SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TỈNH PHÚ YÊN**	**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10** **TRUNG HỌC PHỔ THÔNG, NĂM HỌC 2025 - 2026** **Môn thi: TOÁN (chuyên)** **Ngày thi: 03/6/2025**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Thời gian làm bài: 150 phút** (*không kể thời gian giao đề*)

(Đề thi có 01 trang, 06 câu)

Câu 1. *(2,00 điểm)*

a) Cho biểu thức $P=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}+\dfrac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$, với $x>0,\ x\neq 1.$

Rút gọn biểu thức P. Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $B=\dfrac{9}{P}$ nhận giá trị nguyên?

b) Cho a và b là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$2a^2+6a+3=0;\ 3b^2+6b+2=0;\ \ ab\neq 1.$

Không tính các giá trị của a và b, hãy tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{6075b^3}{20ab^2+(ab+1)^3}.$

Câu 2. *(3,00 điểm)*

a) Giải phương trình: $x+\sqrt{3x^2+5x+2}=\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x+1}.$

b) Cho đa thức $P(x)=x^2+bx+c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c|\leq 4$ và $|P(4)|$ là số nguyên tố. Xác định các hệ số b và c của đa thức $P(x)$.

Câu 3. *(1,00 điểm)* Cho tam giác ABC vuông cân tại A có độ dài $BC=a$. Điểm D di động trên tia đối của tia AC sao cho $0^0<\widehat{ABD}<45^0$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng BC, H là giao điểm của hai đường thẳng DE và AB, F là giao điểm của hai đường thẳng CH và DB.

a) Chứng minh rằng $HF.HC=HE.HD$.

b) Xác định vị trí của điểm D trên tia đối của tia AC sao cho $HF.HC$ có giá trị lớn nhất.

Câu 4. *(2,00 điểm)* Cho đoạn thẳng AB có độ dài $AB=2a$, O là trung điểm của AB. Trên nửa đường tròn $(O;\ OA)$ lấy hai điểm C, D sao cho $\widehat{COD}=60^0$ và C thuộc cung AD (C khác A và D khác B). Đường thẳng AD cắt đường thẳng BC tại E, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F.

a) Chứng minh rằng $AE.AD+BE.BC=4a^2$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác COD cắt đoạn thẳng EF và đoạn thẳng AB lần lượt tại I và H (H khác O). Chứng minh rằng ba điểm F, I, H thẳng hàng.

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD. Chứng minh rằng FK là phân giác của góc $\widehat{AFB}$.

Câu 5. *(1,00 điểm)* Cho các số nguyên a,b,c,d thỏa mãn $a^3+64b^3-2024c^3+2026d^3=0$.

Chứng minh rằng $(a+b+c+d)^2$ chia hết cho 9.

Câu 6. *(1,00 điểm)* Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0<x<y\leq 13$ và $2xy\leq 13x+9y$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2\leq 250$.

----------HẾT----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN TỈNH PHÚ YÊN
Năm học 2025 – 2026

Câu 1

a) Với $x>0, x\neq 1$,ta có

$$P=\frac{x+1}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}+\frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}=\frac{x+1}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}+\frac{x^2-x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$$

$$P=\frac{(2x+2+\sqrt{x})(1-x)+x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(1-x)}=\frac{-x^2-2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(1-x)}$$

$$P=\frac{-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}(1-x)}=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Khi đó $0<\dfrac{9}{P}=\dfrac{9\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}=\dfrac{9}{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2}\leq\dfrac{9}{4}$. Do để $\dfrac{9}{P}$ nguyên.

TH1: $\dfrac{9}{P}=1\Rightarrow P=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\\ \sqrt{x}=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{47+21\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{47-21\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

TH2: $\dfrac{9}{P}=2\Rightarrow P=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy tập các giá trị của x thỏa mãn là $\left\{\dfrac{47+21\sqrt{5}}{2};\dfrac{47-21\sqrt{5}}{2};4;\dfrac{1}{4}\right\}$.

b) Ta có $3b^2+6b+2=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{b^2}+\dfrac{6}{b}+3=0\Rightarrow\dfrac{1}{b}$ là nghiệm của phương trình $2x^2+6x+3=0$

Mà a cũng là nghiệm của phương trình $2x^2+6x+3=0$, nên theo Vi-ét ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{b}+a=-3\\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab+1=-3b\\ a=\dfrac{3b}{2}\end{cases}.$$

Thay vào P ta được: $P=\dfrac{6075b^3}{20ab^2+(ab+1)^3}=\dfrac{6075b^3}{20.\dfrac{3b}{2}.b^2+(-3b)^3}=2025$

Vậy $P=2025$.

Câu 2.

a) ĐKXĐ $3x+2, x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq-\dfrac{2}{3}$. Đặt $a=\sqrt{3x+2}, b=\sqrt{x+1}, a,b\geq 0$. Suy ra $x=a^2-2b^2$.

Ta có: $x+\sqrt{3x^2+5x+2}=\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow a^2-2b^2+ab=a+2b.$

Suy ra $(a+2b)(a-b)=a+2b.$

Trường hợp 1: $a+2b=0 \Leftrightarrow a=b=0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+2}=\sqrt{x+1}=0.$ (vô nghiệm)

Trường hợp 2: $a-b=1 \Leftrightarrow \sqrt{3x+2}=\sqrt{x+1}+1.$ Ta bình phương hai vế của phương trình thì

$$3x+2=x+2+2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=\sqrt{x+1}.$$

Với $x \geq 0.$ Ta có: $x^2=x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Thử lại thấy $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thoả mãn phương trình ban đầu.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên của phương trình $P(x)=0.$ Giả sử $x_1 \leq x_2$

Suy ra $P(x)=(x-x_1)(x-x_2).$ Theo định lý Vi - ét, ta có: $|x_1x_2|=|c| \leq 4. (1)$

Mà $|P(4)|=|4-x_1||4-x_2|$ là số nguyên tố.

TH1: Nếu $|4-x_1|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_1=3 \end{array}\right..$

\+ Với $x_1=3$. Như vậy $|x_2| \leq \dfrac{4}{3} < x_1,$ vô lý.

\+ Với $x_1=5$. Như vậy $|x_2| \leq \dfrac{4}{5} \Rightarrow x_2=0<x_1,$ vô lý.

TH2: Nếu $|4-x_2|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_2=5 \\ x_2=3 \end{array}\right..$

\+ Với $x_2=3.$ Như vậy $x_1=1 \vee x_1=0.$

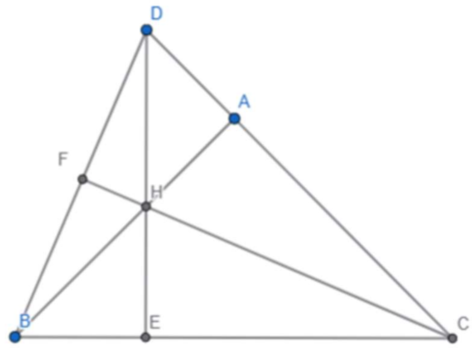
Khả năng 1: $x_1=0$ thì $|P(4)|=4$ không là số nguyên tố.

Khả năng 2: $x_1=1$ thì $b=-(x_1+x_2)=-4, c=x_1x_2=3.$

\+ Với $x_2=5$. Như vậy $|x_1| \leq \dfrac{4}{5} \Rightarrow x_1=0.$ Khi đó $|P(4)|=4$ không là số nguyên tố.

Vậy $b=-4, c=3, P(x)=x^2-4x+3.$

Câu 3.



a. Do BA vuông góc AC và DE vuông góc BC nên H là trực tâm của tam HBC.

Suy ra HC vuông BD tại F.

Ta có $\angle DFH = \angle HEC = 90^{\circ}$ và $\angle FHD = \angle EHC$ suy ra

$$\Delta FHD \sim \Delta EHC(g.g) \Rightarrow \frac{FH}{EH} = \frac{HD}{HC} \Leftrightarrow FH.HC = HE.HD.$$

b. Theo định lý Pitago $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

Ta có: $\angle ADH = 45°$. Suy ra tam giác ADH vuông cân tại A và $AD = AH$.

Bằng cách chứng minh tương tự câu a thì

$$\Delta FHB \sim \Delta AHC \Rightarrow \frac{FH}{AH} = \frac{HB}{HC} \Leftrightarrow FH.HC = HA.HB.$$

Theo bất đẳng thức AM - GM: $FH.HC = HA.HB \le \frac{(HA + HB)^2}{4} = \frac{AB^2}{4} = \frac{a^2}{8}$.

Vậy $\max(FH.HC) = \frac{a^2}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ $DA = AH = BH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC$.

Như vậy khi D thuộc tia đối AC sao cho $DA = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Câu 4.

a. Gọi hình chiếu của E lên BC là G.

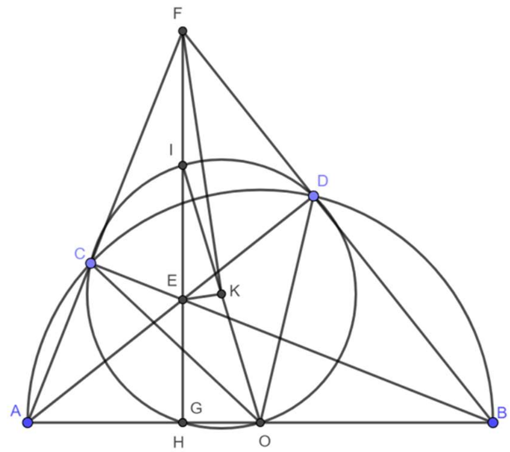
Khi đó, ta có $\Delta AGE \sim \Delta ADB(g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD} \Rightarrow AE.AD = AB.AG.(1)$

Và $\Delta BGE \sim \Delta BCA(g.g) \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BG}{BC} \Rightarrow BE.BC = BA.BG.(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $AE.AD + BE.BC = BA(AG + GB) = BA^2 = 4a^2$.

b. Ta thấy $\angle ADB = \angle ACB = 90$ suy ra E là trực tâm của tam giác FAB. Hay EF vuông góc AB. Gọi I' là trung điểm của EF. Khi đó ta có $I'E = I'F = I'C = I'D$.

Ta có: $\angle I'DO = 180^{\circ} - \angle I'DF - \angle ODB = 180^{\circ} - \angle I'FB - \angle ABF = 90^{\circ}$.



Tương tự: $\angle I'CO = 90^\circ$. Như vậy *I'* thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác *COD*.

Khi đó *I* trùng *I'*. Từ đó cũng suy ra *H* thuộc đường tròn đường kính *IO*. Suy ra $\angle IHO = 90^\circ$.

Do đó *H* trùng *G* và *F, I, H, E* thẳng hàng.

c. Ta có: $\angle CKD = 2\angle COD = 120^\circ, \angle CFD = 90^\circ - \angle CBF = 90^\circ - \dfrac{\angle COD}{2} = 60^\circ$.

Suy ra $\angle CKD + \angle CFD = 180^\circ$. Khi đó tứ giác *F, D, K, C* nội tiếp.

Kết hợp *KC = KD,* do đó *AK* là phân giác góc *AFB.*

Lưu ý: Các kiến thức về góc ở tâm, tứ giác nội tiếp học sinh tự chứng minh.

Câu 5. Giả sử *a, b, c, d* là các số nguyên thoả mãn $a^3 + 64b^3 - 2024c^3 + 2026d^3 = 0.$ (*)

Ta có $a^3 - a = (a-1)a(a+1) \vdots 3$ khi đó $a^3 \equiv a(\text{mod} 3), b^3 \equiv b(\text{mod} 3), c^3 \equiv c(\text{mod} 3), d^3 \equiv d(\text{mod} 3)$.

Ta lấy mod 3 hai vế của (*) thì $a + b + c + d \equiv 0(\text{mod} 3)$.

Suy ra $(a+b+c+d)^2 \equiv 0(\text{mod} 9)$.

Câu 6. Sử dụng khi triển Abel ta có:

$$250 = \frac{169}{y^2}.y^2 + \frac{81}{x^2}.x^2 = (y^2 - x^2).\frac{169}{y^2} + x^2\left(\frac{169}{y^2} + \frac{81}{x^2}\right) \geq y^2 - x^2 + x^2.\frac{169x^2 + 81y^2}{x^2y^2}$$

$$\geq y^2 - x^2 + \frac{(13x + 9y)^2}{2y^2} \geq y^2 - x^2 + \frac{(2xy)^2}{2y^2} = x^2 + y^2.$$

Do $13 \geq y > x > 0, 2xy \leq 13x + 9y$.

Vậy $250 \geq x^2 + y^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y = 13, x = 9$.