

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$, với $a \neq 0; a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm giá trị của a để biểu thức M đạt giá trị lớn nhất.

2. Cho các số thực a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $N = 3a^3 - 2b^4 + 2024$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau: $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$

2. Cho các số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = x^2 + y^2 - 9x - 12y + \frac{16}{2x+y} + 25.$$

3. Xác định các hệ số a, b để đa thức $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x + 1$

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + y = 2$.

2. Tìm số nguyên dương n sao cho $A = (n+3)(4n^2 + 14n + 7)$ là số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho tứ giác lồi ABCD, M là điểm bất kỳ trên cạnh AB (M không trùng với A và B). Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại N; Qua M kẻ đường thẳng song song với BD cắt AD tại Q. Qua Q kẻ đường thẳng song song với AC cắt CD tại P.

a) Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành

b) $MN \cdot BD + MQ \cdot AC = AC \cdot BD$

c) Tìm vị trí của M trên cạnh AB sao cho diện tích hình bình hành MNPQ lớn nhất.

2. Người ta thiết kế chiếc chậu trồng cây dạng hình chóp tam giác đều (như hình vẽ bên), biết cạnh đáy hình chóp tam giác đều là 0,4 m; độ dài trung đoạn của hình chóp tam giác đều là 0,6 m. Tính số tiền để sơn hết bề mặt xung quanh của chiếc chậu đó. Biết rằng khi sơn xong mỗi mét vuông bề mặt xung quanh của chậu cần trả 30000 đồng (tiền sơn và tiền công).



Câu 5. (2,0 điểm)

1. Một chiếc hộp đựng 99 chiếc thẻ màu vàng, 100 chiếc thẻ màu đỏ và 101 chiếc thẻ màu xanh. Người ta tiến hành trò chơi rút thẻ như sau: Mỗi lần rút thẻ người ta lấy ra hai chiếc thẻ khác màu và thay vào đó bằng hai chiếc thẻ có màu còn lại, quá trình này diễn ra liên tục. Hỏi đến một lúc nào đó người ta có thể nhận được trong hộp tất cả các thẻ có cùng một màu hay không? Hãy giải thích vì sao?

2. Cho 2025 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng trong số các số đó có một số chia hết cho 2025 hoặc có một số số mà tổng của các số ấy chia hết cho 2025.

-----Hết-----