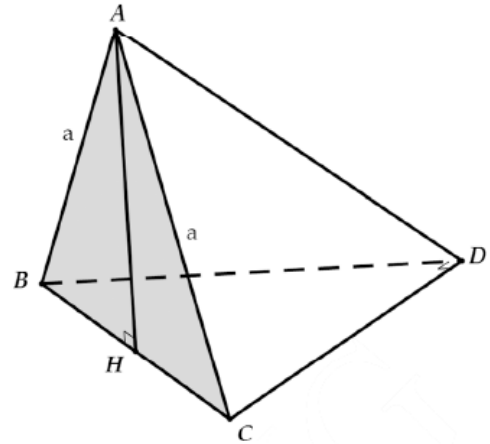
do

Ta có, do $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} DH \cdot BC = \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}.$$

Chọn đáp án D.



Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

B. $V = \frac{a^3}{12}$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Hướng dẫn giải:

Dựng $SH \perp AB$, do

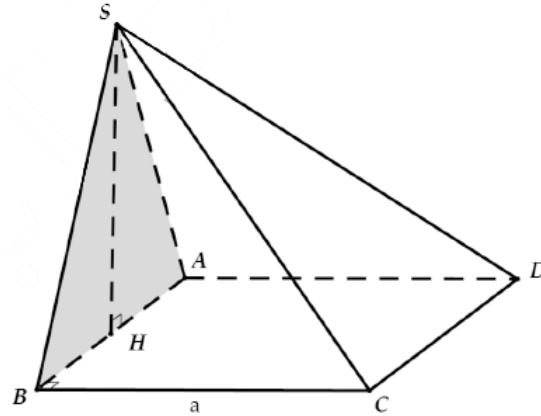
$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có, do $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và

$$S_{ABCD} = a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$$

Chọn đáp án A.



Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

B. $V = \frac{a^3}{3}$.

C. $V = \frac{a^3}{9}$.

D. $V = a^3$.

Hướng dẫn giải:

Dựng $SH \perp AB$, do

$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

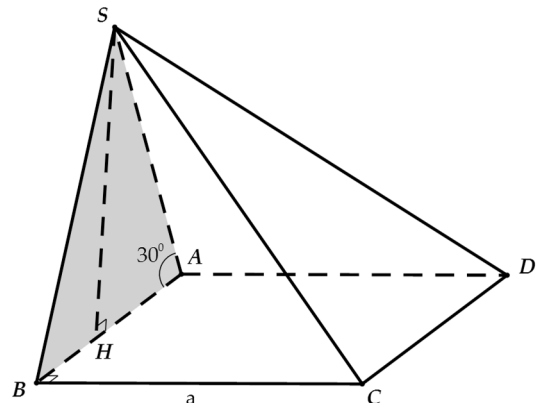
Ta có, do $\triangle SHA$ vuông tại H :

$$\sin \widehat{SAH} = \frac{SH}{SA} \Leftrightarrow SH = SA \cdot \sin \widehat{SAH} = a \text{ và}$$

$$S_{ABCD} = a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}.$$

Chọn đáp án B.



Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác BCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Biết AD hợp với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

B. $V = \frac{a^3}{12}$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Hướng dẫn giải:

Dựng $AH \perp BC$, do

$$(ABC) \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp (BCD).$$

Ta có, do $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và

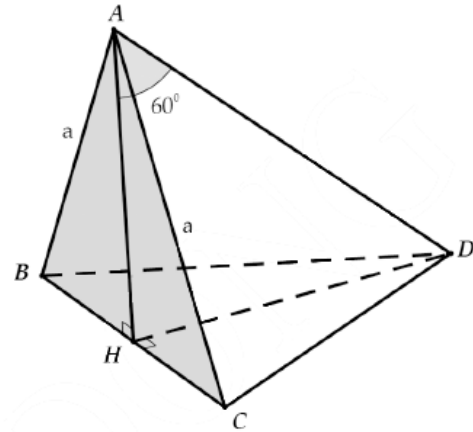
$$DH \perp BC \Rightarrow DH \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow (\widehat{AD; (ABC)}) = \widehat{HAD} = 60^\circ.$$

Xét tam giác AHD vuông tại H : $\tan \widehat{HAD} = \frac{HD}{AH}$

$$\Leftrightarrow HD = AH \cdot \tan \widehat{HAD} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} HD \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}.$$



Chọn đáp án C.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$, $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

B. $V = \frac{a^3}{3}$.

C. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $V = a^3$.

Hướng dẫn giải:

Dựng $SH \perp AB$, do

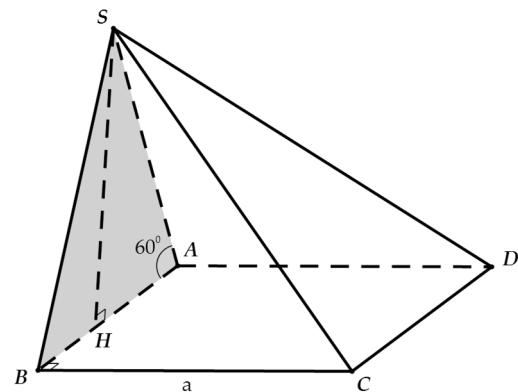
$$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Ta có, do $\triangle SHA$ vuông tại H :

$$\sin \widehat{SAH} = \frac{SH}{SA} \Leftrightarrow SH = SA \cdot \sin \widehat{SAH} = a\sqrt{3} \text{ và}$$

$$S_{ABCD} = a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}.$$



Chọn đáp án A.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$, $BC = 2AB = 2a$, tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$, $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

B. $V = \frac{a^3}{3}$.

C. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $V = a^3$.

Hướng dẫn giải:

Dựng $SH \perp AC$, do

$$(SAC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

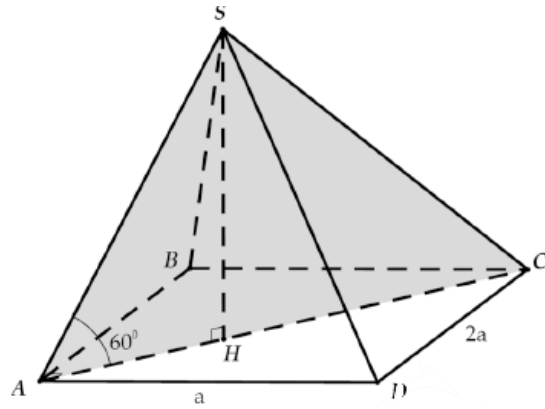
Ta có, do $\triangle SHA$ vuông tại H :

$$\sin \widehat{SAH} = \frac{SH}{SA} \Leftrightarrow SH = SA \cdot \sin \widehat{SAH} = a\sqrt{3}. \text{ và}$$

$$S_{ABCD} = 2a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}.$$

Chọn đáp án C.



Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{CAD} = 30^\circ$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$, $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{12}.$

B. $V = \frac{a^3}{4}.$

C. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}.$

D. $V = a^3.$

Hướng dẫn giải:

Dựng $SH \perp AB$, do

$$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

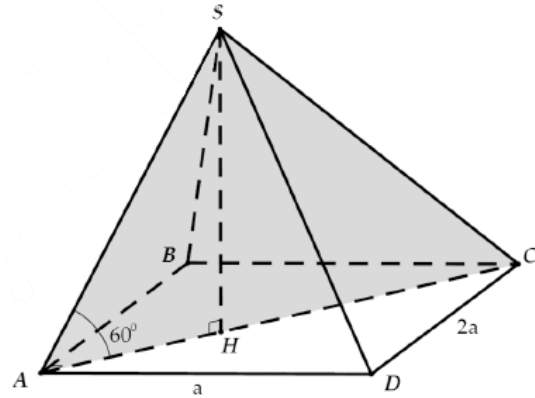
Ta có, do $\triangle SAB$ là tam giác đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

. Do $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{CAD} = 30^\circ$

nên BAD đều. Suy ra $S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}.$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{4}.$$

Chọn đáp án B.



Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $ABCD$ là một hình thang vuông ở A và D ; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. Tam giác SAD vuông ở S . Gọi I là trung điểm AD . Biết (SIC) và (SIB) cùng vuông góc với mp($ABCD$). Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a

A. $\frac{a^3}{3}$

B. $\frac{a^3}{4}$

C. $\frac{3a^3}{4}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải:

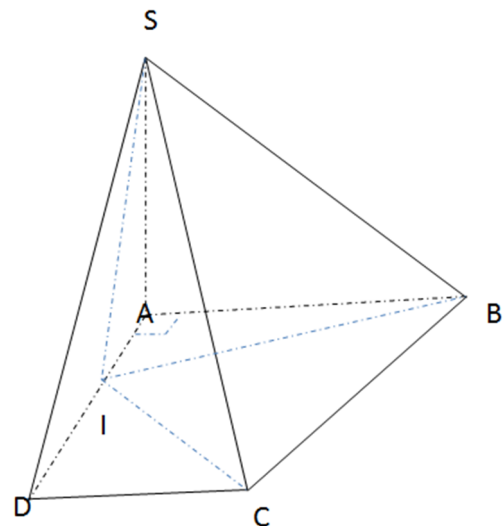
Ta có (SIC) và (SIB) cùng vuông góc với $(ABCD)$

nên SI vuông góc với $(ABCD)$

Tam giác ASD vuông tại S nên $SI = \frac{1}{2} AD = \frac{a}{2}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} (a + 2a) a = \frac{a^3}{4}$$

Chọn đáp án B.



Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy, $AB = a, AD = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{4a^3}{3}$

B. $3a^3$

C. a^3

D. $\frac{2a^3}{3}$

Hướng dẫn giải:

gọi O là giao điểm của 2 đường chéo của đáy của hình chóp

$$\text{Theo bài ra ta có } \begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD); \\ SA = (SAC) \cap (SBD) \end{cases}$$

$$AB // DC \Rightarrow d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(B, (SCD)).$$

$$\text{Ta có } \frac{d(B, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{DB}{DO} = 2 \text{ nên } d(O, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vì O là chân đường cao của hình chóp nên ta có cách dựng khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD)

$$\text{nghư sau: Kẽ } OH \perp CD, OK \perp SH \text{ thì ta có } OK = d(O, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác } SOH \text{ vuông tại } O \text{ ta có } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} \Rightarrow SO = a$$

$$\text{Thể tích hình cần tính là } V = \frac{1}{3} a \cdot a \cdot 2a = \frac{2}{3} a^3$$

Chọn đáp án D.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; biết $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của AD , biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{3\sqrt{5}a^3}{8}$

B. $\frac{3\sqrt{15}a^3}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{15}a^3}{8}$

D. $\frac{3\sqrt{5}a^3}{5}$

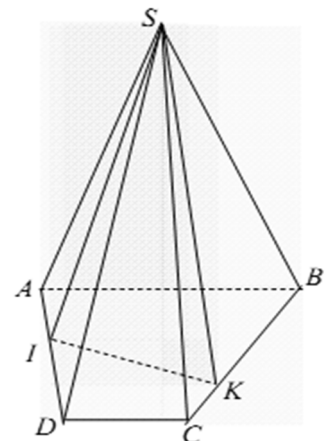
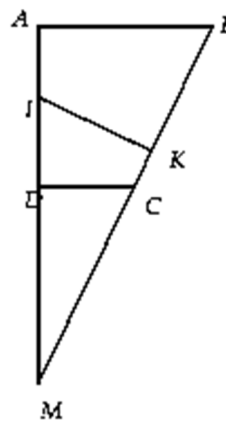
Hướng dẫn giải:

Như đã nhắc ở câu trước thì do hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$ nên SI là đường cao của $S.ABCD$.

Kẻ $IK \perp BC$ tại K . Khi đó ta chứng minh được $SKI = ((SBC); (ABCD)) = 60^\circ$. Ta vẽ hình phẳng của mặt đáy. Ta có $M = AD \cap BC$ ta chứng minh được CD là đường trung bình của tam giác ABM . Khi đó

$$AM = 4a; BM = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2} = 2a\sqrt{5}; IM = 3a$$

$$\text{Ta có } \triangle KMI \sim \triangle AMB$$



$$\Rightarrow \frac{IM}{BM} = \frac{IK}{AB} \Rightarrow IK = \frac{3a}{2a\sqrt{5}} \cdot 2a = \frac{3a}{\sqrt{5}}, SI = IK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} (a + 2a) \cdot 2a = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$$

Chọn đáp án B.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a, BD = 2a$ và cắt nhau tại O ; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

B. $\frac{a^3}{3}$

C. $\frac{\sqrt{7}a^3}{3}$

D. $\sqrt{3}a^3$

Hướng dẫn giải:

+Từ giả thiết $AC = 2a\sqrt{3}; BD = 2a$ và AC, BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo. Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO = a\sqrt{3}; BO = a$, do đó $\angle ABD = 60^\circ$

Hay tam giác ABD đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên giao tuyến của chúng là $SO \perp (ABCD)$.

+Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB , K là trung điểm của HB ta có $DH \perp AB$ và

$$DH = a\sqrt{3}; OK \parallel DH \text{ và } OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK).$$

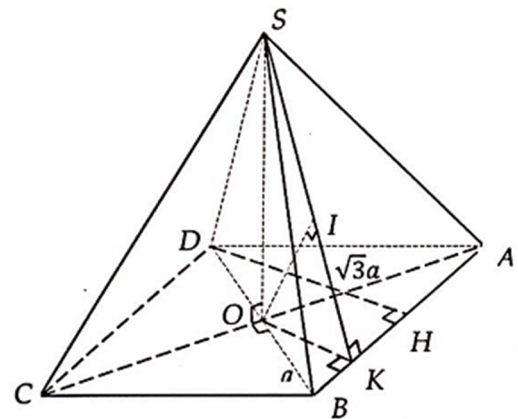
+Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có $OI \perp SK$; $AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) .

$$\text{Tam giác } SOK \text{ vuông tại } O, OI \text{ là đường cao} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy: } S_{ABCD} = 4S_{\triangle ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2;$$

$$\text{Đường cao của hình chóp } SO = \frac{a}{2}. \text{ Thể tích khối chóp } S.ABCD: V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$$

Chọn đáp án A.



HÌNH CHÓP KHÁC

Câu 1: Cho hình chóp tam giác có đường cao bằng 100 cm và các cạnh đáy bằng 20 cm, 21 cm, 29 cm. Thể tích của hình chóp đó bằng

- A. 6000cm^3 B. 6213cm^3 C. 7000cm^3 D. $7000\sqrt{2}\text{cm}^3$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Nửa chu vi của tam giác đáy là } P = \frac{20 + 21 + 29}{2} = 35$$

$$\text{Áp dụng công thức Hê-rông ta có diện tích đáy là } B = \sqrt{35(35-20)(35-21)(35-29)} = 210.$$

$$\text{Thể tích khối chóp cần tìm là } V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.210.100 = 7000 \text{ cm}^3.$$

Chọn đáp án C.

Câu 2: Cho hình chóp $SABCD$ có thể tích bằng 48, đáy $ABCD$ hình thoi. Các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc SA, SB, SC, SD thỏa: $SA = 2SM, SB = 3SN, SC = 4SP, SD = 5SQ$. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{6}{5}$. D. $\frac{8}{5}$.

Hướng dẫn giải:

$$V_{SMNP} = \frac{1}{24}V_{SABC}, V_{SMPQ} = \frac{1}{40}V_{SACD}$$

$$\Rightarrow V_{SMNPQ} = \frac{1}{24}.24 + \frac{1}{40}.24 = \frac{8}{5}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 3: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $ASB = CSB = 60^\circ, CSA = 90^\circ, SA = SB = SC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

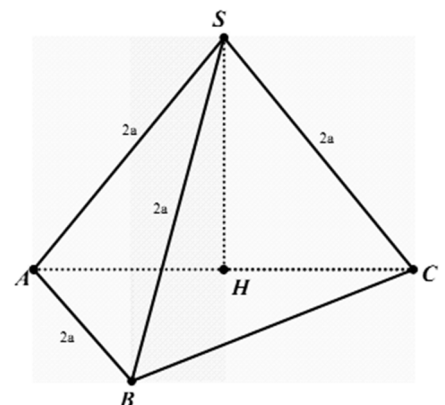
- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Ta có tam giác ABC vuông tại B , Hai tam giác SAB và SBC đều. Vì $SA = SB = SC = 2a$. Hình chiếu của S trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC mà tam giác ABC vuông tại B nên hình chiếu là trung điểm H của AB .

$$SH = \frac{(2a)\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, AB = 2a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(2a)^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

Chọn đáp án C.



Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB; AC; AD$ tạo với nhau góc 60° . Biết $AB = 2a; AC = 3a; AD = 4a$. Tính thể tích $ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ B. $a^3\sqrt{2}$ C. $2a^3\sqrt{2}$ D. $4a^3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Đây là một bài toán khá điển hình của hình học không gian. Mấu chốt của bài toán nằm ở việc lấy thêm điểm để tính toán.

Lấy 3 điểm M, N, P lần lượt thuộc đoạn AB, AC, AD sao cho $AM = AN = AP = a$. Suy ra tứ diện $AMNP$ là tứ diện đều có độ dài các cạnh là a. Đến đây bài toán trở về dạng đơn giản. Ta dễ dàng

tính được thể tích $AMNP$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Lại có: $\frac{V_{ABCD}}{V_{AMNP}} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{AD}{AP} = 2.3.4 = 24 \Rightarrow V_{ABCD} = 24V_{AMNP} = 2a^3\sqrt{2}$

Chọn đáp án C.

Câu 5: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V . Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Khi đó thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ bằng:

- A. $\frac{V}{3}$ B. $\frac{V}{9}$ C. $\frac{V}{27}$ D. $\frac{V}{81}$

Hướng dẫn giải:

Gọi thể tích $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_a \cdot h$

Với $S_{\text{đáy}} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ h là chiều cao hình chóp $S.ABCD$

$V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a' \cdot h_a' \cdot h'$ mà: $h' = \frac{1}{3}h$, $a' = \frac{1}{3}a$, $h_a' = \frac{1}{3}h_a$

Nên $V_{S.A'B'C'D'} = \frac{V_{S.ABCD}}{27}$

Chọn đáp án C.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a$; $BD = 2a$ và cắt nhau tại O ; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

- A. $a^3\sqrt{3}$ B. $\frac{a^3}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB , K là trung điểm của HB ta có:

$DH \perp AB$; $DH = a\sqrt{3}$; $OK \parallel DH$; $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$

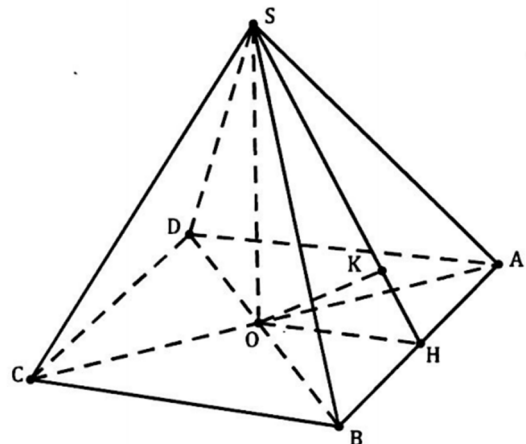
Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có:

$OI \perp SK$; $AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) .

Tam giác SOK vuông tại O , OI là đường cao

$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 4S_{ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$



Đường cao của hình chóp $ASO = \frac{a}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD: V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a^2 \sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$

Chọn đáp án C.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Tính chiều cao của khối chóp $H.SBD$ theo a .

- A.** $\frac{\sqrt{3}a}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. **D.** $\frac{3a}{5}$.

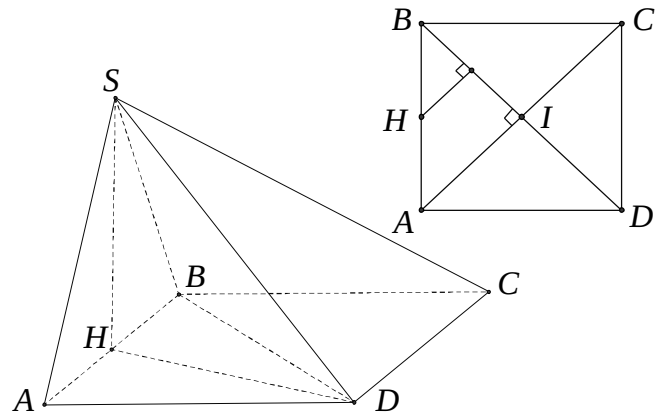
Hướng dẫn giải:

Ta có $\triangle SHD$ vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} = a\sqrt{3}$.

Cách 1. Ta có $d(H, BD) = \frac{1}{2}d(A, BD) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Chiều cao của chóp $H.SBD$ là

$$d(H, (SBD)) = \frac{SH \cdot d(H, BD)}{\sqrt{SH^2 + [d(H, BD)]^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a^2 \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}}{4 \cdot 5a} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$



Cách 2. $S.ABCD = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3 \Rightarrow V_{H.SBD} = \frac{1}{2}V_{A.SBD} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Tam giác $\triangle SHB$ vuông tại $H \Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Tam giác $\triangle SBD$ có $SB = \frac{a\sqrt{13}}{2}$; $BD = a\sqrt{2}$; $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2} \Rightarrow S_{\triangle SBD} = \frac{5a^2}{4}$.

$$\Rightarrow d(H, (SBD)) = \frac{3V_{S.HBD}}{S_{\triangle SBD}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

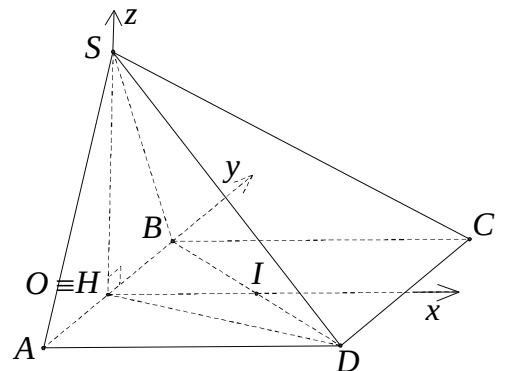
Cách 3. Gọi I là trung điểm BD . Chọn hệ trục $Oxyz$ với $O \equiv H$; $Ox \equiv HI$; $Oy \equiv HB$; $Oz \equiv HS$.

Ta có $H(0;0;0)$; $B(0; \frac{a}{2}; 0)$; $S(0;0; a\sqrt{3})$; $I(\frac{a}{2}; 0; 0)$

Vì $(SBD) \equiv (SBI)$

$$\Rightarrow (SBD): \frac{2x}{a} + \frac{2y}{a} + \frac{z}{a\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y + \frac{\sqrt{3}}{3}z - a = 0.$$

$$\text{Suy ra } d(H, (SBD)) = \frac{\left| 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 - a \right|}{\sqrt{4 + 4 + \frac{1}{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$



Chọn đáp án A.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , $AB = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm đoạn OA . Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích V của hình chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$ B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$ C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm $OA \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vẽ $HE \perp CD$ tại $E \Rightarrow HE \parallel AD$

Vì (SCD) giao $(ABCD)$ theo giao tuyến CD và

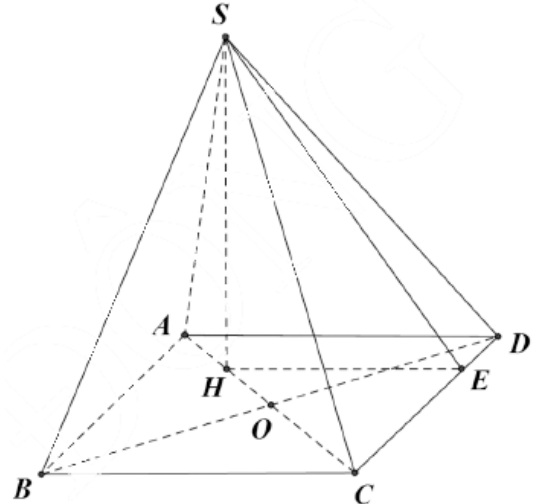
$CD \perp (SHE)$ nên góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là góc

$$\widehat{ABC} = 60^\circ$$

$$HE = \frac{3}{4}AD = \frac{3a}{4}$$

$$SH = HE \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$



Chọn đáp án C.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = \frac{3}{4}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{3\sqrt{39}}{32}$ B. $\frac{\sqrt{39}}{96}$ C. $\frac{\sqrt{39}}{32}$ D. $\frac{\sqrt{39}}{16}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp BD, AO \perp OB$.

Đặt $AC = 2x$.

ta có $SO^2 = SB^2 - OB^2 = AB^2 - OB^2 = OA^2 = x^2$.

Áp dụng CT đường trung tuyến:

$$SO^2 = \frac{SA^2 + SC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{9/16 + 1}{2} - \frac{4x^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{25}{64}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{8} \Rightarrow AC = \frac{5}{4}, BD = 2BO = 2\sqrt{AB^2 - AO^2} = \frac{\sqrt{39}}{4} \Rightarrow$$

$$AC^2 + SC^2 = \frac{25}{16} = AC^2 \Rightarrow \Delta SAC \text{ vuông tại } S.$$

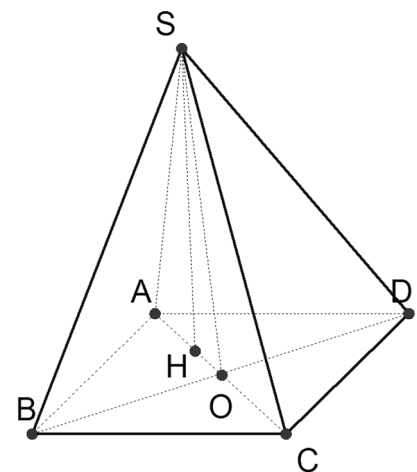
$$\Rightarrow \text{Kẻ } SH \perp AC \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{3}{5}.$$

Do $BD \perp SO, BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow AH \perp (ABCD)$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{39}}{4} = \frac{\sqrt{39}}{32}$$

Chọn đáp án C.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có ΔABC vuông tại B . $BA = a, BC = 2a, \Delta DBC$ đều. cho biết góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng 30° . Xét 2 câu:



(I) Kẻ $DH \perp (ABC)$ thì H là trung điểm cạnh AC.

(II) $V_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$

Hãy chọn câu đúng

A. Chỉ (I)

B. Chỉ (II)

C. Cả 2 sai

D. Cả 2 đúng

Hướng dẫn giải:

$DH \perp (ABC)$, kẻ $DE \perp BC$

$\Rightarrow EB = EC$ (do tam giác đều), $BC \perp HE \Rightarrow \widehat{DEH} = 30^\circ$

Trong $\triangle DHE$: $HE = \left(\frac{2a\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$

Gọi I là trung điểm của AC thì $IE = \frac{a}{2} \Rightarrow HE > IE$ nên nói H là trung điểm của AC là sai: (I) sai

Trong $\triangle DHE$: $DH = a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$ (II) đúng

Chọn đáp án B.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 1, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Cạnh bên $SD = \sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{5}}{24}$.

B. $V = \frac{\sqrt{15}}{24}$.

C. $V = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

D. $V = \frac{\sqrt{15}}{12}$.

Hướng dẫn giải:

Vì $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều.

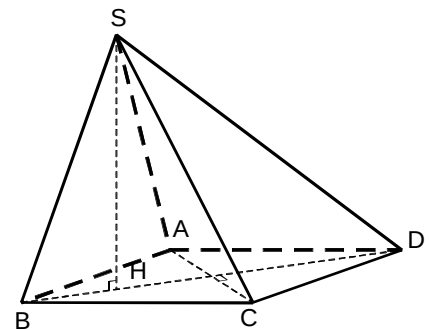
Suy ra $BO = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $BD = 2BO = \sqrt{3}$; $HD = \frac{3}{4}BD = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác vuông SHD , ta có

$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{15}}{24}$ (đvtt).



Chọn đáp án B.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I có cạnh bằng a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi H là trung điểm của IB và SH vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính thể tích của khối chóp $S.AHCD$

A. $\frac{\sqrt{35}}{32} a^3$

B. $\frac{\sqrt{39}}{24} a^3$

C. $\frac{\sqrt{39}}{32} a^3$

D. $\frac{\sqrt{35}}{24} a^3$

Hướng dẫn giải:

Ta sẽ tư duy nhanh như sau: Nhìn vào hình thì dễ nhận ra hai khối chóp $S.ABCD$ và $S.AHCD$ có chung chiều cao nên ta chỉ cần so sánh 2 diện tích đáy. Dĩ nhiên ta thấy

$$\frac{S_{AHCD}}{S_{ABCD}} = \frac{2S_{AHD}}{2S_{ABCD}} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} S_{BCD}}{S_{ABCD}} = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$V_{SAHCD} = \frac{3}{4} V_{SABCD}$$

Mặt khác ta có $BAD = 60^\circ \Rightarrow$ tam giác ABD đều, nên

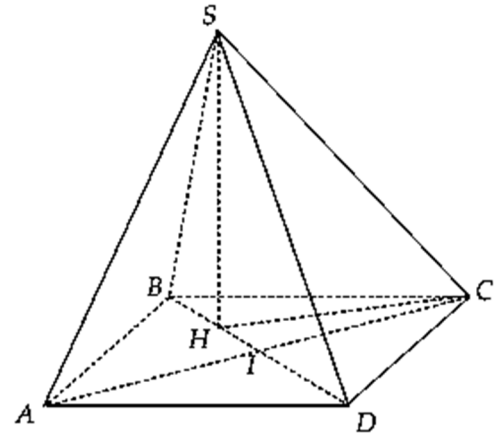
$$AB = BD = AD = a \Rightarrow IH = \frac{a}{4}. \text{ Khi đó}$$

$$HC = \sqrt{IH^2 + IC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}. \text{ Khi đó}$$

$$SH = HC = \frac{a\sqrt{13}}{4} \text{ (do } SCH = 45^\circ \text{ nên tam giác } SCH \text{ vuông cân tại H).}$$

$$\Rightarrow V_{SAHCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{a^3 \sqrt{39}}{32}$$

Chọn đáp án C.



Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC và $SB = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{3\sqrt{5}a^3}{8}.$

B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}.$

C. $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{8}.$

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}.$

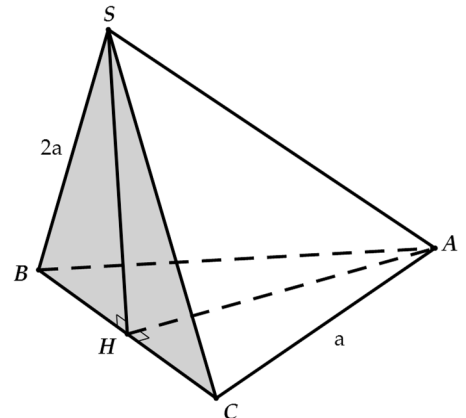
Hướng dẫn giải:

Xét tam giác SBH vuông tại

$$H : SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2} \text{ và } S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{5}a^3}{8}.$$

Chọn đáp án C.



Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC và SA hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}.$

B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}.$

C. $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{8}.$

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}.$

Hướng dẫn giải:

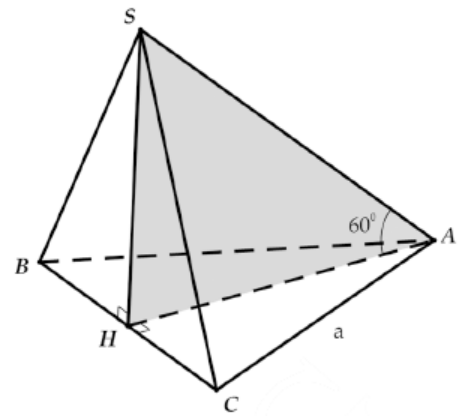
Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SA; (ABC)) = \widehat{SAH} = 60^\circ$.

Xét tam giác SAH vuông tại H : $SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{3a}{2}$ và

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}.$$

Chọn đáp án A.



Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC và SB hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

C. $V = \frac{a^3}{8}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải:

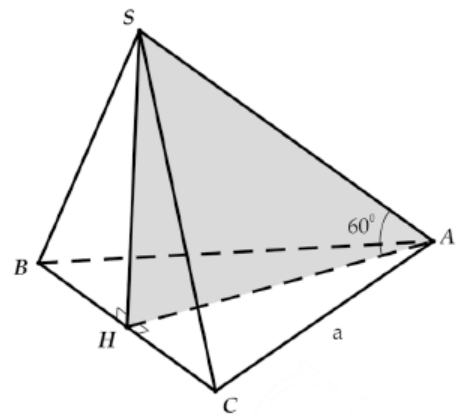
Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SB; (ABC)) = \widehat{SBH} = 60^\circ$.

Xét tam giác SBH vuông tại H : $SH = BH \cdot \tan \widehat{SBH} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

và $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{8}$.

Chọn đáp án C.



Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC và (SAB) hợp với đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{3a^3}{16}$.

B. $V = \frac{a^3}{16}$.

C. $V = \frac{a^3}{8}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải:

Do $HK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp SK$

$\Rightarrow ((SAB); (ABC)) = \widehat{SKH} = 45^\circ$.

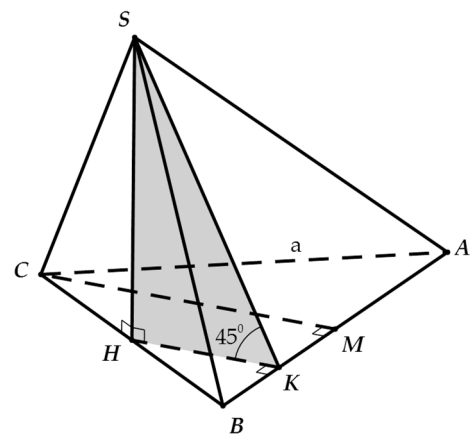
Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow HK = \frac{1}{2} CM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, do

tam giác SHK vuông cân tại $H \Rightarrow SH = HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

và $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{16}$.

Chọn đáp án B.



Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H trên cạnh BC sao cho $\overline{CH} = 2\overline{HB}$, SB hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3}{12}$. B. $V = \frac{a^3}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{4}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải:

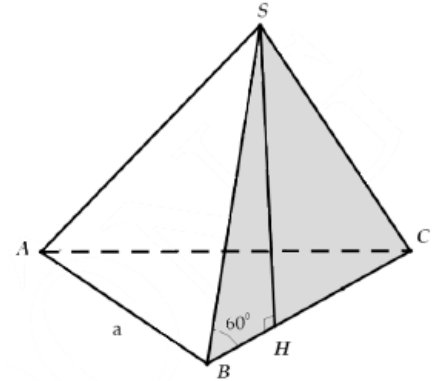
Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SB; (ABC)) = \widehat{SBH} = 60^\circ$.

Xét tam giác SBH vuông tại H : $SH = BH \cdot \tan \widehat{SBH} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

và $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{12}$.

Chọn đáp án A.



Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H trên cạnh BC sao cho $\overline{HC} = 2\overline{BH}$, SA hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3}{12}$. B. $V = \frac{\sqrt{7}a^3}{12}$. C. $V = \frac{a^3}{4}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Hướng dẫn giải:

Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SA; (ABC)) = \widehat{SAH} = 60^\circ$.

Xét tam giác AHB :

$$AH^2 = AB^2 + BH^2 - 2AB \cdot BH \cdot \cos \widehat{ABH} = \frac{7a^2}{9}.$$

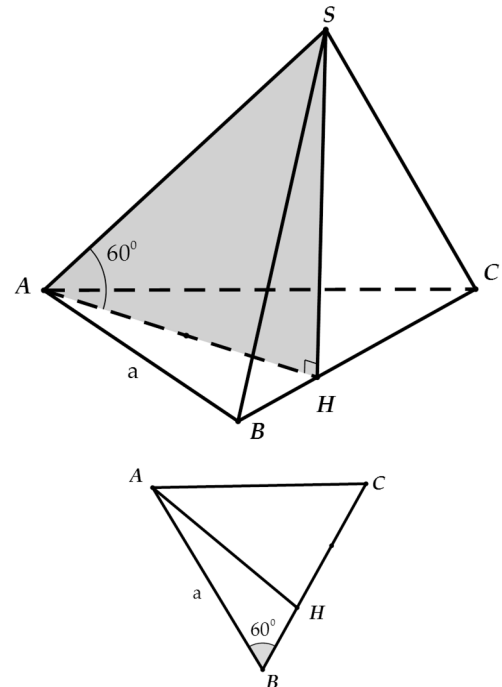
$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

Xét tam giác SAH vuông tại H :

$$H : SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{\sqrt{21}a}{3} \text{ và } S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{7}a^3}{12}.$$

Chọn đáp án B.



Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H trên cạnh BC sao cho $\overline{HC} = 2\overline{BH}$, và tam giác SAH vuông cân. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{21}a^3}{36}$.

B. $V = \frac{\sqrt{7}a^3}{12}$.

C. $V = \frac{a^3}{4}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Hướng dẫn giải:Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SA; (ABC)) = \widehat{SAH} = 60^\circ$.Xét tam giác AHB :

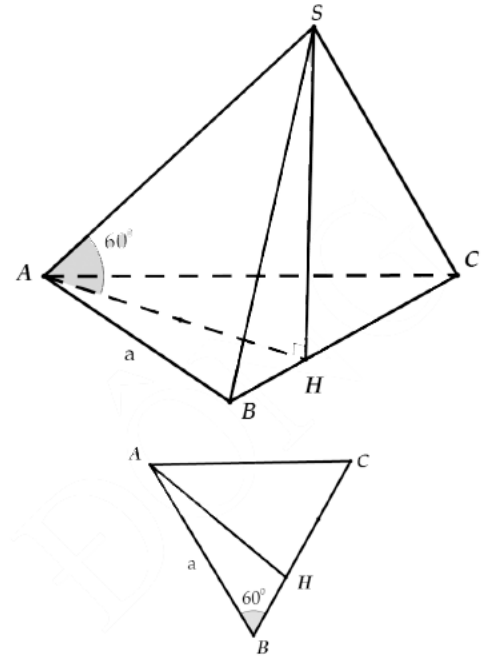
$$AH^2 = AB^2 + BH^2 - 2AB \cdot BH \cdot \cos \widehat{ABH} = \frac{7a^2}{9}.$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

Do tam giác SAH vuông cân tại H nên $SH = AH$ và

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{21}a^3}{36}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{BH}$, (SAB) hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Hướng dẫn giải:Gọi M là trung điểm AB . Dựng $HK \perp AB \Rightarrow HK \parallel CM$ và

$$HK = \frac{1}{3} CM = \frac{a\sqrt{3}}{6}. \text{ Ta có}$$

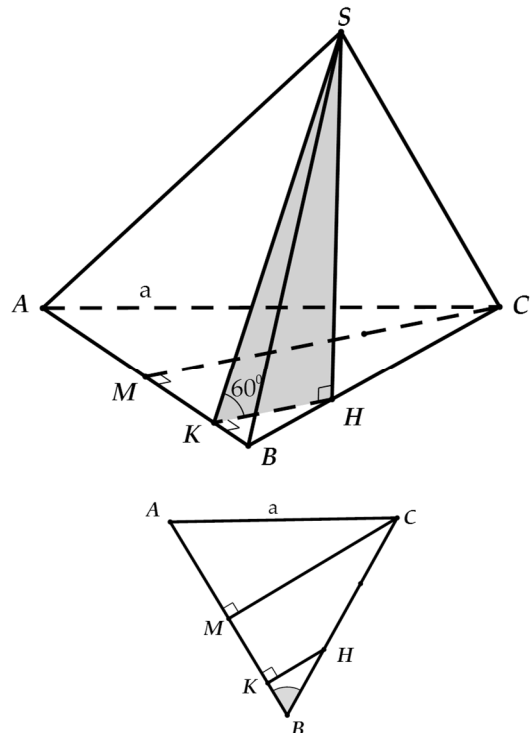
$$AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp SK$$

$$\Rightarrow ((SAB); (ABC)) = \widehat{SKH} = 60^\circ.$$

Xét tam giác SKH vuông tại

$$H : SH = KH \cdot \tan \widehat{SKH} = \frac{a}{2} \text{ và } S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = 1, SB = 2, SC = 3, AB = \sqrt{3}, BC = CA = \sqrt{7}$. Tính thể tích V khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải:

Đáp án đúng : Phương án C

Lời giải:

$$+ \cos \widehat{ASB} = \frac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2SA \cdot SB} = \frac{1 + 4 - 3}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASB} = 60^\circ$$

+

$$\cos \widehat{BSC} = \frac{SB^2 + SC^2 - BC^2}{2SB \cdot SC} = \frac{4 + 9 - 7}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSC} = 60^\circ$$

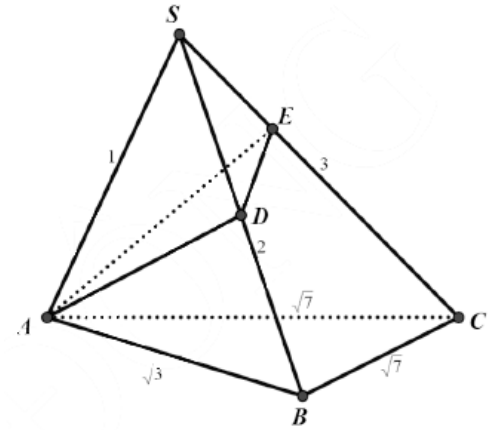
$$+ \cos \widehat{CSA} = \frac{SC^2 + SA^2 - CA^2}{2SC \cdot SA} = \frac{9 + 1 - 7}{2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{CSA} = 60^\circ$$

+ Trên SB lấy trung điểm D và trên SC lấy E sao cho

$$SE = \frac{1}{3}SC.$$

+ Khi đó $SADE$ là tứ diện đều cạnh bằng 1 cho nên thể tích của nó là $V_{SADE} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

$$+ \text{ Mặt khác, } \frac{V_{SADE}}{V} = \frac{SD}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} = \frac{1}{6} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Chọn đáp án C.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Khoảng cách từ trung điểm K của HC đến mặt phẳng (SCD) là:

A. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$

C. $a\sqrt{13}$

D. $\frac{a\sqrt{13}}{8}$

Hướng dẫn giải:

$$(SC, (ABCD)) = (SC, CH) = \widehat{SCH} = 60^\circ$$

$$HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}; SH = HC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{39}}{3}$$

$$V_{SHDC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{HDC} = \frac{1}{3}SH(S_{ABCD} - S_{AHD} - S_{BHC}) = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{39}}{3} \left(a^2 - \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot a \right) = \frac{a^3\sqrt{39}}{18}$$

$$\frac{V_{CKSD}}{V_{CHSD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{CKSD} = \frac{1}{2}V_{CHSD} = \frac{a^3\sqrt{39}}{36}$$

Tính độ dài các cạnh SD, SC . Khi đó:

$$S_{SDC} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow d_{(K, (SDC))} = \frac{3V_{KSDC}}{S_{SDC}} = \frac{a\sqrt{13}}{8}$$

Chọn đáp án D.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB là tam giác cân tại

đỉnh S. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 45° , góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD, biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng $a\sqrt{6}$.

A. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải:

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy, M là trung điểm AB và do tam giác SAB cân tại S nên SM vuông góc với AB và kết hợp với SH vuông góc với đáy suy ra AB vuông góc với mặt phẳng SMN nên theo giả thiết ta được: $(SA, (ABCD)) = \widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow SA = SH\sqrt{2}$

$$((SAB), (ABCD)) = (SM, MH) = \widehat{SMH} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow SM = SH \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

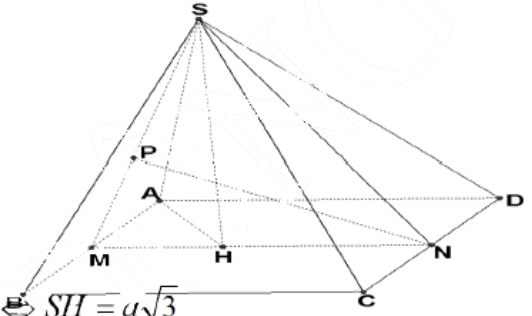
+ Từ điểm N kẻ NP vuông góc với SM thì dễ thấy NP là khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD suy ra

$$NP = a\sqrt{6}. \text{ Ta có}$$

$$SH \cdot MN = NP \cdot SM \Leftrightarrow SH \cdot AB = a\sqrt{6} \cdot SH \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{2}a \Leftrightarrow SH = a\sqrt{3}$$

$$+ \text{ Trong tam giác SAM ta có } SA^2 = AM^2 + SM^2 \Leftrightarrow 2SH^2 = \frac{4SH^2}{3} + 2a^2 \Leftrightarrow SH = a\sqrt{3}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 8a^2}{3} = \frac{8\sqrt{3}a^3}{3}$$



Chọn đáp án A.

Câu 24: Cho mặt phẳng (P) chứa hình vuông ABCD. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A, lấy điểm M. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng P tại C lấy điểm N (N cùng phía với M so với mặt phẳng (P)). Gọi I là trung điểm của MN. Thể tích của tứ diện MNBD luôn có thể tính được bằng công thức nào sau đây?

A. $V = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot S_{IBD}$

B. $V = \frac{1}{3} AC \cdot S_{BDN}$

C. $V = \frac{1}{3} BD \cdot S_{BMN}$

D. $V = \frac{1}{3} BD \cdot S_{MBD}$

Hướng dẫn giải:

Ta có hình vẽ sau:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Suy ra IO song song với AM, suy ra IO vuông góc với mặt phẳng ABCD.

$$\Rightarrow OI \perp AC$$

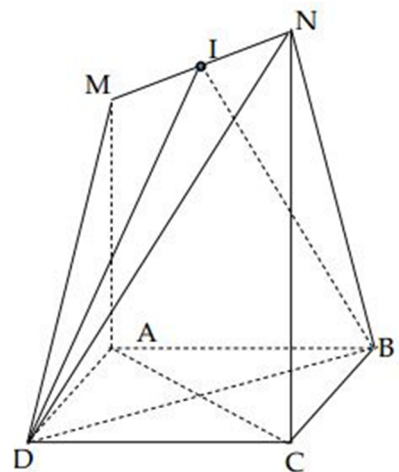
Mà $AC \perp BD$; OI và BD là 2 đường thẳng cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (IBD). Khi đó $AC \perp (IBD)$; hay $AO \perp (IBD)$

Ta có MN giao với (IBD) tại I

$$\Rightarrow \frac{d(M; (IBD))}{d(N; (IBD))} = \frac{IM}{IN} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{V_{MIBD}}{V_{NIBD}} = 1 \Rightarrow V_{MIBD} = V_{NIBD} = \frac{1}{2} V_{MNBD} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } V_{MIBD} = \frac{1}{3} \cdot AO \cdot D_{IBD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC}{2} \cdot S_{IBS} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2)}$$



$$\Rightarrow V_{MNBD} = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot S_{IBD}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 25: Cho khối chóp S.ABC có cạnh đáy $AB = AC = 5a, BC = 6a$ và các mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Hãy tính thể tích V của khối chóp đó?

A. $V = 2a^3\sqrt{3}$

B. $V = 6a^3\sqrt{3}$

C. $V = 12a^3\sqrt{3}$

D. $V = 18a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Kẻ $SO \perp (ABC)$ và OD, OE, OF lần lượt vuông góc với BC, AC, AB . Theo định lý ba đường vuông góc ta có $SD \perp BC, SE \perp AC, SF \perp AB$ (như hình vẽ).

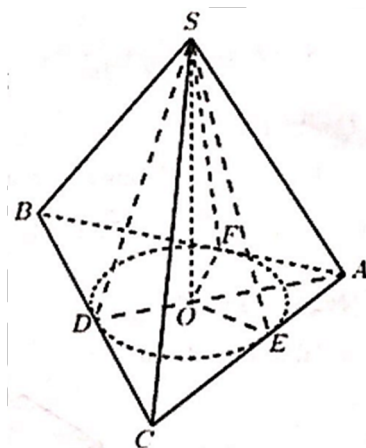
Từ đó suy ra $\widehat{SDO} = \widehat{SEO} = \widehat{SFO} = 60^\circ$. Do đó các tam giác vuông SDO, SEO, SFO bằng nhau. Từ đó suy ra $OD = OE = OF$. Vậy O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Vì tam giác ABC cân tại A nên OA vừa là đường phân giác, vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến. Suy ra A, O, D thẳng hàng và D là trung điểm của BC.

$$\text{Suy ra } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{16a^2} = 4a.$$

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp của nó.

$$\text{Khi đó } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 4a = 12a^2 = pr = 8ar. \text{ Suy ra } r = \frac{3}{2}a$$

$$\text{Do đó } SO = OD \cdot \tan 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}a}{2}. \text{ Vậy } V_{S.ABC} = 6\sqrt{3}a^3.$$



Chọn đáp án B.

Câu 26: Cho hình chóp S.ABC, có tất cả các mặt bên tạo với đáy góc α , hình chiếu của đỉnh thuộc miền trong tam giác ABC. Biết $AB = 3a, BC = 4a$ và $AC = 5a$. Khi đó thể tích V của khối chóp bằng bao nhiêu?

A. $V = 2a^3 \tan \alpha$

B. $V = 2a^3 \cos \alpha$

C. $V = 6a^3 \tan \alpha$

D. $V = 6a^3 \cot \alpha$

Hướng dẫn giải:

Phân tích: đầu tiên cần xác định đường cao. Việc tưởng tượng như đơn gian nhưng nếu không tinh ý nó lại trở nên khó khăn. Mấu chốt của bài toán chính là tất cả các mặt phẳng bên tạo với đáy 1 góc α

Ta có bài toán phụ sau:

Nếu tất cả các mặt bên tạo với đáy 1 góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm nội tiếp mặt đáy

$$\text{Công thức cần dùng } S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)} = p \cdot r = 6a^2$$

$$\text{Hay } 6a^2 = 6a \cdot r \text{ hay } r = a \text{ (r : bán kính nội tiếp tam giác)}$$

$$\text{Chiều cao } r \cdot \tan \alpha = a \cdot \tan \alpha$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot a \tan \alpha \cdot 6a^2 = 2a^3 \cdot \tan \alpha$$

Chọn đáp án A.

Câu 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi có $AC = 2BD = 4a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên (ABCD) là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH = \frac{AC}{4}$, M là hình chiếu vuông góc của C trên SA. Tính thể tích của khối chóp SMBC theo a.

- A. $\frac{4a^3}{15}$ B. $\frac{a^3}{3}$ C. $\frac{2a^3}{3}$ D. $2a^3$

Hướng dẫn giải:

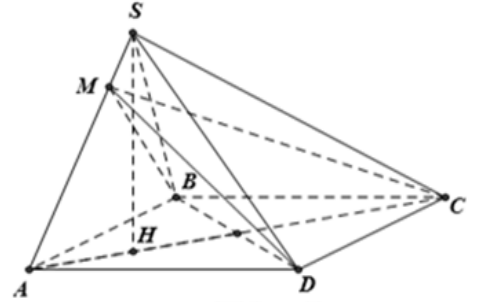
$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a$$

$$\Rightarrow AM = AC \cdot \sin \angle MCA = AC \cdot \sin \angle ASH = AC \cdot \frac{AH}{SA} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AS} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{SMC} = \frac{S_{SAC}}{5}$$

$$\Rightarrow V_{B.SMC} = \frac{V_{B.SAC}}{5} = \frac{V_{S.ABCD}}{10} = \frac{SH \cdot AC \cdot BD}{60} = \frac{4a^3}{15}$$

Chọn đáp án A.



Câu 28: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Gọi I là trung điểm của AB; J là trung điểm của CD. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABCD). Qua H kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt DA và CB dài tại M, N. Các nhận định sau đây.

- (1) Tam giác SIJ là tam giác có $\widehat{SIJ}$ tù
- (2) $\sin \widehat{SIH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
- (3) $\widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD)
- (4) $\cos \widehat{MSN} = \frac{1}{3}$

Chọn đáp án **đúng:**

Hướng dẫn giải:

$$\text{Từ giả thiết ta có } IJ = a; SJ = \sqrt{SC^2 - JC^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SIJ ta có

$$\cos(\widehat{SIJ}) = \frac{IJ^2 + IS^2 - SJ^2}{2 \cdot IJ \cdot IS} = \frac{a^2 + \frac{3a^2}{4} - \frac{11a^2}{4}}{2 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

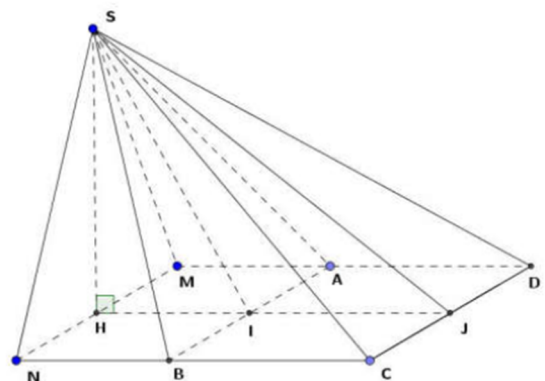
$$= -\frac{a^2}{a^2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$$

Suy ra, tam giác SIJ là tam giác có $\widehat{SIJ}$ tù.

Từ giả thiết tam giác SAB đều và tam giác

SCD là cân đỉnh S, ta có H thuộc IJ và I nằm giữa HJ tức là tam giác vuông SHI có $\widehat{H} = 90^\circ$, góc I

nhọn và $\cos \widehat{I} = \cos \widehat{SIH} = -\cos \widehat{SIJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\widehat{SIJ}$ và $\widehat{SIH}$ kề bù)



$$\sin \widehat{SIH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Từ giả thiết giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là đường thẳng d qua S và song song với AD.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có $SN \perp BC, SM \perp AD \Rightarrow SM \perp d; SN \perp d \Rightarrow \widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng. (SBC) và (SAD), $MN = AB = a$

Xét tam giác HSM vuông tại H có :

$$SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}, HM = \frac{a}{2} \Rightarrow SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SN$$

Theo định lý cosin cho tam giác SMN cân tại S có

$$\cos \widehat{MSN} = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2}{2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = \frac{\frac{2}{4}a^2}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}$$

Chọn đáp án D.

Câu 29: Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = BC = 5a$, $SB = AC = 6a$ và $SC = AB = 7a$.

A. $V = \frac{35\sqrt{2}}{2}a^3$.

B. $V = \frac{35}{2}a^3$.

C. $V = 2\sqrt{95}a^3$.

D. $V = 2\sqrt{105}a^3$.

Hướng dẫn giải:

Qua các đỉnh của tam giác ABC , vẽ các đường thẳng song song với cạnh đối diện, chúng đôi một cắt nhau tạo thành tam giác MNP như hình vẽ.

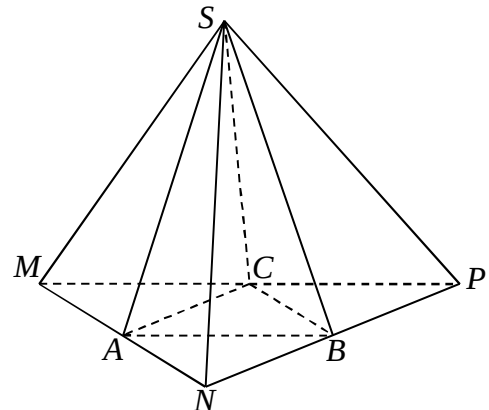
Dễ thấy tứ diện $S.MNP$ là tứ diện vuông đỉnh S và $V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.MNP}$

Đặt $x = SM, y = SN, z = SP$, ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4(5a)^2 \\ y^2 + z^2 = 4(6a)^2 \\ z^2 + x^2 = 4(7a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 76a^2 \\ y^2 = 24a^2 \\ z^2 = 120a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.MNP} = \frac{1}{24}xyz = 2\sqrt{95}a^3$$

Chọn đáp án C.

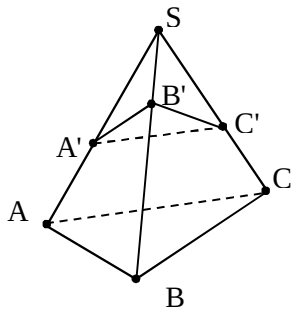


TỈ SỐ THỂ TÍCH

A - LÝ THUYẾT TÓM TẮT

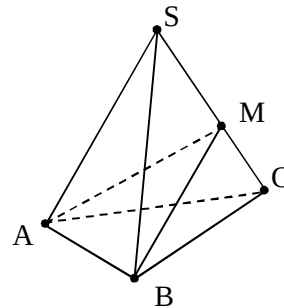
* Cho khối chóp $S.ABC$, $A' \in SA$, $B' \in SB$, $C' \in SC$

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA' \cdot SB' \cdot SC'}$$



* $M \in SC$, ta có:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA \cdot SB \cdot SM}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{SM}{SC}$$



B - BÀI TẬP

Câu 1: Hình chóp $S.ABC$ có $A'B'C'$ lần lượt là trung điểm của SA , SB , SC ; tỷ số thể tích của hai khối chóp $SA'B'C'$ và $SABC$ là:

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{10}$

D. $\frac{1}{8}$

Hướng dẫn giải:

Sử dụng công thức $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8}$.

Chọn đáp án D.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Trên 3 cạnh SA , SB , SC lần lượt lấy 3 điểm A' , B' , C' sao cho $SA' = \frac{1}{2}SA$;

$SB' = \frac{1}{2}SB$; $SC' = \frac{1}{2}SC$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S'.A'B'C'$. Khi

đó tỷ số $\frac{V'}{V}$ là:

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{12}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{16}$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích ta có

$$\frac{V'}{V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Chọn đáp án B.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi A' , B' , C' , D' theo thứ tự là trung điểm của AB , BC , CD , DA . Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$ bằng ?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{8}$

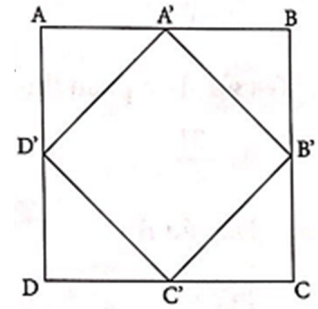
Hướng dẫn giải:

Ta thấy 2 hình chóp $S.ABCD$ và $S.A'B'C'D'$. Có chung chiều cao kẻ từ đỉnh S xuống đáy. Vậy để đi tìm tỉ số khoảng cách thì chúng ta chỉ cần tìm tỉ số diện tích 2 đáy mà ta có hình vẽ như sau:

Ta thấy

$$S_{A'B'C'D'} = A'D' \cdot A'B' = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2}$$

Chọn đáp án A.



Câu 4: Hình chóp $SABC$ có M, N, P theo thứ tự là trung điểm SA, SB, SC . Đặt $k = \frac{V_{MNPABC}}{V_{SABC}}$. Khi đó

giá trị của k là

A. $\frac{8}{7}$

B. $\frac{7}{8}$

C. 8

D. $\frac{1}{8}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } \frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{MNPABC}}{V_{SABC}} = \frac{V_{SABC} - V_{SMNP}}{V_{SABC}} = 1 - \frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \frac{7}{8}$$

Chọn đáp án B.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm SC . Mặt phẳng (P) qua AM và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại P và Q . Khi đó tỉ số thể tích giữa khối $SAPMQ$ và khối $SABCD$ bằng :

A. $\frac{2}{9}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải:

Vì mp song song với BD nên PQ song song với BD . Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Suy luận được SO, AM, PQ đồng quy tại G và G là trọng tâm tam giác SAC .

$$\text{Suy luận được tỉ số } = \frac{SQ}{SD} = \frac{SP}{SB} = \frac{2}{3};$$

$$\text{Chứng minh được tỉ số thể tích: } \frac{V_{SAQM}}{V_{SADC}} = \frac{V_{SAPM}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3};$$

$$\text{Suy ra được: } \frac{V_{SAQM} + V_{SAPM}}{V_{SADC} + V_{SABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{SAPMQ}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{3}$$

Chọn đáp án C.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$, M là trung điểm của SB , điểm N thuộc SC thỏa $SN = 2NC$. Tỉ số

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$$

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Câu 7: Cho khối tứ diện $OABC$ với OA, OB, OC vuông góc từng đôi một và $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AC, BC . Thể tích của khối tứ diện $OCMN$ tính theo a bằng:

- A. $\frac{2a^3}{3}$ B. a^3 C. $\frac{3a^3}{4}$ D. $\frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải:

$$\frac{V_{OCMN}}{V_{COAB}} = \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{OCMN} = \frac{1}{4} V_{COAB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot OA = \frac{a^3}{4} \text{ (dvtt)}$$

Chọn đáp án D.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 48 và $ABCD$ là hình thoi. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, SB, SC, SD thỏa mãn: $SA = 2SM, SB = 3SN, SC = 4SP, SD = 5SQ$. Tính thể tích khối chóp $S.MNPQ$

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{8}{5}$

Hướng dẫn giải:

Lưu ý công thức tỉ lệ thể tích chỉ dùng cho chóp tam giác chung đỉnh và tương ứng tỉ lệ cạnh. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SMQP}}{V_{SADC}} &= \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SQ}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \frac{V_{SMNPQ}}{V_{SABCD}} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SMQP}}{V_{SADC}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \right) \Rightarrow V_{SMNPQ} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Chọn đáp án D.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông cân ở B , $AC = a\sqrt{2}, SA = a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SBC$, một mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N . Thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng

- A. $\frac{4a^3}{27}$ B. $\frac{4a^3}{9}$
C. $\frac{4a^3}{27}$ D. $\frac{2a^3}{27}$

Hướng dẫn giải:

Tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow AC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = BC = a$

Gọi I là trung điểm BC , G là trọng tâm của tam giác SBC

Nên $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$ mà MN song song với BC suy ra $\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SB} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

Do đó $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACB}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{4}{9} V_{S.ACB}$

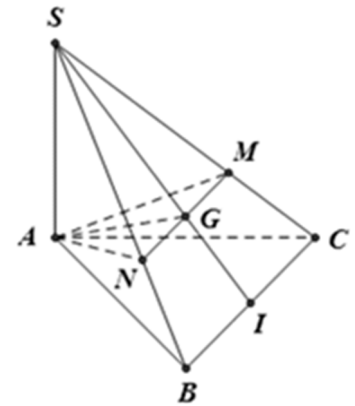
Mặt khác $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{6}$

Suy ra $V_{S.AMN} = \frac{4}{9} V_{S.ACB} = \frac{4}{9} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{2a^3}{27}$.

Chọn đáp án D.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABC$. Lấy A', B' lần lượt thuộc SA, SB sao cho $2SA' = 3A'A; 3SB' = B'B$. Tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $S.A'B'C$ và $S.ABC$ là:

- A. $\frac{3}{20}$ B. $\frac{2}{15}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{3}{10}$



Hướng dẫn giải:

$$36. \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 11: Hình chóp SACB có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$, $AC=a\sqrt{2}$, $AB=3a$. Gọi M,N là hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB và SC. Đặt $k = \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}$, khi đó giá trị của k là

A. $\frac{1}{\sqrt{30}}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{30}$

D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

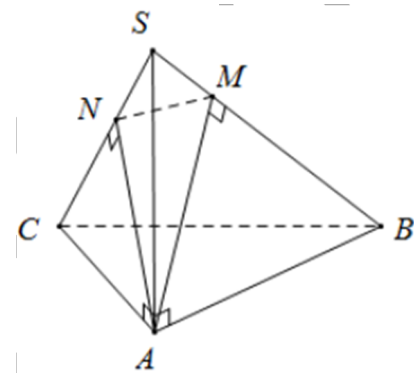
Ta có $k = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC}$

ΔSAC vuông tại A, có $AN \perp SC$ tại N nên

$$\begin{cases} SN \cdot SC = SA^2 \\ CN \cdot CS = CA^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{SN}{CN} = \frac{SA^2}{CA^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}$$

Tương tự $\frac{SM}{BM} = \frac{SA^2}{AB^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{30}$$



Chọn đáp án C.

Câu 12: Cho tứ diện ABCD có các cạnh BA, BC, BD đôi một vuông góc với nhau $BA=3a$, $BC=BD=2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tính thể tích khối chóp C.BDNM

A. $V=8a^3$

B. $V=\frac{2a^3}{3}$

C. $V=\frac{3a^3}{2}$

D. $V=a^3$

Hướng dẫn giải:

$$V_{ABDC} = \frac{1}{3} AB \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} 3a \cdot \frac{1}{2} 2a \cdot 2a = 2a^3$$

$$\frac{V_{AMNC}}{V_{ABDC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{AMNC} = \frac{1}{4} V_{ABDC} = \frac{1}{2} a^3$$

$$\Rightarrow V_{BDNM} = V_{ABDC} - V_{AMNC} = \frac{3a^3}{2}$$

Chọn đáp án C.

Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. M là trung điểm SB và G là trọng tâm của tam giác SBC. Gọi V, V' lần lượt là thể tích của các khối chóp M.ABC và G.ABD, tính tỉ số $\frac{V}{V'}$

A. $\frac{V}{V'} = \frac{3}{2}$

B. $\frac{V}{V'} = \frac{4}{3}$

C. $\frac{V}{V'} = \frac{5}{3}$

D. $\frac{V}{V'} = 2$

Hướng dẫn giải:

Vì các tam giác ABC và ABD có cùng diện tích nên $\frac{V}{V'} = \frac{d(M, (ABCD))}{d(G, (ABCD))} = \frac{MC}{GC} = \frac{3}{2}$

Chọn đáp án A.

Câu 14: Cho khối chóp S.ABC. Trên các đoạn SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA' = \frac{1}{2}SA$; $SB' = \frac{1}{3}SB$; $SC' = \frac{1}{4}SC$. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C' và S.ABC bằng:

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{24}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

Chọn đáp án D.

Câu 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D. SA vuông góc với mặt đáy (ABCD); $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy (ABCD) là 60° . Mặt phẳng (P) đi qua CD và trọng tâm G của tam giác SAB cắt các cạnh SA, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích khối chóp S.CDMN theo thể tích khối chóp S.ABCD.

A. $V_{S.CDMN} = \frac{14}{27}V_{S.ABCD}$

B. $V_{S.CDMN} = \frac{4}{27}V_{S.ABCD}$

C. $V_{S.CDMN} = \frac{10V_{S.ABCD}}{27}$

D. $V_{S.CDMN} = \frac{V_{S.ABCD}}{2}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } V = V_{S.ABCD}, \text{ ta có: } V_{S.CDA} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}; V_{S.ABC} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$$

Mặt phẳng (P) đi qua CD và trọng tâm G của tam giác SAB cắt các cạnh SA, SB lần lượt tại M, N. Khi đó $MN \parallel AB$ và

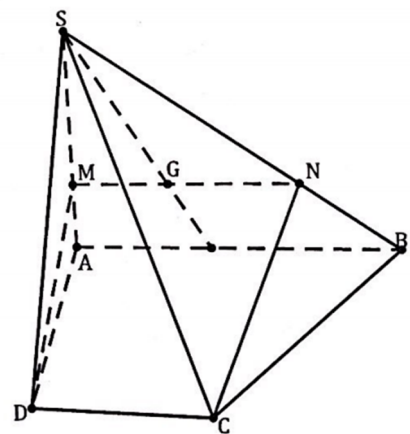
$$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$$

Ta có:

$$\frac{V_{S.CDM}}{V_{S.CDA}} = \frac{SC}{SC} \cdot \frac{SD}{SD} \cdot \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.CDM} = \frac{2}{3}V_{S.CDA} = \frac{2}{9}V$$

$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{4}{9}V_{S.ABC} = \frac{8}{27}V$$

$$\text{Bởi vậy: } V_{S.CDMN} = V_{S.CDM} + V_{S.MNC} = \frac{2}{9}V + \frac{8}{27}V = \frac{14}{27}V$$



Chọn đáp án A.

Câu 16: Cho tứ diện ABCD. Gọi B' và C' lần lượt thuộc các cạnh AB và AC thỏa $3AB' = AB$ và $3AC' = AC$. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối tứ diện $k = \frac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}}$ bằng:

A. $k = \frac{1}{3}$

B. $k = 9$

C. $k = \frac{1}{6}$

D. $k = \frac{1}{9}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Áp dụng bài toán tỉ số thể tích } k = \frac{1}{9}$$

Chọn đáp án D.

Câu 17: Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, BC và AB. Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành 2 phần. Gọi V1 là thể tích của phần chứa đỉnh S, V2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Do (MNP) và (SAC) có M là điểm chung và AC//PN

Từ M kẻ MQ//AC ($Q \in SC$) $\Rightarrow$ (MNP) cắt SC tại Q

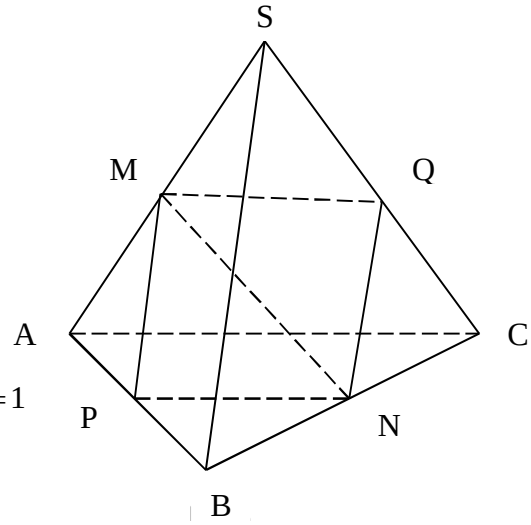
$$\text{Ta có: } V_{SABC} = \underbrace{V_{SMPBNQ}}_{V_1} + \underbrace{V_{AMQCNP}}_{V_2}$$

$$+) V_{AMQCNP} = V_{MAPN} + V_{MANC} + V_{MQCN}$$

$$= \frac{1}{2}d(S;(ABC)) \cdot \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{2}d(S;(ABC)) \cdot \frac{1}{2}S_{ABC}$$

$$+ \frac{1}{2}d(A;(SBC)) \cdot \frac{1}{4}S_{SBC}$$

$$= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)V_{SABC} = \frac{1}{2}V_{SABC} \Rightarrow V_{SMPBNQ} = \frac{1}{2}V_{SABC} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 1$$



Chọn đáp án B.

Câu 18: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của SA, SB. Tỷ số thể tích $\frac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}} = ?$

A. $\frac{1}{2}$

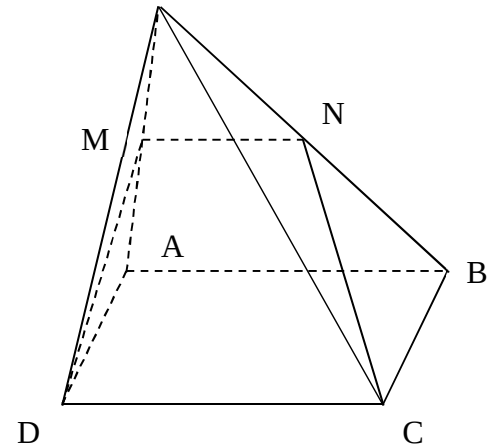
B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \frac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}} &= \frac{V_{S.CDM} + V_{S.CMN}}{V_{S.ACD} + V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.CDM}}{2V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.CMN}}{2V_{S.ABC}} \\ &= \frac{SM}{2SA} + \frac{SM}{2SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$



Chọn đáp án B.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = a$. Một mặt phẳng (α) qua A vuông góc SC tại H và cắt SB tại K. Tính thể tích khối chóp $S.AHK$ theo a.

A. $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{20}$

B. $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{30}$

C. $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{60}$

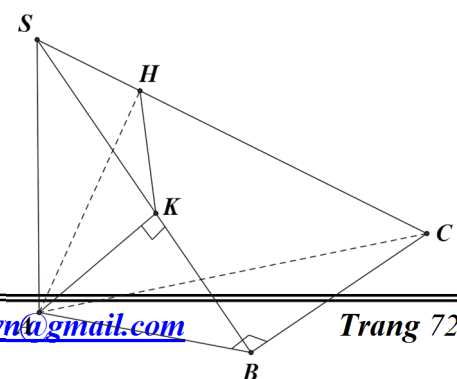
D. $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{90}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} AK \perp SC (AK \perp (\alpha)) \\ AK \perp BC (BC \perp (SAB)) \end{cases}, \text{ suy ra}$$

$$AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB$$

Vì $\triangle SAB$ vuông cân tại A nên K là trung điểm của SB. Ta có:



$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA.SK.SH}{SA.SB.SC} = \frac{SH}{2SC}. \text{ Ta có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$$

$$SC = \sqrt{AC^2 + SA^2} = a\sqrt{5}, \text{ khi đó } \frac{SH}{SC} = \frac{SH.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{2SC} = \frac{1}{10}, \text{ lại có } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Vậy } V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{60}$$

Chọn đáp án C.

Câu 20: Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$ và $AD = 2a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên DB, DC. Tính thể tích V của tứ diện AHKD.

A. $V = \frac{4\sqrt{3}}{21}a^3.$

B. $V = \frac{4\sqrt{3}}{7}a^3.$

C. $V = \frac{2\sqrt{3}}{21}a^3.$

D. $V = \frac{2\sqrt{3}}{7}a^3.$

Hướng dẫn giải:

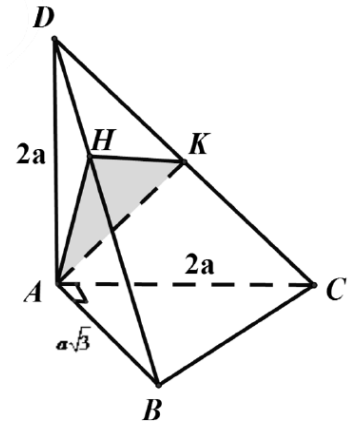
$$\text{Ta có: } \frac{V_{D.AHK}}{V_{D.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SK}{SC} \cdot \frac{DH}{DB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DH \cdot DB}{DB^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD^2}{AD^2 + AB^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4a^2}{4a^2 + 3a^2} = \frac{2}{7}$$

$$V_{D.ABC} = \frac{1}{3}DA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}2a \cdot \frac{1}{2}2a \cdot a\sqrt{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Suy ra } V_{AHKD} = V_{D.AHK} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{21}.$$

Chọn đáp án A.



Câu 21: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có thể tích bằng V với đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng qua AC' và song song với BD cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B'; D'. Khi đó thể tích của khối chóp S.A'B'C'D' bằng

A. $\frac{V}{3}$

B. $\frac{2V}{3}$

C. $\frac{V}{4}$

D. $\frac{V}{2}$

Hướng dẫn giải:

Phân tích: Để giải quyết được bài toán này các em cần dựng được mặt phẳng đi qua AC' và song song với BD sau đó tìm giao điểm của nó với các cạnh SB, SD

Để dựng được mặt phẳng đi qua AC' và song song với BD ta làm như sau:

Gọi O là giao điểm của AC và BD, gọi I là giao điểm của SO và AC'. Qua I kẻ B'D' song song với BD, khi đó ta có mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng (AD'C'B').

Ta dễ dàng nhận thấy rằng I là trọng tâm của tam giác SAC nên $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$

Theo định lí Ta lét ta có $\frac{SD'}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$

Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích của khối chóp tam giác (tứ diện) ta có:

$$\frac{V_{SAD'C'}}{V_{SADC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Mà } V_{SADC} = V_{SABC} = \frac{1}{2} V_{SABCD} \text{ nên } V_{SAD'C'B'} = V_{SAD'C'} + V_{SAB'C'} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{V}{3}$$

Chọn đáp án A.

Câu 22: Cho tứ diện ABCD có $DA=1, DA \perp (ABC)$. ΔABC là tam giác đều, có cạnh bằng 1. Trên 3 cạnh DA, DB, DC lấy điểm M, N, P mà $\frac{DM}{DA} = \frac{1}{2}, \frac{DN}{DB} = \frac{1}{3}, \frac{DP}{DC} = \frac{3}{4}$. Thể tích của tứ diện MNPD bằng:

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}$

B. $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$

C. $V = \frac{\sqrt{3}}{96}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}}{96}$

Hướng dẫn giải:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{V_{DMNP}}{V_{DABC}} = \frac{DM}{DA} \cdot \frac{DN}{DB} \cdot \frac{DP}{DC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{DMNP} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{96}$$

Chọn đáp án C.

Câu 23: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD, M là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) qua AM và song song với BD cắt SB, SD tại N, K. Tính tỉ số thể tích của khối S.ANMK và khối chóp S.ABCD

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng (SAC) gọi G là giao điểm của AM và SO. Ta có G là trọng tâm tam giác SAC.

Trong mp(SBD) kẻ đường thẳng qua G song song với BD cắt SB, SD tại N và K.

$$\text{Gọi } V_{S.ANMK} = V_{S.ANM} + V_{S.AKM}$$

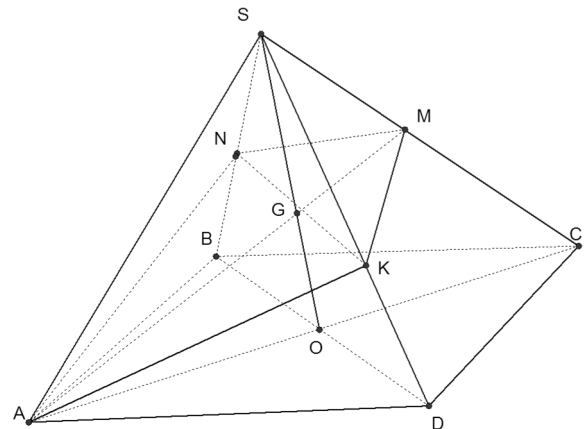
$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ANM} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SK}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.AKM} = \frac{1}{3} V_{S.ADC} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD} \quad V_{S.ANMK} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}$$

Chọn đáp án C.



Câu 24: Cho chóp tứ giác đều SABCD. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Biết rằng $AB = a, \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích V của tứ diện SAB'C'D'

A. $V = \frac{7}{2} a^3$

B. $V = 14a^3$

C. $V = \frac{28}{3} a^3$

D. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$

Chọn đáp án D.

Câu 25: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa (SCD) và (ABCD) bằng 45° . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SC và SD. Thể tích của khối chóp S.AHK là:

- A. $\frac{a^3}{24}$ B. $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{a^3}{6}$ D. a^3

Hướng dẫn giải:

Hướng dẫn: (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $\Rightarrow SA \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SDA} = 45^\circ \Rightarrow SA = AD = a$$

$$V_{S.ACD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta SCD} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$$

$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ACD}} = \frac{SH}{SC} \cdot \frac{SK}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{1}{4} V_{S.ACD} = \frac{a^3}{24}$$

Chọn đáp án A.

Câu 26: Cho khối chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, M là trung điểm cạnh SC và N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$. Tính tỉ số thể tích k giữa hai đa diện SABMN và khối chóp S.ABCD.

- A. $k = \frac{5}{6}$ B. $k = \frac{5}{12}$ C. $k = \frac{1}{3}$ D. $k = \frac{1}{6}$

Hướng dẫn giải:

+ Do ABCD là hình bình hành nên

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC} \Rightarrow V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

$$+ \text{Ta có } \frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ABM}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{và } \frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANM}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$$

+ Suy ra

$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ADC}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ABM} + V_{S.ANM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{V_{SABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{5}{12}$$

$$+ \text{Vậy } k = \frac{5}{12}.$$

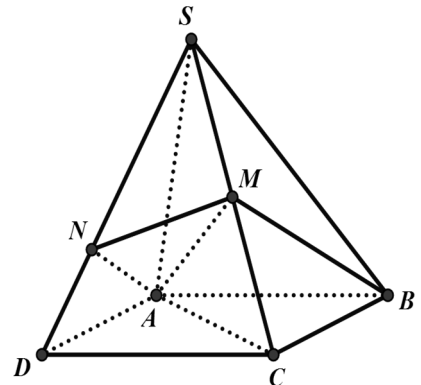
Chọn đáp án B.

Câu 27: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' vì M là trung điểm của CC'. Gọi khối đa diện (H) là phần còn lại của khối lăng trụ ABC.A'B'C' sau khi cắt bỏ đi khối chóp M.ABC. Tỷ số thể tích của (H) và khối chóp M.ABC là:

- A. $\frac{1}{6}$ B. 6 C. $\frac{1}{5}$ D. 5

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi M là trung điểm của CC'}. \text{ Theo bài ra ta có: } V_{M.ABC} = \frac{1}{2} V_{C'.ABC} = a \Rightarrow V_{C'.ABC} = 2a$$



Ta lại có $V_{C'ABC} = \frac{1}{2}V_{AA'B'C'} = 2a$ nên ta có $(H) = V_{AA'B'C'} + V_{MABC} = 2.2a + a = 5a$

Vậy $\frac{(H)}{V_{M.ABC}} = 5$

Chọn đáp án D.

Câu 28: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích là V . Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của AD, DC và $B'C'$. Thể tích của khối tứ diện $QBMN$ bằng:

- A. $\frac{3V}{8}$ B. $\frac{8V}{3}$ C. $\frac{V}{8}$ D. $\frac{V}{4}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $V_{QBMN} = \frac{1}{3}.d(Q;(BMN)).S_{BMN}$ (1). Rõ ràng ta nhận thấy hình tứ diện $QBMN$ và hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng nhau. Nên ta chỉ đi tìm tỉ lệ $\frac{S_{BMN}}{S_{ABCD}}$.

Ta có $S_{ABCD} = S_{DMN} + S_{ABM} + S_{BNC} + S_{BMN}$

$\Rightarrow S_{BMN} = S_{ABCD} - S_{DMN} - S_{ABM} - S_{BNC}$

Mặt khác ta có $\frac{S_{DMN}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{DMN}}{2S_{ADC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$;

$\frac{S_{ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{ABM}}{2S_{ABD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Tương tự thì $\frac{S_{BNC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$, khi đó $S_{BMN} = \left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{8}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{V_{QBMN}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{QBMN} = \frac{V}{8}$

Chọn đáp án C.

Câu 29: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V . Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Khi đó thể tích chóp $S.A'B'C'D'$ bằng?

- A. $\frac{V}{3}$ B. $\frac{V}{9}$ C. $\frac{V}{27}$ D. $\frac{V}{81}$

Hướng dẫn giải:

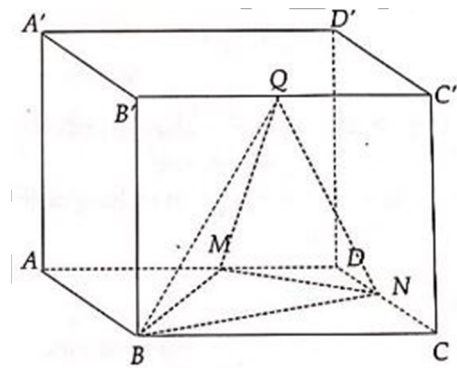
Vì $(A'B'C'D') \parallel (ABCD) \Rightarrow A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, C'D' \parallel CD$

Mà: $\frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{3}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là $V_{S.ABC}, V_{S.ACD}$

Ta có: $V_1 + V_2 = V$

$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{V_1}{27}$.

$\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V_{S.A'C'D'} = \frac{V_2}{27}$.



$$\text{Vậy } V_{S.A'BC'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{V_1 + V_2}{27} = \frac{V}{27}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 30: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Mặt phẳng $(MB'D')$ chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

- A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{7}{17}$ C. $\frac{7}{24}$ D. $\frac{5}{17}$

Hướng dẫn giải:

+ Lập thiết diện của khối hộp đi qua mặt phẳng $(MB'D')$. Thiết diện chia khối hộp thành hai phần trong đó có $AMN.A'B'D'$

+ Lấy N là trung điểm của $AD \rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABD

$$\Rightarrow MN \parallel BD \text{ và } MN = \frac{1}{2}.BD$$

$$\Rightarrow MN \parallel B'D' \text{ và } MN = \frac{1}{2}.B'D'$$

$\Rightarrow M, N, B', D'$ đồng phẳng với nhau $\Rightarrow$ Thiết diện là $MNB'D'$.

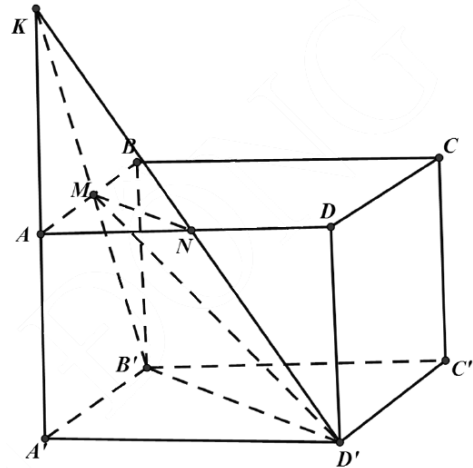
Nhận thấy $AMN.A'B'D'$ là hình đa diện được tách ra từ $K.A'B'D'$ (K là giao điểm của MB', ND' và AA')

+ Áp dụng định lý Ta lét ta có :

$$\frac{KA}{KA'} = \frac{KM}{KB'} = \frac{KN}{KD'} = \frac{MN}{B'D'} = \frac{1}{2}, \quad \frac{V_{K.AMN}}{V_{K.A'B'D'}} = \frac{KA}{KA'} \cdot \frac{KM}{KB'} \cdot \frac{KN}{KD'} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow V_{AMN.A'B'D'} = \frac{7}{8} \cdot V_{K.A'B'D'} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} KA' \cdot AB' \cdot AD' = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2AA' \cdot A'B' \cdot A'D' = \frac{7}{24} \cdot S_{\text{hình hộp}}$$

$$\Rightarrow \text{Tỷ lệ giữa 2 phần đó là } \frac{7}{17}$$



Chọn đáp án B.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD . Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại Q, P . Đặt $\frac{SQ}{SB} = x$, V_1 là thể

tích của khối chóp $S.MNQP$, V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V_1 = \frac{1}{2}V$.

- A. $x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$ B. $x = \sqrt{2}$ C. $x = \frac{1}{2}$ D. $x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$

Hướng dẫn giải:

$$(\text{HS tự vẽ hình}) \text{ Ta có } V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{V}{2}, \quad V_1 = V_{S.MNQ} + V_{S.NPQ}$$

$$+) \text{ Vì } MN \parallel BC \text{ nên } PQ \parallel BC \rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SB} = x$$

$$+) \frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SQ}{SB} = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{V_{S.MNQ}}{\frac{V}{2}} = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{V_{S.MNQ}}{V} = \frac{x}{8}; \quad \frac{V_{S.NPQ}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SQ}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}x^2$$

$$\rightarrow \frac{V_{S.NPQ}}{V} = \frac{x^2}{4}$$

+) Ta có: $V_1 = \frac{1}{2}V \Leftrightarrow \frac{V_{S.MNQ} + V_{S.NPQ}}{V} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{8} + \frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}$. Suy ra đáp án.

Câu 32: Hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$; góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Thể tích của hình chóp S.ADNM bằng:

- A. $\frac{a^3}{4\sqrt{6}}$ B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8\sqrt{2}}$ C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8\sqrt{2}}$ D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{8}$

Hướng dẫn giải:

- Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$

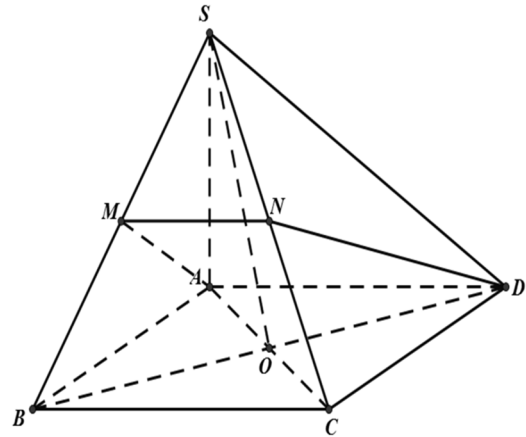
$$AC = a\sqrt{2} \rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$SA = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$$

-Tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ và tỉ số $\frac{V_{S.ADN}}{V_{S.ACD}} = \frac{1}{2}$

-Vì $V_{S.AMN} = V_{S.ADN}$ nên $V_{S.ADMN} = \frac{3}{8}V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$



Chọn đáp án B.

Câu 33: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (P) qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N. Gọi V, V' lần lượt là thể tích các khối S.ABCD và S.AMKN. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ có giá trị nhỏ nhất là:

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Hs tự vẽ hình

$$\text{Đặt } x = \frac{SM}{SB}; y = \frac{SN}{SD} \Rightarrow V' = V_{S.AMK} + V_{S.ANK} = \frac{V}{4}(x + y) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } V' = V_{S.AMN} + V_{S.MNK} = \frac{3xy}{4}V \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có: $x + y = 3xy$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}, \left(y > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \right), y = \frac{SN}{SD} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \leq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}, \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{4(3x-1)} \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right)$. F(x) đạt GTNN bằng $\frac{1}{3}$

Chọn đáp án C.

Câu 34: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số SM: SA để thể tích khối đa diện MNPQ.M'N'P'Q' đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

+ Áp dụng định lý Talet.

Đặt $\frac{SM}{SA} = k$. Áp dụng định lý Talet trong Tam giác SADcó $MN \parallel AD$

$$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow MN = k \cdot AD$$

Áp dụng định lý Talet trong Tam giác SAB có $MQ \parallel AB$

$$\frac{MQ}{AB} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow MQ = k \cdot AB. \text{ Kẻ đường cao SH của}$$

hình chóp.

Áp dụng định lý Talet trong Tam giác SAH có $MM' \parallel SH$

$$\frac{MM'}{SH} = \frac{AM}{SA} = 1 - \frac{SM}{SA} = 1 - k \Rightarrow MM' = (1 - k) \cdot SH$$

$$\Rightarrow V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = MN \cdot MQ \cdot MM' = AD \cdot AB \cdot SH \cdot k(1 - k) = V_{\text{hình chóp}} \cdot k \cdot (1 - k)$$

$$V \text{ min khi và chỉ khi } k = 1 - k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Chọn đáp án A.

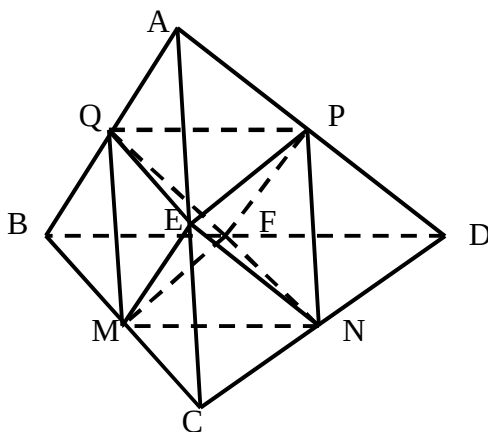
Câu 35: Cho khối tứ diện có thể tích bằng V . Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Hướng dẫn giải:

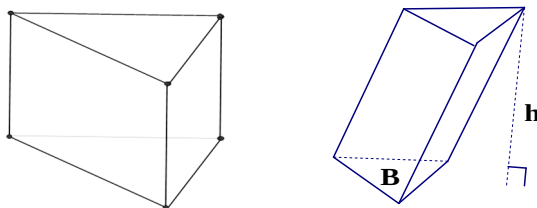
$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{V'}{V} &= \frac{V - V_{A.QEP} - V_{B.QMF} - V_{C.MNE} - V_{D.NPF}}{V} = 1 - \frac{V_{A.QEP}}{V} - \frac{V_{B.QMF}}{V} - \frac{V_{C.MNE}}{V} - \frac{V_{D.NPF}}{V} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A.**HÌNH LĂNG TRỤ**

A - LÝ THUYẾT TÓM TẮT**1. Thể tích khối lăng trụ:**

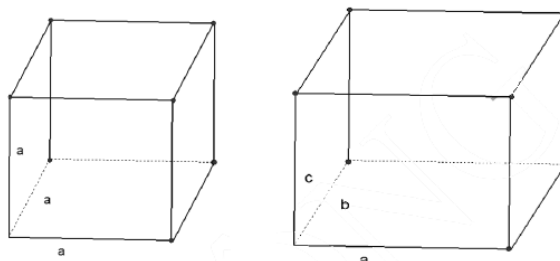
$$V = B.h$$

với B là diện tích đáy, h là chiều cao

**2) Thể tích khối hộp chữ nhật:**

$$V = a.b.c$$

với a, b, c là ba kích thước

**3) Thể tích khối lập phương:**

$$V = a^3$$

với a là độ dài cạnh

B – BÀI TẬP**THỂ TÍCH LĂNG TRỤ ĐỨNG**

Câu 1: Thể tích (cm^3) khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy và cạnh bên cùng bằng $\sqrt{2}$ cm là:

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Để dàng tính được $V = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Chọn đáp án A

Câu 2: Thể tích khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải:

$V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ nên chọn C.

Chọn đáp án C.

Câu 3: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. $AB = 2a$, $BC = a$, $AA' = 2a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $4a^3\sqrt{3}$

D. $2a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a \cdot 2a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$

Chọn đáp án D.

Câu 4: Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. V_1 là thể tích của tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $V = 6V_1$

B. $V = 4V_1$

C. $V = 3V_1$

D. $V = 2V_1$

Hướng dẫn giải:

Ta có hình vẽ sau:

$$\text{Ta có } V = S_{ABCD} \cdot AA'; \quad V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{ABD} \cdot AA'$$

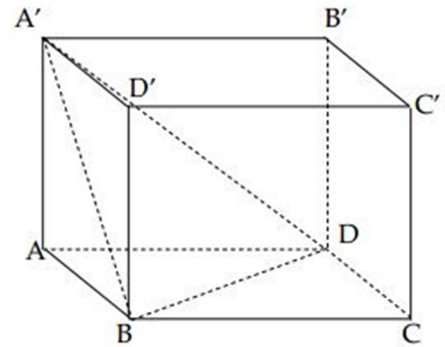
$$\text{Mà } S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{V}{V_1} = \frac{2 \cdot S_{ABD} \cdot AA'}{\frac{1}{3} S_{ABD} \cdot AA'} = 6$$

$$\Rightarrow V = 6V_1$$

Chú ý nhiều độc giả tư duy nhanh nên chỉ xét tỉ số giữa diện tích đáy mà quên mất rằng với khối chóp thì còn tích với $\frac{1}{3}$

nữa, và nhanh chóng chọn ý D là sai. Vì thế, nhanh nhưng cần phải chính xác bạn nhé.

Chọn đáp án A.



Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích mặt chéo $ACC'A'$ bằng $2\sqrt{2}a^2$. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là:

A. $2\sqrt{2}a^3$

B. $2a^3$

C. $\sqrt{2}a^3$

D. a^3

Hướng dẫn giải:

Để tính được thể tích của hình lập phương thì ta cần biết cạnh của hình lập phương đó, từ dữ liệu diện tích mặt chéo $A'ACC'$ ta sẽ tính được cạnh của hình lập phương

Gọi cạnh của hình lập phương là x suy ra

$A'C' = x\sqrt{2}$. Diện tích mặt chéo $A'ACC'$ là $x \cdot x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$. Thể tích hình lập phương là $V = x^3 = 2\sqrt{2}a^3$

Chọn đáp án A.

Câu 6: Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$ biết rằng $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 45° . Thể tích lăng trụ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $a^3\sqrt{3}$

D. $a^3\sqrt{2}$

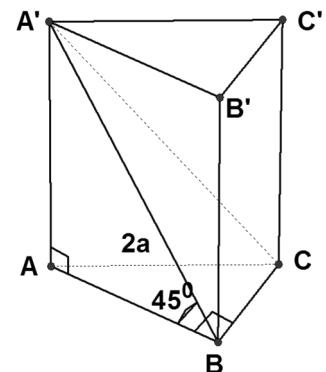
Hướng dẫn giải:

- $\widehat{ABC} = 45^\circ$

- $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow 2a = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = AA' = a\sqrt{2}$

- $V = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot AA' = a^3\sqrt{2}$

Chọn đáp án D.



Câu 7: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AA_1 . Thể tích khối chóp $M.BCA_1$ là:

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải:

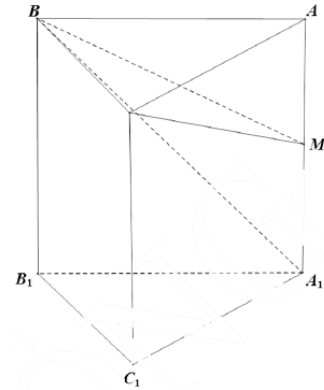
ΔABC là tam giác đều cạnh a nên có diện tích $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Ta có $AM = \frac{AA_1}{2} = \frac{a}{2}$

Hai tứ diện $MABC$ và MA_1BC có chung đỉnh C , diện tích hai đáy MAB và MA_1B bằng nhau nên có thể tích bằng nhau, suy ra

$$V_{M.BCA_1} = V_{M.ABC} = \frac{1}{3}AM.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Chọn đáp án B.



Câu 8: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, cạnh đáy bằng a . Gọi N, I lần lượt là trung điểm của AB, BC ; góc giữa hai mặt phẳng $(C'AI)$ và (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $NAC'I$?

A. $32\sqrt{3}a^3$

B. $\frac{a^3}{32}$

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

Hướng dẫn giải:

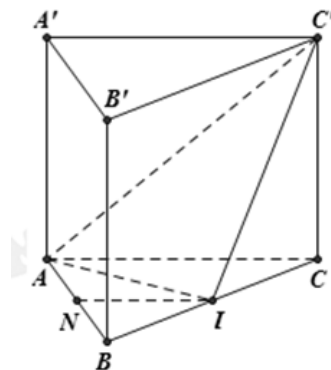
Ta có $((C'AI), (ABC)) = \widehat{CIC'} = 60^\circ$

Mặt khác $\tan \widehat{CIC'} = \frac{CC'}{CI} \Rightarrow CC' = CI \cdot \tan \widehat{CIC'} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $S_{ANI} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$

$$\Rightarrow V_{C'.NAI} = \frac{1}{3}CC'.S_{NAI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^3}{32}$$

Chọn đáp án B.



Câu 9: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , $BA = BC = a$, $A'B$ tạo với (ABC) một góc 60° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

C. $\sqrt{3}a^3$

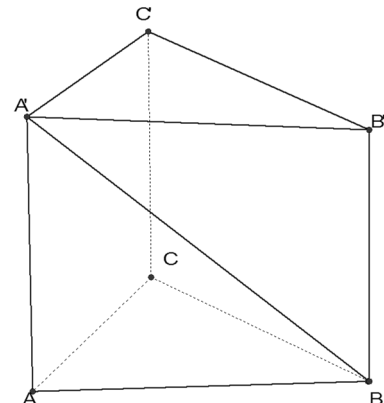
D. $\frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải:

Góc giữa $A'B$ và đáy là góc $\widehat{ABA'} = 60^\circ$, $AA' = a\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{a^2}{2}$. Vậy thể tích của lăng trụ là: $V = S_{ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A.



Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $(A'BC)$ hợp với mặt đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ C. $\frac{3a^3}{24}$ D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AM$ là hình chiếu vuông góc của $A'M$ trên (ABC) , nên $(A'BC), (ABC)$ bằng góc $\widehat{A'MA} = 30^\circ$

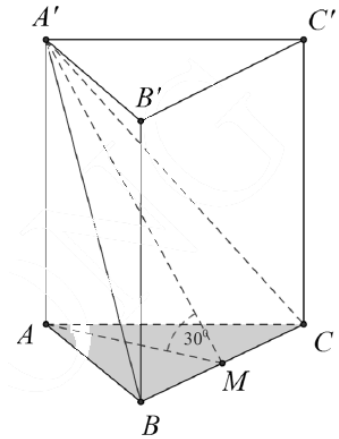
Xét $\triangle A'MA$ vuông tại A . Ta có

$$A'A = AM \cdot \tan \widehat{A'MA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot A'A = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Chọn đáp án B.



Câu 11: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60° . Tính theo a thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải:

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm $B'C'$, do tam giác $A'B'C'$ đều

Nên suy ra $A'M \perp B'C'$.

Khi đó $60^\circ = \widehat{(AB'C'), (A'B'C')} = \widehat{AM, A'M} = \widehat{AMA'}$.

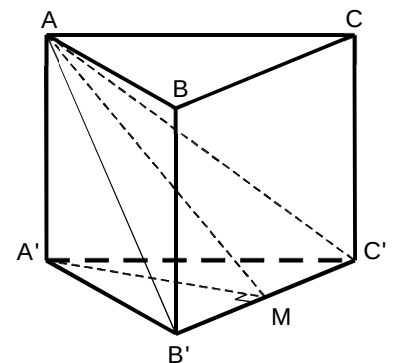
Tam giác $AA'M$, có

$$A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AA' = A'M \cdot \tan \widehat{AMA'} = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Diện tích tam giác đều } S_{\triangle A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} \text{ (đvtt)}.$$

Chọn đáp án D.



Câu 12: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB=3a$, $BC=a\sqrt{2}$, mặt bên $(A'BC)$ hợp với mặt đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích khối lăng trụ.

- A. $\frac{7\sqrt{6}a^3}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{9\sqrt{6}a^3}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

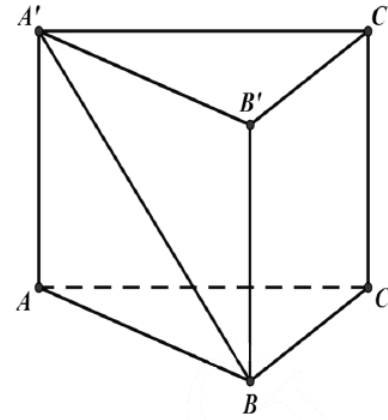
Hướng dẫn giải:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a\sqrt{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Đường cao } AA' = AB \tan 60^\circ = 3a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{3a^2\sqrt{2}}{2} \cdot 3a\sqrt{3} = \frac{9a^3\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn đáp án C.



Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\angle ACB = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BB'C'C)$ tạo với mặt phẳng $mp(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ theo a là:

A. $V = a^3 \frac{4\sqrt{6}}{3}$

B. $V = a^3 \sqrt{6}$

C. $V = a^3 \frac{2\sqrt{6}}{3}$

D. $V = a^3 \frac{\sqrt{6}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Tính được $AB = a\sqrt{3}$; $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; Góc $\angle AC'B = 30^\circ$ nên $AC' = 3a$.

Pitago cho tam giác vuông ACC' tính được $CC' = 2a\sqrt{2}$. Từ đó $V = a^3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án B.

Câu 14: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo $B'C$ của mặt bên $(BB'C'C)$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ theo a .

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

B. $a^3\sqrt{6}$

C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{24}$

Hướng dẫn giải:

Vì $A'B' \perp (ACC')$ suy ra $\widehat{B'CA'} = 30^\circ$ chính là góc tạo bởi đường chéo BC' của mặt bên $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$. Trong tam giác ABC ta có $AB = AC \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà $AB = A'B' \Rightarrow A'B' = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông $A'B'C'$ ta có: $A'C' = \frac{A'B'}{\tan 30^\circ} = 3a$.

Trong tam giác vuông $A'AC$ ta có:

$$AA' = \sqrt{A'C'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V_{LT} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{6}$$

Chọn đáp án B.

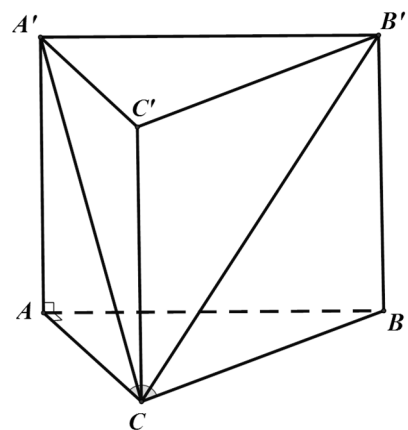
Câu 15: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đường chéo bằng a . Khi đó thể tích khối tứ diện $AA'B'C'$ là.

A. $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$

B. $\frac{a^3}{18\sqrt{3}}$

C. $\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$

D. $\frac{a^2}{18\sqrt{3}}$



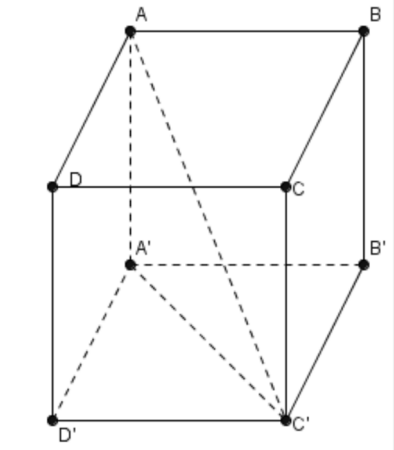
Hướng dẫn giải:

Gọi x là cạnh hình lập phương ta có $AA'^2 + A'C'^2 = AC'^2$

$$x^2 + (x\sqrt{2})^2 = a^2 \Rightarrow x = a / \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{A'B'C'} \cdot AA' = \frac{1}{6} x^3 = \frac{a^3}{18\sqrt{3}}$$

Chọn đáp án B.



Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a, BC = 2a, AA' = a$. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AM = 3MD$. Tính thể tích khối chóp M.AB'C.

A. $V_{M.AB'C} = \frac{a^3}{2}$

B. $V_{M.AB'C} = \frac{a^3}{4}$

C. $V_{M.AB'C} = \frac{3a^3}{4}$

D. $V_{M.AB'C} = \frac{3a^3}{2}$

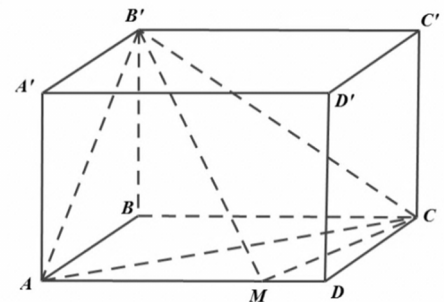
Hướng dẫn giải:

Thể tích khối chóp M.AB'C bằng thể tích khối chóp B'.AMC

Ta có : $S_{\triangle AMC} = \frac{3}{4} S_{\triangle ADC} = \frac{3a^2}{4}$

Do đó $V_{M.AB'C} = V_{B'.AMC} = \frac{3a^3}{4}$

Chọn đáp án C.



Câu 17: Khối lập phương ABCD.A'B'C'D' có thể tích bằng a^3 . Tính độ dài của A'C.

A. $A'C = a\sqrt{3}$

B. $A'C = a\sqrt{2}$

C. $A'C = a$

D. $A'C = 2a$

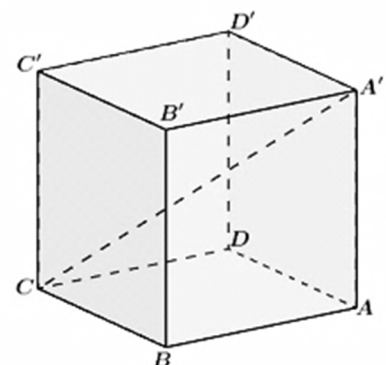
Hướng dẫn giải:

Ta có: $A'C = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}$

Mà $AB = AD = AA', V = AB \cdot AD \cdot AA' = a^3$

$AB = a, AD = a, AA' = a$. Suy ra $A'C = a\sqrt{3}$

Chọn đáp án A.



Câu 18: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính thể tích V của hình lập phương biết rằng khoảng cách từ trung điểm I của AB đến mặt phẳng $A'B'CD$ bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$

A. $V = \frac{a^3}{3}$

B. $V = a^3$

C. $V = 2a^3$

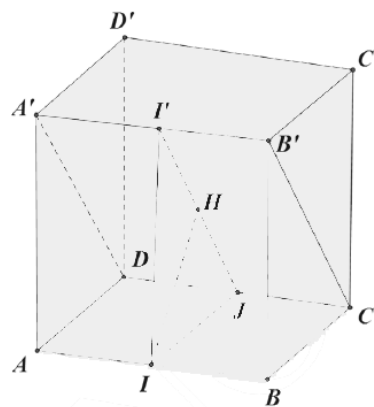
D. $V = a^3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi các điểm như hình vẽ bên trong đó $IH \perp I'J$. Đặt cạnh

$$AB = x \text{ suy ra } IH = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a. \text{ Vậy } V = a^3$$

Chọn đáp án B.



Câu 19: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A'BCD') bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích hình hộp theo a.

A. $V = a^3$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{21}}{7}$

C. $V = a^3\sqrt{3}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh A'B

$$\Rightarrow AH \perp A'BCD' \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Gọi $AA' = x > 0$. Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác AA'B:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AB.AD = a\sqrt{3}.a.a = a^3\sqrt{3}$$

Chọn đáp án C.

Câu 20: Người ta gọt một khối lập phương bằng gỗ để lấy khối tám mặt đều nội tiếp nó (tức là khối có các đỉnh là các tâm của các mặt khối lập phương). Biết cạnh của khối lập phương bằng a. Hãy tính thể tích của khối tám mặt đều đó:

A. $\frac{a^3}{6}$

B. $\frac{a^3}{12}$

C. $\frac{a^3}{4}$

D. $\frac{a^3}{8}$

Hướng dẫn giải:

Tính được cạnh của hình bát diện đều bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

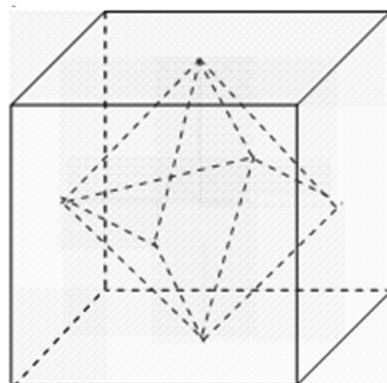
$$\text{Thể tích hình bát diện đều có cạnh } \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ là } V = \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{a^3}{6}$$

nên

Nhận xét: Ta có công thức tính thể tích của hình bát diện đều

$$\text{cạnh } x \text{ là } V = \frac{x^3\sqrt{2}}{3}$$

Chọn đáp án A.



Câu 21: Đường chéo của một hình hộp chữ nhật bằng d , góc giữa đường chéo và mặt đáy là α , góc nhọn giữa hai đường chéo của đáy bằng β . Thể tích của hình hộp đó là:

A. $\frac{1}{2}d^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \beta$

B. $\frac{1}{3}d^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \beta$

C. $d^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \beta$

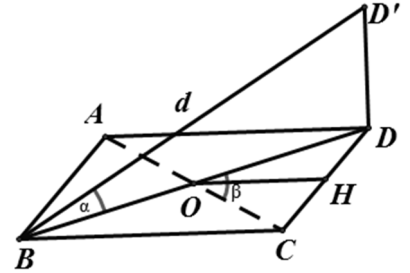
D. $\frac{1}{2}d^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \beta$

Hướng dẫn giải:

Tính được: $BD = d \cos \alpha \Rightarrow OD = \frac{1}{2}d \cos \alpha$ và $DD' = d \sin \alpha$

Tính được: $HD = \frac{1}{2}d \cos \alpha \sin \frac{\beta}{2} \Rightarrow CD = d \cos \alpha \sin \frac{\beta}{2}$

Tính được: $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = d \cos \alpha \cos \frac{\beta}{2} \dots$



Chọn đáp án A.

Câu 22: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$

B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{48}$

C. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{12}$

D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$

Hướng dẫn giải:

HS tự vẽ hình

Đặt chiều cao của lăng trụ là h và gọi M là trung điểm của BC thì ta có hệ thức

$$\frac{1}{d^2(A, A'BC)} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{4}{3a^2} = \frac{8}{3a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V = S.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$$

Chọn đáp án D.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA' ; BB' ; CC' ; DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $AM = \frac{1}{3}a$, $CP = \frac{2}{5}a$. Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ là:

A. $\frac{11}{30}a^3$

B. $\frac{a^3}{3}$

C. $\frac{2a^3}{3}$

D. $\frac{11}{15}a^3$

Hướng dẫn giải:

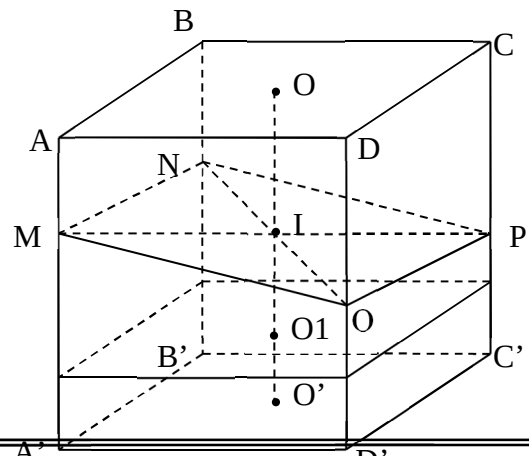
Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành có tâm là I thuộc đoạn OO' .

Ta có: $OI = \frac{AM + CP}{2} = \frac{11}{30}a < \frac{a}{2}$

Gọi O_1 là điểm đối xứng O qua I thì :

$OO_1 = 2OI = \frac{11}{15}a < a$. Vậy O_1 nằm trong đoạn OO' .

Vẽ mặt phẳng qua O_1 song song với $(ABCD)$ cắt các cạnh AA' ; BB' ; CC' ; DD' lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1 . Khi đó I là tâm của hình hộp



$$ABCD.A_1B_1C_1D_1. \text{ Vậy } V(ABCD.MNPQ) = V(MNPQ.A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{2}V(ABCD.A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{2}a^2OO_1 = \frac{11}{30}a^3$$

Chọn đáp án A.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{D} = 60^\circ$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{2}$. Tính khoảng cách k từ A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $k = \frac{3a}{\sqrt{5}}$

B. $k = a\sqrt{\frac{3}{5}}$

C. $k = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

D. $k = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Diện tích đáy } S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}B.SA \Rightarrow SA = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAM) \quad (1)$$

$$BC \subset (SBC) \quad (2)$$

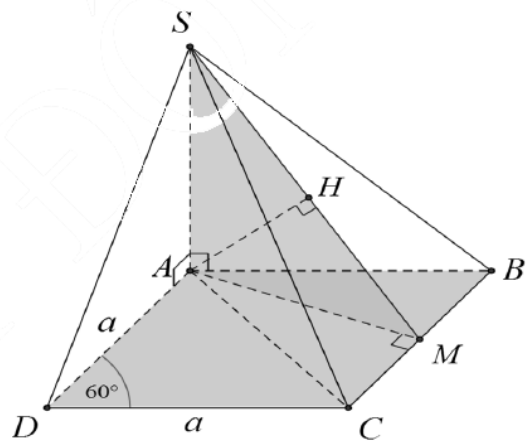
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$$

$$(SAM) \cap (SBC) = SM. \text{ Kẻ } AH \perp SM \Rightarrow AH = d(A, (SBC))$$

Xét ΔSAM vuông tại A . Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{5} \Rightarrow AH = k = a\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Chọn đáp án B.



Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a . Mặt bên $ABB'A'$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B, A'C$. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $A'.AMN$ và $A'.ABC$.

A. $\frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{1}{3}$

C. $\frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{1}{4}$

D. $\frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{1}{5}$

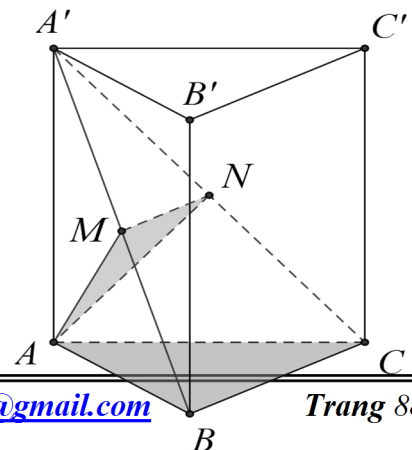
Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{A'M}{A'B} \cdot \frac{A'N}{A'C}$$

$$M \text{ là trung điểm của } A'B \Rightarrow \frac{A'M}{A'B} = \frac{1}{2}$$

$$N \text{ là trung điểm của } A'C \Rightarrow \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_{A'.AMN}}{V_{A'.ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



Chọn đáp án C.

Câu 26: Cho lăng trụ tam giác đều $ABCD.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . M là trung điểm cạnh AB . Mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với CB' , cắt các cạnh BC , CC' , AA' lần lượt tại N , E , F . Xác định N , E , F và tính thể tích khối chóp $C.MNEF$.

A. $\frac{7a^3}{128}$

B. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{128}$

C. $\frac{21\sqrt{3}a^3}{128}$

D. $\frac{7a^3}{128\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải:

Xác định N , E , D . Gọi I , J lần lượt là trung điểm BC , CC' . Khi đó $mp (AIJ) \perp B'C$. Suy ra $mp (P)$ qua M và song song mặt phẳng $mp(AIJ)$. Do đó

$MN \parallel AI, NE \parallel IJ; EF \parallel AJ$

Tính thể tích khối chóp $C.MNEF$. Thấy ngay ENC là góc giữa mặt phẳng (P) và $mp(ABC)$. Tứ giác $MNCA$ là hình chiếu vuông góc của tứ giác $MNEF$ trên $mp(ABC)$.

$$\text{Suy ra } dt(MNEF) = \frac{dt(MNCA)}{\cos ENC}$$

$$\text{Ta có } ENC = \frac{\pi}{4}, dt(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Suy ra:

$$dt(MNEF) = \frac{dt(ABC) - dt(BMN)}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{32}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{7\sqrt{6}a^2}{32}$$

$$\text{Mặt khác } d(C, mp(MNEF)) = \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}a}{8}$$

$$\text{Gọi } V \text{ là thể tích khối chóp } C.MNEF, \text{ ta có: } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{7\sqrt{6}a^2}{32} \cdot \frac{3\sqrt{2}a}{8} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{128}$$

Chọn đáp án B.

Câu 27: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi diện tích S_1 , các tứ giác $ACC'A'$ và $BDD'B'$ có diện tích lần lượt là S_2 , S_3 . Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tính theo S_1 , S_2 , S_3 là ?

A. $\sqrt{\frac{S_1 S_2 S_3}{2}}$

B. $\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{S_1 S_2 S_3}$

C. $\sqrt{\frac{S_1 S_2 S_3}{3}}$

D. $\frac{\sqrt{S_1 S_2 S_3}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi đáy của hình hộp có độ dài 2 đường chéo là $AC = a$, $BD = b$ và đường cao hình hộp là $AA' = BB' = c$

$$\text{Suy ra được } S_1 = \frac{1}{2}ab; S_2 = AC.AA' = ac; S_3 = BD.BB' = bc \Rightarrow S_1 S_2 S_3 = \frac{a^2 b^2 c^2}{2}$$

$$\text{Thể tích khối hộp là: } V = S_1 \cdot c = \frac{1}{2}abc = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2}{2}} = \sqrt{\frac{S_1 S_2 S_3}{2}}$$

Chọn đáp án A.

Câu 28: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông có thể tích là V . Để diện tích toàn phần của lăng trụ nhỏ nhất thì cạnh đáy của lăng trụ bằng:

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$

B. $\sqrt[3]{V^2}$

C. $\sqrt[3]{V}$

D. $\sqrt{V}$

Hướng dẫn giải:

Gọi x, h lần lượt là cạnh đáy và chiều cao của lăng trụ. Có $V = x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{x^2}$

$$S_{tp} = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + 4\frac{V}{x} = 2\left(x^2 + \frac{V}{x} + \frac{V}{x}\right) \geq 2.3\sqrt{x^2 \cdot \frac{V}{x} \cdot \frac{V}{x}} = 6\sqrt[3]{V^2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = \frac{V}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{V}$

Chọn đáp án C.

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (BDC') chia khối lập phương thành 2 phần có tỉ lệ thể tích phần nhỏ so với phần lớn là :

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{2}{10}$

Hướng dẫn giải:

Nhìn vào hình vẽ ta có thể thấy 2 phần của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ chia bởi mặt phẳng (BDC') gồm hình chóp $BCC'D$ và phần còn lại

$$\text{Tỉ lệ cần tính sẽ là } T = \frac{V_{BCC'D}}{V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{BCC'D}}$$

Giả sử hình lập phương có cạnh là 1

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 1^3 = 1$$

Hình chóp $BCC'D$ có đáy là tam giác vuông cân DCC' , đỉnh B, đường cao BC

$$\Rightarrow V_{BCC'D} = \frac{1}{3} \cdot BC \cdot S_{DCC'} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$T = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

Chọn đáp án D.

Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. I là trung điểm BB' . Mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành 2 phần có tỉ số thể tích phần bé chia phần lớn bằng:

A. 1:3

B. 7:17

C. 4:14

D. 1:2

Hướng dẫn giải:

Coi như khối lập phương có cạnh bằng 1.

Để giải bài toán này, ta phải xác định đúng thiết diện cắt bởi mặt phẳng (DIC')

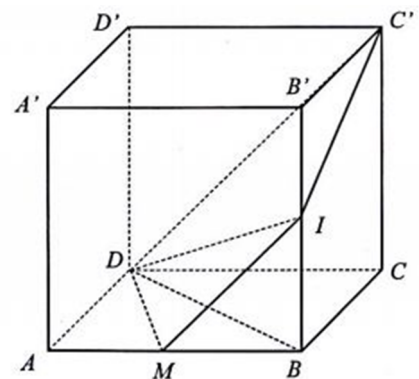
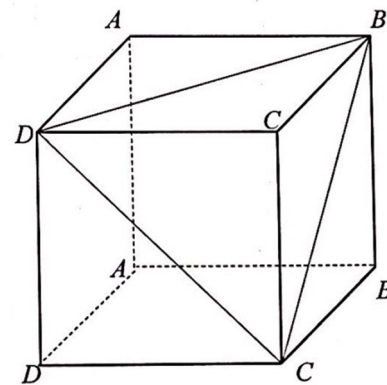
Lấy M là trung điểm AB thì IM là đường trung bình tam giác ABB' nên $IM \parallel AB' \parallel DC'$

Suy ra bốn điểm I, M, C', D cùng thuộc một mặt phẳng $(C'ID)$

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (DIC') là tứ giác $C'DMI$

Phần có thể tích nhỏ hơn là khối đa diện $C'IBMDC$

Để thuận tiện tính toán ta chia khối trên thành 2 phần là tứ diện $IMBD$ và hình chóp $DIBCC'$.



$$V_{IMBD} = \frac{1}{3} \cdot IB \cdot S_{BDM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot IB \cdot DA \cdot MB = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$V_{D.IBCC'} = \frac{1}{3} \cdot DC \cdot S_{IBCC'} = \frac{1}{3} \cdot DC \cdot \frac{1}{2} \cdot (IB + CC') \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{Suy ra thể tích khối có thể tích nhỏ hơn là } V_n = V_{IMBD} + V_{DIBCC'} = \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{7}{24}$$

$$\text{Thể tích phần lớn hơn là } V_l = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_n = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

$$\text{Vậy tỉ lệ cần tìm là } V_n : V_l = 7 : 17$$

Nhận xét: Đây là một bài toán khá khó đòi hỏi khả năng dựng hình và xác định điểm phù hợp của thí sinh. Có một số bạn xác định đúng thiết diện nhưng gặp khó khăn trong việc tính thể tích các phần vì chưa chia được khối thể tích thành các hình nhỏ hơn để tính cho phù hợp.

Chọn đáp án D.

Câu 31: Cho hình lập phương ABCD.A'B'CD' cạnh a. Trên cạnh AA' kéo dài về phía A' lấy điểm M trên cạnh BC kéo dài về phía C lấy điểm N sao cho MN cắt cạnh C'D'. Tính giá trị nhỏ nhất của MN?

A. 3a

B. $2a\sqrt{2}$ C. $3a\sqrt{3}$ D. $2a\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Đây là một bài toán sử dụng phương pháp tọa độ hóa. Đối với việc tọa độ hóa. Đối với việc tọa độ hóa này việc quan trọng nhất đó là sự cẩn thận và chính xác.

Trộn hệ trục tọa độ Axyz với $A(0;0;0); B(a;0;0); A'(0;0;a); D(0;a;0)$.

Gọi $M(0;0;m)$ và $N(a;n;0)$. Ta có $(ADD'A') \cap (BCC'C') = (MD'NC)$

$(MD'NC)$ cắt $(ADD'A')$ theo giao tuyến MD' và cắt

$(BCC'C')$ theo giao tuyến CN do đó $MD' \parallel CN$

Lại có $\overrightarrow{MD'} = (0;a;a-m); \overrightarrow{NC'} = (0;a-n;a)$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{a-n} = \frac{a-m}{a} \Rightarrow m = \frac{an}{n-a}$$

$$\text{Có } MN^2 = AB^2 + BN^2 + AM^2 = a^2 + m^2 + n^2$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = \left(\frac{an}{n-a}\right)^2 + n^2 + a^2 = \left(\frac{n^2 - an + a^2}{n-a}\right)^2$$

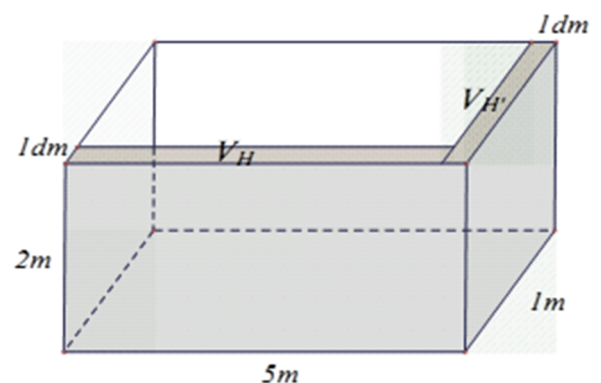
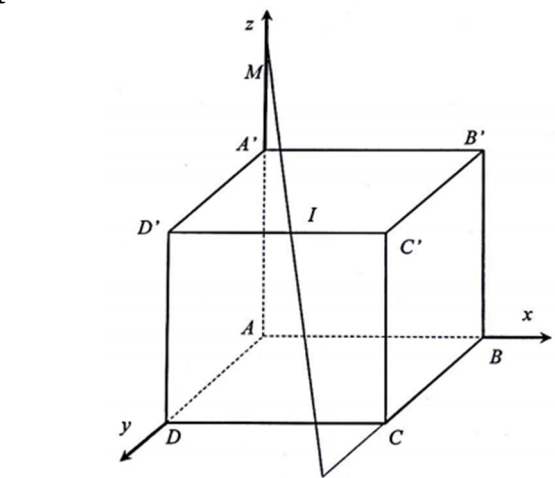
$$\Leftrightarrow MN = \frac{n^2 - an + a^2}{n-a}$$

$$\text{Xét hàm số } f(n) = \frac{n^2 - an + a^2}{n-a} \text{ trên } [0; +\infty)$$

Ta được MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3a khi $n = 2a$

Chọn đáp án A.

Câu 32: Người ta muốn xây một bồn chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là 5 m, 1m, 2m (hình vẽ bên). Biết mỗi viên gạch có chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 5 cm. Hỏi người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bồn đó và thể tích thực của bồn chứa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể)



- A. 1182 viên; 8800 lít
C. 1180 viên; 8800 lít

- B. 1180 viên; 8820 lít
D. 1182 viên; 8820 lít

Hướng dẫn giải:

Gọi V là thể tích của hình hộp chữ nhật, có $V = 5.1.2 = 10m^3$

Ta có $V_H = 0,1.4.9.2 = 0,98m^3$ và $V_{H'} = 0,1.1.2 = 0,2m^3$

Do đó $V_H + V_{H'} = 0,98 + 0,2 = 1,18m^3$. Mà thể tích của một viên gạch là

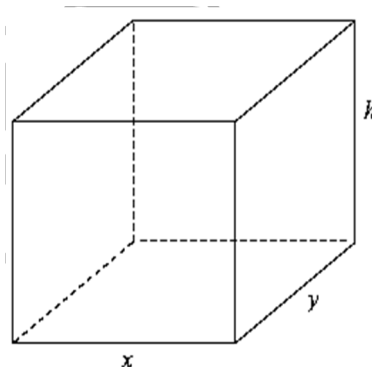
$V_G = 0,2.0,1.0,05 = 0,001m^3$.

Nên số viên gạch cần sử dụng là: $\frac{V_H + V_{H'}}{V_G} = \frac{1,18}{0,001} = 1180$ viên gạch.

Thể tích thực của bồn là $V_B = 10 - 1,18 = 8,82m^3 \Rightarrow V_B = 8820dm^3 = 8820l$.

Chọn đáp án B.

Câu 33: Một người thợ nhôm kính nhận được đơn đặt hàng làm một bể cá cảnh bằng kính dạng hình hộp chữ nhật không có nắp có thể tích $3,2 m^3$; tỉ số giữa chiều cao của bể cá và chiều rộng của đáy bể bằng 2 (hình dưới). Biết giá một mét vuông kính để làm thành và đáy của bể cá là 800 nghìn đồng. Hỏi người thợ đó cần tối thiểu bao nhiêu tiền để mua đủ số mét vuông kính làm bể cá theo yêu cầu (coi độ dày của kính là không đáng kể so với kích thước của bể cá).



- A. 9,6 triệu đồng

- B. 10,8 triệu đồng

- C. 8,4 triệu đồng

- D. 7,2 triệu đồng

Hướng dẫn giải:

Theo hình vẽ ta có $xyh = 3,2$ và $h = 2x \Rightarrow x^2y = 1,6 \Rightarrow y = \frac{1,6}{x^2}$

Tổng diện tích 5 mặt của bể cá là

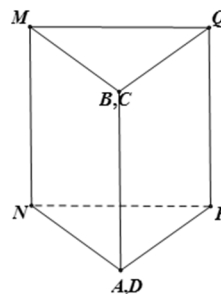
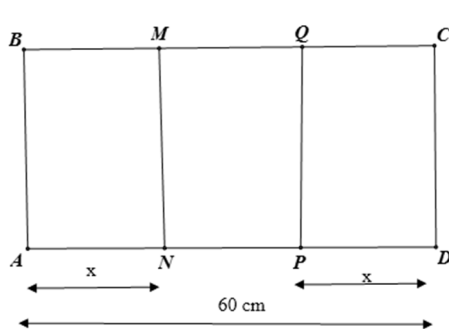
$$S = xy + 2xh + 2yh = \frac{1,6}{x} + 4x^2 + \frac{6,4}{x} = 4x^2 + \frac{8}{x} = 4x^2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x} \geq 12$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Vậy tổng diện tích tối thiểu là $12 m^2$, suy ra số tiền tối thiểu cần là 9,6 triệu.

Chọn đáp án A.

Câu 34: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD = 60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



- A. $x = 20$

- B. $x = 15$

- C. $x = 25$

- D. $x = 30$

Hướng dẫn giải:

Ta có $PN = 60 - 2x$, gọi H là trung điểm của PN suy ra $AH = \sqrt{60x - 900}$

$S_{\Delta ANP} = \frac{1}{2} \cdot (60 - 2x) \sqrt{60x - 900} = (60 - 2x)(\sqrt{15x - 225}) = f(x)$, do chiều cao của khối lăng trụ không đổi nên thể tích khối lăng trụ max khi $f(x)$ max.

$$f'(x) = \frac{-45(x-20)}{\sqrt{15x-225}} = 0 \Leftrightarrow x = 20, f(20) = 100\sqrt{3}, f(15) = 0$$

$$\max f(x) = 100\sqrt{3} \text{ khi } x = 20$$

Chọn đáp án A.

Câu 35: Cần phải xây dựng một hồ ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $V(m^3)$, hệ số k cho trước (k- tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy). Gọi $x, y, h > 0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hồ ga. Hãy xác định $x, y, h > 0$ xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất. x, y, h lần lượt là

A. $x = 2\sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = \sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$

B. $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = \sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = 2\sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$

C. $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = 2\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$

D. $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = 6\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $x, y, h(x, y, h > 0)$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hồ ga.

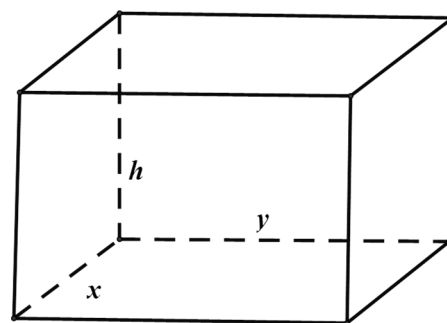
Ta có: $k = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = kx$ và $V = xyh \Leftrightarrow y = \frac{V}{xh} = \frac{V}{kx^2}$.

Nên diện tích toàn phần của hồ ga là:

$$S = xy + 2yh + 2xh = \frac{(2k+1)V}{kx} + 2kx^2$$

Áp dụng đạo hàm ta có S nhỏ nhất khi $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}$

Khi đó $y = 2\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}, h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$

Chọn đáp án C.

THỂ TÍCH LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 1: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 30 (đơn vị thể tích). Thể tích của khối tứ diện $AB'C'C$ là:

- A. 12,5 (đơn vị thể tích) B. 10 (đơn vị thể tích)
C. 7,5 (đơn vị thể tích) D. 5 (đơn vị thể tích)

Hướng dẫn giải:

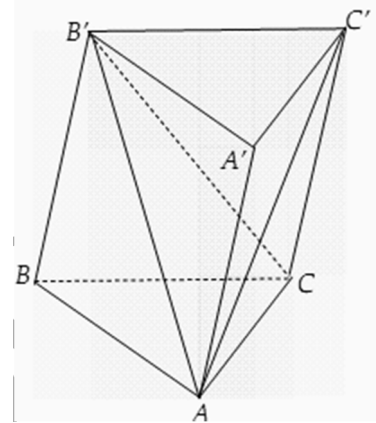
Khi đó ta có thể so sánh trực tiếp cũng được, tuy nhiên ở đây ta có thể suy luận nhanh như sau:
Khối $B'ABC$ có chung đường cao kẻ từ đỉnh B' đến đáy (ABC) và chung đáy ABC với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Do vậy

$$\frac{V_{B'ABC}}{V_{ABCA'B'C'}} = \frac{1}{3}$$

Tương tự ta có $\frac{V_{AA'B'C'}}{V_{ABCA'B'C'}} = \frac{1}{3}$, khi đó

$$\Rightarrow V_{AB'C'C} = \frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'} \Rightarrow V_{AB'C'C} = \frac{30}{3} = 10$$

Chọn đáp án B.



Câu 2: Một khối lăng trụ tam giác có các cạnh đáy bằng 13, 14, 15, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° và có chiều dài bằng 8. Khi đó thể tích khối lăng trụ là

- A. 340 B. 336 C. $274\sqrt{3}$ D. $124\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$$

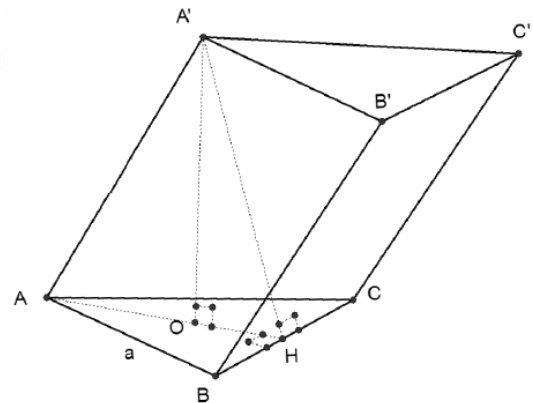
Gọi O là hình chiếu của A' trên (ABC)

$\Delta A'AO$ vuông tại O cho ta :

$$A'O = AA' \cdot \sin 30^\circ = 4$$

$$\text{Vậy: } V_{ABC.A'B'C'} = 84 \cdot 4 = 336$$

Chọn đáp án B.



Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB . Mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ bằng:

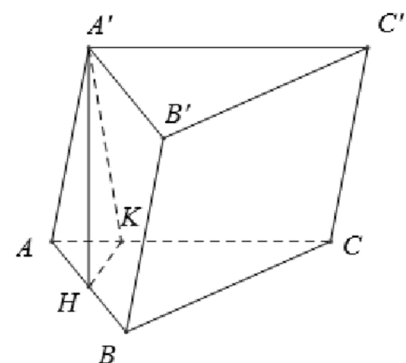
- A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3}{32}$ B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3}{16}$ C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3}{4}$ D. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3}{8}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

Vẽ $HK \perp AC$ tại $K \Rightarrow$ góc $A'KH = 45^\circ$

$$AH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; HK = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'H = HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$



$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{16}$$

Chọn đáp án B.

Câu 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC có $AC = a\sqrt{3}$; $BC = 3a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Cạnh bên hợp với mặt phẳng đáy góc 60° và mặt phẳng $(A'BC)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Điểm H trên cạnh BC sao cho $BC = 3BH$ và mặt phẳng $(A'AH)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{4a^3}{9}$

B. $\frac{19a^3}{4}$

C. $\frac{9a^3}{4}$

D. $\frac{4a^3}{19}$

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết, áp dụng định lý cosin trong tam giác AHC ta tính được $AH = a$

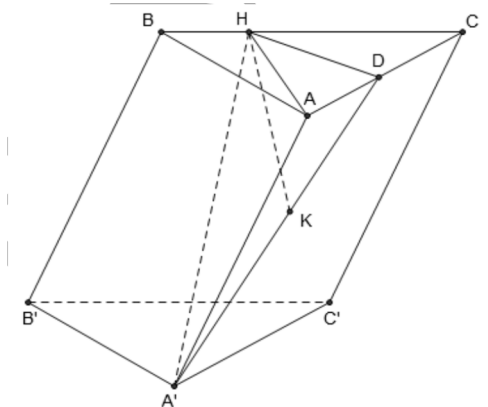
$$\text{Do } \begin{cases} (A'BC) \perp (ABC) \\ (A'AH) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'AH} = 60^\circ$$

Do $\triangle AA'H$ vuông tại $H \Rightarrow$

$$A'H = d(A'; (ABC)) = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot d(A'; (ABC)) = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a\sqrt{3} \sin 30^\circ \cdot a\sqrt{3} = \frac{9a^3}{4}$$

Chọn đáp án C.



Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'ABC$ là hình chóp tam giác đều cạnh đáy $AB = a$. Biết độ dài đoạn vuông góc chung của AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp $A'.BB'.C'C$

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{18}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

C. $\frac{a^3}{18}$

D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{18}$

Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm của đáy ABC và M là trung điểm cạnh BC . Hạ $MN \perp AA'$. Do $BC \perp (A'AM)$ nên MN

là đoạn vuông góc chung của $A'A$ và $BC \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$\text{Ta có } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}; AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} = \frac{3a}{4}$$

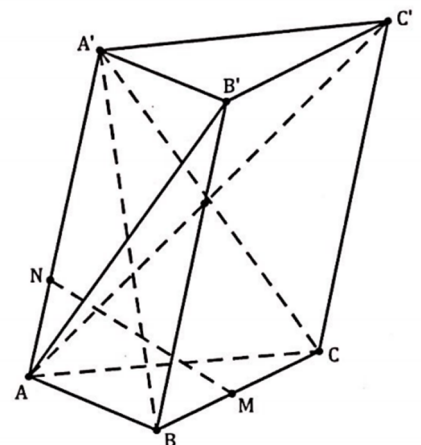
Hai tam giác $A'O A$ và MNA đồng dạng nên

$$\frac{A'O}{MN} = \frac{AO}{AN} \Rightarrow A'O = \frac{MN \cdot AO}{AN} = \frac{a}{3}$$

$$V_{A'.BB'.C'C} = V_{A'B'C'.ABC} - V_{A'.ABC} = A'O \cdot S_{ABC}$$

$$= \frac{2}{3} A'O \cdot S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$

Chọn đáp án B.



Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có thể tích bằng 48cm^3 . M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh CC' , BC và $B'C'$, khi đó thể tích của khối chóp $A'MNP$ là

- A. 24cm^3 B. $\frac{16}{3}\text{cm}^3$
C. 16cm^3 D. 8cm^3

Hướng dẫn giải:

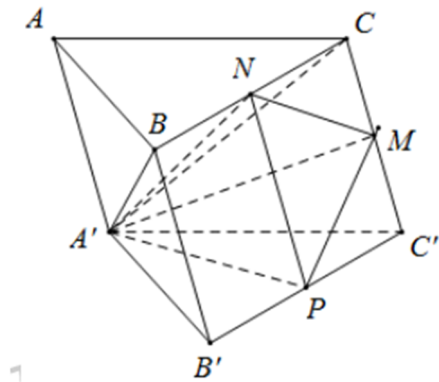
$$\text{Ta có } V_{A'ABC} = \frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'} = \frac{1}{3}.48 = 16\text{cm}^3$$

$$\Rightarrow V_{A'BCC'B'} = V_{ABCA'B'C'} - V_{A'ABC} = 48 - 16 = 32\text{cm}^3$$

Mặt khác

$$S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{BCC'B'} \Rightarrow V_{A'MNP} = \frac{1}{4}V_{A'BCC'B'} = \frac{1}{4}.32 = 8\text{cm}^3$$

Chọn đáp án D.



Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của C' trên (ABC) là trung điểm I của BC . Góc giữa AA' và BC là 30° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$:

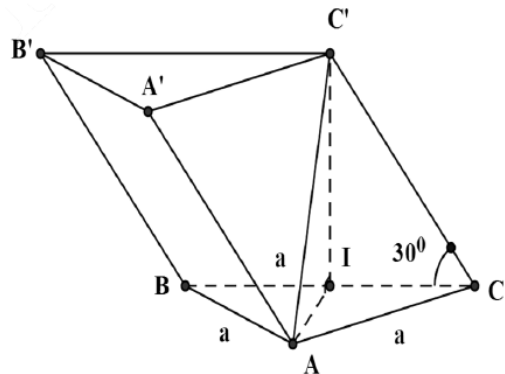
- A. $\frac{a^3}{4}$ B. $\frac{a^3}{2}$ C. $\frac{3a^3}{8}$ D. $\frac{a^3}{8}$

Hướng dẫn giải:

Do AA' song song với CC' nên góc giữa AA' và BC cũng là góc giữa CC' và BC . Nên

$$C'I = \frac{a}{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}. \text{ Vậy: } V = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$$

Chọn đáp án D.



Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB . Mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng 45° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

- A. $\frac{a^3}{2}$ B. $\frac{3a^3}{4}$ C. $\frac{3a^3}{8}$ D. $\frac{3a^3}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H, M, I lần lượt là trung điểm các đoạn AB, AC, AM
Theo giả thiết, $A'H \perp (ABC)$, $BM \perp AC$. Do IH là đường

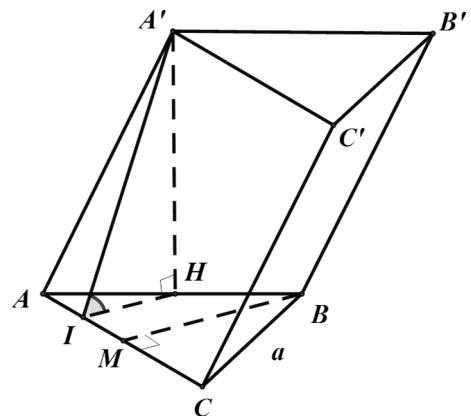
trung bình tam giác ABM nên $IH \parallel BM \Rightarrow IH \perp AC$

Ta có: $AC \perp IH, AC \perp A'H \Rightarrow AC \perp IA'$

Suy ra góc giữa (ABC) và $(ACC'A')$ là $\widehat{A'IH} = 45^\circ$

$$A'H = IH \cdot \tan 45^\circ = IH = \frac{1}{2}MB = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích lăng trụ là:



$$V = B.h = \frac{1}{2} BM.AC.A'H = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}$$

Chọn đáp án C.

Câu 9: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm của tam giác ABC . Tất cả các cạnh bên đều tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi I là giao điểm của AH và BC . Theo giả thiết H là trực tâm của tam giác đều ABC nên AH là đường cao và H cũng là trọng tâm của tam giác đều ABC

$$\text{Nên } AH = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

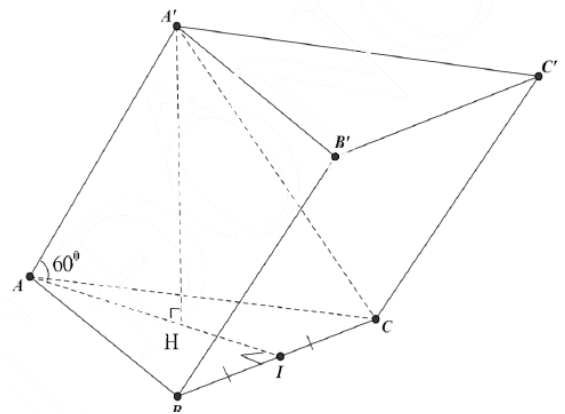
Do $A'H \perp (ABC)$ nên $\widehat{A'AH} = 60^\circ$ và $A'H \perp AH$

Trong tam giác vuông $HA'A$ có

$$AH' = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$$

Thể tích của khối chóp

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{3}}{2} a = \frac{1}{4} a^3 \sqrt{3}.$$



Chọn đáp án A.

Câu 10: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên tạo với mặt phẳng bằng 45° . Hình chiếu của a trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của $A'B'$. Tính thể tích V của khối lăng trụ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Hướng dẫn giải:

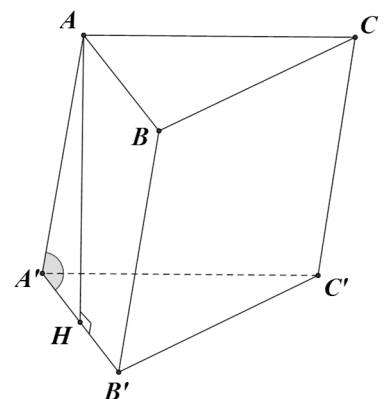
Gọi H là trung điểm của $A'B'$, theo đề ta suy ra :

$$AH \perp (A'B'C')$$

$$\Rightarrow \widehat{AA'H} = 45^\circ \text{ khi đó } AH = A'H \cdot \tan 45^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Chọn đáp án D.



Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BCD} = 120^\circ$ và $AA' = \frac{7a}{2}$.

Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = 12a^3$

B. $V = 3a^3$

C. $V = 9a^3$

D. $V = 6a^3$

Hướng dẫn giải:

Gọi $O = AC \cap BD$

Từ giả thuyết suy ra $A'O \perp (ABCD)$

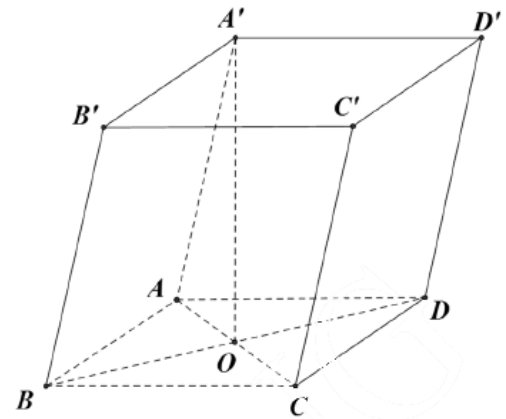
$$S_{ABCD} = BC \cdot CD \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

Vì $\widehat{BCD} = 120^\circ$ nên $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều

$$\Rightarrow AC = a \Rightarrow A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{49a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = 2\sqrt{3}a$$

$$\text{Suy ra } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3a^3$$

Chọn đáp án B.



Câu 12: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tam giác $A'AC$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn giải:

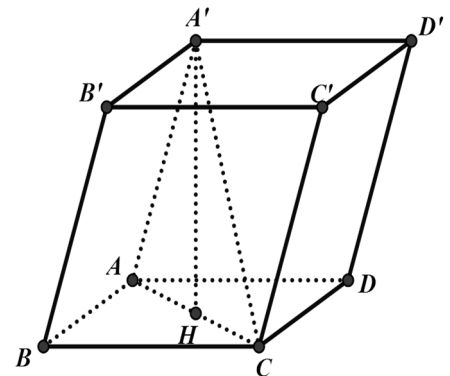
+ Gọi H là trung điểm của AC . Do $A'AC$ là tam giác đều nên $A'H \perp AC$.

+ Mặt khác, $(A'AC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AC nên $A'H \perp (ABCD)$ hay $A'H$ là đường cao của lăng trụ.

$$+ \text{Ta có } AC = a\sqrt{2} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$+ \text{Vậy } V = AH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{2}.$$

Chọn đáp án D.



Câu 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , đỉnh A' cách đều các điểm A, B, C . Mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải:

Do $A'A = A'B = A'C$ nên hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm O của tam giác ABC .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AA' , Khi đó $(P) \equiv (BCH)$. Gọi M là trung điểm của BC thì $MH \perp AA'$ và góc $A'MH$ nhọn, H nằm giữa AA' . Thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi (P) là tam giác BCH .

$$\Delta ABC \text{ đều cạnh } a \text{ nên } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Theo bài ra

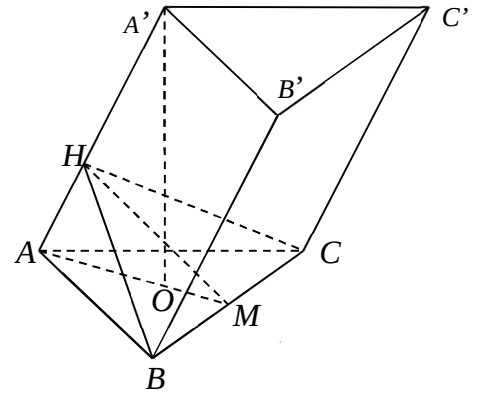
$$S_{BCH} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}HM \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$AH = \sqrt{AM^2 - HM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$$

Do hai tam giác $A'O$ và MAH đồng dạng nên $\frac{A'O}{AO} = \frac{HM}{AH}$

$$\text{. suy ra } A'O = \frac{AO \cdot HM}{AH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{4}} = \frac{a}{3}$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ: } V = A'O \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} A'O \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$



Chọn đáp án C.

Câu 14: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ theo a là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3a^3}{2}$ D. $\frac{a^3}{6}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $V = Bh$

+ Diện tích đáy $B = \sqrt{3}a^2$

+ Ta có $h = A_1O$ (O là giao điểm AC và BD)

+ Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ là góc OIA_1 bằng 60° trong đó I là trung điểm AD

+ Ta có ΔA_1OI , $\widehat{A_1OI} = 90^\circ$, $OI = \frac{a}{2}$, $A_1O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V = \frac{3a^3}{2}$

Chọn đáp án C.

Câu 15: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a , góc tại bờ cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1 . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Hướng dẫn giải:

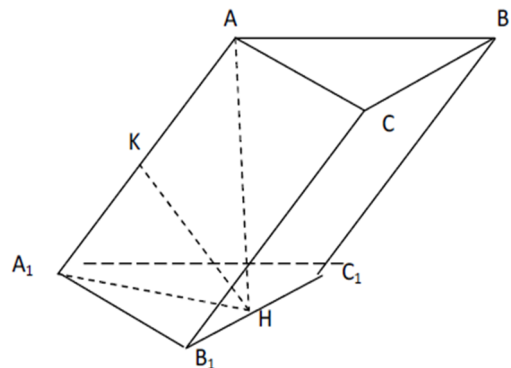
Do $AH \perp (A_1B_1C_1)$ nên góc AA_1H là góc giữa AA_1 và $(A_1B_1C_1)$, theo giả thiết thì góc AA_1H bằng 30° .

Xét tam giác vuông AHA_1 có $AA_1 = a$, góc

$$AA_1H = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$$

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = AH \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Chọn đáp án A.



Câu 16: Cho một hình hộp với 6 mặt đều là các hình thoi cạnh a , góc nhọn bằng 60° . Khi đó thể tích khối hộp là:

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Giả sử khối hộp cps $\widehat{C'D'D} = 120^\circ$; $\widehat{A'D'D} = 120^\circ$ và

$$\widehat{ADC} = 60^\circ$$

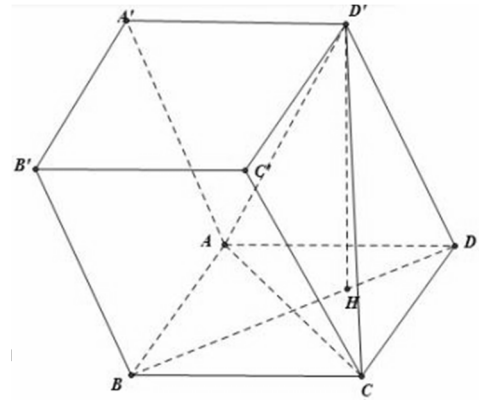
Khi đó $AD' = CD' = DD' = a$ suy ra $D'ACD$ là tứ diện đều.

Gọi H là trọng tâm tam giác ACD khi đó

$$DH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow D'H = \sqrt{DD'^2 - DH^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABCD} \cdot D'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án D.



Câu 17: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC , đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Cho các phát biểu sau:

(1) $V_{ABC.A'B'C'} = a^3$, (2) $A'B \perp B'C$, (3) $BB' = a\sqrt{3}$, (4) $AB = a\sqrt{2}$;

Số phát biểu đúng là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của $AC \rightarrow A'H \perp (ABC)$

$$\text{Có } AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\rightarrow S_{ABC} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot (a\sqrt{2})^2 = a^2$$

$$\text{Có } HB = \frac{AC}{2} = a \text{ và } HB \text{ là hình chiếu vuông góc của}$$

$A'B$ lên (ABC)

$$\text{Suy ra } \angle A'BH = 45^\circ \rightarrow A'H = HB \cdot \tan 45^\circ = a$$

$$\text{Do đó: } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = a^2 \cdot a = a^3$$

+ Chứng minh $A'B \perp B'C$ (chỉ ra $A'B \perp (P)$ và (P) chứa $B'C$)

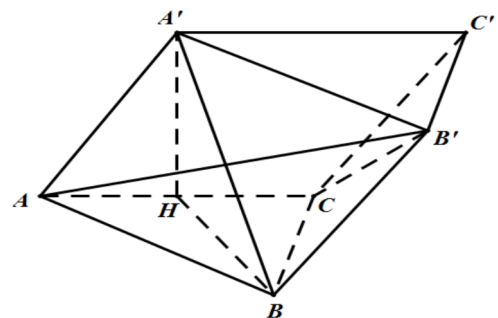
$$\text{Ta có: } BB' = AA' = \sqrt{AH^2 + HA^2} = A\sqrt{2}$$

Suy ra $ABB'A'$ là hình thoi $\rightarrow A'B \perp AB'(1)$

$$\text{Và } \begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp BH \end{cases} \rightarrow AC \perp (A'BH) \rightarrow AC \perp A'B(2)$$

Kết luận: Từ (1) và (2) suy ra $A'B \perp (AB'C) \rightarrow A'B \perp B'C$ (dpcm)

Chọn đáp án C.



Câu 18: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'$ và $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

- A.** Khối $A'BCN$ **B.** Khối $GA'B'C'$
C. Khối $ABB'C'$ **D.** Khối $BB'MN$

Hướng dẫn giải:

+ Nhận thấy khoảng cách từ G và A xuống mặt phẳng $(A'B'C')$ là bằng nhau (do G, A thuộc mặt phẳng $(ABC) \parallel (A'B'C')$)

$$V_{GA'B'C'} = V_{A.A'B'C'}$$

Mà $V_{A.A'B'C'} = V_{ABB'C'}$ (Do 2 hình chóp này có 2 đáy $AA'B'$ và ABB' diện tích bằng nhau; chung đường cao hạ từ C')

$$\Rightarrow V_{GA'B'C'} = V_{ABB'C'}$$

$\Rightarrow$ Không thể khối chóp $GA'B'C'$ hoặc $ABB'C'$ thể tích nhỏ nhất
 $\rightarrow$ Loại B, C

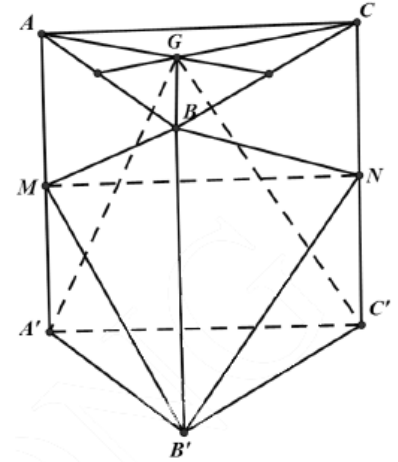
+ So sánh Khối $A'BCN$ và Khối $BB'MN$

Nhận thấy khoảng cách từ M và A' xuống mặt $BBCC'$ là bằng nhau $\rightarrow$ Khối $A'BCN$ và Khối $BB'MN$ có đường cao hạ từ M và A' bằng nhau. Mặt khác Diện tích đáy $BNB' >$ Diện tích đáy BCN

$\Rightarrow$ Khối $A'BCN <$ Khối $BB'MN$.

$\Rightarrow$ Khối $A'BCN$ có diện tích nhỏ hơn.

Chọn đáp án A.



Câu 19: Cho hình lăng trụ có tất cả các cạnh đều bằng a , đáy là lục giác đều, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° . Tính thể tích khối lăng trụ

- A.** $V = \frac{27}{8}a^3$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **C.** $V = \frac{3}{2}a^3$. **D.** $\frac{9}{4}a^3$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $ABCDEF$ là lục giác đều nên góc ở đỉnh bằng 120° .

ABC là tam giác cân tại B , DEF là tam giác cân tại E .

$$S_{ABC} = S_{DEF} = \frac{1}{2}a.a.\sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos B}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3}$$

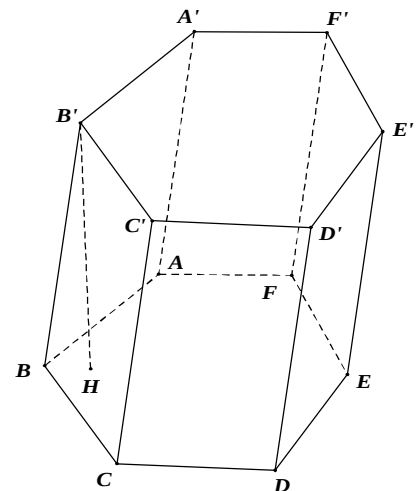
$$S_{ACDF} = AC.AF = a\sqrt{3}.a = a^2\sqrt{3}$$

$$S_{ABCDEF} = S_{ABC} + S_{ACDF} + S_{DEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2\sqrt{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\widehat{B'BH} = 60^\circ \Rightarrow B'H = BB' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$V = B'H \cdot S_{ABCDEF} = a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{4}a^3$$

Chọn đáp án D.



KHOẢNG CÁCH

A- LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

+ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng a

$d(M, \Delta) = MH$, trong đó H là hình chiếu của M trên Δ

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

+ Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (α)

$d(O, (\alpha)) = OH$, trong đó H là hình chiếu của O trên (α)

Cách 1. Tính trực tiếp. Xác định hình chiếu H của O trên (α) và tính OH

- Dựng mặt phẳng (P) chứa O và vuông góc với (α)
- Tìm giao tuyến Δ của (P) và (α)
- Kẻ $OH \perp \Delta$ ($H \in \Delta$). Khi đó $d(O, (\alpha)) = OH$.

Cách 2. Sử dụng công thức thể tích

Thể tích của khối chóp $V = \frac{1}{3} S.h \Leftrightarrow h = \frac{3V}{S}$. Theo cách này, để tính khoảng cách từ đỉnh của

hình chóp đến mặt đáy, ta đi tính V và S

Cách 3. Sử dụng phép trượt đỉnh

Kết quả 1. Nếu đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) và $M, N \in \Delta$ thì

$$d(M; (\alpha)) = d(N; (\alpha))$$

Kết quả 2. Nếu đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α) tại điểm I và $M, N \in \Delta$ (M, N không trùng với I) thì

$$\frac{d(M; (\alpha))}{d(N; (\alpha))} = \frac{MI}{NI}$$

Đặc biệt: + nếu M là trung điểm của NI thì $d(M; (\alpha)) = \frac{1}{2} d(N; (\alpha))$

+ nếu I là trung điểm của MN thì $d(M; (\alpha)) = d(N; (\alpha))$

Cách 4. Sử dụng tính chất của tứ diện vuông

Cơ sở của phương pháp này là tính chất sau: Giả sử OABC là tứ diện vuông tại O ($OA \perp OB, OB \perp OC, OC \perp OA$) và H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC).

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

Cách 5. Sử dụng phương pháp tọa độ

Cơ sở của phương pháp này là ta cần chọn hệ tọa độ thích hợp sau đó sử dụng các công thức sau:

$$+ d(M; (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ với } M(x_0; y_0; z_0), (\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

$$+ d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|} \text{ với } \Delta \text{ là đường thẳng đi qua A và có vector chỉ phương } \vec{u}$$

$$+ d(\Delta, \Delta') = \frac{|\vec{u} \wedge \vec{u}' \cdot \overrightarrow{AA'}|}{|\vec{u} \wedge \vec{u}'|} \text{ với } \Delta' \text{ là đường thẳng đi qua A' và có vtcp } \vec{u}'$$

3. Khoảng cách từ một đường thẳng đến một mặt phẳng song song với nó

+ $d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha))$, trong đó M là điểm bất kì nằm trên Δ .

+ Việc tính khoảng cách từ đường thẳng Δ đến mặt phẳng (α) được quy về việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

+ $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta))$, trong đó M là điểm bất kì nằm trên (α)

+ Việc tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song được quy về việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

+ Đường thẳng Δ cắt cả a, b và cùng vuông góc với a, b gọi là đường vuông góc chung của a, b.

+ Nếu Δ cắt a, b tại I, J thì IJ được gọi là đoạn vuông góc chung của a, b.

+ Độ dài đoạn IJ được gọi là khoảng cách giữa a, b.

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với nó.

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

*** Đặc biệt**

+ Nếu $a \perp b$ thì ta tìm mặt phẳng (P) chứa a và vuông góc với b, tiếp theo ta tìm giao điểm I của (P) với b. Trong mp(P), hạ đường cao IH. Khi đó $d(a, b) = IH$

+ Nếu tứ diện ABCD có $AC = BD$, $AD = BC$ thì đoạn thẳng nối hai trung điểm của AB và CD là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

B – BÀI TẬP**I – KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG**

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBD) là:

A. $\frac{a}{3}$

B. $\frac{2a}{3}$

C. $\frac{a}{2}$

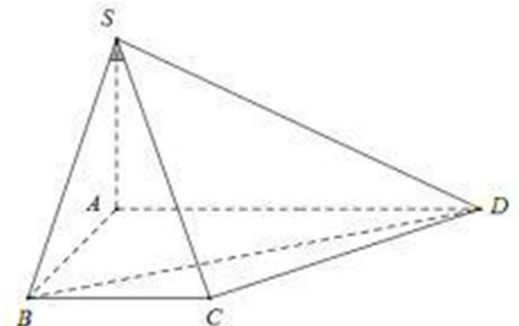
D. a

Hướng dẫn giải:

Áp dụng công thức đường cao của tứ diện vuông SABD vuông tại A, ta có $d(A; (SBD)) = AH$ với

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{3}$$

Chọn đáp án B.



Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết hình chóp S.ABC có thể tích bằng a^3 . Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \frac{6a\sqrt{195}}{65}$

B. $d = \frac{4a\sqrt{195}}{195}$

C. $d = \frac{4a\sqrt{195}}{65}$

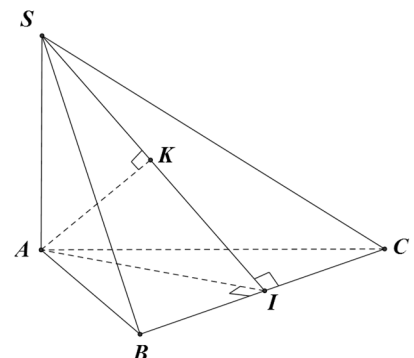
D. $d = \frac{8a\sqrt{195}}{195}$

Hướng dẫn giải:

Gọi các điểm như hình vẽ

Ta có $AI \perp BC$, $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp AK \Rightarrow AK = d_{A, (SBC)}$

Ta có: $V = a^3$, $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = 4a\sqrt{3}$. Mà $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Trong tam giác vuông SAI ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2}$. Vậy $d = AK = \sqrt{\frac{AS^2 \cdot AI^2}{AS^2 + AI^2}} = \frac{4a\sqrt{195}}{65}$

Chọn đáp án C.

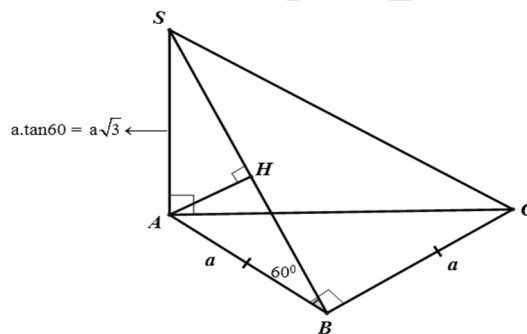
Câu 3: Khối chóp S.ABC có đáy tam giác vuông cân tại B và $AB = a$. $SA \perp (ABC)$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khi đó khoảng cách từ A đến (SBC) là:

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:

$$d(A, (SBC)) = AH = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Chọn đáp án D.



Câu 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân,

$AB = BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

- A. $d = \frac{a}{2}$ B. $d = \frac{3a}{4}$ C. $d = \frac{a}{4}$ D. $d = \frac{3a}{2}$

Hướng dẫn giải:

$$+ S_{\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = a^2 \sqrt{3}; V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = a^3 \sqrt{3}$$

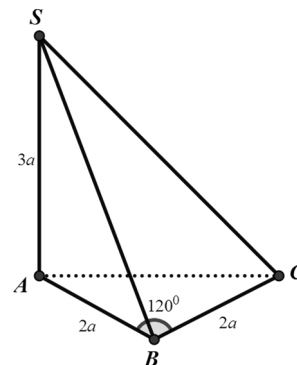
$$+ \text{ Mặt khác, } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{13}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 12a^2 \Rightarrow CS = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{21}$$

+ Áp dụng công thức hê-rông ta c

$$S_{\Delta SBC} = \frac{1}{4} \sqrt{(SB + BC + CS)(-SB + BC + CS)(SB - BC + CS)(SB + BC - CS)}$$

$$= 2a^2 \sqrt{3}$$



(Chú ý: Nhập vào máy tính biểu thức và ấn = ta có kết quả

$$\frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{13} + 2 + \sqrt{21})(-\sqrt{13} + 2 + \sqrt{21})(\sqrt{13} - 2 + \sqrt{21})(\sqrt{13} + 2 - \sqrt{21})} = 2\sqrt{3}$$

$$+ \text{ Vậy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là } d = \frac{3 \cdot V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{2a^2 \sqrt{3}} = \frac{3a}{2}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy; $BC = 9m$, $AB = 10m$, $AC = 17m$. Biết thể tích khối chóp S.ABC bằng $73m^3$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \frac{21}{2}$

B. $d = \frac{3}{4}$

C. $d = \frac{1}{4}$

D. $d = \frac{24}{5}$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng công thức He-rong ta tính được diện tích tam giác ABC bằng

$$\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = 36 \text{ với } p = \frac{AB+BC+CA}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} \rightarrow SA = 6$$

Kẻ $AH \perp BC, AI \perp SH$ khi đó ta có $d_{A(SBC)} = AI$

Đặt $BH = x$ ta có $\sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{AC^2 - CH^2} = AH$ thay các dữ liệu bài toán đã cho vào ta tính được $\rightarrow \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{17^2 - (9-x)^2} \rightarrow x = -6$ suy ra $AH = 8$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{25}{576} \rightarrow AI = \frac{24}{5}$

Chọn đáp án D.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy.

Biết khoảng cách từ A đến (SBD) bằng $\frac{6a}{7}$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{6a}{7}$

B. $\frac{3a}{7}$

C. $\frac{3a}{14}$

D. $\frac{8a}{7}$

Hướng dẫn giải:

Với bài toán này ta thấy A và C đối xứng nhau qua tâm O . Ta nhớ đến hệ quả sau:

Cho mặt phẳng (P) và đoạn thẳng MN . Với $MN \cap (P) = I$ thì

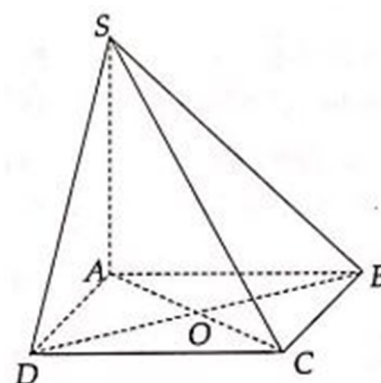
$$\frac{d(M; (P))}{d(N; (P))} = \frac{IM}{IN}$$

Khi đó áp dụng vào bài toán ta thấy $AC \cap (SBD) = O$

do vậy áp dụng hệ quả trên ta được: $\frac{d(A; (SBD))}{d(C; (SBD))} = \frac{OA}{OC} = 1$

$$\Rightarrow d(C; (SBD)) = \frac{6a}{7}$$

Chọn đáp án A.



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$. SA vuông góc với đáy và $SC = 3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mp(SCD) là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{12}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của A lên SD .

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD,$$

$$CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SCD) \text{ mà}$$

$$(SAD) \cap (SCD) = SD$$

nên $AH \perp (SCD)$, do đó $d(A, (SCD)) = AH$.

Hình vuông ABCD cạnh $a\sqrt{3}$ có đường chéo

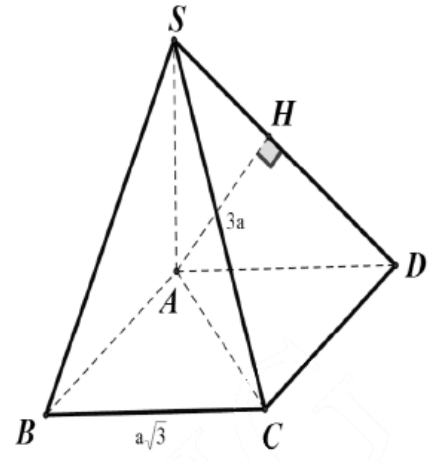
$$AC = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{6}$$

Tam giác SAC vuông tại A theo định lý Pytago ta tính được

$$SA = a\sqrt{3}$$

Tam giác SAD vuông tại A có AH là đường cao nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \text{ hay } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{2}{3a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$



Chọn đáp án C.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

B. a .

C. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

D. $V = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

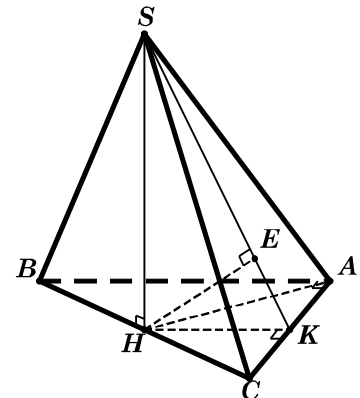
Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK$ ($E \in SK$).

$$\text{Khi đó } d[B, (SAC)] = 2d[H, (SAC)]$$

$$= 2HE = 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Chọn đáp án C.



Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{D} = 60^\circ$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{2}$. Tính khoảng cách k từ A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $k = \frac{3a}{\sqrt{5}}$

B. $k = a\sqrt{\frac{3}{5}}$

C. $k = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

D. $k = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Diện tích đáy } S_{\square ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}B.SA \Rightarrow SA = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAM) \quad (1)$$

$$BC \subset (SBC) \quad (2), \text{ Từ (1) và}$$

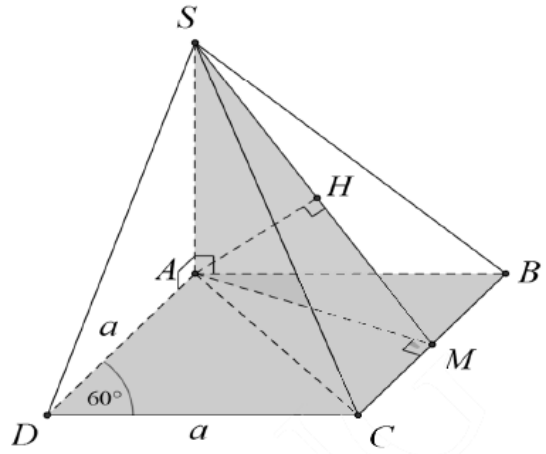
$$(2) \Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$$

$$(SAM) \cap (SBC) = SM$$

Kẻ $AH \perp SM \Rightarrow AH = d(A, (SBC))$. Xét $\triangle SAM$ vuông tại A . Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{5} \Rightarrow AH = k = a\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Chọn đáp án B.



Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy có tất cả các cạnh bằng a và có tâm là O gọi M là trung điểm của OA. Tính khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

B. $d = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

D. $d = a\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải:

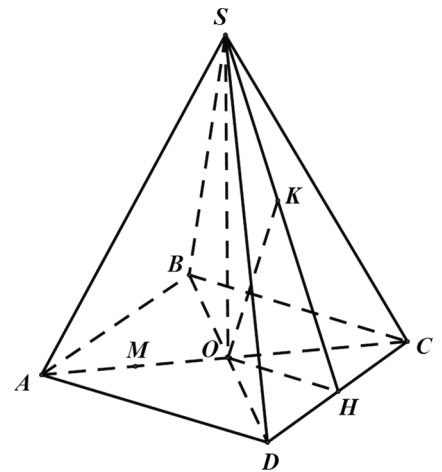
Kẻ $OH \perp CD (H \in CD)$, kẻ $OK \perp SH (K \in SH)$. Ta chứng minh được rằng $OK \perp (SCD)$

$$\text{Vì } \frac{MO}{MC} = \frac{3}{2} \Rightarrow d_{(M, (SCD))} = \frac{3}{2} d_{(O, (SCD))} = \frac{3}{2} OK$$

$$\text{Trong tam giác SOH ta có: } OK = \frac{OH \cdot OS}{\sqrt{OH^2 + OS^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Vậy } d_{(M, (SCD))} = \frac{3}{2} OK = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Chọn đáp án B.



Câu 11: Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật.

$AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên

mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng (A'BD) theo a là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABCD).

Ta có: $B'D' // BD \subset (A'BD)$

$$\Rightarrow d(B', (A'BD)) = d(D', (A'BD))$$

Mặt khác, xét hình chữ nhật A'D'DA thì D'A cắt A'D tại trung điểm A'D

$$\Rightarrow d(D', (A'BD)) = d(A, (A'BD))$$

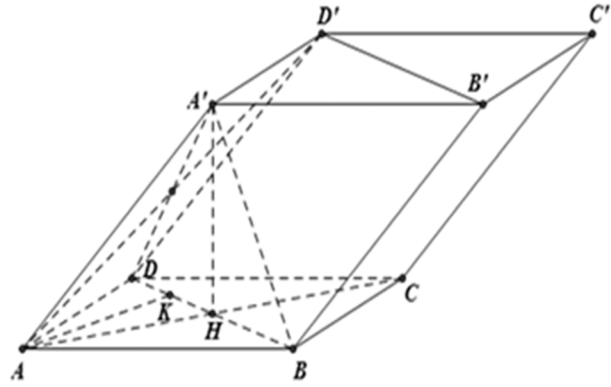
Gọi G là hình chiếu của A lên BD thì

$$A'H \perp AK \perp BD \Rightarrow AK \perp (A'BD)$$

$$\Rightarrow d(A, (A'BD)) = AK$$

$$\text{Tính } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án C.



Câu 12: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

A. $h = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$

B. $h = \frac{a\sqrt{39}}{13}$

C. $h = \frac{a\sqrt{39}}{26}$

D. $h = \frac{a\sqrt{39}}{52}$

Hướng dẫn giải:

Trong (SBC), dựng $SH \perp BC$. Vì ΔSBC đều cạnh a nên H là trung điểm của BC và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} (SBC) \perp (ABC) \\ \text{Ta có: } (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SBC) \supset SH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABC)$$

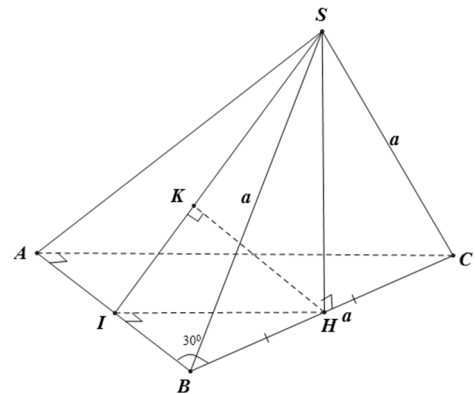
Vì H là trung điểm của BC nên
 $d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB))$

Trong (ABC), dựng $HI \perp AB$ và trong (SHI), dựng $HK \perp SI$.

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp HI \\ AB \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI)$$

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} (SHI) \perp (SAB) \\ (SHI) \cap (SAB) = SI \\ (SHI) \supset HK \perp SI \end{array} \right\} \Rightarrow HK \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HK$$



$$\text{Tam giác HBI vuông tại I nên } \sin \widehat{HBI} = \frac{HI}{HB} \Rightarrow HI = HB \cdot \sin \widehat{HBI} = \frac{a}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{4}$$

Tam giác SHI vuông tại H, $HK \perp SI$ nên:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Leftrightarrow HK^2 = \frac{SH^2 \cdot HI^2}{SH^2 + HI^2} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{3a^2}{52} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{39}}{26}$$

$$\text{Vậy } d(C, (SAB)) = 2HK = \frac{a\sqrt{39}}{13}$$

Chọn đáp án B.

Câu 13: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trọng tâm của tam giác ABD. Mặt bên SAB tạo với đáy một góc 60° . Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD)?

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, E là hình chiếu của G lên AB

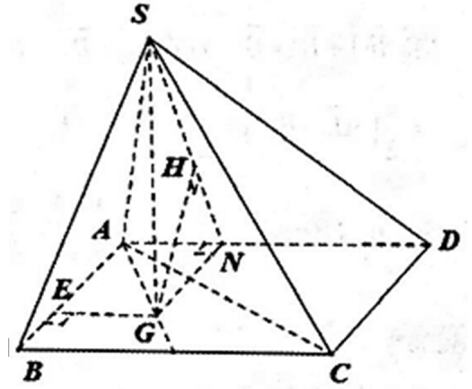
Ta có: $AB \perp (SGE) \Rightarrow \widehat{SAG} = 60^\circ \Rightarrow SG = GE \cdot \tan 60^\circ$

Mà $GE = \frac{1}{3}BC$ nên tính được SG.

Hạ $GN \perp AD$ và $GH \perp SN$

$$\Rightarrow d(B, (SAB)) = 3d(G, (SAB)) = 3GH$$

$$= 3 \frac{GN \cdot GS}{\sqrt{GN^2 + GS^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Chọn đáp án A.

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông $BD = 2a$, $\triangle SAC$ vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD) là:

A. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$

B. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$

C. $2a$

D. $a\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

$$BD = AC = 2a, CD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}, SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = a$$

$$SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

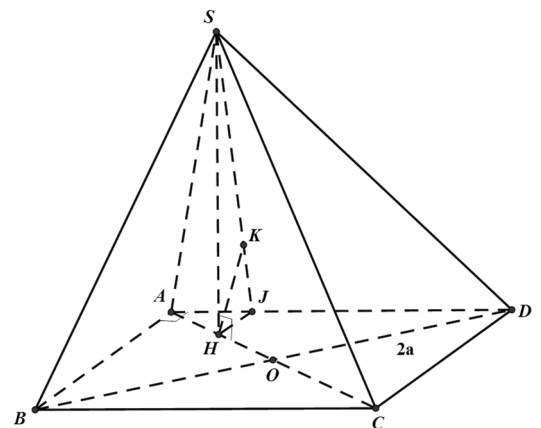
$$\text{Ta có } d(B, (SAD)) = 2d(O, (SAD)) = 4d(H, (SAD))$$

$$\text{Kẻ } HI \parallel BD (I \in BD), HI = \frac{1}{4}CD = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \text{ Kẻ } HK \perp SI$$

tại K $\Rightarrow HK \perp (SAD)$

$$\Rightarrow d(B, (SAD)) = 4HK = 4 \cdot \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$$

Chọn đáp án B.

Câu 15: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 1, AC = \sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{\sqrt{39}}{13}$

B. 1

C. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm BC, suy ra

$$SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$$

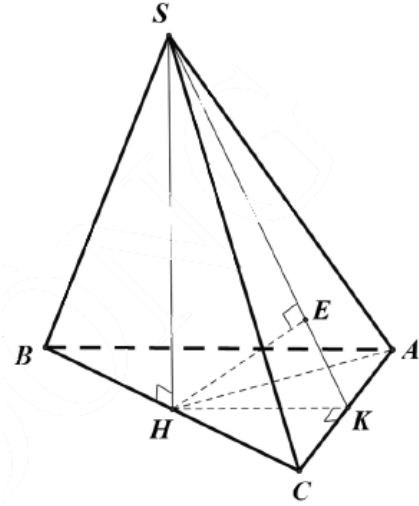
Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \perp AC$

$$\text{Kẻ } HE \perp SK (E \in SK)$$

$$\text{Khi đó } d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC))$$

$$= 2HE = 2 \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

Chọn đáp án C.



Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD với $AB = 2a, BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến mp (SCD) là:

A. $2a$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

C. $a\sqrt{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

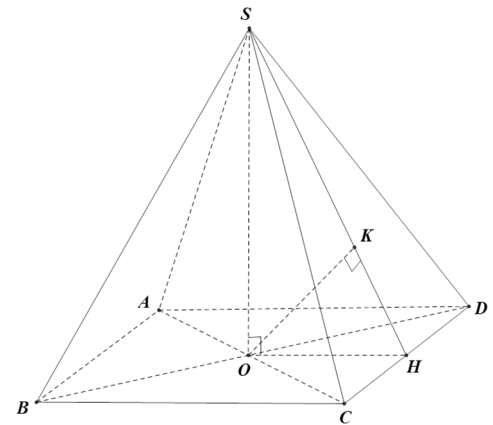
$$\text{Gọi H là trung điểm } CD \Rightarrow \begin{cases} CD \perp OH \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH)$$

$$\text{Kẻ } OK \perp SH \text{ tại K} \Rightarrow OK \perp (SCD)$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OK = 2 \frac{SO \cdot OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Chọn đáp án D.



Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B biết $BC = a\sqrt{3}$, $BA = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AC và biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Khoảng cách h từ C đến mặt phẳng (SAB) là.

- A. $h = \frac{2a\sqrt{66}}{11}$. B. $h = \frac{a\sqrt{30}}{10}$. C. $h = \frac{a\sqrt{66}}{11}$. D. $h = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } SH = x. \text{ suy ra } V = \frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3}\right) = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$$

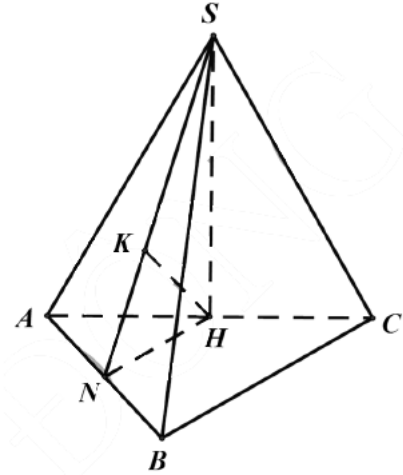
$$\Leftrightarrow x = \frac{a^3\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{6}{a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Ta có } d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB)) = 2HK$$

$$\text{mà } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{66}}{11}$$

$$d(C, (SAB)) = \frac{2a\sqrt{66}}{11}.$$

Chọn đáp án A.



Câu 18: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BA = 3a$, $BC = 4a$ ($SBC \perp ABC$).

Biết $SB = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ B đến mp (SAC)

- A. $\frac{6a\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{3a\sqrt{7}}{7}$ C. $\frac{5a\sqrt{7}}{7}$ D. $\frac{4a\sqrt{7}}{7}$

Hướng dẫn giải:

$$SH = SB \sin 30^\circ = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = a\sqrt{3}; S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a = 6a^2$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 6a^2 \cdot a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}. \text{ Cần tính: } S_{\Delta SAC} ?$$

$$\text{Do tam giác SBA vuông tại B nên } SA = \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + 9a^2} = a\sqrt{21} \quad AC = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a$$

$$\text{Dùng định lí côsin } SC^2 = SB^2 + BC^2 - 2SB \cdot BC \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 12a^2 + 16a^2 - 2 \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4a^2 \Rightarrow SC = 2a$$

$$\text{Dùng công thức Hêrông: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ với}$$

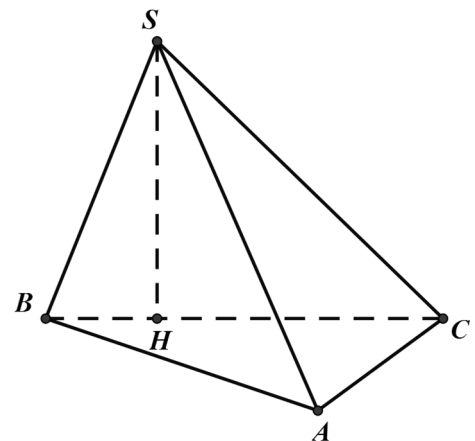
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Ta có:

$$p = \frac{7a + a\sqrt{21}}{2} \Rightarrow$$

$$p - 5a = \frac{7a + a\sqrt{21}}{2} - 5a = \frac{a\sqrt{21} - 3a}{2}$$

$$\Rightarrow p - 2a = \frac{7a + a\sqrt{21}}{2} - 2a = \frac{a\sqrt{21} + 3a}{2}$$



$$\Rightarrow p - a\sqrt{21} = \frac{7a + a\sqrt{21}}{2} - a\sqrt{21} = \frac{7a - a\sqrt{21}}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{28a^2 \cdot 12a^2} = \frac{4}{4}a^2\sqrt{7 \cdot 3} = a^2\sqrt{21}$$

$$\text{Vậy } h = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{3 \cdot 2a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{21}} = \frac{6a}{\sqrt{7}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Góc $BAC = 60^\circ$, hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC , góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là 60° . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a .

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$

B. $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$

C. $\frac{a}{2\sqrt{7}}$

D. $\frac{9a}{2\sqrt{7}}$

Hướng dẫn giải:

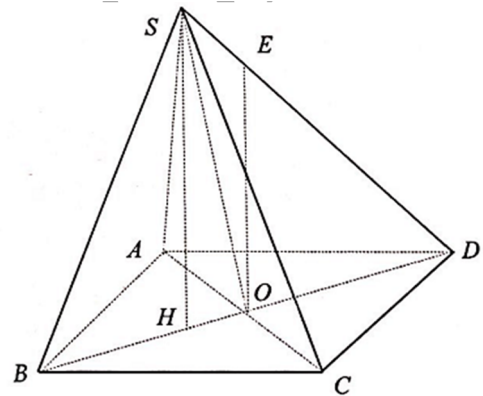
Trong mặt phẳng (SBD) kẻ OE song song SH và cắt SD tại E . Khi đó ta có tứ diện $OECD$ vuông tại O và

$$OC = \frac{a}{2}; OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; OE = \frac{3a}{8}$$

$$\frac{1}{d^2(O; (SCD))} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OE^2}$$

$$\Rightarrow d(O; (SCD)) = \frac{3a}{4\sqrt{7}}$$

$$\text{Mà } d(B; (SCD)) = 2d(O; (SCD)) = \frac{3a}{2\sqrt{7}}$$



Chọn đáp án B.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB , SC tạo với đáy một góc 45° . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải:

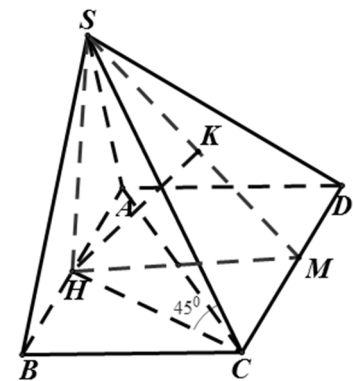
+ Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) là độ dài đoạn HK

+ Tính được $SH = HC = a\sqrt{2}$

+ Dùng công thức: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{3}{2a^2}$

+ Suy được: $HK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Chọn đáp án C.



Câu 21: Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên và cạnh đáy cùng bằng a . Khi đó, khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC) là:

A. $h = \frac{a}{2}$

B. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

C. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $h = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn giải:

$d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC))$ với O là tâm hình vuông ABCD.

Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow \begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow (SBC) \perp (SOI)$

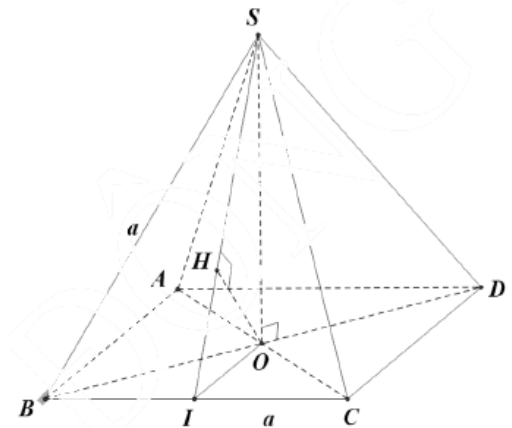
Ta có $(SBC) \cap (SOI) = SI$, kẻ $OH \perp SI$ tại H $\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$OH = \frac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$d(AD, (SBC)) = 2OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Chọn đáp án B.



Câu 22: Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D', đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng A'C và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Khoảng cách giữa đường thẳng B'C và C'D theo α là:

A. $\frac{a\sqrt{51}}{17}$

B. $\frac{4a\sqrt{51}}{17}$

C. $\frac{2a\sqrt{51}}{17}$

D. $\frac{8a\sqrt{51}}{17}$

Hướng dẫn giải:

$C'D' \parallel AB' \Rightarrow C'D' \parallel (AB'C) \Rightarrow d(C'D, B'C) = d(C'D, (AB'C)) = d(C', (AB'C)) = d(B, (AB'C))$

Do BC' giao với mp(AB'C) tại trung điểm của BC' (vì BCC'B' là hình chữ nhật)

Kẻ $BM \perp AC \Rightarrow AC \perp (BB'M) \Rightarrow (AB'C) \perp (BB'M)$

theo goaon tuyến B'M

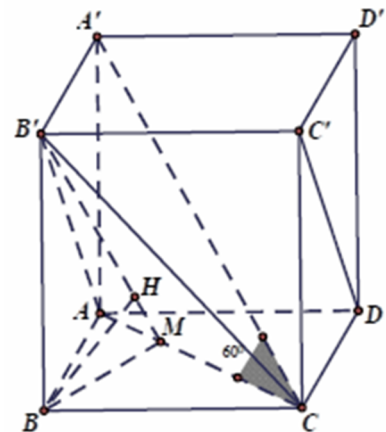
Kẻ

$BH \perp B'M \Rightarrow BH \perp (AB'C) \Leftrightarrow d(B, (AB'C)) = BH$

$$\text{Có } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BC^2} \cdot \frac{1}{AB^2} = \frac{17}{12a^2}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{51}}{17}. \text{ Vậy: } d(C'D, B'C) = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$$

Chọn đáp án C.



Câu 23: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C', đáy ABC có $AC = a\sqrt{3}; BC = 3a, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Cạnh bên hợp với mặt phẳng đáy góc 60° và mặt phẳng (A'BC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm H trên cạnh BC sao cho $BC = 3BH$ và mặt phẳng (A'AH) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (A'AC) là:

A. $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$

B. $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{7a\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Kẻ } \begin{cases} HD \perp AC \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'HD) \Rightarrow (A'AC) \perp (A'HD) = A'D$$

$$\text{Ta có: } HD = CH \cdot \sin 30^\circ = a. \text{ Kẻ } HK \perp A'D \Rightarrow HK \perp (A'AC) \Rightarrow HK = d(H; (A'AC))$$

$$\text{Xét tam giác } A'HD \text{ vuông tại H có: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{A'H^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{d(B; (A'AC))}{d(H; (A'AC))} = \frac{BC}{HC} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B; (A'AC)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{9a^3}{4}; d(B, (A'AC)) = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

Chọn đáp án B.

Câu 24: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60 độ. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SMN), với M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

A. $V = \frac{a^3}{3}$

B. $V = \frac{a^3}{3}$

C. $V = \frac{a^3}{4}$

D. $V = \frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải:

$SA \perp (ABC)$ suy ra AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC)

Góc giữa SB và (ABC) là góc $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

$$SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

Kẻ $AI \perp MN$. Suy ra I là trung điểm MN, kẻ

$AH \perp SI$ tại H

$$MN \perp SA, MN \perp AI \Rightarrow MN \perp AH$$

$AH \perp (SMN)$.

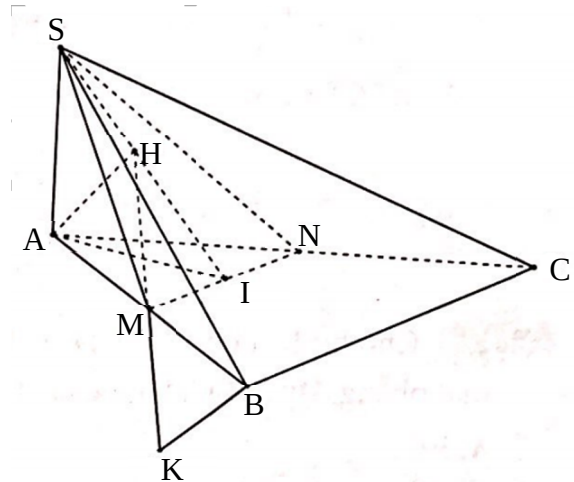
Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SMN),

$$AI = a \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{16}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{51}}{17}$$

$$\text{Mà } \frac{d(A, (SMN))}{d(B, (SMN))} = \frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow d(B, (SMN)) = d(A, (SMN)) = \frac{a\sqrt{51}}{17}$$

Chọn đáp án B.



Câu 25: Cho hàm số S.ABC có $ASB = BSC = CSA = 60^\circ$, $SA = 3, SB = 4, SC = 5$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

A. $5\sqrt{2}$

B. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Bài toán này có công thức tính nhồi, nhưng tôi không trình bày ở đây. Tôi sẽ trình bày cách tư duy để làm ra bài toán này nhé!

Đề bài cho các góc $\angle ASC = \angle ASB = \angle BSC = 60^\circ$ và các cạnh $SA = 3, SB = 4, SC = 5$ áp dụng công thức $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(a, b)$ ta tính được độ dài các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lần lượt là $\sqrt{13}, \sqrt{21}, \sqrt{19}$. Ta tính được $\cos \angle SAB = \frac{1}{\sqrt{13}}$

Gọi H là chân đường cao từ C xuống mặt phẳng (SAB), Kẻ $HK \perp SA, HI \perp AB$ (như hình vẽ). Đặt $CH = x$. Quan sát hình vẽ ta thấy : tính được độ dài các đoạn thẳng CK, CI, sau đó ta biểu diễn được HK, HI theo CH, và ta tìm được mối quan hệ giữa HK, HI

$$\text{Tính CK: } CK = \frac{2S_{CSA}}{SA} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} SC \cdot SA \cdot \sin 60^\circ}{SA} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AK = \frac{1}{2}, HK^2 = \frac{75}{4} - x^2$$

$$\text{Tương tự ta tính được } CI = \frac{17\sqrt{39}}{26}, AI^2 = \frac{121}{52}, HI^2 = \frac{867}{52} - x^2$$

$$\text{Ta lại có } IK^2 = AK^2 + AI^2 - 2AK \cdot AI \cdot \cos \angle SAB = \frac{28}{13}$$

$$\text{Mà } IK^2 = HK^2 + HI^2 - 2HK \cdot HI \cdot \cos(180^\circ - \angle SAB) \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

Chọn đáp án D.

Câu 26: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) là:

A. $h = \frac{2}{3}a$

B. $h = \frac{4}{3}a$

C. $h = \frac{8}{3}a$

D. $h = \frac{3}{4}a$

Hướng dẫn giải:

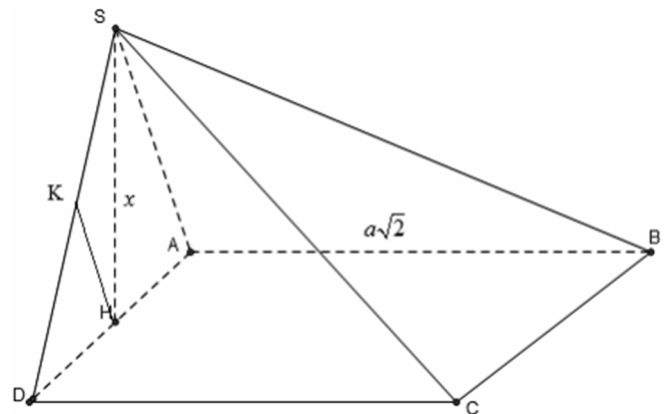
- Đặt $SH = x \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot x \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{4}{3}a^3 \Rightarrow x = 2a$

-Ta có

$$d(B; (SCD)) = d(A; (SCD)) = 2d(H; (SCD))$$

$$= 2HK = 2 \cdot \frac{2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{4a}{3}$$

Chọn đáp án B.



Câu 27: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật. $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải:

$$S_d = a^2 \sqrt{3}, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad V = \frac{3a^3}{2} \quad \text{suy ra} \quad V_{B_1 A_1 BD} = \frac{V}{6} = \frac{a^3}{4} = \frac{1}{3} S_{A_1 BD} \cdot d(B_1; (A_1 BD)), \quad S_{A_1 BD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$d(B_1; (A_1 BD)) = \frac{3V_{B_1 A_1 BD}}{S_{A_1 BD}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Chọn đáp án A.

II - KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẪNG

Câu 1: Lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ đáy tam giác vuông cân tại B, cạnh bên $CC' = a\sqrt{3}$. Biết thể tích khối trụ bằng $2\sqrt{3}a^3$. Khoảng cách hai đường thẳng AB và CC' bằng

- A. $a\sqrt{2}$ B. $2a$ C. $\sqrt{3}a$ D. $2\sqrt{3}a$

Hướng dẫn giải:

Ta có $BC \perp AB, BC \perp CC'$ nên $d(AB; CC') = BC$

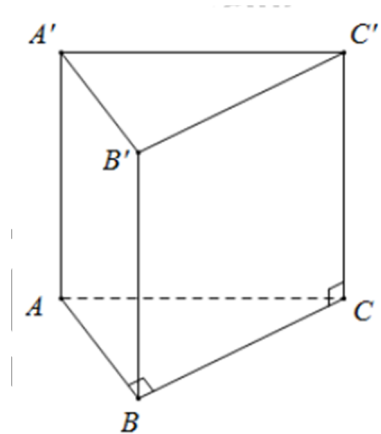
Vì $\triangle ABC$ vuông cân ở B nên

$$2\sqrt{3}a^3 = V_{ABCA'B'C'} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot CC' = \frac{1}{2}BC^2 \cdot a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 4a^2 \Rightarrow BC = 2a$$

$$\Rightarrow d(AB; CC') = 2a$$

Chọn đáp án B.



Câu 2: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 4a, BC = 3a, AC = 5a$, cạnh bên $BB' = 9a$. Gọi M là điểm thuộc BB' sao cho $BB' = 3B'M$. Khoảng cách giữa $B'C$ và AM là

- A. $\frac{12a}{7}$ B. $\frac{6a}{7}$ C. $\frac{10a}{7}$ D. $\frac{a}{7}$

Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng BCB' , vẽ $MN \parallel B'C$ (N thuộc BC)

$$\Rightarrow B'C \parallel (AMN) \Rightarrow d(B'C, AM) = d(B'C, (AMN))$$

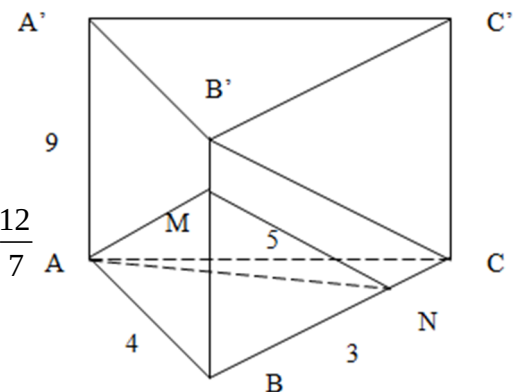
$$= d(B', (AMN)) = \frac{1}{2}d(B, (AMN)) = \frac{1}{2}h$$

Để đơn giản ta coi $a=1$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{4^2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2}\right) \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2}}} = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow d(B'C, AM) = \frac{6}{7}a$$

Chọn đáp án B.



Câu 3: Cho hình chóp S.ABC có AS, AB, AC đôi một vuông góc với nhau, $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ đường thẳng SA đến BC.

- A. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $d = a$ C. $d = a\sqrt{2}$ D. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

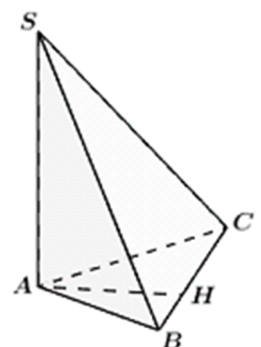
Hướng dẫn giải:

Trong tam giác ABC kẻ $AH \perp BC, H \in BC$

Dễ dàng chứng minh được $AH \perp SA$

$$\text{Vậy } d_{(SA, BC)} = AH = \sqrt{\frac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Chọn đáp án D.



Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.

- A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

Hướng dẫn giải:

(SBC) chứa SC và song song với AD. Đường thẳng qua O vuông góc với BC cắt BC, AD lần lượt tại E, F. Vì O là trung điểm của EF nên ta có:

$d(AD, SC) = d(F, (SBC)) = 2d(O, (SBC))$. Kẻ OH vuông góc với SE tại H (1)

$$BC \perp EF, BC \perp SO \Rightarrow BC \perp (SEF) \Rightarrow BC \perp OH \quad (2)$$

Từ (1) (2) và BC cắt SE $\Rightarrow OH \perp (SBC)$. Tam giác SOE vuông tại O nên ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{20}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{15}}{10} \Rightarrow d(AD, SC) = \frac{a\sqrt{15}}{5}. \text{ Gọi M sao cho ABMC là hình bình hành}$$

Vẽ AH vuông góc với BM tại H, AK vuông góc SH tại K. Suy ra, AK vuông góc (SBM)

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{5}{2a^2}$$

$$\text{Vì AC song song (SMB) suy ra: } d(AC, SB) = d(A, (SBM)) = AK = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Chọn đáp án B.

Câu 5: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tại bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1 .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và B_1C_1 theo a bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $a\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Xét tam giác vuông AHA_1 có $AA_1 = a, \widehat{AA_1H} = 30^\circ \Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác đều

cạnh a, H thuộc B_1C_1 và $A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên A_1H vuông góc với B_1C_1 . Mặt khác $AH \perp B_1C_1$ nên

$$B_1C_1 \perp (AA_1H).$$

Kẻ đường cao HK của tam giác AA_1H thì HK chính là khoảng cách giữa AA_1 và B_1C_1

$$\text{Ta có } AA_1.HK = A_1H.AH \Rightarrow HK = \frac{A_1H.AH}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Chọn đáp án C.

Câu 6: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết thể tích của khối lăng trụ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

A. $\frac{3a}{2}$

B. $\frac{4a}{3}$

C. $\frac{3a}{4}$

D. $\frac{2a}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của BC , dựng $MN \perp AA'$ tại N (1)

Gọi O là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow O$ là hình chiếu của A' lên $(ABC) \Rightarrow A'O \perp BC$

Mặt khác $AM \perp BC$ vì ΔABC đều

$\Rightarrow BC \perp (A'MA) \Rightarrow BC \perp MN$ (2). Từ (1) và (2)

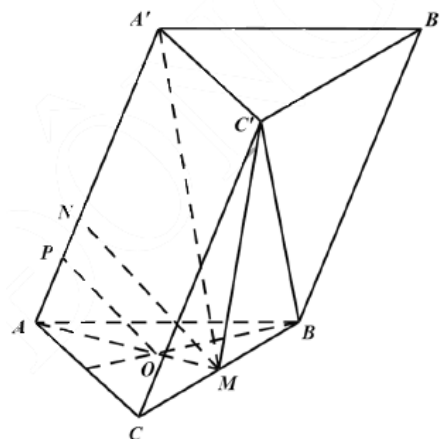
$\Rightarrow MN$ là đường vuông chung

$$\text{Kẻ } OP \parallel MN \Rightarrow \frac{OP}{MN} = \frac{AO}{AM} = \frac{2}{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow OA' = \frac{V_{ABCA'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = a$$

$$\text{Xét } \Delta A'OA \text{ vuông tại } O, \text{ đường cao } OP: \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2} \Rightarrow OP = \frac{a}{2} \Rightarrow MN = \frac{3a}{4}$$

Chọn đáp án C.



Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và $AC' = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BD là:

A. $\frac{10a}{\sqrt{17}}$

B. $\frac{8a}{\sqrt{17}}$

C. $\frac{6a}{\sqrt{17}}$

D. $\frac{2a}{\sqrt{17}}$

Hướng dẫn giải:

Tứ giác $AB'C'D$ là hình bình hành $\Rightarrow AB' \parallel C'D \Rightarrow AB' \parallel (BC'D)$

$$\Rightarrow d(AB', BD) = d(AB', (BC'D)) = d(A, (BC'D)) = d(C, (BC'D))$$

Vì $BD \perp AC$, $BD \perp CC' \Rightarrow BD \perp (OCC') \Rightarrow (BC'D) \perp (OCC')$

Trong (OCC') , kẻ $CH \perp OC'$ (H thuộc OC') $\Rightarrow CH \perp (BC'D) \Rightarrow d(C, (BC'D)) = CH$

$$\Delta OCC' \text{ vuông tại } C \Rightarrow \frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CO^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{4a^2} \Rightarrow CH = \frac{2a}{\sqrt{17}}$$

$$\text{Vậy } d(AB', BD) = \frac{2a}{\sqrt{17}}$$

Chọn đáp án D.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC

A. $d_{(AB, SC)} = a\sqrt{2}$

B. $d_{(AB, SC)} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $d_{(AB, SC)} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

D. $d_{(AB, SC)} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải:

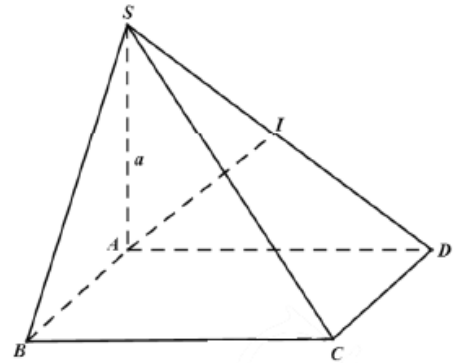
Vì $AB \parallel CD \subset (SCD) \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

Mà $SC \subset (SCD) \Rightarrow d_{(AB, SC)} = d_{(AB, (SCD))} = d_{(A, (SCD))}$

Gọi I là trung điểm của SD $\Rightarrow AI \perp SD$, mà $AI \perp CD$

Suy ra $AI \perp (SCD)$, vậy $d_{(AB, SC)} = d_{(A, (SCD))} = AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Chọn đáp án B.



Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng $a\sqrt{3}$; $\widehat{ABC} = 120^\circ$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng:

A. $\frac{a\sqrt{39}}{26}$

B. $\frac{3a\sqrt{29}}{26}$

C. $\frac{3a\sqrt{29}}{13}$

D. $\frac{a\sqrt{14}}{6}$

Hướng dẫn giải:

Kẻ $CM \parallel BD$, $AN \perp BC$, $AH \perp SC$ suy ra $AC \perp CM$ và $d(A, (SCM)) = AH$. Gọi

$$\{I\} = AD \cap CM \rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{DC}{AM} = \frac{1}{2}$$

Theo bài ra ta có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là góc SNA nên

$$SNA = 60^\circ \rightarrow SA = AN \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác SAC vuông tại A ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{13}{27a^2} \rightarrow AH = \frac{3a\sqrt{39}}{13}$$

$$\text{Ta có: } d(BD, SC) = d(BD, (SCM)) = d(D, (SCM)) = \frac{1}{2}d(A, (SCM))$$

$$\text{Suy ra } d(BD, SC) = \frac{3a\sqrt{39}}{26}$$

Chọn đáp án A.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Góc tạo bởi SC và (ABCD) bằng 45° . Tính theo a tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB.

A. $d = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$

B. $d = \frac{a\sqrt{5}}{13}$

C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

D. $d = \frac{a\sqrt{15}}{3}$

Hướng dẫn giải:

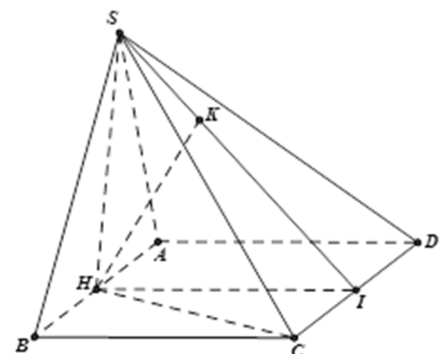
Xác định được đúng góc giữa SC và (ABCD) là $\angle SCH = 45^\circ$

$$\text{Tính được } HC = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Vì $AB \parallel (SCD)$, $H \in AB$ nên

$$d(AB; SD) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD))$$

Gọi I là trung điểm của CD. Trong (SHI), dựng $HK \perp SI$ tại K



Chứng minh được $HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H; (SCD)) = HK$

Xét tam giác SHI vuông tại H, HK đường cao:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{4}{5a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{5a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Vậy } d(AB; SD) = HK = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

Chọn đáp án C.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD$ ($c - g - c$), suy ra $SB = SD$.

Lại có $\widehat{SBD} = 60^\circ$, suy ra $\triangle SBD$ đều cạnh

$$SB = SD = BD = a\sqrt{2}.$$

Trong tam giác vuông SAB , ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

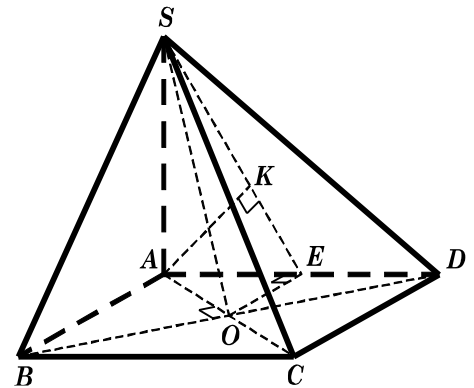
Gọi E là trung điểm AD , suy ra $OE \parallel AB$ và $AE \perp OE$.

$$\text{Do đó } d[AB, SO] = d[AB, (SOE)] = d[A, (SOE)].$$

Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó

$$d[A, (SOE)] = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án D.



Câu 12: Chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a , mặt bên tạo với mặt đáy góc 45° . Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng:

- A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{4}$

Hướng dẫn giải:

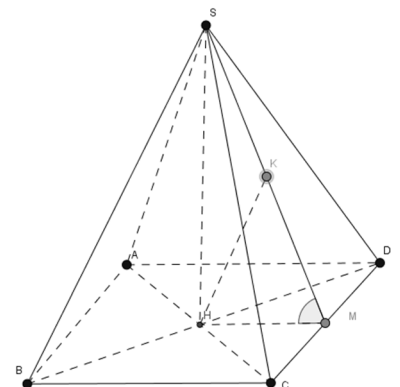
$$\text{Ta có : } d(AB; SC) = d(AB; (SCD)) = 2d(H; (SCD)) = 2HK$$

Mặt khác tam giác SHM vuông cân tại H, nên ta có

$$HK = \frac{1}{2}SM = \frac{1}{2}HM\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Vậy } d(AB; SC) = 2HK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án A.



Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$ hình chiếu vuông góc H của S lên mặt (ABCD) là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường SD và HK theo a?

- A. $\frac{3a}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$.

Hướng dẫn giải:

- Dựng $HI \perp BD$ và $HJ \perp SI$
- Vì $HK \parallel BD \Rightarrow HK \parallel (SBD)$
- Chứng minh được $BD \perp (SHI)$ và $HJ \perp (SBD)$

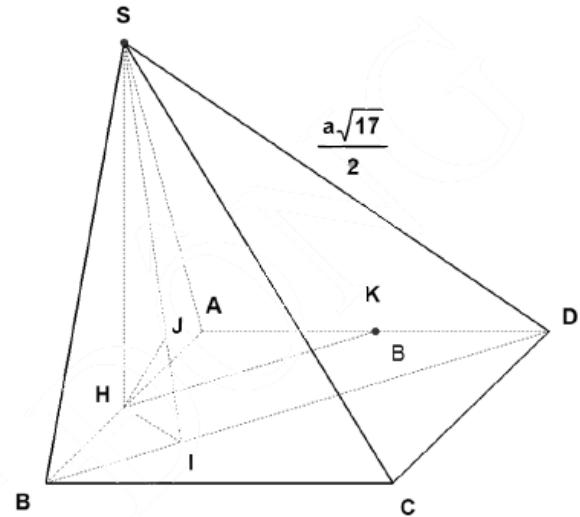
Ta có $d_{(HK,SD)} = d_{(HK,(SBD))} = d_{(H,(SBD))} = HJ$

$$SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \sqrt{\frac{17a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}} = \sqrt{\frac{12a^2}{4}} = a\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{25}{3a^2}$$

$$\Rightarrow HJ = \frac{a\sqrt{3}}{5}$$

Chọn đáp án D.



Câu 14: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MC = 2MS$. Biết $AB = 3, BC = 3\sqrt{3}$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

- A. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Hướng dẫn giải:

Từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt SA tại

$$N \Rightarrow AC \parallel MN \Rightarrow AC \parallel (BMN)$$

$$AC \perp AB, AC \perp SH \Rightarrow AC \perp (SAB)$$

$$AC \parallel MN \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp (SAB)$$

$$\Rightarrow (BMN) \perp (SAB) \text{ theo giao tuyến BN.}$$

Ta có:

$$AC \parallel (BMN) \Rightarrow d(AC, BM) = d(AC, (BMN))$$

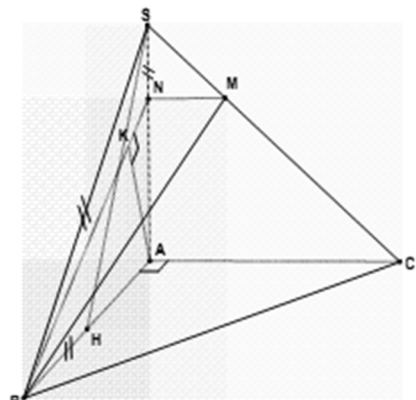
$$= d(A, (BMN)) = AK \text{ với K là hình chiếu của A trên BN.}$$

$$\frac{NA}{SA} = \frac{MC}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{ABN} = \frac{2}{3} S_{SAB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (đvdt) và}$$

$$AN = \frac{2}{3} SA = 2$$

$$BN = \sqrt{AN^2 + AB^2 - 2AN \cdot AB \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{7} \Rightarrow AK = \frac{2S_{ABN}}{BN} = \frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Vậy } d(AC, BM) = \frac{3\sqrt{21}}{7} \text{ (đvdd)}$$



Chọn đáp án A.

Câu 15: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông, $AB = BC = 1$, $AA' = \sqrt{2}$. M là trung điểm của cạnh BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM ; $B'C$

A. $d = \frac{1}{\sqrt{7}}$

B. $d = \frac{2}{\sqrt{7}}$

C. $d = \sqrt{7}$

D. $d = \frac{1}{7}$

Hướng dẫn giải:

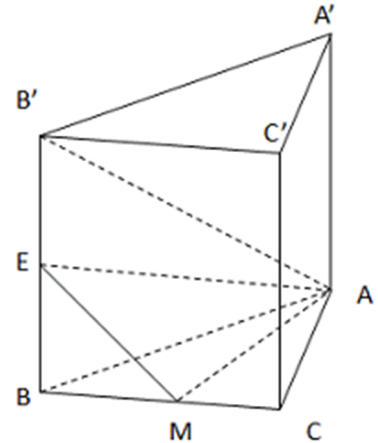
Gọi E là trung điểm của BB' . Khi đó $(AME) // B'C$ nên ta có:

$$d_{(B', (AME))} = d_{(B'C, (AME))} = d(B'C; AM)$$

Ta có: $d_{(B', (AME))} = h$

Tứ diện $BEAM$ có các cạnh BE , BM , BA đôi một vuông góc nên là bài toán quen thuộc.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = 7 \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

Chọn đáp án A.

Câu 16: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a , góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1 . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC_1 theo a là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$

D. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải:

Do $AH \perp (A_1B_1C_1)$ nên góc AA_1H là góc giữa AA_1 và $(A_1B_1C_1)$ theo giả thiết thì góc AA_1H bằng 30° .

Xét tam giác vuông AHA_1 có

$$AA_1 = a, \angle AA_1H = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle AHA_1 \text{ có } AA_1 = a, \angle AA_1H = 30^\circ \Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

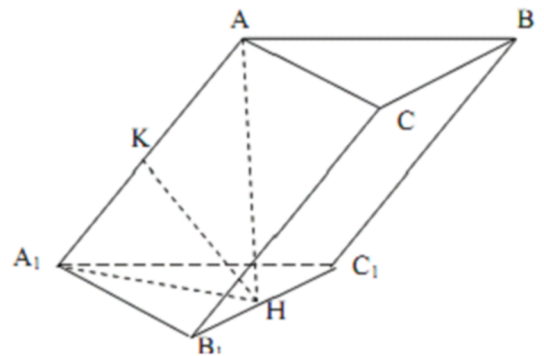
$$\text{Do } A_1B_1C_1 \text{ đều cạnh } a, H \text{ thuộc } B_1C_1 \text{ và } A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra A_1H vuông góc B_1C_1 , $AH \perp B_1C_1$ nên $B_1C_1 \perp (AA_1H)$

$$HK \text{ chính là khoảng cách giữa } AA_1 \text{ và } B_1C_1. \text{ Ta có } AA_1 \cdot HK = A_1H \cdot AH \Rightarrow HK = \frac{A_1H \cdot AH}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Chọn đáp án A.

Câu 17: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Góc giữa CA' và mặt $(AA'B'B)$ bằng 30° . Gọi $d(AI', AC)$ là khoảng cách giữa $A'I$ và AC , kết quả tính $d(AI', AC)$ theo a với I là trung điểm AB là



A. $\frac{a\sqrt{210}}{70}$.

B. $\frac{a\sqrt{210}}{35}$.

C. $\frac{2a\sqrt{210}}{35}$.

D. $\frac{3a\sqrt{210}}{35}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có : $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp AA' (AA' \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (AA'B'B)$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Trong } (AA'B'B): AB \cap AA' = \{A\} \end{array} \right.$

Suy ra góc giữa CA' và $(AA'B'B)$ chính là góc giữa CA' và IA' và bằng góc $\widehat{CA'I} = 30^\circ$

Do đó $A'I = \frac{IC}{\tan \widehat{CA'I}} = \frac{3a}{2}$; với $IC = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}$

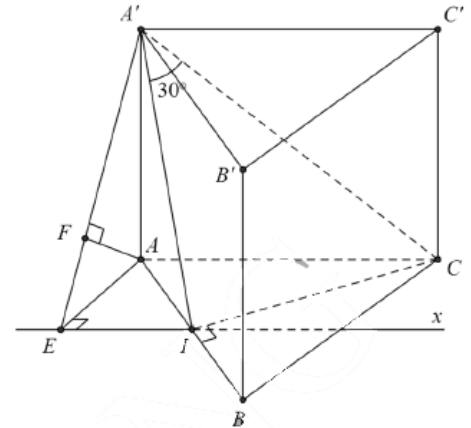
Kẻ $Ix \parallel AC$. Khi đó $d(AC, A'I) = d(AC, (A'I, Ix)) = d(A, (A'I, Ix))$

Kẻ $AE \perp Ix$ tại E và $AF \perp A'E$ tại F. Ta chứng minh được: $d(A, (A'I, Ix)) = AF$

Ta có: $AE = AI \cdot \sin \widehat{AIE} = \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ và

$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{35}{6a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{210}}{35}$

Vậy: $d(AC, A'I) = AF = \frac{a\sqrt{210}}{35}$.



Chọn đáp án B.

Câu 18: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là điểm thuộc SC sao cho $MC=2MS$. Biết $AB=3$, $BC=3\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM là:

A. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$

B. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$

C. $\frac{6\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{3\sqrt{21}}{28}$

Hướng dẫn giải:

Từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt SA tại N $\Rightarrow AC \parallel MN \Rightarrow AC \parallel (BMN)$

$AC \perp AB, AC \perp SH \Rightarrow AC \perp (SAB), AC \parallel MN \Rightarrow MN \perp (SAB)$

$\Rightarrow (BMN) \perp (SAB)$ theo giao tuyến BN

Ta có:

$AC \parallel (BMN) \Rightarrow d(AC, BM) = d(AC, (BMN)) = d(A, (BMN)) = AK$ với K là hình chiếu của A trên BN

$\frac{NA}{SA} = \frac{MC}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{ABN} = \frac{2}{3} S_{SAB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (đvdt) và $AN = \frac{2}{3} SA = 2$

$BN = \sqrt{AN^2 + AB^2 - 2AN \cdot AB \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{7} \Rightarrow AK = \frac{2S_{ABN}}{BN} = \frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$

Vậy $d(AC, BM) = \frac{3\sqrt{21}}{7}$

Chọn đáp án A.

Câu 19: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh $AB=a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích tứ diện $B'ABC$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(AB'C)$.

A. $V_{B'ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}; d = \frac{a}{4}$

B. $V_{B'ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}; d = \frac{3a}{4}$

C. $V_{B'ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}; d = \frac{a}{4}$

D. $V_{B'ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}; d = \frac{a\sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải:

Theo như đề bài dữ kiện thì ta có thể dễ dàng tính được thể tích của khối lăng trụ tam giác đều ban đầu, từ đó suy ra thể tích của khối tứ diện $AB'BC$. Để tính được khoảng cách từ B đến $(AB'C)$ thực chất là tìm chiều cao của tứ diện, đến đây bài toán sẽ được giải quyết nếu quý độc giả tìm được diện tích tam giác $AB'C$. Vì đề bài cho dữ kiện $((A'BC), (ABC))=60^\circ$, nên ta sẽ đi xác định góc này bằng cách gọi H là trung điểm của BC . Tam giác ABC đều nên $AH \perp BC$ (1).

$A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp A'H \Rightarrow ((A'BC), (ABC)) = A'HA = 60^\circ$

$\Rightarrow A'A = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$. Khi đó

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'A \cdot S_{ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$

Và $V_{B'ABC} = \frac{1}{3}V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ lúc này ta có thể loại C và D.

Dễ thấy diện tích tam giác $AB'C$ có thể được do $B'AC$ cân tại B' có

$$B'A = B'C = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}; AC = a$$

Dễ tính được chiều cao kẻ từ B' của tam giác có độ dài là $a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{ACB'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(B; (AB'C)) = \frac{3V_{B'ABC}}{S_{AB'C}} = \frac{3a}{4}$$

Chọn đáp án B.

Câu 20: Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có $AC = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 120^\circ$. Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30° . Gọi M là trung điểm của BB' . Tính thể tích khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC' theo a .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{21}$

B. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$

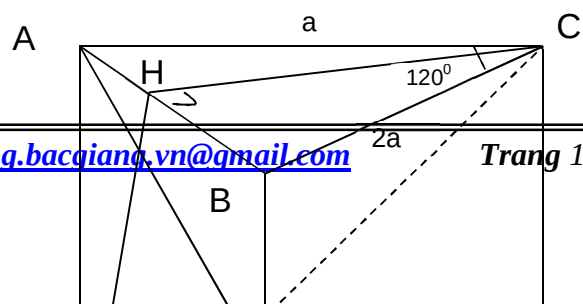
C. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$

D. $a\sqrt{\frac{3}{7}}$

Hướng dẫn giải:

+ Kẻ đường cao CH của tam giác ABC . Có $CH \perp AB$; $CH \perp AA'$ suy ra $CH \perp (ABB'A')$, Do đó góc giữa $A'C$ và mp $(ABB'A')$ là góc $\widehat{CA'H} = 30^\circ$

+ Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}CA \cdot CB \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Trong tam giác ABC : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 7a^2$
 $\Rightarrow AB = a\sqrt{7}$

$$+ S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} AB \cdot CH \Rightarrow CH = a\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$+ \text{Vậy : } d(CC' ; AM) = d(CC' ; (ABB'A')) = d(C ; (ABB'A')) = CH = a\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Chọn đáp án D.

Câu 21: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ các mặt đều là hình vuông cạnh a . Gọi D là trung điểm của cạnh BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B'$ và DC' theo a

A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải:

Có 2 cách để tiếp cận một bài toán hình học không gian thông thường là kẻ thêm hình và tọa độ hóa. Ở bài toán này, phương pháp tọa độ có nhiều ưu điểm hơn hẳn.

Gọi D' là trung điểm $B'C'$ ta có DD' ; DC ; DA đôi một vuông góc với nhau

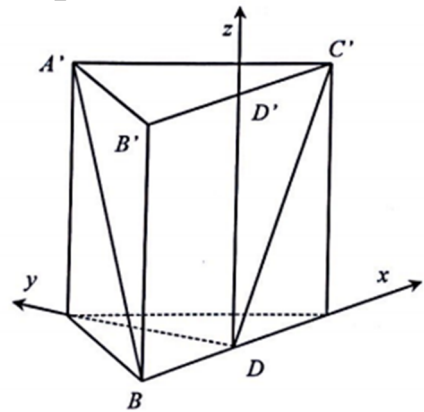
Ghép hệ tọa độ như hình vẽ với D là gốc tọa độ.

$$\text{Ta có } D(0;0;0), B\left(-\frac{a}{2};0;0\right), C'\left(\frac{a}{2};0;a\right), A'\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$$

Gọi (α) là mặt phẳng qua DC' và $(\alpha) // A'B$ suy ra phương trình $(\alpha): x - z = 0$

$$\Rightarrow d(A'B, DC') = d(B, (\alpha)) = \frac{\left| -\frac{a}{2} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Chọn đáp án C.



GÓC**A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT****1) Góc giữa hai đường thẳng:**

$$a//a', b//b' \Rightarrow (\widehat{a,b}) = (\widehat{a',b'})$$

Chú ý: $0^\circ \leq (\widehat{a,b}) \leq 90^\circ$

2) Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng:

- Nếu $d \perp (P)$ thì $(\widehat{d,(P)}) = 90^\circ$.
- Nếu $d \not\perp (P)$ thì $(\widehat{d,(P)}) = (\widehat{d,d'})$ với d' là hình chiếu của d trên (P) .

Chú ý: $0^\circ \leq (\widehat{d,(P)}) \leq 90^\circ$

2) Góc giữa hai mặt phẳng

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(P),(Q)}) = (\widehat{a,b})$$

- Giả sử $(P) \cap (Q) = c$. Từ $I \in c$, dựng $\begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(P),(Q)}) = (\widehat{a,b})$

Chú ý: $0^\circ \leq (\widehat{(P),(Q)}) \leq 90^\circ$

3) Diện tích hình chiếu của một đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P) , S' là diện tích của hình chiếu (H') của (H) trên (Q) , $\varphi = (\widehat{(P),(Q)})$. Khi đó: $S' = S \cdot \cos \varphi$

B – BÀI TẬP

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD , biết $EF = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD là :

A. 60° B. 45° C. 30° D. 90° **Hướng dẫn giải:**

Gọi M là trung điểm BD , $(\widehat{AB,CD}) = (\widehat{MF,ME})$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác EMF tính được

$$\cos \widehat{EMF} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{EMF} = 120^\circ \Rightarrow (\widehat{AB,CD}) = 60^\circ$$

Chọn đáp án A.

Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABC$. Người ta tăng cạnh đáy lên gấp 2 lần. Để thể tích giữ nguyên thì tan của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy phải giảm đi số lần là :

A. 8

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải:

Gọi S là đỉnh hình chóp, O là trọng tâm tam giác ABC ; α là góc tạo bởi cạnh bên và $\tan(\alpha)$.

Chứng minh được thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{12} a^3 \tan \alpha$

Khi cạnh bên tăng lên 2 lần thì thể tích là $V = \frac{1}{12}(2a)^3 \tan \alpha'$. Để thể tích giữ nguyên thì

$\tan \alpha' = \frac{\tan \alpha}{8}$, tức là tan góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy phải giảm đi 8 lần

Chọn đáp án A.

Câu 3: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Khi đó cosin góc giữa mặt bên và mặt đáy là:

A. 30°

B. $\sqrt{3}$

C. 60°

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

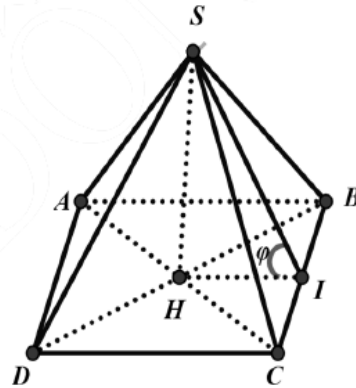
Hướng dẫn giải:

Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Khi đó cosin góc giữa mặt bên và mặt đáy là:

Ta có $((SBC), (ABCD)) = \widehat{SIH} = \varphi$

$$\text{Khi đó: } \cos \varphi = \frac{HI}{SI} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Chọn đáp án D.



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA bằng $2a$, tam giác ABC vuông ở C có $AB = 2a$,

$\widehat{CAB} = 30^\circ$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC . Tính theo a thể tích của khối chóp $H.ABC$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (SBC)$.

A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

B. $\frac{\sqrt{7}}{14}$

C. $\frac{3\sqrt{7}}{14}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{9}$

Hướng dẫn giải:

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Ta có $AH \perp SC, AH \perp CB$ (Do $CB \perp (SAC)) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB$

Lại có: $SB \perp AK \Rightarrow SB \perp (AHK)$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (SBC)$ là $\widehat{HKA}$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{7}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{a.2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AK = a\sqrt{2}$$

Tam giác HKA vuông tại H (vì $AH \perp (SBC), (SBC) \supset HK$)

$$\sin \widehat{HKA} = \frac{AH}{AK} = \frac{\frac{a.2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cos \widehat{HKA} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Chọn đáp án A.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $(SAB) \perp (ABCD)$. H là trung điểm của AB, $SH = HC, SA = AB$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD). Giá trị của $\tan \alpha$ là:

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}, SA = AB = a,$

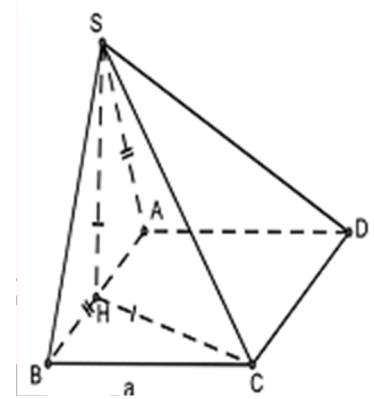
$$SH = HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Có

$$SA^2 + AH^2 = \frac{5a^2}{4} = SH^2 \Rightarrow \triangle SAH \Rightarrow SA \perp AH \Rightarrow SA \perp (ABCD)$$

và $AC = hc(SC; (ABCD))$

Ta có: $(SC; (ABCD)) = \angle SCA, \tan \angle SCA = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Chọn đáp án A.

Câu 6: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích của hình chóp S.ABCD là $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy (ABCD) là:

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm AB

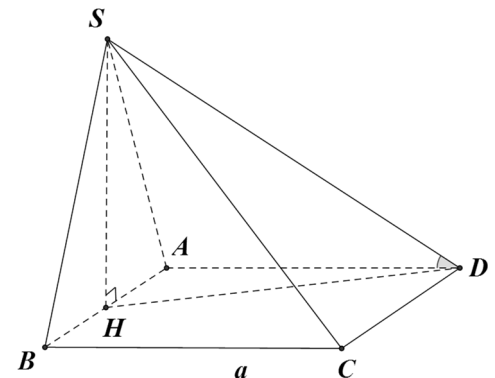
Ta có

$$S_{ABCD} = a^2, V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{6} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$HC = \sqrt{AC^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$(\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, HC}) = \widehat{SCH}$$

$$\tan \widehat{SCH} = SH : CH = \frac{a\sqrt{15}}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ$$



Chọn đáp án C.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy (ABCD). Gọi H là trung điểm của AB, $SH = HC, SA = AB$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD). Giá trị của $\tan \alpha$ là:

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

$SA = AB = a$

$$SH = HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

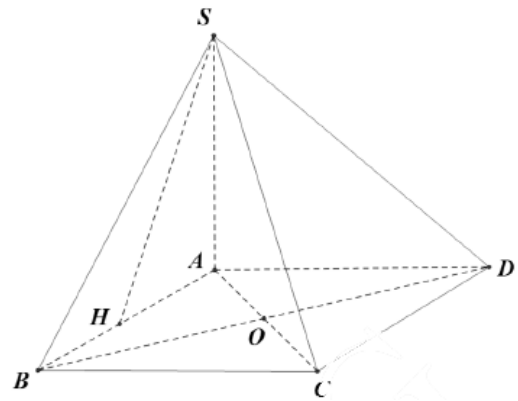
$$\text{Có } AH^2 + SA^2 = \frac{5a^2}{4} = SH^2 \longrightarrow \Delta SAH \text{ vuông tại A}$$

nên $SA \perp AB$

Do đó $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SCA}$

$$\text{Trong tam giác vuông SAC, có } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Chọn đáp án A.



Câu 8: Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, có SA vuông góc với (ABC), tam giác SBC cân tại S. Thể tích của khối chóp S.ABC là $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là:

A. 60°

B. 30°

C. 45°

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải:

Do tam giác SBC cân tại S nên gọi I là trung điểm của BC thì $SI \perp BC; AI \perp BC \Rightarrow SIA = ((SBC); (ABC))$

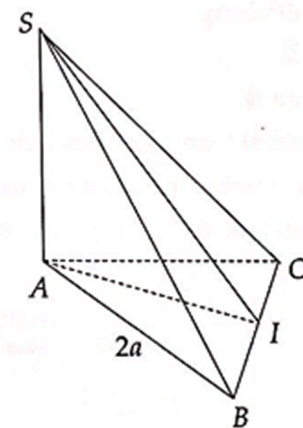
Do đáy ABC là tam giác đều nên

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}. \text{ Thể tích khối chóp được tính bằng}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow SA = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \Leftrightarrow SA = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Khi đó } \tan SIA = \frac{SA}{AI} = \frac{3a}{2} : \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SIA = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Chọn đáp án D.



Câu 9: Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa (BA'C) và (DA'C)

A. 30°

B. 120°

C. 60°

D. 90°

Hướng dẫn giải:

Kẻ $BH \perp A'C$ (1)

Mặt khác, ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ AA' \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow AA' \perp BD$

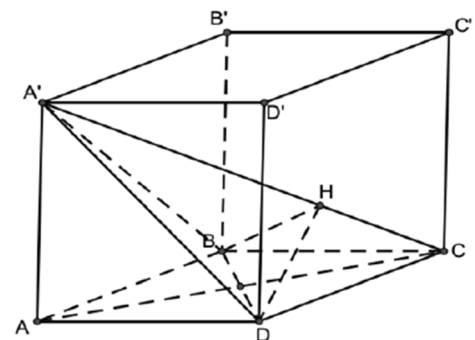
$$\Rightarrow BD \perp (ACA') \Rightarrow BD \perp A'C \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $A'C \perp (BDH) \Rightarrow A'C \perp DH$

Do đó $((BA'C), (DA'C)) = (\widehat{HB; HD})$

Xét tam giác vuông BCA' có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA'^2} \Rightarrow BH = DH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$



Ta có $\cos \widehat{BHD} = \frac{2BH^2 - BD^2}{2BH^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ$. Vậy góc cần tìm là 60°

Chọn đáp án C.

Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân với $AB = AC = a$, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC' . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$?

A. $\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ B. $\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{10}}$ C. $\cos \alpha = \sqrt{\frac{7}{10}}$ D. $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $BC = a\sqrt{3}$. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ACI , ABB' , $B'CI$:

Suy ra $AI = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $AB' = \sqrt{2}a$, $B'I = \frac{\sqrt{13}}{2}a$

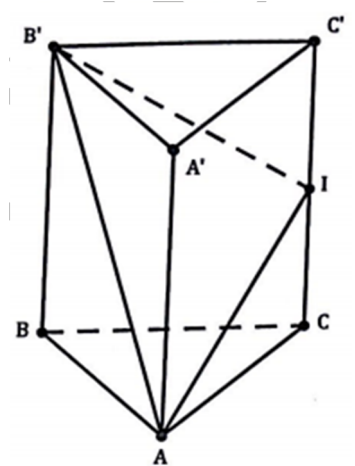
Do đó $AI^2 + AB'^2 = B'I^2$

Vậy tam giác $AB'I$ vuông tại A

$S_{AB'I} = \frac{1}{2}AI \cdot AB' = \frac{\sqrt{10}}{4}a^2$, $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$. Tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác $AB'I$.

Suy ra: $S_{AB'I} \cdot \cos \alpha = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{10}}$



Chọn đáp án B.

Câu 11: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông, $AB = BC = 1$, $AA' = \sqrt{2}$. M là trung điểm của cạnh BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là:

A. $d = \frac{1}{\sqrt{7}}$ B. $d = \frac{2}{\sqrt{7}}$ C. $d = \sqrt{7}$ D. $d = \frac{1}{7}$

Hướng dẫn giải:

Gọi E là trung điểm của BB' . Khi đó $(AME) // B'C$ nên ta có:

Gọi E là trung điểm của BB' .

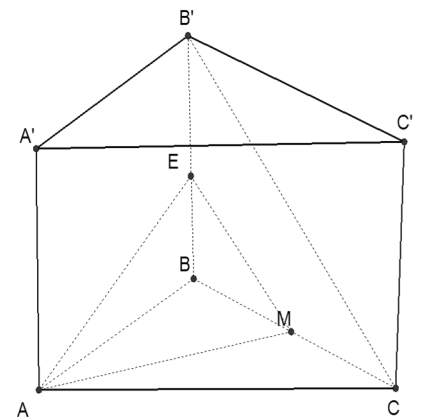
$d(B'C; AM) = d(B'C; (AME)) = d(B'; (AME)) = d(B; (AME))$

Ta có: $d(B; (AME)) = h$

Tứ diện BEAM có các cạnh BE, BM, BA đôi một vuông góc nên là bài toán quen thuộc. Ta có

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = 7 \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{7}}$

Chọn đáp án A.



Câu 12: Cho hình chóp S.ABC có mặt bên SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = a\sqrt{2}$. Biết góc tạo bởi SC và (ABC) bằng 45° . Khoảng cách từ SB đến SC bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $a\sqrt{2}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Hướng dẫn: Gọi H là trung điểm của AC. Tính được $AC = 2HC = 2a$; $BH = \frac{1}{2}AC = a$

CM được $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SC, (ABC)) = \widehat{SCH} = 45^\circ \Rightarrow SH = a$

$\rightarrow$ tam giác SHB vuông cân tại H $\Rightarrow SB = a\sqrt{2}$

Trong (SHB): Dựng $HI \perp SB$ tại I (1)

CM được $AC \perp (SHB) \Rightarrow AC \perp HI$ tại H (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d(SB, AC) = HI = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Chọn đáp án C.

Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB; Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Góc giữa hai đường thẳng SB và AC có giá trị gần với giá trị nào nhất sau đây:

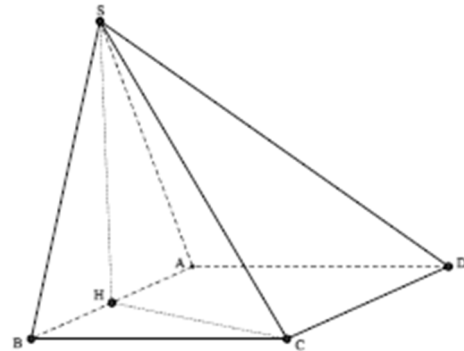
- A. 60° B. 80° C. 70° D. 90°

Hướng dẫn giải:

$$AC = a\sqrt{5}; SB = a\sqrt{7}; \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{SB \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{35}} \Rightarrow \varphi = 70^\circ$$

Chọn đáp án C.



Câu 14: Cho hình vuông ABCD cạnh 4a. Lấy H, K lần lượt trên AB, AD sao cho $BH = 3HA$, $AK = 3KD$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại H lấy S sao cho góc $SBH = 30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK. Tính cosin góc giữa SE và BC.

- A. $\frac{18}{5\sqrt{39}}$ B. $\frac{9}{5\sqrt{39}}$ C. $\frac{36}{5\sqrt{39}}$ D. $\frac{28}{5\sqrt{39}}$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{SE}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{BC}}{SE \cdot BC}$$

$$\overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HE}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{9}{25} \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{9}{25} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$= \frac{9}{25} CH \cdot CB \cdot \cos \widehat{HCB} = \frac{9}{25} \cdot CH \cdot CB \cdot \frac{CB}{CH} = \frac{9}{25} \cdot CB^2 = \frac{144a^2}{25}$$

Ta chứng minh được $HK \perp CH$ tại E

$$\frac{HE}{HC} = \frac{HE \cdot HC}{HC^2} = \frac{HB^2}{HB^2 + BC^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow HE = \frac{9}{25} \cdot HC = \frac{9}{25} \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{9a}{5}$$

$$SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{81a^2}{25}} = \frac{2a\sqrt{39}}{5} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{SE}; \overrightarrow{BC}) = \frac{144a}{25} \cdot \frac{5}{2a\sqrt{39} \cdot 4a} = \frac{18}{5\sqrt{39}}$$

Chọn đáp án A.

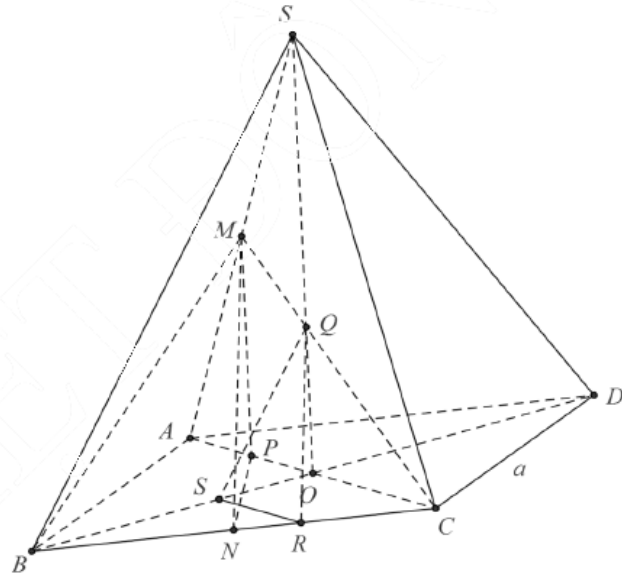
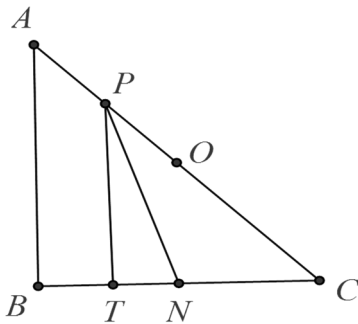
Câu 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm của đáy là O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng :

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$



Hướng dẫn giải:

Gọi P là trung điểm AO ; Q là giao điểm của MC và SO , từ Q kẻ tia song song với MN trong mp(MBC) cắt BC tại R , trong mặt phẳng đáy từ R kẻ tia song song với AC cắt BD tại S .

$MP \parallel SO$ nên $MP \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{MNP} = 60^\circ$

Ta tính PN bằng cách vẽ thêm hình phụ như bên, theo định lí Ta-lét $PT = \frac{3}{4}AB = \frac{3a}{4}$

Dễ thấy $TN = \frac{a}{4}$, theo định lý Pytago ta tính được $PN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Tam giác MPN vuông tại P có $MN = \frac{NP}{\cos \widehat{MNP}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Dễ thấy Q là trọng tâm tam giác SAC nên $\frac{CQ}{MC} = \frac{2}{3}$

Vì $QR \parallel MN$ nên theo định lý Ta-lét ta suy ra $\frac{QR}{MN} = \frac{CQ}{MC} = \frac{CR}{NC} = \frac{2}{3} \Rightarrow QR = \frac{2}{3}MN = \frac{a\sqrt{10}}{3}$

Hình vuông $ABCD$ cạnh a có đường chéo $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vì $SR \parallel AC$ nên theo định lý Ta-lét ta suy ra $\frac{SR}{OC} = \frac{BR}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow SR = \frac{2}{3}OC = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

$CA \perp (SBD)$, $SR \parallel CA \Rightarrow SR \perp (SBD)$, mặt khác $QR \parallel MN$ do đó góc giữa MN với (SBD) là góc giữa QR với (SBD) là góc SQR .

Tam giác SQR vuông tại S có $\cos \widehat{SQR} = \frac{SR}{QR} = \frac{a\sqrt{2}}{3} : \frac{a\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Chọn đáp án C.