TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP BIẾT GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^0$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60^0. Thể tích của khối đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

CÁCH 1: Xác định góc giữa hai mặt phẳng.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Tính thể tích khối chóp , biết góc giữa hai mặt phẳng..

Phương pháp:

Tìm đường cao của hình và khai thác được giả thiết góc của đề bài

2. Hướng giải:

B1: *Tìm đường cao của hình :* học sinh phải tìm đường cao bằng cách suy ra từ các quan hệ vuông góc giữa đường với đường để chứng minh được đường vuông góc với mặt, hay phục dựng hình ẩn để xác định đường cao.

B2: ● Để *khai thác được giả thiết góc* ta thường làm :

+ Xác định được góc. Trong quá trình xác định góc phải tránh bẫy khi đưa về góc giữa hai đường thẳng cắt nhau nó là góc không tù.

+ Cần chọn ẩn (Là chiều cao hay cạnh đáy nếu giả thiết chưa có) sau đó sử dụng giả thiết góc để tìm ẩn.

● Có thể sử dụng nhiều phương pháp khác ngoài hai cách truyền thống để tính góc giữa hai mặt bên.

Phương pháp khoảng cách : giả sử φ là góc giữa hai mặt bên (α) và (β)

$$\sin\varphi = \frac{d(M,(\alpha))}{d(M,d)} \text{ ở đây } d = (\alpha)\cap(\beta), M \in (\beta)$$

Phương pháp diện tích hai mặt bên : giả sử φ là góc giữa hai mặt bên (ABC) và (ABD)

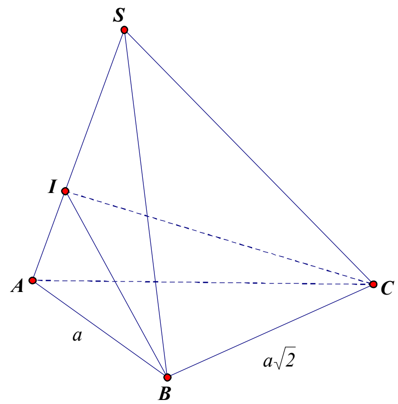
$$V_{ABCD} = \frac{2S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle ABD}}{3AB}\cdot\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{3.V_{ABCD}\cdot AB}{2S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle ABD}}$$

Công thức đa giác chiếu : $\cos\varphi = \frac{S'}{S}$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D



Hai tam giác vuông SAB và SAC bằng nhau chung cạnh huyền SA.

Kẻ BI vuông góc với SA suy ra CI cũng vuông góc với SA và $IB = IC$.

$SA \perp IC, SA \perp IB \Rightarrow SA \perp (IBC)$ tại I.

$$V_{S.ABC} = V_{A.IBC} + V_{S.IBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}AI + \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}SI = \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}(AI + SI) = \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}SA.$$

$((SAB),(SAC)) = (IB, IC) \Rightarrow (IB, IC) = 60^0 \Rightarrow \widehat{BIC} = 60^0$ hoặc $\widehat{BIC} = 120^0$.

Ta có $IC = IB < AB = a$ mà $BC = a\sqrt{2}$ nên tam giác IBC không thể đều suy ra $\widehat{BIC} = 120^0$.

Trong tam giác IBC đặt $IB = IC = x(x > 0)$ có:

$$\cos 120^0 = \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2IB.IC} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{2x^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2x^2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow IB = IC = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác ABI vuông tại I có: $AI = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SAB vuông tại B đường cao BI có: $AB^2 = IA.SA \Rightarrow SA = \frac{AB^2}{IA} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} == \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}SA = \frac{1}{3}\frac{1}{2}IB.IC.SA\sin\widehat{BIC} = \frac{1}{6}\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 a\sqrt{3}\sin 120^0 = \frac{a^3}{6}$.

CÁCH 2: Xác định đường cao của hình chóp.

Phân tích hướng dẫn giải

1.Dạng toán: Đây là dạng toán tính thể tích khối chóp có lồng ghép góc giữa hai mặt phẳng.

Phương pháp

Sử dụng công thức tính thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}S.h$.

2. Hướng giải:

B1: Gọi H là chân đường cao kẻ từ S. Khi đó tứ giác $ABHC$ là hình vuông.

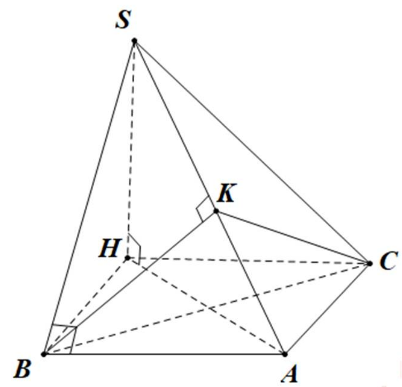
B2: Xác định góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) rồi từ đó tính độ dài đường cao SH.

B3: Áp dụng công thức tính thể tích khối chóp.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S trên phẳng $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có $\left.\begin{matrix} SH \perp AB \\ SB \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SDH) \Rightarrow AB \perp BH$. Chứng minh tương tự $AC \perp HC$.

Lại có $AB = AC$.

$\Rightarrow ABHC$ là hình vuông.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên SA. Khi đó $CK \perp SA$ ($\Delta SBA = \Delta SCA$).

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng góc giữa hai đường BK và CK.

Đặt $SB = x$, khi đó: $BK^2 = CK^2 = \dfrac{SC^2.CA^2}{SC^2 + CA^2} = \dfrac{a^2x^2}{a^2+x^2} = \dfrac{a^2.x^2}{a^2+x^2}$

và $\left|\cos\widehat{BKC}\right| = \cos 60^0 \Leftrightarrow \left|\dfrac{BK^2 + CK^2 - BC^2}{2BK.CK}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|2.BK^2 - BC^2\right| = BK^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 2.BK^2 - BC^2 = BK^2 \\ 2.BK^2 - BC^2 = -BK^2 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} BK^2 = BC^2 \\ 3.BK^2 = BC^2 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \dfrac{a^2.x^2}{a^2+x^2} = 2a^2 \\ 3.\dfrac{a^2.x^2}{a^2+x^2} = 2a^2 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x^2 = -a^2 (l) \\ x = a\sqrt{2} \end{matrix}\right.$$

Với $x = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = a$

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.AB.AC.HS = \dfrac{a^3}{6}$.

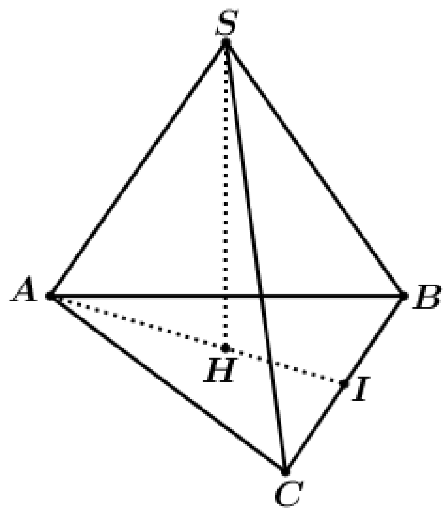
Bài tập tương tự:

Câu 49.1: *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, với $AB > \sqrt{5}$, $BC = 2$. Các cạnh bên đều bằng $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$ và cùng tạo với mặt đáy góc $60°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ bằng.*

A. $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $SH\perp(ABC)$, $H\in(ABC)$.

Ta có $\begin{cases} HA^2=SA^2-SH^2\\ HB^2=SB^2-SH^2\\ HC^2=SC^2-SC^2\end{cases}$.

Mà $SA=SB=SC\Rightarrow HA=HB=HC$. Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đặt $AB=AC=x>\sqrt{5}$.

$\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{AB\cdot BC\cdot CA}{4HA}=\dfrac{2x^2}{4HA}=\dfrac{x^2}{2HA}$ (1).

Từ $SH\perp(ABC)\Rightarrow \widehat{SA;(ABC))}=\widehat{SAH}\Rightarrow \widehat{SAH}=60°$.

$\Rightarrow\begin{cases}\sin 60°=\dfrac{SH}{SA}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}SA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{9\sqrt{2}}{4}=\dfrac{9\sqrt{6}}{8}\\ \cos 60°=\dfrac{HA}{SA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow HA=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9\sqrt{2}}{4}=\dfrac{9\sqrt{2}}{8}\end{cases}$.

Gọi $I=AH\cap BC$ mà $AB=AC\Rightarrow IB=IC=\dfrac{BC}{2}=1$.

$\Rightarrow AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=\sqrt{x^2-1}$.

$\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AI=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^2-1}$.

Thay vào (1) ta được $\sqrt{x^2-1}=\dfrac{x^2}{9}=\dfrac{2x^2\sqrt{2}}{9}\Rightarrow 8x^4=81\left(x^2-1\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=9\\ x^2=\dfrac{9}{8}\end{array}\right.$.

Kết hợp với $x > \sqrt{5}$ ta được $x = 3$.

Suy ra $S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{2}$.

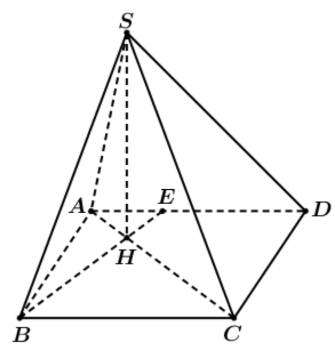
Vậy $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{9\sqrt{6}}{8}.2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 49.2: *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. E là điểm trên cạnh AD sao cho BE vuông góc với AC tại H và $AB > AE$, cạnh SH vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $\widehat{BSH} = 45°$. Biết $AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $BE = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng*

A. $\frac{16a^3}{3\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{32a^3\sqrt{5}}{15}$. **C.** $\frac{32a^3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = x$, ΔABE vuông tại $A \Rightarrow AB^2 + AE^2 = BE^2$.

$\Rightarrow AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - x^2} = \sqrt{5a^2 - x^2}$.

Xét ΔABE vuông tại A, đường cao AH có

$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{5a^2 - x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{4a^2}$

$\Leftrightarrow x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = 2a \end{array}\right.$.

Loại $x = a$ và $AE = 2a > AB = a$.

Suy ra $AB = 2a \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{4a}{\sqrt{5}} \Rightarrow SH = \frac{BH}{\tan \widehat{BSH}} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$.

Xét ΔABC vuông tại B, đường cao $BH \Rightarrow \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{BH^2} \Rightarrow BC = \frac{AB.BH}{\sqrt{AB^2 - BH^2}} = 4a$.

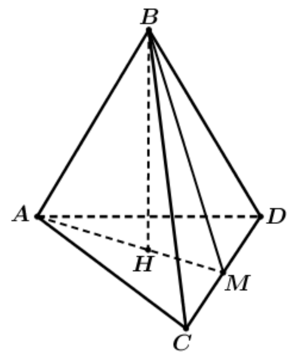
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{4a}{\sqrt{5}}.2a.4a = \frac{32a^3\sqrt{5}}{15}$.

Câu 49.3: *Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$, khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng*

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của CD.

Xét ΔACD cân tại A và ΔBCD cân tại B nên $\begin{cases} AM \perp CD \\ BM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM)$

$\Rightarrow \left(\widehat{(ACD),(BCD)}\right) = \widehat{AMB}$.

Kẻ BH vuông góc với AM tại $H \Rightarrow BH \perp AM$.

Mà $CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp BH \Rightarrow BH \perp (ACD)$.

Suy ra $V_{ABCD} = \frac{1}{2} BH.S_{\Delta ACD}$ với $BH = d\left(B,(ACD)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow S_{\Delta ACD} = \frac{3V}{BH} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}$.

Đặt $CD = 2x$.

Suy ra $AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{2a^2 - x^2} \Rightarrow S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AM.CD = x\sqrt{2a^2 - x^2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow CD = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác BHM vuông tại H có $\sin \widehat{BMH} = \frac{BH}{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \widehat{AMB}$

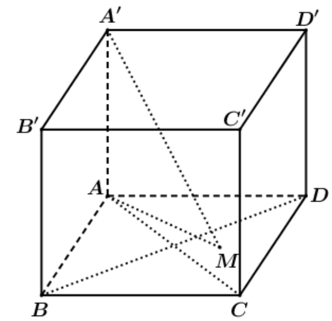
$\Rightarrow \widehat{AMB} = 45° \Rightarrow \left(\widehat{(ACD),(BCD)}\right) = 45°$.

Câu 49.4: *Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình thoi, góc $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi M là điểm thuộc miền trong của hình thoi $ABCD$, biết $A'M$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$ và $A'M = 4$. Độ dài cạnh AB bằng bao nhiêu nếu thể tích khối lăng trụ bằng 12 ?*

A. $AB = 2$. **B.** $AB = 2\sqrt{3}$. **C.** $AB = 4$. **D.** $AB = 4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $AB = x,\ \widehat{BAD} = 60° \Rightarrow \begin{cases} BD = x \\ AC = x\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AM$ là hình chiếu của $A'M$ trên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \left(\widehat{A'M, (ABCD)}\right) = \left(\widehat{A'M, AM}\right) = \widehat{A'MA} = 60°$.

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại A, có $\sin \widehat{A'MA} = \dfrac{AA'}{A'M} \Rightarrow AA' = 2\sqrt{3}$.

Ta lại có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 12 \Leftrightarrow AA'.S_{ABCD} = 12 \Leftrightarrow S_{ABCD} = 2\sqrt{3} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow AB = 2$.

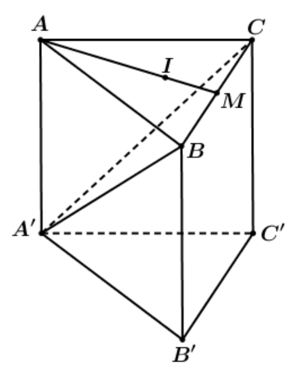
Vậy $AB = 2$.

Câu 49.5: *Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng 1, khoảng cách từ tâm của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{1}{6}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng*

A. $\dfrac{3}{16}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{12}}{16}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm tam giác ABC, M là trung điểm của AB.

$\Rightarrow \dfrac{d\left(I, (A'BC)\right)}{d\left(A, (A'BC)\right)} = \dfrac{IM}{AM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow d\left(A, (A'BC)\right) = 3.\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Xét tứ diện $A'.ABC$ có $A'A \perp (ABC)$. Kẻ $AH \perp A'M$ (1).

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ A'M \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) ta có $AH \perp (A'BC) \Rightarrow AH = d(A, (A'BC)) = \frac{1}{2}$.

Xét $\Delta A'AM$ vuông: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow A'A = \frac{AM.AH}{\sqrt{AM^2 - AH^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

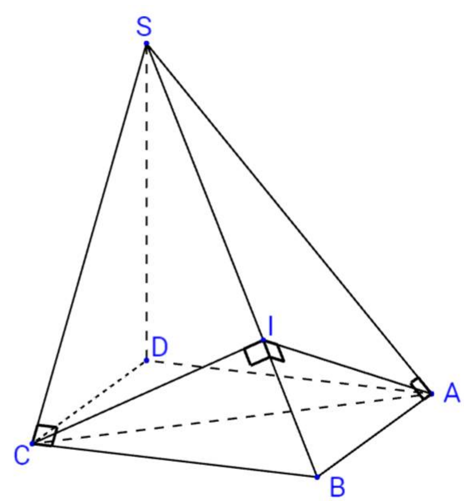
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{6}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 49.6: *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = 5a$; $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SBA) bằng α với $\cos\alpha = \frac{9}{16}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng*

A. $\frac{50a^3}{3}$. **B.** $\frac{125\sqrt{7}a^3}{9}$. **C.** $\frac{125\sqrt{7}a^3}{18}$. **D.** $\frac{50a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có hai tam giác vuông SAB và SBC bằng nhau và chung cạnh huyền SB.
Kẻ $AI \perp SB \Rightarrow CI \perp SB$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC) là góc giữa hai đường thẳng AI và $CI \Rightarrow (AI;CI) = \alpha$.

Do $\widehat{CBA} = 90^\circ \Rightarrow 180^\circ > \widehat{AIC} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIC} = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \cos\widehat{AIC} = -\frac{9}{16}$

Có $AC = 5\sqrt{2}a$, ΔAIC cân tại I, nên có :

$$\frac{2AI^2 - AC^2}{2AI^2} = \cos\widehat{AIC} \Leftrightarrow \frac{2AI^2 - AC^2}{2AI^2} = -\frac{9}{16} \Leftrightarrow AI^2 = 16a^2 \Rightarrow AI = 4a$$

$$\Rightarrow BI = 3a \Rightarrow SI = \frac{AI^2}{IB} = \frac{16}{3}a \Rightarrow SB = \frac{25a}{3}.$$

Cách 1 :

Dựng $SD \perp (ABC)$ tại D. Ta có: $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp AD$. Tương tự $BC \perp CD$

Nên tứ giác $ABCD$ là vuông cạnh $5a$ $\Rightarrow BD = 5\sqrt{2}a$ $\Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \frac{5\sqrt{7}}{3}a$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SD.\frac{1}{2}BA^2 = \frac{1}{3}.\frac{5\sqrt{7}}{3}.\frac{1}{2}.25a^3 = \frac{125\sqrt{7}a^3}{18}$.

Cách 2: $V_{S.ABC} = V_{S.ACI} + V_{B.ACI} = \frac{1}{3}SI.S_{ACI} + \frac{1}{3}BI.S_{ACI} = \frac{1}{3}SB.S_{ACI}$

$\triangle AIC$ cân tại I, nên $S_{ACI} = \frac{1}{2}AI^2\sin\alpha = \frac{1}{2}.16a^2.\frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{5\sqrt{7}a^2}{2}$.

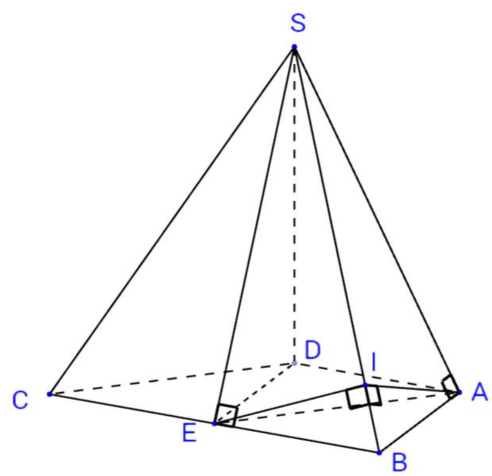
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{25a}{3}.\frac{5\sqrt{7}a^2}{2} = \frac{125\sqrt{7}a^3}{18}$.

Câu 49.7: *Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = 2BA = 4a$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = 90°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SBA) bằng $60°$ và $SC = SB$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng*

A. $\frac{32a^3}{3}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{16a^3}{3}$. **D.** $\frac{16a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác SBC cân cạnh đáy $BC = 4a$. Gọi E là trung điểm BC thì ta có $\triangle SEB$ vuông tại $E, BE = 2a = BA$. Đưa về bài toán gốc với chóp $S.ABE$.

Hai tam giác vuông SAB, SEB bằng nhau vì chung cạnh huyền SB, $AB = EB = \frac{1}{2}BC = 2a$.

Kẻ $AI \perp SB \Rightarrow EI \perp SB$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC) góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBE) là góc giữa hai đường thẳng AI và $EI \Rightarrow (AI;EI) = 60°$.

Do $\widehat{CBA} = 90° \Rightarrow 180° > \widehat{AIE} > 90° \Rightarrow \widehat{AIE} = 120° \Rightarrow \cos\widehat{AIE} = -\frac{1}{2}$

Có $AE = 2\sqrt{2}a$, $\triangle AIE$ cân tại I, nên có :

$$\frac{2AI^2 - AE^2}{2AI^2} = \cos\widehat{AIC} \Leftrightarrow \frac{2AI^2 - AE^2}{2AI^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{8a^2}{3} \Rightarrow AI = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a.$$

$\Rightarrow BI = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SI = \dfrac{AI^2}{IB} = \dfrac{4a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SB = \dfrac{6a}{\sqrt{3}}$.

Cách 1 :

Dựng $SD \perp (ABC)$ tại D. Ta có: $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp AD$. Tương tự $BE \perp ED$

Nên tứ giác $ABED$ là hình vuông cạnh $2a$.

$\Rightarrow BD = 2\sqrt{2}a \Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = 2a$.

Thể tích. $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SD \cdot \dfrac{1}{2}BC \cdot BA = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot 4a^2 = \dfrac{8a^3}{3}$

Cách 2 : $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SB \cdot 2S_{AEI}$

$S_{AEI} = \dfrac{1}{2}AI^2 \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{8a^2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{3}$

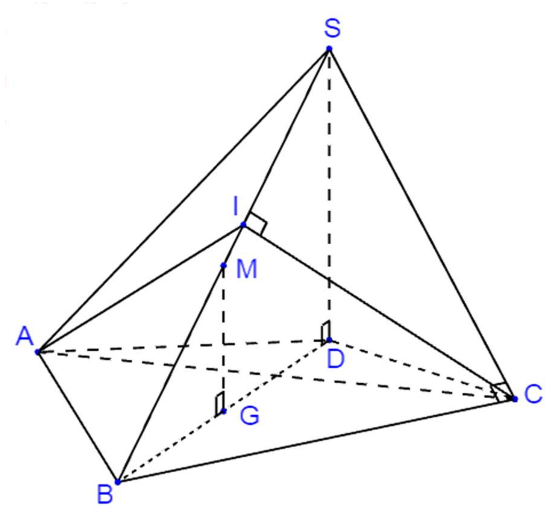
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6a}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{4\sqrt{3}a^2}{3} = \dfrac{8a^3}{3}$

Câu 49.8: *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng 60^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng*

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của SB, và G là trọng tâm tam giác đều ABC .

Theo giả thiết $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ \Rightarrow MS = MB = MA = MC \Rightarrow M$ thuộc trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow MG \perp (ABC)$.

Gọi D là điểm đối xứng với G qua cạnh AC thì $\Rightarrow SD \perp (ABC)$.

Từ giả thiết suy ra hai tam giác vuông bằng nhau SAB và SCB .

Do đó từ A kẻ $AI \perp SB, I \in SB$ thì $CI \perp SB$

Nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng góc $(AI, CI) = 60^\circ$.

Do $\widehat{ABC}=60^\circ \Rightarrow \widehat{AIC}=120^\circ \Rightarrow \dfrac{2AI^2-AC^2}{2AI^2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow AI=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow BI=\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}\Rightarrow SB=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Ta có $BD=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}a\Rightarrow SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{2}-\dfrac{4a^2}{3}}=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$

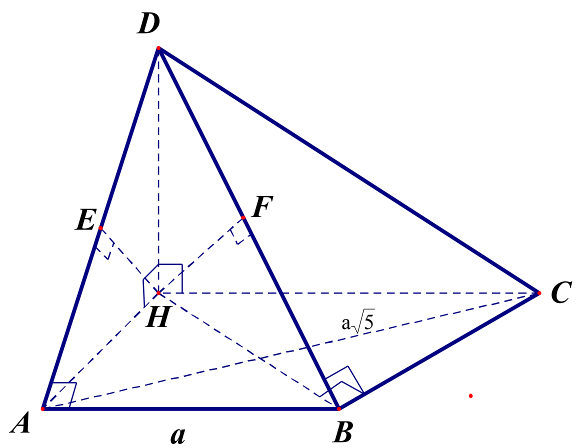
Thể tích $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SD\cdot S_{ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

Câu 49.9: *Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90^\circ; AB=a; AC=a\sqrt{5}; \widehat{ABC}=135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABD),(BCD)$ bằng 30°. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng*

A. $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $DH\perp(ABC)$.

Ta có $\begin{cases}BA\perp DA\\BA\perp DH\end{cases}\Rightarrow BA\perp AH$. Tương tự $\begin{cases}BC\perp DB\\BC\perp DH\end{cases}\Rightarrow BC\perp BH$.

Tam giác AHB có $AB=a,\widehat{ABH}=45^\circ\Rightarrow\Delta HAB$ vuông cân tại $A\Rightarrow AH=AB=a$, $HB=a\sqrt{2}$

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC=a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot BA\cdot BC\cdot\sin\widehat{CBA}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases}HE\perp DA\\HF\perp DB\end{cases}\Rightarrow HE\perp(DAB)$ và $HF\perp(DBC)$.

Suy ra $((DBA),(DBC))=\widehat{(HE,HF)}=\widehat{EHF}$ và tam giác HEF vuông tại E.

Đặt $DH = x$, khi đó $HE = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}, HF = \dfrac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$.

Suy ra: $\cos\widehat{EHF} = \dfrac{HE}{HF} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2a^2}}{\sqrt{2x^2 + 2a^2}} \Rightarrow x = a$.

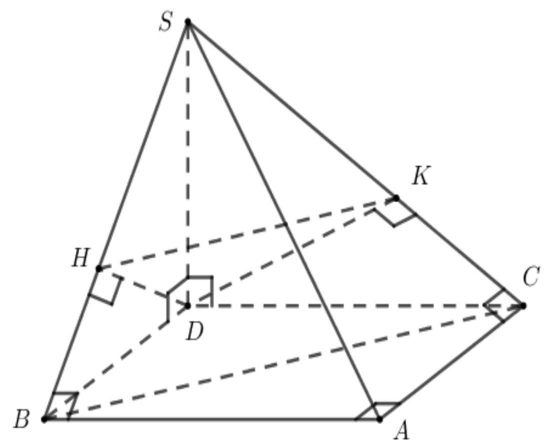
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^3}{6}$.

Câu 49.10: *Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = \sqrt{2}a, AC = a, BC = \sqrt{3}a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$ và hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) tạo với nhau một góc α sao cho $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng*

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết : $AB = \sqrt{2}a, AC = a, BC = \sqrt{3}a \Rightarrow BC^2 = 3a^2 = 2a^2 + a^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

Dựng $SD \perp (ABC)$. Dễ chứng minh được $ABDC$ là hình chữa nhật .

$DB = AC = a, DC = AB = \sqrt{2}a$. Gọi $SD = h$.

Áp dụng công thức tính nhanh : $\dfrac{DB}{SB}.\dfrac{DC}{SC} = \cos\alpha$.

Chọn $a = 1$: $\dfrac{1}{\sqrt{h^2+1}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{h^2+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow h^4 + 3h^2 - 4 = 0 \Rightarrow h^2 = 1 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow h = SD = 1$

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.SD.\dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

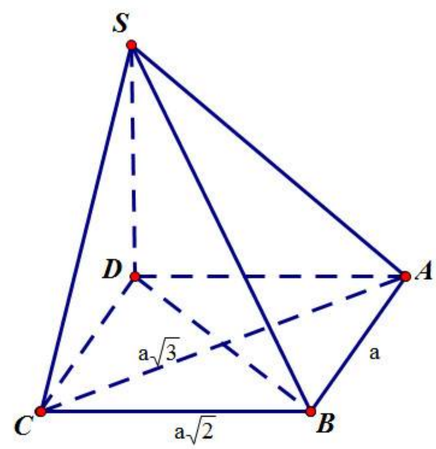
Vì chọn $a = 1$, theo đề bài ta chọn được $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Câu 49.11: *Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90°$. Biết sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng*

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



- Dựng $SD \perp (ABC)$ tại D. Ta có: $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp AD$.

Và: $\begin{cases} BC \perp SD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp CD \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DA = BC = a\sqrt{2}$, $DC = AB = a$.

- Sử dụng công thức $\sin(SB,(SAC)) = \frac{d(B,(SAC))}{SB}$.

$\Rightarrow \frac{\sqrt{11}}{11} = \frac{d(B;(SAC))}{SB} = \frac{d(D;(SAC))}{SB} \Rightarrow \frac{1}{d^2(D;(SAC))} = \frac{11}{SB^2}$ (1).

- Lại có:

$\frac{1}{d^2(D;(SAC))} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{SB^2 - BD^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{SB^2 - 3a^2} + \frac{3}{2a^2}$ (2).

- Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{11}{SB^2} = \frac{1}{SB^2 - 3a^2} + \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} SB^2 = 6a^2 \\ SB^2 = \frac{11}{3}a^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} SB = a\sqrt{6} \\ SB = a\sqrt{\frac{11}{3}} \end{array}\right.$

Theo giả thiết $SB > 2a \Rightarrow SB = a\sqrt{6} \Rightarrow SD = a\sqrt{3}$.

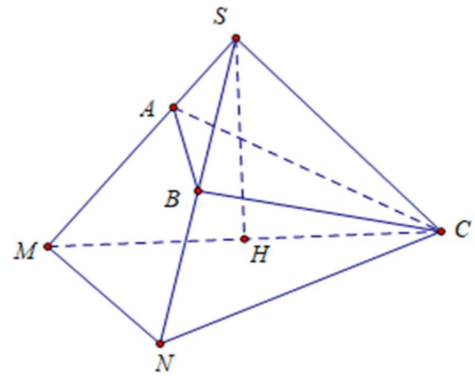
Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SD.\frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 49.12: *Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 4, SB = 6, SC = 12$ và $\widehat{ASB} = 60°, \widehat{BSC} = 90°$ và $\widehat{CSA} = 120°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng*

A. $36\sqrt{3}$. **B.** $36\sqrt{2}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $24\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



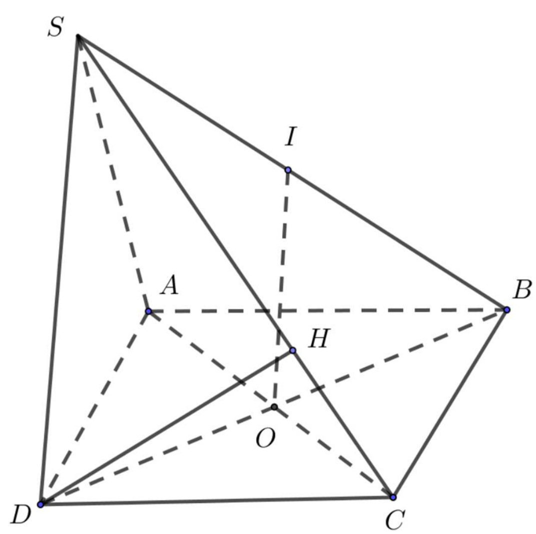
Trên tia SA, SB lần lượt lấy cá điểm M, N sao cho $SM = SN = 12$. Khi đó ta có:
Tam giác SMN đều $\Rightarrow MN = 12$.
Tam giác SNC vuông tại S nên $CN = SC\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.
Tam giác SMC cân tại S có $MC = \sqrt{SC^2 + SM^2 - 2SC.SM.\cos\widehat{CSM}} = 12\sqrt{3}$.
Từ đó suy ra $MC^2 = MN^2 + CN^2 \Rightarrow$ tam giác CMN vuông tại N.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (CMN).
Vì $SC = SM = SN = 12$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN
$\Rightarrow H$ là trung điểm của MC $\Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = 6$.
$S_{CMN} = \frac{1}{2}MN.NC = 72\sqrt{2} \Rightarrow V_{S.CMN} = \frac{1}{3}.SH.S_{CMN} = 144\sqrt{2}$.
Mặt khác, ta có $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNC}} = \frac{SA}{SM}.\frac{SB}{SN}.\frac{SC}{SC} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{6}V_{S.MNC} = 24\sqrt{2}$.

Câu 49.13: *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$, góc giữa AB và (SBC) bằng $60°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình vuông $ABCD$ tâm O. Gọi I là trung điểm SB.

Do $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$ nên hình chóp $S.ABC$ nội tiếp mặt cầu tâm I đường kính SB.

Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow OI$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Suy ra $OI\perp(ABC)\Rightarrow SD\perp(ABC)$

Mà $(AB,(SBC))=(DC,(SBC))=(CD,CS)=\widehat{DCS}=60^\circ\Rightarrow SD=CD.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.

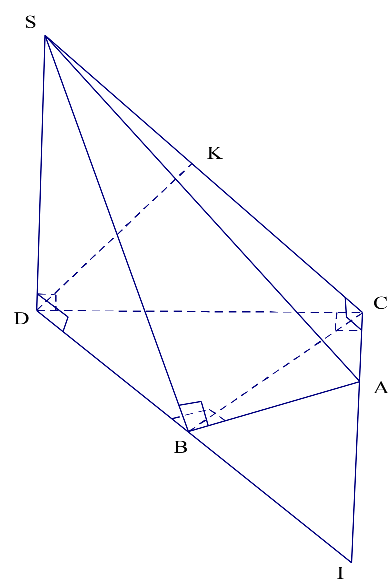
Từ đây ta suy ra: $V=\frac{1}{3}.SD.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 49.14: *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=a$, $\widehat{BAC}=120°$, $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90°$. Gọi φ là góc giữa SB và (SAC) thỏa mãn $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{8}$, khoảng cách từ S đến mặt đáy nhỏ hơn $2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng*

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Lời giải

Chọn C



+ Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên đáy (ABC), đặt $SD=x\,(0<x<2a)$.

Ta có $\begin{cases}AC\perp SC\\AC\perp SD\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SDC)\Rightarrow AC\perp DC$. Tương tự ta cũng có $AB\perp DB$.

+ Tam giác ABC cân tại A và $\widehat{CAB}=120°\Rightarrow BC=a\sqrt{3}$ và $\widehat{DBC}=\widehat{DCB}=60°$

$\Rightarrow\Delta DBC$ đều cạnh $a\sqrt{3}$.

+ Tam giác SDC vuông tại $D\Rightarrow SB=\sqrt{3a^2+x^2}$

+ Kẻ $DK\perp SC$ tại $K\Rightarrow DK\perp(SAC)\Rightarrow d(D;(SAC))=DK=\frac{x.a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+x^2}}$.

+ Gọi $I=BD\cap AC$, xét ΔDIC vuông tại C và $\widehat{BDC}=60°$

$\Rightarrow DI = \dfrac{DC}{\cos\widehat{BDC}} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow B$ là trung điểm của $DI \Rightarrow d\left(B;(SAC)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(D;(SAC)\right)$.

Theo giả thiết $\varphi = \left(SB;(SAC)\right) \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{d\left(B;(SAC)\right)}{SB} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{8} = \dfrac{xa\sqrt{3}}{2\left(3a^2+x^2\right)}$

$\Leftrightarrow x^2+3a^2-4ax=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - 4\dfrac{x}{a}+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=3a \end{array}\right.$. So sánh với điều kiện suy ra $x=a$.

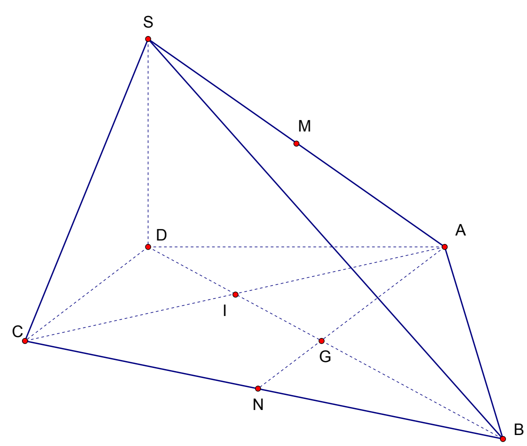
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SD = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 49.15: *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$. Gọi M là trung điểm của SA. Biết khoảng cách từ A đến (MBC) bằng $\dfrac{6a}{\sqrt{21}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng*

A. $\dfrac{8a^3\sqrt{39}}{3}$.   **B.** $\dfrac{10a^3\sqrt{3}}{9}$.   **C.** $\dfrac{4a^3\sqrt{13}}{3}$.   **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Trong mp (ABC) xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ vuông tại A và C

Khi đó ta có: $\begin{cases} AB\perp AD \\ AB\perp SA \end{cases} \Rightarrow AB\perp SD$; $\begin{cases} CB\perp CD \\ CB\perp SC \end{cases} \Rightarrow CB\perp SD$

Vậy $SD\perp(ABCD) \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SD.S_{\Delta ABC}$

Có tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$

Ta đi tìm SD

Gọi I là trung điểm AC

vì tam giác ABC đều, $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính $BD \Rightarrow I\in BD \Rightarrow AC\perp BD$

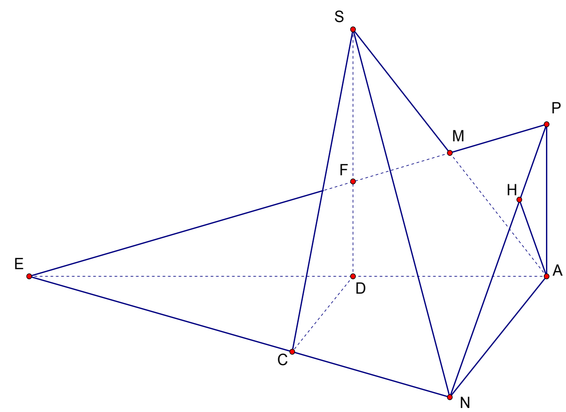
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và N là trung điểm BC

Vì tam giác ABC đều $\Rightarrow AN\perp BC \Rightarrow AN \,//\, CD$, tương tự $CG \,//\, BD$

Dễ thấy $AGCD$ là hình thoi $\Rightarrow CD = AG = \dfrac{2}{3}AN = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}2a = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$ (1)

Xét hình chóp $S.ANCD$ có đáy $ANCD$ là hình thang vuông tại C, N.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MNC) bằng $\frac{6a}{\sqrt{21}}$ vì $(MNC)\equiv(MBC)$.



Trong mp $(ABCD)$ gọi $\{E\}=CN\cap AD$

Trong mp (SAD) kẻ tia $At//SD$ gọi $\{P\}=EM\cap At$

Gọi K là hình chiếu của G trên mặt phẳng (CMB)

Khi đó ta có $\begin{cases}AP//SD\Rightarrow AP\perp CN\\AN\perp CN\end{cases}\Rightarrow(APN)\perp CN$

Trong mp (APN) kẻ $AH\perp PN$ ta có $AH=d\left(A,(MCN)\right)=\frac{6a}{\sqrt{21}}$

Mà tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a\Rightarrow AN=a\sqrt{3}$

Từ $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AP^2}+\frac{1}{AN^2}\Rightarrow\frac{1}{AP^2}=\frac{21}{36a^2}-\frac{1}{3a^2}=\frac{1}{4a^2}\Rightarrow AP=2a$

Dễ thấy $\Delta APM=\Delta SFM\Rightarrow SF=AP=2a$ (2)

Xét tam giác EAN có $CD//AN$ nên $\frac{ED}{EA}=\frac{CD}{AN}=\frac{2}{3}$ (theo (1))

Xét tam giác EAP có $FD//PA$ nên $\frac{FD}{PA}=\frac{ED}{EA}\Rightarrow\frac{FD}{PA}=\frac{2}{3}\Rightarrow FD=\frac{4a}{3}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $SD=SF+FD=\frac{10a}{3}$

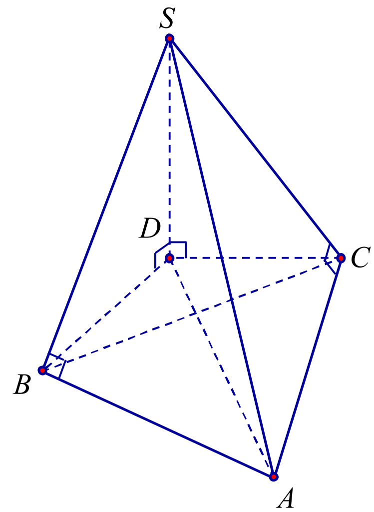
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SD.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{10a}{3}.a^2\sqrt{3}=\frac{10a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 49.16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SBA vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.

Chọn B



Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB$ (gt), suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C.

Dễ thấy $\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$.

Từ đó ta chứng minh được $\Delta SBD = \Delta SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC, nên cũng là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{DAC} = 30°$, suy ra $DC = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBD} = 60°$, suy ra $\tan\widehat{SBD} = \dfrac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD\tan\widehat{SBD} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = a$.

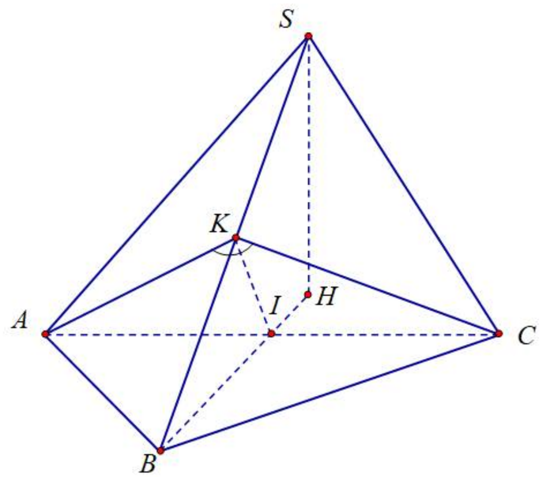
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 49.17: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{IH}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là 60^o. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \dfrac{a^3}{9}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{18}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Chọn A



Dễ thấy hai tam giác SAB và SAC bằng nhau (cạnh chung SB), gọi K là chân đường cao hạ từ A trong tam giác SAB suy ra $\left((SAB),(SBC)\right)=\widehat{AKC}$.

Trường hợp 1: $\widehat{AKC}=60^\circ$ kết hợp I là trung điểm AC suy ra $\widehat{IKC}=30^\circ$.

Ta có $IB=IC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $BH=\dfrac{4}{3}BI=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại B ta được $AC\perp BI\Rightarrow IC\perp IK$.

Trong tam giác ICK vuông tại I có $\tan\widehat{IKC}=\dfrac{IC}{IK}\Leftrightarrow IK=\dfrac{IC}{\tan 30^\circ}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Như vậy $IK>IB$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\widehat{AKC}=120^\circ$ tương tự phần trên ta có $\tan\widehat{IKC}=\dfrac{IC}{IK}\Leftrightarrow IK=\dfrac{IC}{\tan 60^\circ}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Do $SB\perp(AKC)\Rightarrow SB\perp IK$ nên tam giác BIK vuông tại K và $BK=\sqrt{IB^2-IK^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Như vậy tam giác BKI đồng dạng với tam giác BHS suy ra: $SH=\dfrac{IK.BH}{BK}=\dfrac{2a}{3}$.

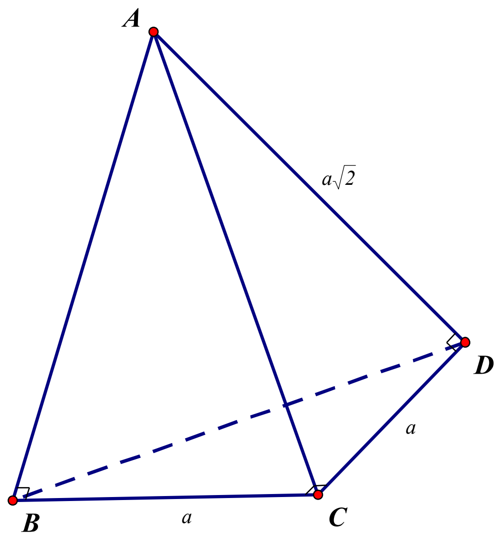
Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2}{2}.\dfrac{2a}{3}=\dfrac{a^3}{9}$.

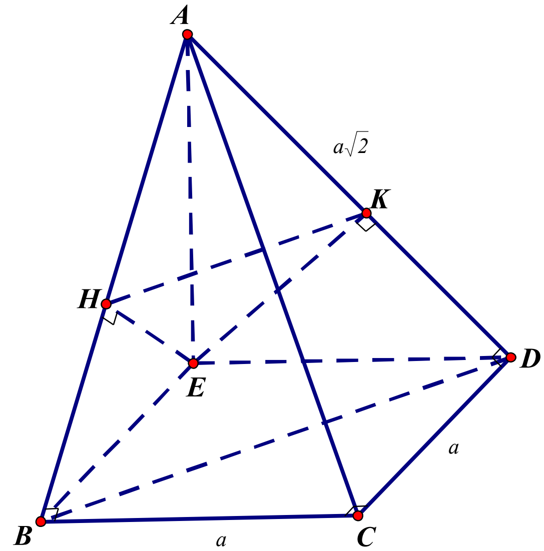
Câu 49.18: Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{CDA}=90^\circ$, $BC=CD=a$, $AD=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.

Chọn A





Gọi E là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD).

Kết hợp đề bài $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp AE \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp BE$; $\left.\begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp AE \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp ED$ và $BC = CD = a$.

Suy ra tứ giác $BCDE$ là hình vuông cạnh a.

Khi đó $AE = \sqrt{AD^2 - ED^2} = a$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của E lên $(ABC),(ACD)$ thì $EH \perp (ABC), EK \perp (ACD)$ nên góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) là góc (EH, EK)

Nhận xét 2 tam giác AEB và AED là vuông cân tại E nên $EH = EK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$HK = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra tam giác EHK đều.

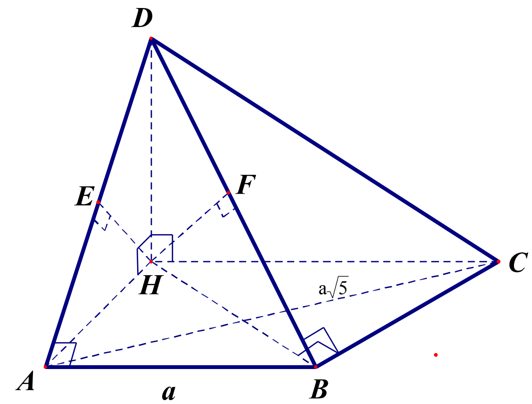
Vậy số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) là $60°$.

Câu 49.19: Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^o$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC} = 135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Chọn D



Dựng $DH\perp(ABC)$.

Ta có $\begin{cases}BA\perp DA\\BA\perp DH\end{cases}\Rightarrow BA\perp AH$. Tương tự $\begin{cases}BC\perp DB\\BC\perp DH\end{cases}\Rightarrow BC\perp BH$.

Tam giác AHB có $AB=a$, $\widehat{ABH}=45^{\circ}\Rightarrow\Delta HAB$ vuông cân tại $A\Rightarrow AH=AB=a$.

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC=a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.BA.BC.\sin\widehat{CBA}=\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases}HE\perp DA\\HF\perp DB\end{cases}\Rightarrow HE\perp(DAB)$ và $HF\perp(DBC)$.

Suy ra $\widehat{((DBA),(DBC))}=\widehat{(HE,HF)}=\widehat{EHF}$ và tam giác HEF vuông tại E.

Đặt $DH=x$, khi đó $HE=\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $HF=\dfrac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}$.

Suy ra $\cos\widehat{EHF}=\dfrac{HE}{HF}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{x^2+2a^2}}{\sqrt{2x^2+2a^2}}\Rightarrow x=a$.

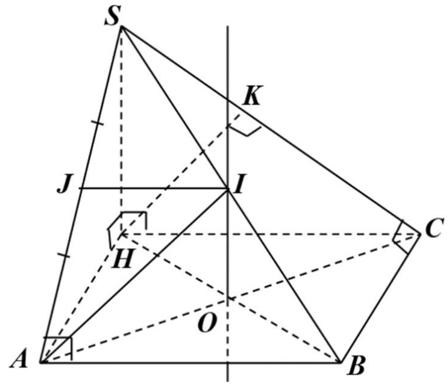
Vậy $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.DH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^3}{6}$.

Câu 49.20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^{\circ}$ và khoảng cách từ điểm A đến (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Lời giải.

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow HC \perp BC$.

Tương tự $AH \perp AB$.

Và ΔABC vuông cân tại B nên $ABCH$ là hình vuông. Gọi $O = AC \cap BH$, O là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta hoàn toàn có $IJ \perp SA \Rightarrow IJ // AB \Rightarrow I$ là trung điểm SB, hay $I = d \cap SC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $r_{S.ABC} = AI = \sqrt{IJ^2 + JA^2}$; $IJ = \dfrac{\text{AB}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AH // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(H,(SBC)) = HK$.

(K là hình chiếu của H lên SC và $BC \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp (SBC)$).

$\Rightarrow HK = a\sqrt{2}$. Tam giác SHC vuông tại H $\Rightarrow SH = a\sqrt{6}$.

Tam giác SHA vuông tại H $\Rightarrow SA = 3a$.

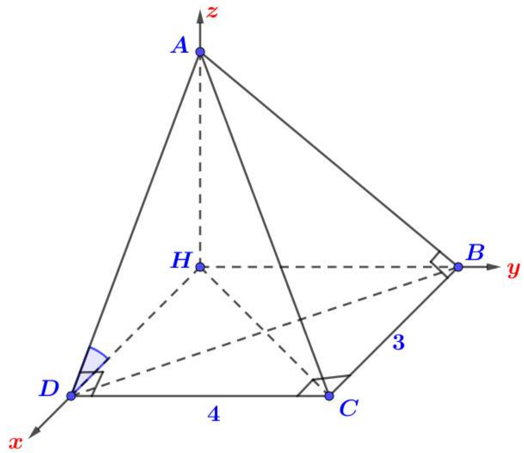
$JA = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow r_{S.ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2$.

Câu 49.21: Tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90°$, $\left(\widehat{AD, BC}\right) = 60°$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{43}}{86}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{43}}{43}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.

Lời giải.

Chọn D



Gọi H là chân đường cao của tứ diện $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HB \ (1)$.

Lại có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HD \ (2)$.

Mà $\widehat{BCD} = 90°$.

Từ đây ta suy ra $HBCD$ là hình chữ nhật.

Mặt khác: $\left(\widehat{AD, BC}\right) = \left(\widehat{AD, HD}\right) = \widehat{ADH} = 60°$. Suy ra: $AH = HD \tan 60° = 3\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục $Oxyz \equiv H.DBA$ như hình vẽ.

Ta có: $H(0;0;0)$, $A(0;0;3\sqrt{3})$, $B(0;4;0)$, $C(3;4;0)$, $D(3;0;0)$.

$\overrightarrow{AD} = (3;-3;-3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC} = (3;4;-3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB} = (0;4;-3\sqrt{3})$.

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ lần lượt là một véc tơ pháp tuyến của (ABC) và (ABD).

Suy ra: $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (0;-9\sqrt{3};-12)$; $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right] = (21\sqrt{3};0;21)$.

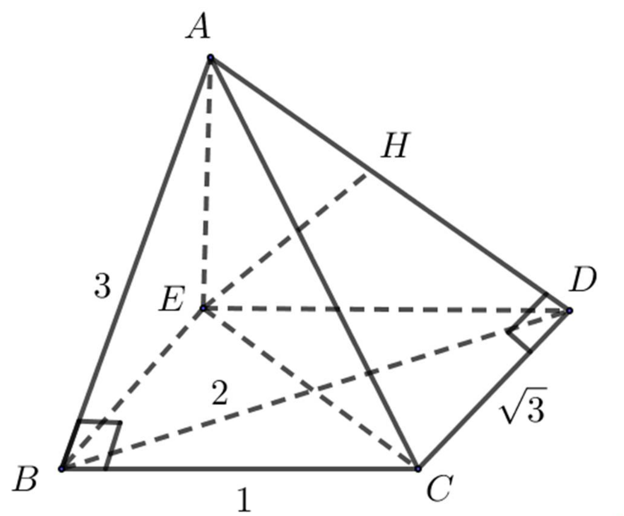
Vậy $\cos((ABC),(ADC)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\left|0.21\sqrt{3} - 9\sqrt{3}.0 - 12.21\right|}{\sqrt{0^2 + (-9\sqrt{3})^2 + (-12)^2}.\sqrt{(21\sqrt{3})^2 + 0^2 + (21)^2}} = \dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.

Câu 49.22: Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$ và $BC = 1$, $CD = \sqrt{3}$, $BD = 2$, $AB = 3$. Khoảng cách từ B đến (ACD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

Lời giải.

Chọn B



$BC=1$, $CD=\sqrt{3}$, $BD=2\Rightarrow BC^2+DC^2=BD^2\Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại C.

Dựng hình chữ nhật $BCDE\Rightarrow BC\,//\,ED$ mà $DC\perp BC\Rightarrow DC\perp DE$, lại có $DC\perp AD$.

$\Rightarrow DC\perp(ADE)\Rightarrow DC\perp AE$ (1).

Chứng minh tương tự $BC\perp(ABE)\Rightarrow BC\perp AE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AE\perp(BCDE)$.

Kẻ $EH\perp AD$ tại H. Do $DC\perp(ADE)$ nên $DC\perp EH\Rightarrow EH\perp(ACD)$.

$BE\,//\,CD\Rightarrow d(B,(ACD))=d(E,(ACD))=EH$.

$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.

$$\frac{1}{EH^2}=\frac{1}{EA^2}+\frac{1}{ED^2}=\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}\Rightarrow EH=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}.$$

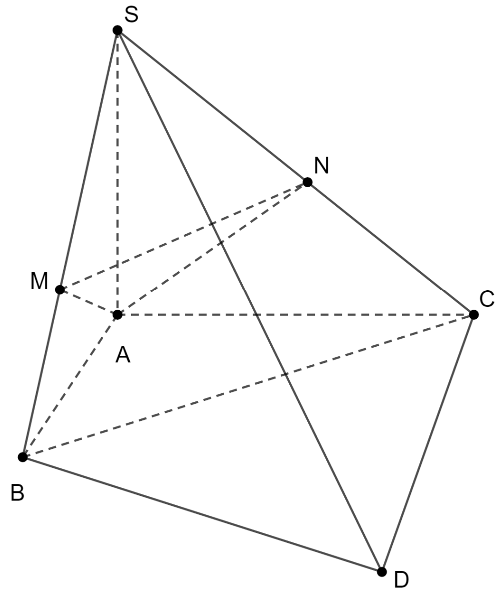
Vậy $d(B,(ACD))=EH=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Câu 49.23: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $SA=BC$ và $\widehat{BAC}=120°$. Hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB và SC lần lượt là M và N. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

A. $45°$.　　**B.** $60°$.　　**C.** $15°$.　　**D.** $30°$.

Lời giải.

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính là AD.

Khi đó tam giác ABD vuông tại B $\Rightarrow AB \perp BD$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BD \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow \text{BD} \perp \text{AM}$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AM \\ SB \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD$.

Tương tự, ta chứng minh được $AN \perp SD$.

Do đó $SD \perp (AMN)$ suy ra $\widehat{((ABC),(AMN))} = \widehat{(SA,SD)} = \widehat{ASD}$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có $\tan\widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA}$.

Với $AD = 2R_{\Delta ABC} = 2\dfrac{BC}{\sin 120°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}SA$.

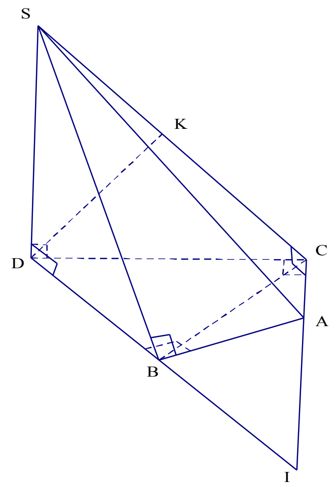
Do đó $\tan\widehat{ASD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30° \Rightarrow \widehat{((ABC),(AMN))} = 30°$.

Câu 49.24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$. Gọi φ là góc giữa SB và (SAC) thỏa mãn $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$, khoảng cách từ S đến mặt đáy nhỏ hơn $2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Lời giải.

Chọn C



Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên đáy (ABC), đặt $SD = x\left(0 < x < 2a\right)$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp SC \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SDC) \Rightarrow AC \perp DC$. Tương tự ta cũng có $AB \perp DB$.

Tam giác ABC cân tại A và $\widehat{CAB} = 120^\circ \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$ và $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = 60^\circ \Rightarrow \Delta DBC$ đều cạnh $a\sqrt{3}$.

Tam giác SDC vuông tại $D \Rightarrow SC = \sqrt{3a^2 + x^2} = SB$

Kẻ $DK \perp SC$ tại $K \Rightarrow DK \perp (SAC) \Rightarrow d\left(D,(SAC)\right) = DK = \dfrac{x.a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + x^2}}$.

Gọi $I = BD \cap AC$, xét ΔDIC vuông tại C và $\widehat{BDC} = 60^\circ$

$\Rightarrow DI = \dfrac{DC}{\cos\widehat{BDC}} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow B$ là trung điểm của $DI \Rightarrow d\left(B,(SAC)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(D,(SAC)\right)$.

Theo giả thiết $\varphi = \left(\widehat{SB,(SAC)}\right) \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{d\left(B,(SAC)\right)}{SB} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{8} = \dfrac{xa\sqrt{3}}{2\left(3a^2 + x^2\right)}$

$\Leftrightarrow x^2 + 3a^2 - 4ax = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - 4\dfrac{x}{a} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = 3a \end{array}\right.$. So sánh với điều kiện suy ra $x = a$.

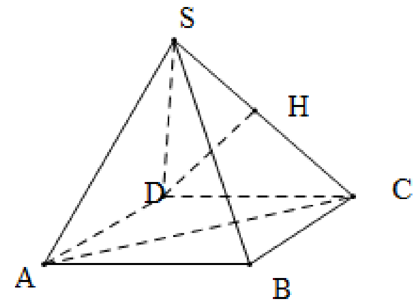
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SD = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 49.25: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = AB = \sqrt{3}$; $SB = \sqrt{6}$; $AC = 2BC = 2$; $SC = \sqrt{5}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{13}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

Lời giải.

Chọn D



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật.

Áp dụng định lý Pitago ta có các tam giác SAB; ABC; SBC lần lượt vuông góc tại A, B, C.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp SD(1)$.

$\begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SD(2)$.

Từ $(1);(2) \Rightarrow SD \perp (ABCD) \Rightarrow SD \perp BC$.

Vậy $(SBC) \perp (SDC)$ theo giao tuyến SC. Kẻ DH vuông góc với SC tại H thì $DH \perp (SBC)$
.

Có $AD // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(D,(SBC)) = DH = \dfrac{DS.DC}{\sqrt{DS^2 + DC^2}} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

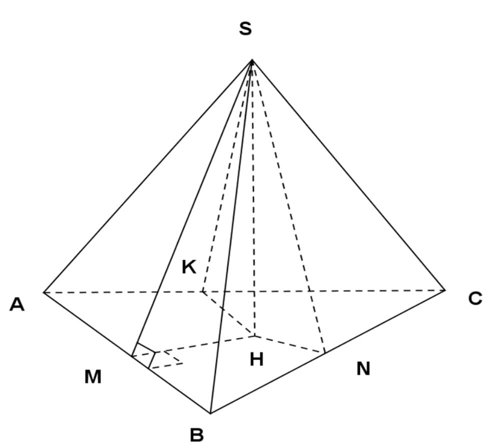
Câu 49.26: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Biết rằng các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

4

Chọn C



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy (ABC); M,N,K lần lượt là hình chiếu của S trên AB,BC,CA.

Vì diện tích các mặt bên của hình chóp bằng nhau nên ta có $\frac{1}{2}SM.AB=\frac{1}{2}SN.BC=\frac{1}{2}SK.CA$ và vì tam giác ABC đều nên ta có $SM=SN=SK \Rightarrow HM=HN=HK$.

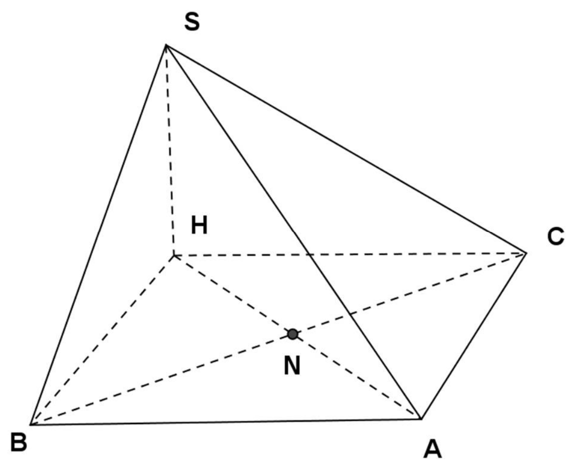
TH1: nếu H nằm trong tam giác $ABC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC.

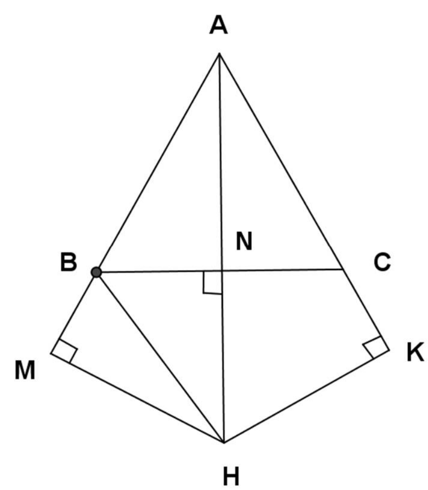
Khi đó ta có $AH=\frac{2}{3}AN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SA=SB=SC=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{3a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SH=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{2a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

TH2: Nếu H nằm ngoài tam giác ABC. Không mất tính tổng quát giả sử H nằm khác phía với A so với đường thẳng BC





Tương tự như trên ta vẫn có $HM=HN=HK$. Vì tam giác ABC đều nên H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A và $AM=AB+BN=\frac{3a}{2} \Rightarrow HB=\frac{BN}{cos60°}=\frac{a}{2}:\frac{1}{2}=a$,

$AH=AM:cos30°=\frac{3a}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$. Vì thế cạnh SA không thể bằng $a\sqrt{3} \Rightarrow SB=SC=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2} \Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SH=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

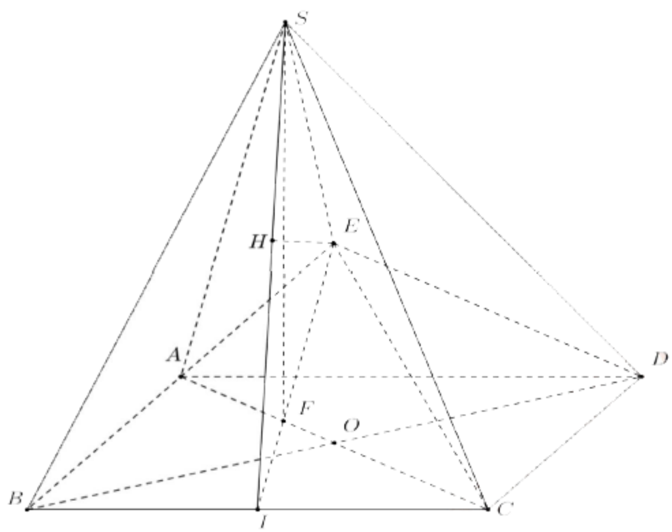
Vậy $V_{\min}=\min\left\{\frac{a^3\sqrt{2}}{6},\frac{a^3\sqrt{6}}{12}\right\}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 49.27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành thỏa mãn $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Biết tam giác SBC cân tại S, tam giác SCD vuông tại C và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{2a^3}{3\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{a^3}{3\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{a^3}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a^3}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A



Nhận thấy tam giác ABC vuông tại A (do $AB^2 + AC^2 = BC^2$).

Gọi E là điểm đối xứng của B qua A ta có tứ giác $ACDE$ là hình chữ nhật, và tam giác EBC là tam giác đều cạnh $2a$.

$$AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D,(SBC)) = d(A,(SBC)) = \frac{1}{2}d(E,(SBC))$$

Hay $d(E,(SBC)) = 2.d(D,(SBC)) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Gọi I là trung điểm của đoạn BC, ta có: $BC \perp EI, BC \perp SI \Rightarrow BC \perp (SEI)$.

Trong $mp(SEI)$ kẻ EH vuông góc với SI tại H. Khi đó: $d(E,(SBC)) = EH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $CD \perp (SAC)$ (Do $CD \perp SC, CD \perp AC$) Suy ra $AB \perp (SAC)$.

Xét tam giác SBE có SA vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên tam giác SBE cân tại S.

Xét hình chóp $S.EBC$ có đáy là tam giác đều EBC, các cạnh bên $SE = SB = SC$.

Nên gọi $F = EI \cap CA$ ta có $SF \perp (EBC)$.

Tam giác EHI vuông tại H nên $\sin\hat{I}=\frac{HE}{EI}=\frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$.

Tam giác SIF vuông tại F nên $SF=FI.\tan\hat{I}=\frac{1}{3}EI.\frac{\sin\hat{I}}{\sqrt{1-\sin^2\hat{I}}}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}}=\frac{2a}{\sqrt{15}}$.

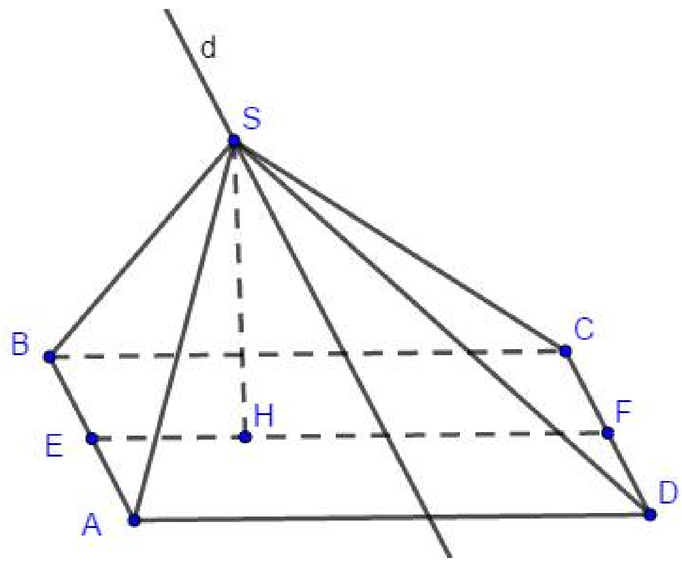
$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SF.S_{ABCD}=\frac{1}{3}SF.AB.CA=\frac{1}{3}\frac{2a}{\sqrt{15}}.a.a\sqrt{3}=\frac{2a^3}{3\sqrt{5}}$.

Câu 49.28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB và tam giác SCD cân tại S. Biết hai mặt bên (SAB) và (SCD) có tổng diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ và chúng vuông góc với nhau. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2}{12}$. **C.** $\frac{a^2}{6}$. **D.** $\frac{a^2}{3}$.

Lời giải.

Chọn D



Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB và CD. Khi đó $EF // AD \Rightarrow EF\perp AB$

Do tam giác SAB và tam giác SCD cân tại S nên $SE\perp AB$ và $SF\perp CD$

Lúc đó có $\begin{cases}SE\perp AB\\EF\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SEF)\Rightarrow(ABCD)\perp(SEF)$

Do đó, chân đường cao hạ từ S xuống đáy là H phải nằm trên giao tuyến EF của $(ABCD)$ và (SEF).

Mặt khác, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d qua S và song song AB nên $SE \perp d$ và $SF \perp d$, tức là $\widehat{ESF}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), hay nói cách khác ta có $SE \perp SF$

Xét tam giác SEF vuông tại S có $SH^2 = \dfrac{SE^2.SF^2}{SE^2+SF^2} = \dfrac{SE^2.SF^2}{(SE+SF)^2 - 2SE.SF}$ (1)

Ta có $SE.SF = SH.EF = 2S_{\Delta SEF}$

Từ giả thiết $S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2 \Rightarrow SE.AB + SF.CD = \sqrt{3}a^2$ hay $SE + SF = \sqrt{3}a$

Thay vào (1) ta có $SH^2 = \dfrac{SH^2.EF^2}{(SE+SF)^2 - 2SH.EF} = \dfrac{SH^2.a^2}{3a^2 - 2SH.a} \Rightarrow SH = a$

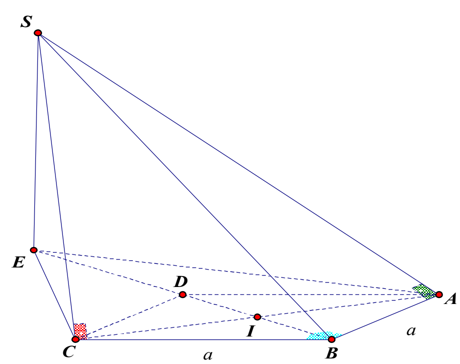
Vậy thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a.a^2 = \dfrac{a^2}{3}$.

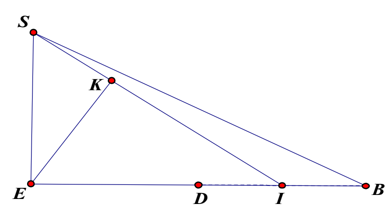
Câu 49.29: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = a, \widehat{ABC} = 120^0, \widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. Tính thể tích khối $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{10}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{5}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B





Hạ $SE \perp (ABC)$ tại E có

$\left.\begin{array}{l} AB \perp SE \\ AB \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SAE) \Rightarrow AB \perp AE \Rightarrow \widehat{BAE} = 90^0$.

Chứng minh tương tự có $\widehat{BCE} = 90^0$.

Hai tam giác vuông BCE và BAE bằng nhau suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{ABE} = 60^0$.

Gọi D là trung điểm của BE suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thoi và $BD = DE = a$.

Gọi I là tâm hình thoi $ABCD$ có

$BI=\frac{1}{3}EI\Rightarrow d\left(B,\left(SAC\right)\right)=\frac{1}{3}d\left(E,\left(SAC\right)\right)\Rightarrow d\left(E,\left(SAC\right)\right)=3.\frac{2a\sqrt{21}}{21}=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

$\left.\begin{matrix}CA\perp BD\\ CA\perp SE\end{matrix}\right\}\Rightarrow CA\perp\left(SEI\right)\Rightarrow\left(SAC\right)\perp\left(SEI\right)$.

Hạ $EK\perp SI$ tại K ta có $EK\perp\left(SAC\right)$ tại K suy ra $d\left(E,\left(SAC\right)\right)=EK\Rightarrow EK=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBE vuông tại E đường cao EK có

$\frac{1}{EK^2}=\frac{1}{EI^2}+\frac{1}{SE^2}\Rightarrow\frac{1}{SE^2}=\frac{1}{EK^2}-\frac{1}{EI^2}=\frac{7}{12a^2}-\frac{4}{9a^2}=\frac{5}{36a^2}\Rightarrow SE=\frac{6a\sqrt{5}}{5}$.

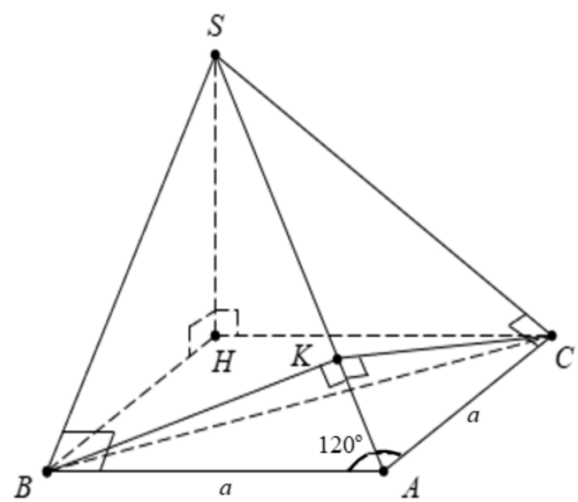
Vậy $V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SE=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}BA.BC.\sin 120^0\right).SE=\frac{1}{6}a^2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{6a\sqrt{5}}{5}=\frac{a^3\sqrt{15}}{10}$.

Câu 49.30: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=a$, $\widehat{BAC}=120°$, $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90°$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAC\right)$. Khi $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ thì thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $SH\perp\left(ABC\right),H\in\left(ABC\right)$ suy ra $SH\perp AB$ và $SH\perp AC$.

Khi đó ta có $\left\{\begin{matrix}SH\perp AB\\ SB\perp AB\end{matrix}\right.\Rightarrow AB\perp\left(SBH\right)\Rightarrow AB\perp BH$.

Chứng minh tương tự ta có $AC\perp CH$ suy ra tứ giác $ABHC$ nội tiếp đường tròn đường kính AH. Do đó góc BHC bằng $60°$.

Dễ thấy $\Delta AHB=\Delta AHC\Rightarrow HB=HC$ nên ΔHBC đều.

ΔABC cân tại A có $AB = a, \widehat{BAC} = 120°$ suy ra $BC^2 = 3a^2$.

Do đó $HB^2 = HC^2 = BC^2 = 3a^2$.

Dễ thấy $\Delta SHB = \Delta SHC \Rightarrow SB = SC$ nên $\Delta SAB = \Delta SAC$.

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $BK \perp SA, (K \in SA)$.

Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $CK_1 \perp SA, (K_1 \in SA)$.

Xét hai tam giác vuông ΔKAB và ΔK_1AC có $AB = AC$, $\widehat{BAK} = \widehat{CAK_1}$ (vì $\Delta SAB = \Delta SAC$) suy ra $\Delta KAB = \Delta K_1AC \Rightarrow AK = AK_1$ mà K và K_1 nằm giữa S và A nên $K \equiv K_1$.

Từ đó ta có $CK \perp SA$ và $BK = CK$.

Do đó $\cos\alpha = \left|\cos\widehat{BKC}\right| \Leftrightarrow \left|\dfrac{BK^2 + CK^2 - BC^2}{2BK.CK}\right| = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2BK^2 - BC^2}{2BK^2}\right| = \dfrac{3}{4}\ (1)$.

Đặt $SH = x, (x > 0)$.

Xét ΔSHB có $SB^2 = SH^2 + HB^2 = 3a^2 + x^2$.

Xét ΔSAB vuông tại B có $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BS^2} \Rightarrow \dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2 + x^2}$

$\Rightarrow BK^2 = \dfrac{a^2\left(3a^2 + x^2\right)}{4a^2 + x^2}$.

Thay vào (1) ta có $\left|\dfrac{\dfrac{2a^2\left(3a^2 + x^2\right)}{4a^2 + x^2} - 3a^2}{\dfrac{2a^2\left(3a^2 + x^2\right)}{4a^2 + x^2}}\right| = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $\dfrac{1}{3}.SH.\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}a.^2\sin 120° = \dfrac{a^3}{4}$.

Vậy chọn đáp án **D**.

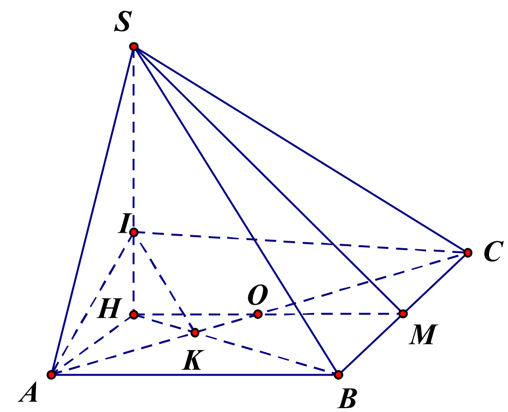
Câu 49.31: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, tam giác SAB vuông tại A, tam giác SBC cân tại S và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng $\dfrac{2a}{3}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Lê Văn Quý ; Fb:Lê Văn Quý

Chọn D



Gọi M trung điểm của $BC \Rightarrow SM \perp BC$ (1)

Lấy điểm $H \in (ABC)$ sao cho $ABMH$ là hình chữ nhật

Cùng với giả thiết ta có: $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AH \end{cases} \Rightarrow AB \perp SH$ (2)

Lại có $\begin{cases} BC \perp SM \\ BC \perp MH \end{cases} \Rightarrow BC \perp SH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SH \perp (ABC)$.

Gọi $K = AC \cap BH$ và I là điểm trên đoạn SH sao cho $HI = \frac{1}{3}HS$.

$\Rightarrow SB // (IAC) \Rightarrow d(SB, AC) = d(SB,(IAC)) = d(S,(IAC)) = 2d(H,(IAC)) = \frac{2a}{3}$.

$\Rightarrow d(H,(IAC)) = \frac{a}{3}$.

Ta có $\frac{1}{\left[d(H,(IAC))\right]^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow \frac{1}{HI^2} = \frac{9}{a^2} - \frac{4}{a^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow HI = a$.

$\Rightarrow SH = 3a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}3a\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{2}$.

Câu 49.32: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện. Trong đó, khối tứ diện $ABCD$ có thể tích là V, khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V'. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{7}{18}$. **B.** $\frac{11}{18}$. **C.** $\frac{13}{18}$. **D.** $\frac{1}{18}$.

Lời giải

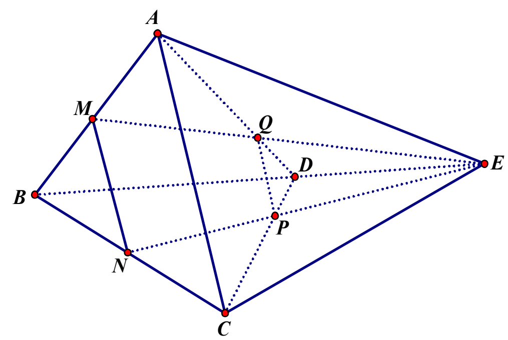
Chọn B

Gọi $P = EN \cap CD$ và $Q = EM \cap AD$.

Suy ra $P,\ Q$ lần lượt là trọng tâm của ΔBCE và ΔABE.

Gọi S là diện tích tam giác BCD, suy ra $S_{\Delta CDE} = S_{\Delta BNE} = S$.

Ta có $S_{\Delta PDE} = \frac{1}{3}.S_{\Delta CDE} = \frac{S}{3}$.



Gọi h là chiều cao của tứ diện $ABCD$, suy ra

$d\left[M,(BCD)\right] = \frac{h}{2};\ d\left[Q,(BCD)\right] = \frac{h}{3}$.

Khi đó $V_{M.BNE} = \frac{1}{3}S_{\Delta BNE}.d\left[M,(BCD)\right] = \frac{S.h}{6};\ V_{Q.PDE} = \frac{1}{3}S_{\Delta PDE}.d\left[Q,(BCD)\right] = \frac{S.h}{27}$.

Suy ra $V_{PQD.NMB} = V_{M.BNE} - V_{Q.PDE} = \frac{S.h}{6} - \frac{S.h}{27} = \frac{7S.h}{54} = \frac{7}{18}.\frac{S.h}{3} = \frac{7}{18}.V_{ABCD}$

$\Rightarrow V' = V - \frac{7}{18}.V = \frac{11}{18}V \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{11}{18}$.

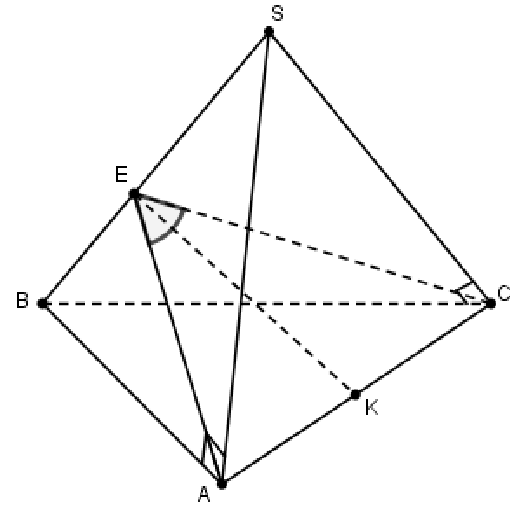
Vậy $\frac{V'}{V} = \frac{11}{18}$.

Câu 49.33: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $SABC$?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\Delta SAB = \Delta SBC$ (c.g.c), trong tam giác SAB kẻ đường cao $AE \perp SB$ khi đó $CE \perp SB$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là góc giữa hai đường thẳng AE và CE. Dễ dàng nhận thấy góc $\widehat{AEC} = 120°$ (vì nếu $\widehat{AEC} = 60°$ thì $AE = AC = AB = 2a$ điều này vô lí vì tam giác AEB vuông tại E).

Trong tam giác AEC cân tại E kẻ đường cao EK ta có: $AE = \dfrac{AK}{\cos 30^0} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

Trong tam giác vuông ABE có: $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$

Trong tam giác SAB có: $BS = \dfrac{AB^2}{BE} = \sqrt{6}$

$$V_{B.EAC} = \frac{1}{3}.BE.S_{\Delta EAC} = \frac{1}{3}.BE.\frac{1}{2}.AE.EC.\sin 120^0 = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^3$$

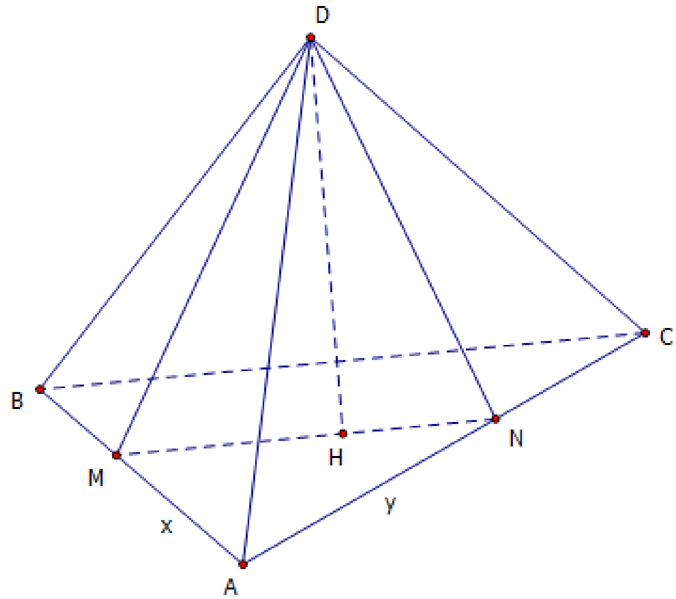
$$\frac{V_{B.EAC}}{V_{B.SAC}} = \frac{BE}{BS}.\frac{BA}{BA}.\frac{BC}{BC} = \frac{BE}{BS} \Rightarrow V_{B.SAC} = \frac{BS}{BE}.V_{B.EAC} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}.\frac{2\sqrt{2}}{9}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

Câu 49.34: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1, M và N lần lượt là hai điểm di động trên hai cạnh AB, AC (M và N không trùng với A) sao cho mặt phẳng (DMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích lớn nhất và nhỏ nhất của tứ diện $ADMN$. Tính tích $V_1.V_2$.

A. $V_1.V_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{27}$. **B.** $V_1.V_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$. **C.** $V_1.V_2 = \dfrac{1}{324}$. **D.** $V_1.V_2 = \dfrac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $DH \perp MN \Rightarrow DH \perp (ABC)$ (vì $(DMN) \perp (ABC)$). Suy ra H là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Như vậy M và N là hai điểm di động nhưng MN luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC.

Đặt $AM = x,\ AN = y$, $(0 < x \le 1, 0 < y \le 1)$

+ $DH^2 = DA^2 - AH^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow DH = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

+ $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} AM.AN.\sin\widehat{MAN} = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$ (*)

+ $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta AMH} + S_{\Delta ANH} = \frac{1}{2}AH.(x+y).\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{12}(x+y)$ (**)

Do đó $V_{ADMN} = \frac{1}{3}DH.S_{\Delta AMN} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}xy\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}xy$ (***)

Mặt khác từ (*) và (**) suy ra $x + y = 3xy$, $(0 < x \le 1, 0 < y \le 1)$.

Đặt $xy = t \Rightarrow x + y = 3t$. Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 3t \le 2 \\ 9t^2 - 4t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \le \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} t \ge \frac{4}{9} \\ t \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{9} \le t \le \frac{2}{3}$.

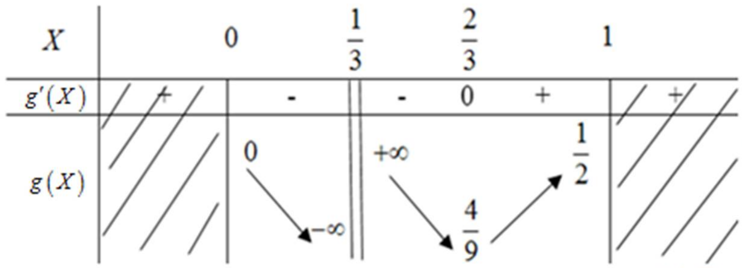
Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 3tX + t = 0$ (1), $\frac{4}{9} \le t \le \frac{2}{3}$.

Ta tìm $t \in \left[\frac{4}{9}; \frac{2}{3}\right]$ để (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(0;1]$ hoặc có nghiệm kép thuộc $(0;1]$

Ta có $X=\dfrac{1}{3}$ không phải là nghiệm của (1) nên $(1)\Leftrightarrow t=\dfrac{X^2}{3X-1}$.

Đặt $g(X)=\dfrac{X^2}{3X-1}$, $X\in(0;1]$. Ta có: $g'(X)=\dfrac{3X^2-2X}{(3X-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=0\\X=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $g(X)$



Dựa vào BBT, (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(0;1]$ hoặc có nghiệm kép thuộc $(0;1]$

$\Leftrightarrow\dfrac{4}{9}\le t\le\dfrac{1}{2}$ (thỏa điều kiện) hay $\dfrac{4}{9}\le xy\le\dfrac{1}{2}$.

Kết hợp (***) ta có $\dfrac{\sqrt{2}}{27}\le V_{ADMN}\le\dfrac{\sqrt{2}}{24}\Rightarrow V_1=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$, $V_2=\dfrac{\sqrt{2}}{27}\Rightarrow V_1.V_2=\dfrac{1}{324}$.