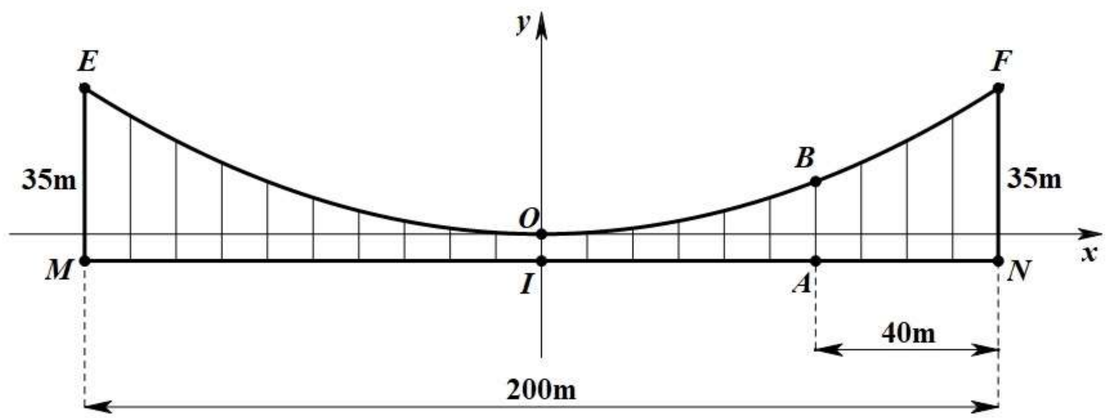
| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>TỈNH QUẢNG NAM | KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CÔNG LẬP<br>NĂM HỌC 2025 - 2026 |
|---|---|
| **ĐỀ CHÍNH THỨC**<br>*(Đề gồm có 02 trang)* | **Môn thi: Toán (chuyên)**<br>**Thời gian: 150 phút** (*không kể thời gian giao đề*)<br>**Khóa thi ngày: 03-05/6/2025** |

**Câu 1 (1,75 điểm).**

a) Cho biểu thức $P=\dfrac{x}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$, với $x\geq 0,\ x\neq 1$. Rút gọn biểu thức $P$ và tìm tất cả các giá trị của $x$ thỏa mãn $P>4$.

b) Một cây cầu treo dài $200\text{m}$ có bề mặt cầu nằm ngang, hai trụ $ME,\ NF$ đặt tại hai đầu cầu, cùng vuông góc với $MN$, $ME=NF=35\text{m}$. Một dây cáp treo có dạng parabol $y=ax^2$ $(a>0)$ có đỉnh là $O$, đi qua các điểm $E,\ F$. Người ta dùng các đoạn dây vuông góc với $MN$ để nối các điểm trên cầu với dây cáp treo, trong đó có đoạn dây $IO$ dài $5\text{m}$, với $I$ là điểm chính giữa cầu. Hãy tính độ dài đoạn dây $AB$, biết $AN=40\text{m}$ (xem *Hình 1*).




*Hình 1*

**Câu 2 (1,5 điểm).**

a) Giải phương trình $2x-1=\dfrac{6x^2-3x}{\sqrt{6x^2-x-1}+\sqrt{2x-1}}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\left(1-\sqrt{y+1}\right)x=2\sqrt{y+1}+2 \\ x+y+1=\dfrac{6}{\sqrt{y+1}+1} \end{cases}$.

**Câu 3 (0,75 điểm).** Hai bạn An và Bình cùng chơi trò chơi chọn thẻ từ hai hộp kín như sau: An chọn ngẫu nhiên một thẻ từ hộp (I) chứa ba thẻ được đánh số 1; 2; 3 và Bình chọn ngẫu nhiên một thẻ từ hộp (II) chứa bốn thẻ được đánh số 1; 2; 3; 4. Bạn nào chọn được thẻ có số lớn hơn sẽ là người thắng cuộc. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất của biến cố $A$: "Bạn An là người thắng cuộc".

**Câu 4 (2,0 điểm).** Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB < AC\right)$ có hai đường cao $AD, BE$ cắt nhau tại $H$. Gọi $I$ là trung điểm của cạnh $BC$, kẻ $HK$ vuông góc với $AI\left(K \in AI\right)$. Trên tia đối của tia $KH$ lấy điểm $M$ sao cho $IM = IC$. Gọi $N$ là giao điểm của hai tia $BE$ và $CM$. Trên tia đối của tia $IE$ lấy điểm $P$ sao cho $IP = IE$. Chứng minh rằng:

a) Hai góc $EAK$ và $EHK$ bằng nhau;

b) Hai tam giác $BMP$ và $NME$ đồng dạng;

c) $AM$ vuông góc với $IM$.

**Câu 5 (2,0 điểm).** Cho đường tròn tâm $O$ có dây $BC$ cố định ($BC$ không phải đường kính), điểm $A$ thay đổi trên cung lớn $BC$ của đường tròn $(O)$ sao cho $ABC$ là tam giác nhọn và $AB \neq AC$. Gọi $I$ là trung điểm của cạnh $BC$, $K$ là giao điểm của hai tiếp tuyến tại $B$ và $C$ của đường tròn $(O)$. Đoạn thẳng $AK$ cắt $BC$ tại $E$ và cắt đường tròn $(O)$ tại $D$ ($D$ khác $A$), gọi $F$ là trung điểm của đoạn thẳng $AD$. Kẻ $KM$ vuông góc với $AB$ tại $M$ và $KN$ vuông góc với $AC$ tại $N$. Chứng minh rằng:

a) Tia $FK$ là tia phân giác của góc $BFC$;

b) $KA \cdot KD = KE \cdot KF$;

c) Khi điểm $A$ thay đổi trên cung lớn $BC$ của đường tròn $(O)$ thì đường thẳng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 6 (1,0 điểm).** Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 = y^2 + 140$.

**Câu 7 (1,0 điểm).** Cho ba số thực dương $x, y, z$ thỏa mãn $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 y^2}{\left(x^2 + y^2\right) z} + \frac{y^2 z^2}{\left(y^2 + z^2\right) x} + \frac{z^2 x^2}{\left(z^2 + x^2\right) y}$.

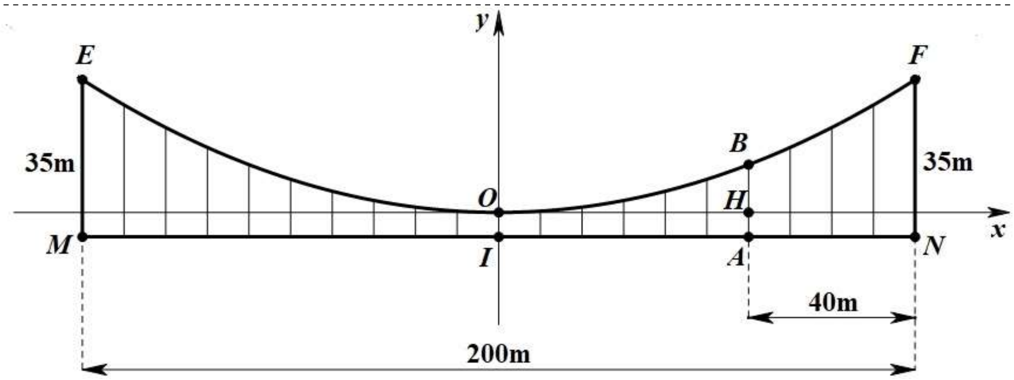
---------- **HẾT** ----------

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.*

*Họ và tên thí sinh*: ………………………….. *Số báo danh*: …….........

| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>TỈNH QUẢNG NAM | KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CÔNG LẬP<br>NĂM HỌC 2025 - 2026 |
|---|---|
| **HDC CHÍNH THỨC**<br>*(Hướng dẫn chấm có 9 trang)* | **HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (chuyên)** |

| Câu | Nội dung | Điểm |
|---|---|---|
| **Câu 1** | a) Cho biểu thức $P=\dfrac{x}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$, với $x\ge 0,\ x\ne 1$. Rút gọn biểu thức $P$ và tìm tất cả các giá trị của $x$ thỏa mãn $P>4$. | **1,0** |
| | $P=\dfrac{x\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{2x-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$<br>$=\dfrac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$ | 0,25 |
| | $=\dfrac{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$ | 0,25 |
| | $=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{x-3\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$ | 0,125 |
| | $=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}$ | 0,125 |
| | $\mathrm{P}>4$ suy ra $\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}>4$ hay $\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}-4>0$ hay $\dfrac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}>0$ (1)<br>- Xét $x=0$: không thỏa mãn (1). | 0,125 |
| | - Xét $x>0,\ x\ne 1$: Vì $-3\sqrt{x}<0$ nên từ (1) suy ra $\sqrt{x}-1<0$ hay $\sqrt{x}<1$.<br>Do đó $0<x<1$.<br>Vậy tất cả các giá trị $x$ cần tìm là $0<x<1$. | 0,125 |
| | b) Một cây cầu treo dài $200\text{m}$ có bề mặt cầu nằm ngang, hai trụ $ME, NF$ đặt tại hai đầu cầu, cùng vuông góc với $MN$, $ME=NF=35\text{m}$. Một dây cáp treo có dạng parabol $y=ax^2$ $(a>0)$ có đỉnh là $O$, đi qua các điểm $E, F$. Người ta dùng các đoạn dây vuông góc với $MN$ để nối các điểm trên cầu với dây cáp treo, trong đó có đoạn dây $IO$ dài $5\text{m}$, với $I$ là điểm chính giữa cầu. Hãy tính độ dài đoạn dây $AB$, biết $AN=40\text{m}$ (xem *Hình 1*). | **0,75** |

| | | |
|---|---|---|
| | <br>*Hình 1*<br>Với hệ trục tọa độ $Oxy$ như Hình 1, lấy đơn vị trên mỗi trục là $1\text{m}$, ta có $F(100;30)$, $E(-100;30)$.<br>Vì parabol đi qua điểm $F(100;30)$ nên $30=a.100^2$, suy ra $a=\dfrac{3}{1000}$. | 0,25 |
| | Do đó phương trình parabol là $y=\dfrac{3}{1000}x^2$. $\quad(1)$ | 0,125 |
| | Các điểm $A, B$ có hoành độ là $100-40=60$.<br>Thay $x=60$ vào PT (1), ta được tung độ của điểm $B$ là $y=\dfrac{3}{1000}.60^2=10,8$. | 0,125 |
| | Gọi $H$ là giao điểm của đoạn thẳng $AB$ và trục $Ox$, ta có: $HB=10,8$ và $HA=OI=5$. | 0,125 |
| | Vậy độ dài của đoạn dây $AB$ là: $AB=HB+HA=10,8+5=15,8\text{m}$. | 0,125 |

| Câu | Nội dung | Điểm |
|---|---|---|
| **Câu 2** | a) Giải phương trình $2x-1=\dfrac{6x^2-3x}{\sqrt{6x^2-x-1}+\sqrt{2x-1}}$ $\quad(1)$ | **0,75** |
| | Điều kiện: $\begin{cases} 6x^2-x-1\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \\ \sqrt{6x^2-x-1}+\sqrt{2x-1}\neq 0 \end{cases}$ | 0,125 |
| | PT (1) trở thành $2x-1=\dfrac{\left(\sqrt{6x^2-x-1}+\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{6x^2-x-1}-\sqrt{2x-1}\right)}{\sqrt{6x^2-x-1}+\sqrt{2x-1}}$ | 0,125 |
| | Suy ra $2x-1=\sqrt{6x^2-x-1}-\sqrt{2x-1}$ hay $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=\sqrt{(2x-1)(3x+1)}-\sqrt{2x-1}$<br>hay $\left(\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}+1\right)=0$. | 0,125 |
| | Do đó $\sqrt{2x-1}=0$ hoặc $\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}+1=0$.<br>- Xét $\sqrt{2x-1}=0$ hay $2x-1=0$ hay $x=\dfrac{1}{2}$: không thỏa mãn điều kiện. | 0,125 |

| | | |
|---|---|---|
| | - Xét $\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}+1=0$ hay $\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-1}+1 \quad (2)$<br>Bình phương hai vế PT (2), ta được: $3x+1=2x+2\sqrt{2x-1}$ hay $2\sqrt{2x-1}=x+1$. | 0,125 |
| | Do đó: $4(2x-1)=x^2+2x+1$ suy ra $x^2-6x+5=0$.<br>PT này có hai nghiệm $x=1,\ x=5$ (thỏa mãn PT (1)).<br>Vậy PT (1) có hai nghiệm $x=1,\ x=5$. | 0,125 |
| | b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\left(1-\sqrt{y+1}\right)x=2\sqrt{y+1}+2 & (1) \\ x+y+1=\dfrac{6}{\sqrt{y+1}+1} & (2) \end{cases}$ | **0,75** |
| | Điều kiện: $y+1\ge 0$ hay $y\ge -1$.<br>PT (1) trở thành: $x^2+x-2-x\sqrt{y+1}-2\sqrt{y+1}=0$,<br>suy ra $(x-1)(x+2)-\sqrt{y+1}(x+2)=0$ | 0,125 |
| | hay $(x+2)\left(x-1-\sqrt{y+1}\right)=0$.<br>Do đó $x+2=0$ hoặc $x-1-\sqrt{y+1}=0$,<br>suy ra $x=-2$ hoặc $\sqrt{y+1}=x-1$. | 0,125 |
| | - Với $x=-2$, thay vào PT (2), ta được: $y-1=\dfrac{6}{\sqrt{y+1}+1}$.<br>Đặt $t=\sqrt{y+1}\ (t\ge 0)$, PT trở thành: $t^2-2=\dfrac{6}{t+1}$,<br>suy ra $t^3+t^2-2t-8=0$ hay $(t-2)\left(t^2+3t+4\right)=0$. | 0,125 |
| | PT này có một nghiệm $t=2$ (vì $t^2+3t+4>0$ với mọi $t\ge 0$).<br>Khi đó ta có $\sqrt{y+1}=2$, suy ra $y=3$ (thỏa mãn điều kiện). | 0,125 |
| | - Với $\sqrt{y+1}=x-1$, thay vào PT (2) ta được: $x+(x-1)^2=\dfrac{6}{x}$ (với $x\ge 1$),<br>suy ra $x^3-x^2+x-6=0$ hay $(x-2)\left(x^2+x+3\right)=0$. | 0,125 |
| | PT này có một nghiệm $x=2$ (vì $x^2+x+3>0$ với mọi $x\ge 1$).<br>Khi đó ta có $\sqrt{y+1}=1$, suy ra $y=0$ (thỏa mãn điều kiện).<br>Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(-2;3),\ (2;0)$. | 0,125 |

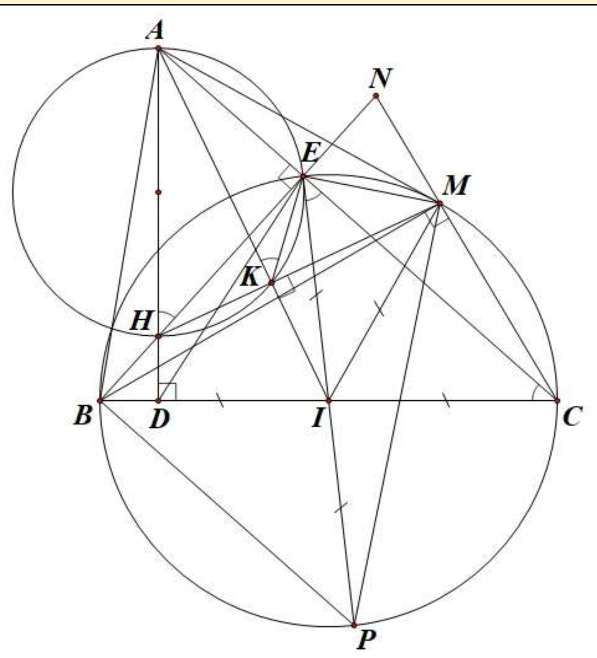
**** Lưu ý:*** Có thể biến đổi PT (1) thành $x^2+\left(1-\sqrt{y+1}\right)x-2\sqrt{y+1}-2=0$.

$\Delta=\left(1-\sqrt{y+1}\right)^2-4.1.\left(-2\sqrt{y+1}-2\right)=\left(\sqrt{y+1}\right)^2+6\sqrt{y+1}+9=\left(\sqrt{y+1}+3\right)^2$.

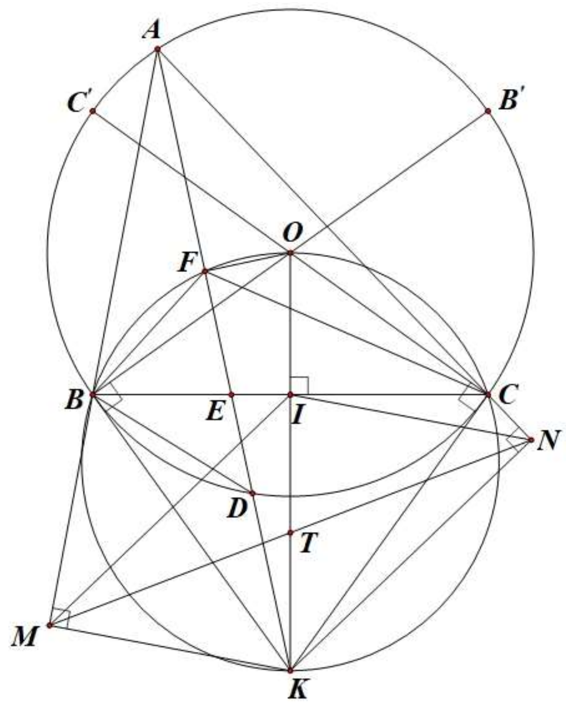
$\sqrt{\Delta}=\sqrt{y+1}+3$.

Do đó $x=\dfrac{\sqrt{y+1}-1-\left(\sqrt{y+1}+3\right)}{2}=-2$ hoặc $x=\dfrac{\sqrt{y+1}-1+\sqrt{y+1}+3}{2}=\sqrt{y+1}+1$.

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Câu 3</td><td>Hai bạn An và Bình cùng chơi trò chơi chọn thẻ từ hai hộp kín như sau: An chọn ngẫu nhiên một thẻ từ hộp (I) chứa ba thẻ được đánh số 1; 2; 3 và Bình chọn ngẫu nhiên một thẻ từ hộp (II) chứa bốn thẻ được đánh số 1; 2; 3; 4. Bạn nào chọn được thẻ có số lớn hơn sẽ là người thắng cuộc. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất của biến cố $A$: “Bạn An là người thắng cuộc”.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>Mỗi kết quả của phép thử là cặp số $(a,b)$, trong đó $a$ là số An chọn và $b$ là số Bình chọn. Không gian mẫu của phép thử là:<br>$\Omega=\{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4)\}$.<br>(Thí sinh nêu đúng đủ 4 phần tử của không gian mẫu được 0,125đ)</td><td>0,375</td></tr>
<tr><td>Số các kết quả có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là $n(\Omega)=12$.</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ là $(2,1);(3,1);(3,2)$.</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>Xác suất của biến cố $A$ là $P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.</td><td>0,125</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Câu 4</td><td>Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB<AC)$ có hai đường cao $AD$, $BE$ cắt nhau tại $H$. Gọi $I$ là trung điểm của cạnh $BC$, kẻ $HK$ vuông góc với $AI\,(K\in AI)$. Trên tia đối của tia $KH$ lấy điểm $M$ sao cho $IM=IC$. Gọi $N$ là giao điểm của hai tia $BE$ và $CM$. Trên tia đối của tia $IE$ lấy điểm $P$ sao cho $IP=IE$.</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>a) Chứng minh rằng hai góc $EAK$ và $EHK$ bằng nhau.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td><br>Hình vẽ phục vụ câu a): 0,25 điểm.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vì $\widehat{AEH}=90^\circ$, $\widehat{AKH}=90^\circ$ nên $E$, $K$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH$.<br>Do đó tứ giác $AEKH$ nội tiếp.</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>Suy ra $\widehat{EAK}=\widehat{EHK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $EK$).</td><td>0,125</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | b) Chứng minh rằng hai tam giác $BMP$ và $NME$ đồng dạng. | **0,75** |
| | Vì $IM = IC = \frac{BC}{2}$, $\widehat{BEC} = 90°$, $IE = IP$ nên bốn điểm $B, E, M, P$ cùng thuộc đường tròn tâm $I$, đường kính $BC$. | 0,25 |
| | Suy ra $\widehat{BPM} = 180° - \widehat{BEM} = \widehat{NEM}$. (1) | 0,125 |
| | Vì $M$ thuộc đường tròn $(I)$ và $EP$ là đường kính của $(I)$ nên $\widehat{EMP} = 90°$. | 0,125 |
| | Suy ra $\widehat{BMP} = 90° - \widehat{BME} = \widehat{NME}$. (2) | 0,125 |
| | Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác $BMP$ và $NME$ đồng dạng (g.g). | 0,125 |
| | c) Chứng minh rằng $AM$ vuông góc với $IM$. | **0,75** |
| | Vì $\widehat{BEC} = 90°$ nên $IE = IC$, suy ra $\widehat{ACI} = \widehat{IEC}$.<br>Vì $\Delta AEK$ và $\Delta AIC$ đồng dạng nên $\widehat{AKE} = \widehat{ACI}$. | 0,125 |
| | Suy ra $\widehat{IEC} = \widehat{AKE}$.<br>Khi đó, ta có $\widehat{AEI} = 180° - \widehat{IEC} = 180° - \widehat{AKE} = \widehat{EKI}$. | 0,125 |
| | Lại có $\widehat{EIA} = \widehat{KIE}$ nên $\Delta AEI$ và $\Delta EKI$ đồng dạng (g.g). | 0,125 |
| | Do đó $\frac{AI}{EI} = \frac{EI}{KI}$, mà $EI = MI$ nên $\frac{AI}{MI} = \frac{MI}{KI}$. | 0,125 |
| | Mặt khác, $\widehat{AIM} = \widehat{MIK}$ nên $\Delta AIM$ và $\Delta MIK$ đồng dạng (c.g.c). | 0,125 |
| | Từ đó ta có $\widehat{AMI} = \widehat{MKI} = 90°$ hay $AM \perp IM$. | 0,125 |

| Câu | Nội dung | Điểm |
|---|---|---|
| Câu 5 | Cho đường tròn tâm $O$ có dây $BC$ cố định ($BC$ không phải đường kính), điểm $A$ thay đổi trên cung lớn $BC$ của đường tròn $(O)$ sao cho $ABC$ là tam giác nhọn và $AB \neq AC$. Gọi $I$ là trung điểm của cạnh $BC$, $K$ là giao điểm của hai tiếp tuyến tại $B$ và $C$ của đường tròn $(O)$. Đoạn thẳng $AK$ cắt $BC$ tại $E$ và cắt đường tròn $(O)$ tại $D$ ($D$ khác $A$), gọi $F$ là trung điểm của đoạn thẳng $AD$. Kẻ $KM$ vuông góc với $AB$ tại $M$ và $KN$ vuông góc với $AC$ tại $N$. | **2,0** |
| | a) Chứng minh rằng tia $FK$ là tia phân giác của góc $BFC$. | **0,75** |
| | <br>Hình vẽ phục vụ câu a): **0,25 điểm**. | 0,25 |
| | Vì $FA = FD$ và $OA = OD$ nên $OF \perp AD$ hay $\widehat{OFK} = 90°$. Vì $K$ là giao điểm của hai tiếp tuyến tại $B, C$ của đường tròn $(O)$ nên $\widehat{OBK} = 90°$, $\widehat{OCK} = 90°$. | 0,125 |
| | Suy ra năm điểm $O, K, B, C, F$ cùng thuộc đường tròn đường kính $OK$.<br>Khi đó ta có $\widehat{BFK} = \widehat{BCK}$ và $\widehat{CFK} = \widehat{CBK}$. (1) | 0,125 |
| | Mặt khác, vì $K$ là giao điểm của hai tiếp tuyến tại $B, C$ nên $KB = KC$, hay $\widehat{CBK} = \widehat{BCK}$. (2) | 0,125 |
| | Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BFK} = \widehat{CFK}$, do đó tia $FK$ là tia phân giác của $\widehat{BFC}$. | 0,125 |
| | b) Chứng minh rằng $KA \cdot KD = KE \cdot KF$. | **0,75** |
| | Vì $KB = KC$ và $IB = IC$ nên $KI \perp BC$ hay $\widehat{KIE} = 90°$. Suy ra $\widehat{KIE} = \widehat{KFO}$.<br>Do đó $\Delta KIE$ và $\Delta KFO$ đồng dạng (g.g). | 0,125 |
| | Suy ra $\dfrac{KI}{KF} = \dfrac{KE}{KO}$ hay $KI \cdot KO = KE \cdot KF$. (3) | 0,125 |

| | | |
|---|---|---|
| | Tam giác $BKO$ vuông tại $B$ và có đường cao $BI$ nên $KB^2 = KI \cdot KO$. (4) | 0,125 |
| | Kẻ đường kính $BB'$ của đường tròn $(O)$, ta có: $\widehat{DBK} = \widehat{OBK} - \widehat{OBD} = 90^\circ - \widehat{B'BD}$ và $\widehat{BAK} = \widehat{BAD} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{BD}}{2} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{B'B} - sđ\,\overset{\frown}{B'D}}{2} = 90^\circ - \widehat{B'BD}$, suy ra $\widehat{DBK} = \widehat{BAK}$.<br>*Nếu thí sinh chỉ nêu kết quả $\widehat{DBK} = \widehat{BAK}$ mà không chứng minh thì **trừ 0,125đ.*** | 0,125 |
| | Do đó $\Delta KDB$ và $\Delta KBA$ đồng dạng (g.g), suy ra $\dfrac{KD}{KB} = \dfrac{KB}{KA}$ hay $KA \cdot KD = KB^2$. (5) | 0,125 |
| | Từ (3), (4) và (5) suy ra $KA \cdot KD = KE \cdot KF$. | 0,125 |
| | c) Chứng minh rằng khi điểm $A$ thay đổi trên cung lớn $BC$ của đường tròn $(O)$ thì đường thẳng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định. | **0,5** |
| | Vì $\widehat{KIC} = 90^\circ$, $\widehat{KNC} = 90^\circ$ nên tứ giác $CIKN$ nội tiếp đường tròn đường kính $CK$, suy ra $\widehat{KIN} = \widehat{KCN}$. (6)<br>Vì $\widehat{KIB} = 90^\circ$, $\widehat{KMB} = 90^\circ$ nên tứ giác $BIKM$ nội tiếp đường tròn đường kính $BK$, do đó $\widehat{MKI} + \widehat{MBI} = 180^\circ$, lại có $\widehat{ABC} + \widehat{MBI} = 180^\circ$, suy ra $\widehat{MKI} = \widehat{ABC}$. (7) | 0,125 |
| | Kẻ đường kính $CC'$ của đường tròn $(O)$, ta có: $\widehat{BCK} = \widehat{OCK} - \widehat{OCB} = 90^\circ - \widehat{C'CB}$ và $\widehat{BAC} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{C'C} - sđ\,\overset{\frown}{C'B}}{2} = 90^\circ - \widehat{C'CB}$, suy ra $\widehat{BCK} = \widehat{BAC}$.<br>Khi đó, ta có $\widehat{KCN} = 180^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{BCK} = 180^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{BAC} = \widehat{ABC}$. (8)<br>*Nếu thí sinh chỉ nêu kết quả $\widehat{BCK} = \widehat{BAC}$ mà không chứng minh thì **trừ 0,125đ.*** | 0,125 |
| | Từ (6), (7) và (8) suy ra $\widehat{KIN} = \widehat{MKI}$, do đó $MK \parallel IN$. | 0,125 |
| | Tương tự, ta có: $NK \parallel IM$.<br>Do đó tứ giác $IMKN$ là hình bình hành, suy ra đường thẳng $MN$ đi qua trung điểm $T$ của đoạn thẳng $IK$. Vì $O, B, C$ cố định nên $I, K$ cố định, do đó điểm $T$ cố định. | 0,125 |

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Câu 6</td><td>Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2 = y^2 + 140$. $(1)$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Từ PT (1) suy ra:<br>• $x$ và $y$ cùng tính chẵn, lẻ.<br>• $x^2 > y^2$.<br>• Nếu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn PT (1) thì các cặp số $(-a;b),(a;-b),(-a;-b)$ cũng thỏa mãn PT (1).<br>Sau đây ta tìm các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn PT (1).</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>PT (1) trở thành: $x^2 - y^2 = 140$ hay $(x-y)(x+y) = 140$. (2)</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td><u>Trường hợp 1</u>: Xét $x, y$ cùng chẵn, tức là $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2m \end{cases}, (k, m \in \mathbb{N}^*, k > m)$<br>PT (2) trở thành: $(2k-2m)(2k+2m) = 140$ hay $(k-m)(k+m) = 35$.<br>Suy ra $k-m$, $k+m$ là các ước nguyên dương của 35,<br>do đó $\begin{cases} k-m=1 \\ k+m=35 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k-m=5 \\ k+m=7 \end{cases}$.</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>Giải hệ $\begin{cases} k-m=1 \\ k+m=35 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} k=18 \\ m=17 \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} x=36 \\ y=34 \end{cases}$ (nhận).<br>Do đó $\begin{cases} x=-36 \\ y=34 \end{cases}$, $\begin{cases} x=36 \\ y=-34 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-36 \\ y=-34 \end{cases}$ cũng thỏa mãn PT (1).</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>Giải hệ $\begin{cases} k-m=5 \\ k+m=7 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} k=6 \\ m=1 \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} x=12 \\ y=2 \end{cases}$ (nhận).<br>Do đó $\begin{cases} x=-12 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=12 \\ y=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-12 \\ y=-2 \end{cases}$ cũng thỏa mãn PT (1).</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td><u>Trường hợp 2</u>: Xét $x, y$ cùng lẻ, tức là $\begin{cases} x = 2k+1 \\ y = 2m+1 \end{cases}, (k, m \in \mathbb{N}, k > m)$<br>PT (2) trở thành: $(2k-2m)(2k+2m+2) = 140$ hay $(k-m)(k+m+1) = 35$.<br>Suy ra $k-m$, $k+m+1$ là các ước nguyên dương của 35,<br>do đó $\begin{cases} k-m=1 \\ k+m+1=35 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k-m=5 \\ k+m+1=7 \end{cases}$.</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>Từ $\begin{cases} k-m=1 \\ k+m+1=35 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} k=\dfrac{35}{2} \\ m=\dfrac{33}{2} \end{cases}$ (loại). Từ $\begin{cases} k-m=5 \\ k+m+1=7 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} k=\dfrac{11}{2} \\ m=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (loại).</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>Vậy có 8 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn PT (1) là: $(36;34)$, $(-36;34)$, $(36;-34)$, $(-36;-34)$, $(12;2)$, $(-12;2)$, $(12;-2)$, $(-12;-2)$.</td><td>0,125</td></tr>
</table>

*** *Lưu ý:*** Nếu thí sinh không giải mà lấy các cặp số nguyên thử đúng thì **đúng đủ 4 cặp** được 0,125 điểm.

| Câu | Nội dung | Điểm |
|---|---|---|
| **Câu 7** | Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)z}+\frac{y^2z^2}{\left(y^2+z^2\right)x}+\frac{z^2x^2}{\left(z^2+x^2\right)y}$. | **1,0** |
| | Ta có: $P=\frac{1}{\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)z}+\frac{1}{\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}\right)x}+\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\right)y}$<br>Đặt $a=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{y},\ c=\frac{1}{z},\ \left(a,b,c>0\right)$, ta được: $P=\frac{c}{a^2+b^2}+\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}$. | 0,125 |
| | Vì $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=3$ nên $a^2+b^2+c^2=3$.<br>Khi đó $P=\frac{c}{3-c^2}+\frac{a}{3-a^2}+\frac{b}{3-b^2}=\frac{c^2}{c\left(3-c^2\right)}+\frac{a^2}{a\left(3-a^2\right)}+\frac{b^2}{b\left(3-b^2\right)}$. | 0,125 |
| | Ta có: $2=\frac{2a^2+\left(3-a^2\right)+\left(3-a^2\right)}{3}\geq\sqrt[3]{2a^2\left(3-a^2\right)\left(3-a^2\right)}$ (BĐT AM-GM).<br>Suy ra $a^2\left(3-a^2\right)^2\leq 4$, do đó $0<a\left(3-a^2\right)\leq 2$.<br>***Lưu ý:** Có thể chứng minh $a\left(3-a^2\right)\leq 2$ với $a>0$ như sau:*<br>$a\left(3-a^2\right)=-\left(a^3-3a+2\right)+2=-\left(a+2\right)\left(a^2-2a+1\right)+2=-\left(a+2\right)\left(a-1\right)^2+2\leq 2$<br>*Đẳng thức xảy ra khi $a=1$.* | 0,25 |
| | Do đó $\frac{a^2}{a\left(3-a^2\right)}\geq\frac{a^2}{2}$. (1) | 0,125 |
| | Tương tự, ta có: $\frac{b^2}{b\left(3-b^2\right)}\geq\frac{b^2}{2}$ (2) và $\frac{c^2}{c\left(3-c^2\right)}\geq\frac{c^2}{2}$. (3) | 0,125 |
| | Cộng vế theo vế các BĐT (1), (2) và (3), ta được:<br>$\frac{c^2}{c\left(3-c^2\right)}+\frac{a^2}{a\left(3-a^2\right)}+\frac{b^2}{b\left(3-b^2\right)}\geq\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ hay $P\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{3}{2}$. | 0,125 |
| | $P=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$ hay $x=y=z=1$.<br>Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ là $\frac{3}{2}$. | 0,125 |

**---------- HẾT ----------**

*** <u>Ghi chú</u>:** *Nếu thí sinh có cách giải khác đúng thì Tổ chấm thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.*

| | |
|---|---|
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**<br>**TỈNH QUẢNG NAM** | **KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CÔNG LẬP**<br>**NĂM HỌC 2025 - 2026** |
| **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **Môn thi: Toán (chuyên Tin)**<br>**Thời gian: 150 phút** (*không kể thời gian giao đề*)<br>**Khóa thi ngày: 03-05/6/2025** |

---

**Câu 1 (2,0 điểm).**

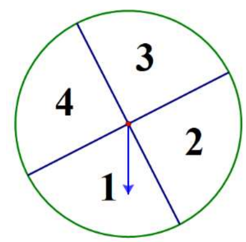
a) Rút gọn biểu thức $M = \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5} - \dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} + \dfrac{100}{x-25}$ với $x \geq 0,\ x \neq 25$.

b) Vẽ đồ thị $(P)$ của hàm số $y = 2x^2$. Tìm tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị $(P)$ khác gốc tọa độ $O$ và có tung độ gấp năm lần hoành độ.

**Câu 2 (2,0 điểm).**

a) Giải phương trình $\sqrt{3x-1} + \sqrt{x} = \sqrt{5x+4}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy + 3x - 6y = 9 \\ x^2 + y^2 + xy + 3x - 10y = 8 \end{cases}$.




**Câu 3 (0,5 điểm).** Một tấm bìa cứng hình tròn được chia thành bốn phần bằng nhau, đánh số 1; 2; 3; 4 và được gắn vào trục quay có mũi tên ở tâm (*như hình bên*). Bạn Minh quay tấm bìa hai lần, quan sát và ghi lại số của hình quạt mà mũi tên chỉ vào. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất của biến cố $A$: "Tổng hai số trong hai lần quay là số nguyên tố".

**Câu 4 (3,0 điểm).** Cho hình chữ nhật $ABCD$ $(AB < BC)$ nội tiếp đường tròn $(O)$, lấy điểm $I$ thuộc cạnh $BC$ ($I$ khác $B$ và $C$). Vẽ đường thẳng $d$ qua điểm $I$ và song song với $CD$, $d$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm $E$, biết rằng $E$ và $I$ nằm khác phía đối với đường thẳng $AD$. Từ $B$ kẻ đường thẳng song song với $AE$ cắt $d$ và $CE$ lần lượt tại $H$ và $F$, gọi $K$ là điểm đối xứng với $H$ qua $BE$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{EBF} = \widehat{BDA}$.

b) Chứng minh rằng $K$ thuộc đường tròn $(O)$.

c) Chứng minh rằng $2HB.HF + BD^2 = KC.ED + BE^2$.

**Câu 5 (1,5 điểm).**

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $10x^2 - 6xy + y^2 = 25$.

b) Chứng minh rằng $A = n^3\left(n^4 - 1\right)$ chia hết cho 60 với mọi số nguyên $n$.

**Câu 6 (1,0 điểm).** Cho $x, y$ là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} x > -1 \\ y > 1 \end{cases}$ và $x + y \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2} + \dfrac{1}{2\left(x+1\right)\left(y-1\right)}$.

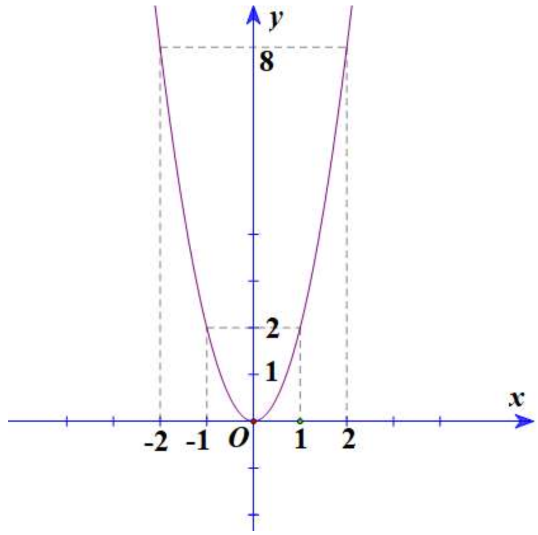
**---------- HẾT ----------**

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.*

*Họ và tên thí sinh*: ……………………………. *Số báo danh*: ……......

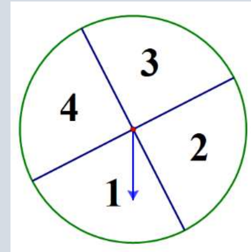
| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>TỈNH QUẢNG NAM | KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CÔNG LẬP<br>NĂM HỌC 2025 - 2026 |
|---|---|
| **HDC CHÍNH THỨC**<br>*(Hướng dẫn chấm có 08 trang)* | **HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN CHUYÊN TIN** |

| Câu | Nội dung | Điểm |
|---|---|---|
| **Câu 1.** a) Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5}-\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{100}{x-25}$ với $x\ge 0,\ x\ne 25$.<br>b) Vẽ đồ thị $(P)$ của hàm số $y=2x^2$. Tìm tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị $(P)$ khác gốc tọa độ $O$ và có tung độ gấp năm lần hoành độ. | | **2,0 điểm** |
| **Câu 1a)** Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5}-\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{100}{x-25}$ với $x\ge 0,\ x\ne 25$. | | **1,0 điểm** |
| | $M=\dfrac{\left(\sqrt{x}+5\right)^2-\left(\sqrt{x}-5\right)^2}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}+\dfrac{100}{x-25}$ *( Đúng mỗi ý trong quy đồng được 0,125)* | 0,25 |
| | $=\dfrac{x+10\sqrt{x}+25-\left(x-10\sqrt{x}+25\right)+100}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$ *( Đúng mỗi ý trong khai triển được 0,125)* | 0,25 |
| | $=\dfrac{20\sqrt{x}+100}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$ | 0,25 |
| | $=\dfrac{20\left(\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$<br>$=\dfrac{20}{\sqrt{x}-5}$ | 0,125<br>0,125 |
| **Câu 1b)** Vẽ đồ thị $(P)$ của hàm số $y=2x^2$. Tìm tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị $(P)$ khác gốc tọa độ $O$ và có tung độ gấp năm lần hoành độ. | | **1,0 điểm** |
| | Lập bảng giá trị có tính chất đối xứng ( ít nhất 5 cặp $(x;y)$)<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-2$</td><td>$-1$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$y=2x^2$</td><td>8</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>8</td></tr></table>*(Đúng được 2 cặp điểm đối xứng được 0,125 )* | 0,25 |

| | | |
|---|---|---|
| | Biểu diễn đúng 5 điểm trong bảng giá trị trên mặt phẳng $Oxy$ | 0,125 |
| | Vẽ đúng parabol đi qua 5 điểm trong mặt phẳng $Oxy$   | 0,125 |
| | Gọi điểm cần tìm có dạng $M(x;y)$, $y=5x$, $x\neq 0$. | 0,125 |
| | Thay $y=5x$ vào hàm số $y=2x^2$ được phương trình $2x^2=5x$. | 0,125 |
| | Giải phương trình này được $x=0$ (loại) ; $x=\frac{5}{2}$ (nhận). | 0,125 |
| | Tìm được $y=\frac{25}{2}$. Kết luận có một điểm thuộc $(P)$ thoả yêu cầu là $M\left(\frac{5}{2};\frac{25}{2}\right)$. | 0,125 |
| **Câu 2.**<br>a) Giải phương trình $\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{5x+4}$.<br>b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2xy+3x-6y=9\\x^2+y^2+xy+3x-10y=8\end{cases}$. | | **2,0 điểm** |
| **Câu 2a)** Giải phương trình $\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{5x+4}$. | | **1,0 điểm** |
| | Phương trình $\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{5x+4}$ (1) | |
| | Điều kiện xác định: $\begin{cases}3x-1\geq 0\\x\geq 0\\5x+4\geq 0\end{cases}$. | 0,125 |
| | Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được $3x-1+x+2\sqrt{x(3x-1)}=5x+4$<br>*Lưu ý: Nếu học sinh không nêu ĐKXĐ thì điểm phần này vẫn được 0,25.* | 0,125 |
| | Rút gọn được $2\sqrt{3x^2-x}=x+5$ (2) | 0,25 |

| | | |
|---|---|---|
| | Tiếp tục bình phương hai vế của phương trình (2) được $4\left(3x^2-x\right)=x^2+10x+25$<br>Rút gọn được $11x^2-14x-25=0$. | 0,125<br>0,125 |
| | Giải phương trình này có hai nghiệm $x=-1$; $x=\frac{25}{11}$.<br>Thử lại vào phương trình (1) , ta được $x=\frac{25}{11}$ là nghiệm duy nhất . | 0,125<br>0,125 |
| **Câu 2b)** Giải hệ phương trình $\begin{cases}2xy+3x-6y=9\\x^2+y^2+xy+3x-10y=8\end{cases}$. | | **1,0 điểm** |
| | Xét hệ $\begin{cases}2xy+3x-6y=9 & (1)\\x^2+y^2+xy+3x-10y=8 & (2)\end{cases}$<br>Phương trình (1) của hệ được viết thành: $(x-3)(2y+3)=0$<br>và suy ra $x=3$ hoặc $y=-\frac{3}{2}$. | 0,25<br>0,125 |
| | **Trường hợp 1:**<br>Thay $x=3$ vào phương trình (2) và rút gọn được: $y^2-7y+10=0$.<br>Giải ra được các nghiệm $y=2; y=5$.<br>Nên hệ có các nghiệm $(3;2)$; $(3;5)$. | 0,125<br>0,125 |
| | **Trường hợp 2:**<br>Thay $y=-\frac{3}{2}$ vào phương trình (2) và rút gọn được: $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{37}{4}=0$.<br>Phương trình này vô nghiệm. | 0,125<br>0,125 |
| | Kết luận: Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(3;2)$; $(3;5)$. | 0,125 |

**Câu 3.** Một tấm bìa cứng hình tròn được chia thành bốn phần bằng nhau, đánh số $1;2;3;4$ và được gắn vào trục quay có mũi tên ở tâm (*như hình bên*). Bạn Minh quay tấm bìa hai lần, quan sát và ghi lại số của hình quạt mà mũi tên chỉ vào. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất của biến cố $A$: "Tổng hai số trong hai lần quay là số nguyên tố".




**0,5 điểm**

Lập bảng liệt kê tất cả các kết quả có thể của phép thử:

| Lần 2 / Lần 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $(1;1)$ | $(1;2)$ | $(1;3)$ | $(1;4)$ |
| 2 | $(2;1)$ | $(2;2)$ | $(2;3)$ | $(2;4)$ |
| 3 | $(3;1)$ | $(3;2)$ | $(3;3)$ | $(3;4)$ |
| 4 | $(4;1)$ | $(4;2)$ | $(4;3)$ | $(4;4)$ |

Không gian mẫu là:

$$\Omega=\{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}$$ 0,125

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=16$. 0,125

Biến cố $A$:"Tổng hai số trong hai lần quay là số nguyên tố "

Các tổng có thể là : 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

Số nguyên tố của tổng số hai lần quay trên là: 2; 3; 5; 7. Do đó, có các kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ :

Tổng bằng 2: (1, 1)

Tổng bằng 3: (1, 2); (2, 1)

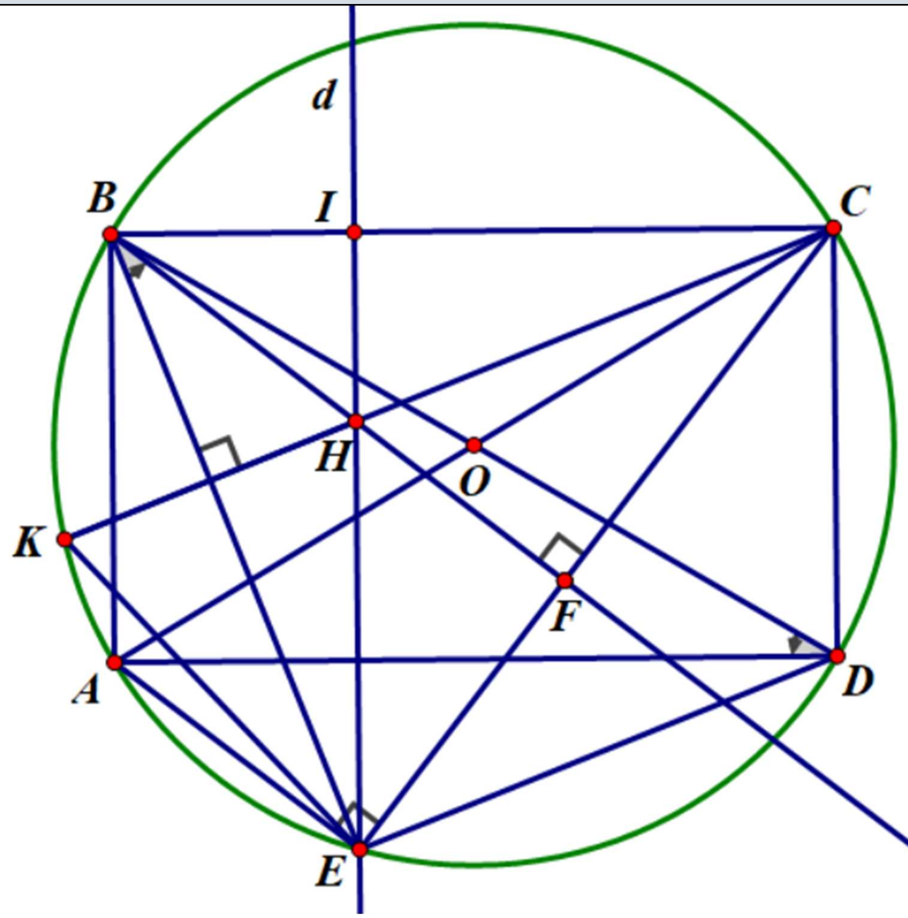
Tổng bằng 5: (1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1)

Tổng bằng 7: (3, 4); (4, 3) 0,125

Suy ra $n(A)=9$

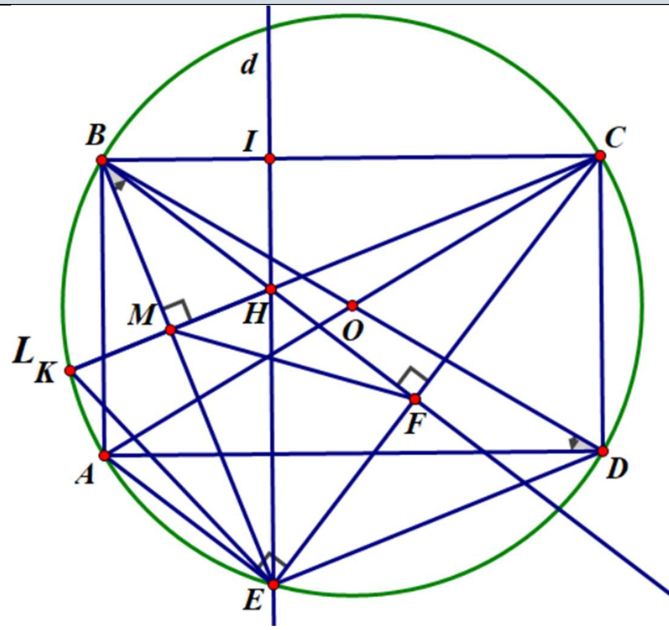
Vậy xác suất của biến cố $A$: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{9}{16}$. 0,125

| | |
|---|---|
| **Câu 4.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AB < BC$) nội tiếp đường tròn $(O)$, lấy điểm $I$ thuộc cạnh $BC$ ($I$ khác $B$ và $C$). Vẽ đường thẳng $d$ qua điểm $I$ và song song với $CD$, $d$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm $E$, biết rằng $E$ và $I$ nằm khác phía đối với đường thẳng $AD$. Từ $B$ kẻ đường thẳng song song với $AE$ cắt $d$ và $CE$ lần lượt tại $H$ và $F$, gọi $K$ đối xứng với $H$ qua $BE$.<br>a) Chứng minh rằng $\widehat{EBF} = \widehat{BDA}$.<br>b) Chứng minh rằng $K$ thuộc đường tròn $(O)$.<br>c) Chứng minh rằng $2HB.HF + BD^2 = KC.ED + BE^2$. | **3,0 điểm** |
| **Câu 4a)** Chứng minh rằng $\widehat{EBF} = \widehat{BDA}$. | **1,0 điểm** |




*Đúng hình phục vụ câu a) được 0,25 điểm*

| | |
|---|---|
| Ta có $BF // AE$ nên $\widehat{AEB} = \widehat{EBF}$ (1) | 0,25 |
| và $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ (cung $AB$ không chứa $E$) (2) | 0,25 |
| Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BDA} = \widehat{EBF}$ (đpcm) | 0,25 |

| | | |
|---|---|---|
| **Câu 4b)** Chứng minh rằng $K$ thuộc đường tròn $(O)$. | | **1,0 điểm** |
| |   Gọi $L$ là giao điểm của $CH$ với đường tròn $(O)$ | 0,125 |
| | Nêu được $H$ là trực tâm của tam giác $BCE$ ($CH \perp BE$) | 0,125 |
| | Nên $\widehat{BCH} = \widehat{BEH}$ (cùng phụ $\widehat{CBE}$) | 0,125 |
| | mà $\widehat{BCH} = \widehat{BEL} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{LB}$ (cung không chứa $A$) nên $\widehat{BEL} = \widehat{BEH}$ | 0,25 |
| | Gọi $M$ là giao điểm $HL$ và $BE$<br>Khi đó: tam giác $\Delta HEM = \Delta LEM$ nên $MH = ML$ | 0,25 |
| | $L$ đối xứng với $H$ qua $EB$, hay là $K$ trùng với $L$. Vậy $K$ thuộc đường tròn $(O)$. | 0,125 |
| **Câu 4c)** Chứng minh rằng $2HB.HF + BD^2 = KC.ED + BE^2$. | | **1,0 điểm** |
| | Nêu được $\Delta MHB$ đồng dạng $\Delta FHC$ | 0,125 |
| | Nên $HB.HF = HM.HC$ | 0,125 |
| | Suy ra $2HB.HF = 2HM.HC = HK.HC$ (1) | 0,125 |
| | Mà $HK = CK - HC$ nên $HK.HC = \left(KC - HC\right).HC = KC.HC - HC^2$ (2) | 0,125 |
| | Chứng minh được $HC = ED$ (3) | 0,125 |
| | Từ (1), (2), (3) Suy ra $2HB.HF = KC.ED - ED^2$ | 0,125 |
| | Lại có $ED^2 = BD^2 - BE^2$ | 0,125 |
| | Suy ra $2HB.HF + BD^2 = KC.ED + BE^2$ | 0,125 |

| | |
|---|---|
| **Câu 5.**<br>a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $10x^2 - 6xy + y^2 = 25$.<br>b) Chứng minh rằng $A = n^3\left(n^4 - 1\right)$ chia hết cho 60 với mọi số nguyên $n$. | **1,5 điểm** |
| **5a)** Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $10x^2 - 6xy + y^2 = 25$. | **0,75 điểm** |
| Từ $10x^2 - 6xy + y^2 = 25$<br>ta biến đổi được $x^2 + \left(3x - y\right)^2 = 25$<br>hay $x^2 + \left(3x - y\right)^2 = 25 = 5^2 + 0^2 = 3^2 + 4^2$ | 0,125<br>0,125 |
| Do $x, y$ là số nguyên dương nên $x^2 \neq 0$.<br>Ta có các khả năng sau:<br>+ $\begin{cases} x^2 = 5^2 \\ \left(3x - y\right)^2 = 0^2 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \end{cases}$. | 0,125<br>0,125 |
| + $\begin{cases} x^2 = 4^2 \\ \left(3x - y\right)^2 = 3^2 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 4 \\ y = 15 \end{cases}$.<br>+ $\begin{cases} x^2 = 3^2 \\ \left(3x - y\right)^2 = 4^2 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = 13 \end{cases}$.<br>Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm nguyên dương là :<br>$\left(5;15\right)$; $\left(4;9\right)$; $\left(4;15\right)$; $\left(3;5\right)$; $\left(3;13\right)$. | 0,125<br>0,125 |
| **5b)** Chứng minh rằng $A = n^3\left(n^4 - 1\right)$ chia hết cho 60 với mọi số nguyên $n$. | **0,75 điểm** |
| Ta có: $A = n^3(n^4 - 1) = n\left(n - 1\right)n^2\left(n + 1\right)\left(n^2 + 1\right)$ | 0,125 |
| Vì $60 = 3.4.5$ nên muốn chứng minh $A$ chia hết cho 60 ta đi chứng minh $A$ đồng thời chia hết cho 3, cho 4 và cho 5 vì 3;4;5 là ba số NTCN .<br>* Chứng minh $A$ chia hết cho 3:<br>Vì $\left(n - 1\right)n\left(n + 1\right)$ chia hết cho 3 nên $A$ chia hết cho 3. | 0,125 |
| * Chứng minh $A$ chia hết cho 4:<br>- Nếu $n$ chẵn thì $n^2$ chia hết cho 4. Suy ra: $A$ chia hết cho 4.<br>- Nếu $n$ lẻ thì $n - 1$ và $n + 1$ là các số chẵn suy ra $\left(n - 1\right)\left(n + 1\right)$ chia hết cho 4. | 0,125 |

| | | |
|---|---|---|
| | Do đó $A$ chia hết cho 4. | |
| | * Chứng minh $A$ chia hết cho 5:<br>Vì $n^2$ chỉ có thể có chữ số tận cùng là $0; 1; 4; 5; 6; 9$.<br>- Nếu $n^2$ có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 thì $n^2$ chia hết cho 5. Suy ra: $A$ chia hết cho 5.<br>- Nếu $n^2$ có chữ số tận cùng là 1 hoặc 6 thì $n^2-1$ chia hết cho 5. Suy ra: $A$ chia hết cho 5.<br>- Nếu $n^2$ có chữ số tận cùng là $4$ hoặc 9 thì $n^2+1$ chia hết cho 5. Suy ra: $A$ chia hết cho 5.<br>Do đó: $A$ chia hết cho 5. | *đúng 1 ý được 0,125*<br>0,25 |
| | Vậy $A$ chia hết cho 60. | 0,125 |
| **Câu 6.** Cho $x, y$ là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} x>-1 \\ y>1 \end{cases}$ và $x+y\le 1$.<br>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^2+y^2+2x-2y+2}+\dfrac{1}{2(x+1)(y-1)}$. | | **1,0 điểm** |
| | Biến đổi<br>$A=\dfrac{1}{x^2+y^2+2x-2y+2}+\dfrac{1}{2(x+1)(y-1)}=\dfrac{1}{(x+1)^2+(y-1)^2}+\dfrac{1}{2(x+1)(y-1)}$ | 0,25 |
| | Đặt $\begin{cases} x+1=a \\ y-1=b \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$ và $a+b\le 1$ | 0,25 |
| | Chứng minh được BĐT phụ : với $a>0; b>0$ thì $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$ | 0,25 |
| | Khi đó $A=\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}\ge\dfrac{4}{a^2+b^2+2ab}=\dfrac{4}{(a+b)^2}\ge 4$ | 0,125 |
| | Vậy giá trị nhỏ nhất của $A$ bằng 4, khi $\begin{cases} a^2+b^2=2ab \\ a+b=1 \end{cases}$ tìm được $a=b=\dfrac{1}{2}$<br>hay là $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ | 0,125 |

……… **HẾT** …….