

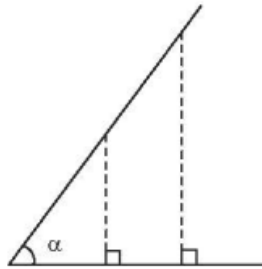
BÀI 11. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC GÓC NHỌN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. KHÁI NIỆM TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

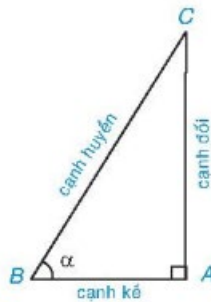
Khái niệm sin, cosin, tang, cotang của góc nhọn α

Nhận xét. Trong Hình 4.4, các tam giác vuông có cùng một góc nhọn α là đồng dạng với nhau. Vì vậy các tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền (cạnh kề và cạnh huyền), cạnh đối và cạnh kề (cạnh kề và cạnh đối) của góc nhọn α là như nhau, cho dù độ dài các cạnh đối (các cạnh kề) của góc α và các cạnh huyền có thể khác nhau với từng tam giác.



Hình 4.4

Cho góc nhọn α . Xét tam giác ABC vuông tại A có góc nhọn B bằng α . (H.4.5). Ta có:



Hình 4.5

- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền gọi là sin của α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền gọi là cosin của α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của góc α gọi là tang của α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối của góc α gọi là cotang của α , kí hiệu $\cot \alpha$.

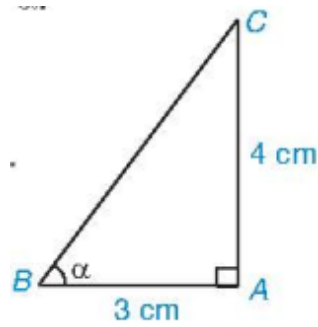
Chú ý. Ta có:

- $\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}};$
 $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$
- $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ gọi là các tỉ số lượng giác của góc nhọn α .

Chú ý:

sin, cosin của góc nhọn luôn dương và bé hơn 1 vì trong tam giác vuông, cạnh huyền dài nhất

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3\text{cm}, AC = 4\text{cm}$ (H.4.6). Hãy tính các tỉ số lượng giác $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ với $\alpha = \hat{B}$.



Hình 4.6

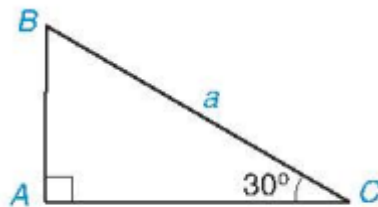
Chú ý: $\sin \alpha$ còn được viết là $\sin \hat{B}$ hay $\sin B$. Tương tự cho $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$.

Giá trị lượng giác sin, cosin, tang, cotang của các góc $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

Ta có bảng sau:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{C} = 30^\circ$ và $BC = a$ (H.4.8). Tính các cạnh AB , AC theo a .



Hình 4.8

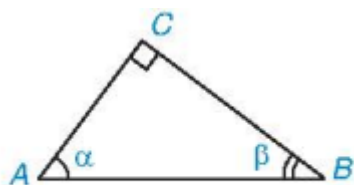
2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

a) Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Định lý: Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

Chú ý. Cho α và β là hai góc phụ nhau (H.4.9), khi đó

$$\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta, \tan \alpha = \cot \beta, \cot \alpha = \tan \beta.$$



Hình 4.9

- Vẽ số đo, hai góc phụ nhau có thể coi là hai góc nhọn của một tam giác vuông.

Ví dụ 3. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của góc nhỏ hơn 45° :

$\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \tan 80^\circ, \cot 82^\circ$.

3. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

Chú ý: Về số đo góc, dưới đơn vị độ ($^\circ$) còn có các đơn vị phút ($'$) và giây ($''$) với $1^\circ = 60', 1' = 60''$.

Ví dụ 4. $1^\circ = 60', 1' = 60''$. Dùng MTCT, tính $\sin 27^\circ, \cos 32^\circ 15', \tan 52^\circ 12'$ và $\cot 35^\circ 23'$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Lưu ý: $\cot 35^\circ 23' = \frac{1}{\tan 35^\circ 23'}$.

Nhận xét. Để tính $\cot 35^\circ 23'$, ta có thể tính trực tiếp như trên, hoặc có thể tìm góc phụ với góc $35^\circ 23'$ là $54^\circ 37'$ rồi dùng MTCT tính $\tan 54^\circ 37'$ và suy ra kết quả.

Ví dụ 5. Dùng MTCT, tìm các góc (làm tròn đến phút) biết $\sin \alpha_1 = 0,3214, \cos \alpha_2 = 0,4321, \tan \alpha_3 = 1,2742$ và $\cot \alpha_4 = 1,5384$.

Chú ý. Để tìm góc α khi biết $\cot \alpha$, ta có thể tìm góc $(90^\circ - \alpha)$ (vì $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$) rồi suy ra α .

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

4.1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính các tỉ số lượng giác sin, cosin, tang, cotang của các góc nhọn B và C khi biết:

a) $AB = 8\text{cm}, BC = 17\text{cm}$;

b) $AC = 0,9\text{cm}, AB = 1,2\text{cm}$.

4.2. Cho tam giác vuông có một góc nhọn 60° và cạnh kề với góc 60° bằng 3cm. Hãy tính cạnh đối của góc này.

4.3. Cho tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° và cạnh đối với góc này bằng 5cm. Tính độ dài cạnh huyền của tam giác.

4.4. Cho hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 3 và $\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường chéo và cạnh ngắn hơn của hình chữ nhật (sử dụng bảng giá trị lượng giác trang 69).

4.5. a) Viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :

$\sin 55^\circ, \cos 62^\circ, \tan 57^\circ, \cot 64^\circ$.

b) Tính $\frac{\tan 25^\circ}{\cot 65^\circ}, \tan 34^\circ - \cot 56^\circ$.

4.6. Dùng MTCT, tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $\sin 40^\circ 12'$;

b) $\cos 52^\circ 54'$;

c) $\tan 63^\circ 36'$;

d) $\cot 25^\circ 18'$.

4.7. Dùng MTCT, tìm số đo của góc nhọn x (làm tròn đến phút), biết rằng:

a) $\sin x = 0,2368$;

b) $\cos x = 0,6224$;

c) $\tan x = 1,236$;

d) $\cot x = 2,154$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính các tỉ số lượng giác của các góc nhọn trong một tam giác vuông biết độ dài các cạnh

1. Phương pháp giải

Dựng một tam giác có hai cạnh là m và n (m và n là hai cạnh góc vuông hoặc một cạnh góc vuông và cạnh huyền) rồi vận dụng định nghĩa của các tỉ số lượng giác để nhận ra góc α

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại C , trong đó $BC = 1,2m$ và $AB = 1,5m$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B , từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3cm$, $AC = 4cm$. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn B

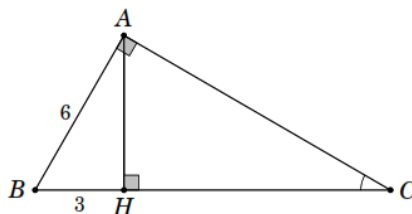
Ví dụ 3. Tam giác ABC vuông tại A , $AB = 1,5$; $BC = 3,5$. Tính tỉ số lượng giác của góc C rồi suy ra các tỉ số lượng giác của góc B .

Ví dụ 4. Tính tỉ số lượng giác của góc B trong hình bên.

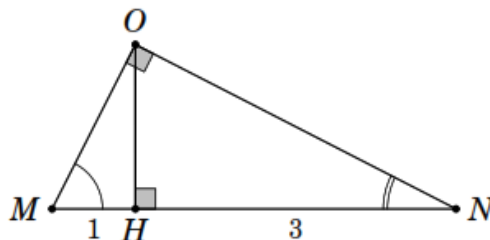
Ví dụ 5. $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2AB$. Tính các tỉ số lượng giác của góc C .

Ví dụ 6. Tam giác ABC cân tại A , có $BC = 6$, đường cao $AH = 4$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B .

Ví dụ 7. Tính $\tan C$ trong hình bên.



Ví dụ 8. Tính $\sin M + \cos N$ trong hình bên.

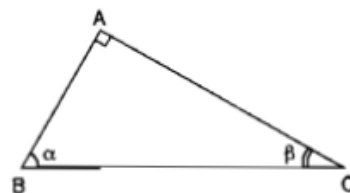


Dạng 2. Biến đổi tỉ số lượng giác của một góc nhọn thành tỉ số lượng giác của một góc nhỏ hơn (hoặc lớn hơn 45 độ)

1. Phương pháp giải

Nếu hai góc phụ nhau thì $\sin$ góc này bằng $\cos$ góc kia, $\tan$ góc này bằng $\cot$ góc kia.

$$\begin{aligned}\sin B &= \cos C & ; \\ \cos B &= \sin C \\ \tan B &= \cot C & ; \\ \cot B &= \tan C.\end{aligned}$$



2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :
 $\sin 60^\circ$; $\cos 75^\circ$; $\sin 52^\circ 30'$; $\cot 82^\circ$; $\tan 80^\circ$

Ví dụ 2. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :
 $\cos 32^\circ 7'$; $\sin 42^\circ$; $\cot 27^\circ 36'$

Dạng 3. Tính độ dài một cạnh trong tam giác vuông biết một góc và một cạnh

1. Phương pháp giải

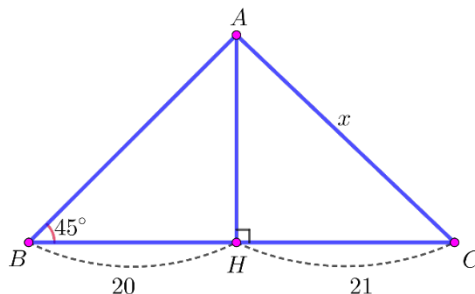
✦ Sử dụng định nghĩa của các tỉ số lượng giác, chẳng hạn $\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$

$$\Rightarrow \text{cạnh đối} = \text{cạnh huyền} \cdot \sin \alpha.$$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho tam giác vuông có một góc 60° và cạnh huyền có độ dài là 8. Hãy tìm độ dài của cạnh đối diện với góc 60° .

Ví dụ 2. Tìm x trong Hình 25.



Hình 25

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$ và $BC = 10$. Tính độ dài cạnh AB và AC .

Dạng 4: Tìm góc nhọn α thỏa đẳng thức cho trước

1. Phương pháp

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để biến đổi về dạng cơ bản
- Dùng MTBT hoặc bảng giá trị lượng giác các góc đặc biệt để tìm.

Cách dùng MTBT tìm α khi biết $\sin \alpha$ (tương tự đối với $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$)

Nếu $\sin \alpha = m$ thì bấm các phím sau

$$\boxed{\text{shift}} \boxed{\sin} \boxed{m} \boxed{=} \boxed{^\circ}.$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm góc nhọn x , biết

a) $4 \sin x - 1 = 1$;

b) $2\sqrt{3} - 3 \tan x = \sqrt{3}$.

Lời giải

$$a) \quad 4 \sin x - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

$$b) \quad 2\sqrt{3} - 3 \tan x = \sqrt{3}$$

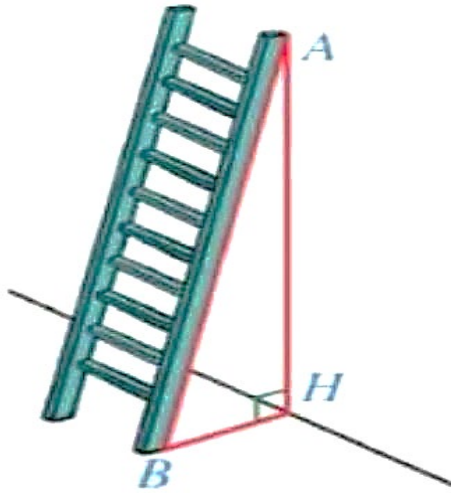
$$\Leftrightarrow -3 \tan x = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \tan 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

Dạng 5: Một số bài toán thực tế

Câu 1: Treo quả cầu kim loại nhỏ vào giá thí nghiệm bằng sợi dây mảnh nhẹ không dẫn. Khi quả cầu đứng yên tại vị trí cân bằng, dây treo có phương thẳng đứng. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi buông ra thì quả cầu sẽ chuyển động qua lại quanh vị trí cân bằng. Khi kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng, giả sử tâm A của quả cầu cách B một khoảng $AB = 60$ cm và cách vị trí cân bằng một khoảng $AH = 20$ cm (Hình 9). Tính số đo góc α tạo bởi sợi dây BA và vị trí cân bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

Câu 2: Hình 10 mô tả một chiếc thang có chiều dài $AB = 4$ m được đặt dựa vào tường, khoảng cách từ chân thang đến chân tường là $BH = 1,5$ m. Tính góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Hình 10

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Hãy viết tỉ số lượng giác của các góc sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

$$\sin 75^\circ, \cos 60^\circ, \tan 80^\circ, \cot 50^\circ$$

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $\hat{B} = \alpha$. Biết $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. Hãy tìm độ dài cạnh AB, BC .

Câu 3. Tính giá trị của các biểu thức

$$1. \quad A = \frac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ}$$

$$2. \quad B = \tan 76^\circ - \cot 14^\circ.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

Câu 5. Cho tứ giác $ABCD$ có α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo.

Chứng minh rằng $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \alpha$

Câu 6. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi a, b, c là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C .

a) Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

b) Có thể xảy ra đẳng thức: $\sin A = \sin B + \sin C$ không?

Câu 7. Cho tam giác nhọn ABC , $\hat{A} = 30^\circ$. Hai đường cao CH và BK .

Chứng minh rằng: $S_{AHK} = 3S_{BCHK}$.

BÀI 12. MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

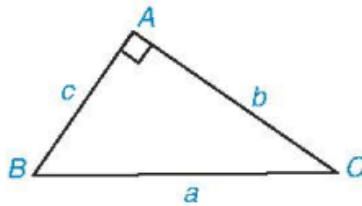
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. HỆ THỨC GIỮA CẠNH HUYỀN VÀ CẠNH GÓC VUÔNG

Công thức tính cạnh góc vuông theo cạnh huyền và sin, cosin của các góc nhọn

Định lý 1. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề.

Chú ý. Trong tam giác ABC vuông tại A (H.4.12), ta có:



Hình 4.12

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C; \quad c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B.$$

Ví dụ 1. Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° (H.4.13). Hỏi sau 1,2 phút, máy bay lên cao được bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng?

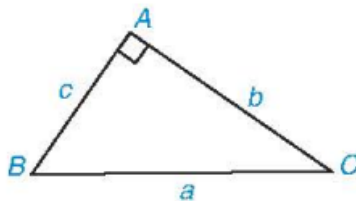
2. HỆ THỨC GIỮA HAI CẠNH GÓC VUÔNG

Công thức tính cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông kia và tang, cotang của các góc nhọn

Định lý 2. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.

Chú ý. Trong tam giác ABC vuông tại A (H.4.16), ta có:

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C; \quad c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$

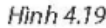


Hình 4.16

Ví dụ 2. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34° và bóng của một toà tháp trên mặt đất dài 8,6 m (H.4.17). Tính chiều cao của toà tháp đó (làm tròn đến mét).



Ví dụ 3. Cho tam giác vuông ABC với các cạnh góc vuông $AB = 5, AC = 8$ (H.4.19). Hãy tính cạnh BC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) và các góc B, C (làm tròn đến độ).

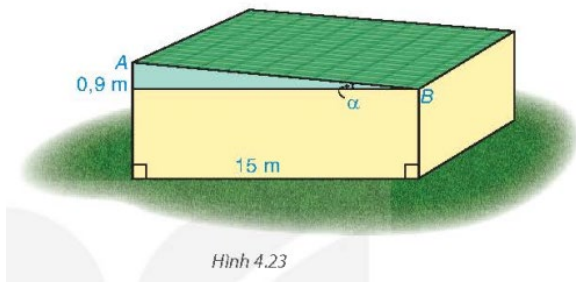


B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

4.9. Tính góc nghiêng α của thùng xe chở rác trong Hình 4.22.



4.10. Tìm góc nghiêng α và chiều rộng A B của mái nhà kho trong Hình 4.23.



Hình 4.23

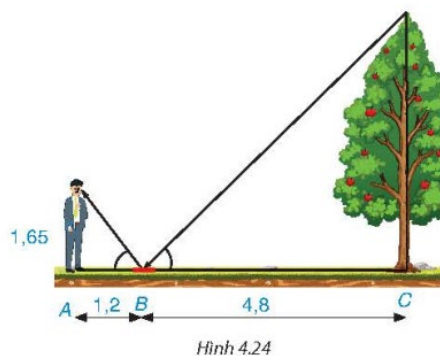
4.11. Tính các góc của hình thoi có hai đường chéo dài $2\sqrt{3}$ và 2.

4.12. Cho hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$) có $AD = 16\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$ và $\hat{A} = \hat{B} = \widehat{ACD} = 90^\circ$.

a) Kẻ đường cao CE của tam giác ACD . Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{ACE}$. Tính sin của các góc $\widehat{ADC}$, $\widehat{ACE}$ và suy ra $AC^2 = AE \cdot AD$. Từ đó tính AC .

b) Tính góc D của hình thang.

4.13. Một người đứng tại điểm A , cách gương phẳng đặt nằm trên mặt đất tại điểm B là $1,2\text{ m}$, nhìn thấy hình phản chiếu qua gương B của ngọn cây (cây có gốc ở tại điểm C cách B là $4,8\text{ m}$, B nằm giữa A và C). Biết khoảng cách từ mặt đất đến mắt người đó là $1,65\text{ m}$. Tính chiều cao của cây (H.4.24).



Hình 4.24

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

1. Phương pháp

- Vận dụng các công thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để tìm cạnh.
- Vận dụng công thức liên hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông để tìm cạnh.
- Vận dụng các tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính góc.

Lưu ý:

- Nếu cho trước 1 góc nhọn thì nên tìm góc nhọn còn lại.
- Nếu cho trước hai cạnh thì dùng định lý Py-ta-go tìm cạnh thứ hai.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết rằng:

a) $b = 10\text{ cm}$, $\widehat{C} = 30^\circ$;

b) $c = 10\text{ cm}$, $\widehat{C} = 45^\circ$;

c) $a = 20\text{ cm}$, $\widehat{B} = 35^\circ$;

d) $c = 21\text{ cm}$, $b = 18\text{ cm}$.

Ví dụ 2. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 3,5$ và $AC = 4,2$.

Ví dụ 3. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 3,0$ và $BC = 4,5$.

Ví dụ 4. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $\widehat{B} = 50^\circ$ và $AB = 3,7$.

Ví dụ 5. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $\widehat{B} = 57^\circ$ và $BC = 4,5$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 2,5$, $BH = 1,5$. Tính $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ và AC

DẠNG 2. TÍNH CẠNH, TÍNH GÓC CỦA TAM GIÁC

1. Phương pháp

Vẽ thêm một đường cao để vận dụng hệ thức giữa các cạnh và các góc của một tam giác vuông.

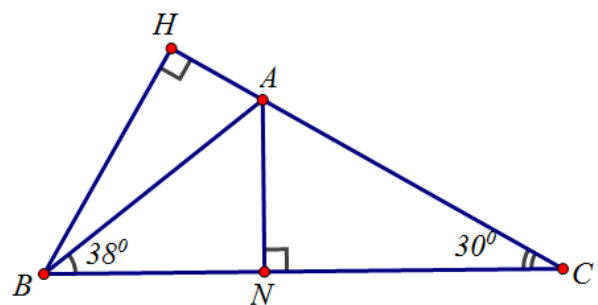
2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , trong đó

$$BC = 11\text{ cm}, \widehat{ABC} = 38^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ.$$

Gọi điểm N là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC . Hãy tính:

- Đoạn thẳng AN ;
- Cạnh AC .



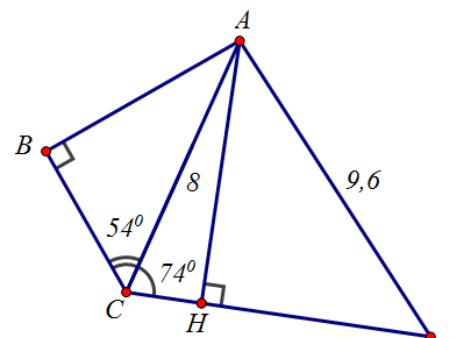
Hình 32

Ví dụ 2. Trong hình 33:

$$AC = 8\text{ cm}, AD = 9,6\text{ cm}, \widehat{ABC} = 90^\circ, \widehat{ACB} = 54^\circ \text{ và}$$

$$\widehat{ACD} = 74^\circ. \text{ Hãy tính:}$$

- Đoạn thẳng AB ;
- $\widehat{ADC}$.



Hình 33

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 65^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = 2,8\text{ cm}$. Tính các góc và cạnh còn lại của tam giác đó (gọi là giải tam giác ABC).

Ví dụ 4. Giải tam giác ABC biết $\widehat{B} = 65^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$ và $BC = 4,2\text{ cm}$.

Ví dụ 5. Giải tam giác nhọn ABC biết $AB = 2,1$, $AC = 3,8$ và $\hat{B} = 70^\circ$.

DẠNG 3: CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

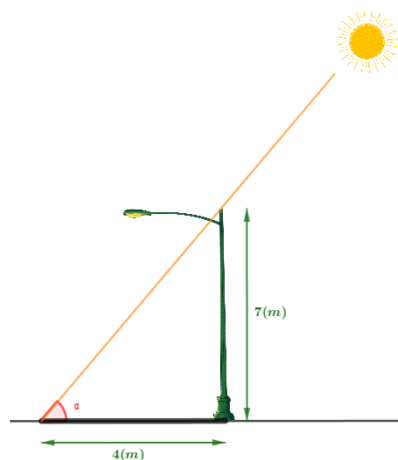
1. Phương pháp

Dùng hệ thức giữa các cạnh và các góc của một tam giác vuông.

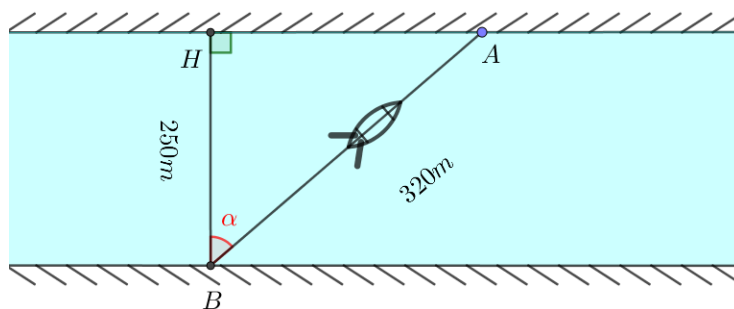
2. Ví dụ

Ví dụ 1: Các tia nắng Mặt Trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34° và bóng của một tháp trên mặt đất dài 86m. Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét).

Ví dụ 2: Một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc (làm tròn đến phút) mà tia sáng Mặt Trời tạo với mặt đất (góc α như trong hình 35).

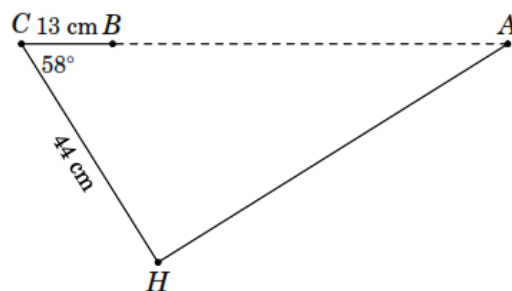


Ví dụ 3: Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một chiếc đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy đò lệch đi một góc bao nhiêu độ? (góc α trong hình 36).

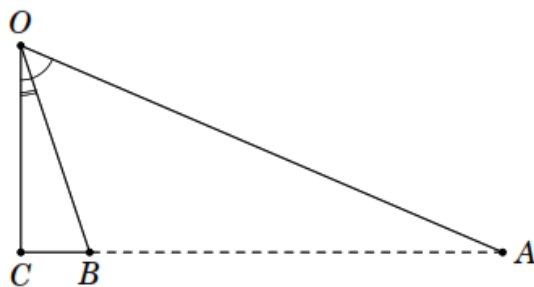


Ví dụ 4: Một con thuyền với vận tốc 2km/h vượt qua một khúc sông nước chảy mạnh mất 5 phút. Biết rằng đường đi của con thuyền tạo với bờ một góc 70° . Từ đó ta đã tính được chiều rộng của khúc sông chưa? Nếu có hãy tính kết quả (làm tròn đến mét).

Ví dụ 5. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B trên một bờ hồ nước sâu, biết $\widehat{C} = 58^\circ$, $CB = 13\text{m}$, $CH = 44\text{m}$ như hình bên.



Ví dụ 6. Trong hình vẽ bên dưới, tính chiều rộng AB của con sông, biết $OC = 47\text{m}$, $\widehat{AOC} = 74^\circ$, $\widehat{BOC} = 23^\circ$.



Ví dụ 7. Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là a như hình vẽ bên dưới. Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α . Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $a = 120\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Giải tam giác vuông ABC , biết $\widehat{A} = 90^\circ$ và:

a) $a = 15\text{cm}$; $b = 10\text{cm}$.

b) $b = 12\text{cm}$; $c = 7\text{cm}$.

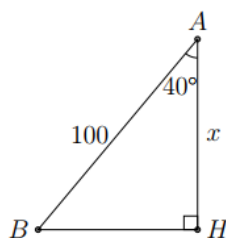
Câu 2. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 50^\circ$ và $AC = 35\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 3. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Cho biết $AB = 4\text{cm}$; $AD = 3\text{cm}$, tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng $b = 10\text{cm}$, $\widehat{C} = 30^\circ$.

Câu 5. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $7,5\text{m}$. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Tính chiều cao của cột đèn.

Câu 6. Một chiếc diều với đoạn dây thả diều AB dài 100m , dây thả diều tạo với phương thẳng đứng một góc 40° (hình bên). Tính chiều cao của diều.



Câu 7. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 15\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 42^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Hãy tính

- Độ dài đoạn thẳng AH
- Độ dài đoạn thẳng AC

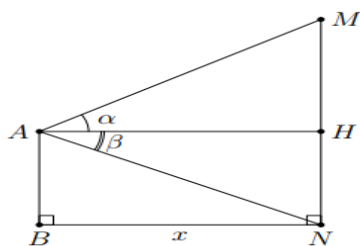
Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$.

- Giải tam giác vuông ABC .
- Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AC , đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D . Tính độ dài các đoạn thẳng AD và BD .

Câu 9. Cho $\triangle ABD$ vuông tại A , $AB = 21\text{cm}$, $\hat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đường phân giác BD .

Câu 10. Tính diện tích $\triangle ABC$ có $BC = 2\text{cm}$, $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$.

Câu 11. Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là x (như hình vẽ). Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α . Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $x = 120\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 20^\circ$



Câu 12. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = 38^\circ$, $AB = 3,5$ và $AD = 3,1$.

Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Câu 13. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 2\text{cm}$, $CD = 6\text{cm}$, chiều cao bằng 4cm . Tính góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa cạnh bên hình thang.

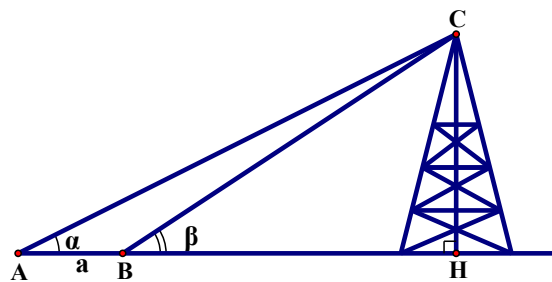
Câu 14. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{B} = 40^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$, đường trung tuyến AM . Tính số đo góc AMC

Câu 15. Tính diện tích tam giác ABC biết $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 135^\circ$, $BC = 2\text{cm}$.

Câu 16. Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $AC = 4\text{cm}$; $BD = 5\text{cm}$ và $\widehat{AOB} = 50^\circ$. Tính diện tích tam giác ABCD.

Câu 17. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° và có độ cao là 2,1m. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 18. Hãy xác định độ cao của cột ăng- ten CH trong hình 38 với $a = 8,5\text{m}$; $\alpha = 20^\circ$; $\beta = 24^\circ$ (làm tròn đến hàng đơn vị)



Hình 38

LUYỆN TẬP CHUNG

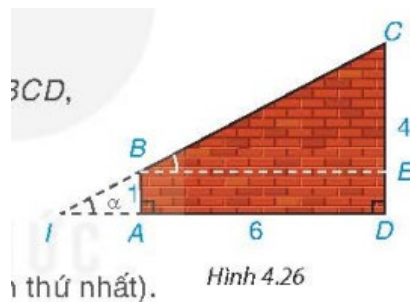
PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 5\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$.

- Tính các tỉ số lượng giác của góc B .
- Từ kết quả câu a) suy ra các tỉ số lượng giác của góc C .

Ví dụ 2. Một bức tường đang xây dở có dạng hình thang vuông ABCD, vuông góc ở A và D , $AB = 1\text{ m}$, $CD = 4\text{ m}$, $AD = 6\text{ m}$.

- Hỏi góc α tạo bởi đường thẳng BC và mặt đất AD có số đo xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn đến phút)?
- Tính độ dài cạnh BC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



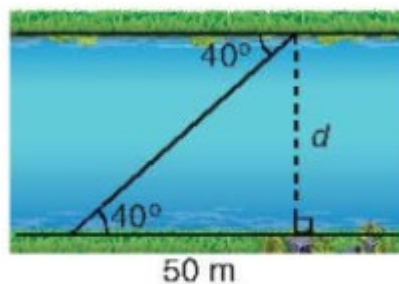
Hình 4.26

B. BÀI TẬP

4.14. Một cuốn sách khổ $17 \times 24\text{ cm}$, tức là chiều rộng 17 cm , chiều dài 24 cm . Gọi α là góc giữa đường chéo và cạnh 17 cm . Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) và tính số đo α (làm tròn đến độ).

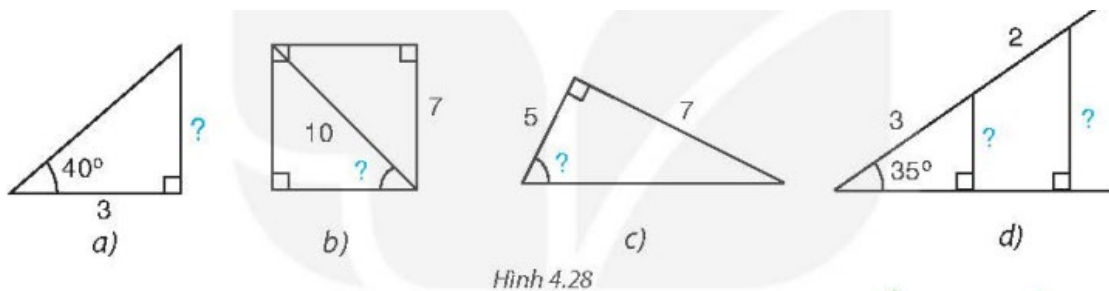
4.15. Cho tam giác ABC có chân đường cao AH nằm giữa B và C . Biết $HB = 3\text{ cm}$, $HC = 6\text{ cm}$, $\widehat{HAC} = 60^\circ$. Hãy tính độ dài các cạnh (làm tròn đến cm), số đo các góc của tam giác ABC (làm tròn đến độ).

4.16. Tìm chiều rộng d của dòng sông trong Hình 4.27 (làm tròn đến m).



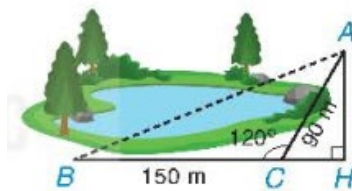
Hình 4.27

4.17. Tính các số liệu còn thiếu (dấu "?") ở Hình 4.28 với góc làm tròn đến độ, với độ dài làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.



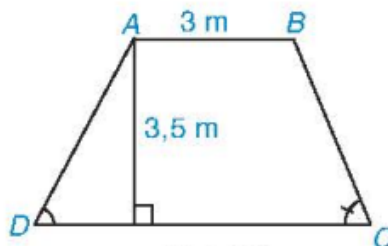
Hình 4.28

4.18. Một bạn muốn tính khoảng cách giữa hai địa điểm A , B ở hai bên hồ nước. Biết rằng các khoảng cách từ một điểm C đến A và đến B là $CA = 90\text{ m}$, $CB = 150\text{ m}$ và $\widehat{ACB} = 120^\circ$ (H.4.29). Hãy tính AB giúp bạn.



Hình 4.29

4.19. Mặt cắt ngang của một đập ngăn nước có dạng hình thang $ABCD$ (H.4.30). Chiều rộng của mặt trên AB của đập là 3 m . Độ dốc của sườn AD , tức là $\tan D = 1,25$. Độ dốc của sườn BC , tức là $\tan C = 1,5$. Chiều cao của đập là $3,5\text{ m}$. Hãy tính chiều rộng CD của chân đập, chiều dài của các sườn AD và BC (làm tròn đến dm).



Hình 4.30

4.20. Trong một buổi tập trận, một tàu ngầm đang ở trên mặt biển bắt đầu đi chuyển theo đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° để lặn xuống (H.4.31).

a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được 200 m thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước biển? (làm tròn đến m).

b) Giả sử tốc độ của tàu là 9 km/h thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200 m (tức là cách mặt nước biển 200 m)?



Hình 4.31

Bài 1. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết

b) $AC = 4,0$ và $BC = 4,8$.

a) $BC = 4,5$ và $\hat{C} = 35^\circ$;

b) $AB = 3,1$ và $\hat{B} = 65^\circ$.

Bài 4. Hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$. Biết $AB = 2,6$, $CD = 4,7$ và $\hat{C} = 35^\circ$. Tính diện tích hình thang.

a) Chứng minh rằng $HB - HC = 2HM$;

b) Chứng minh rằng $\tan \alpha = \frac{\cot B - \cot C}{2}$.

Bài 6. Giải tam giác nhọn ABC biết $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = 3,0$ và $BC = 4,5$.

Bài 7. Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = 38^\circ$, $AB = 3,5$, $AD = 3,1$. Tính diện tích hình thang đó.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

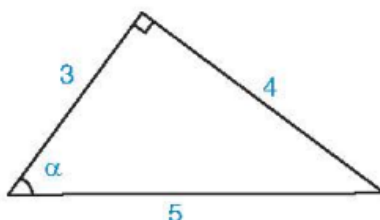
4.21. Trong Hình 4.32, $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{5}{3}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{4}{5}$.



Hình 4.32

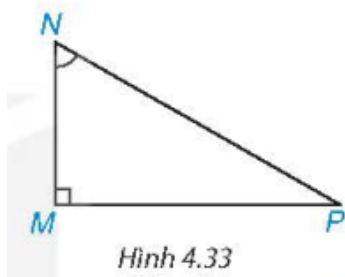
4.22. Trong tam giác MNP vuông tại M (H.4.33), $\sin \widehat{MNP}$ bằng

A. $\frac{PN}{NM}$.

B. $\frac{MP}{PN}$.

C. $\frac{MN}{PN}$.

D. $\frac{MN}{MP}$.



Hình 4.33

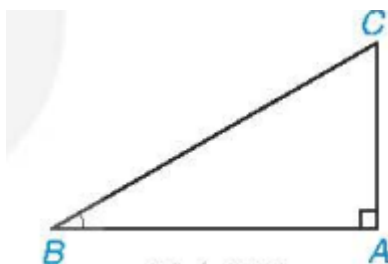
4.23. Trong tam giác ABC vuông tại A (H.4.34), $\tan B$ bằng

A. $\frac{AB}{AC}$.

B. $\frac{AC}{AB}$.

C. $\frac{AB}{BC}$.

D. $\frac{BC}{AC}$.



Hình 4.34

4.24. Với mọi góc nhọn α , ta có

A. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

B. $\tan(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

C. $\cot(90^\circ - \alpha) = 1 - \tan \alpha$.

D. $\cot(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

4.25. Giá trị $\tan 30^\circ$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

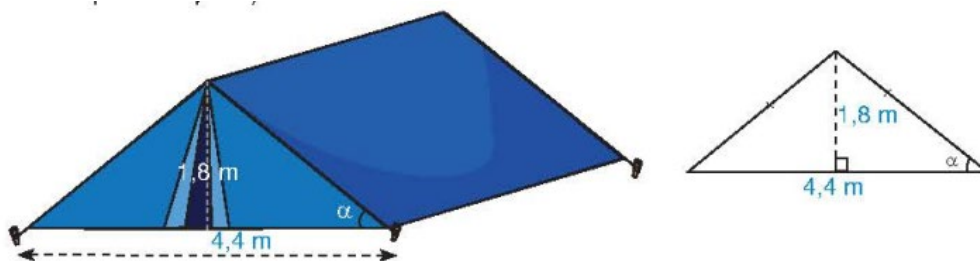
C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. 1.

B. TỰ LUẬN

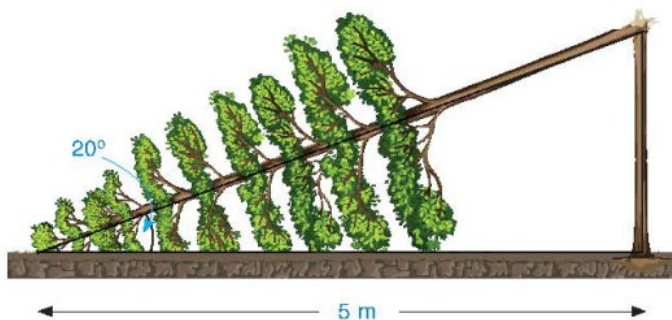
4.26. Xét các tam giác vuông có một góc nhọn bằng hai lần góc nhọn còn lại. Hỏi các tam giác đó có đồng dạng với nhau không? Tính sin và cosin của góc nhọn lớn hơn.

4.27. Hình 4.35 là mô hình của một túp lều. Tìm góc α giữa cạnh mái lều và mặt đất (làm tròn kết quả đến phút).



Hình 4.35

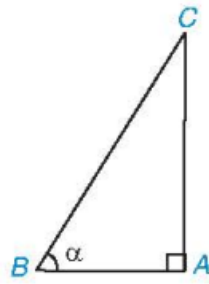
4.28. Một cây cao bị gãy, ngọn cây đổ xuống mặt đất. Ba điểm: gốc cây, điểm gãy, ngọn cây tạo thành một tam giác vuông. Đoạn cây gãy tạo với mặt đất góc 20° và chẵn ngang lối đi một đoạn 5 m (H.4.36). Hỏi trước khi bị gãy, cây cao khoảng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



4.29. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\hat{B} = \alpha$ (H.4.37).

a) Hãy viết các tỉ số lượng giác $\sin \alpha, \cos \alpha$.

b) Sử dụng định lý Pythagore, chứng minh rằng $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.



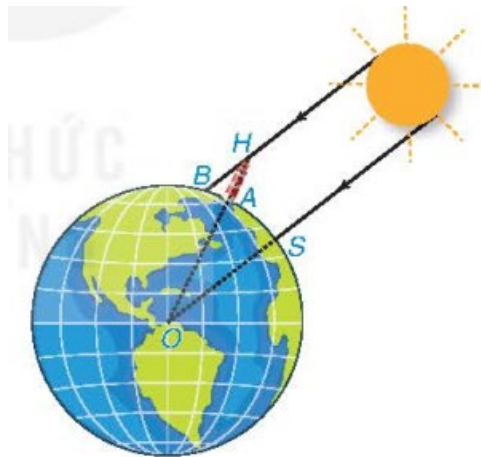
Hình 4.37

4.30. ĐÓ VUI. Chu vi Trái Đất bằng bao nhiêu?

Vào khoảng năm 200 trước Công nguyên, Eratosthenes (O-ra-tô-xten), một nhà toán học và thiên văn học người Hy Lạp, đã ước lượng được "chu vi" của Trái Đất (chu vi của đường Xích Đạo) nhờ hai quan sát sau:

1. Hồi đó, hằng năm cứ vào trưa ngày Hạ chí (21/6), người ta thấy tia sáng mặt trời chiếu thẳng xuống đáy một cái giếng sâu nổi tiếng ở thành phố Syene (Xy -en), tức là tia sáng chiếu thẳng đứng.
2. Cũng vào trưa một ngày Hạ chí, ở thành phố Alexandria (A-lếch-xăng-dri-a) cách Syene 800km, Eratosthenes thấy một tháp cao 25m có bóng trên mặt đất dài 3,1m .

Từ hai quan sát trên, ông có thể tính xấp xỉ "chu vi" của Trái Đất như thế nào? (trên Hình 4.38, điểm O là tâm Trái Đất, điểm S tượng trưng cho thành phố Syene, điểm A tượng trưng cho thành phố Alexandria, điểm H là đỉnh của tháp, bóng của tháp trên mặt đất được coi là đoạn thẳng AB).



Hình 4.38

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 13$ cm. Giá trị của $\sin C$ bằng

- A. $\frac{5}{12}$. B. $\frac{1}{13}$. C. $\frac{12}{13}$. D. $\frac{5}{13}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cos B = \frac{AB}{BC}$. B. $\cos B = \frac{AC}{AB}$. C. $\cos B = \frac{AB}{AC}$. D. $\cos B = \frac{AC}{BC}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A . Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $\sin B = \frac{AB}{BC}$. B. $\sin B = \frac{AB}{AC}$. C. $\tan B = \frac{AB}{AC}$. D. $\cos B = \frac{AB}{AC}$.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\cos 35^\circ > \sin 40^\circ$. B. $\sin 35^\circ > \cos 40^\circ$.
C. $\sin 35^\circ < \sin 40^\circ$. D. $\cos 35^\circ > \cos 40^\circ$.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Hệ thức nào đây **sai**?

- A. $AC^2 = BC \cdot HC$. B. $AH^2 = AB \cdot AC$.
C. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$. D. $AH^2 = HB \cdot HC$.

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $BH = 3,2\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$ thì độ dài AB bằng

- A. 8 cm. B. 16 cm. C. 1,8 cm. D. 4 cm.

Câu 7: Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ACB} = 30^\circ$, cạnh $AB = 5$ cm. Độ dài cạnh AC là

- A. 10 cm. B. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ cm. C. $5\sqrt{3}$ cm. D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại C . Biết $\sin B = \frac{1}{3}$, khi đó $\tan A$ bằng

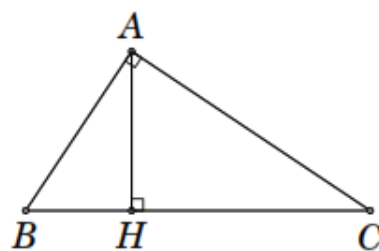
- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. 3. C. $2\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 9: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $BC = 12$ cm. Tính độ dài đường cao AH .

- A. $AH = 3$ cm. B. $AH = 2\sqrt{3}$ cm. C. $AH = 4\sqrt{3}$ cm. D. $AH = 6$ cm.

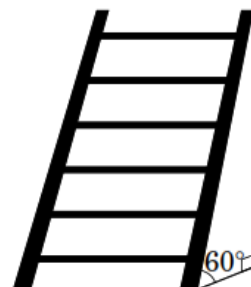
Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (hình bên). Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A. $\sin B = \frac{AH}{AB}$. B. $\tan \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH}$.
C. $\cos C = \frac{HC}{AC}$. D. $\cot \widehat{HAC} = \frac{AH}{AC}$.



Câu 11: Một cái thang dài 4 m đặt dựa vào tường, biết góc giữa thang và mặt đất là 60° . Khoảng cách d từ chân thang đến tường bằng bao nhiêu?

- A. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m. B. $d = 2\sqrt{3}$ m.
C. $d = 2\sqrt{2}$ m. D. $d = 2$ m.



Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2\sqrt{5}a$, $AC = 5\sqrt{3}a$. Kẻ AK vuông góc với BC , với K nằm trên cạnh BC . Tính AK theo a .

- A. $AK = \frac{19\sqrt{57}}{10}a$. B. $AK = \frac{\sqrt{95}}{2}a$.

C. $AK = \frac{10\sqrt{57}}{19}a$.

D. $AK = \frac{5\sqrt{57}}{19}a$.

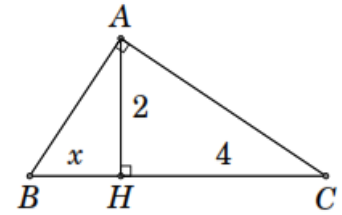
Câu 13: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AH = 2$, $HC = 4$. Đặt $BH = x$ (hình bên). Tính x .

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = 1$.

C. $x = \frac{16}{3}$.

D. $x = 4$.



Câu 14: Cho $\widehat{xOy} = 45^\circ$. Trên tia Oy lấy hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$ cm. Tính độ dài hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên Ox .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm.

C. 1 cm.

D. $\frac{1}{2}$ cm.

Câu 15: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH và đường trung tuyến AM ($H, M \in BC$). Biết chu vi của tam giác là 72 cm và $AM - AH = 7$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

A. $S = 48 \text{ cm}^2$.

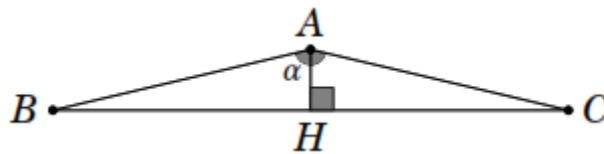
B. $S = 108 \text{ cm}^2$.

C. $S = 148 \text{ cm}^2$.

D. $S = 144 \text{ cm}^2$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

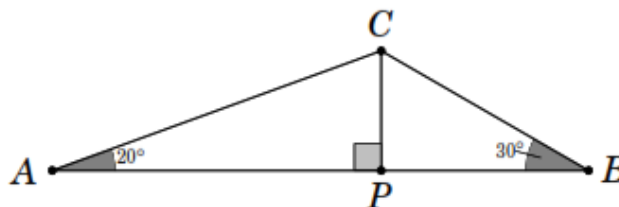
Bài 1. Xem hình bên và tính góc tạo bởi hai mái nhà AB và AC , biết rằng mỗi mái nhà dài 2,34m và cao 0,8m.



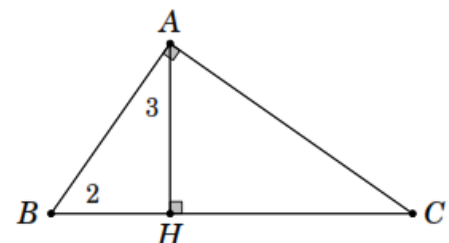
Bài 2. Tam giác ABC có $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, $AB = 6$ cm. Đường vuông góc kẻ từ C đến AB cắt AB tại P (hình vẽ bên). Hãy tìm

a) AP , BP ;

b) CP .



Bài 3. Tính độ dài các cạnh và số đo các góc nhọn của tam giác ABC vuông tại A trong hình bên



Bài 4. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AD = 2,1\text{cm}$; $CD = 6,0\text{cm}$ và $\hat{D} = 48^\circ$.

a) Tính độ dài AB .

b) Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$.

a) Tính BC , $\hat{B}$, $\hat{C}$;

b) Phân giác của $\hat{A}$ cắt BC tại D . Tính BD , CD .

c) Từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB , AC . Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Tính chu vi và diện tích của tứ giác $AEDF$?

Bài 6. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Biết $\hat{A} = 44^\circ$; $AH = 9\text{cm}$. Tính chu vi tam giác ABC .

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A . Chứng minh rằng $\tan \frac{B}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$.

Bài 8. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $\hat{C} = 36^\circ$; $\hat{D} = 50^\circ$. Biết $AB = 4\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$. Tính chu vi hình thang.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ $HM \perp AB$; $HN \perp AC$. Biết $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$.

a) Tính độ dài MN .

b) Tính số đo các góc của tam giác AMN .

c) Tính diện tích tứ giác $BMNC$.

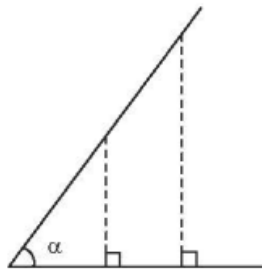
BÀI 11. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC GÓC NHỌN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. KHÁI NIỆM TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

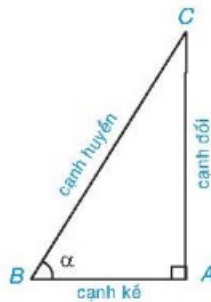
Khái niệm sin, cosin, tang, cotang của góc nhọn α

Nhận xét. Trong Hình 4.4, các tam giác vuông có cùng một góc nhọn α là đồng dạng với nhau. Vì vậy các tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền (cạnh kề và cạnh huyền), cạnh đối và cạnh kề (cạnh kề và cạnh đối) của góc nhọn α là như nhau, cho dù độ dài các cạnh đối (các cạnh kề) của góc α và các cạnh huyền có thể khác nhau với từng tam giác.



Hình 4.4

Cho góc nhọn α . Xét tam giác ABC vuông tại A có góc nhọn B bằng α . (H.4.5). Ta có:



Hình 4.5

- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền gọi là sin của α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền gọi là cosin của α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của góc α gọi là tang của α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối của góc α gọi là cotang của α , kí hiệu $\cot \alpha$.

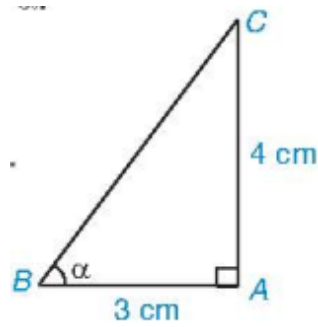
Chú ý. Ta có:

- $\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}};$
 $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$
- $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ gọi là các tỉ số lượng giác của góc nhọn α .

Chú ý:

sin, cosin của góc nhọn luôn dương và bé hơn 1 vì trong tam giác vuông, cạnh huyền dài nhất

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3\text{cm}, AC = 4\text{cm}$ (H.4.6). Hãy tính các tỉ số lượng giác $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ với $\alpha = \hat{B}$.



Hình 4.6

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , $\hat{B} = \alpha$.

Theo Định lí Pythagore, ta có: $BC^2 = AC^2 + AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ nên $BC = 5(\text{cm})$.

Theo định nghĩa của tỉ số lượng giác sin, cosin, tang, ta có:

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}.$$

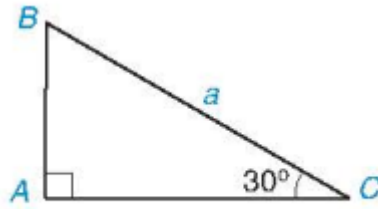
Chú ý: $\sin \alpha$ còn được viết là $\sin \hat{B}$ hay $\sin B$. Tương tự cho $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$.

Giá trị lượng giác sin, cosin, tang, cotang của các góc $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

Ta có bảng sau:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{C} = 30^\circ$ và $BC = a$ (H.4.8). Tính các cạnh AB , AC theo a .



Hình 4.8

Lời giải

Ta có $\sin C = \frac{AB}{BC}$, suy ra $AB = BC \cdot \sin C = a \cdot \sin 30^\circ$. Theo bảng trên, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ nên $AB = \frac{a}{2}$.

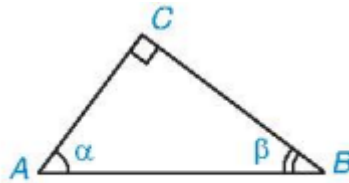
Tương tự, ta có $\cos C = \frac{AC}{BC}$, suy ra $AC = BC \cdot \cos C = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

a) Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Định lý: Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

Chú ý. Cho α và β là hai góc phụ nhau (H.4.9), khi đó
 $\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta, \tan \alpha = \cot \beta, \cot \alpha = \tan \beta$.



Hình 4.9

- Vẽ số đo, hai góc phụ nhau có thể coi là hai góc nhọn của một tam giác vuông.

Ví dụ 3. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của góc nhỏ hơn 45° :

$\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \tan 80^\circ, \cot 82^\circ$.

Lời giải

Ta có:

$$\sin 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ;$$

$$\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ;$$

$$\sin 52^\circ 30' = \cos(90^\circ - 52^\circ 30') = \cos 37^\circ 30';$$

$$\tan 80^\circ = \cot(90^\circ - 80^\circ) = \cot 10^\circ;$$

$$\cot 82^\circ = \tan(90^\circ - 82^\circ) = \tan 8^\circ.$$

3. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

Chú ý: Về số đo góc, dưới đơn vị độ ($^\circ$) còn có các đơn vị phút ($'$) và giây ($''$) với $1^\circ = 60', 1' = 60''$.

Ví dụ 4. $1^\circ = 60', 1' = 60''$. Dùng MTCT, tính $\sin 27^\circ, \cos 32^\circ 15', \tan 52^\circ 12'$ và $\cot 35^\circ 23'$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Để tính	Bấm phím	Kết quả
$\sin 27^\circ$	$\boxed{\sin} \boxed{2} \boxed{7} \boxed{=}$	0,4539904997
$\cos 32^\circ 15'$	$\boxed{\cos} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{=}, \boxed{1} \boxed{5} \boxed{=}$	0,8457278217
$\tan 52^\circ 12'$	$\boxed{\tan} \boxed{5} \boxed{2} \boxed{=}, \boxed{1} \boxed{2} \boxed{=}$	1,289192232
$\cot 35^\circ 23'$	$\boxed{\tan} \boxed{3} \boxed{5} \boxed{=}, \boxed{2} \boxed{3} \boxed{=}, \boxed{x^{-1}} \boxed{=}$	1,408003909

Làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba ta được $\sin 27^\circ \approx 0,454$; $\cos 32^\circ 15' \approx 0,846$; $\tan 52^\circ 12' \approx 1,289$; $\cot 35^\circ 23' \approx 1,408$.

Lưu ý: $\cot 35^\circ 23' = \frac{1}{\tan 35^\circ 23'}$.

Nhận xét. Để tính $\cot 35^\circ 23'$, ta có thể tính trực tiếp như trên, hoặc có thể tìm góc phụ với góc $35^\circ 23'$ là $54^\circ 37'$ rồi dùng MTCT tính $\tan 54^\circ 37'$ và suy ra kết quả.

Ví dụ 5. Dùng MTCT, tìm các góc (làm tròn đến phút) biết $\sin \alpha_1 = 0,3214$, $\cos \alpha_2 = 0,4321$, $\tan \alpha_3 = 1,2742$ và $\cot \alpha_4 = 1,5384$.

Lời giải

Biết	Bấm phím	Kết quả	Bấm tiếp $\boxed{=}$
$\sin \alpha_1 = 0,3214$	$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sin} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{4} \boxed{=}$	18,74761209	$18^\circ 44' 51,4''$
$\cos \alpha_2 = 0,4321$	$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\cos} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{=}$	64,39909458	$64^\circ 23' 56,74''$
$\tan \alpha_3 = 1,2742$	$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{.} \boxed{2} \boxed{7} \boxed{4} \boxed{2} \boxed{=}$	51,87495892	$51^\circ 52' 29,85''$
$\cot \alpha_4 = 1,5384$	$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{.} \boxed{5} \boxed{3} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{x^{-1}} \boxed{=}$	33,02491482	$33^\circ 1' 29,69''$

Làm tròn đến phút ta được $\alpha_1 \approx 18^\circ 45'$; $\alpha_2 \approx 64^\circ 24'$; $\alpha_3 \approx 51^\circ 52'$; $\alpha_4 \approx 33^\circ 1'$.

Chú ý. Để tìm góc α khi biết $\cot \alpha$, ta có thể tìm góc $(90^\circ - \alpha)$ (vì $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$) rồi suy ra α .

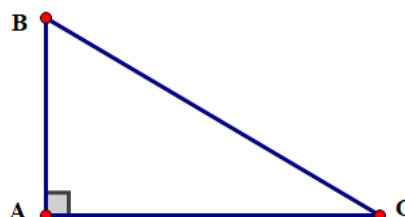
B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

4.1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính các tỉ số lượng giác sin, cosin, tang, cotang của các góc nhọn B và C khi biết:

a) $AB = 8\text{ cm}$, $BC = 17\text{ cm}$;

b) $AC = 0,9\text{ cm}$, $AB = 1,2\text{ cm}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, theo định lý Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Suy ra $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 17^2 - 8^2 = 225$. Do đó $AC = 15\text{ cm}$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , theo định nghĩa tỉ số lượng giác sin, cosin, tang, cotang và định lý tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, ta có:

$$\bullet \sin B = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17};$$

$$\bullet \cos B = \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{17}$$

$$\bullet \tan B = \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{8}$$

$$\bullet \cot B = \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{15}.$$

b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , theo định lý Pythagore, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1,2^2 + 0,9^2 = 2,25 \text{ Do đó } BC = 1,5 \text{ cm}.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , theo định nghĩa tỉ số lượng giác sin, cosin, tang, cotang và định lý tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, ta có:

$$\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{0,9}{1,5} = \frac{3}{5};$$

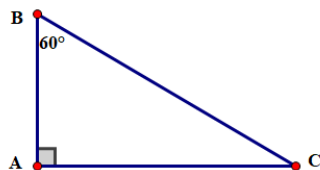
$$\cos B = \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5};$$

$$\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{0,9}{1,2} = \frac{3}{4};$$

$$\cot B = \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{1,2}{0,9} = \frac{4}{3}.$$

4.2. Cho tam giác vuông có một góc nhọn 60° và cạnh kề với góc 60° bằng 3 cm. Hãy tính cạnh đối của góc này.

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ có $\hat{B} = 60^\circ$, cạnh kề với góc B là $AB = 3 \text{ cm}$. Ta cần tính cạnh đối của góc B là AC .

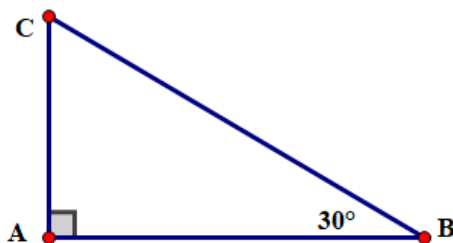
Theo định nghĩa tỉ số lượng giác tan, ta có $\tan B = \frac{AC}{AB}$. Suy ra

$$AC = AB \cdot \tan B = 3 \tan 60^\circ = 3\sqrt{3} (\text{cm}).$$

Vậy cạnh đối của góc nhọn 60° là $3\sqrt{3} \text{ cm}$.

4.3. Cho tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° và cạnh đối với góc này bằng 5 cm. Tính độ dài cạnh huyền của tam giác.

Lời giải



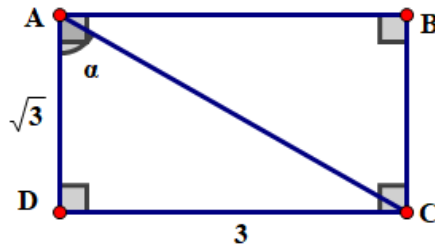
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $\hat{B} = 30^\circ$, cạnh đối với góc B là $AC = 5 \text{ cm}$. Ta cần tính cạnh huyền của tam giác là BC . Theo định nghĩa tỉ số lượng giác sin, ta có $\sin B = \frac{AC}{BC}$.

$$\text{Suy ra } BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10(\text{cm}).$$

Vậy cạnh huyền của tam giác là 10 cm.

4.4. Cho hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 3 và $\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường chéo và cạnh ngắn hơn của hình chữ nhật (sử dụng bảng giá trị lượng giác trang 69).

Lời giải



Gọi hình chữ nhật trong bài là hình chữ nhật ABCD với chiều rộng là cạnh $AD = \sqrt{3}$, chiều dài là cạnh $CD = 3$, đường chéo AC , góc tạo bởi đường chéo và cạnh ngắn hơn của hình chữ nhật là góc α .

Xét $\triangle ABC$ vuông tại D , theo định nghĩa tỉ số lượng giác tan, ta có:

$$\tan \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \text{ suy ra } \alpha = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa đường chéo và cạnh ngắn hơn của hình chữ nhật đã cho là 60° .

4.5. a) Viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :

$$\sin 55^\circ, \cos 62^\circ, \tan 57^\circ, \cot 64^\circ.$$

b) Tính $\frac{\tan 25^\circ}{\cot 65^\circ}, \tan 34^\circ - \cot 56^\circ$.

Lời giải

a) Áp dụng định lý tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, ta có:

$$\sin 55^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ) = \cos 35^\circ; \quad \cos 62^\circ = \sin(90^\circ - 62^\circ) = \sin 28^\circ;$$

$$\tan 57^\circ = \cot(90^\circ - 57^\circ) = \cot 33^\circ; \quad \cot 64^\circ = \tan(90^\circ - 64^\circ) = \tan 26^\circ.$$

b) Áp dụng định lý tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, ta có:

$$\frac{\tan 25^\circ}{\cot 65^\circ} = \frac{\cot(90^\circ - 25^\circ)}{\cot 65^\circ} = \frac{\cot 65^\circ}{\cot 65^\circ} = 1;$$

$$\tan 34^\circ - \cot 56^\circ = \tan 34^\circ - \tan(90^\circ - 56^\circ) = \tan 34^\circ - \tan 34^\circ = 0.$$

4.6. Dùng MTCT, tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $\sin 40^\circ 12'$;

b) $\cos 52^\circ 54'$;

c) $\tan 63^\circ 36'$;

d) $\cot 25^\circ 18'$.

Lời giải

Đề tính	Bấm phím	Kết quả
$\sin 40^\circ 12'$	$\boxed{\sin} \boxed{4} \boxed{0} \boxed{^\circ} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{' } \boxed{=}$	0,6454576877
$\cos 52^\circ 54'$	$\boxed{\cos} \boxed{5} \boxed{2} \boxed{^\circ} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{' } \boxed{=}$	0,6032079877
$\tan 63^\circ 36'$	$\boxed{\tan} \boxed{6} \boxed{3} \boxed{^\circ} \boxed{3} \boxed{6} \boxed{' } \boxed{=}$	2,014486937
$\cot 35^\circ 20'$	$\boxed{\tan} \boxed{3} \boxed{5} \boxed{^\circ} \boxed{2} \boxed{0} \boxed{' } \boxed{=} \boxed{x^{-1}} \boxed{=}$	1,410609812

Làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba, ta được:

$$\sin 40^\circ 12' \approx 0,645; \quad \cos 52^\circ 54' \approx 0,603; \quad \tan 63^\circ 36' \approx 2,014; \quad \cot 35^\circ 20' \approx 1,411.$$

4.7. Dùng MTCT, tìm số đo của góc nhọn x (làm tròn đến phút), biết rằng:

a) $\sin x = 0,2368$;

b) $\cos x = 0,6224$;

c) $\tan x = 1,236$;

d) $\cot x = 2,154$.

Lời giải

Biết	Bấm phím	Kết quả	Bấm tiếp $\boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{''}$	Làm tròn đến phút
$\sin x = 0,2368$	$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sin} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{6} \boxed{8} \boxed{=}$	13,6977504	$13^\circ 41' 51,9''$	$x \approx 13^\circ 42'$
$\cos x = 0,6224$	$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\cos} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{6} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{4} \boxed{=}$	51,50839221	$51^\circ 30' 30,21''$	$x \approx 51^\circ 31'$
$\tan x = 1,236$	$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{.} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{6} \boxed{=}$	51,02501186	$51^\circ 1' 30,04''$	$x \approx 51^\circ 2'$
$\cot x = 2,154$	$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\tan} \boxed{2} \boxed{.} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{x^{-1}} \boxed{=}$	24,90320574	$24^\circ 54' 11,54''$	$x \approx 24^\circ 54'$

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính các tỉ số lượng giác của các góc nhọn trong một tam giác vuông biết độ dài các cạnh

1. Phương pháp giải

Dựng một tam giác có hai cạnh là m và n (m và n là hai cạnh góc vuông hoặc một cạnh góc vuông và cạnh huyền) rồi vận dụng định nghĩa của các tỉ số lượng giác để nhận ra góc α

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại C, trong đó $BC = 1,2\text{m}$ và $AB = 1,5\text{m}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.

Lời giải

Áp dụng định lí Pitago ta có: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 0,9\text{m}$

$$\sin B = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{0,9}{1,5} = 0,60$$

$$\cos B = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1,2}{1,5} = 0,80.$$

$$\tan B = \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{0,9}{1,2} = 0,75$$

$$\cot B = \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1,2}{0,9} = 1,3.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn B

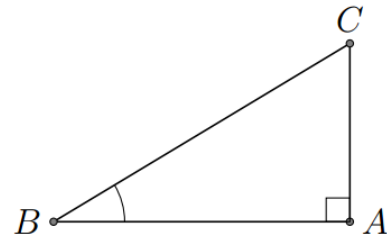
Lời giải

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \text{ nên } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Ta có

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}; \quad \tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3};$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}; \quad \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}.$$



Ví dụ 3. Tam giác ABC vuông tại A , $AB = 1,5$; $BC = 3,5$. Tính tỉ số lượng giác của góc C rồi suy ra các tỉ số lượng giác của góc B .

Lời giải

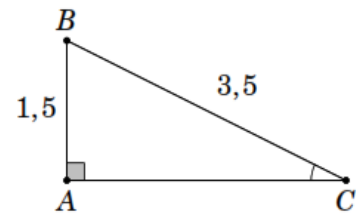
$$\text{Ta có } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 3,5^2 - 1,5^2 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}.$$

$$\text{Do đó } \cos B = \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{1,5}{3,5} \approx 0,4286$$

$$\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{3,5} \approx 0,9035$$

$$\cot B = \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{1,5}{\sqrt{10}} \approx 0,4743$$

$$\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{1,5} \approx 2,1082$$



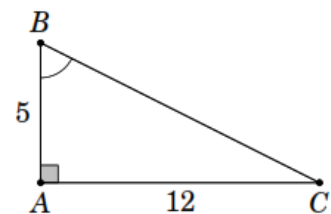
Ví dụ 4. Tính tỉ số lượng giác của góc B trong hình bên.

Lời giải

$$\text{Ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BC = 13.$$

$$\text{Do đó } \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}; \quad \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13};$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{5}; \quad \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}.$$



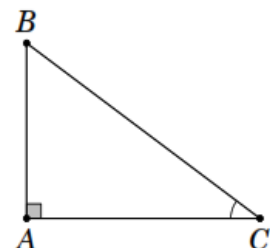
Ví dụ 5. ΔABC vuông tại A có $BC = 2AB$. Tính các tỉ số lượng giác của góc C .

Lời giải

Ta đặt $AB = m$ thì $BC = 2m$, suy ra

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4m^2 - m^2 = 3m^2 \Rightarrow AC = m\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}; \quad \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{m\sqrt{3}}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$



$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{m\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{m\sqrt{3}}{m} = \sqrt{3}.$$

Ví dụ 6. Tam giác ABC cân tại A , có $BC = 6$, đường cao $AH = 4$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B .

Lời giải

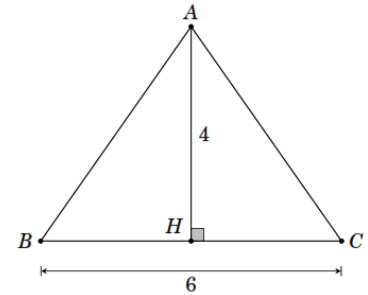
Ta có $BH = 6 : 2 = 3$; $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Do đó

$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8;$$

$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6;$$

$$\tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{3};$$

$$\cot B = \frac{BH}{AH} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

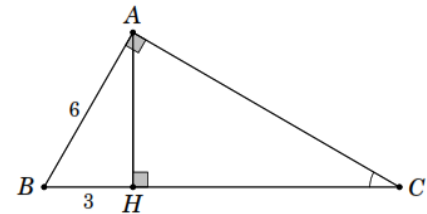


Ví dụ 7. Tính $\tan C$ trong hình bên.

Lời giải

Ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow AH = 3\sqrt{3}$.

Do đó $\tan C = \cot B = \frac{BH}{AH} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Ví dụ 8. Tính $\sin M + \cos N$ trong hình bên.

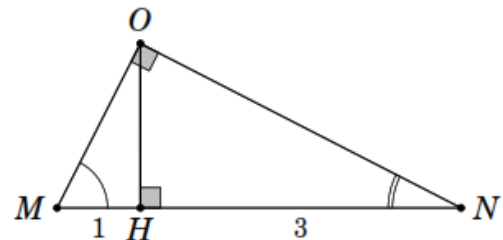
Lời giải

Ta có $OH^2 = HM \cdot HN = 1 \cdot 3 = 3 \Rightarrow OH = \sqrt{3}$;

$OM = \sqrt{1+3} = 2$.

Do đó $\sin M = \frac{OH}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác $\cos N = \sin M = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\sin M + \cos N = \sqrt{3}$.



Dạng 2. Biến đổi tỉ số lượng giác của một góc nhọn thành tỉ số lượng giác của một góc nhỏ hơn (hoặc lớn hơn 45 độ)

1. Phương pháp giải

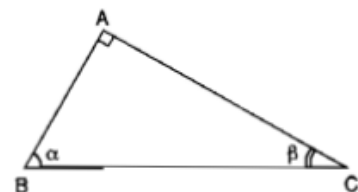
Nếu hai góc phụ nhau thì $\sin$ góc này bằng $\cos$ góc kia, $\tan$ góc này bằng $\cot$ góc kia.

$$\sin B = \cos C \quad ;$$

$$\cos B = \sin C$$

$$\tan B = \cot C \quad ;$$

$$\cot B = \tan C.$$



2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :

$$\sin 60^\circ; \cos 75^\circ; \sin 52^\circ 30'; \cot 82^\circ; \tan 80^\circ$$

Lời giải

$$\sin 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\text{Tương tự, } \cos 75^\circ = \sin 15^\circ; \sin 52^\circ 30' = \cos 37^\circ 30'$$

$$\cot 82^\circ = \tan 8^\circ; \tan 80^\circ = \cot 10^\circ$$

Ví dụ 2. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :

$$\cos 32^\circ 7'; \sin 42^\circ; \cot 27^\circ 36'$$

Lời giải

$$\sin 57^\circ 53'; \cos 48^\circ; \tan 62^\circ 24'$$

Dạng 3. Tính độ dài một cạnh trong tam giác vuông biết một góc và một cạnh

1. Phương pháp giải

✦ Sử dụng định nghĩa của các tỉ số lượng giác, chẳng hạn $\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$

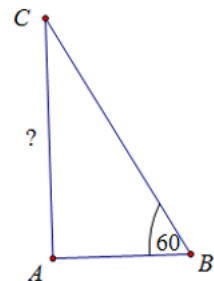
$$\Rightarrow \text{cạnh đối} = \text{cạnh huyền} \cdot \sin \alpha.$$

2. Ví dụ minh họa

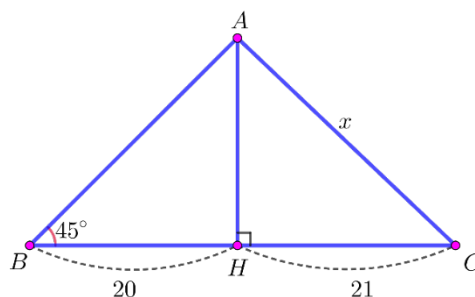
Ví dụ 1. Cho tam giác vuông có một góc 60° và cạnh huyền có độ dài là 8. Hãy tìm độ dài của cạnh đối diện với góc 60° .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin B = 8 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}.$$



Ví dụ 2. Tìm x trong Hình 25.



Hình 25

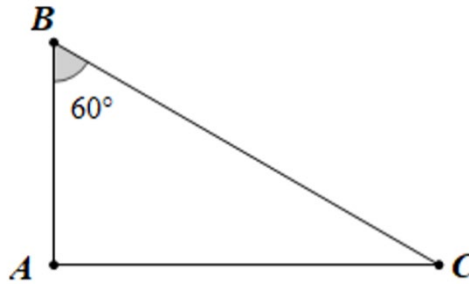
Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan B = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = BH \cdot \tan 45^\circ = 20 \cdot 1 = 20$$

Xét $\triangle AHC$ có: $x^2 = 20^2 + 21^2 = 841 \Rightarrow x = 29$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$ và $BC = 10$. Tính độ dài cạnh AB và AC .

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại A nên $\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin B = 10 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

Tài liệu phát hành trên website Ttailieuchuan.vn

Dạng 4: Tìm góc nhọn α thỏa đẳng thức cho trước

1. Phương pháp

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để biến đổi về dạng cơ bản
- Dùng MTBT hoặc bảng giá trị lượng giác các góc đặc biệt để tìm.

Cách dùng MTBT tìm α khi biết $\sin \alpha$ (tương tự đối với $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$)

Nếu $\sin \alpha = m$ thì bấm các phím sau

$$\boxed{\text{shift}} \boxed{\sin} \boxed{m} \boxed{=} \boxed{^\circ}.$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm góc nhọn x , biết

a) $4 \sin x - 1 = 1$;

b) $2\sqrt{3} - 3 \tan x = \sqrt{3}$.

Lời giải

a) $4 \sin x - 1 = 1$

b) $2\sqrt{3} - 3 \tan x = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -3 \tan x = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

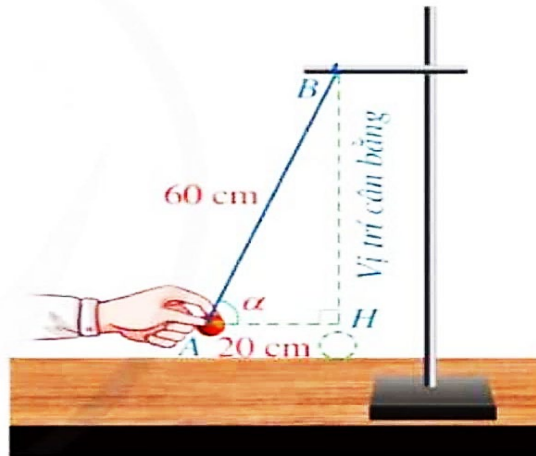
$$\Leftrightarrow \tan x = \tan 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

Dạng 5: Một số bài toán thực tế

Câu 1: Treo quả cầu kim loại nhỏ vào giá thí nghiệm bằng sợi dây mảnh nhẹ không dẫn. Khi quả cầu đứng yên tại vị trí cân bằng, dây treo có phương thẳng đứng. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi buông ra thì quả cầu sẽ chuyển động qua lại quanh vị trí cân bằng. Khi kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng, giả sử tâm A của quả cầu cách B một khoảng $AB = 60$ cm và cách vị trí cân bằng một khoảng $AH = 20$ cm (Hình 9). Tính số đo góc α tạo bởi sợi dây BA và vị trí cân bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có:



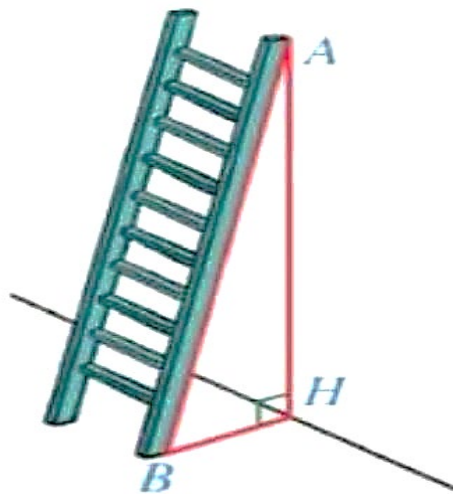
Hình 9

$$\sin \alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

Do đó $\alpha \approx 19^\circ$.

Vậy góc α tạo bởi sợi dây BA và vị trí cân bằng có số đo khoảng 19° .

Câu 2: Hình 10 mô tả một chiếc thang có chiều dài $AB = 4$ m được đặt dựa vào tường, khoảng cách từ chân thang đến chân tường là $BH = 1,5$ m. Tính góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Hình 10

Lời giải

Ta có: Góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất là $\widehat{ABH}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có: $\cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{1,5}{4} = 0,375$.

Vậy $\widehat{ABH} \approx 68^\circ$.

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{15} = 0,6; \cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{15} = 0,8;$$

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{12} = 0,75; \cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Hãy viết tỉ số lượng giác của các góc sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

$$\sin 75^\circ, \cos 60^\circ, \tan 80^\circ, \cot 50^\circ$$

Lời giải

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ; \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ; \quad \tan 80^\circ = \cot 10^\circ; \quad \cot 50^\circ = \tan 40^\circ$$

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{ cm}$, $\hat{B} = \alpha$. Biết $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. Hãy tìm độ dài cạnh AB, BC .

Lời giải

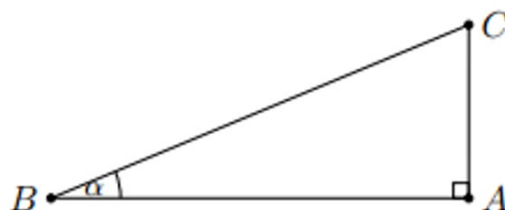
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{5}{12} = \frac{AC}{6} \Leftrightarrow AC = \frac{5}{2}(\text{cm})$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABC$ vuông tại A ta có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{13}{2}(\text{cm})$$



Câu 3. Tính giá trị của các biểu thức

$$1. A = \frac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ}$$

$$2. B = \tan 76^\circ - \cot 14^\circ.$$

Lời giải

$$1. \text{ Ta có } 32^\circ + 58^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \sin 32^\circ = \cos 58^\circ$$

$$\Rightarrow A = 1.$$

$$2. \text{ Ta có } 76^\circ + 14^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 76^\circ = \cot 14^\circ$$

$$\Rightarrow B = 0.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

Lời giải

Kẻ đường cao BH của $\triangle ABC$.

$$\text{Khi đó ta có } HC^2 = (AC - AH)^2.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2$$

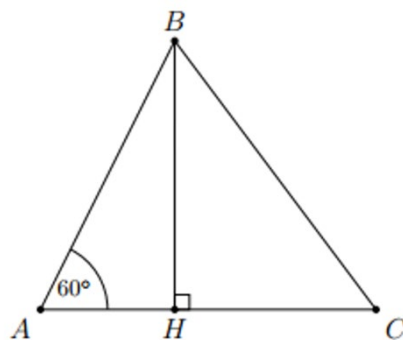
$$= BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$$

$$\text{Lại có } \widehat{BAC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{AB} \text{ hay } AH = \frac{AB}{2}$$

$$\text{Vậy } BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC.$$



Câu 5. Cho tứ giác $ABCD$ có α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo.

Chứng minh rằng $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$

Lời giải

Giả sử hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại I , $\widehat{AIB} = \alpha$ là góc nhọn. Kẻ đường cao AH của $\triangle ABD$ và đường cao CK của $\triangle CBD$.

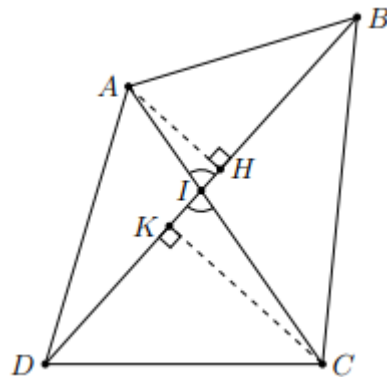
Ta có $AH = AI \sin \alpha, CK = CI \sin \alpha$.

Diện tích $\triangle ABD$ là $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AH$

Diện tích $\triangle CBD$ là $S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} BD \cdot CK$

Khi đó

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} BD (AH + CK) \\ &= \frac{1}{2} BD (AI + CI) \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

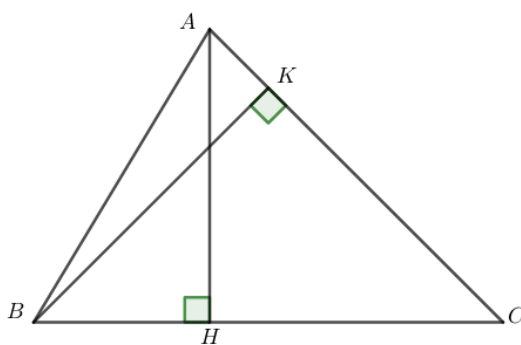


Câu 6. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi a, b, c là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C .

a) Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

b) Có thể xảy ra đẳng thức: $\sin A = \sin B + \sin C$ không?

Lời giải



a) Kẻ đường cao AH

$\triangle ABH$ vuông tại H , ta có: $\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = c \cdot \sin B$

$\triangle AHC$ vuông tại H , ta có: $\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = b \cdot \sin C$

Khi đó: $c \cdot \sin B = b \cdot \sin C \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad (1)$

Kẻ đường cao BK

Chứng minh tương tự, ta có: $c \cdot \sin A = a \cdot \sin C \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (đpcm).

b) Áp dụng tính chất tỉ lệ thức, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$

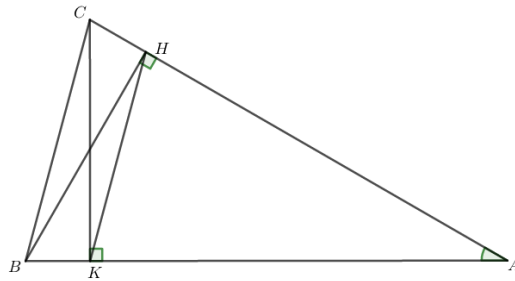
Đẳng thức $\sin A = \sin B + \sin C$ xảy ra khi $a = b + c$ (vô lý)

Vậy đẳng thức: $\sin A = \sin B + \sin C$ không xảy ra.

Câu 7. Cho tam giác nhọn ABC , $\hat{A} = 30^\circ$. Hai đường cao CH và BK .

Chứng minh rằng: $S_{AHK} = 3S_{BCHK}$.

Lời giải



$$\triangle ABH \sim \triangle ACK \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{AH}{AK} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AC}$$

$$\Rightarrow \triangle AHK \sim \triangle ABC \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AHK}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AH}{AB} \right)^2 = \cos^2 A \Rightarrow S_{AHK} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A = S_{ABC} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} S_{ABC} \quad (1)$$

$$S_{BCHK} = S_{ABC} - S_{AHK} = S_{ABC} - \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $S_{AHK} = 3S_{BCHK}$ (đpcm).

BÀI 12. MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

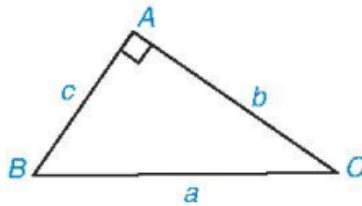
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. HỆ THỨC GIỮA CẠNH HUYỀN VÀ CẠNH GÓC VUÔNG

Công thức tính cạnh góc vuông theo cạnh huyền và sin, cosin của các góc nhọn

Định lý 1. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề.

Chú ý. Trong tam giác ABC vuông tại A (H.4.12), ta có:

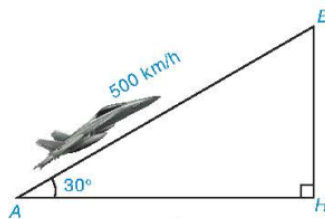


Hình 4.12

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C; \quad c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B.$$

Ví dụ 1. Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500 km/h. Đường bay lên tạo với phương ngang một góc 30° (H.4.13). Hỏi sau 1,2 phút, máy bay lên cao được bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng?

Lời giải



Hình 4.13

Giả sử trong Hình 4.13, AB là đoạn đường máy bay bay lên trong 1,2 phút thì BH chính là độ cao máy bay đạt được sau 1,2 phút đó.

$$\text{Ta có } 1,2 \text{ phút} = \frac{1}{50} \text{ giờ nên } AB = 500 \cdot \frac{1}{50} = 10(\text{km}).$$

Tam giác ABH vuông tại H, có $\hat{A} = 30^\circ$. Theo Định lý 1, ta có

$$BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5(\text{km}).$$

Vậy sau 1,2 phút, máy bay lên cao được 5 km.

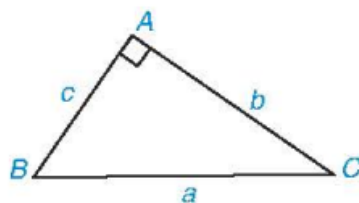
2. HỆ THỨC GIỮA HAI CẠNH GÓC VUÔNG

Công thức tính cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông kia và tang, cotang của các góc nhọn

Định lý 2. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.

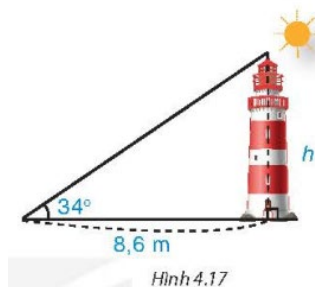
Chú ý. Trong tam giác ABC vuông tại A (H.4.16), ta có:

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C; c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$



Hình 4.16

Ví dụ 2. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34° và bóng của một toà tháp trên mặt đất dài 8,6m(H.4.17). Tính chiều cao của toà tháp đó (làm tròn đến mét).



Hình 4.17

Lời giải

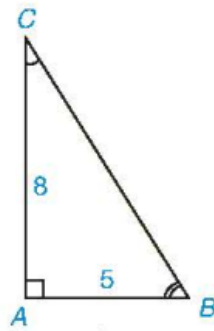
Ta nhận thấy đường cao của tháp đối diện với góc 34° (góc tạo bởi tia nắng mặt trời và bóng của tháp trên mặt đất).

Theo Định lý 2, ta có $h = 8,6 \cdot \tan 34^\circ \approx 6(\text{m})$.

Vậy chiều cao của tháp là khoảng 6 m.

3. GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

Ví dụ 3. Cho tam giác vuông ABC với các cạnh góc vuông $AB = 5$, $AC = 8$ (H.4.19). Hãy tính cạnh BC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) và các góc B, C (làm tròn đến độ).



Hình 4.19

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A .

Cách 1. Theo định lý Pythagore, ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} \approx 9,4$.

Ta có $\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8} = 0,625$. Từ đó tìm được $\hat{C} \approx 32^\circ$,

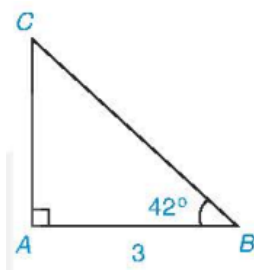
suy ra $\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} \approx 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

Cách 2. Sau khi tìm được $\hat{C} \approx 32^\circ$, ta tính cạnh BC .

Ta có $\sin 32^\circ \approx \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{BC}$, suy ra $BC \approx \frac{5}{\sin 32^\circ} \approx 9,4$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3, \hat{B} = 42^\circ$ (H.4.20). Tính góc C và các cạnh AC , BC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải



Hình 4.20

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A .

Ta có: $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$; $AC = AB \cdot \tan B = 3 \cdot \tan 42^\circ \approx 2,701$.

Theo định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn, ta có: $\cos B = \frac{AB}{BC}$, suy ra

$$BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{3}{\cos 42^\circ} \approx 4,037.$$

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

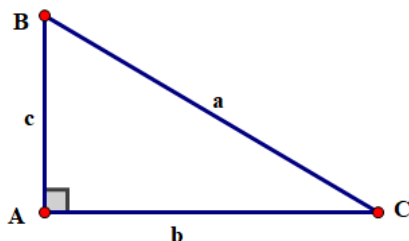
4.8. Giải tam giác ABC vuông tại A có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, trong các trường hợp:

a) $a = 21, b = 18$;

b) $b = 10, \hat{C} = 30^\circ$;

c) $c = 5, b = 3$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, theo định lý Pythagore, ta có: $a^2 = b^2 + c^2$

Suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21^2 - 18^2} = \sqrt{117} = \sqrt{3^2 \cdot 13} = 3\sqrt{13}$ (do $c > 0$).

Theo định nghĩa tỉ số lượng giác sin, ta có $\sin B = \frac{b}{a} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$. Từ đó tìm được $\hat{B} \approx 59^\circ$.

Theo định lý tổng ba góc của một tam giác, ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Suy ra $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \approx 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ$.

Vậy $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} \approx 59^\circ, \hat{C} \approx 31^\circ, a = 21, b = 18, c = 3\sqrt{13}$.

b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, theo định lý tổng ba góc của một tam giác, ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Suy ra $\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Theo định lý 2, ta có: $AB = c = b \cdot \tan C = 10 \cdot \tan 30^\circ = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Theo định lý 1, ta có $AC = b = a \cdot \cos C$, suy ra $a = \frac{b}{\cos C} = \frac{10}{\cos 30^\circ} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 30^\circ, a = \frac{20\sqrt{3}}{3}, b = 10, c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

c) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, theo định lý Pythagore, ta có: $a^2 = b^2 + c^2$

Suy ra $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ (vì $a > 0$).

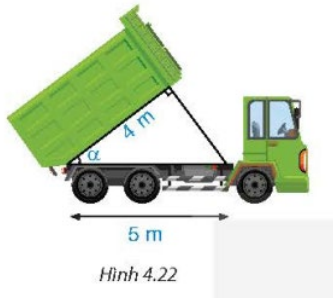
Theo định nghĩa tỉ số lượng giác tan, ta có $\tan B = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}$, suy ra $\hat{B} \approx 31^\circ$.

Theo định lí tổng ba góc của một tam giác, ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Suy ra $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \approx 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$.

Vậy $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} \approx 31^\circ, \hat{C} \approx 59^\circ, a = \sqrt{34}, b = 3, c = 5$.

4.9. Tính góc nghiêng α của thùng xe chở rác trong Hình 4.22.

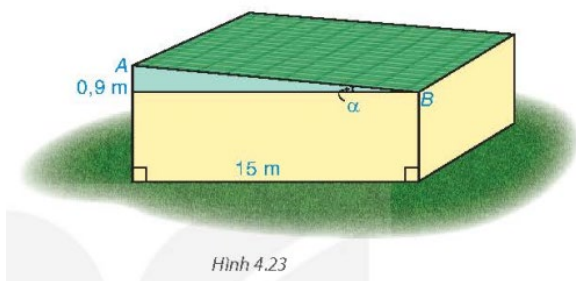


Lời giải

Theo định nghĩa tỉ số lượng giác $\cos$, ta có $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, từ đó tính được $\alpha \approx 36^\circ 52'$.

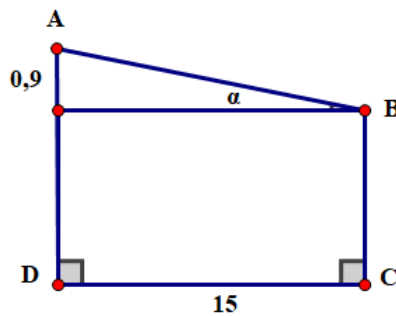
Vậy góc nghiêng α của thùng xe chở rác khoảng $36^\circ 52'$.

4.10. Tìm góc nghiêng α và chiều rộng A B của mái nhà kho trong Hình 4.23.



Lời giải

Theo đề ta có hình vẽ:



Tứ giác BCDE là hình chữ nhật nên $BE = CD = 15\text{ m}$.

Xét $\triangle ABE$ vuông tại E, theo định nghĩa tỉ số lượng giác tan, ta có: $\tan B = \frac{AE}{BE} = \frac{0,9}{15} = 0,06$.

Từ đó tìm được $\hat{B} \approx 3^\circ 26'$.

Theo định lí Pythagore, ta có: $AB^2 = AE^2 + BE^2$.

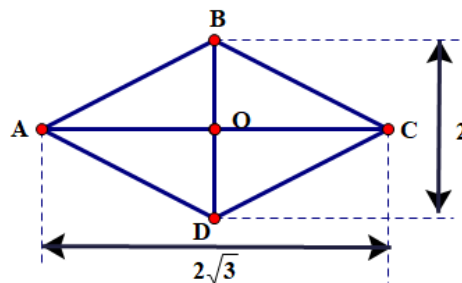
Suy ra $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{0,9^2 + 15^2} \approx 15,027(\text{m})$ (do $AB > 0$).

Vậy góc nghiêng của mái nhà kho khoảng $3^\circ 26'$ và chiều rộng của mái nhà kho khoảng 15,027 m.

4.11. Tính các góc của hình thoi có hai đường chéo dài $2\sqrt{3}$ và 2.

Lời giải

Theo đề ta có hình vẽ:



Hình thoi ABCD có hai đường chéo lần lượt là $AC = 2\sqrt{3}$; $BD = 2$ và AC cắt BD tại O.

Khi đó $AC \perp BD$; O là trung điểm của AC, BD.

Suy ra $OA = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ và $OB = \frac{BD}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Xét $\triangle OAB$ vuông tại O, theo định nghĩa tỉ số lượng giác tan, ta có: $\tan \widehat{BAO} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra

$\widehat{BAO} = 30^\circ$.

Theo định lí tổng ba góc của một tam giác, ta có $\widehat{AOB} + \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{ABO} = 90^\circ - \widehat{BAO} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Hình thoi ABCD có AC, BD là đường chéo nên AC, BD lần lượt là tia phân giác của $\widehat{BAD}$, $\widehat{ABC}$.

Mà $\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$ (tính chất hình thoi) nên $\hat{A} = \hat{C} = 2\widehat{BAO} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ và

$\hat{B} = \hat{D} = 2\widehat{ABO} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

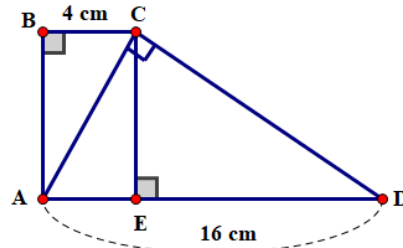
Vậy $\hat{A} = \hat{C} = 60^\circ$ và $\hat{B} = \hat{D} = 120^\circ$.

4.12. Cho hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$) có $AD = 16\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$ và $\hat{A} = \hat{B} = \widehat{ACD} = 90^\circ$.

a) Kẻ đường cao CE của tam giác ACD . Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{ACE}$. Tính sin của các góc $\widehat{ADC}$, $\widehat{ACE}$ và suy ra $AC^2 = AE \cdot AD$. Từ đó tính AC .

b) Tính góc D của hình thang.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ADC} + \widehat{DCE} = 90^\circ$ (hai góc nhọn trong $\triangle CDE$ vuông tại E) và $\widehat{ACE} + \widehat{DCE} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ nên $\widehat{ADC} = \widehat{ACE}$ (cùng phụ góc $\widehat{DCE}$). (1)

Xét $\triangle ACD$ vuông tại C, ta có $\sin \widehat{ADC} = \frac{AC}{AD}$. (2)

Xét $\triangle ACE$ vuông tại E, ta có $\sin \widehat{ACE} = \frac{AE}{AC}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AC}$, do đó $AC^2 = AE \cdot AD$.

Hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC$ và $AB \perp BC$ (do $\hat{B} = 90^\circ$) nên $AB \perp AD$.

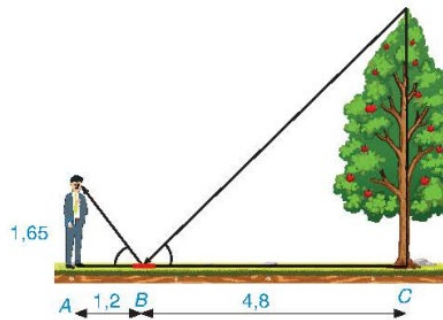
Tứ giác $ABCE$ có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$ nên $ABCE$ là hình chữ nhật.

Suy ra $AE = BC = 4\text{ cm}$ (tính chất hình chữ nhật).

Khi đó, $AC^2 = 4 \cdot 16 = 64$ nên $AC = 8(\text{cm})$ (do $AC > 0$).

b) Theo câu a, ta có $\sin \widehat{ADC} = \frac{AC}{AD} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, suy ra $\hat{D} = 30^\circ$.

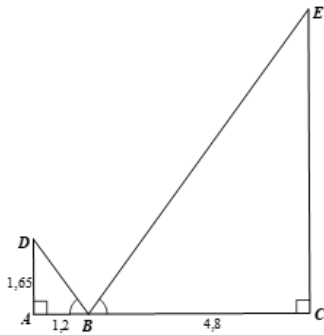
4.13. Một người đứng tại điểm A , cách gương phẳng đặt nằm trên mặt đất tại điểm B là $1,2\text{ m}$, nhìn thấy hình phản chiếu qua gương B của ngọn cây (cây có gốc ở tại điểm C cách B là $4,8\text{ m}$, B nằm giữa A và C). Biết khoảng cách từ mặt đất đến mắt người đó là $1,65\text{ m}$. Tính chiều cao của cây (H.4.24).



Hình 4.24

Lời giải

Theo đề ta có hình vẽ:



Xét $\triangle ABD$ vuông tại A, ta có $\tan \widehat{ABD} = \frac{AD}{AB} = \frac{1,65}{1,2} = \frac{11}{8}$. Mà $\widehat{ABD} = \widehat{CBE}$ nên $\tan \widehat{CBE} = \frac{11}{8}$.

Xét $\triangle BCE$ vuông tại C, ta có $CE = BC \cdot \tan \widehat{CBE} = 4,8 \cdot \frac{11}{8} = 6,6(\text{m})$.

Vậy chiều cao của cây là 6,6m.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

1. Phương pháp

- Vận dụng các công thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để tìm cạnh.
- Vận dụng công thức liên hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông để tìm cạnh.
- Vận dụng các tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính góc.

Lưu ý:

- Nếu cho trước 1 góc nhọn thì nên tìm góc nhọn còn lại.
- Nếu cho trước hai cạnh thì dùng định lý Py-ta-go tìm cạnh thứ hai.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết rằng:

a) $b = 10\text{cm}$, $\widehat{C} = 30^\circ$;

b) $c = 10 \text{ cm}, \hat{C} = 45^\circ$;

c) $a = 20 \text{ cm}, \hat{B} = 35^\circ$;

d) $c = 21 \text{ cm}, b = 18 \text{ cm}$.

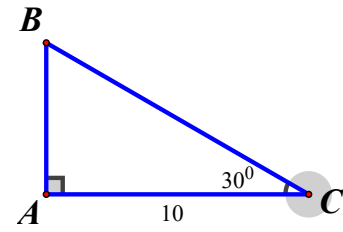
Lời giải

a) (h.28)

$$\hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ;$$

$$AB = AC \cdot \tan C = 10 \cdot \tan 30^\circ \approx 5,774(\text{cm});$$

$$BC = \frac{AC}{\cos C} = \frac{10}{\cos 30^\circ} \approx 11,547(\text{cm}).$$



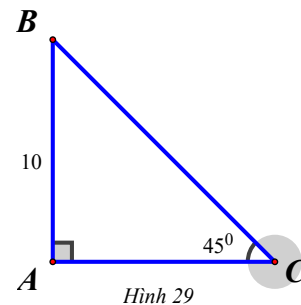
Hình 28

b) (h.29)

$$\hat{B} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ;$$

$$AC = AB \cdot \cot C = 10 \cdot \cot 45^\circ = 10(\text{cm}).$$

$$BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{10}{\sin 45^\circ} \approx 14,142(\text{cm}).$$



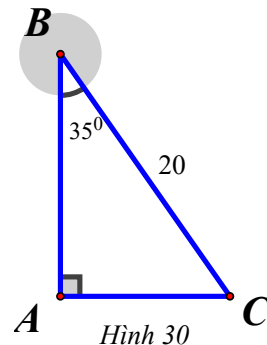
Hình 29

c) (h.30)

$$\hat{C} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ;$$

$$AB = BC \cdot \cos B = 20 \cdot \cos 35^\circ \approx 16,383(\text{cm});$$

$$AC = BC \cdot \sin B = 20 \cdot \sin 35^\circ \approx 11,472(\text{cm}).$$



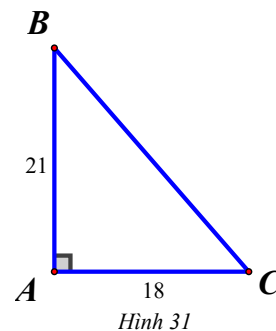
Hình 30

d) (h.31)

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{18}{21} \approx 0,8571;$$

$$\Rightarrow \hat{B} \approx 41^\circ \text{ và } \hat{C} = 49^\circ;$$

$$BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{18}{\sin 41^\circ} \approx 27,437(\text{cm}).$$



Hình 31

Ví dụ 2. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 3,5$ và $AC = 4,2$.

Lời giải

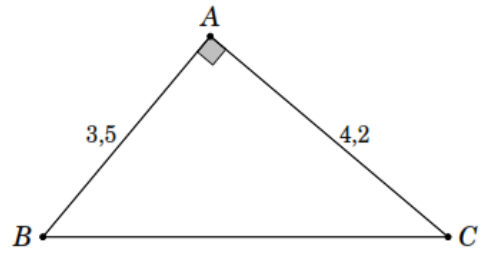
Ta có $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{4,2}{3,5} \approx \tan 50^\circ 12'$.

Suy ra $\hat{B} \approx 50^\circ 12'$ mà $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$

nên $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 50^\circ 12' = 39^\circ 48'$.

Mặt khác, theo định lí Py-ta-go ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3,5^2 + 4,2^2} \approx 5,5.$$



Ví dụ 3. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 3,0$ và $BC = 4,5$.

Lời giải

Do giả thiết ta có $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3,0}{4,5} \approx \sin 41^\circ 49'$ suy ra

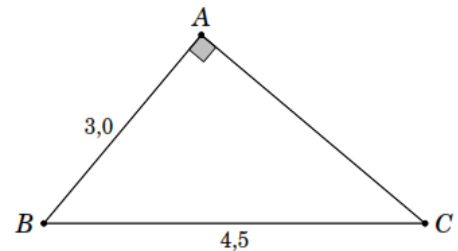
$\hat{C} = 41^\circ 49'$.

Mà $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ nên $\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 41^\circ 49' = 48^\circ 11'$.

Mặt khác theo định lí Py-ta-go

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2.$$

suy ra $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4,5^2 - 3,0^2} \approx 3,4$.



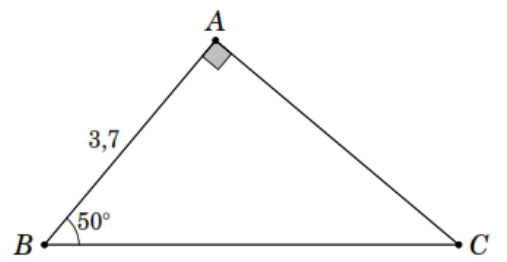
Ví dụ 4. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $\hat{B} = 50^\circ$ và $AB = 3,7$.

Lời giải

Ta có $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Mặt khác $AC = AB \cdot \tan B = 3,7 \cdot \tan 50^\circ \approx 4,4$.

Tương tự $BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{3,7}{\cos 50^\circ} \approx 5,8$.



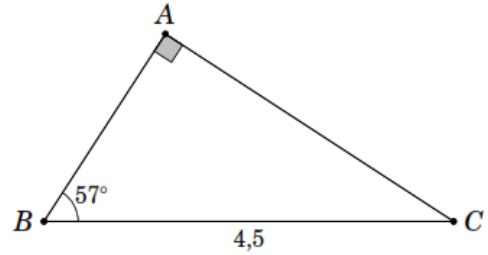
Ví dụ 5. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $\hat{B} = 57^\circ$ và $BC = 4,5$.

Lời giải

Ta có $\hat{C} = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$.

Mặt khác $AB = BC \cdot \cos B = 4,5 \cdot \cos 57^\circ \approx 2,5$

và $AC = BC \cdot \sin B = 4,5 \cdot \sin 57^\circ \approx 3,8$.



Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 2,5$, $BH = 1,5$. Tính $\hat{B}$, $\hat{C}$ và AC

Lời giải

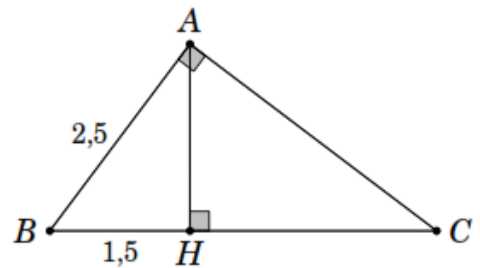
Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có

$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{1,5}{2,5} \approx \cos 53^\circ 8' \text{ suy ra } \hat{B} \approx 53^\circ 8'.$$

Mà $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ nên $\hat{C} = 90^\circ - 53^\circ 8' = 36^\circ 52'$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có

$$AC = AB \cdot \tan B = 2,5 \cdot \tan 53^\circ 8' \approx 3,3.$$



DẠNG 2. TÍNH CẠNH, TÍNH GÓC CỦA TAM GIÁC

1. Phương pháp

Vẽ thêm một đường cao để vận dụng hệ thức giữa các cạnh và các góc của một tam giác vuông.

2. Ví dụ

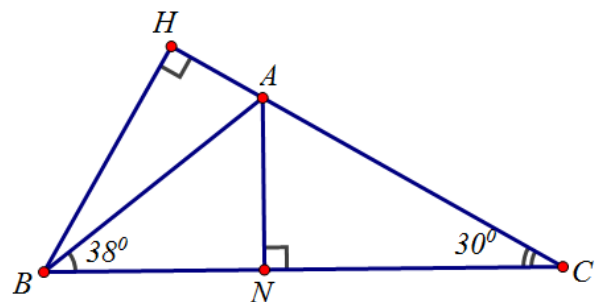
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , trong đó

$$BC = 11\text{cm}, \widehat{ABC} = 38^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ.$$

Gọi điểm N là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC . Hãy tính:

- Đoạn thẳng AN ;
- Cạnh AC .

Lời giải



Hình 32

$$\text{Vẽ } BH \perp AC \Rightarrow BH = BC \cdot \sin C = 11 \cdot \sin 30^\circ = 11 \cdot \frac{1}{2} = 5,5(\text{cm}).$$

Dễ thấy $\widehat{HBC} = 60^\circ$; $\widehat{HBA} = 22^\circ$.

$$\text{Xét tam giác vuông } HBA \text{ có } AB = \frac{BH}{\cos \widehat{HBA}} = \frac{5,5}{\cos 22^\circ} \approx 5,932(\text{cm}).$$

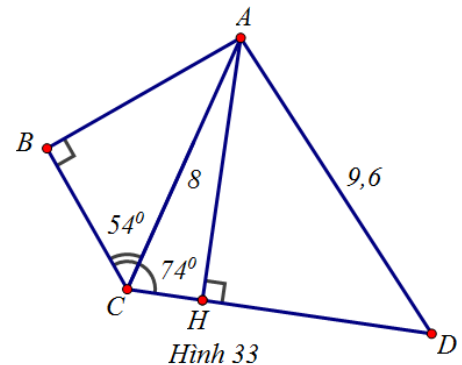
Xét tam giác vuông ABN có $AN = AB \cdot \sin 38^\circ \approx 3,652 \text{ (cm)}$.

Xét tam giác vuông ANC có $AC = \frac{AN}{\sin C} \approx \frac{3,652}{\sin 30^\circ} = 7,304 \text{ (cm)}$.

Ví dụ 2. Trong hình 33:

$AC = 8 \text{ cm}$, $AD = 9,6 \text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 54^\circ$ và $\widehat{ACD} = 74^\circ$. Hãy tính:

- Đoạn thẳng AB ;
- $\widehat{ADC}$.



Lời giải

a) $AB = AC \cdot \sin C = 8 \cdot \sin 54^\circ \approx 6,472$

b) Vẽ $AH \perp CD$.

$$AH = AC \cdot \sin C = 8 \cdot \sin 74^\circ \approx 7,690$$

$$\sin D = \frac{AH}{AD} = \frac{7,690}{9,6} \approx 0,8010$$

$$\widehat{D} \approx 53^\circ.$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 65^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = 2,8 \text{ cm}$. Tính các góc và cạnh còn lại của tam giác đó (gọi là giải tam giác ABC).

Lời giải

Ta có $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 65^\circ - 45^\circ = 70^\circ$.

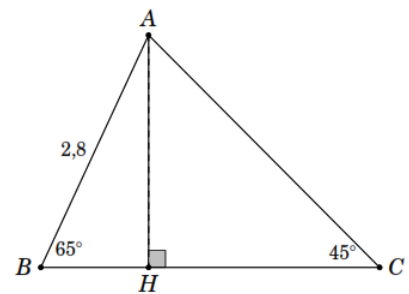
Kẻ đường cao AH . Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$AH = AB \cdot \sin B = 2,8 \cdot \sin 65^\circ \approx 2,54 \text{ (cm)}.$$

Tương tự $BH = AB \cdot \cos B = 2,8 \cdot \cos 65^\circ \approx 1,18 \text{ (cm)}$.

Mặt khác, do giả thiết suy ra tam giác HAC vuông cân tại H nên $HA = HC$. Do đó $BC \approx 2,54 + 1,18 = 3,7 \text{ (cm)}$.

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có: $AC = \frac{HA}{\sin C} \approx \frac{2,54}{\sin 45^\circ} \approx 3,6 \text{ (cm)}$.



Ví dụ 4. Giải tam giác ABC biết $\widehat{B} = 65^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$ và $BC = 4,2 \text{ cm}$.

Lời giải

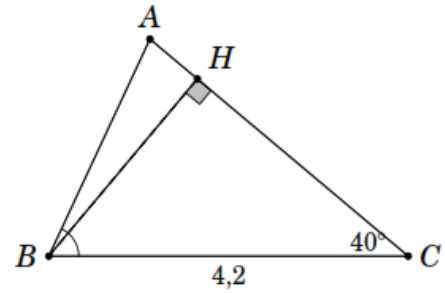
Ta có $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 65^\circ - 40^\circ = 75^\circ$.

Kẻ đường cao BH . Xét $\triangle BCH$ vuông tại H , ta có

$$BH = BC \cdot \sin C = 4,2 \cdot \sin 40^\circ \approx 2,70(\text{cm}).$$

Tương tự, xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$AB = \frac{BH}{\sin A} = \frac{2,70}{\sin 75^\circ} \approx 2,8(\text{cm}).$$



Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} AC &= AH + CH = BH \cdot (\cot A + \cot C) \\ &\approx 2,70 \cdot (\cot 75^\circ + \cot 40^\circ) \approx 3,9(\text{cm}) \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Giải tam giác nhọn ABC biết $AB = 2,1$, $AC = 3,8$ và $\hat{B} = 70^\circ$.

Lời giải

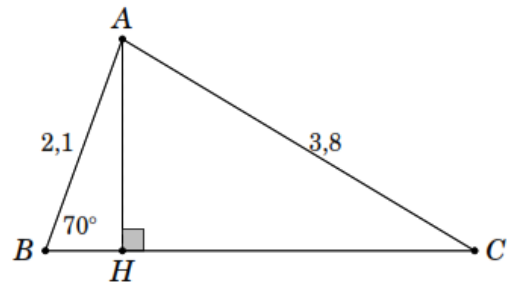
Vẽ $AH \perp BC$. Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$AH = AB \cdot \sin B = 2,1 \cdot \sin 70^\circ \approx 1,97.$$

Tương tự, xét $BH = AB \cdot \cos B = 2,1 \cdot \cos 70^\circ \approx 0,72$.

Mặt khác, xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \approx \frac{1,97}{3,8} \approx \sin 31^\circ 14' \text{ do đó } \hat{C} \approx 31^\circ 14'.$$



$$\text{Mà } \hat{A} = 180^\circ - (70^\circ + 31^\circ 14') = 78^\circ 46'.$$

$$\text{Ta có } HC = AC \cdot \cos C \approx 3,80 \cdot \cos 31^\circ 14' \approx 3,25.$$

$$\text{Mà } BC = BH + HC = 0,72 + 3,25 = 3,97.$$

Tài liệu phát hành trên website Tailieuchuan.vn

DẠNG 3: CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

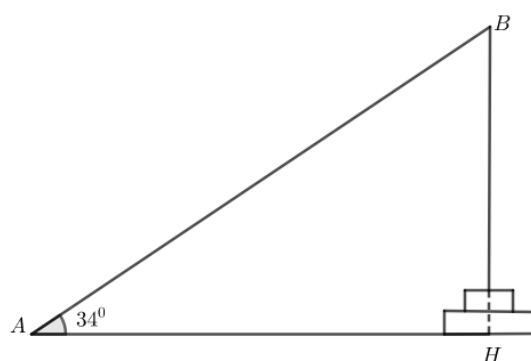
1. Phương pháp

Dùng hệ thức giữa các cạnh và các góc của một tam giác vuông.

2. Ví dụ

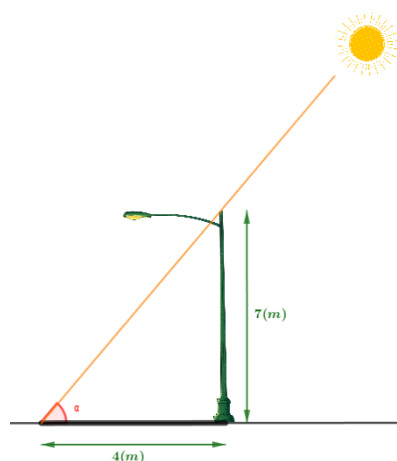
Ví dụ 1: Các tia nắng Mặt Trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34° và bóng của một tháp trên mặt đất dài 86m. Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét).

Hướng dẫn giải



$$BH = AH \cdot \tan A = 86 \cdot \tan 34^\circ = 58 \text{ (m)}$$

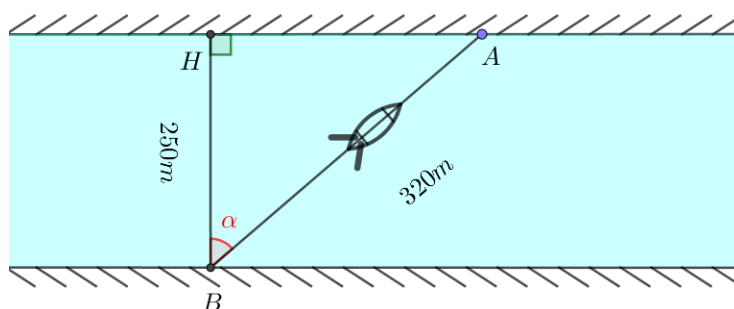
Ví dụ 2: Một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc (làm tròn đến phút) mà tia sáng Mặt Trời tạo với mặt đất (góc α như trong hình 35).



Hướng dẫn giải

$$\tan \alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{7}{4} \approx 1,75 \Rightarrow \alpha \approx 60^\circ 15'.$$

Ví dụ 3: Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một chiếc đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy đò lệch đi một góc bao nhiêu độ? (góc α trong hình 36).

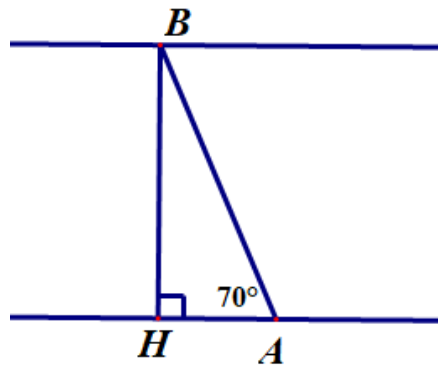


Hướng dẫn giải

$$\cos \alpha = \frac{BH}{BA} = \frac{250}{320} \approx 0,7813 \Rightarrow \alpha \approx 38^{\circ}37'.$$

Ví dụ 4: Một con thuyền với vận tốc 2km/h vượt qua một khúc sông nước chảy mạnh mất 5 phút. Biết rằng đường đi của con thuyền tạo với bờ một góc 70° . Từ đó ta đã tính được chiều rộng của khúc sông chưa? Nếu có hãy tính kết quả (làm tròn đến mét).

Hướng dẫn giải



Hình 37

Giả sử AB là đoạn đường mà con thuyền đi được trong 5 phút $= \frac{1}{12}h$, thế thì BH là chiều rộng của khúc sông. Trong tam giác vuông HBA, biết cạnh huyền AB và biết góc nhọn A nên có thể tính được BH.

Quãng đường AB thuyền đi trong 5 phút là:

$$AB = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6} (km)$$

Chiều rộng khúc sông là:

$$BH = AB \cdot \sin A = \frac{1}{6} \cdot \sin 70^{\circ} \approx 0,1566 (km) \approx 157m.$$

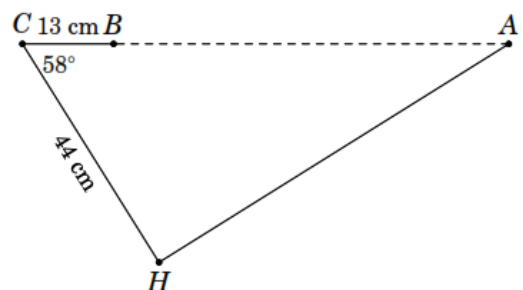
Ví dụ 5. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B trên một bờ hồ nước sâu, biết $\hat{C} = 58^{\circ}$, $CB = 13m$, $CH = 44m$ như hình bên.

Lời giải

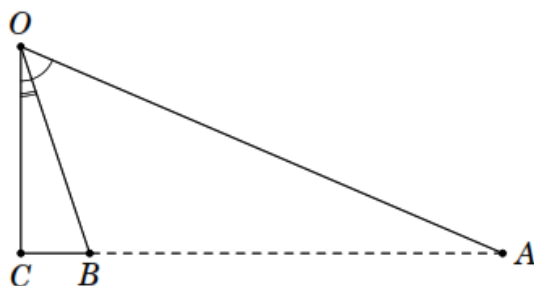
Xét $\triangle HAC$ vuông tại H, ta có

$$AC = \frac{HC}{\cos C} = \frac{44}{\cos 58^{\circ}} \approx 83(m).$$

Mà $AB = AC - BC \approx 83 - 13 = 70(m).$



Ví dụ 6. Trong hình vẽ bên dưới, tính chiều rộng AB của con sông, biết $OC = 47\text{m}$, $\widehat{AOC} = 74^\circ$, $\widehat{BOC} = 23^\circ$.



Lời giải

Xét $\triangle AOC$ vuông ở C , ta có $AC = OC \cdot \tan 74^\circ$ và $BC = OC \cdot \tan 23^\circ$.

Do đó

$$\begin{aligned} AB &= AC - BC = OC \cdot \tan 74^\circ - OC \cdot \tan 23^\circ \\ &= OC \cdot (\tan 74^\circ - \tan 23^\circ) \\ &= 47 \cdot (\tan 74^\circ - \tan 23^\circ) \approx 144,0(\text{m}). \end{aligned}$$

Vậy AB bằng 144,0m.

Ví dụ 7. Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là a như hình vẽ bên dưới. Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α . Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $a = 120\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$.

Lời giải

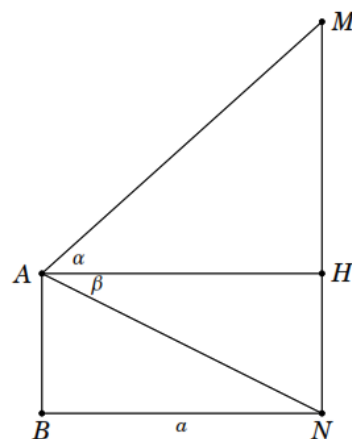
Xét $\triangle MAH$ vuông tại H , ta có $HM = AH \cdot \tan \alpha$.

Tương tự, xét $\triangle NHA$ vuông tại H , ta có $HN = AH \cdot \tan \beta$.

Mà

$$\begin{aligned} MN &= HM + HN = AH \cdot \tan \alpha + AH \cdot \tan \beta \\ &= AH \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \\ &= 120 \cdot (\tan 30^\circ + \tan 20^\circ) \approx 113,0(\text{m}). \end{aligned}$$

Vậy chiều cao MN là 113,0m.



D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Giải tam giác vuông ABC , biết $\widehat{A} = 90^\circ$ và:

a) $a = 15\text{cm}; b = 10\text{cm}.$

b) $b = 12\text{cm}; c = 7\text{cm}.$

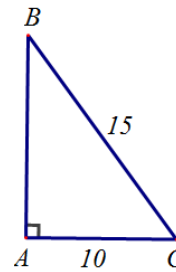
Hướng dẫn giải

a) (h.110) Trước hết tính $\sin B$ rồi suy ra

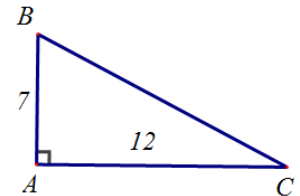
$$\hat{B} \approx 42^\circ; \hat{C} \approx 48^\circ.$$

Dùng định lý Pi-ta-go để tính AB hoặc tính AB theo hệ thức:

$$AB = BC \cdot \cos B = 15 \cdot \cos 42^\circ \approx 11,147 \text{ (cm)}.$$



Hình 110



Hình 111

b) (h.111) Tính $\tan B$ rồi suy ra

$$\hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 30^\circ; BC = 14\text{cm}.$$

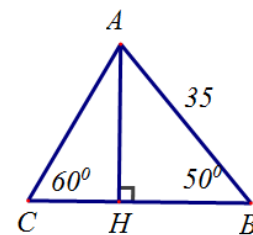
Câu 2. Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 50^\circ$ và $AC = 35\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC (làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải

Vẽ đường cao AH , tính được:

$$AH \approx 26,812\text{cm}; HC \approx 22,498\text{cm}; HB \approx 15,480\text{cm}.$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH \approx 509 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 112

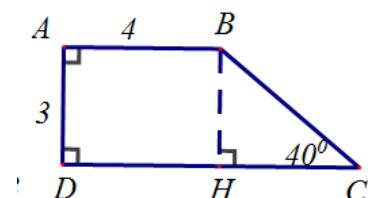
Câu 3. Tứ giác ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$. Cho biết $AB = 4\text{cm}$; $AD = 3\text{cm}$, tính diện tích tứ giác ABCD.

Hướng dẫn giải

Vẽ $BH \perp CD$, ta tính được: DH và BH , từ đó tính được CH .

Tính diện tích theo công thức tính diện tích hình thang:

$$S = 17\text{cm}^2.$$

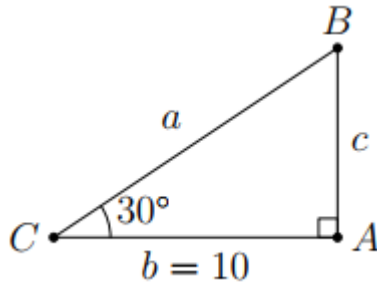


Hình 113

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$.

Giải tam giác ABC, biết rằng $b = 10\text{cm}, \hat{C} = 30^\circ$.

Lời giải



Vì $\triangle ABC$ vuông tại A , $b = 10\text{ cm}$, $\widehat{C} = 30^\circ$ nên ta có

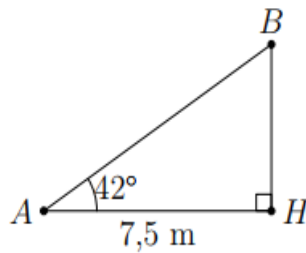
$$\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$c = b \cdot \tan 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,773\text{ cm}$$

$$a = \frac{b}{\cos 30^\circ} = 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 11,547\text{ cm}$$

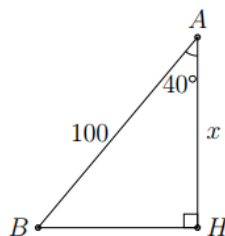
Câu 5. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $7,5\text{ m}$. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Tính chiều cao của cột đèn.

Lời giải



Giả sử chiều cao cột đèn là BH và chiều dài tia nắng trên mặt đất là AH . Xét tam giác ABH vuông tại H có :

Câu 6. Một chiếc điều với đoạn dây thả điều AB dài 100 m , dây thả điều tạo với phương thẳng đứng một góc 40° (hình bên). Tính chiều cao của điều.



Lời giải

Trong tam giác vuông AHB vuông tại H , ta có $AH = AB \cos 40^\circ = 100 \cdot 0,766 = 76,6(m)$.

Câu 7. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 15\text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 42^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi H là chân đường cao hạ từ

đỉnh A xuống BC . Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AH

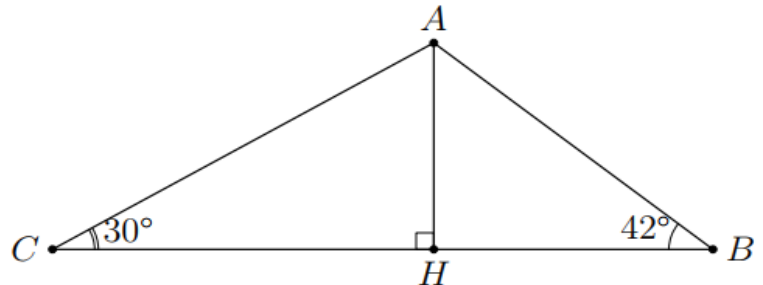
b) Độ dài đoạn thẳng AC

Lời giải

a) Đặt $AH = x$. Ta có

$$CH = \frac{AH}{\tan 30^\circ} = x\sqrt{3} \approx 1,732x.$$

$$BH = \frac{AH}{\tan 42^\circ} \approx 1,1106x.$$



$$\text{Do đó } BC = CH + HB \approx 2,8426x \Rightarrow x \approx \frac{15}{2,8426} \approx 5,2768 \text{ cm}$$

b) Ta có $AC = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = 2AH \approx 10,5537 \text{ cm}$.

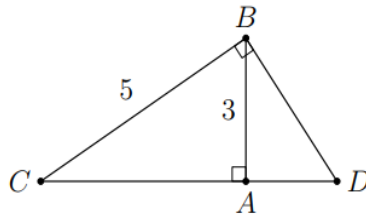
Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$.

a) Giải tam giác vuông ABC .

b) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AC , đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D

Tính độ dài các đoạn thẳng AD và BD .

Lời giải



a) Do tam giác ABC vuông tại A nên $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$. Ta có

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{C} \approx 36^\circ 52' \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{C} \approx 53^\circ 48'.$$

b) Vì $BD \perp AC$ nên $\widehat{CBD} = 90^\circ$. Xét tam giác ABD vuông tại D có $AB = 3 \text{ cm}$, do vậy

$$AB^2 = AD \cdot AC \Rightarrow AD = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ cm}$$

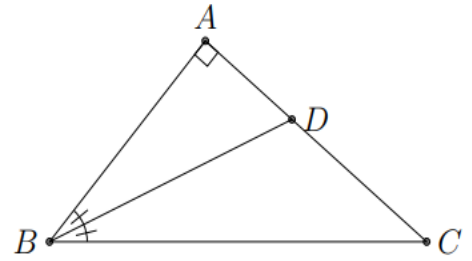
$$BD^2 = DA \cdot DC = 2,25(2,25 + 4) = 14,0625 \Rightarrow BD = 3,75 \text{ cm}$$

Câu 9. Cho ABD vuông tại A , $AB = 21 \text{ cm}$, $\hat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đường phân giác BD .

Lời giải

Ta có $\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 50^\circ$.

Vì BD là tia phân giác của góc $\hat{B}$ nên $\widehat{ABD} = \frac{\hat{B}}{2} = 25^\circ$. Trong tam giác vuông ABD , ta có $BD = \frac{AB}{\cos 25^\circ} = \frac{21}{0,9063} \approx 23,2(\text{cm})$



Câu 10. Tính diện tích $\triangle ABC$ có $BC = 2\text{cm}$, $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$.

Lời giải

Kẻ đường cao AH . Ta có

$$HC = AH \cot 30^\circ = AH\sqrt{3}.$$

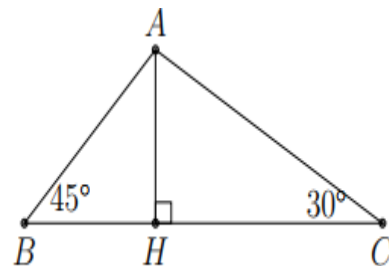
$$BH = AH \cdot \cot 45^\circ = AH.$$

Mặt khác

$$BH + HC = 2 \Rightarrow AH + AH\sqrt{3} = 2$$

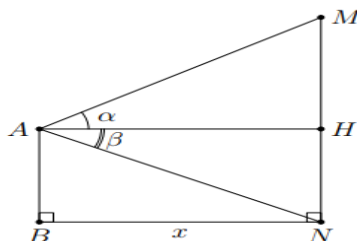
$$\Rightarrow AH(1 + \sqrt{3}) = 2$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$



$$\text{Viy } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} - 1 (\text{cm}^2).$$

Câu 11. Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là x (như hình vẽ). Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α . Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $x = 120\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 20^\circ$



Lời giải

Xét tam giác MAH vuông tại H có $HM = AH \tan \alpha$.

Xét tam giác NAH vuông tại H có $HN = AH \tan \beta$.

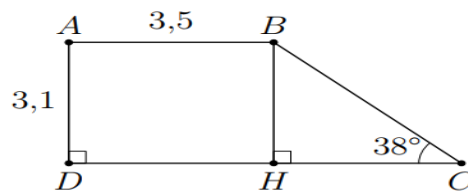
Do đó

$$\begin{aligned} MN &= MH + HN = AH(\tan \alpha + \tan \beta) \\ &= 120(\tan 3x^\circ + \tan 20^\circ) \approx 113 \text{ m} \end{aligned}$$

Câu 12. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 38^\circ$, $AB = 3,5$ và $AD = 3,1$.

Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Lời giải



Vẽ $BH \perp CD$ tại H . Khi đó ta có $BH = AD = 3,1$ và $DH = AB = 3,5$.

Xét tam giác BHC vuông tại H , có

$$HC = BH \cdot \cot C = 3,1 \cdot \cot 38^\circ \approx 4$$

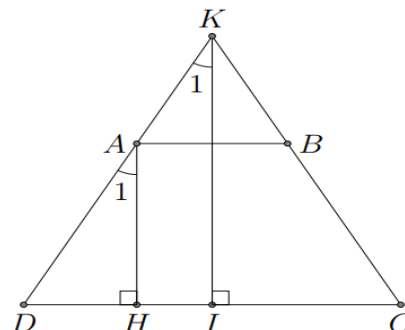
Do vậy $CD = CH + HD \approx 4 + 3,5 \approx 7,5$

Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S = \frac{(AB + CD)AD}{2} \approx \frac{(3,5 + 7,5) \cdot 3,1}{2} \approx 17,1 \text{ (dvdv)}.$$

Câu 13. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 2 \text{ cm}$, $CD = 6 \text{ cm}$, chiều cao bằng 4 cm . Tính góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa cạnh bên hình thang.

Lời giải



Gọi K là giao điểm của AD và BC . Kẻ AH và KI vuông góc với CD . Ta có

$$\widehat{A_1} = \widehat{K_1} = \frac{1}{2} \widehat{CKD}$$

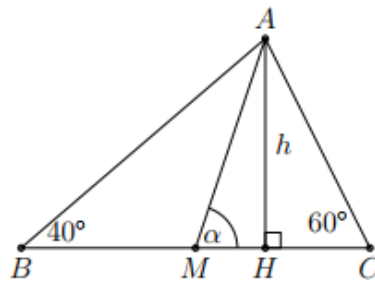
$$HD = \frac{CD - AB}{2} = \frac{6 - 2}{2} = 2(\text{cm})$$

$$\tan \widehat{A_1} = \frac{HD}{AH} = \frac{2}{4} = 0,5$$

Nên $\widehat{A} \approx 27^\circ$. Suy ra $\widehat{CKD} \approx 54^\circ$.

Câu 14. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 40^\circ, \widehat{C} = 60^\circ$, đường trung tuyến AM . Tính số đo góc AMC

Lời giải



Kẻ đường cao AH .

Ta có $HB = HC = (HM + MB) = (MC - HM) = 2HM$

Đặt $AH = h$, $\widehat{AMH} = \alpha$. Ta có

$$HB = HC = 2HM$$

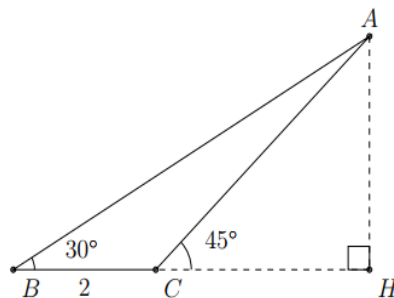
$$\Rightarrow h \cot 40^\circ = h \cot 60^\circ = 2h \cot \alpha$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cot 40^\circ - \cot 60^\circ}{2} \approx \frac{1,1918 - 0,5774}{2} \approx 0,3072$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 73^\circ.$$

Câu 15. Tính diện tích tam giác ABC biết $\widehat{B} = 30^\circ, \widehat{C} = 135^\circ, BC = 2 \text{ cm}$.

Lời giải



Kẻ đường cao AH . Ta có $BC = BH - CH = AH \cot 30^\circ - AH \cot 45^\circ = AH(\sqrt{3} - 1)$.

$$\text{Suy ra } AH = \frac{BC}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1 (cm).$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} + 1 (cm^2)$$

Câu 16. Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $AC = 4cm$; $BD = 5cm$ và $\widehat{AOB} = 50^\circ$. Tính diện tích tam giác ABCD.

Hướng dẫn giải

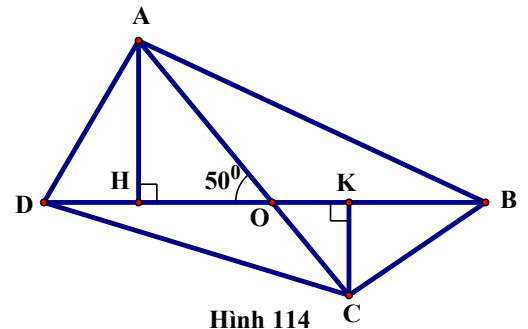
Vẽ $AH \perp BD$; $CK \perp BD$; $AH = OA \cdot \sin 50^\circ$; $CK = OC \cdot \sin 50^\circ$.

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2} BD (AH + CK).$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BD (OA \cdot \sin 50^\circ + OC \cdot \sin 50^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \cdot \sin 50^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 50^\circ \approx 8 (cm^2)$$

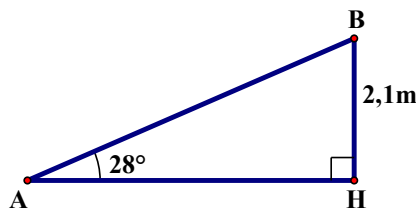


Hình 114

Chú ý: Ta chứng minh được diện tích một tứ giác (lồi) bằng tích của hai đường chéo nhân với sin của góc nhọn tạo bởi hai đường chéo.

Câu 17. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° và có độ cao là 2,1m. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

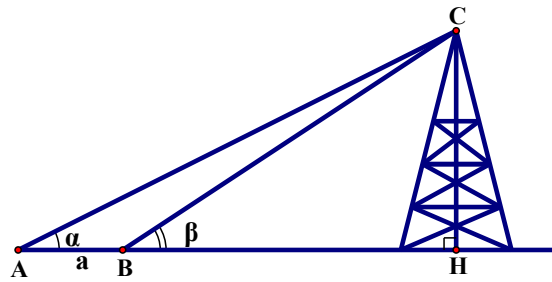
Hướng dẫn giải



Hình 117

$$AB = \frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{2,1}{\sin 28^\circ} \approx 4,5 (m)$$

Câu 18. Hãy xác định độ cao của cột ăng-ten CH trong hình 38 với $a = 8,5m$; $\alpha = 20^\circ$; $\beta = 24^\circ$ (làm tròn đến hàng đơn vị)



Hình 38

Hướng dẫn giải

$$AH = CH \cot \alpha; BH = CH \cot \beta$$

$$AH - BH = CH(\cot \alpha - \cot \beta)$$

$$a = CH(\cot \alpha - \cot \beta)$$

$$CH = \frac{a}{\cot \alpha - \cot \beta} = \frac{8,5}{\cot 20^\circ - \cot 24^\circ} = 17(\text{m}).$$

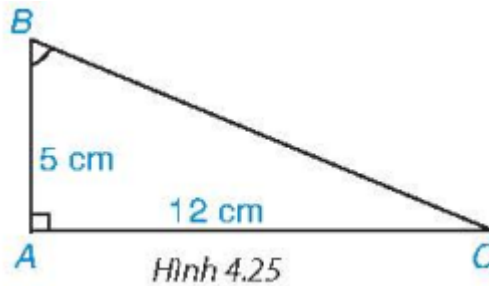
LUYỆN TẬP CHUNG

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 5\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$.

- Tính các tỉ số lượng giác của góc B .
- Từ kết quả câu a) suy ra các tỉ số lượng giác của góc C .

Lời giải



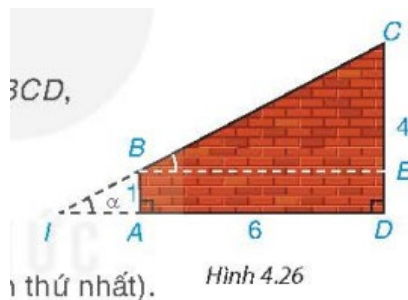
a) Xét tam giác ABC vuông tại A . Theo định lý Pythagore, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$, suy ra $BC = 13\text{ cm}$.

Ta có: $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$, $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$, $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{5}$, $\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$.

b) Do $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ nên $\sin C = \cos B = \frac{5}{13}$, $\cos C = \sin B = \frac{12}{13}$, $\tan C = \cot B = \frac{5}{12}$, $\cot C = \tan B = \frac{12}{5}$.

Ví dụ 2. Một bức tường đang xây dở có dạng hình thang vuông ABCD, vuông góc ở A và D , $AB = 1\text{ m}$, $CD = 4\text{ m}$, $AD = 6\text{ m}$.

- Hỏi góc α tạo bởi đường thẳng BC và mặt đất AD có số đo xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn đến phút)?
- Tính độ dài cạnh BC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

a) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD (mặt đất) cắt CD ở E thì khi đó $\widehat{EBC} = \widehat{DIC} = \alpha$ (hai góc đồng vị).

Tứ giác ABED có $BE \parallel AD$, $AB \parallel DE$, $\hat{A} = 90^\circ$ nên ABED là hình chữ nhật.

Do đó $BE = AD = 6\text{ m}$, $EC = CD - ED = 4 - 1 = 3(\text{m})$.

Xét $\triangle BCE$ vuông tại E , ta có $\tan \alpha = \tan \widehat{EBC} = \frac{EC}{BE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Từ đó tính được $\alpha \approx 26^\circ 34'$.

b) **Cách 1.** Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác BEC vuông tại E , ta có:

$$BC^2 = BE^2 + EC^2 = 6^2 + 3^2 = 45. \text{ Suy ra } BC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6,7(\text{m}).$$

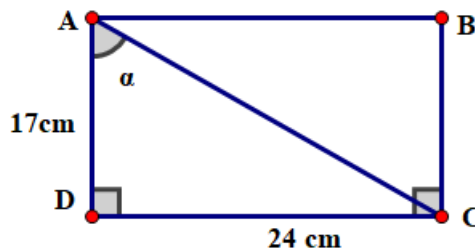
Cách 2. Tam giác BEC vuông tại E nên $EC = BC \cdot \sin \alpha$, suy ra $BC = \frac{EC}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin 26^\circ 34'} \approx 6,7(\text{m})$.

B. BÀI TẬP

4.14. Một cuốn sách khổ $17 \times 24 \text{ cm}$, tức là chiều rộng 17 cm , chiều dài 24 cm . Gọi α là góc giữa đường chéo và cạnh 17 cm . Tính $\sin \alpha, \cos \alpha$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) và tính số đo α (làm tròn đến độ).

Lời giải

Ta mô tả cuốn sách khổ $17 \times 24 \text{ cm}$ như hình vẽ sau:



Xét $\triangle ACD$ vuông tại D , theo định lí Pythagore, ta có:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 17^2 + 24^2 = 865. \text{ Suy ra } AC = \sqrt{865} \text{ cm (vì } AC > 0 \text{)}.$$

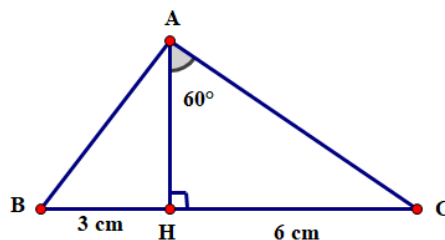
Theo định nghĩa tỉ số lượng giác sin và cos, ta có:

$$\sin \alpha = \sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} = \frac{24}{\sqrt{865}} \approx 0,82 \qquad \cos \alpha = \cos \widehat{CAD} = \frac{AD}{AC} = \frac{17}{\sqrt{865}} \approx 0,58$$

Suy ra $\alpha \approx 55^\circ$.

4.15. Cho tam giác ABC có chân đường cao AH nằm giữa B và C . Biết $HB = 3 \text{ cm}$, $HC = 6 \text{ cm}$, $\widehat{HAC} = 60^\circ$. Hãy tính độ dài các cạnh (làm tròn đến cm), số đo các góc của tam giác ABC (làm tròn đến độ).

Lời giải



Ta có: $BC = BH + HC = 3 + 6 = 9 \text{ cm}$.

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có: $\sin \widehat{HAC} = \frac{CH}{AC}$

$$\text{Suy ra } AC = \frac{CH}{\sin \widehat{HAC}} = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}(\text{cm}).$$

$$AH = AC \cdot \cos \widehat{HAC} = 4\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , theo định lý Pythagore ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2 = (2\sqrt{3})^2 + 3^2 = 21$

$$\text{Suy ra } AB = \sqrt{21} = 4,582575695\dots \text{cm} \approx 5 \text{ cm}.$$

- Ta có: $\widehat{HAC} + \widehat{HCA} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của $\triangle AHC$ vuông tại H).

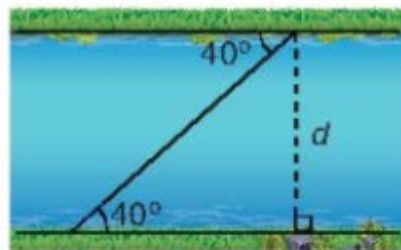
$$\text{Suy ra } \widehat{HCA} = 90^\circ - \widehat{HAC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \text{ Hay } \widehat{BCA} = 30^\circ.$$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , ta có: $\tan \widehat{HBA} = \frac{AH}{HB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, suy ra $\widehat{HBA} \approx 49^\circ$.

Xét $\triangle ABC$, ta có: $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong tam giác)

$$\text{Suy ra } \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{CAB} - \widehat{CBA} \approx 180^\circ - 30^\circ - 49^\circ = 101^\circ.$$

4.16. Tìm chiều rộng d của dòng sông trong Hình 4.27 (làm tròn đến m).



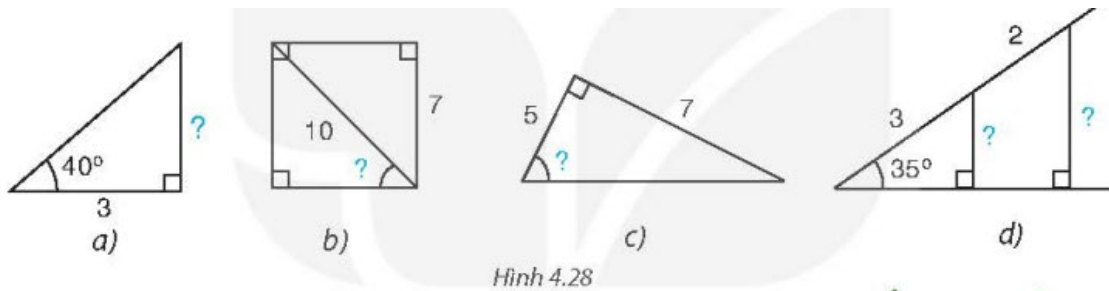
Hình 4.27

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan 40^\circ = \frac{d}{50} \text{ suy ra } d = 50 \cdot \tan 40^\circ \approx 42(\text{m}).$$

Vậy chiều rộng của dòng sông là khoảng 42 m.

4.17. Tính các số liệu còn thiếu (dấu "?") ở Hình 4.28 với góc làm tròn đến độ, với độ dài làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.



Hình 4.28

Lời giải

a) Gọi độ dài cạnh cần tìm là x . Ta có: $\tan 40^\circ = \frac{x}{3}$ suy ra $x = 3 \cdot \tan 40^\circ \approx 2,5$.

b) Gọi số đo góc cần tìm là α .

Vì tứ giác đã cho có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó hai cạnh đối nhau có độ dài bằng nhau.

Ta có: $\sin \alpha = \frac{7}{10} = 0,7$ suy ra $\alpha \approx 44^\circ$.

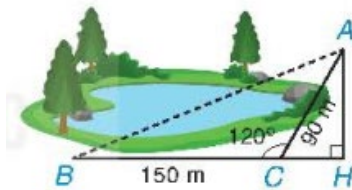
c) Gọi số đo góc cần tìm là β . Ta có: $\tan \alpha = \frac{7}{5}$ suy ra $\beta \approx 54^\circ$.

d) Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ và cạnh góc vuông lớn lần lượt là a, b .

Ta có: $\sin 35^\circ = \frac{a}{3}$, suy ra $a = 3 \cdot \sin 35^\circ \approx 1,7$.

$\sin 35^\circ = \frac{b}{5}$, suy ra $b = 5 \cdot \sin 35^\circ \approx 2,9$.

4.18. Một bạn muốn tính khoảng cách giữa hai địa điểm A, B ở hai bên hồ nước. Biết rằng các khoảng cách từ một điểm C đến A và đến B là $CA = 90\text{m}, CB = 150\text{m}$ và $\widehat{ACB} = 120^\circ$ (H.4.29). Hãy tính AB giúp bạn.



Hình 4.29

Lời giải

Ta có: $\widehat{BCA} + \widehat{ACH} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Suy ra $\widehat{ACH} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có:

$$AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = 90 \cdot \sin 60^\circ = 90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 45\sqrt{3}(\text{m}).$$

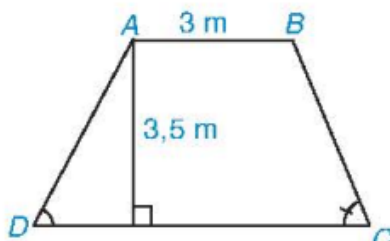
$$CH = AC \cdot \cos \widehat{ACH} = 90 \cdot \cos 60^\circ = 90 \cdot \frac{1}{2} = 45(\text{m}).$$

Ta có: $BH = BC + CH = 150 + 45 = 195(\text{m})$.

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , theo định lý Pythagore ta có:

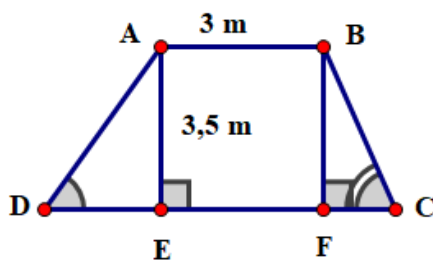
$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = (45\sqrt{3})^2 + 195^2 = 44100 \text{ Suy ra } AB = \sqrt{44100} = 210(\text{m}).$$

4.19. Mặt cắt ngang của một đập ngăn nước có dạng hình thang $ABCD$ (H.4.30). Chiều rộng của mặt trên AB của đập là 3m. Độ dốc của sườn AD , tức là $\tan D = 1,25$. Độ dốc của sườn BC , tức là $\tan C = 1,5$. Chiều cao của đập là 3,5m. Hãy tính chiều rộng CD của chân đập, chiều dài của các sườn AD và BC (làm tròn đến dm).



Hình 4.30

Lời giải



Kẻ $AE \perp CD, BF \perp CD$. Khi đó $AE \parallel BF$.

Vì $ABCD$ là hình thang nên $AB \parallel CD$, do đó suy ra $AB \parallel EF$.

Xét tứ giác $ABFE$ có: $AE \parallel BF$ và $AB \parallel EF$ nên là hình bình hành.

Lại có $\hat{E} = 90^\circ$, nên hình bình hành $ABFE$ là hình chữ nhật. Suy ra $EF = AB = 3\text{ m}$.

Xét $\triangle ADE$ vuông tại E , ta có: $\tan D = \frac{AE}{DE}$, suy ra $DE = \frac{AE}{\tan D} = \frac{3,5}{1,25} = 2,8(\text{m})$.

Vì $ABFE$ là hình chữ nhật nên $BF = AE = 3,5\text{ m}$.

Xét $\triangle BCF$ vuông tại F , ta có:

$\tan C = \frac{BF}{FC}$, suy ra $FC = \frac{BF}{\tan C} = \frac{3,5}{1,5} = \frac{7}{3}(\text{m})$. Ta có:

$$DC = DE + EF + FC = 2,8 + 3 + \frac{7}{3} = \frac{122}{15} = 8,1(3)(\text{m}) \approx 81(\text{dm}).$$

Xét $\triangle ADE$ vuông tại E , theo định lý Pythagore, ta có: $AD^2 = AE^2 + DE^2 = 3,5^2 + 2,8^2 = 20,09$.

Suy ra $AD = \sqrt{20,09} \approx 4,482186966...(\text{m}) \approx 45(\text{dm})$.

Xét $\triangle BCF$ vuông tại F , theo định lý Pythagore, ta có: $BC^2 = BF^2 + CF^2 = 3,5^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{637}{36}$.

Suy ra $BC = \sqrt{\frac{637}{36}} = 4,206476388\dots(\text{m}) \approx 42(\text{dm})$.

4.20. Trong một buổi tập trận, một tàu ngầm đang ở trên mặt biển bắt đầu đi chuyển theo đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° để lặn xuống (H.4.31).

a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được 200m thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước biển? (làm tròn đến m).

b) Giả sử tốc độ của tàu là 9km/h thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200m (tức là cách mặt nước biển 200m)?



Hình 4.31

Lời giải

a) Tàu chuyển động theo đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° và đi được 200m tức là $AH = 200\text{m}$. Độ sâu của tàu so với mặt nước biển là BH .

Xét $\triangle ABH$ vuông tại B , ta có: $BH = AH \cdot \sin \widehat{BAH} = 200 \cdot \sin 21^\circ \approx 72(\text{m})$.

b) Tàu ở độ sâu 200m tức là $BH = 200\text{m}$. Quãng đường tàu đi đến độ sâu 200m là AH .

Xét $\triangle ABH$ vuông tại B , ta có:

$$\sin \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH}, \text{ suy ra } AH = \frac{BH}{\sin 21^\circ} = \frac{200}{\sin 21^\circ} \approx 558(\text{m}) = 0,558(\text{km}).$$

Thời gian tàu chạy đạt độ sâu 200m là: $\frac{0,558}{9} = 0,062$ (giờ).

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết

a) $AB = 2,7$ và $AC = 4,5$;

b) $AC = 4,0$ và $BC = 4,8$.

Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ vuông ở A , ta có

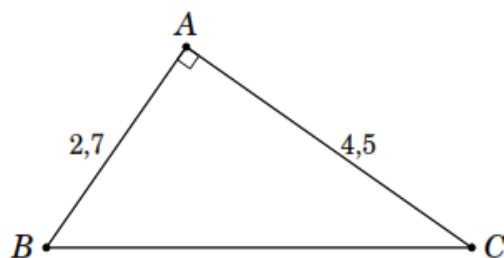
$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{4,5}{2,7} \approx \tan 59^\circ 04'$$

Suy ra $\hat{B} \approx 59^\circ 04'$ mà $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ nên

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 59^\circ 04' = 30^\circ 56'.$$

Mặt khác, theo định lí Py-ta-go ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2,7^2 + 4,5^2} \approx 5,25.$$



b) Xét $\triangle ABC$ vuông ở A , ta có

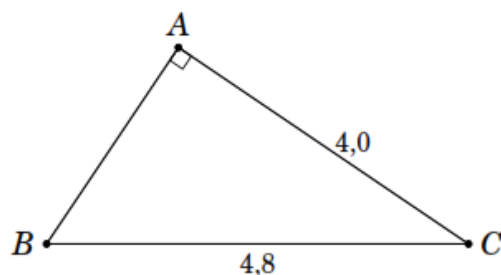
$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4,0}{4,8} \approx \sin 56^\circ 44'$$

Suy ra $\hat{B} \approx 56^\circ 44'$ mà $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ nên

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 56^\circ 44' = 33^\circ 16'.$$

Mặt khác, theo định lí Py-ta-go ta có

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{4,8^2 - 4,0^2} \approx 2,65.$$



Bài 2. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết

a) $BC = 4,5$ và $\hat{C} = 35^\circ$;

b) $AB = 3,1$ và $\hat{B} = 65^\circ$.

Lời giải

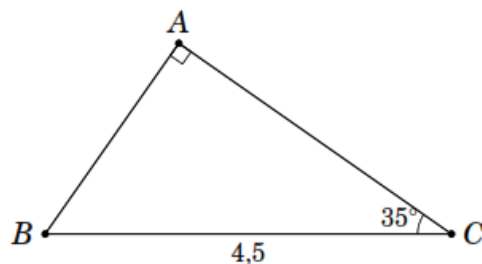
a) Xét $\triangle ABC$ vuông ở A ,

ta có $AB = BC \cdot \sin C = 4,5 \cdot \sin 35^\circ \approx 2,58$.

Tương tự, $AC = BC \cdot \cos C = 4,5 \cdot \cos 35^\circ \approx 3,69$.

Do $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ nên

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$



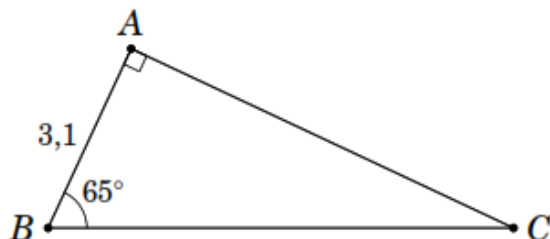
b) Xét $\triangle ABC$ vuông ở A , ta có

$$BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{3,1}{\cos 65^\circ} \approx 7,34.$$

Tương tự, $AC = AB \cdot \tan B = 3,1 \cdot \tan 65^\circ \approx 6,65$.

Do $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ nên

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ.$$



Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao BH . Biết $\hat{A} = 50^\circ$, $BH = 2,3$. Tính chu vi của $\triangle ABC$.

Lời giải

Do giả thiết suy ra $\hat{B} = \hat{C}$ nên

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{A}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ. \text{ Xét } \triangle AHB \text{ vuông tại } H, \text{ ta có}$$

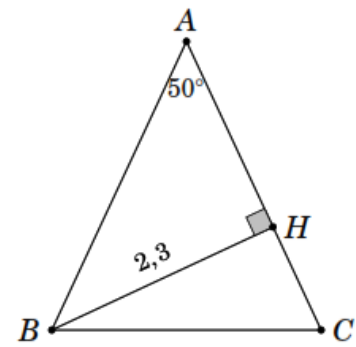
$$AH = BH \cdot \cot \widehat{HAB} = 2,3 \cdot \cot 50^\circ \approx 1,92.$$

Tương tự, xét $\triangle CHB$ vuông tại H , ta có

$$CH = BH \cdot \cot \widehat{HCB} = 2,3 \cdot \cot 65^\circ \approx 1,07.$$

$$\text{và } BC = \frac{BH}{\sin \widehat{HCB}} = \frac{2,3}{\sin 65^\circ} \approx 2,54.$$

Mà $AC = AH + HC \approx 1,92 + 1,07 = 2,99$. Do đó chu vi tam giác ABC bằng $AB + BC + CA \approx 2 \cdot 2,99 + 2,54 = 8,52$.



Bài 4. Hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$. Biết $AB = 2,6$, $CD = 4,7$ và $\hat{C} = 35^\circ$. Tính diện tích hình thang.

Lời giải

Vẽ $BH \perp CD$, do giả thiết suy ra $ABHD$ là hình chữ nhật nên $AB = DH = 2,6$.

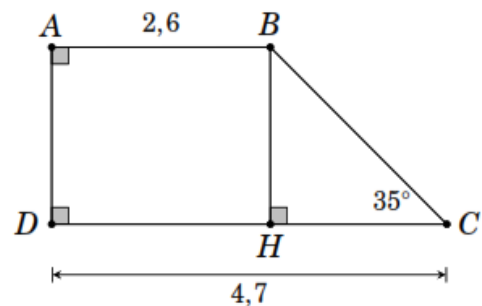
$$\text{Mà } CD = DH + HC \Leftrightarrow HC = DC - DH = 4,7 - 2,6 = 2,1.$$

Xét $\triangle BHC$ vuông tại H , ta có

$$BH = HC \cdot \tan \widehat{BCH} = 2,1 \cdot \tan 35^\circ \approx 1,5.$$

Gọi S là diện tích hình thang $ABCD$.

$$\text{Ta có } S = \frac{(AB + CD) \cdot BH}{2} = \frac{(2,6 + 4,7) \cdot 1,5}{2} \approx 5,5.$$



Tài liệu phát hành trên website Tailieuchuan.vn

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC , $AB > AC$, đường cao AH và đường trung tuyến AM . Gọi α là số đo góc $\widehat{HAM}$.

a) Chứng minh rằng $HB - HC = 2HM$;

b) Chứng minh rằng $\tan \alpha = \frac{\cot B - \cot C}{2}$.

Lời giải

a) Do giả thiết AM là trung tuyến nên $BM = MC$.

Mà $HB - HC = (HM + BM) - (MC - MH) = 2 \cdot MH$.

b) Đặt $AH = h$, xét $\triangle AHB$, ta có $HB = AH \cdot \cot \widehat{ABH} = h \cdot \cot \widehat{ABH}$.

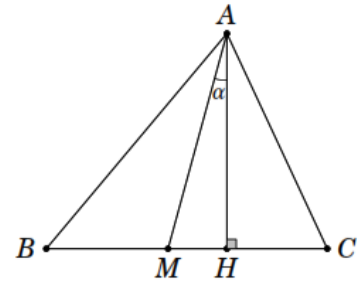
Tương tự, xét $\triangle AHC$, ta có $HC = AH \cdot \cot \widehat{ACH} = h \cdot \cot \widehat{ACH}$.

Suy ra $HB - HC = h \cdot (\cot \widehat{ABH} - \cot \widehat{ACH})$ hay $2HM = h \cdot (\cot B - \cot C)$. (1)

Mặt khác, xét $\triangle AMH$ vuông tại H , ta có $HM = h \cdot \tan \widehat{MAH} = h \cdot \tan \alpha$

hay $2HM = 2h \cdot \tan \alpha$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2h \cdot \tan \alpha = h \cdot (\cot B - \cot C) \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\cot B - \cot C}{2}$.



Bài 6. Giải tam giác nhọn ABC biết $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = 3,0$ và $BC = 4,5$.

Lời giải

Kẻ đường cao $AH \perp BC$. Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$AH = AB \cdot \sin B = 3,0 \cdot \sin 60^\circ \approx 2,6$.

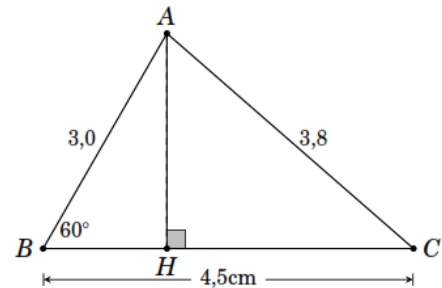
Tương tự, xét $BH = AB \cdot \cos B = 3,0 \cdot \cos 60^\circ = 1,5$.

Mà $HC = BC - BH = 4,5 - 1,5 = 3,0$.

Theo định lý Py-ta-go ta có $AB^2 = BH^2 + AH^2 = 3,0^2 + 2,6^2 = 15,76$ suy ra $AB = \sqrt{15,76} \approx 4,0$.

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H ta có $\tan \widehat{ACH} = \frac{AH}{HC} \approx \frac{2,6}{3,0} \approx \tan 40^\circ 55'$.

Do $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} \approx 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ 55') = 79^\circ 5'$.



Bài 7. Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = 38^\circ$, $AB = 3,5$, $AD = 3,1$. Tính diện tích hình thang đó.

Lời giải

Vẽ $BH \perp CD$, do giả thiết suy ra $ABHD$ là hình chữ nhật.
Do đó $BH = 3,1$, $DH = 3,5$.

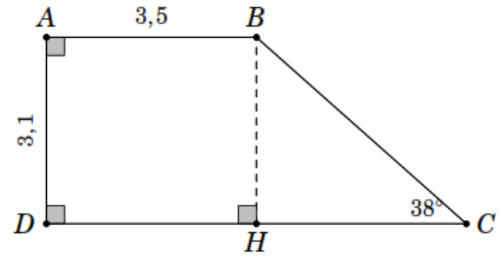
Xét $\triangle BHC$ vuông tại H , ta có

$$HC = BH \cdot \cot C = 3,1 \cdot \cot 38^\circ \approx 4,0.$$

Mà $CD = DH + HC = 3,5 + 4,0 = 7,5$.

Gọi S là diện tích hình thang $ABCD$ khi đó

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot BH}{2} = \frac{(3,5 + 7,5) \cdot 3,1}{2} = 17,1.$$



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

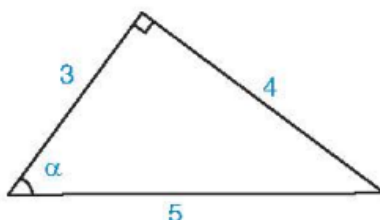
4.21. Trong Hình 4.32, $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{5}{3}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{4}{5}$.



Hình 4.32

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa tỉ số lượng giác cos, ta có: $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

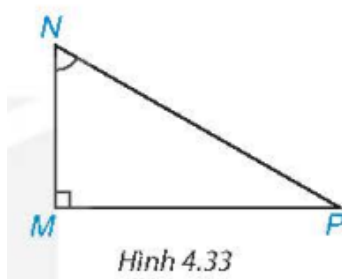
4.22. Trong tam giác MNP vuông tại M (H.4.33), $\sin \widehat{MNP}$ bằng

A. $\frac{PN}{NM}$.

B. $\frac{MP}{PN}$.

C. $\frac{MN}{PN}$.

D. $\frac{MN}{MP}$.



Hình 4.33

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa tỉ số lượng giác sin, ta có: $\sin \widehat{MNP} = \frac{MP}{PN}$.

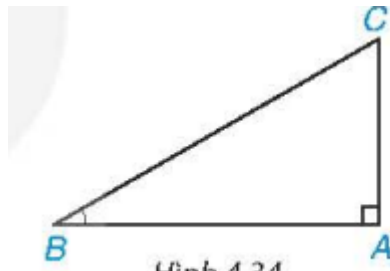
4.23. Trong tam giác ABC vuông tại A (H.4.34), $\tan B$ bằng

A. $\frac{AB}{AC}$.

B. $\frac{AC}{AB}$.

C. $\frac{AB}{BC}$.

D. $\frac{BC}{AC}$.



Hình 4.34

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa tỉ số lượng giác tan, ta có: $\tan B = \frac{AC}{AB}$.

4.24. Với mọi góc nhọn α , ta có

- A. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.
- B. $\tan(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.
- C. $\cot(90^\circ - \alpha) = 1 - \tan \alpha$.
- D. $\cot(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

Lời giải

Chọn A

Với mọi góc nhọn α , ta có:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha;$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$

4.25. Giá trị $\tan 30^\circ$ bằng

- A. $\sqrt{3}$.
- B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. TỰ LUẬN

4.26. Xét các tam giác vuông có một góc nhọn bằng hai lần góc nhọn còn lại. Hỏi các tam giác đó có đồng dạng với nhau không? Tính sin và cosin của góc nhọn lớn hơn.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , có một góc nhọn $\hat{B} = \alpha$, góc nhọn còn lại là $\hat{C} = 2\hat{B} = 2\alpha$.

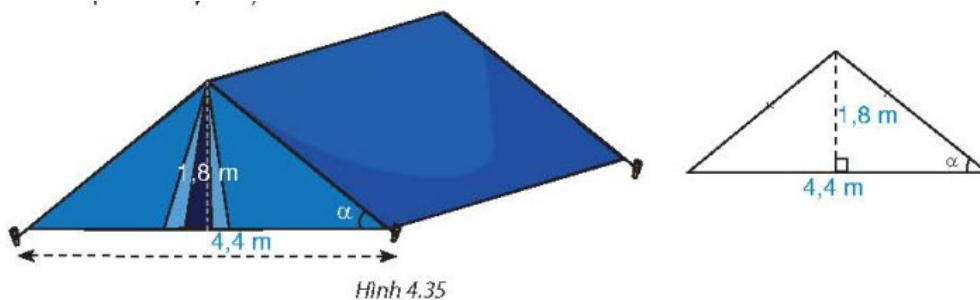
Khi đó $\hat{B} + \hat{C} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. Mà $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của một tam giác vuông).

Do đó $3\alpha = 90^\circ$, suy ra $\alpha = 30^\circ$. Vì vậy, $\hat{B} = 30^\circ, \hat{C} = 60^\circ$.

Xét các tam giác vuông có một góc nhọn bằng hai lần góc nhọn còn lại (một góc có số đo bằng 30° và một góc có số đo bằng 60°) thì các tam giác vuông đó đồng dạng với nhau và

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

4.27. Hình 4.35 là mô hình của một túp lều. Tìm góc α giữa cạnh mái lều và mặt đất (làm tròn kết quả đến phút).

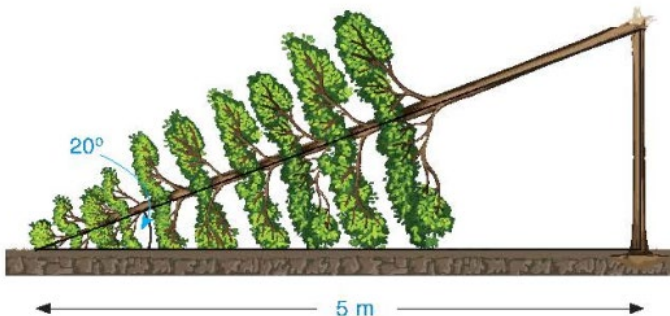


Lời giải

Ta có: $\tan \alpha = \frac{1,8}{2,2} = \frac{9}{11}$, suy ra $\alpha \approx 39^\circ 17'$.

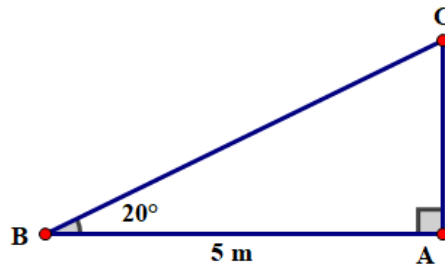
Vậy góc α giữa cạnh mái lều và mặt đất là khoảng $39^\circ 17'$.

4.28. Một cây cao bị gãy, ngọn cây đổ xuống mặt đất. Ba điểm: gốc cây, điểm gãy, ngọn cây tạo thành một tam giác vuông. Đoạn cây gãy tạo với mặt đất góc 20° và chẵn ngang lối đi một đoạn 5 m (H.4.36). Hỏi trước khi bị gãy, cây cao khoảng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Giả sử hình ảnh cây bị gãy mô tả bởi hình vẽ như dưới đây:



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$AC = AB \cdot \tan 20^\circ = 5 \cdot \tan 20^\circ \approx 1,8(\text{m});$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC}, \text{ suy ra } BC = \frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{5}{\cos 20^\circ} \approx 5,3(\text{m})$$

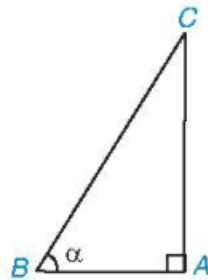
Khi đó: $AC + CB \approx 1,8 + 5,3 = 7,1(\text{m})$.

Vậy trước khi bị gãy, cây cao khoảng 7,1 m.

4.29. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\hat{B} = \alpha$ (H.4.37).

a) Hãy viết các tỉ số lượng giác $\sin \alpha, \cos \alpha$.

b) Sử dụng định lí Pythagore, chứng minh rằng $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.



Hình 4.37

Lời giải

a) Theo định nghĩa tỉ số lượng giác sin và cos, ta có: $\sin \alpha = \sin B = \frac{AC}{BC}$ và $\cos \alpha = \cos B = \frac{AB}{BC}$.

$$\text{b) Ta có: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 + \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2}.$$

Áp dụng định lí Pythagore cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\text{Do đó: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

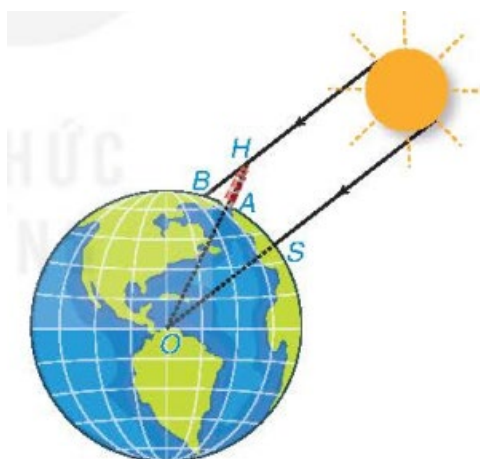
Vậy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

4.30. ĐÓ VUI. Chu vi Trái Đất bằng bao nhiêu?

Vào khoảng năm 200 trước Công nguyên, Eratosthenes (O-ra-tô-xten), một nhà toán học và thiên văn học người Hy Lạp, đã ước lượng được "chu vi" của Trái Đất (chu vi của đường Xích Đạo) nhờ hai quan sát sau:

1. Hồi đó, hằng năm cứ vào trưa ngày Hạ chí (21/6), người ta thấy tia sáng mặt trời chiếu thẳng xuống đáy một cái giếng sâu nổi tiếng ở thành phố Syene (Xy -en), tức là tia sáng chiếu thẳng đứng.
2. Cũng vào trưa một ngày Hạ chí, ở thành phố Alexandria (A-lếch-xăng-dri-a) cách Syene 800km , Eratosthenes thấy một tháp cao 25m có bóng trên mặt đất dài 3,1m .

Từ hai quan sát trên, ông có thể tính xấp xỉ "chu vi" của Trái Đất như thế nào? (trên Hình 4.38, điểm O là tâm Trái Đất, điểm S tượng trưng cho thành phố Syene, điểm A tượng trưng cho thành phố Alexandria, điểm H là đỉnh của tháp, bóng của tháp trên mặt đất được coi là đoạn thẳng AB).



Hình 4.38

Lời giải

Theo em, nhà toán học và thiên văn học Eratosthenes đã tính xấp xỉ "chu vi" của Trái Đất như sau:

Các tia sáng mặt trời chiếu thẳng đứng, nên ta coi các tia sáng BH , OS song song với nhau. Khi đó $\widehat{AOS} = \widehat{BHA}$ (hai góc so le trong).

Xét $\triangle ABH$ vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{BHA} = \frac{AB}{AH} = \frac{3,1}{25} = \frac{31}{250}, \text{ suy ra } \widehat{BHA} \approx 7^\circ 4'. \text{ Do đó } \widehat{AOS} \approx 7^\circ 4'.$$

Xét $\triangle OAS$ vuông tại S , ta có:

$$\sin \widehat{AOS} = \frac{AS}{OA}, \text{ suy ra } OA = \frac{AS}{\sin \widehat{AOS}} \approx \frac{800}{\sin 7^\circ 4'} \approx 6502,79(\text{km}).$$

Khi đó, "chu vi" của Trái Đất khoảng:

$$2\pi \cdot OA \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 6502,79 \approx 40838(\text{km}).$$

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 13$ cm. Giá trị của $\sin C$ bằng

A. $\frac{5}{12}$.

B. $\frac{1}{13}$.

C. $\frac{12}{13}$.

D. $\frac{5}{13}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos B = \frac{AB}{BC}$.

B. $\cos B = \frac{AC}{AB}$.

C. $\cos B = \frac{AB}{AC}$.

D. $\cos B = \frac{AC}{BC}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A . Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $\sin B = \frac{AB}{BC}$.

B. $\sin B = \frac{AB}{AC}$.

C. $\tan B = \frac{AB}{AC}$.

D. $\cos B = \frac{AB}{AC}$.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\cos 35^\circ > \sin 40^\circ$.

B. $\sin 35^\circ > \cos 40^\circ$.

C. $\sin 35^\circ < \sin 40^\circ$.

D. $\cos 35^\circ > \cos 40^\circ$.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Hệ thức nào đây **sai**?

A. $AC^2 = BC.HC$.

B. $AH^2 = AB.AC$.

C. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

D. $AH^2 = HB.HC$.

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $BH = 3,2\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$ thì độ dài AB bằng

A. 8 cm .

B. 16 cm .

C. $1,8\text{ cm}$.

D. 4 cm .

Câu 7: Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ACB} = 30^\circ$, cạnh $AB = 5\text{ cm}$. Độ dài cạnh AC là

A. 10 cm .

B. $\frac{5}{\sqrt{3}}\text{ cm}$.

C. $5\sqrt{3}\text{ cm}$.

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}\text{ cm}$.

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại C . Biết $\sin B = \frac{1}{3}$, khi đó $\tan A$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. 3 .

C. $2\sqrt{2}$.

D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 9: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $BC = 12\text{ cm}$. Tính độ dài đường cao AH .

A. $AH = 3\text{ cm}$.

B. $AH = 2\sqrt{3}\text{ cm}$.

C. $AH = 4\sqrt{3}\text{ cm}$.

D. $AH = 6\text{ cm}$.

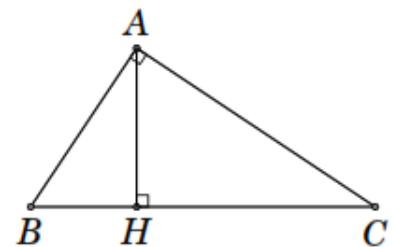
Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (hình bên). Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $\sin B = \frac{AH}{AB}$.

B. $\tan \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH}$.

C. $\cos C = \frac{HC}{AC}$.

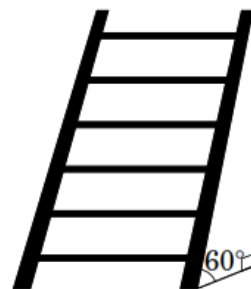
D. $\cot \widehat{HAC} = \frac{AH}{AC}$.



Câu 11: Một cái thang dài 4 m đặt dựa vào tường, biết góc giữa thang và mặt đất là 60° . Khoảng cách d từ chân thang đến tường bằng bao nhiêu?

A. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m. B. $d = 2\sqrt{3}$ m.

C. $d = 2\sqrt{2}$ m. D. $d = 2$ m.



Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2\sqrt{5}a$, $AC = 5\sqrt{3}a$. Kẻ AK vuông góc với BC , với K nằm trên cạnh BC . Tính AK theo a .

A. $AK = \frac{19\sqrt{57}}{10}a$.

B. $AK = \frac{\sqrt{95}}{2}a$.

C. $AK = \frac{10\sqrt{57}}{19}a$.

D. $AK = \frac{5\sqrt{57}}{19}a$.

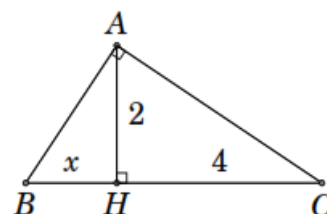
Câu 13: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AH = 2$, $HC = 4$. Đặt $BH = x$ (hình bên). Tính x .

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = 1$.

C. $x = \frac{16}{3}$.

D. $x = 4$.



Câu 14: Cho $\widehat{xOy} = 45^\circ$. Trên tia Oy lấy hai điểm A , B sao cho $AB = \sqrt{2}$ cm. Tính độ dài hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên Ox .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm.

C. 1 cm.

D. $\frac{1}{2}$ cm.

Câu 15: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH và đường trung tuyến AM ($H, M \in BC$). Biết chu vi của tam giác là 72 cm và $AM - AH = 7$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

A. $S = 48$ cm².

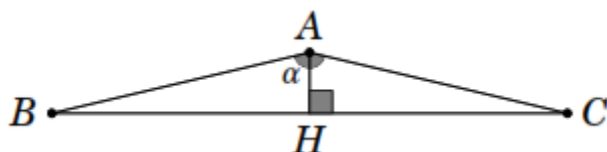
B. $S = 108$ cm².

C. $S = 148$ cm².

D. $S = 144$ cm².

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Xem hình bên và tính góc tạo bởi hai mái nhà AB và AC , biết rằng mỗi mái nhà dài 2,34m và cao 0,8m.

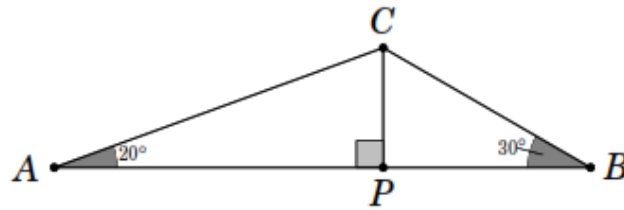


Lời giải

$$\cos \widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} = \frac{0,8}{2,34} = \frac{40}{117} \Rightarrow \widehat{BAH} \approx 70^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BAH} = 2.70^\circ = 140^\circ.$$

Bài 2. Tam giác ABC có $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, $AB = 6$ cm. Đường vuông góc kẻ từ C đến AB cắt AB tại P (hình vẽ bên). Hãy tìm

- a) AP , BP ;
b) CP .



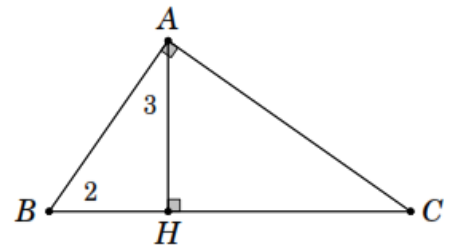
Lời giải

a) Ta có $CP = AP \cdot \tan 20^\circ = PB \cdot \tan 30^\circ \Rightarrow \frac{PA}{\tan 30^\circ} = \frac{PB}{\tan 20^\circ} = \frac{PA + PB}{\tan 30^\circ + \tan 20^\circ} = \frac{6}{\tan 30^\circ + \tan 20^\circ}$.

Do đó $PA = 6 \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}(\text{cm})$; $PB = 6 \cdot \tan 20^\circ \approx 2,18(\text{cm})$.

b) $CP = 2\sqrt{3} \cdot \tan 20^\circ \approx 1,26(\text{cm})$.

Bài 3. Tính độ dài các cạnh và số đo các góc nhọn của tam giác ABC vuông tại A trong hình bên



Lời giải

- $HC = \frac{AH^2}{HB} = \frac{3^2}{2} = 4,5$.
- $BC = BH + HC = 2 + 4,5 = 6,5$.
- $BA^2 = BH \cdot BC = 2 \cdot 6,5 = 13 \Rightarrow BA = \sqrt{13}$.
- $CA^2 = CH \cdot CB = 4,5 \cdot 6,5 = \frac{117}{4} \Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{13}}{2}$.
- $\tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{3}{2} \Rightarrow \hat{B} \approx 59^\circ 19'$.
- $\hat{C} = 90^\circ - 59^\circ 19' = 30^\circ 41'$.

Bài 4. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AD = 2,1\text{cm}$; $CD = 6,0\text{cm}$ và $\hat{D} = 48^\circ$.

- a) Tính độ dài AB .
b) Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Lời giải

- a) Kẻ các đường cao $AH \perp CD$ và $BK \perp CD$.

Dễ thấy $ABKH$ là hình chữ nhật nên $AB = HK$.

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle BKC$, do giả thiết suy ra

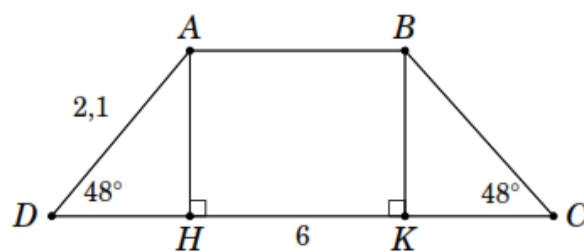
$$AD = BC \text{ và } \widehat{ADH} = \widehat{BCK} \text{ nên } \triangle AHD = \triangle BKC.$$

Do đó $DH = KC$ và $HK = DC - 2DH$.

Xét tam giác vuông AHD ta có

$$DH = AD \cdot \cos \widehat{ADH} = 2,1 \cdot \cos 48^\circ \approx 1,4(\text{cm}).$$

Suy ra $AB = 6,0 - 2 \cdot 1,4 \approx 3,2(\text{cm})$.



b) Gọi S là diện tích hình thang $ABCD$. Khi đó $S = \frac{(AB + CD) \cdot AH}{2}$.

Xét tam giác vuông ADH ta có $AH = AD \cdot \sin \widehat{ADH} = 2,1 \cdot \sin 48^\circ \approx 1,56(\text{cm})$.

$$\text{Nên } S = \frac{(3,2 + 6,0) \cdot 1,56}{2} \approx 7,88(\text{cm}^2).$$

Tài liệu phát hành trên website Tailieuchuan.vn

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$.

a) Tính BC , $\hat{B}$, $\hat{C}$;

b) Phân giác của $\hat{A}$ cắt BC tại D . Tính BD , CD .

c) Từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB , AC . Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Tính chu vi và diện tích của tứ giác $AEDF$?

Lời giải

a) Theo định lý Py-ta-go, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = \sqrt{100} = 10(\text{cm}).$$

Theo tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác ABC vuông tại A

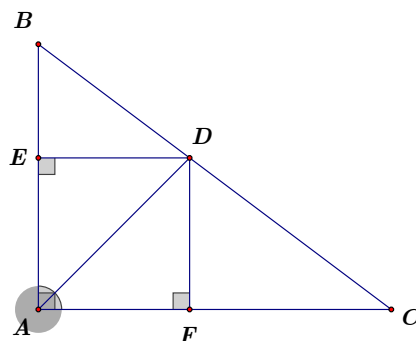
$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \hat{B} \approx 53^\circ.$$

Do đó $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$.

b) Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{6 + 8} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}.$$

$$\Rightarrow DB = \frac{5}{7} AB = \frac{5}{7} \cdot 6 \approx 4,3(\text{cm}); DC = \frac{5}{7} AC = \frac{5}{7} \cdot 8 = 5,7(\text{cm}).$$



c) Tứ giác $AEDF$ có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Mặt khác $DE = DF$ (tính chất tia phân giác của một góc) nên $AEDF$ là hình vuông.

Theo hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong $\triangle BED$ vuông tại E, ta có

$$DE = DB \cdot \sin B = 4,3 \cdot \sin 53^\circ \approx 3,43(\text{cm}).$$

Chu vi của hình vuông $AEDF$: $4 \cdot 3,43 = 13,72(\text{cm})$.

Diện tích hình vuông $AEDF$: $S = (3,43)^2 = 11,7649(\text{cm}^2)$.

Bài 6. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Biết $\widehat{A} = 44^\circ$; $AH = 9\text{cm}$. Tính chu vi tam giác ABC .

Lời giải

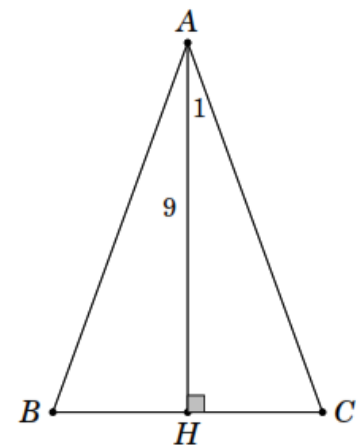
Do tam giác ABC cân đỉnh A , AH là đường cao nên AH cũng là đường phân giác, đường trung tuyến.

Do đó $\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = 22^\circ$ và $HB = HC = \frac{BC}{2}$.

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có $AC = \frac{AH}{\cos \widehat{HAC}} = \frac{9}{\cos 22^\circ} \approx 9,7(\text{cm})$

và $HC = AH \cdot \cot \widehat{HAC} = 9 \cdot \cot 22^\circ \approx 3,6(\text{cm})$.

Do đó chu vi tam giác ABC là $2 \cdot (9,7 + 3,6) \approx 26,6(\text{cm})$.



Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A . Chứng minh rằng $\tan \frac{B}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$.

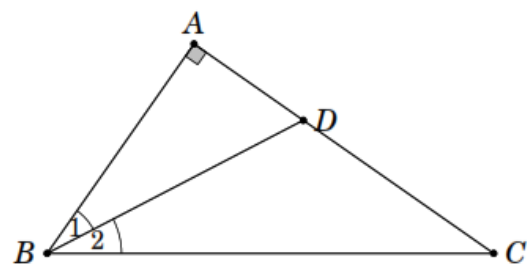
Lời giải

Vẽ đường phân giác BD . Xét $\triangle ABD$ vuông tại A , ta có $\tan \widehat{ABD} = \frac{AD}{AB}$.

Mặt khác $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{DC} = \frac{AB}{BC}$ suy ra

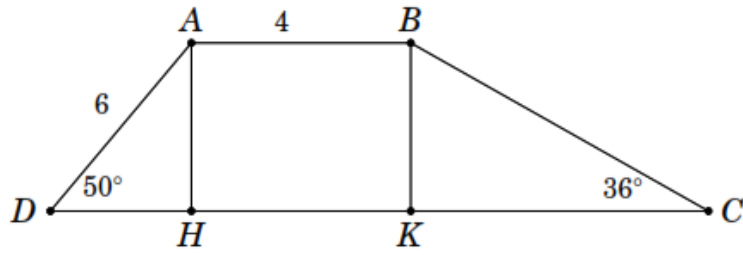
$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD + CD}{AB + BC}.$$

Do đó $\tan \widehat{ABD} = \frac{AC}{AB + BC}$ hay $\tan \frac{B}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$.



Bài 8. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $\widehat{C} = 36^\circ$; $\widehat{D} = 50^\circ$. Biết $AB = 4\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$. Tính chu vi hình thang.

Lời giải



Vẽ $AH \perp CD$ và $BK \perp CD$, dễ thấy $AHKB$ là hình chữ nhật.

Do đó $AH = BK$ và $AB = HK$.

Xét $\triangle ADH$ vuông tại H , ta có

$$DH = AD \cdot \cos \widehat{ADH} = 6 \cdot \cos 50^\circ \approx 3,9(\text{cm}).$$

Tương tự, xét $\triangle BKC$ vuông tại K , ta có $KC = BK \cdot \cot \widehat{BCK} = 4,6 \cdot \cot 36^\circ \approx 6,3(\text{cm})$

$$\text{và } BC = \frac{BK}{\sin \widehat{KCB}} = \frac{4,6}{\sin 36^\circ} \approx 7,8(\text{cm}).$$

Ta có $DC = DH + HK + KC = 3,9 + 4 + 6,3 \approx 14,2(\text{cm})$.

Do đó chu vi của hình thang là $4 + 7,8 + 14,2 + 6 \approx 32(\text{cm})$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ $HM \perp AB$; $HN \perp AC$. Biết $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$.

- Tính độ dài MN .
- Tính số đo các góc của tam giác AMN .
- Tính diện tích tứ giác $BMNC$.

Lời giải

a) Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC , ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \text{ suy ra } BC = 5(\text{cm}).$$

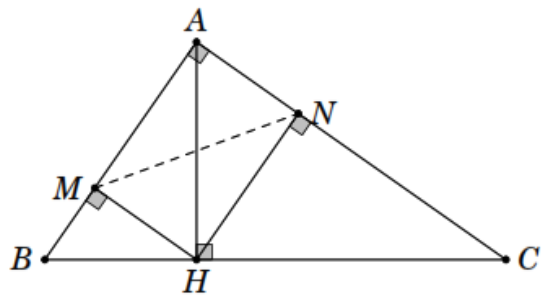
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC , ta có

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$

$$\text{suy ra } AH = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4(\text{cm}).$$

Dễ thấy $AMHN$ là hình chữ nhật nên $MN = AH$ nên $MN = 2,4\text{cm}$.

$$\text{b) Xét } \triangle ABH \text{ vuông tại } H, \text{ ta có } AH^2 = AM \cdot AB \Leftrightarrow AM = \frac{AH^2}{AB} = \frac{2,4^2}{4} = 1,44(\text{cm}).$$



Ta xét $\triangle AMN$ vuông tại A , ta có $\tan \widehat{AMN} = \frac{AN}{AM} = \frac{1,44}{1,92} \approx \tan 36^\circ 52'$.

Do đó $\widehat{AMN} = 36^\circ 52'$.

Mà $\widehat{ANM} = 90^\circ = \widehat{AMN} = 90^\circ - 36^\circ 52' = 53^\circ 8'$.

c) Gọi S là diện tích tứ giác $BMNC$.

Ta có $S = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC - \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1,92 \cdot 1,44 \approx 4,6(\text{cm}^2)$.

Vậy diện tích tứ giác $BMNC$ là $4,6\text{cm}^2$.