

CHƯƠNG

II

VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: VECTO TRONG KHÔNG GIAN



LÝ THUYẾT.

I. VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Vector trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vector trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó.

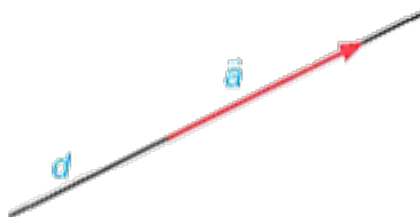
Chú ý: Tương tự như vector trong mặt phẳng, đối với vector trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

Vector có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vector thì vector còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

Độ dài của vector $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vector $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vector được gọi là giá của vector đó



Hình 2.4. Đường thẳng d
là giá của vector $\vec{a}$.

Hai vector được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vector cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vector trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vector trong không gian:

Trong không gian, với mỗi điểm O và vector $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Các vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ gọi là các vector -không.

Ta quy ước vector-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vector. Do đó, các vector-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.

Bốn điểm A, B, A', B' đồng phẳng và tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.

Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý:

Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.



Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian:

Vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

III. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;

Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Chú ý:

Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Chú ý: Tương tự như phép nhân một số với một vector trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vector trong không gian có các tính chất sau:

Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.

Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector bất kì thì $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

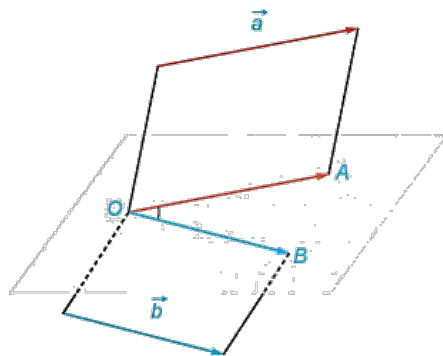
Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Chú ý: Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$

IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO TRONG KHÔNG GIAN

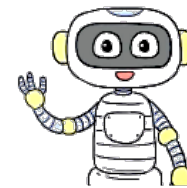
a) Góc giữa hai vector trong không gian

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ ($0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$) được gọi là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



Hình 2.22

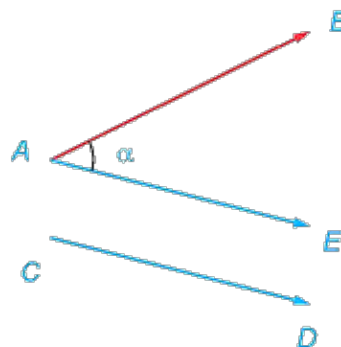
Nếu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 90° thì ta nói hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý:

Để xác định góc giữa hai vector $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\vec{AE} = \vec{CD}$, khi đó $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \widehat{BAE}$ (H.2.23).

Quy ước góc giữa một vector bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .



Hình 2.23

b) Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý:

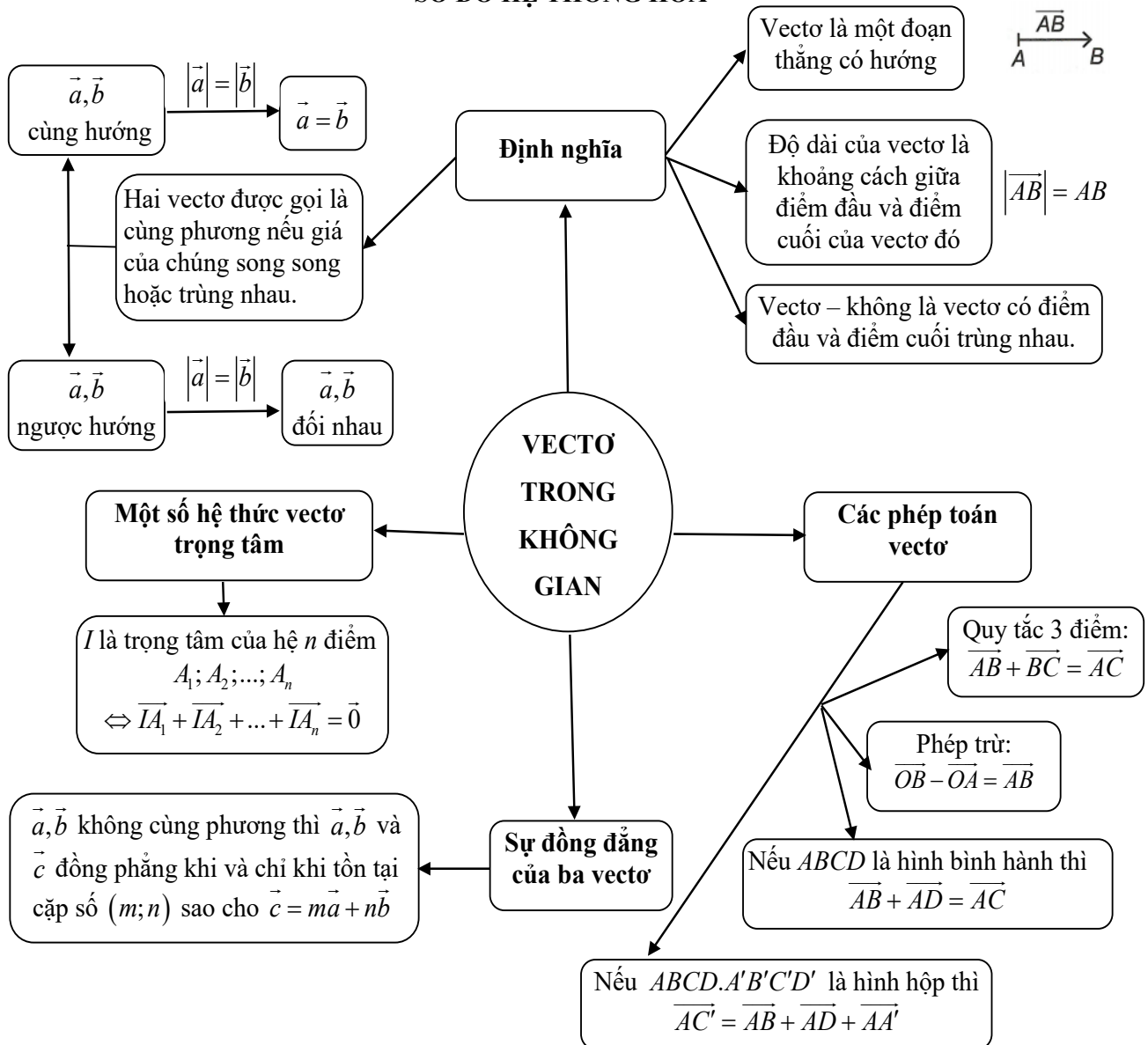
Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

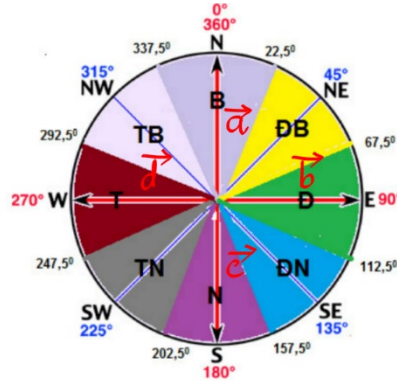
SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA





HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Hình ảnh dưới đây là phân độ của 8 hướng trên la bàn. Mệnh đề nào sau đây sai?



Phân độ của 8 hướng trên la bàn

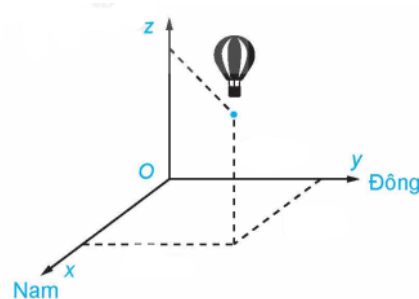
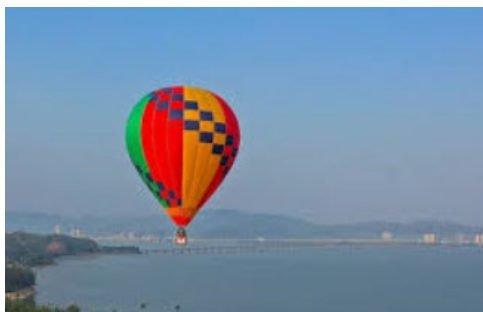
- A. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương. B. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.
C. Hai vector $\vec{b}$ và $\vec{d}$ cùng phương. D. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng hướng.

Câu 2: Theo định luật II: Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:



$\vec{F} = m\vec{a}$ trong đó $\vec{F}$ là vector lực (N), $\vec{a}$ là vector gia tốc (m/s^2), $m(kg)$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5(kg)$ một gia tốc $50(m/s^2)$ thì cần một lực đã có độ lớn là bao nhiêu?

Câu 3: Một chiếc khinh khí cầu bay lên từ địa điểm cho trước. Sau khoảng thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách địa điểm xuất phát $2,5km$ về hướng nam và $1,7km$ về hướng đông, đồng thời cách mặt đất là $0,6km$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilomet.



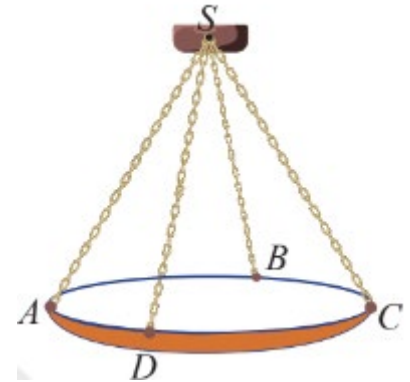
Tính khoảng cách từ địa điểm xuất phát đến địa điểm hiện tại của khinh khí cầu (đơn vị lấy theo kilomet và làm tròn đến 2 chữ số sau phần thập phân)

Câu 4: Một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m.\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 m/s^2$. Tính khối lượng của vật khi chịu tác dụng của lực hấp dẫn của Trái Đất là $P = 4,9N$.

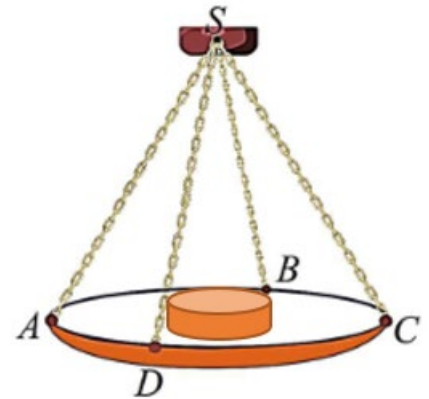
Câu 5: Một vật có khối lượng $m(kg)$ khi chịu tác dụng của một lực $\vec{F}$ thì vật đó sẽ chuyển động với gia tốc $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Tính lực tác dụng lên vật có khối lượng $m = 6(kg)$ khi vật đó chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang, nhẵn với gia tốc $a = 3 m/s^2$?

Câu 6: Nếu vật chuyển động thẳng đều dưới tác dụng của một lực $\vec{F}$ thì vật đó đang chịu tác dụng của lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ có độ lớn bằng lực tác dụng $\vec{F}$ và có hướng ngược với hướng của $\vec{F}$. Công thức tính lực ma sát $F_{ms} = \mu.N$, trong đó μ là hệ số ma sát, N là độ lớn của áp lực. Giả sử một thùng gỗ đang chuyển động thẳng đều trên mặt phẳng nằm ngang có trọng lượng $N = 150(N)$, hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng là $\mu = 0,25$. Tính lực tác dụng lên thùng gỗ để thùng chuyển động thẳng đều?

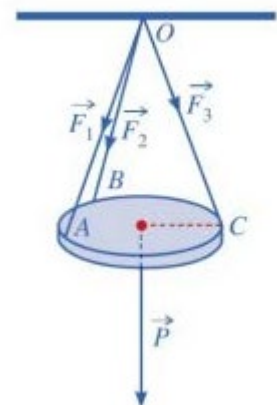
Câu 7: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5kg$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Gọi $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn $10 m/s^2$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích.



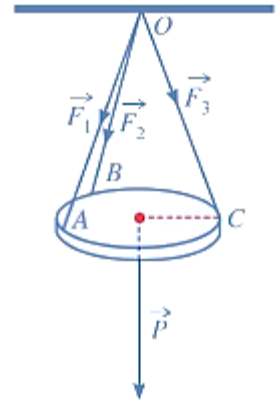
Câu 8: Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m = 3kg$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g = 10 m/s^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



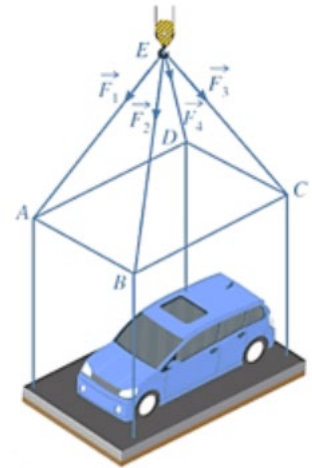
Câu 9: Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(N)$ (xem hình vẽ). Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.



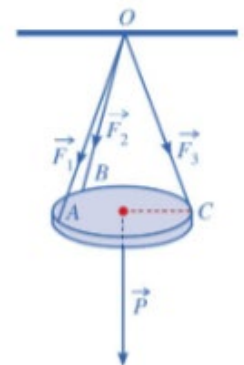
Câu 10: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khối lượng các sợi dây không đáng kể, các lực căng của sợi dây đặt tại điểm O là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau và bằng 15 N. Trọng lượng của chiếc đèn đó bằng bao nhiêu newton (N)? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Câu 11: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được đặt vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp $EA; EB; EC; ED$ bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết các lực căng $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4800 N , trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là $7200\sqrt{6}\text{ N}$. Tính $\sin \alpha$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 12: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đều có độ lớn bằng 60 (N) . Cho biết các đường thẳng OA, OB, OC cùng tạo với mặt phẳng ngang một góc bằng 30° . Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

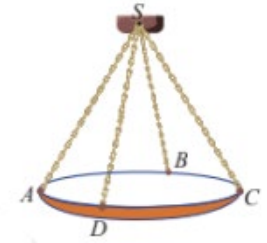


Câu 13: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính của chiếc đèn là $0,5\text{ m}$.



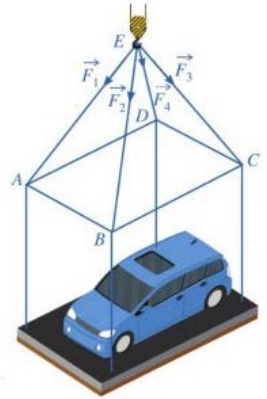
Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N . (Chiều dài tính theo đơn vị cm và làm tròn đến 1 số sau phần thập phân)

Câu 14: Một chiếc đèn chùm có khối lượng $m = 10(kg)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD cùng chất liệu và không đàn hồi sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều (xem hình vẽ). Biết rằng gia tốc rơi tự do là $g = 10(m/s^2)$

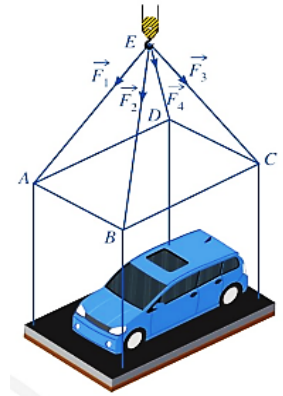


Tìm độ lớn của lực căng (đơn vị (N)) của mỗi sợi dây cáp.

Câu 15: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° (như hình vẽ). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ $500(N)$ và trọng lượng khung sắt là $200(N)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (đơn vị (N)), kết quả làm tròn đến hàng đơn vị?

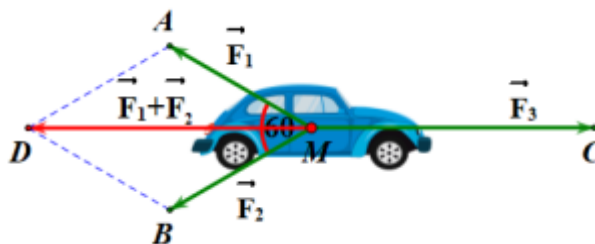


Câu 16: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° (Hình 16). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là $4700N$ và trọng lượng của khung sắt là $3000N$.



Câu 17: Có ba lực cùng tác động vào một vật tại một điểm. Trong đó hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\vec{F}_3$ vuông góc với các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn của hợp lực của ba lực trên là bao nhiêu newton (N)? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Câu 18: Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một ô tô tại điểm M và ô tô đứng yên. Cho biết cường độ hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực $\vec{F}_3$ là (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Câu 19: Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn giữ được lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước? (Học sinh ghi số 1 hoặc số 2 vào ô đáp án)



Câu 20: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (hình ảnh bên dưới).



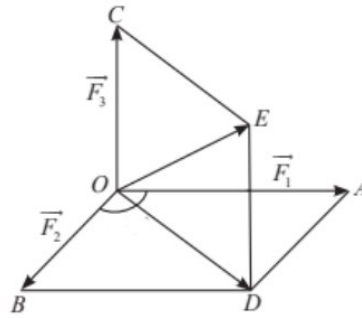
Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 920(km/h), trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900(km/h) và 920(km/h) lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ với $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ ($k \in \mathbb{R}; k > 0$).

Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 21: Có ba lực cùng tác dụng vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 120° và đều có độ lớn bằng $30N$. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn bằng $40N$. Tính hợp lực của ba lực trên.

Câu 22: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là $25 N$ và $12 N$. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn $4 N$. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Câu 23: Một vật nặng O được kéo từ ba hướng như hình vẽ và chịu tác dụng của 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, có độ lớn lần lượt là $24N, 12N, 6N$. Biết góc tạo bởi 2 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ là 120° và lực thứ ba vuông góc với hai lực đầu tiên.

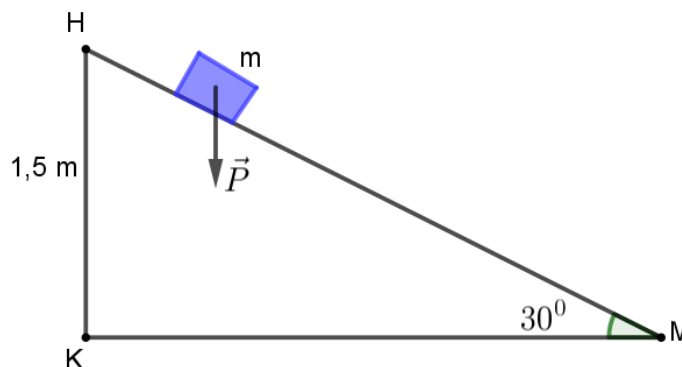


- a) $\vec{BO} + \vec{BA} = \vec{BD}$.
- b) $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.
- c) Độ dài của vector $\vec{OD}$ là $|\vec{OD}| = 12\sqrt{7}$.
- d) Độ lớn hợp lực tác dụng vào vật O là $6\sqrt{13}N$.

Câu 24: Theo định luật II Newton: Nếu $\vec{F}$ là véc tơ lực (N) tác dụng lên vật, $\vec{a}$ là véc tơ gia tốc của vật (m/s^2) và m (kg) là khối lượng của vật thì ta có $\vec{F} = m.\vec{a}$.

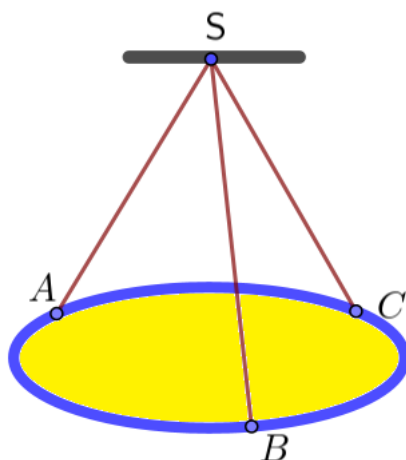
- a) Véc tơ $\vec{F}$ luôn cùng hướng với $\vec{a}$.
- b) Độ lớn của lực tác dụng lên vật luôn tỷ lệ nghịch với độ lớn của gia tốc của vật.
- c) Muốn một vật có khối lượng 1 (kg) chuyển động với gia tốc $20 (m/s^2)$ thì độ lớn lực cần tác dụng lên vật là 20 (N).
- d) Trọng lực có độ lớn 50 (N) tác dụng lên một vật làm vật rơi với gia tốc tự do $10(m/s^2)$. Khi đó khối lượng của vật là 500(g).

Câu 25: Một vật khối lượng $m = 10(kg)$ trượt trên mặt phẳng nghiêng so với mặt đất một góc 30° từ độ cao $HK=1,5 (m)$. Giả sử mặt phẳng nghiêng không có ma sát và vật chỉ bị tác dụng bởi trọng lực $\vec{P} = m.\vec{g}$ với $\vec{g}$ là véc tơ gia tốc rơi tự do của vật có độ lớn được lấy bằng $10(m/s^2)$.



- a) Hướng chuyển động của vật là hướng từ H xuống K.
- b) Chiều dài quãng đường HM là 3 (m).
- c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ là 100(N).
- d) Công của trọng lực $\vec{P}$ làm vật ở trên trượt từ vị trí H đến mặt đất bằng $150\sqrt{3}(J)$ (Cho biết công A(J) sinh bởi lực $\vec{F}$ (N) làm vật dịch chuyển một đoạn thẳng từ C đến D có độ dài tính bằng mét, được tính theo công thức $A = \vec{F}.\vec{CD}$)

Câu 26: Một chiếc đĩa kim loại khối lượng 4,5 (kg) được treo bởi ba sợi dây không dẫn SA, SB, SC sao cho $S.ABC$ là hình chóp đều có $\widehat{ASB} = 60^\circ$ (hình vẽ). Khối lượng dây không đáng kể; lực căng của mỗi sợi dây SA, SB, SC đặt tại điểm S tương ứng là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau. Lấy độ lớn của gia tốc trọng trường $|\vec{g}| = 9,8 (\text{m/s}^2)$.



- Trọng lực $\vec{P}$ của hệ vật có độ lớn bằng 34,3 (N).
- $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.
- $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 \neq \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_3$.
- Độ lớn của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ bằng 14,7 (N).

CHƯƠNG

II

VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: VECTO TRONG KHÔNG GIAN



LÝ THUYẾT.

I. VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Vector trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vector trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó.

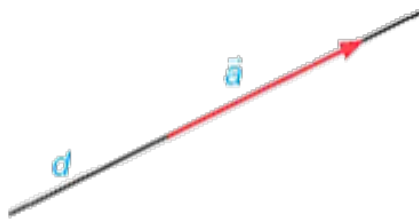
Chú ý: Tương tự như vector trong mặt phẳng, đối với vector trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

Vector có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vector thì vector còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

Độ dài của vector $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vector $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vector được gọi là giá của vector đó



Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vector $\vec{a}$.

Hai vector được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vector cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vector trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vector trong không gian:

Trong không gian, với mỗi điểm O và vector $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Các vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ gọi là các vector -không.

Ta quy ước vector-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vector. Do đó, các vector-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.

Bốn điểm A, B, A', B' đồng phẳng và tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.

Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý:

Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.



Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian:

Vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

III. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;

Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Chú ý:

Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Chú ý: Tương tự như phép nhân một số với một vector trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vector trong không gian có các tính chất sau:

Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.

Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector bất kì thì $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

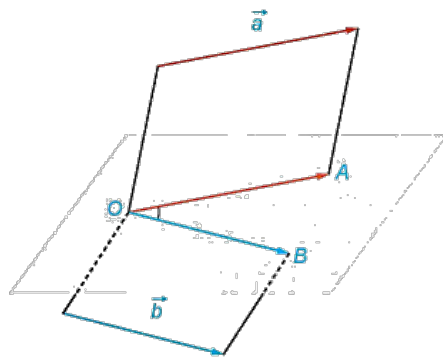
Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Chú ý: Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$

IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO TRONG KHÔNG GIAN

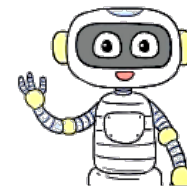
a) Góc giữa hai vector trong không gian

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ ($0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$) được gọi là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



Hình 2.22

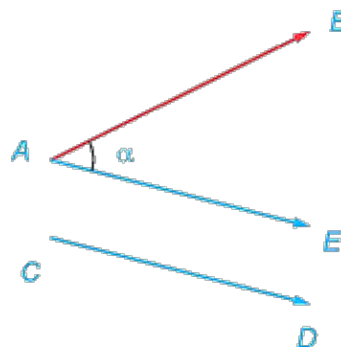
Nếu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 90° thì ta nói hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý:

Để xác định góc giữa hai vector $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\vec{AE} = \vec{CD}$, khi đó $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \widehat{BAE}$ (H.2.23).

Quy ước góc giữa một vector bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .



Hình 2.23

b) Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý:

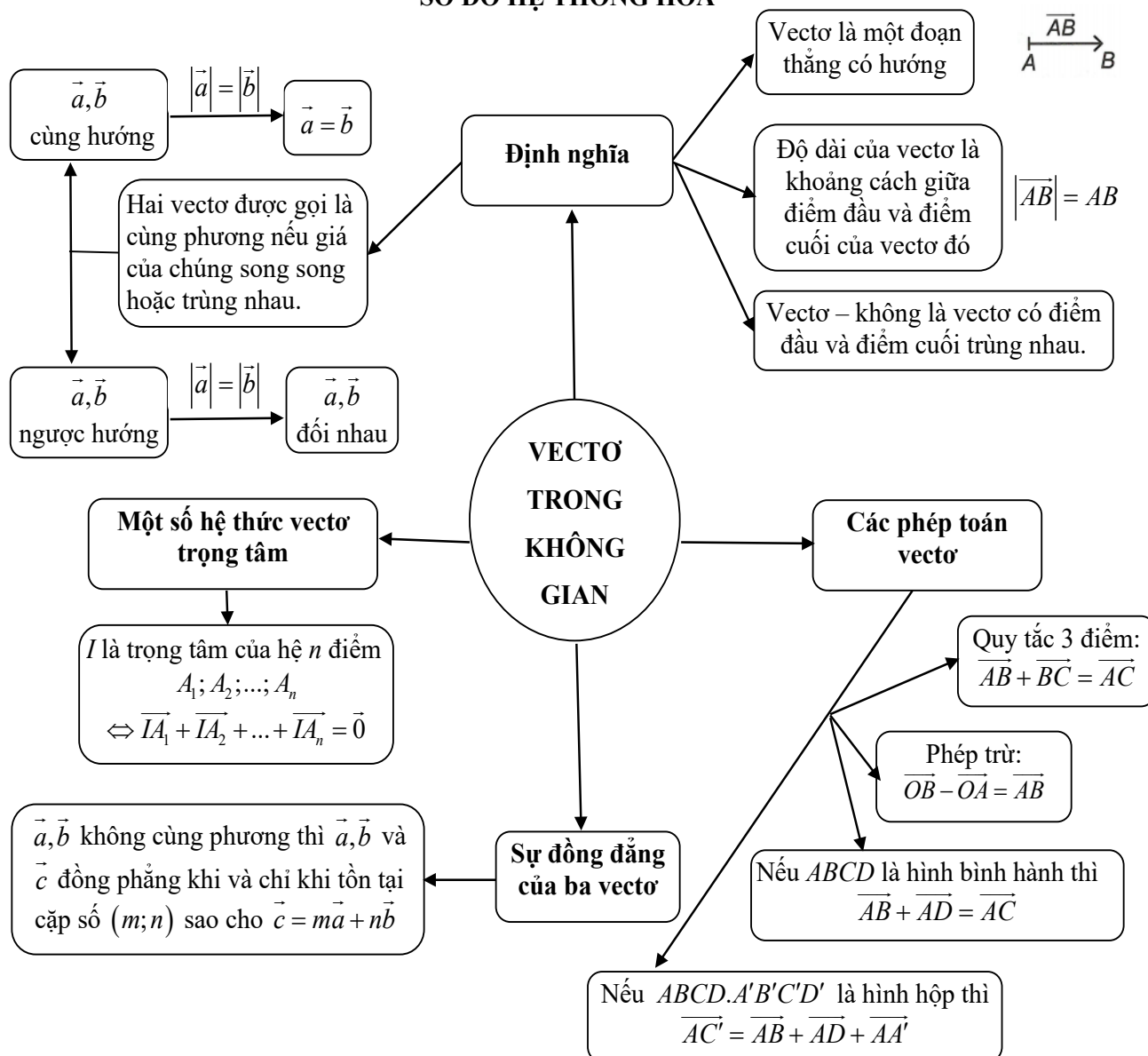
Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

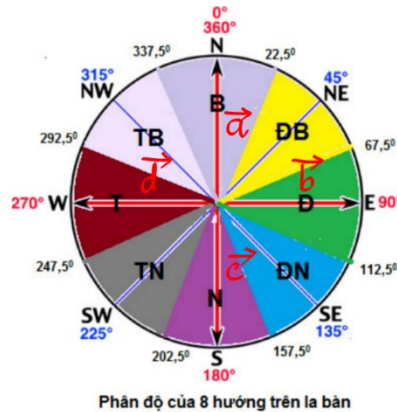
SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA





HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Hình ảnh dưới đây là phân độ của 8 hướng trên la bàn. Mệnh đề nào sau đây sai?



- A. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương.
 B. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.
 C. Hai vector $\vec{b}$ và $\vec{d}$ cùng phương.
 D. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng hướng.

Lời giải

Phương án D sai vì hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.

Câu 2: Theo định luật II: Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:



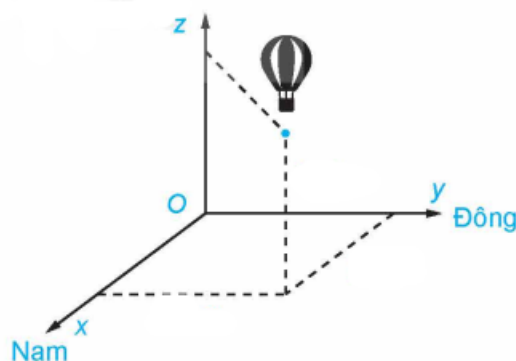
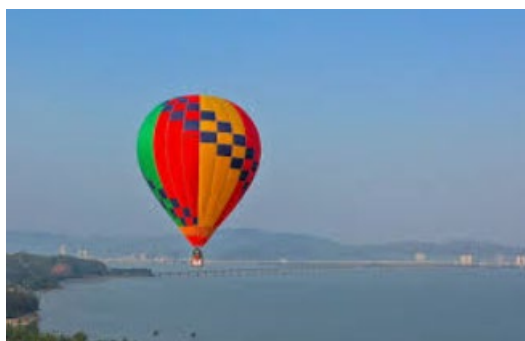
$\vec{F} = m\vec{a}$ trong đó $\vec{F}$ là vector lực (N), $\vec{a}$ là vector gia tốc (m/s^2), $m(kg)$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5(kg)$ một gia tốc $50(m/s^2)$ thì cần một lực có độ lớn là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\vec{F} = m\vec{a}$, suy ra $|\vec{F}| = |m\vec{a}| = m|\vec{a}| = 0,5.50 = 25(N)$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5(kg)$ một gia tốc $50(m/s^2)$ thì cần một lực có độ lớn bằng $25N$.

Câu 3: Một chiếc khinh khí cầu bay lên từ địa điểm cho trước. Sau khoảng thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách địa điểm xuất phát $2,5km$ về hướng nam và $1,7km$ về hướng đông, đồng thời cách mặt đất là $0,6km$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilomet.



Tính khoảng cách từ địa điểm xuất phát đến địa điểm hiện tại của khinh khí cầu (đơn vị lấy theo kilomet và làm tròn đến 2 chữ số sau phần thập phân)

Lời giải

Với hệ trục tọa độ đã chọn thì vị trí hiện tại của khinh khí cầu là $A(2,5;1,7;0,6)$.

Khi đó khoảng cách từ địa điểm xuất phát đến địa điểm hiện tại của khinh khí cầu là:

$$OA = \sqrt{2,5^2 + 1,7^2 + 0,6^2} \approx 3,08(km)$$

Câu 4: Một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 m/s^2$. Tính khối lượng của vật khi chịu tác dụng của lực hấp dẫn của Trái Đất là $P = 4,9N$.

Lời giải:

$$\text{Từ } \vec{P} = m \cdot \vec{g} \Rightarrow m = \frac{P}{g}.$$

$$\text{Khối lượng của vật là } m = \frac{P}{g} = \frac{4,9}{9,8} = 0,5(kg) = 500(g).$$

Câu 5: Một vật có khối lượng $m(kg)$ khi chịu tác dụng của một lực $\vec{F}$ thì vật đó sẽ chuyển động với gia tốc $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Tính lực tác dụng lên vật có khối lượng $m = 6(kg)$ khi vật đó chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang, nhẵn với gia tốc $a = 3 m/s^2$?

Lời giải

$$\text{Từ } \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ suy ra } \vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

$$\text{Lực tác dụng lên vật đó là } F = m \cdot a = 6 \cdot 3 = 18(N).$$

Câu 6: Nếu vật chuyển động thẳng đều dưới tác dụng của một lực $\vec{F}$ thì vật đó đang chịu tác dụng của lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ có độ lớn bằng lực tác dụng $\vec{F}$ và có hướng ngược với hướng của $\vec{F}$. Công thức tính lực ma sát $F_{ms} = \mu \cdot N$, trong đó μ là hệ số ma sát, N là độ lớn của áp lực. Giả sử một thùng gỗ đang chuyển động thẳng đều trên mặt phẳng nằm ngang có trọng lượng $N = 150(N)$, hệ số

ma sát giữa vật và mặt phẳng là $\mu = 0,25$. Tính lực tác dụng lên thùng gỗ để thùng chuyển động thẳng đều?

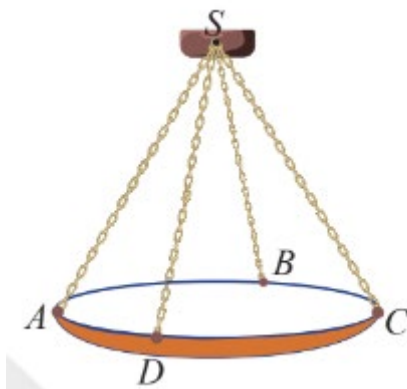
Lời giải

Lực ma sát mặt phẳng tác dụng lên vật là:

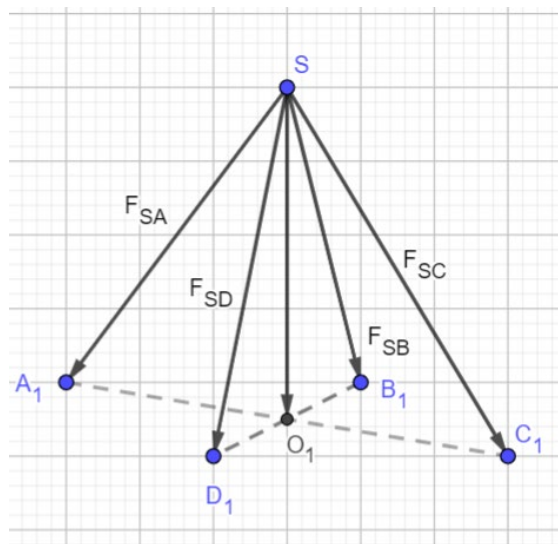
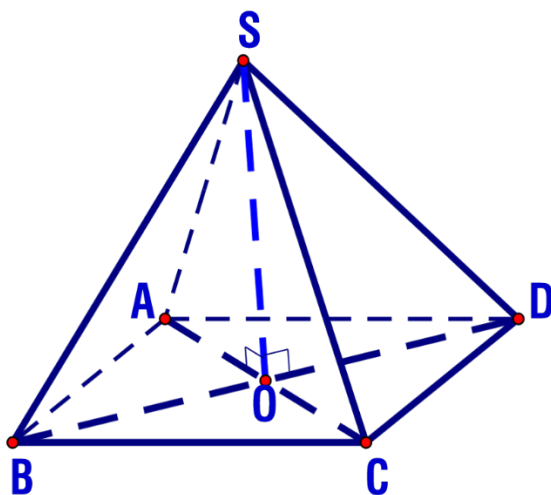
$$F_{ms} = \mu.N = 0,25.150 = 37,5(N).$$

Vật chuyển động thẳng đều nên lực tác dụng lên vật là $F = F_{ms} = 37,5(N)$.

Câu 7: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5\text{kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Gọi $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10m/s^2 . Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích.



Lời giải.



Áp dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10m/s^2 , ta có độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là

$$|\vec{P}| = m.|\vec{g}| = 5.10 = 50(N).$$

Gọi $\vec{F}_{SA}, \vec{F}_{SB}, \vec{F}_{SC}, \vec{F}_{SD}$ lần lượt là lực căng cho mỗi sợi xích SA, SB, SC, SD . Vì chiếc đèn chùm

$$\text{ở vị trí cân bằng nên ta có } \begin{cases} |\vec{F}_{SA}| = |\vec{F}_{SB}| = |\vec{F}_{SC}| = |\vec{F}_{SD}| \\ \vec{F}_{SA} + \vec{F}_{SB} + \vec{F}_{SC} + \vec{F}_{SD} = \vec{P} \end{cases}.$$

Lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 sao cho $\vec{SA_1} = \vec{F}_{SA}, \vec{SB_1} = \vec{F}_{SB}, \vec{SC_1} = \vec{F}_{SC}, \vec{SD_1} = \vec{F}_{SD}$. Gọi O_1 là tâm của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, ta có hình chóp $S.A_1B_1C_1D_1$ là hình chóp tứ giác đều.

Suy ra

$$\vec{F}_{SA} + \vec{F}_{SC} = \frac{1}{2}\vec{P} \Rightarrow \vec{SA_1} + \vec{SC_1} = \frac{1}{2}\vec{P}$$

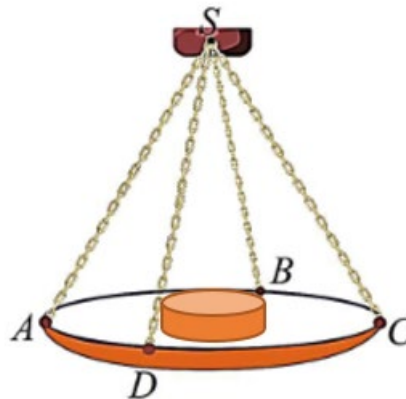
$$\Rightarrow \vec{SO_1} = \frac{1}{4}\vec{P}$$

$$\Rightarrow SO_1 = \frac{1}{4}|\vec{P}| = \frac{25}{2}.$$

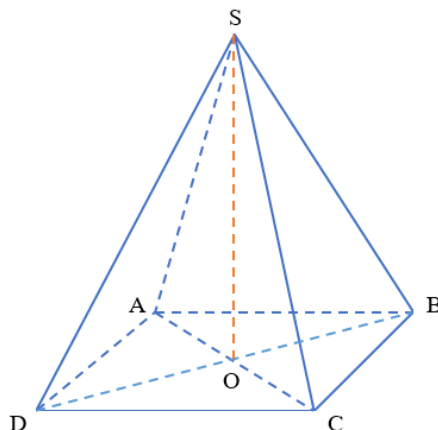
$$\text{Vì tam giác } SA_1C_1 \text{ đều nên ta có } |\vec{F}_{SA}| = |\vec{SA_1}| = \frac{SO_1}{\cos 30^\circ} = \frac{25\sqrt{3}}{3} (N).$$

$$\text{Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là } \frac{25\sqrt{3}}{3} N.$$

Câu 8: Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m = 3 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OS} + \vec{SA} + \vec{OS} + \vec{SB} + \vec{OS} + \vec{SC} + \vec{OS} + \vec{SD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = -4\vec{OS} = 4\vec{SO} \Rightarrow |\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD}| = |4\vec{SO}| = 4SO.$$

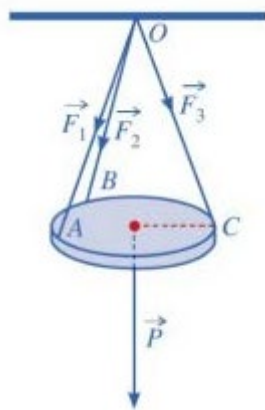
Trọng lượng của vật nặng là $P = mg = 3.10 = 30(N)$. Suy ra $4|\vec{SO}| = P = 30(N) \Rightarrow SO = \frac{15}{2}$.

Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$$SO = SA \cdot \sin \widehat{SAC} \Rightarrow SA = \frac{SO}{\sin \widehat{SAC}} = \frac{\frac{15}{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{15\sqrt{2}}{2} = \frac{30\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a = 30.$$

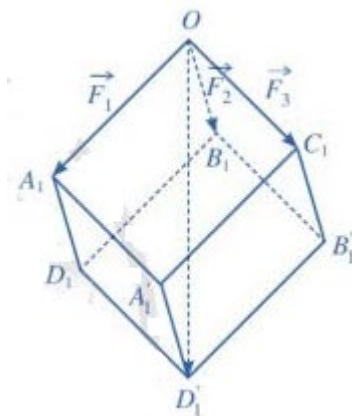
Vậy $a = 30$.

Câu 9: Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(N)$ (xem hình vẽ).



Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.

Lời giải



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{F}_2$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{F}_3$.

Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp.

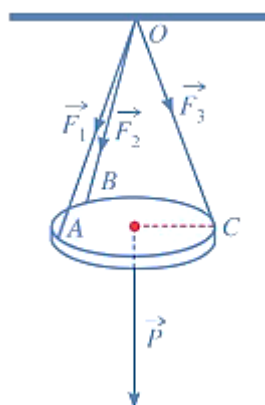
Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD'_1}$.

Do các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(N)$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 10, suy ra độ dài đường chéo bằng $10\sqrt{3}$.

Vì tấm gỗ tròn ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

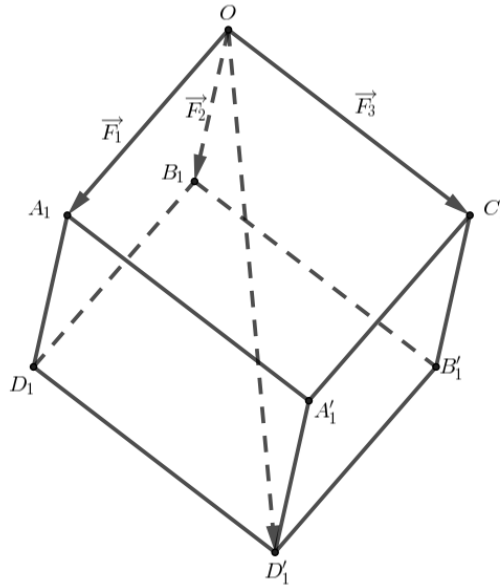
Suy ra trọng lượng của tấm gỗ tròn: $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD'_1}| = 10\sqrt{3}(N)$.

Câu 10: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khối lượng các sợi dây không đáng kể, các lực căng của sợi dây đặt tại điểm O là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau và bằng 15 N. Trọng lượng của chiếc đèn đó bằng bao nhiêu newton (N)? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{F}_2$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{F}_3$. Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp (Hình vẽ).



Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp, ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1}$

Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = 15(N)$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1 của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P}$, ở đó $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là: $|\overrightarrow{P}| = |\overrightarrow{OD_1}| = 15\sqrt{3} \text{ N}$.

Cách 2.

Giả sử $\overrightarrow{P}$ là trọng lực của chiếc đèn. Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$.

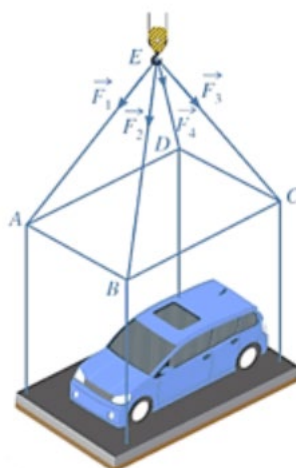
Ta có $(\overrightarrow{P})^2 = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3})^2 = (\overrightarrow{F_1})^2 + (\overrightarrow{F_2})^2 + (\overrightarrow{F_3})^2 + 2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2} + 2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_3} + 2\overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_3}$.

Vì các sợi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc nên các véc tơ $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau.

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_3} = 0 \Rightarrow |\overrightarrow{P}| = \sqrt{|\overrightarrow{F_1}|^2 + |\overrightarrow{F_2}|^2 + |\overrightarrow{F_3}|^2} = 15\sqrt{3} \approx 25,98$$

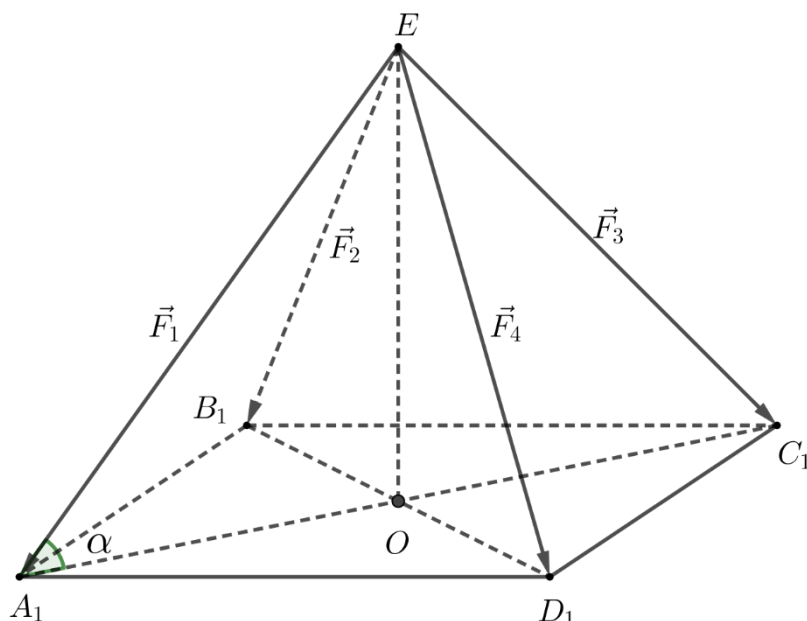
Vậy trọng lượng của chiếc đèn khoảng 25,98 N.

Câu 11: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được đặt vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp $EA; EB; EC; ED$ bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết các lực căng $\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2}; \overrightarrow{F_3}; \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4800 N , trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là $7200\sqrt{6} \text{ N}$. Tính $\sin \alpha$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 16

Lời giải



Gọi $A_1; B_1; C_1; D_1$ là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA_1} = \overrightarrow{F_1}$; $\overrightarrow{EB_1} = \overrightarrow{F_2}$; $\overrightarrow{EC_1} = \overrightarrow{F_3}$; $\overrightarrow{ED_1} = \overrightarrow{F_4}$.

Vì $EA; EB; EC; ED$ bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α nên $EA_1; EB_1; EC_1; ED_1$ cũng bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ một góc α .

Mặt khác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình chữ nhật có tâm O .

Từ các điều kiện trên ta suy ra $EO \perp (A_1B_1C_1D_1)$. Khi đó $\alpha = (EA_1; (A_1B_1C_1D_1)) = \widehat{EA_1O}$.

Ta có: $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = |\overrightarrow{F_4}| = 4800N$ nên $EA_1 = EB_1 = EC_1 = ED_1 = 4800$

Xét tam giác EA_1O vuông tại O nên $EO = EA_1 \cdot \sin \alpha = 4800 \cdot \sin \alpha$.

Ta có: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{EA_1} + \overrightarrow{EB_1} + \overrightarrow{EC_1} + \overrightarrow{ED_1} = 4\overrightarrow{EO}$.

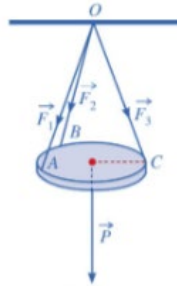
Mặt khác: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{P}$ với $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác động lên khung chứa xe ô tô.

Suy ra: $\vec{P} = 4\vec{EO}$.

Trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là $|\vec{P}| = 4EO = 19200 \cdot \sin \alpha \quad (N)$.

Theo bài ra ta có: $19200 \cdot \sin \alpha = 7200\sqrt{6} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{6}}{8} \approx 0,92$.

Câu 12: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đều có độ lớn bằng $60(N)$. Cho biết các đường thẳng OA, OB, OC cùng tạo với mặt phẳng ngang một góc bằng 30° . Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



Lời giải

Theo giả thiết ta có $O.ABC$ là hình chóp đều với $OA = OB = OC = 60$ và góc tạo bởi mỗi đường thẳng OA, OB, OC với (ABC) là 30° .

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $OG \perp (ABC)$ và $\widehat{OAG} = \widehat{OBG} = \widehat{OCG} = 30^\circ$.

Gọi T là trọng lượng của đèn tròn thì $T = |\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}| = |3\vec{OG}| = 3OG$.

Trong tam giác OAG vuông tại G , ta có: $OG = OA \sin \widehat{OAG} = 60 \sin 30^\circ = 30$.

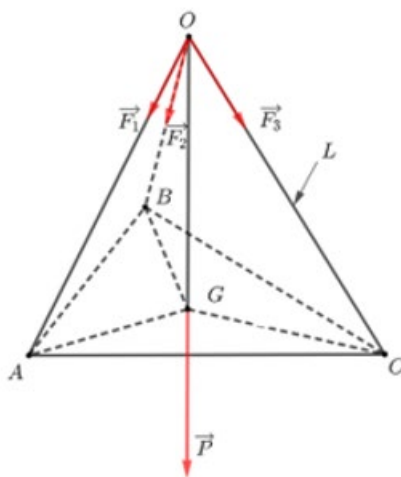
Vậy trọng lượng của đèn là $T = 3 \cdot 30 = 90(N)$.

Câu 13: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là $27N$ và bán kính của chiếc đèn là $0,5m$.



Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là $12N$. (Chiều dài tính theo đơn vị cm và làm tròn đến 1 số sau phần thập phân)

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Vì tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Do đó, $GA = GB = GC = 0,5m$.

Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L .

Theo bài ra ta có $OA = OB = OC = L$ nên $OG \perp (ABC)$ và $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = L$

Do đó, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$

Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho: $\vec{F}_1 = c\vec{OA}$, $\vec{F}_2 = c\vec{OB}$, $\vec{F}_3 = c\vec{OC}$. Suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = c(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.

Theo quy tắc ba điểm ta có: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$.

Do đó: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 3c\vec{OG}$.

Mặt khác ta lại có $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$, với $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn.

Mà trọng lượng tác dụng lên chiếc đèn là 20N nên $|\vec{P}| = 27 \Leftrightarrow 3c|\vec{OG}| = 27N \Leftrightarrow c = \frac{9}{OG}$.

Tam giác OAG vuông tại G (do $OG \perp (ABC)$) nên ta suy ra $OG = \sqrt{OA^2 - GA^2} = \sqrt{L^2 - 0,5^2}$ (m) với $L > 0,5$.

$$\text{Do đó } |\vec{OG}| = \sqrt{L^2 - 0,5^2} \Rightarrow c = \frac{9}{\sqrt{L^2 - 0,5^2}}.$$

$$\text{Khi đó } |\vec{F}| = |\vec{F}_1| = c|\vec{OA}| = \frac{9L}{\sqrt{L^2 - 0,5^2}} \text{ (với } L > 0,5)$$

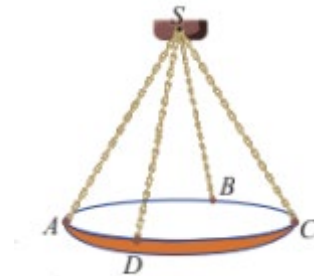
Ta có lực căng tối đa của mỗi sợi dây là 12 N

$$\Rightarrow F(L) \leq 12 \Leftrightarrow \frac{9L}{\sqrt{L^2 - 0,5^2}} \leq 12 \Leftrightarrow 3L \leq 4\sqrt{L^2 - 0,5^2}$$

$$\Leftrightarrow 9L^2 \leq 16L^2 - 4 \Leftrightarrow 7L^2 \geq 4 \Rightarrow L \geq \frac{2}{\sqrt{7}} \approx 0,756 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $L = 0,756m = 75,6cm$.

Câu 14: Một chiếc đèn chùm có khối lượng $m = 10(kg)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD cùng chất liệu và không đàn hồi sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều (xem hình vẽ). Biết rằng gia tốc rơi tự do là $g = 10(m/s^2)$



Tìm độ lớn của lực căng (đơn vị (N)) của mỗi sợi dây cáp.

Lời giải

Ta có độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là $|\vec{P}| = m.g = 100N$.

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Theo bài toán thì là hình chóp $S.ABCD$ có đường cao là SO

Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ lần lượt là lực căng trên các dây SA, SB, SC, SD

Theo quy tắc hình bình hành: $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 2\vec{SO}$; $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 2\vec{SO}$

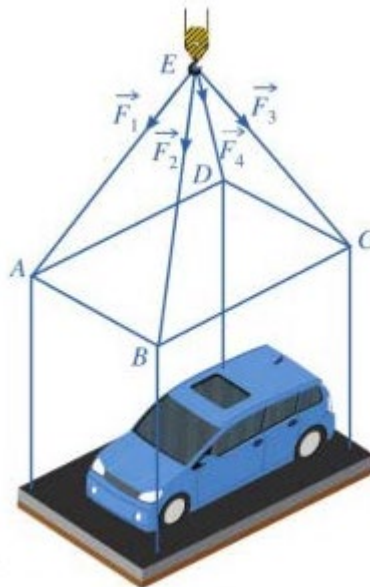
$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 4\vec{SO}$$

Vì chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 4\vec{SO}$

Độ lớn của lực căng trên mỗi dây bằng nhau và bằng $|\vec{F}_1| = \frac{|\vec{P}|}{4}$

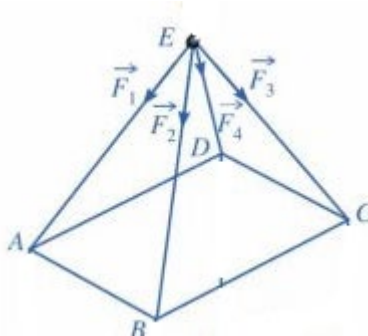
Suy ra $|\vec{F}_1| = \frac{|\vec{P}|}{4} = 25N$

Câu 15: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° (như hình vẽ). Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ $500(N)$ và trọng lượng khung sắt là $200(N)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (đơn vị (N)), kết quả làm tròn đến hàng đơn vị?



Lời giải

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$, Theo bài toán thì là hình chóp $E.ABCD$ có đường cao là EO



Theo quy tắc hình bình hành: $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 2\vec{EO}$; $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 2\vec{EO}$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 4\vec{EO}$$

Dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60°

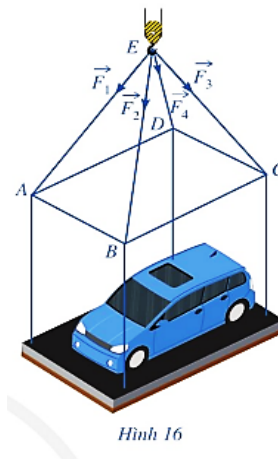
$$\text{nên suy ra } EO = EA \cdot \sin 60^\circ = 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có } |\vec{P}| + 200 = 4|\vec{EO}| \Rightarrow |\vec{P}| = 4 \cdot 250\sqrt{3} - 200 \approx 1532(N)$$

Vậy trọng lượng xe ô tô là $1532(N)$.

Câu 16: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° (Hình 16). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.

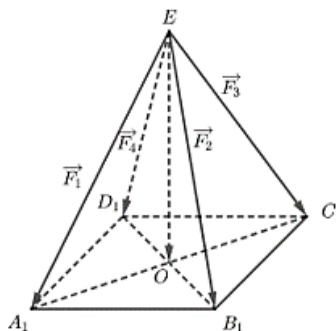
Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là $4700N$ và trọng lượng của khung sắt là $3000N$.



Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là các điểm sao cho

$$\vec{EA_1} = \vec{F}_1, \vec{EB_1} = \vec{F}_2, \vec{EC_1} = \vec{F}_3, \vec{ED_1} = \vec{F}_4$$



Vì EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° nên EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ một góc bằng 60° .

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình chữ nhật.

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $A_1B_1C_1D_1$.

Ta suy ra $EO \perp (A_1B_1C_1D_1)$.

Do đó, góc giữa đường thẳng EA_1 và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng góc EA_1O .

Suy ra $\widehat{EA_1O} = 60^\circ$.

Ta có $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = 4700 \text{ (N)}$ nên $EA_1 = EB_1 = EC_1 = ED_1 = 4700$.

Tam giác EOA_1 vuông tại O nên $EO = EA_1 \sin \widehat{EA_1O} = 4700 \sin 60^\circ = 2350\sqrt{3}$.

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\vec{EA_1} = \vec{EO} + \vec{OA_1}$, $\vec{EB_1} = \vec{EO} + \vec{OB_1}$, $\vec{EC_1} = \vec{EO} + \vec{OC_1}$,
 $\vec{ED_1} = \vec{EO} + \vec{OD_1}$

Vì O là trung điểm của A_1C_1 và B_1D_1 nên

$$\vec{OA_1} + \vec{OC_1} = \vec{0}; \vec{OB_1} + \vec{OD_1} = \vec{0}$$

Từ đó suy ra $\vec{EA_1} + \vec{EB_1} + \vec{EC_1} + \vec{ED_1} = 4\vec{EO}$.

Do đó, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 4\vec{EO}$.

Vì chiếc khung sắt chứa xe ô tô ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{P}$, ở đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên khung sắt chứa xe ô tô.

Suy ra trọng lượng của khung sắt chứa chiếc xe ô tô là

$$|\vec{P}| = 4|\vec{EO}| = 4 \cdot 2350\sqrt{3} = 9400\sqrt{3} \text{ (N)}.$$

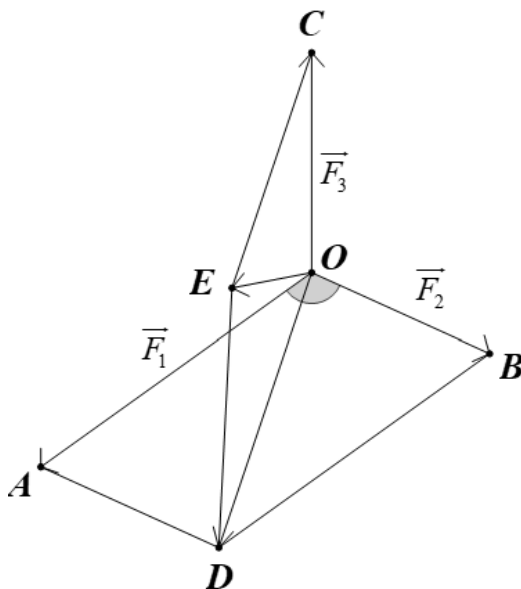
Vì trọng lượng của khung sắt là 3000 N nên trọng lượng của chiếc xe ô tô là

$$9400\sqrt{3} - 3000 \approx 13281 \text{ (N)}.$$

Câu 17: Có ba lực cùng tác động vào một vật tại một điểm. Trong đó hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là 9 N và 4 N, lực $\vec{F}_3$ vuông góc với các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và có độ lớn 7 N. Độ lớn của hợp lực của ba lực trên là bao nhiêu newton (N)? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Giả sử các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ tác động vào vật đặt tại điểm O . Lấy các điểm A, B, C sao cho $\vec{OA} = \vec{F}_1$; $\vec{OB} = \vec{F}_2$; $\vec{OC} = \vec{F}_3$. Dựng các hình bình hành $OADB$ và $OCED$ như hình vẽ.



Hợp lực của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OE}$

Áp dụng định lý cosin trong $\triangle OAD$, ta có:

$$OD^2 = OA^2 + AD^2 - 2OA \cdot AD \cdot \cos \widehat{OAD} = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos 70^\circ = 97 - 72 \cos 70^\circ.$$

Vì $OC \perp OA$ và $OC \perp OB$ nên $OC \perp OD \Rightarrow ODEC$ là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow OE^2 = OC^2 + CE^2 = OC^2 + OD^2 = 7^2 + 97 - 72 \cos 70^\circ = 146 - 72 \cos 70^\circ$$

$$\Rightarrow OE = \sqrt{146 - 72 \cos 70^\circ} \approx 11$$

Vậy độ lớn của hợp lực của ba lực trên khoảng 11 N.

Cách 2:

Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.

$$\text{Ta có: } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow (\vec{F})^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)^2$$

$$\Rightarrow |\vec{F}|^2 = (\vec{F}_1)^2 + (\vec{F}_2)^2 + (\vec{F}_3)^2 + 2\vec{F}_1\vec{F}_2 + 2\vec{F}_1\vec{F}_3 + 2\vec{F}_2\vec{F}_3$$

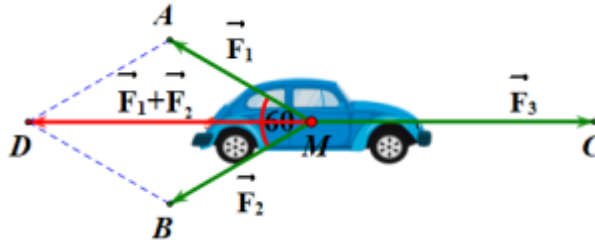
$$\Rightarrow |\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + |\vec{F}_3|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2) + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_3|\cos(\vec{F}_1, \vec{F}_3) + 2|\vec{F}_2||\vec{F}_3|\cos(\vec{F}_2, \vec{F}_3)$$

$$\Rightarrow |\vec{F}|^2 = 9^2 + 4^2 + 7^2 + 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos 110^\circ + 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \cos 90^\circ + 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cos 90^\circ = 146 + 72 \cos 110^\circ.$$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{146 + 72 \cos 110^\circ} \approx 11.$$

Vậy độ lớn của hợp lực của ba lực trên khoảng 11 N.

Câu 18: Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một ô tô tại điểm M và ô tô đứng yên. Cho biết cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 25N và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực $\vec{F}_3$ là (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

- Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MD}$ (Với D là điểm sao cho $AMBD$ là hình bình hành).

- Ta có: $MA = |\vec{MA}| = |\vec{F}_1| = 25N$

$MB = |\vec{MB}| = |\vec{F}_2| = 25N$

- Do $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên $\triangle MAB$ là tam giác đều. Khi đó: $MD = 2 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$

- Do ô tô đứng yên nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

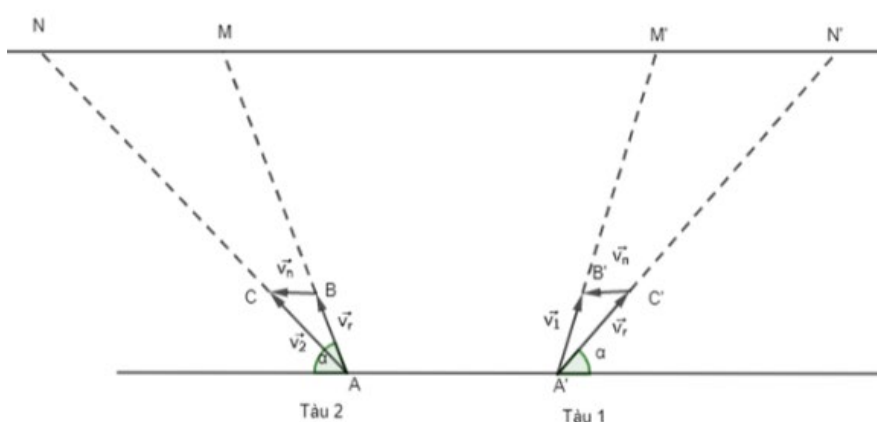
Suy ra: $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Rightarrow |\vec{F}_3| = |-(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)| = |\vec{DM}| = MD = 25\sqrt{3}(N)$

Vậy cường độ của $\vec{F}_3$ là $25\sqrt{3} \approx 43,3(N)$.

Câu 19: Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn giữ được lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?(Học sinh ghi số 1 hoặc số 2 vào ô đáp án)



Lời giải



Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2 .

Giả sử tàu 1 xuất phát từ $A' \in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ một góc α . Gọi $\vec{v}_r, \vec{v}_n$ lần lượt là vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi B', C' là các điểm sao cho $\vec{v}_r = \overrightarrow{A'C'}, \vec{v}_n = \overrightarrow{C'B'}$. Khi đó tàu chuyển động với vector vận tốc thực tế là

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_r + \vec{v}_n = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Xét $\Delta A'B'C'$, có $\widehat{A'C'B'} = \alpha$ (hai góc so le trong)

$$|\vec{v}_1|^2 = |\vec{v}_r|^2 + |\vec{v}_n|^2 - 2|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_n| \cdot \cos \alpha$$

Giả sử tàu 2 xuất phát từ $A \in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ một góc α . Gọi $\vec{v}_r, \vec{v}_n$ lần lượt là vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi B, C là các điểm sao cho $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB}, \vec{v}_n = \overrightarrow{BC}$.

Khi đó tàu chuyển động với vector vận tốc thực tế là

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_r + \vec{v}_n = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Xét ΔABC , có: $\widehat{ABC} = 180^\circ - \alpha$

$$|\vec{v}_2|^2 = |\vec{v}_r|^2 + |\vec{v}_n|^2 - 2|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_n| \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = |\vec{v}_r|^2 + |\vec{v}_n|^2 + 2|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_n| \cdot \cos\alpha.$$

Vì $0 < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos\alpha > 0$. Do đó

$$|\vec{v}_2|^2 = |\vec{v}_r|^2 + |\vec{v}_n|^2 + 2|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_n| \cdot \cos\alpha > |\vec{v}_1|^2 = |\vec{v}_e|^2 + |\vec{v}_n|^2 - 2|\vec{v}_e| \cdot |\vec{v}_n| \cdot \cos\alpha$$

Vì độ dài hai quãng đường AN và $A'M'$ của tàu 2 và tàu 1 chênh nhau không đáng kể và vận tốc tàu 2 lớn hơn tàu 1 nên tàu 2 là tàu đi qua bờ bên kia trước.

Câu 20: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (hình ảnh bên dưới).



Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 920(km/h), trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900(km/h) và 920(km/h) lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ với $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ ($k \in \mathbb{R}; k > 0$). Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 900(km/h), máy bay giữ nguyên hướng bay nên hai véc tơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có cùng hướng và $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ ($k > 0$).

Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của chiếc máy bay khi đạt 900(km/h) và 920(km/h).

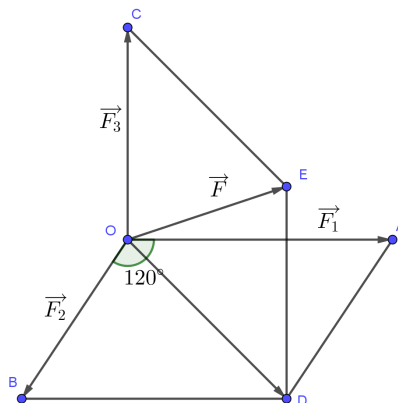
Suy ra $v_1 = 900$ (km/h), $v_2 = 920$ (km/h).

Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên $\left| \frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2} \right| = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{900^2}{920^2} = \frac{2025}{2116} \Rightarrow \left| \vec{F}_1 \right| = \frac{2025}{2116} \left| \vec{F}_2 \right| \Rightarrow \vec{F}_1 = \frac{2025}{2116} \vec{F}_2$.

Từ đó suy ra: $k = \frac{2025}{2116} \approx 0,96$.

Câu 21: Có ba lực cùng tác dụng vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 120° và đều có độ lớn bằng $30N$. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn bằng $40N$. Tính hợp lực của ba lực trên.

Lời giải



Gọi $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là $30N; 30N; 40N$

Vẽ $\vec{OA} = \vec{F}_1; \vec{OB} = \vec{F}_2; \vec{OC} = \vec{F}_3$

Dựng các hình bình hành $OADB$ và $ODEC$.

Hợp lực tác dụng vào vật là $\vec{F} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OE}$.

Hình bình hành $OADB$ có $\widehat{AOB} = 120^\circ$ và $OA = OB$ nên $\triangle OBD$ đều, suy ra $OB = OD = 30N$.

Vì $OC \perp (OAB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

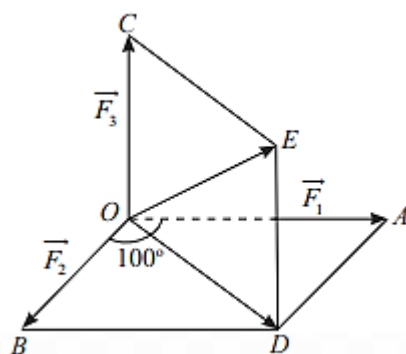
Do đó, $\triangle ODE$ vuông tại D .

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2$, suy ra $OE = 50$.

Vậy hợp lực có độ lớn là $F = 50N$.

Câu 22: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N . Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N . Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Lời giải



Hình 12

Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là $25\text{ N}, 12\text{ N}, 4\text{ N}$.

Vẽ $\vec{OA} = \vec{F}_1, \vec{OB} = \vec{F}_2, \vec{OC} = \vec{F}_3$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là

$$\vec{F} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OE}$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD , ta có

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D .

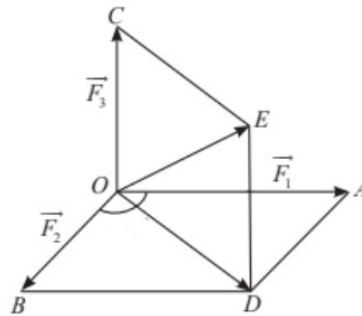
$$\text{Ta có } OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

$$\text{Suy ra } OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ}$$

$$= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26,092.$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26 \text{ N}$.

Câu 23: Một vật nặng O được kéo từ ba hướng như hình vẽ và chịu tác dụng của 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, có độ lớn lần lượt là $24\text{N}, 12\text{N}, 6\text{N}$. Biết góc tạo bởi 2 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ là 120° và lực thứ ba vuông góc với hai lực đầu tiên.



a) $\vec{BO} + \vec{BA} = \vec{BD}$.

b) $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

c) Độ dài của vector $\vec{OD}$ là $|\vec{OD}| = 12\sqrt{7}$.

d) Độ lớn hợp lực tác dụng vào vật O là $6\sqrt{13}\text{N}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) **sai:** Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\vec{BO} + \vec{BD} = \vec{BA}$.

b) đúng: Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$.

c) sai: Ta có: $|\overrightarrow{OD}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 = (\overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2) = OA^2 + OB^2 + 2OA.OB.\cos(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2})$

Suy ra: $|\overrightarrow{OD}| = 12\sqrt{3}$.

d) đúng: Độ lớn hợp lực tác dụng vào vật O là:

$$|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OE}| = \sqrt{OD^2 + OC^2} = 6\sqrt{13} \text{ N.}$$

Câu 24: Theo định luật II Newton: Nếu $\overrightarrow{F}$ là véc tơ lực (N) tác dụng lên vật, $\vec{a}$ là véc tơ gia tốc của vật (m/s^2) và m (kg) là khối lượng của vật thì ta có $\overrightarrow{F} = m.\vec{a}$.

a) Véc tơ $\overrightarrow{F}$ luôn cùng hướng với $\vec{a}$.

b) Độ lớn của lực tác dụng lên vật luôn tỷ lệ nghịch với độ lớn của gia tốc của vật.

c) Muốn một vật có khối lượng 1 (kg) chuyển động với gia tốc 20 (m/s^2) thì độ lớn lực cần tác dụng lên vật là 20 (N).

d) Trọng lực có độ lớn 50 (N) tác dụng lên một vật làm vật rơi với gia tốc tự do 10(m/s^2). Khi đó khối lượng của vật là 500(g).

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

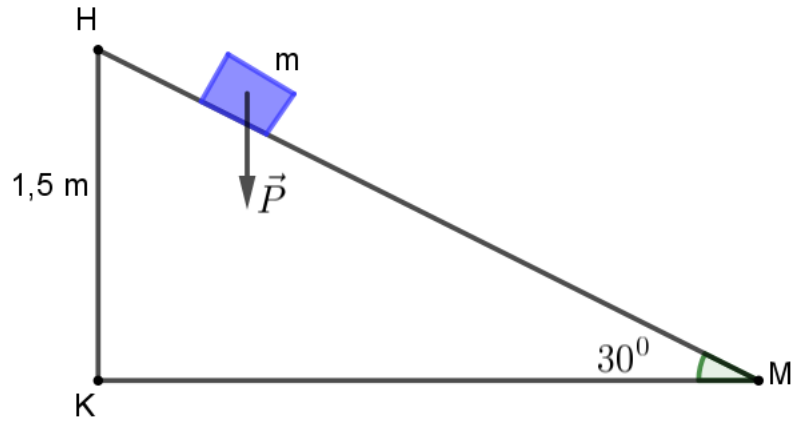
a) Ta có $m > 0$ nên $\overrightarrow{F}$ và $\vec{a}$ cùng hướng. Vậy mệnh đề đã cho **đúng**.

b) Ta có $\overrightarrow{F} = m.\vec{a} \Rightarrow |\overrightarrow{F}| = m.|\vec{a}| \Rightarrow |\overrightarrow{F}|$ và $|\vec{a}|$ tỷ lệ thuận với nhau. Vậy mệnh đề đã cho **sai**.

c) Ta có $m = 1(\text{kg})$; $|\vec{a}| = 20(\text{m/s}^2) \Rightarrow |\overrightarrow{F}| = m.|\vec{a}| = 1.20 = 20 \text{ (N)}$. Vậy mệnh đề đã cho **đúng**.

d) Ta có $|\overrightarrow{F}| = m.|\vec{a}| \Rightarrow m = \frac{|\overrightarrow{F}|}{|\vec{a}|} = \frac{50}{10} = 5 \text{ (kg)}$. Đổi đơn vị 5 (kg) = 5000 (g). Vậy mệnh đề đã cho **sai**.

Câu 25: Một vật khối lượng $m = 10(\text{kg})$ trượt trên mặt phẳng nghiêng so với mặt đất một góc 30° từ độ cao HK=1,5 (m). Giả sử mặt phẳng nghiêng không có ma sát và vật chỉ bị tác dụng bởi trọng lực $\overrightarrow{P} = m.\vec{g}$ với $\vec{g}$ là véc tơ gia tốc rơi tự do của vật có độ lớn được lấy bằng 10(m/s^2).



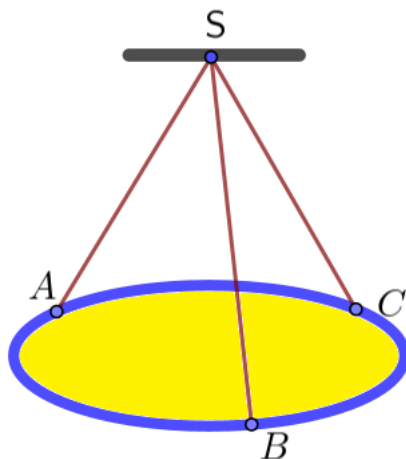
- a) Hướng chuyển động của vật là hướng từ H xuống K .
- b) Chiều dài quãng đường HM là 3 (m).
- c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ là 100(N) .
- d) Công của trọng lực $\vec{P}$ làm vật ở trên trượt từ vị trí H đến mặt đất bằng $150\sqrt{3}$ (J) (Cho biết công A (J) sinh bởi lực $\vec{F}$ (N) làm vật dịch chuyển một đoạn thẳng từ C đến D có độ dài tính bằng mét, được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{CD}$)

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

- a) Hướng chuyển động của vật là hướng từ H đến M do vật trượt trên mặt phẳng nghiêng. Vậy mệnh đề đã cho **sai**.
- b) Trong tam giác vuông HKM ta có: $\frac{HK}{HM} = \sin 30^\circ \Rightarrow HM = 2HK = 3$ (m). Vậy mệnh đề đã cho **đúng**.
- c) Ta có $|\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}| = 10 \cdot 10 = 100$ (N). Vậy mệnh đề đã cho **đúng**.
- d) Công của trọng lực làm vật dịch chuyển từ vị trí H đến vị trí M là $A = \vec{P} \cdot \overrightarrow{HM} = |\vec{P}| |\overrightarrow{HM}| \cos(\vec{P}, \overrightarrow{HM}) = 100 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 150$ (J). Vậy mệnh đề đã cho **sai**.

Câu 26: Một chiếc đĩa kim loại khối lượng 4,5 (kg) được treo bởi ba sợi dây không dẫn SA, SB, SC sao cho $S.ABC$ là hình chóp đều có $\widehat{ASB} = 60^\circ$ (hình vẽ). Khối lượng dây không đáng kể; lực căng của mỗi sợi dây SA, SB, SC đặt tại điểm S tương ứng là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau. Lấy độ lớn của gia tốc trọng trường $|\vec{g}| = 9,8$ (m/s²) .



a) Trọng lực $\vec{P}$ của hệ vật có độ lớn bằng 34,3 (N).

b) $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

c) $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 \neq \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_3$.

d) Độ lớn của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ bằng 14,7 (N).

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Ta có $\vec{P} = m \cdot \vec{g} \Rightarrow |\vec{P}| = 4,5 \cdot 9,8 = 44,1$ (N). Vậy mệnh đề đã cho **sai**.

b) Trọng lực $\vec{P}$ của hệ vật đặt tại điểm S được phân tích thành ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ nên $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Vậy mệnh đề đã cho **đúng**.

c) Ta có hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều và có $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên $\widehat{ASC} = \widehat{BSC} = 60^\circ$. Lại có véc tơ $\vec{F}_1$ cùng hướng với véc tơ $\vec{SA}$, véc tơ $\vec{F}_2$ cùng hướng với véc tơ $\vec{SB}$, véc tơ $\vec{F}_3$ cùng hướng với véc tơ $\vec{SC}$ nên $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = (\vec{F}_1, \vec{F}_3) = (\vec{F}_2, \vec{F}_3) = 60^\circ$.

$$\Rightarrow \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\vec{F}_1| |\vec{F}_2|; \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_3 = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_3| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\vec{F}_1| |\vec{F}_3|.$$

Mà $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$ nên $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_3$. Vậy mệnh đề đã cho **sai**.

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có } \vec{P} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow (\vec{P})^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)^2 \\ &= (\vec{F}_1)^2 + (\vec{F}_2)^2 + (\vec{F}_3)^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_3 + 2\vec{F}_2 \cdot \vec{F}_3 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + |\vec{F}_3|^2 + |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| + |\vec{F}_1| |\vec{F}_3| + |\vec{F}_2| |\vec{F}_3| \\ &= 6|\vec{F}_1|^2 \Rightarrow |\vec{P}|^2 = 6|\vec{F}_1|^2 \Rightarrow |\vec{F}_1| = \frac{\sqrt{6}}{6} |\vec{P}| = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot 44,1 \approx 18 \text{ (N)}. \text{ Vậy mệnh đề đã cho } \textbf{sai}. \end{aligned}$$

CHƯƠNG

II

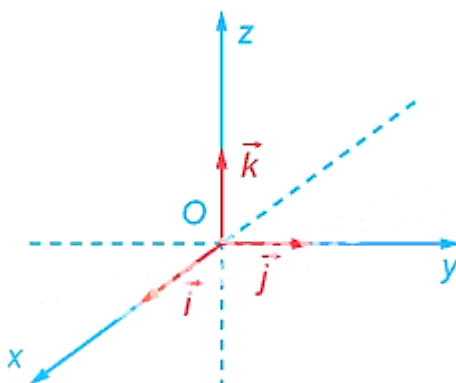
VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



LÝ THUYẾT.

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.

Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M .

Nhận xét. Nếu điểm M có tọa độ $(x; y; z)$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy và Oz có tọa độ lần lượt là $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ và $(0; 0; z)$.
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz)$ và (Ozx) có tọa độ lần lượt là $(x; y; 0)$, $(0; y; z)$ và $(x; 0; z)$.

Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$ tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của vector $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét

- Toạ độ của vector $\vec{a}$ cũng là toạ độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Trong không gian, cho hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu
$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$. Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với chiều rộng $AB = 4$, chiều dài $AD = 8$, chiều cao $AA' = 10$ được gắn vào hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ. Người ta muốn treo một bóng đèn ở tâm hình hộp. Tìm toạ độ vị trí điểm M để treo bóng đèn.

Câu 2: Một công ty viễn thông đang lên kế hoạch xây dựng một tháp viễn thông tại một thành phố để cung cấp dịch vụ tốt hơn. Công ty cần xác định vị trí của tháp sao cho có thể phủ sóng hiệu quả đến ba toà nhà quan trọng trong thành phố. Giả sử các toà nhà này được đặt tại các vị trí có toạ độ như sau:

Toà nhà $A(0; 0; 0)$

Toà nhà $B(6; 0; 0)$

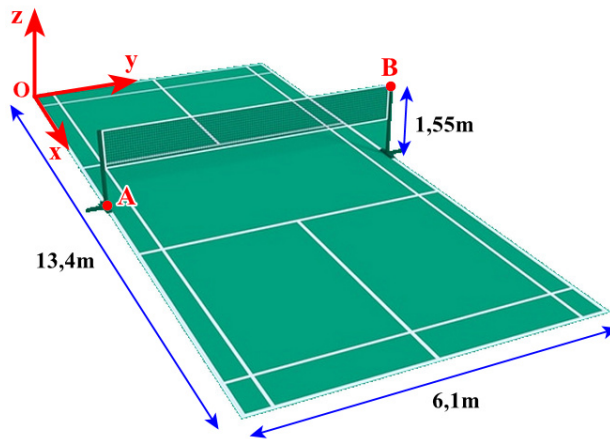
Toà nhà $C(3; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$

Tháp viễn thông phải đặt ở vị trí sao cho tổng khoảng cách từ tháp đến 3 toà nhà là nhỏ nhất. Khi đó tổng khoảng cách từ vị trí của tháp đến ba toà nhà bằng bao nhiêu?

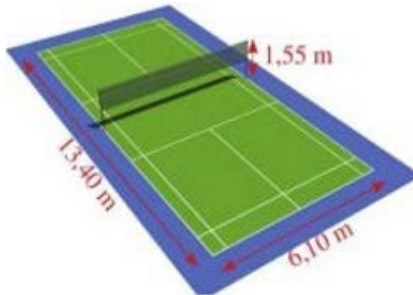


Câu 3: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2,5 km về phía nam và 2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1,5 km về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,6 km. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là a km theo hướng nam và b km theo hướng tây. Tính tổng $2a + 3b$.

Câu 4: Hình dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó (đơn vị trên mỗi trục là mét) và hai điểm A, B như hình. Xác định tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.



Câu 5: Hình vẽ 1a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như hình 1b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Biết tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Khi đó $S = a - b + 2c$ bằng bao nhiêu?

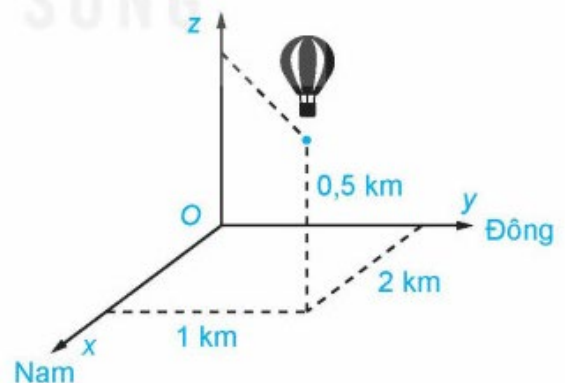


(Hình 1a)

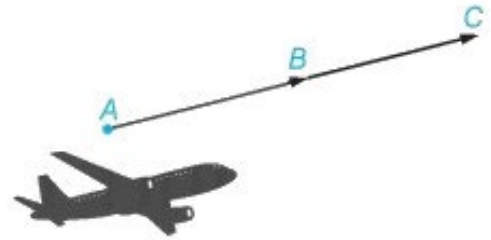


(Hình 1b)

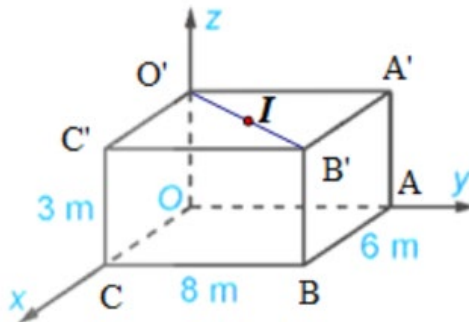
Câu 6: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{ m}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5\text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{ km}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, Oy hướng về phía đông, Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét. Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu.



- Câu 7:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong vòng 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?



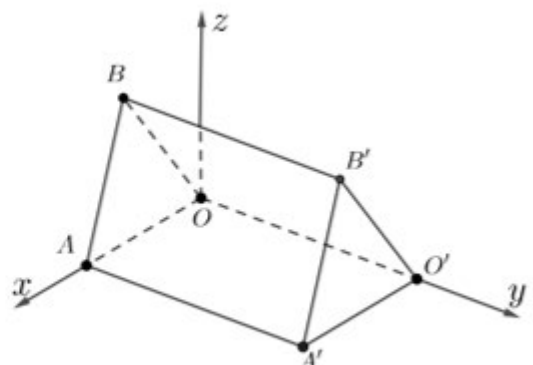
- Câu 8:** Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m , chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m . Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



- Câu 9:** Những căn lều gỗ trong Hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình 2. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là $a\text{ cm}$, chiều rộng là $b\text{ cm}$, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là $c\text{ cm}$. Tính $a+b+c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị).

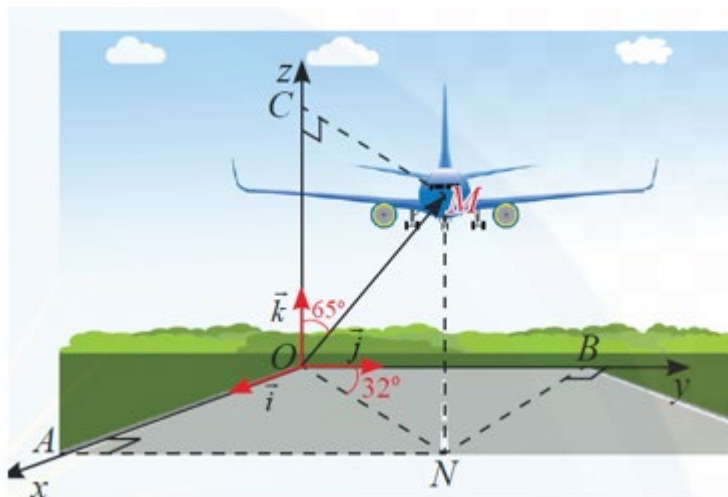


Hình 1



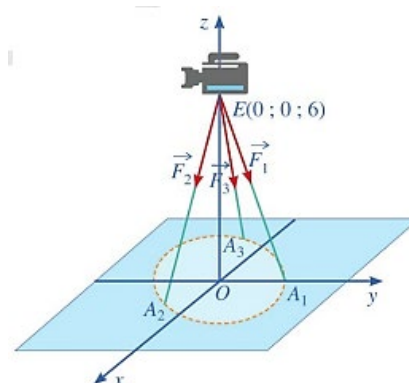
Hình 2

Câu 10: Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Tìm tọa độ điểm M .

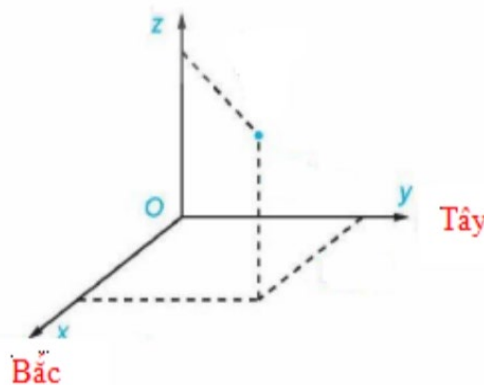


Câu 11: Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(100;50;5)$ đến điểm $B(200;100;10)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$. Khi đó tính $x + y + z$

Câu 12: Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ (Hình 40). Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N. Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.



Câu 13: Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại một điểm. Sau một thời gian chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc 30(km) và phía Tây 40(km), đồng thời cách mặt đất 1,5(km). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilomet (xem hình vẽ). Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát gần nhất với giá trị nào dưới đây (đơn vị km)?



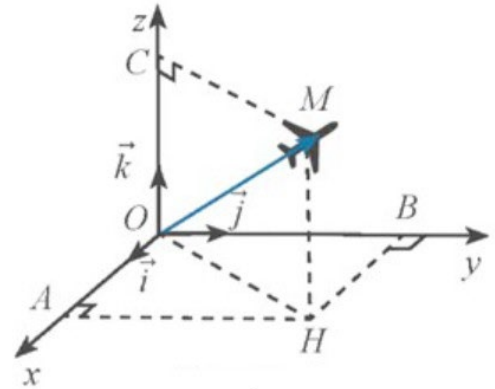
Câu 14: Một gia đình định lắp thang máy trong nhà ở, cabin của thang máy có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông như hình vẽ. Biết rằng công ty cung cấp thang máy cho biết thể tích khoang cabin là $5,4 m^3$ và diện tích toàn phần của nó là $18,9 m^2$.

Gia đình định lắp 1 chiếc camera ở vị trí trên trần cabin (điểm P), gần 1 góc vuông sao cho nó cách 2 vách đứng của khoang cabin đều là $10 cm$ (hình vẽ). Chọn hệ trục như hình vẽ, đơn vị trên mỗi trục là $10 cm$. Hãy tìm tọa độ của điểm P , biết rằng cạnh của đáy cabin không tới $2 m$

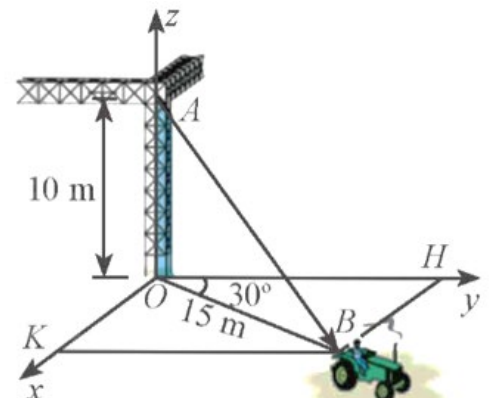


Câu 15: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Biết

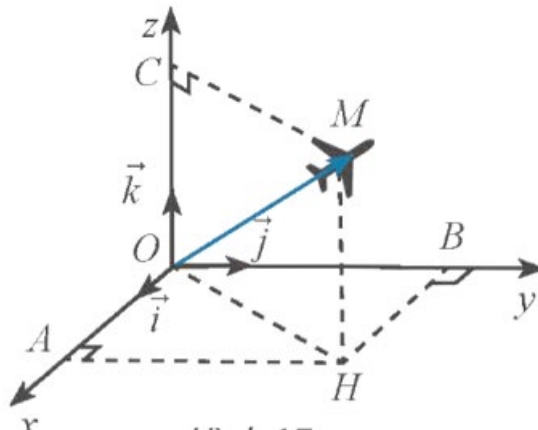
$OM = 79; (\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 68^\circ; (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 50^\circ$. Gọi tọa độ điểm $M(a; b; c)$. Giá trị của $a + b + c$ là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần mười).



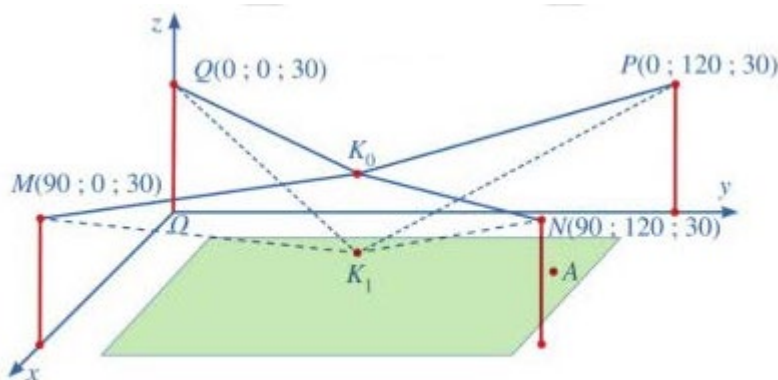
Câu 16: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ như hình bên, với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$.



Câu 17: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên dưới. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .

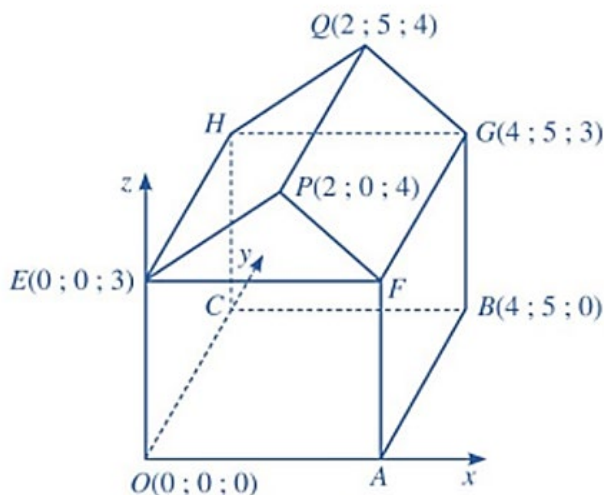


Câu 18: Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình 34). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 (Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).



Biết rằng vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$ có tọa độ là $(a;b;c)$; $a,b,c \in \mathbb{R}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

Câu 19: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



- Tọa độ điểm A là $(4;0;0)$.
- Tọa độ $\overrightarrow{AH} = (4;5;3)$
- $\overrightarrow{FG} = 5\vec{k}$
- Khi $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{QG}$ thì tọa độ điểm T là $T(6;0;-1)$.

CHƯƠNG

II

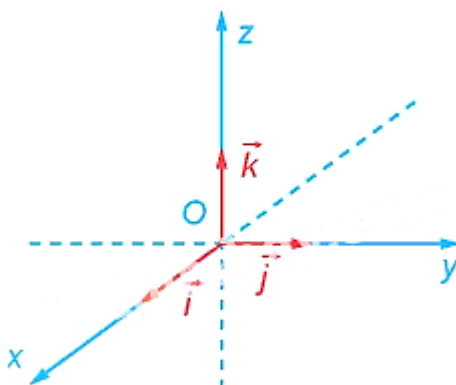
VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



LÝ THUYẾT.

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.

Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M .

Nhận xét. Nếu điểm M có tọa độ $(x; y; z)$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy và Oz có tọa độ lần lượt là $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ và $(0; 0; z)$.
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz)$ và (Ozx) có tọa độ lần lượt là $(x; y; 0)$, $(0; y; z)$ và $(x; 0; z)$.

Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$ tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của vector $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét

- Toạ độ của vector $\vec{a}$ cũng là toạ độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Trong không gian, cho hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu
$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

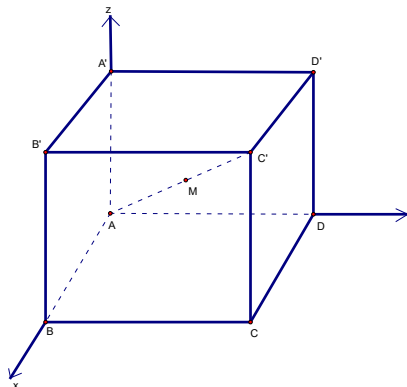
Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$. Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với chiều rộng $AB = 4$, chiều dài $AD = 8$, chiều cao $AA' = 10$ được gắn vào hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ. Người ta muốn treo một bóng đèn ở tâm hình hộp. Tìm toạ độ vị trí điểm M để treo bóng đèn.

Lời giải



Từ giả thiết ta có $A(0;0;0), C(4;8;10)$

Gọi M là tâm của hình hộp. Khi đó M là trung điểm của AC'

Suy ra $M(2;4;5)$

Câu 2: Một công ty viễn thông đang lên kế hoạch xây dựng một tháp viễn thông tại một thành phố để cung cấp dịch vụ tốt hơn. Công ty cần xác định vị trí của tháp sao cho có thể phủ sóng hiệu quả đến ba toà nhà quan trọng trong thành phố. Giả sử các toà nhà này được đặt tại các vị trí có toạ độ như sau:

Toà nhà $A(0;0;0)$

Toà nhà $B(6;0;0)$

Toà nhà $C(3;\sqrt{3};2\sqrt{6})$

Tháp viễn thông phải đặt ở vị trí sao cho tổng khoảng cách từ tháp đến 3 toà nhà là nhỏ nhất. Khi đó tổng khoảng cách từ vị trí của tháp đến ba toà nhà bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi vị trí tháp là $T(x; y; z)$. Vì $AB = AC = BC = 6$ nên tam giác ABC đều. Khi đó vị trí của tháp là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x = \frac{0+6+3}{3} = \frac{9}{3} \\ y = \frac{0+0+\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \\ z = \frac{0+0+2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow T\left(\frac{9}{3}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

Khi đó khoảng cách từ tháp đến các toà nhà là:

$$TA = TB = TC = \frac{\sqrt{47}}{2}.$$

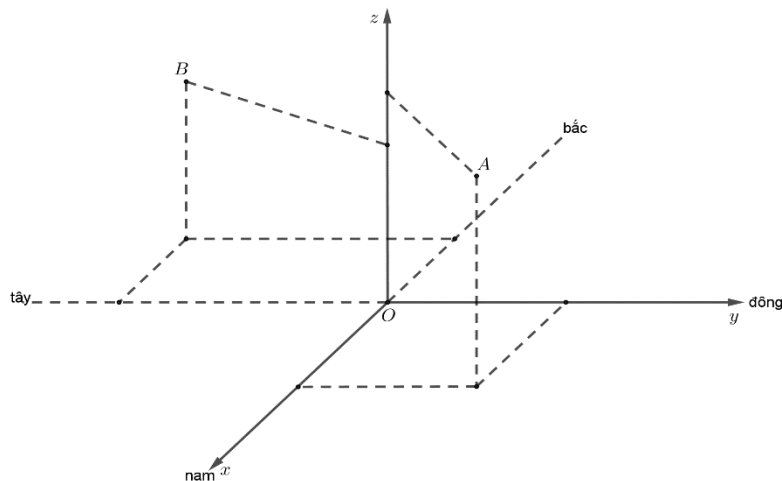
Vậy tổng khoảng cách cần tìm là: $S = TA + TB + TC = \frac{3\sqrt{47}}{2} \approx 10,28$

Câu 3: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2,5 km về phía nam và 2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1,5 km về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,6 km. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là a km theo hướng nam và b km theo hướng tây. Tính tổng $2a + 3b$.

Lời giải

Đáp số: 3

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ), đơn vị đo lấy theo kilômét.



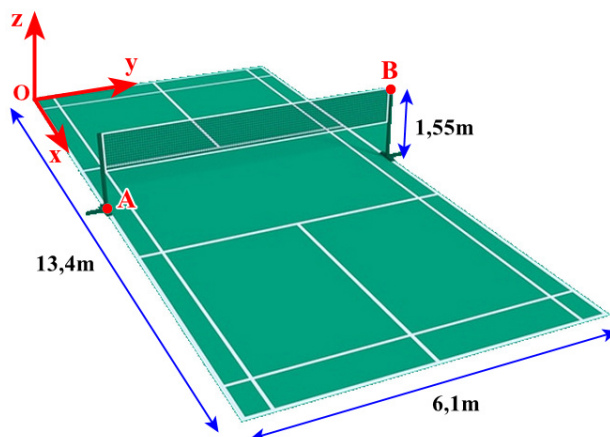
Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai ở vị trí A, B . Ta có $A\left(\frac{5}{2}; 2; \frac{4}{5}\right), B\left(-\frac{3}{2}; -3; \frac{3}{5}\right)$.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy) , $C\left(\frac{5}{2}; 2; -\frac{4}{5}\right)$. Khi đó $I = BC \cap (Oxy)$.

$$\overrightarrow{BC} = \left(4; 5; -\frac{7}{5}\right). I \in (Oxy) \Rightarrow I(x; y; 0) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \left(x + \frac{3}{2}; y + 3; -\frac{3}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI} \text{ cùng phương nên } \frac{x + \frac{3}{2}}{4} = \frac{y + 3}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{14} \\ y = -\frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{14} \\ b = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 3.$$

Câu 4: Hình dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó (đơn vị trên mỗi trục là mét) và hai điểm A, B như hình. Xác định tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

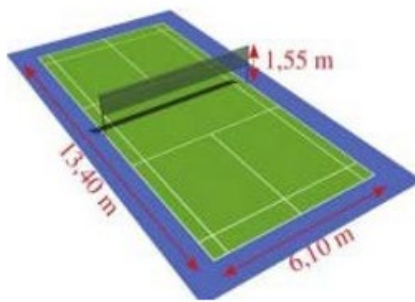


Lời giải

Ta có $A(6,7; 0; 0), B(6,7; 6,1; 1,55)$. Vậy tọa độ $\overrightarrow{AB}$ là:

$$\overrightarrow{AB} = (6,7 - 6,7; 6,1 - 0; 1,55 - 0) = (0; 6,1; 1,55).$$

Câu 5: Hình vẽ 1a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như hình 1b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Biết tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Khi đó $S = a - b + 2c$ bằng bao nhiêu?



(Hình 1a)

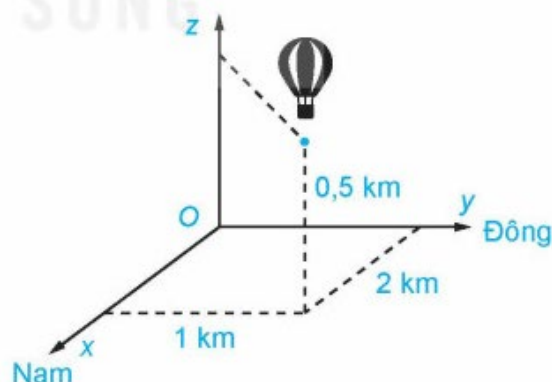


(Hình 1b)

Lời giải

Vì vector $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với vector đơn vị $\vec{k}$ của trục Oz và độ dài $AB = 1,55$ nên $\overrightarrow{AB} = 1,55\vec{k}$.
Do đó $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 1,55) \Rightarrow S = a - b + 2c = 3,1$.

Câu 6: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{ m}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5\text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{ km}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, Oy hướng về phía đông, Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét. Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu.

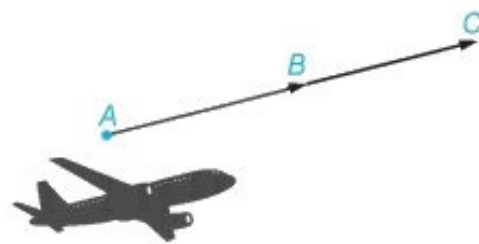


Lời giải

Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{ m}$ nên có tọa độ là $(2; 1; 0,5)$.

Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5\text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{ km}$ nên có tọa độ là $(-1; -1,5; 0,8)$.

Câu 7: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong vòng 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?



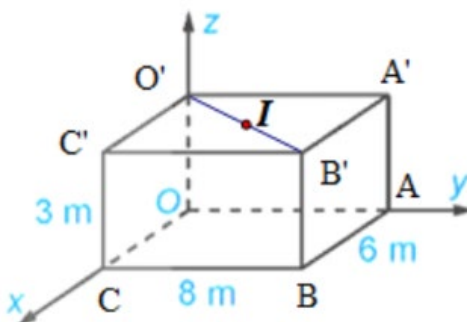
Lời giải

Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian từ B đến C nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (940 - 800; 550 - 500; 8 - 7) = (140; 50; 1)$. $\overrightarrow{BC} = (x - 940; y - 550; z - 8)$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 140 = x - 940 \\ 50 = y - 550 \\ 1 = z - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1080 \\ y = 600 \\ z = 9 \end{cases}. \text{ Vậy } C = (1080; 600; 9).$$

Câu 8: Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m , chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m . Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



Lời giải

Giả sử căn phòng hình hộp chữ nhật được mô phỏng như hình vẽ.

Khi đó ta có $B'(6; 8; 3)$ và $O'(0; 0; 3)$.

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm chính giữa trần nhà của phòng học.

Vì $O'A'B'C'$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IB'}$.

Ta có $\overrightarrow{OI} = (x - 0; y - 0; z - 3)$, $\overrightarrow{IB'} = (6 - x; 8 - y; 3 - z)$ nên:

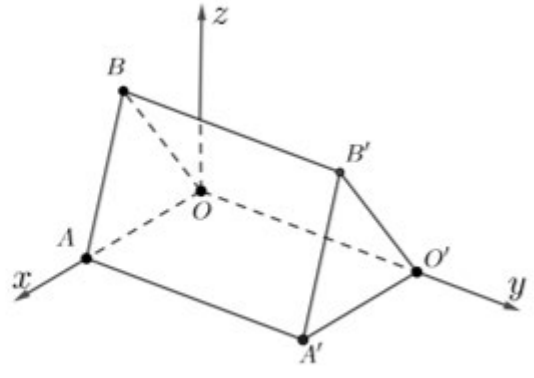
$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 6 - x \\ y - 0 = 8 - y \\ z - 3 = 3 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}. \text{ Vậy tọa độ điểm treo đèn là } I(3; 4; 3).$$

Câu 9: Những căn lều gỗ trong Hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình 2. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà

gỗ có chiều dài là a cm, chiều rộng là b cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a+b+c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị).



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Vì điểm A' có tọa độ là $(240;450;0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là 450cm và 240cm. Suy ra $A'A=450$ cm và $A'O'=240$ cm. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'}=(-120;0;300)$, do đó $A'B'=\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=\sqrt{(-120)^2+0^2+300^2}=60\sqrt{29}\approx 323(\text{cm})$.

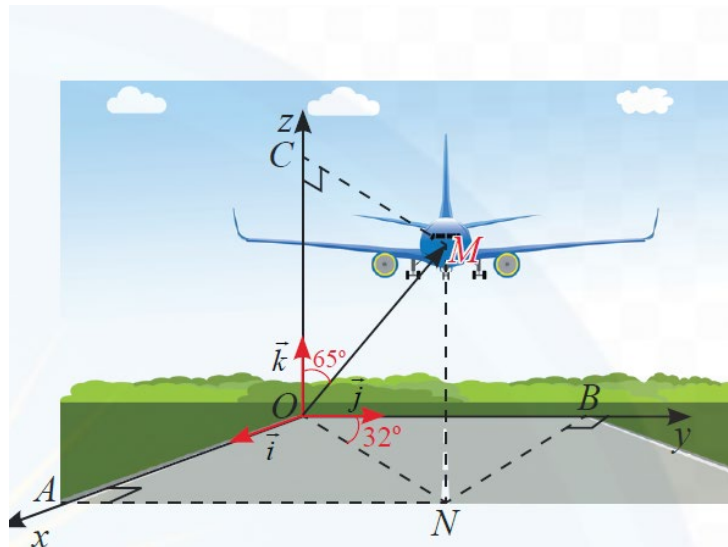
Vì $O'O=A'A=450$ cm và O' nằm trên trục Oy nên tọa độ của điểm O' là $(0;450;0)$.

Do đó $\overrightarrow{O'B'}=(120;0;300)$ và $O'B'=\left|\overrightarrow{O'B'}\right|=\sqrt{120^2+0^2+300^2}=60\sqrt{29}\approx 323(\text{cm})$.

Vậy mỗi căn lều gỗ có chiều dài là 450cm, chiều rộng là 240cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm.

$$\Rightarrow a+b+c=1013.$$

Câu 10: Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM=14$, $\widehat{NOB}=32^\circ$, $\widehat{MOC}=65^\circ$. Tìm tọa độ điểm M .



Lời giải

Tam giác OCM vuông tại C có

$$OC=OM.\cos 65^\circ=14.\cos 65^\circ\approx 5,9 \text{ và } CM=OM.\sin 65^\circ=14.\sin 65^\circ\approx 12,7.$$

$$ON=CM, AN=OB.$$

$$\text{Có } \widehat{AON}=90^\circ-\widehat{BON}=58^\circ$$

Tam giác ONM vuông tại N có

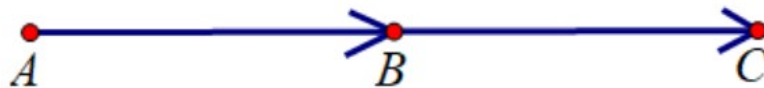
$$ON = OM \cdot \cos 58^\circ = 12,7 \cdot \cos 58^\circ \approx 6,7 \text{ và } MN = OM \cdot \sin 58^\circ = 12,7 \cdot \sin 58^\circ \approx 10,8.$$

$$\vec{OM} = ON\vec{i} + MN\vec{j} = 6,7\vec{i} + 10,8\vec{j}.$$

Vậy $M(6,7;10,8;0)$.

Câu 11: Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(100;50;5)$ đến điểm $B(200;100;10)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$. Khi đó tính $x + y + z$

Lời giải



Gọi $C(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

$$\vec{AB} = (100;50;5).$$

$$\vec{BC} = (x-200;y-100;z-10).$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\vec{AB}$ và $\vec{BC}$ cùng hướng.

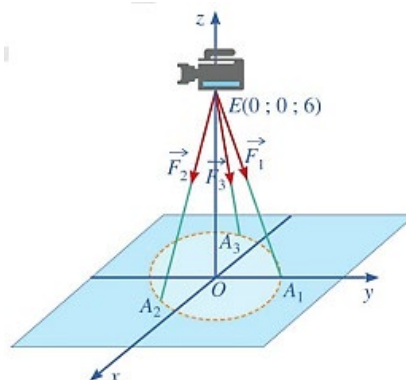
Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $A \rightarrow B$ bằng thời gian bay từ $B \rightarrow C$ nên $\vec{AB} = \vec{BC}$

$$\text{Suy ra } \vec{AB} = \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 = x - 200 \\ 50 = y - 100 \\ 5 = z - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 150 \\ z = 15 \end{cases} \Rightarrow C(300;150;15).$$

Tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(300;150;15)$.

$$x + y + z = 300 + 150 + 15 = 465$$

Câu 12: Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ (Hình 40). Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N. Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.



Lời giải

Theo giả thiết, ta có các điểm $E(0;0;6)$, $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{EA_1} = (0-0;1-0;0-6)$ hay $\overrightarrow{EA_1} = (0;1;-6)$;

$$\overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0;-\frac{1}{2}-0;0-6\right) \text{ hay } \overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right)$$

$$\overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0;-\frac{1}{2}-0;0-6\right) \text{ hay } \overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right).$$

Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho:

$$\overrightarrow{F_1} = c\overrightarrow{EA_1} = (0;c;-6c);$$

$$\overrightarrow{F_2} = c\overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c;-\frac{1}{2}c;-6c\right);$$

$$\overrightarrow{F_3} = c\overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c;-\frac{1}{2}c;-6c\right).$$

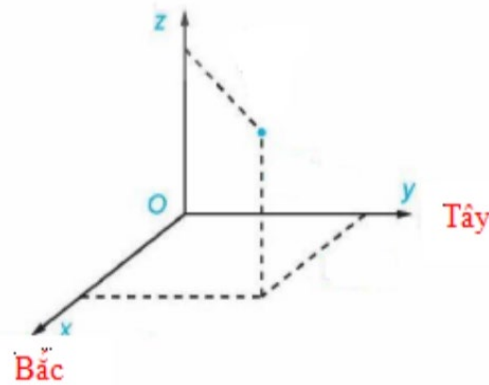
Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = (0;0;-18c)$.

Mặt khác, ta có: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F}$, trong đó $\overrightarrow{F} = (0;0;-300)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay.

Suy ra $18c = -300$, tức là $c = \frac{50}{3}$.

$$\text{Vậy: } \overrightarrow{F_1} = \left(0; \frac{50}{3}; -100\right); \overrightarrow{F_2} = \left(\frac{25\sqrt{3}}{3}; -\frac{25}{3}; -100\right); \overrightarrow{F_3} = \left(-\frac{25\sqrt{3}}{3}; -\frac{25}{3}; -100\right)$$

Câu 13: Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại một điểm. Sau một thời gian chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $30(km)$ và phía Tây $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $1,5(km)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilomet (xem hình vẽ). Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát gần nhất với giá trị nào dưới đây (đơn vị km)?



Lời giải

Với cách chọn hệ trục tọa độ như trên ta có khoảng cách so với vị trí xuất phát của máy bay là $\sqrt{40^2 + 30^2 + 1,5^2} = 50,02$.

Câu 14: Một gia đình định lắp thang máy trong nhà ở, cabin của thang máy có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông như hình vẽ. Biết rằng công ty cung cấp thang máy cho biết thể tích khoang cabin là $5,4 m^3$ và diện tích toàn phần của nó là $18,9 m^2$.



Gia đình định lắp 1 chiếc camera ở vị trí trên trần cabin (điểm P), gần 1 góc vuông sao cho nó cách 2 vách đứng của khoang cabin đều là $10 cm$ (hình vẽ). Chọn hệ trục như hình vẽ, đơn vị trên mỗi trục là $10 cm$. Hãy tìm tọa độ của điểm P , biết rằng cạnh của đáy cabin không tới $2 m$

Lời giải

Gọi cạnh đáy và chiều cao của khoang cabin lần lượt là x, h ($x, h > 0; m$)

$$\text{Theo bài ra ta có: } \begin{cases} V = x^2 \cdot h = 5,4 & (1) \\ S_{tp} = 2x^2 + 4xh = 18,9 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow xh = \frac{5,4}{x}$. Thay vào (2) ta được:

$$2x^2 + 4 \cdot \frac{5,4}{x} = 18,9 \Leftrightarrow 2x^3 - 18,9x + 21,6 = 0 \Rightarrow x = 1,5 \text{ (m)} \text{ (vì } x < 2)$$

Thay vào (1) ta được: $h = 2,4 \text{ (m)}$

Vậy khoang cabin thang máy có cạnh đáy và chiều cao là: $x = 1,5 m = 150 cm$; $h = 2,4 m = 240 cm$

Trong hệ tọa độ đã chọn, $x = 15$ đơn vị và $h = 24$ đơn vị.

Từ giả thiết suy ra P có 3 tọa độ đều dương và:

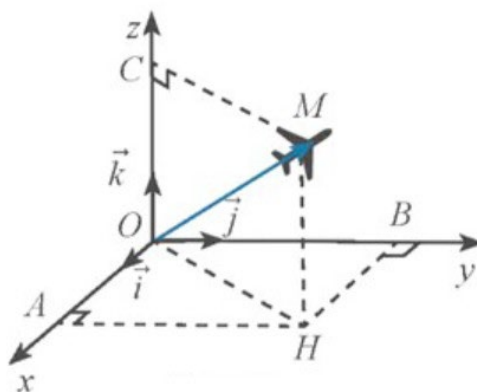
P cách mặt phẳng (Oxy) 1 đoạn bằng 24 nên $z = 24$

P cách mặt phẳng (Oyz) 1 đoạn bằng 1 nên $x = 1$

P cách mặt phẳng (Oxz) 1 đoạn bằng 14 nên $y = 14$

Vậy tọa độ của $P(1; 14; 24)$.

Câu 15: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Biết $OM = 79; (\vec{i}, \vec{OH}) = 68^\circ; (\vec{OH}, \vec{OM}) = 50^\circ$. Gọi tọa độ điểm $M(a; b; c)$. Giá trị của $a + b + c$ là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải

$$OC = MH = OM \sin HOM = 79 \sin 68^\circ$$

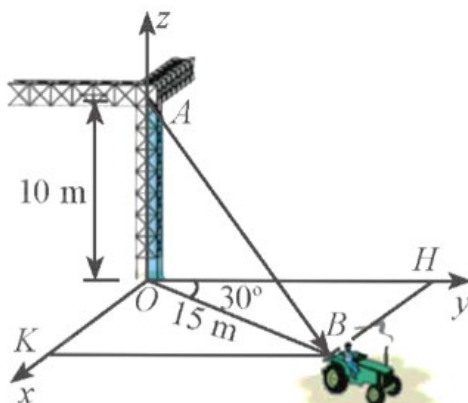
$$OH = OM \cos HOM = 79 \cos 68^\circ$$

$$OA = OH \cos AOH = 79 \cos 68^\circ \cdot \cos 50^\circ$$

$$OB = AH = OH \sin AOH = 79 \cos 68^\circ \sin 50^\circ$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a = 79 \cos 68^\circ \cdot \cos 50^\circ \\ b = 79 \sin 68^\circ \\ c = 79 \cos 68^\circ \sin 50^\circ \end{cases} \Rightarrow a + b + c \approx 114,9$$

Câu 16: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ như Hình 16 với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Hình 16

Lời giải

Do $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với $\vec{k}$ và $|\overrightarrow{OA}| = 10$ nên $\overrightarrow{OA} = 10\vec{k}$.

Xét $\triangle OBH$ vuông tại H , ta có:

$$OH = \cos 30^\circ \cdot OB = \cos 30^\circ \cdot 15 = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

$$BH = \sin 30^\circ \cdot OB = \sin 30^\circ \cdot 15 = \frac{15}{2}.$$

Do $\overrightarrow{OH}$ cùng hướng với $\vec{j}$ và $|\overrightarrow{OH}| = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ nên $\overrightarrow{OH} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \cdot \vec{j}$.

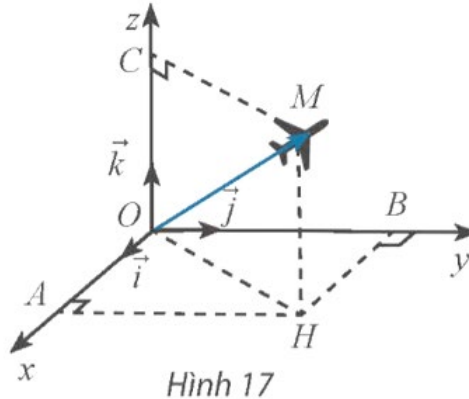
Do $\overrightarrow{OK}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{OK}| = \frac{15}{2}$ nên $\overrightarrow{OK} = \frac{15}{2} \cdot \vec{i}$.

Trong hình bình hành $OKBH$, ta có $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OH} = \frac{15}{2}\vec{i} + \frac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \frac{15}{2}\vec{i} + \frac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j} - 10\vec{k}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$.

Câu 17: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như Hình 17. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .



Lời giải

Xét $\triangle MHO$ vuông tại H , ta có:

$$OH = OM \cdot \cos 48^\circ = 50 \cdot \cos 48^\circ \approx 33,46.$$

$$MH = OM \cdot \sin 48^\circ = 50 \cdot \sin 48^\circ \approx 37,16.$$

Xét $\triangle OAH$ vuông tại A , ta có: $BH = OA = OH \cdot \cos 64^\circ = 33,46 \cdot \cos 64^\circ \approx 14,67$.

Xét $\triangle OBH$ vuông tại B , ta có: $OB = \sqrt{OH^2 - BH^2} = \sqrt{33,46^2 - 14,67^2} \approx 30,07$.

Do $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{OA}| = 14,67$ nên $\overrightarrow{OA} = 14,67\vec{i}$.

Do $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng với $\vec{j}$ và $|\overrightarrow{OB}| = 30,07$ nên $\overrightarrow{OB} = 30,07\vec{j}$.

Do $\overrightarrow{OC}$ cùng hướng với $\vec{k}$ và $|\overrightarrow{OC}| = 37,16$ nên $\overrightarrow{OC} = 37,16\vec{k}$.

Trong hình bình hành $OAHB$, ta có $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

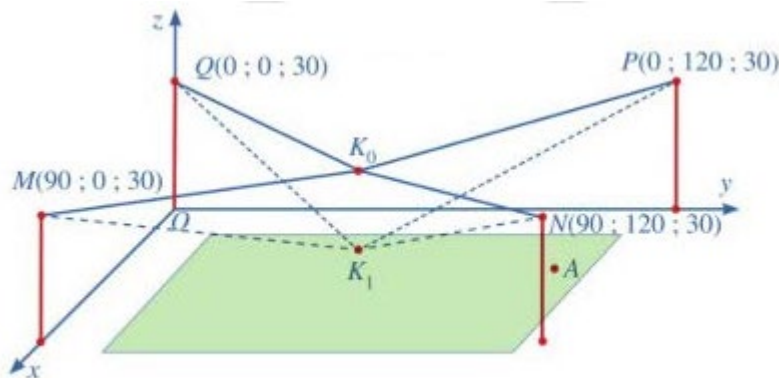
Trong hình bình hành $OCMH$, ta có

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 14,67\vec{i} + 30,07\vec{j} + 37,16\vec{k}$$

Vậy $M(14,67; 30,07; 37,16)$.

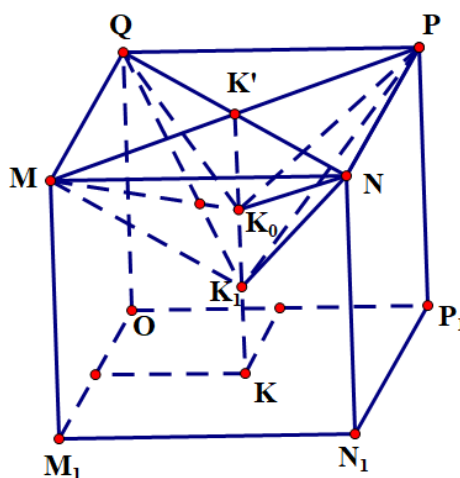
Câu 18: Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình 34). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A

, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 (Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VT).



Biết rằng vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$ có tọa độ là $(a; b; c); a, b, c \in \mathbb{R}$. Khi đó $a + b + c$ bằng

Lời giải



Gọi M_1, N_1, P_1, K lần lượt là hình chiếu của M, N, P, K_0 lên mặt phẳng (Oxy) .

Ta thấy $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật. Gọi K' là giao hai đường chéo MP và NQ . Khi đó $K'Q = K'P = K'N = K'M$. Vì $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ và camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng từ điểm K_0 xuống điểm K_1 nên các điểm K', K_0, K_1, K thẳng hàng.

Khi đó, các điểm K', K_0, K_1, K có hoành độ và tung độ bằng nhau.

Theo bài ra, cao độ của K_0 và K_1 lần lượt là 25 và 19. Giả sử $K_0(x; y; 25)$ và $K_1(x; y; 19)$.

Ta có $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật nên $K'K = OQ$, suy ra cao độ của K' bằng 30.

Do đó, $K'(x; y; 30)$.

Ta có $\overrightarrow{K'Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OK'} = 30\vec{k} - (x\vec{i} + y\vec{j} + 30\vec{k}) = -x\vec{i} - y\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{K'Q} = (-x; -y; 0)$.

$\overrightarrow{NK'} = \overrightarrow{OK'} - \overrightarrow{ON} = (x\vec{i} + y\vec{j} + 30\vec{k}) - (90\vec{i} + 120\vec{j} + 30\vec{k}) = (x - 90)\vec{i} + (y - 120)\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NK'} = (x - 90; y - 120; 0)$.

Vì K' là giao hai đường chéo của hình chữ nhật $MNPQ$ nên K' là trung điểm của NQ .

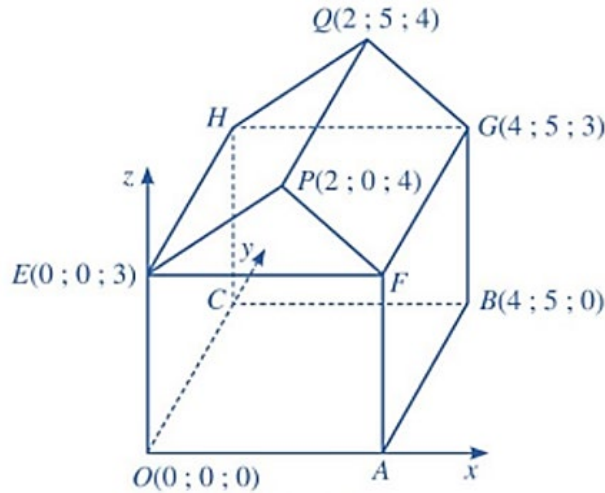
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{K'Q} = \overrightarrow{NK'} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x - 90 \\ -y = y - 120 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 60 \end{cases}.$$

Do vậy, $K_0(45; 60; 25); K_1(45; 60; 19)$ nên ta có

$$\overrightarrow{K_0K_1} = \overrightarrow{OK_1} - \overrightarrow{OK_0} = (45\vec{i} + 60\vec{j} + 19\vec{k}) - (45\vec{i} + 60\vec{j} + 25\vec{k}) = -6\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{K_0K_1} = (0; 0; -6).$$

Do đó, $a + b + c = -6$.

Câu 19: Hình minh hoạ sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



- a) Tọa độ điểm A là $(4; 0; 0)$.
 b) Tọa độ $\overrightarrow{AH} = (4; 5; 3)$
 c) $\overrightarrow{FG} = 5\vec{k}$
 d) Khi $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{QG}$ thì tọa độ điểm T là $T(6; 0; -1)$.

Lời giải

a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Đúng.

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4$, $y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4; 0; 0)$. Tường nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5$, $z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0; 5; 3)$. Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F = x_A = 4$; $z_F = z_E = 3$. Do F nằm trên mặt phẳng (Ozx) nên tọa độ điểm F là $(4; 0; 3)$.

b) Ta có: $A(4; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = 4\vec{i}$
 và $H(0; 5; 3) \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 5\vec{j} + 3\vec{k}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-4; 5; 3)$.

c) Ta có: $F(4; 0; 3) \Rightarrow \overrightarrow{OF} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$
 và $G(4; 5; 3) \Rightarrow \overrightarrow{OG} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = 5\vec{j}$.

d) $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{QG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OQ}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OT} - 4\vec{i} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} - (2\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OT} = 6\vec{i} - \vec{k} \Rightarrow T(6; 0; -1).$$

CHƯƠNG

II

VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO



LÝ THUYẾT.

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTO, PHÉP TRỪ HAI VECTO, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z');$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z');$$

$$k\vec{a} = (kx; ky; kz) \text{ với } k \text{ là một số thực.}$$

Nhận xét: Vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số

$$\text{thực } k \text{ sao cho } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases} \text{ (Nếu } x'.y'.z' \neq 0 \text{ thì } \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'})$$

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:

$$\text{Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng } AB \text{ là } \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right);$$

$$\text{Toạ độ trọng tâm của tam giác } ABC \text{ là } \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$

Nhận xét:

$$- \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$

$$- |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

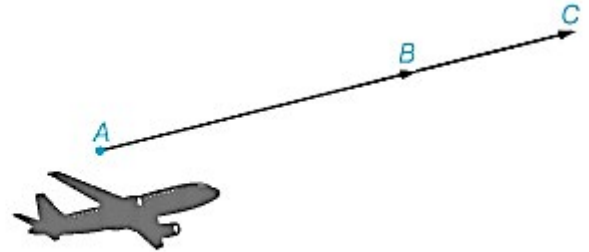
$$- \text{Nếu } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ thì } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Chú ý: Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

III. VẬN DỤNG TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Ví dụ 5: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?



Hình 2.49

Lời giải

Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{8-7}{2} \right) = (70; 25; 0,5).$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{BC} = (x-940; y-550; z-8) \text{ nên } \begin{cases} x-940 = 70 \\ y-550 = 25 \\ z-8 = 0,5. \end{cases}$$

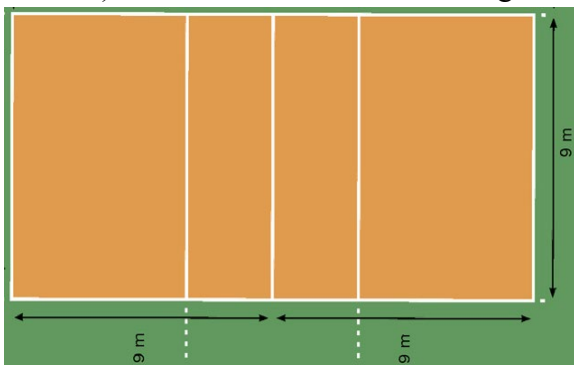
$$\text{Từ đó } \begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 8,5 \end{cases} \text{ và vì vậy } C(1010; 575; 8,5).$$

Vậy toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010; 575; 8,5)$.



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Theo quy định của liên đoàn bóng chuyền quốc tế (FIVB), sân bóng chuyền có hình dạng chữ nhật. Kích thước tiêu chuẩn của sân bóng chuyền là $9m \times 18m$. Chiều cao của lưới bóng chuyền là $2,24m$ đối với nữ. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như hình vẽ thứ hai (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ để căng lưới bóng chuyền. Hãy xác định toạ độ của vector $\overrightarrow{AB}$.



- Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(750;450;7)$ đến điểm $B(950;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?
- Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(700;450;7)$ đến điểm $B(900;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau bao nhiêu phút, máy bay bay từ điểm A đến điểm $C(1000;600;10)$?
- Câu 4:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(400; 50;8)$ đến điểm $B(100; 450;10)$ trong 10 phút. Sau đúng 5 phút tính từ lúc máy bay ở vị trí A thì máy bay ở vị trí có tổng hoành độ tung độ và cao độ là bao nhiêu?
- Câu 5:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm B trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(1010;575;10)$. Xác định tọa độ vị trí điểm B
- Câu 6:** Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một drone giao hàng đang ở tọa độ $A(1;0;1)$ di chuyển đến địa điểm nhận hàng là $B(4;4;6)$. Mỗi đơn vị trên phần mềm bằng $1km$ ngoài thực tế. Biết tốc độ của drone là $80km/h$; giả sử rằng từ vị trí giao hàng và nhận hàng không gặp chướng ngại vật, sức cản gió không đáng kể để drone bay theo đường thẳng. Thời gian drone bay từ vị trí ban đầu đến địa điểm giao hàng mất bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng thập phân)?
- Câu 7:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, (đơn vị đo: km), ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu Su-35 của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(300;150;7)$ đến điểm $N(800;550;13)$ trong 20 phút. Tính tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo nếu máy bay giữ nguyên vận tốc và hướng bay.
- Câu 8:** Tính công(đơn vị N) sinh bởi lực $\vec{F}(6;8;-10)$ tạo bởi một drone giao hàng khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d}(100;200;200)$.



- Câu 9:** Một em nhỏ cân nặng $20kg$ trượt trên cầu trượt dài 3m. Biết rằng cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° . Cho biết công A(J) sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt biết gia tốc rơi tự do $g = 9,8 m/s^2$.

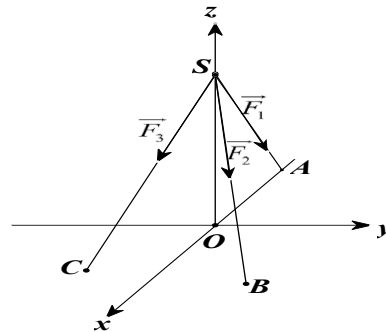


Câu 10: Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu X di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$.



Tọa độ vị trí điểm $N(a;b;c)$, tính $S = a + b + 2c$

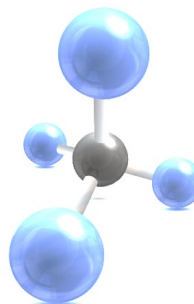
Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A(-2;0;0)$, $B(1;\sqrt{3};0)$, $C(1;-\sqrt{3};0)$. Biết rằng trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là $30N$ và được phân bố thành ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau như hình dưới. Tính tích vô hướng của $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$.



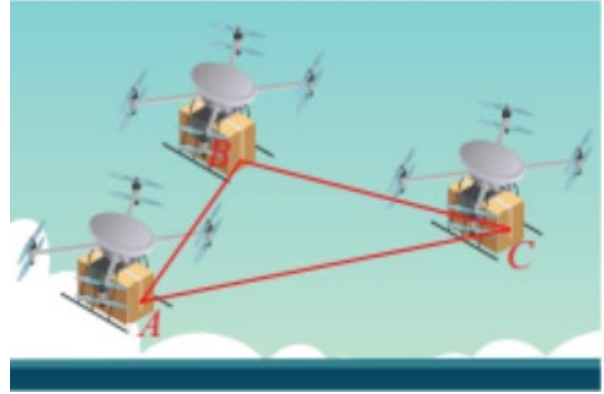
Câu 11: Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



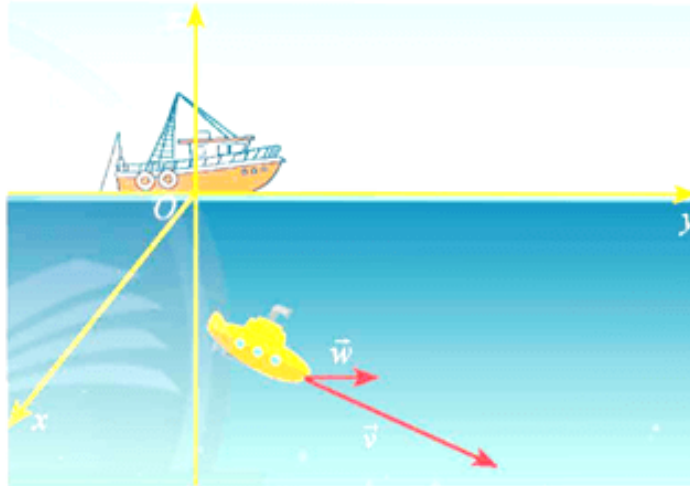
Câu 12: Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H - C - H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này.



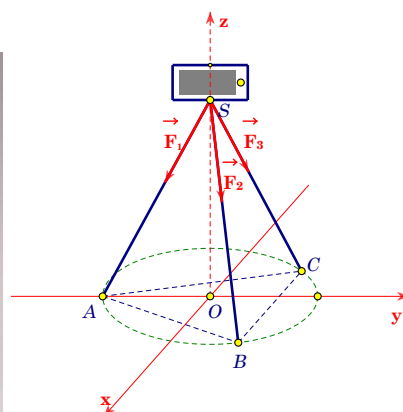
Câu 13: Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1; -3; 2)$, $B(m; m-2; 6)$, $C(m-2; m; 5)$, trong đó m là tham số, đơn vị đo độ dài tính bằng kilomet. Biết kho hàng đang ở tại điểm $I(1; 1; 0)$. Vì lý do nhiên liệu nên các drone không được di chuyển quá xa kho hàng, cụ thể là các drone không được cách kho hàng quá 100 km. Xác định giá trị của tham số m để các drone cách kho hàng không quá 100km.



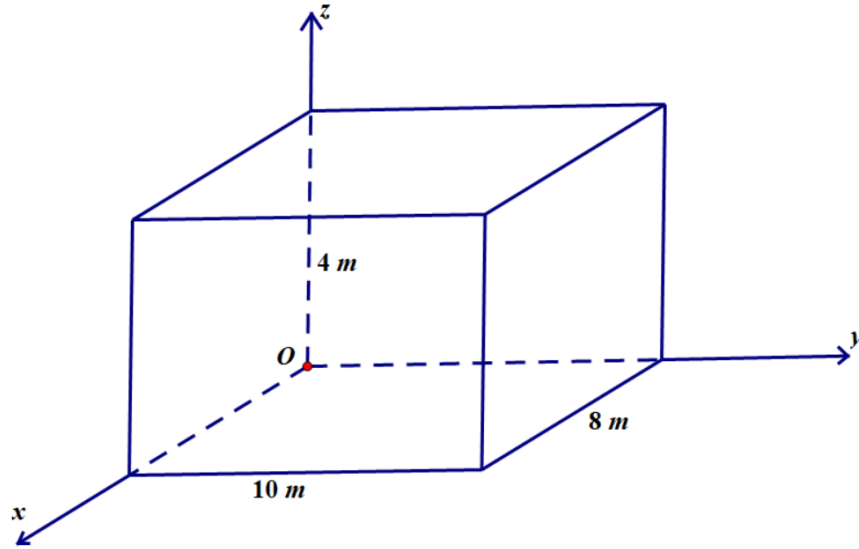
Câu 14: Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vector vận tốc của thiết bị khi biển đứng yên là $\vec{v} = (11; 7; -4)$ (đơn vị: km/h). Cho biết vector vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là $\vec{w} = (4; 2; 0)$ (đơn vị: km/h). Tính tốc độ của thiết bị trong điều kiện có dòng hải lưu, các yếu tố khác không đáng kể (đơn vị km/h, làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 15: Một chiếc điện thoại iphone được đặt trên một giá đỡ có ba chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của ba chân lần lượt là $A(0; -6; 0)$, $B(3\sqrt{3}; 3; 0)$, $C(-3\sqrt{3}; 3; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết điện thoại có trọng lượng là 2 N và ba lực tác dụng lên giá đỡ được phân bố như hình vẽ là ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau. Biết tọa độ của lực $\vec{F}_1 = (a; b; c)$, khi đó $T = 2a + 5b + 6c$ bằng?

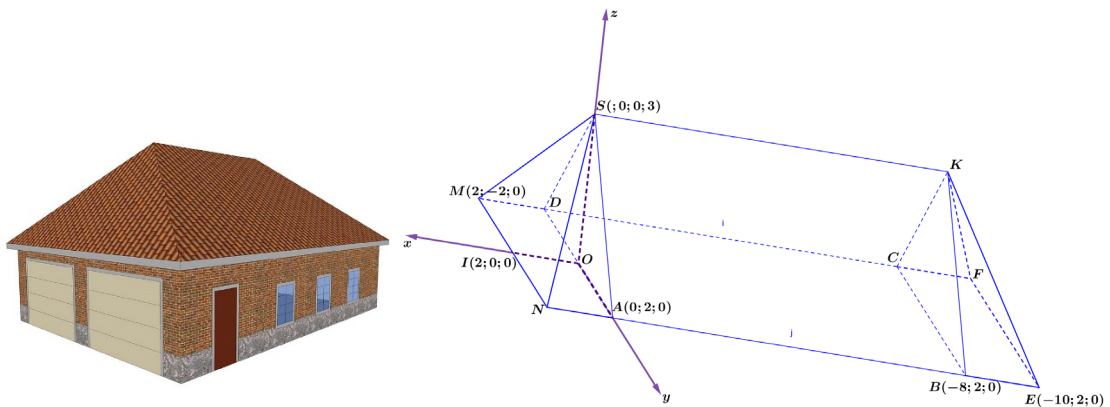


Câu 16: Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 8 m và chiều cao là 4 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình vẽ).

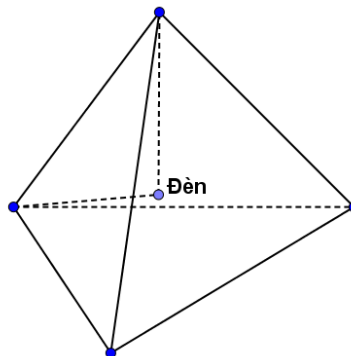


Tính khoảng cách từ điểm treo bóng đèn đến góc phòng học (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

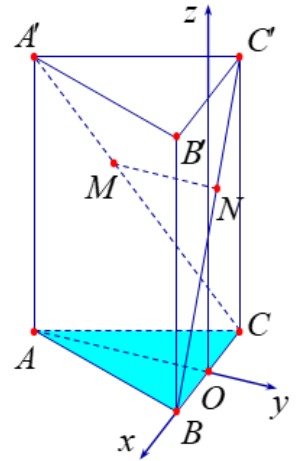
Câu 17: Phần mái của một căn nhà có dạng là khối đa diện được mô tả và gắn trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tính thể tích khối đa diện của mái nhà.



Câu 18: Một đồ chơi có dạng hình tứ diện đều làm bằng thủy tinh có cạnh bằng 10 cm. Bên trong đặt một đèn nhỏ. Đèn đặt trên đường nối từ đỉnh của tứ diện xuống tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và cách đỉnh một khoảng là $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ cm. Đèn được nối bởi hai dây qua hai đỉnh của tứ diện như hình vẽ. Cường độ lực tổng hợp của hai dây tác dụng lên đèn là bao nhiêu?



Câu 19: Một kiến trúc sư muốn xây dựng 1 tòa nhà biểu tượng độc lạ cho thành phố. Trên bản thiết kế tòa nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều, có cạnh bên bằng cạnh đáy và dài 300 mét (tham khảo hình vẽ). Kiến trúc sư muốn xây dựng một cây cầu MN bắc xuyên tòa nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C$, điểm cuối thuộc cạnh BC') và cây cầu này sẽ được dát vàng với đơn giá 5 tỷ đồng trên 1 mét dài. Vì vậy để đáp ứng bài toán kinh tế, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất (Gợi ý: đoạn thẳng nối hai đường ngắn nhất chính là đường vuông góc chung). Khi đó giá xây cây cầu này hết bao nhiêu tiền?

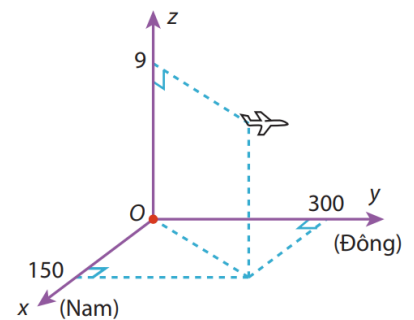


Câu 20: Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (Hình 2) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?



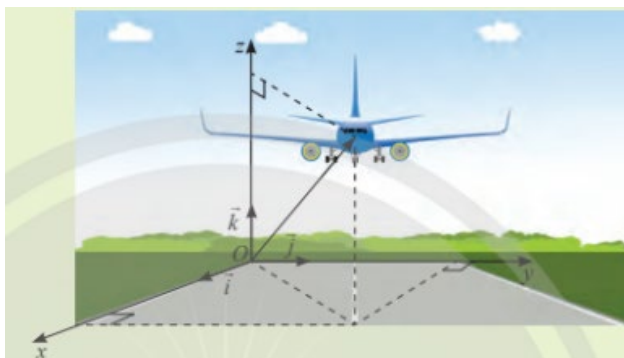
- Radar ở vị trí có tọa độ $(0;0;0)$.
- Vị trí A có tọa độ $(300;200;10)$.
- Khoảng cách từ máy bay đến radar là khoảng 360,69 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Radar của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A .

Câu 21: Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?



- Máy bay đang ở độ cao 9km.
- Tọa độ của máy bay $(300;150;9)$.
- Phi công để máy bay ở chế độ tự động với vận tốc theo hướng đông là 750km/h , độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc 10m/s . Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì lúc 10h30 phút máy bay ở tọa độ $(150;1086;9)$.
- Sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại với vận tốc 800km/h với độ cao không đổi, biết lúc đó trời lặng gió thì lúc 11h máy bay ở tọa độ $(686;150;9)$.

Câu 22: Một chiếc máy bay đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ Oxyz được gắn như hình vẽ, trong đó gốc O là vị trí của trạm kiểm soát không lưu và $M(x; y; z)$ (km) biểu thị vị trí máy bay trên không trung. Tại thời điểm 8h máy bay đang ở vị trí $(50; 120; 4)$ và chuyển động với vận tốc $\vec{v} = (300; 400; 3)$ (km/h)



- Tại thời điểm 8h, khoảng cách giữa máy bay và trạm kiểm soát không lưu nói trên xấp xỉ 130 km (sai số không quá 1km).
- Tại thời điểm 9h độ cao của máy bay so với mặt đất là 8km.
- Tại thời điểm 10h, khoảng cách giữa máy bay và một tháp truyền hình F có tọa độ $(1250; 1020; 0)$ xấp xỉ 700km (sai số không quá 10km).
- Khi đạt độ cao 10km, máy bay đổi vận tốc mới là $\vec{v}_2 = (400; 300; -5)$ để hướng đến sân bay B . Tọa độ của máy bay khi vừa đáp xuống sân bay B là $(1450; 1520; 0)$.

CHƯƠNG

II

VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO



LÝ THUYẾT.

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTO, PHÉP TRỪ HAI VECTO, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z');$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z');$$

$$k\vec{a} = (kx; ky; kz) \text{ với } k \text{ là một số thực.}$$

Nhận xét: Vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số

$$\text{thực } k \text{ sao cho } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases} \text{ (Nếu } x'.y'.z' \neq 0 \text{ thì } \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'})$$

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:

$$\text{Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng } AB \text{ là } \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right);$$

$$\text{Toạ độ trọng tâm của tam giác } ABC \text{ là } \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$

Nhận xét:

$$- \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$

$$- |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$- \text{Nếu } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ thì } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

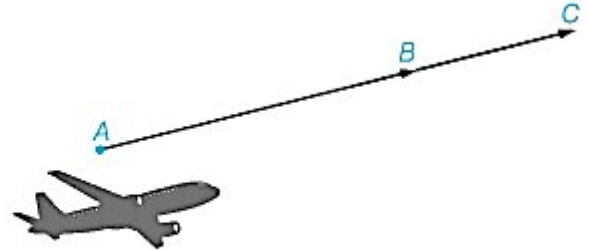
Chú ý: Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$

$$\text{thì } AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

III. VẬN DỤNG TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Ví dụ 5: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?



Hình 2.49

Lời giải

Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940 - 800}{2}; \frac{550 - 500}{2}; \frac{8 - 7}{2} \right) = (70; 25; 0,5).$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{BC} = (x - 940; y - 550; z - 8) \text{ nên } \begin{cases} x - 940 = 70 \\ y - 550 = 25 \\ z - 8 = 0,5. \end{cases}$$

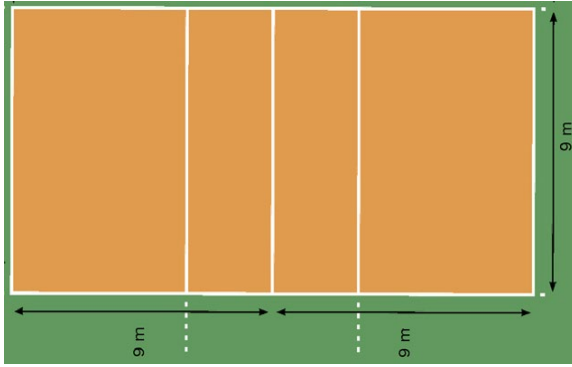
$$\text{Từ đó } \begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 8,5 \end{cases} \text{ và vì vậy } C(1010; 575; 8,5).$$

Vậy tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010; 575; 8,5)$.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Theo quy định của liên đoàn bóng chuyền quốc tế (FIVB), sân bóng chuyền có hình dạng chữ nhật. Kích thước tiêu chuẩn của sân bóng chuyền là $9m \times 18m$. Chiều cao của lưới bóng chuyền là $2,24m$ đối với nữ. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như hình vẽ thứ hai (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ đỡ căng lưới bóng chuyền. Hãy xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Lời giải

Gọi tọa độ điểm $A(x_A; y_A; z_A)$. Vì một nửa chiều dài của sân là $9m$ nên $x_A = 9$. Do chiều rộng của sân là $9m$ nên $y_B = 9$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A = 0$. Do đó tọa độ điểm A là $A(9; 9; 0)$.

Độ dài đoạn thẳng $AB = 2,24m$ nên tọa độ điểm B là $B(9; 9; 2,24)$.

Vậy ta có $\overrightarrow{AB} = (9 - 9; 9 - 9; 2,24 - 0)$, tức là $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 2,24)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đã phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(750; 450; 7)$ đến điểm $B(950; 550; 9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?

Lời giải

Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến C nên $AB = BC$.

Do đó $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} = (950 - 750; 550 - 450; 9 - 7) = (200; 100; 2)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC} = (x - 950; y - 550; z - 9)$ nên
$$\begin{cases} x - 950 = 200 \\ y - 550 = 100 \\ z - 9 = 2 \end{cases}$$

Từ đó:
$$\begin{cases} x = 1150 \\ y = 650 \\ z = 11 \end{cases}$$
 . Vậy $C(1150; 650; 11)$

Vậy tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(1150; 650; 11)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đã phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(700; 450; 7)$ đến điểm $B(900; 550; 9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau bao nhiêu phút, máy bay bay từ điểm A đến điểm $C(1000; 600; 10)$?

Lời giải:

Sau 15 phút.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (900 - 700; 550 - 450; 9 - 7) = (200; 100; 2)$.

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC} = (1000 - 900; 600 - 550; 10 - 9) = (100; 50; 1)$ nên $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

Do vận tốc của máy bay không đổi nên thời gian bay từ B đến C bằng một nửa thời gian bay từ A đến B.

sau 5 phút máy bay bay từ B đến điểm $C(1000; 600; 10)$.

Vậy sau 15 phút máy bay từ A đến C.

Câu 4: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(400; 50; 8)$ đến điểm $B(100; 450; 10)$ trong 10 phút. Sau đúng 5 phút tính từ lúc máy bay ở vị trí A thì máy bay ở vị trí có tổng hoành độ tung độ và cao độ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $T(x; y; z)$ là vị trí của máy bay tại thời điểm 5 phút sau khi xuất phát từ A

Ta có $\overrightarrow{AT} = (x - 400; y - 50; z - 8)$; $\overrightarrow{AB} = (-300; 400; 2)$

Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ A đến T nên $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x - 400; y - 50; z - 8) = \frac{1}{2}(-300; 400; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 400 = -150 \\ y - 50 = 200 \\ z - 8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 250 \\ y = 250 \\ z = 9 \end{cases}$$

Suy ra $x + y + z = 509$

Câu 5: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm A(800; 500; 7) đến điểm B trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là C(1010; 575; 10). Xác định tọa độ vị trí điểm B

Lời giải

Gọi B(x; y; z)

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến C gấp ba thời gian bay từ B đến C nên $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$

Do đó $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} = (1010 - x; 575 - y; 10 - z)$

Mặt khác $\overrightarrow{AC} = (210; 75; 3)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 3(1010 - x) = 210 \\ 3(575 - y) = 75 \\ 3(10 - z) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 940 \\ y = 550 \\ z = 11 \end{cases}$$

Vậy điểm B(940; 550; 11)

Câu 6: Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một drone giao hàng đang ở tọa độ $A(1; 0; 1)$ di chuyển đến địa điểm nhận hàng là $B(4; 4; 6)$. Mỗi đơn vị trên phần mềm bằng 1km ngoài thực tế. Biết tốc độ của drone là $80km/h$; giả sử rằng từ vị trí giao hàng và nhận hàng không gặp chướng ngại vật, sức cản gió không đáng kể để drone bay theo đường thẳng. Thời gian drone bay từ vị trí ban đầu đến địa điểm giao hàng mất bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng thập phân)?

Lời giải

Tính được $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2 + (6-1)^2} = 5\sqrt{2}$ (đơn vị trên phần mềm) khoảng cách ngoài thực tế sẽ là $5\sqrt{2} \text{ km}$.

Thời gian bay của drone là $\frac{5\sqrt{2}}{80}$ giờ, đổi sang bằng $\frac{5\sqrt{2}}{80} \cdot 60 = \frac{15\sqrt{2}}{4} \approx 5,3$ phút.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, (đơn vị đo: km), ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu Su-35 của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(300;150;7)$ đến điểm $N(800;550;13)$ trong 20 phút. Tính tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo nếu máy bay giữ nguyên vận tốc và hướng bay.

Lời giải

Ta có : $\overrightarrow{MN} = (500;400;6)$.

Giả sử sau 5 phút, vị trí máy bay ở điểm P thì $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MN} = \left(125;100;\frac{3}{2}\right)$.

Do đó, tọa độ điểm P là $\left(925;650;\frac{29}{2}\right)$.

Câu 8: Tính công(đơn vị N) sinh bởi lực $\vec{F}(6;8;-10)$ tạo bởi một drone giao hàng khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d}(100;200;200)$.



Lời giải

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{d}|} = \vec{F} \cdot \vec{d} = 6 \cdot 100 + 8 \cdot 200 + (-10) \cdot 200 = 200 \text{ (N)}$$

Câu 9: Một em nhỏ cân nặng 20 kg trượt trên cầu trượt dài 3 m . Biết rằng cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° . Cho biết công $A(\text{J})$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt biết gia tốc rơi tự do $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.



Lời giải

Ta có: $|\vec{P}| = P = m.g = 20.9,8 = 196(N)$.

$|\vec{d}| = |\vec{AC}| = AC = 3(m)$.

Cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là $\widehat{ACB} = 30^\circ$ nên $(\vec{P}, \vec{d}) = \widehat{CAB} = 60^\circ$

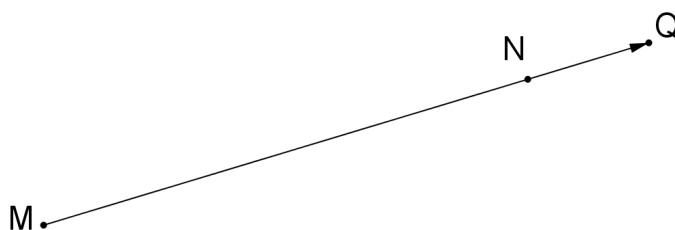
Công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt $3m$ là:

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 196.3 \cdot \cos 60^\circ = 294(J).$$

Câu 10: Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu X di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Tọa độ vị trí điểm $N(a;b;c)$, tính $S = a + b + 2c$.



Lời giải



Gọi $N(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 30 phút. $\vec{MQ} = (400; 200; 2)$

$$\vec{NQ} = (1400 - x; 800 - y; 16 - z)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\vec{MQ}$ và $\vec{NQ}$ cùng hướng.

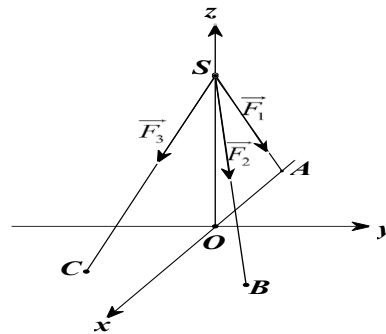
Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ

$$N \rightarrow Q \text{ nên } MQ = 4NQ$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 400 = 4(1400 - x) \\ 200 = 4(800 - y) \\ 2 = 4(16 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1300 \\ y = 750 \\ z = 15,5 \end{cases} \Rightarrow N(1300; 750; 15,5)$$

Tọa độ vị trí điểm N là $(1300; 750; 15,5)$

Câu 11: Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S(0; 0; 4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A(-2; 0; 0)$, $B(1; \sqrt{3}; 0)$, $C(1; -\sqrt{3}; 0)$. Biết rằng trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là $30N$ và được phân bố thành ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn bằng nhau như hình dưới. Tính tích vô hướng của $\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2}$.



Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{SA} = (-2; 0; -4)$; $\overrightarrow{SB} = (1; \sqrt{3}; -4)$; $\overrightarrow{SC} = (1; -\sqrt{3}; -4) \Rightarrow SA = SB = SC = \sqrt{20}$.

Lại có $\overrightarrow{AB} = (3; \sqrt{3}; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (3; -\sqrt{3}; 0)$; $\overrightarrow{BC} = (0; -2\sqrt{3}; 0) \Rightarrow AB = AC = BC = \sqrt{12}$. Dẫn đến hình chóp $S.ABC$ đều có đường cao là $SO = 4$, với $O(0; 0; 0)$ là trọng tâm tam giác ABC . Mặt khác,

$$\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{SA} = (-2k; 0; -4k), \quad \overrightarrow{F_2} = k\overrightarrow{SB} = (k; \sqrt{3}k; -4k),$$

$$\overrightarrow{F_3} = k\overrightarrow{SC} = (k; -\sqrt{3}k; -4k) \Rightarrow \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = (0; 0; -12k)$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{P} = (0; 0; -30) \text{ nên } -12k = -30 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}.$$

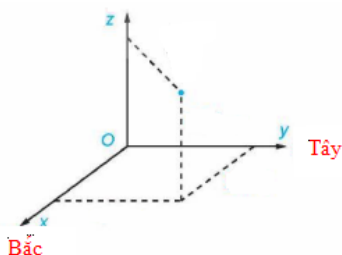
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{F_1} = (-5; 0; -10), \quad \overrightarrow{F_2} = \left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}; -10\right). \text{ Vậy, } \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} = \frac{175}{2}.$$

Câu 12: Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

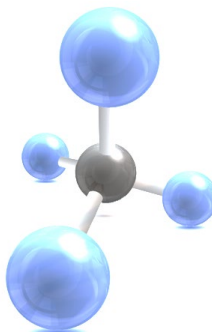


Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20;10;0,7)$.

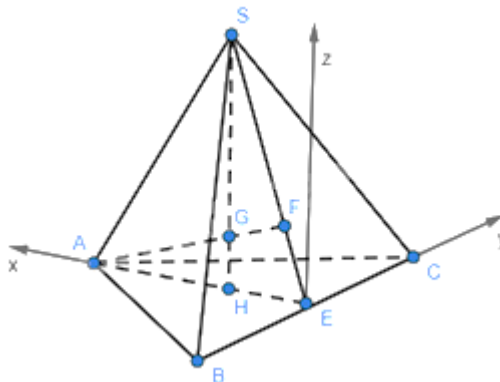
Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30;-25;1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là: $\sqrt{(20+30)^2 + (10+25)^2 + (0,7-1)^2} \approx 61(km)$

Câu 13: Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H-C-H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này.



Lời giải



Từ hình vẽ ta thấy góc liên kết là góc $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GS})$

Ta có: $AE \perp BC, SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AE \\ SH \perp BC \end{cases}$ nên ta có hệ trục tọa độ như hình với E trùng với gốc tọa độ O

Giả sử các cạnh của tứ diện có độ dài là a

$$\text{Ta có: } SE = AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$$

$$HE = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow H\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right)$$

$$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\text{Lại có: } \frac{FE}{SE} = \frac{HE}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow FH \parallel SA \text{ và } AF \text{ cắt } SH \text{ tại } G \text{ nên } \frac{GH}{GS} = \frac{GF}{GE} = \frac{FH}{SA} = \frac{HE}{AE} = \frac{1}{3}$$

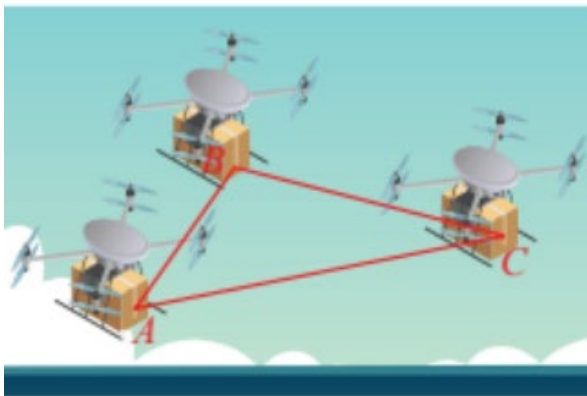
$$\Rightarrow GH = \frac{1}{4}SH = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12} \Rightarrow G\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{GA} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; -\frac{a\sqrt{6}}{12}\right) \Rightarrow GA = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\overrightarrow{GS} = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{4}\right) \Rightarrow GS = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Ta có: } \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GS}) = \frac{-\frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GS}) \approx 109,5^\circ$$

Câu 14: Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1; -3; 2)$, $B(m; m-2; 6)$, $C(m-2; m; 5)$, trong đó m là tham số, đơn vị đo độ dài tính bằng kilomet. Biết kho hàng đang ở tại điểm $I(1; 1; 0)$. Vì lý do nhiên liệu nên các drone không được di chuyển quá xa kho hàng, cụ thể là các drone không được cách kho hàng quá 100 km. Xác định giá trị của tham số m để các drone cách kho hàng không quá 100km.



Lời giải

Ta có $IA = 2\sqrt{5} < 100$

$$IB = \sqrt{(m-1)^2 + (m-3)^2 + 36}$$

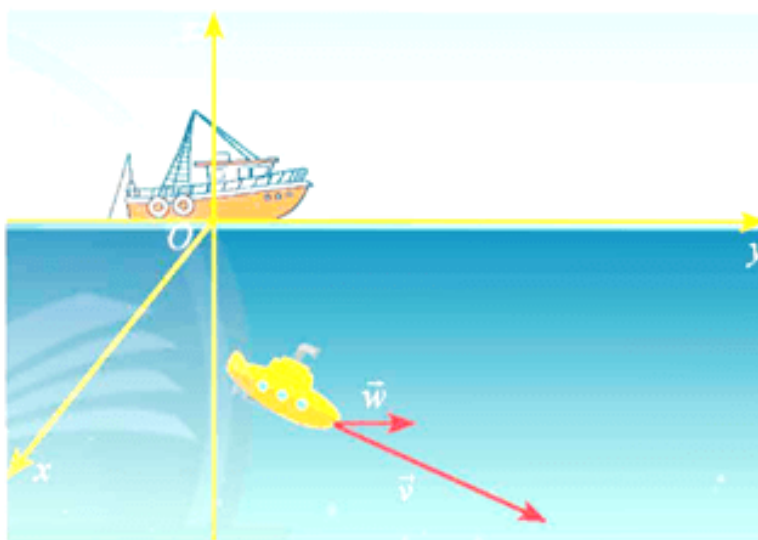
$$IC = \sqrt{(m-3)^2 + (m-1)^2 + 25}$$

Rõ ràng $IC < IB$ với mọi m , do vậy ta chỉ cần tìm m để B không xa kho hàng quá 100km. Tức là

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 + (m-3)^2 + 36 < 10000 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m - 9954 < 0$$

$$\Leftrightarrow -68,6 < m < 72,6$$

Câu 15: Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vector vận tốc của thiết bị khi biển đứng yên là $\vec{v} = (11; 7; -4)$ (đơn vị: km/h). Cho biết vector vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là $\vec{w} = (4; 2; 0)$ (đơn vị: km/h). Tính tốc độ của thiết bị trong điều kiện có dòng hải lưu, các yếu tố khác không đáng kể (đơn vị km/h, làm tròn đến hàng phần chục).



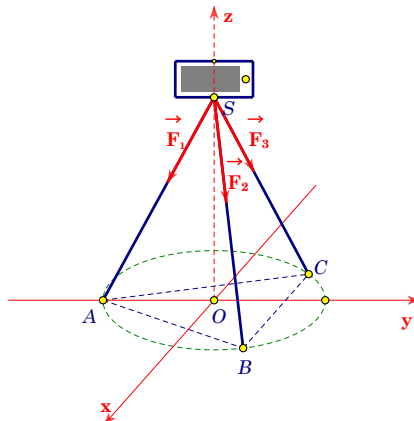
Lời giải

Ta có $\vec{v} + \vec{w} = (11+4; 7+2; -4+0) = (15; 9; -4)$ là vector vận tốc của thiết bị trong điều kiện có dòng hải lưu. Khi đó tốc độ của thiết bị trong điều kiện có dòng hải lưu là

$$|\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{15^2 + 9^2 + (-4)^2} = \sqrt{322} \approx 17,9 \text{ (km/h)}.$$

Câu 16: Một chiếc điện thoại iphone được đặt trên một giá đỡ có ba chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của ba chân lần lượt là $A(0; -6; 0)$, $B(3\sqrt{3}; 3; 0)$, $C(-3\sqrt{3}; 3; 0)$ (đơn vị cm).

Cho biết điện thoại có trọng lượng là 2 N và ba lực tác dụng lên giá đỡ được phân bố như hình vẽ là ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau. Biết tọa độ của lực $\vec{F}_1 = (a; b; c)$, khi đó $T = 2a + 5b + 6c$ bằng?



Lời giải

Theo giả thiết, ta có các điểm $S(0;0;20)$, $A(0;-6;0)$, $B(3\sqrt{3};3;0)$, $C(-3\sqrt{3};3;0)$

Suy ra $\vec{SA} = (0; -6; -20)$; $\vec{SB} = (3\sqrt{3}; 3; -20)$; $\vec{SC} = (-3\sqrt{3}; 3; -20)$.

Suy ra $SA = SB = SC = \sqrt{436}$ mà $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ sao cho

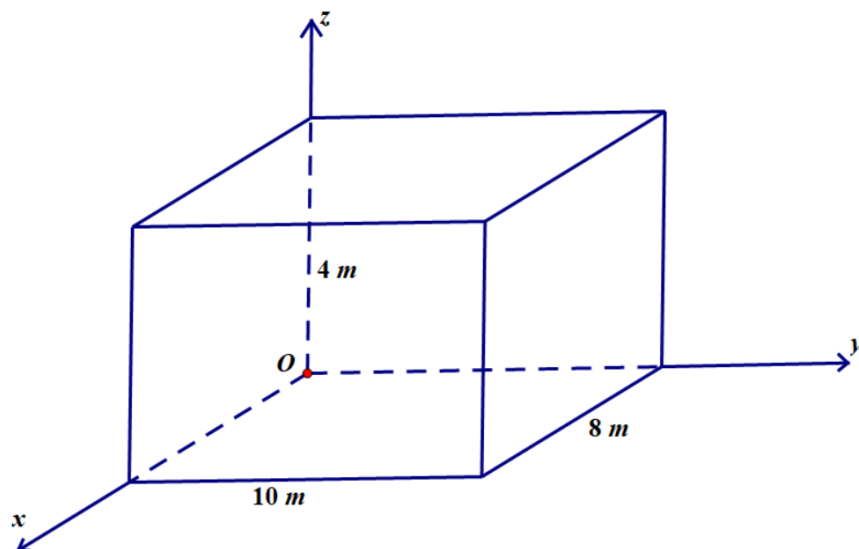
$$\begin{cases} \vec{F}_1 = k\vec{SA} = (0; -6k; -20k) \\ \vec{F}_2 = k\vec{SB} = (3\sqrt{3}k; 3k; -20k) \\ \vec{F}_3 = k\vec{SC} = (-3\sqrt{3}k; 3k; -20k) \end{cases}$$

Suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -60k)$. Gọi $\vec{F}$ là trọng lực tác dụng lên điện thoại $\Rightarrow \vec{F} = (0; 0; -2)$

Mặt khác, ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}$ suy ra $-60k = -2 \Rightarrow k = \frac{1}{30}$.

$$\text{Vậy } \vec{F}_1 = \left(0; -\frac{1}{5}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{5} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{T = 2a + 5b + 6c = 0 - 1 - 4 = -5}.$$

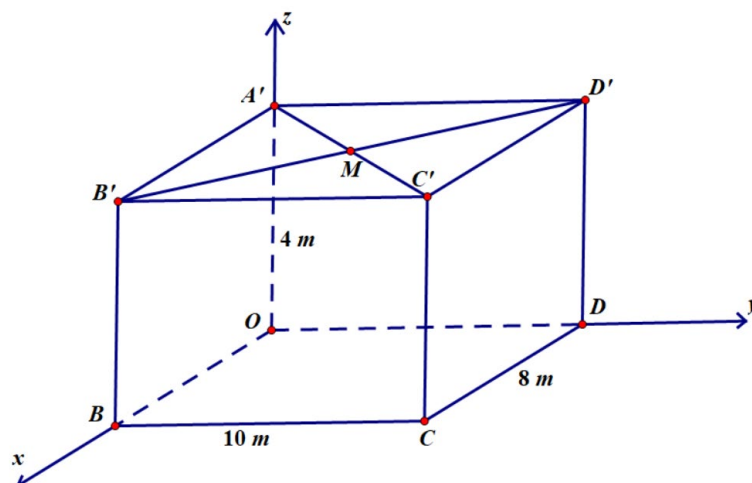
Câu 17: Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 8 m và chiều cao là 4 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình vẽ).



Tính khoảng cách từ điểm treo bóng đèn đến góc phòng học (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét.



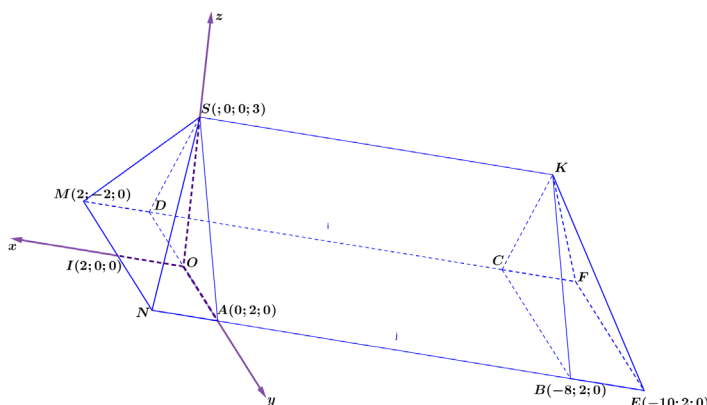
Phòng học thiết kế dạng hình hộp chữ nhật $OBCD.A'B'C'D'$ với $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo $A'C'$ và $B'D'$ nên M là trung điểm của $A'C'$ với $A'(0;0;4)$, $C'(8;10;4)$.

Vì đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học nên điểm treo bóng đèn trùng với điểm M .

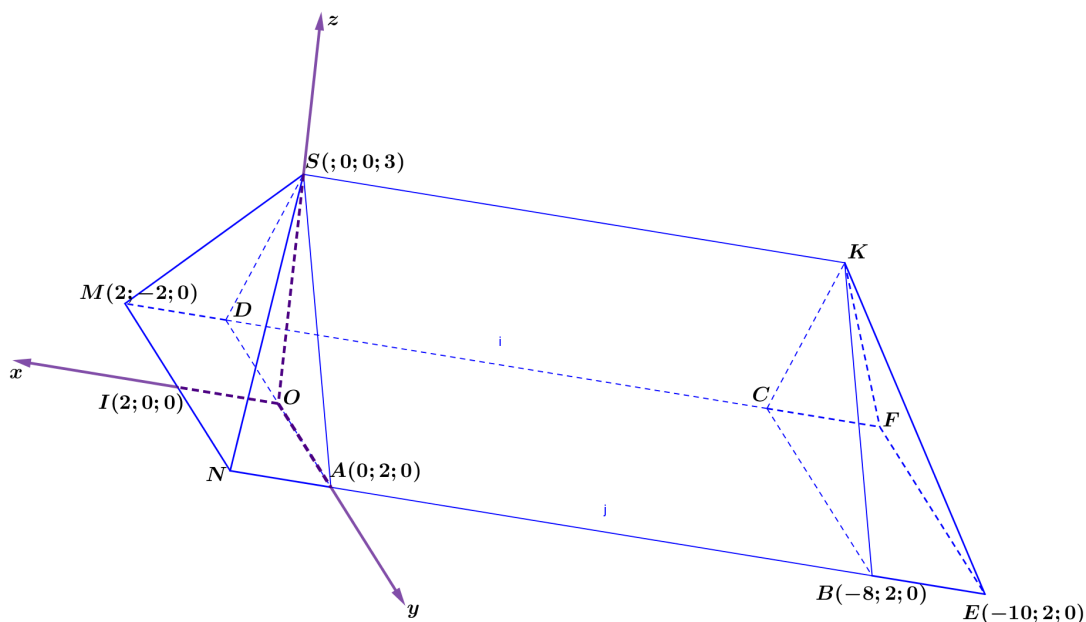
$$\text{Có } \begin{cases} x_M = \frac{x_{A'} + x_{C'}}{2} = 4 \\ y_M = \frac{y_{A'} + y_{C'}}{2} = 5 \\ z_M = \frac{z_{A'} + z_{C'}}{2} = 4 \end{cases} \text{ nên } M(4;5;4), \text{ khoảng cách từ điểm treo bóng đèn đến góc phòng học}$$

$$\text{là } OM = \sqrt{4^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{57} \approx 7,55.$$

Câu 18: Phần mái của một căn nhà có dạng là khối đa diện được mô tả và gắn trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tính thể tích khối đa diện của mái nhà.



Lời giải



Khối đa diện tạo ra mái nhà được tách thành 3 khối là 2 khối chóp có đáy là hình chữ nhật và khối lăng trụ đứng tam giác nên

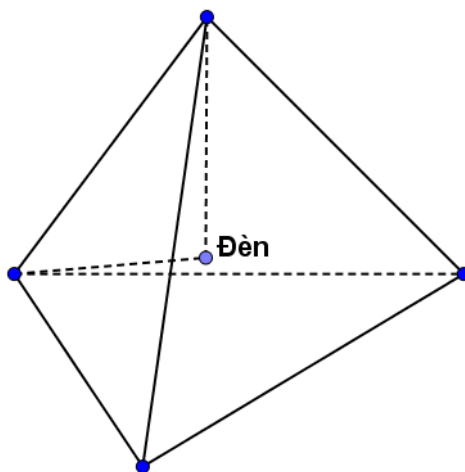
$$V = V_{S.ADMN} + V_{SAD.KBC} + V_{K.BCFE}$$

Mà $V_{S.ADMN} = V_{K.BCFE}$

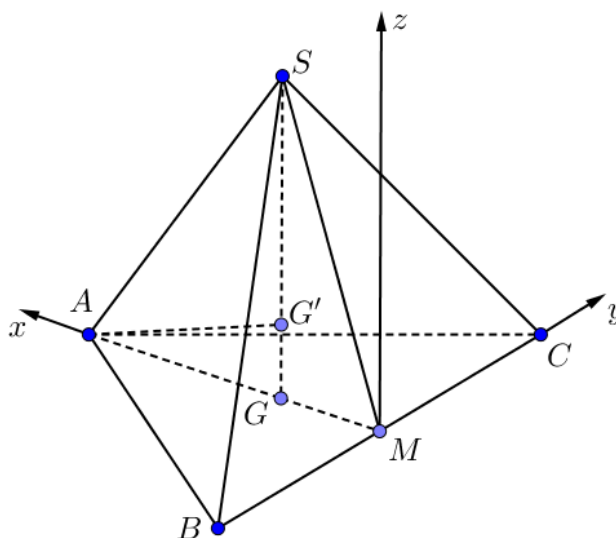
Theo hình vẽ hệ trục có $N(2; 2; 0)$ suy ra $\begin{cases} MN = 4 \\ AN = 2 \\ AB = 8 \end{cases}$

Khi đó, $V = 2V_{S.ADMN} + V_{SAD.KBC} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8 = 64$ (đvtt).

Câu 19: Một đồ chơi có dạng hình tứ diện đều làm bằng thủy tinh có cạnh bằng 10cm . Bên trong đặt một đèn nhỏ. Đèn đặt trên đường nối từ đỉnh của tứ diện xuống tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và cách đỉnh một khoảng là $\frac{5\sqrt{6}}{2}\text{cm}$. Đèn được nối bởi hai dây qua hai đỉnh của tứ diện như hình vẽ. Cường độ lực tổng hợp của hai dây tác dụng lên đèn là bao nhiêu?



Lời giải



Gọi tứ diện là $S.ABC$ và M, G, G' lần lượt là trung điểm của BC , trọng tâm của $\triangle ABC$ và vị trí đặt đền.

$S.ABC$ là tứ diện đều $\Rightarrow \triangle ABC$ đều nên G là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow S, G', G \text{ thẳng hàng và } SG' = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $M(0;0;0)$

$$\text{Có: } AM = 5\sqrt{3}, \quad MG = \frac{1}{3}AM = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \quad SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{10\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } S\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}; 0; \frac{10\sqrt{6}}{3}\right), \quad A(5\sqrt{3}; 0; 0), \quad B(0; -5; 0), \quad C(0; 5; 0)$$

$$G \text{ là trọng tâm của } \triangle ABC \Rightarrow G\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow SG' = \frac{3}{4}SG \Rightarrow \overrightarrow{SG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SG}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{G'} - x_S = \frac{3}{4}(x_G - x_S) \\ y_{G'} - y_S = \frac{3}{4}(y_G - y_S) \\ z_{G'} - z_S = \frac{3}{4}(z_G - z_S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{G'} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ y_{G'} = 0 \\ z_{G'} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \end{cases} \Rightarrow G' \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}; 0; \frac{5\sqrt{6}}{6} \right).$$

$$\Rightarrow G'A = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

$$\cos(\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{SG'}) = \frac{\overrightarrow{SG'} \cdot \overrightarrow{AG'}}{|\overrightarrow{SG'}| \cdot |\overrightarrow{AG'}|} = -\frac{1}{3}.$$

Gọi $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là lực tổng hợp và lực của hai dây tác dụng lên đèn

$$\text{Có } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{SG'}$$

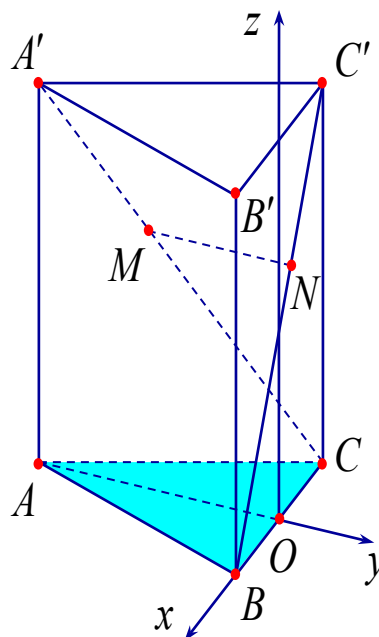
$$\Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{(\overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{SG'})^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{SG'^2 + AG'^2 + 2\overrightarrow{AG'} \cdot \overrightarrow{SG'}}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{SG'^2 + AG'^2 + 2AG' \cdot SG' \cdot \cos(\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{SG'})}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = 5\sqrt{2}.$$

Câu 20: Một kiến trúc sư muốn xây dựng 1 tòa nhà biểu tượng độc lạ cho thành phố. Trên bản thiết kế tòa nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều, có cạnh bên bằng cạnh đáy và dài 300 mét (tham khảo hình vẽ). Kiến trúc sư muốn xây dựng một cây cầu MN bắc xuyên tòa nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C'$, điểm cuối thuộc cạnh BC') và cây cầu này sẽ được dát vàng với đơn giá 5 tỷ đồng trên 1 mét dài. Vì vậy để đáp ứng bài toán kinh tế, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất (Gợi ý: đoạn thẳng nối hai đường ngắn nhất chính là đường vuông góc chung). Khi đó giá xây cây cầu này hết bao nhiêu tiền?



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (O là trung điểm của BC). Ta có: $A'(0; -150\sqrt{3}; 300)$, $B(150; 0; 0)$, $C(-150; 0; 0)$, $C'(-150; 0; 300)$, $\overrightarrow{CA'} = (150; -150\sqrt{3}; 300)$, $\overrightarrow{BC'} = (-300; 0; 300)$

Gọi m, n thỏa mãn $\begin{cases} \overrightarrow{CM} = m\overrightarrow{CA'} \\ \overrightarrow{BN} = n\overrightarrow{BC'} \end{cases}$ ta có $M(-150 + 150m; -150\sqrt{3}m; 300m)$,

$N(150 - 300n; 0; 300n)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-150m - 300n + 300; 150\sqrt{3}m; 300n - 300m)$.

Đường thẳng MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA'} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + n = -1 \\ -m + 4n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{5} \\ n = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (60; 60\sqrt{3}; 60) \Rightarrow MN = 60\sqrt{5}$$

Số tiền xây cầu là: $T = 60\sqrt{5} \cdot 5 \approx 671$ tỷ đồng.

Câu 21: Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (Hình 2) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?



- a) Radar ở vị trí có tọa độ $(0; 0; 0)$.
- b) Vị trí A có tọa độ $(300; 200; 10)$.
- c) Khoảng cách từ máy bay đến radar là khoảng 360,69 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- d) Radar của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A .

Lời giải

a) Theo giả thiết, radar ở vị trí có tọa độ $(0; 0; 0,08)$. Vậy a) **sai**.

b) Điểm $A(-300; -200; 10)$. Vậy b) **sai**.

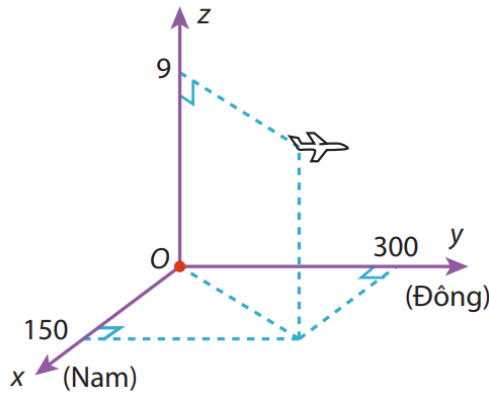
c) Khoảng cách từ máy bay đến radar là:

$$\sqrt{(-300 - 0)^2 + (-200 - 0)^2 + (10 - 0,08)^2} \approx 360,69 \text{ (km)}. \text{ Vậy c) đúng.}$$

d) Vì $360,69 < 500$ nên radar của trung tâm kiểm soát không lưu có phát hiện được máy

bay tại vị trí A . Vậy d) **sai**.

Câu 22: Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?



a) Máy bay đang ở độ cao $9km$.

b) Tọa độ của máy bay $(300;150;9)$.

c) Phi công để máy bay ở chế độ tự động với vận tốc theo hướng đông là $750km/h$, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc $10m/s$. Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì lúc 10h30phút máy bay ở tọa độ $(150;1086;9)$.

d) Sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại với vận tốc $800km/h$ với độ cao không đổi, biết lúc đó trời lặng gió thì lúc 11h máy bay ở tọa độ $(686;150;9)$.

Lời giải

a) Dựa vào hình vẽ ta thấy máy bay đang ở độ cao $9km$. Vậy a) **đúng**.

b) Máy bay ở tọa độ $(150;300;9)$. Vậy b) **sai**.

c) Vận tốc gió $10m/s = 36km/h$

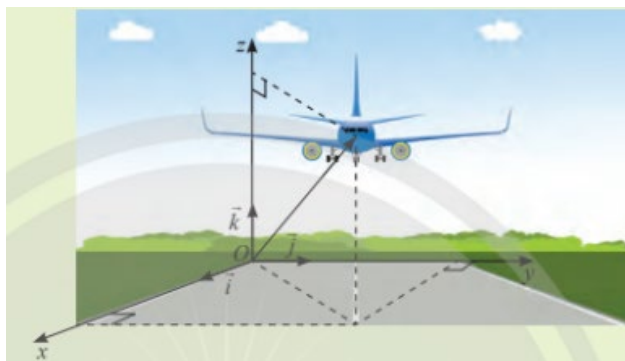
Quãng đường máy bay bay được là: $750 + 36 = 786km$

Do đó tọa độ của máy bay là: $(150;1086;9)$. Vậy c) **đúng**.

d) Quãng đường máy bay bay được là: $800 \cdot \frac{1}{2} = 400km$. Do đó tọa độ máy bay là $(150;686;9)$.

Vậy d) **sai**.

Câu 23: Một chiếc máy bay đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ Oxyz được gán như hình vẽ, trong đó gốc O là vị trí của trạm kiểm soát không lưu và $M(x; y; z)$ (km) biểu thị vị trí máy bay trên không trung. Tại thời điểm 8h máy bay đang ở vị trí $(50;120;4)$ và chuyển động với vận tốc $\vec{v} = (300;400;3)$ (km/h)



a) Tại thời điểm 8h, khoảng cách giữa máy bay và trạm kiểm soát không lưu nói trên xấp xỉ $130 km$ (sai số không quá $1km$).

- b) Tại thời điểm 9h độ cao của máy bay so với mặt đất là 8km.
 c) Tại thời điểm 10h, khoảng cách giữa máy bay và một tháp truyền hình F có tọa độ $(1250;1020;0)$ xấp xỉ 700km (sai số không quá 10km).
 d) Khi đạt độ cao 10km, máy bay đổi vận tốc mới là $\vec{v}_2 = (400;300;-5)$ để hướng đến sân bay B . Tọa độ của máy bay khi vừa đáp xuống sân bay B là $(1450;1520;0)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đúng	Sai	Sai	Đúng

a) $\overrightarrow{OM} = (50;120;4) \Rightarrow OM = \sqrt{50^2 + 120^2 + 4^2} \approx 130,06$

Vậy khoảng cách giữa máy bay và trạm không lưu tại thời điểm 8h xấp xỉ 130km.

b) Ta có $\overrightarrow{OM} + \vec{v} = (350;520;7)$

Tại thời điểm 9h, tọa độ của máy bay là $M_1(350;520;7)$

Vậy độ cao của máy bay so với mặt đất là 7km.

c) Ta có $\overrightarrow{OM} + 2\vec{v} = (650;920;10)$.

Vậy tại thời điểm 10h, tọa độ của máy bay là $M_2(650;920;10)$

Ta có: $\overrightarrow{M_2F} = (600;100;10) \Rightarrow M_2F = \sqrt{600^2 + 100^2 + 10^2} \approx 608,36$

Vậy khoảng cách giữa máy bay và tháp truyền hình F xấp xỉ 600km.

d) Từ độ cao 10km, với tốc độ hạ độ cao là 5km/h thì máy bay cần 2h để đáp xuống đất.

Ta có: $\overrightarrow{OM_2} + 2\vec{v}_2 = (1450;1520;0)$.

Vậy tọa độ của máy bay khi đáp xuống là $M_3(1450;1520;0)$