

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

CHỦ ĐỀ 1: ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, TIA

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

1. Vị trí của điểm và đường thẳng

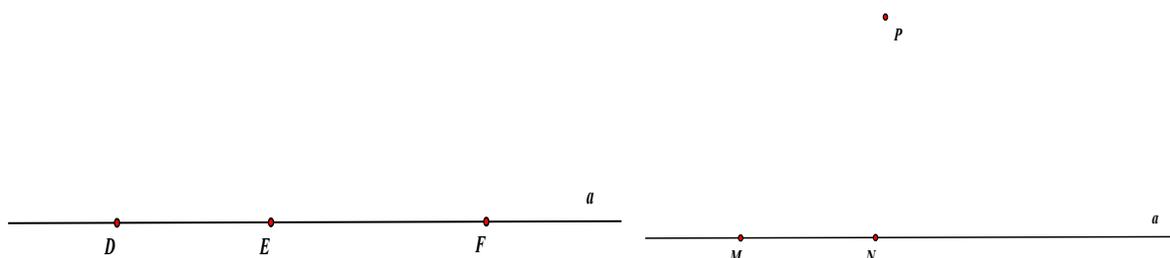
Điểm A thuộc đường thẳng a , kí hiệu $A \in a$.



Điểm B không thuộc đường thẳng a , kí hiệu $B \notin a$.



2. Ba điểm D, E, F thẳng hàng khi chúng cùng thuộc một đường thẳng; ba điểm M, N, P không thẳng hàng khi chúng không cùng thuộc bất kì đường thẳng nào.



3. Trong ba điểm thẳng hàng có một điểm và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.

4. Nếu có một điểm nằm giữa hai điểm khác thì ba điểm đó thẳng hàng.

5. Quan hệ ba điểm thẳng hàng còn được mở rộng thành 4, 5, 6... điểm thẳng hàng.

II. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA HAI ĐIỂM

1. Có một đường thẳng và chỉ có một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt A và B .

2. Có ba cách đặt tên đường thẳng:

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

Dùng một chữ cái in thường: đường thẳng a , đường thẳng b , đường thẳng x , đường thẳng y ...



Dùng hai chữ cái in thường: đường thẳng xy , đường thẳng ab , đường thẳng uv ...



Dùng hai chữ cái in hoa: đường thẳng AB , đường thẳng CD ...

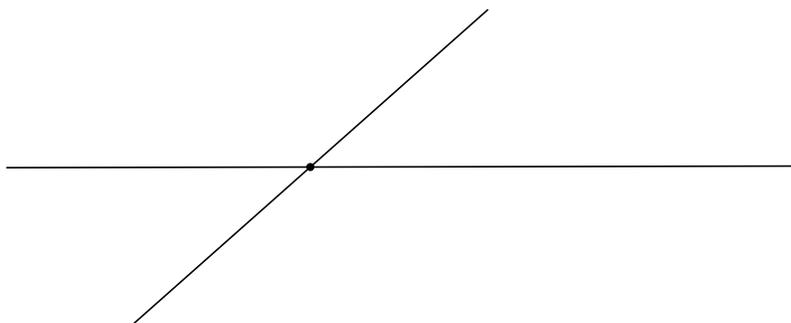


3. Vị trí của hai đường thẳng phân biệt:

Hoặc không có giao điểm nào (gọi là hai đường thẳng song song).



Hoặc chỉ có một giao điểm (gọi là hai đường thẳng cắt nhau).



4. Muốn chứng minh hai hay nhiều đường thẳng trùng nhau ta chỉ cần chứng tỏ chúng có hai giao điểm,

5. Ba (hay nhiều) đường thẳng cùng đi qua một điểm gọi là ba (hay nhiều) đường thẳng đồng quy. Muốn chứng minh nhiều đường thẳng đồng quy ta có thể xác định giao điểm của hai đường thẳng nào đó, rồi chứng minh các đường thẳng còn lại đều đi qua giao điểm này.

III. TIA

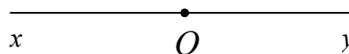
1. Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia



ra bởi O là một tia gốc O .

Khi đọc (hay viết) tên một tia, ta phải đọc (hay viết) tên gốc trước.

2. Hai tia chung gốc Ox và Oy tạo thành đường thẳng xy gọi là hai tia đối nhau.



Mỗi điểm trên đường thẳng là gốc chung của hai tia đối nhau.

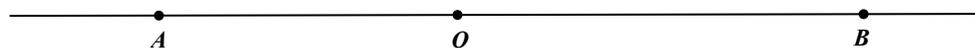
3. Hai tia trùng nhau OA và OB nếu hai tia có giao điểm khác gốc O .



4. Quan hệ giữa một điểm nằm giữa hai điểm với hai tia đối nhau, hai tia trùng nhau:

Xét 3 điểm A, B, O thẳng hàng.

Nếu tia OA và tia OB đối nhau thì điểm O nằm giữa A và B .



Ngược lại nếu O nằm giữa A và B thì:

- Hai tia OA, OB đối nhau.
- Hai tia AO, AB trùng nhau; hai tia BO, BA trùng nhau.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Bài toán trồng cây thẳng hàng.

I. Phương pháp giải

Các cây thẳng hàng là các cây cùng nằm trên một đường thẳng.

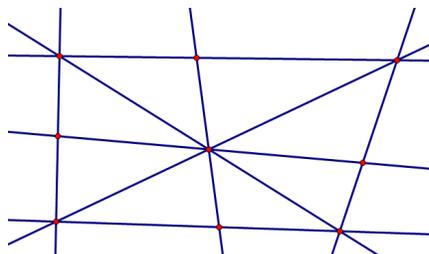
Giao điểm của hai hay nhiều đường thẳng là vị trí của 1 cây thỏa mãn bài toán.

II. Bài toán

Bài 1: Có 9 cây, hãy trồng thành 8 hàng sao cho mỗi hàng có 3 cây.

Lời giải

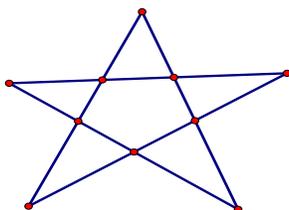
Theo hình 1 (mỗi điểm trên hình vẽ là một cây).



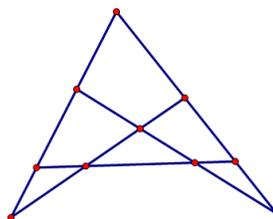
Hình 1

Bài 2: Hãy vẽ sơ đồ trồng 10 cây thành 5 hàng, mỗi hàng 4 cây (Giải bằng 4 cách).

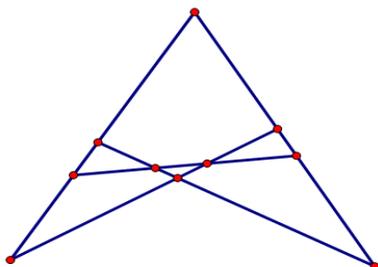
Lời giải



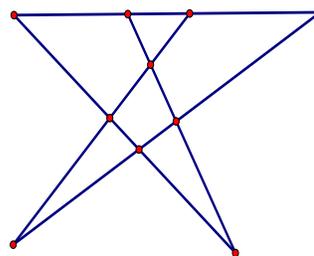
Cách 1



Cách 2



Cách 3



Cách 4

Dạng 2: Đếm số đường thẳng tạo thành từ các điểm cho trước

I. Phương pháp giải

Cho biết có n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$).

Kẻ từ một điểm bất kỳ với $n-1$ điểm còn lại được $n-1$ đường thẳng.

Làm như vậy với n điểm nên có $n(n-1)$ đường thẳng. Nhưng mỗi đường thẳng được tính 2 lần.

Do vậy số đường thẳng vẽ được là $n(n-1):2$ đường thẳng.

II. Bài toán

Bài 1: Cho 5 điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Kẻ các đường thẳng đi qua các cặp điểm đó. Có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Lời giải

Cách 1: Vẽ hình rồi liệt kê các đường thẳng đó (Chỉ dùng khi chỉ có ít điểm).

Cách 2: Bằng cách tính:

Lấy một điểm bất kì (chẳng hạn điểm M), còn lại 4 điểm phân biệt ta nối điểm M với 4 điểm còn lại đó được 4 đường thẳng.

Với 5 điểm đã cho ta có: 4 đường \times 5 điểm.

Nhưng với cách làm trên, mỗi đường ta đã tính hai lần.

Chẳng hạn, khi chọn điểm M ta nối M với N , ta có đường thẳng MN . Nhưng khi chọn điểm N , ta nối N với M , ta cũng có đường thẳng NM .

Hai đường thẳng này trùng nhau nên ta chỉ tính là một đường.

Vậy số đường thẳng vẽ được là: $4.5 : 2 = 10$ (đường thẳng).

Bài 2: Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tính n .

Lời giải

Ta có $\frac{n(n-1)}{2} = 105$ nên $n(n-1) = 210 = 2.3.5.7 = 15.14$.

Vậy $n = 15$.

Bài 3: Cho 20 điểm, trong đó có a điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, ta vẽ một đường thẳng. Tìm a , biết vẽ được tất cả 170 đường thẳng.

Lời giải

Giả sử trong 20 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó, số đường thẳng vẽ được là:

$$19.20 : 2 = 190.$$

Trong a điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số đường thẳng vẽ được là: $(a-1)a : 2$.

Vì có a điểm thẳng hàng nên qua a điểm này ta chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Ta có: $190 - (a-1)a : 2 + 1 = 170 \Leftrightarrow (a-1)a : 2 = 21 \Leftrightarrow (a-1)a = 42 \Leftrightarrow (a-1)a = 6 \cdot 7$

Vậy $a = 7$.

Bài 4:

a) Cho bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 trong đó không có ba điểm thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta kẻ được một đường thẳng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng?

b) Cũng hỏi như trên với 5 điểm?

Lời giải

a) Qua A_1 kẻ được 3 đường thẳng A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 .

Qua A_2 kẻ được 2 đường thẳng A_2A_3, A_2A_4 .

Qua A_3 kẻ được 1 đường thẳng A_3A_4 .

Qua A_4 không còn kẻ thêm được đường thẳng nào mới.

Vậy số đường thẳng vẽ được là: $3 + 2 + 1 = 6$ (đường thẳng). Chưa có kết luận cho trường hợp 5 điểm

Trường hợp 10 điểm chưa có giải thích.

b) Nếu cho 5 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì

Qua A_1 kẻ được 4 đường thẳng $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5$.

Qua A_2 kẻ được 3 đường thẳng A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5 .

Qua A_3 kẻ được 2 đường thẳng A_3A_4, A_3A_5 .

Qua A_4 kẻ được 1 đường thẳng A_4A_5 .

Qua A_5 không còn kẻ thêm được đường thẳng nào mới.

Vậy số đường thẳng vẽ được là: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (đường thẳng).

Bài 5:

a) Có 25 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Nếu thay 25 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số đường thẳng là bao nhiêu?

b) Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Lời giải

a) Kể từ một điểm bất kỳ tới các điểm còn lại vẽ được 24 đường thẳng.

Làm như vậy với 25 điểm nên có $24 \cdot 25 = 600$ (đường thẳng).

Nhưng mỗi đường thẳng đã được tính 2 lần.

Do vậy số đường thẳng thực sự có là: $600 : 2 = 300$ (đường thẳng).

Lập luận tương tự có n điểm thì có: $n \cdot (n-1) : 2$ (đường thẳng).

b) Nếu 25 điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng vẽ được $MP; MQ; NP; NQ$ đường thẳng (câu a).

Với 8 điểm, không có điểm nào thẳng hàng vẽ được: $8 \cdot 7 : 2 = 28$ (đường thẳng)

Còn nếu 8 điểm này thẳng hàng thì chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Do vậy số đường thẳng bị giảm đi là: $28 - 1 = 27$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là: $300 - 27 = 273$ (đường thẳng)

Bài 6:

a) Cho 31 đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Tính số giao điểm có được.

b) Cho m đường thẳng ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào cũng đi qua một điểm. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 190.

Tính m .

Lời giải

a) Mỗi đường thẳng cắt 30 đường thẳng còn lại tạo thành 30 giao điểm.

Có 31 đường thẳng nên có $30 \cdot 31 = 930$ giao điểm, nhưng mỗi giao điểm đã được tính hai lần nên chỉ có:

$$930 : 2 = 465 \text{ (giao điểm)}$$

Nếu thay 31 bởi n ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số giao điểm có được là: $n(n-1) : 2$ (giao điểm)

b) Theo câu a ta có: $m(m-1) : 2 = 190 \Leftrightarrow m(m-1) = 380 \Leftrightarrow m(m-1) = 20 \cdot 19$.

Vậy $m = 20$.

Bài 7: Cho 1000 điểm phân biệt, trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng tạo bởi hai trong 1000 điểm đó?

Lời giải

Số đường thẳng tạo bởi 1000 điểm phân biệt là: $\frac{1000 \cdot 999}{2} = 499500$ (đường thẳng).

Số đường thẳng tạo bởi 3 điểm không thẳng hàng là: $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ (đường thẳng).

Theo bài ra vì có 3 điểm thẳng hàng nên số đường thẳng giảm đi là: $3 - 1 = 2$ (đường thẳng).

Vậy số đường thẳng tạo thành là: $499500 - 2 = 499498$ (đường thẳng)

Bài 8: Cho 2022 điểm trong đó chỉ có 22 điểm thẳng hàng. Tính số đường thẳng đi qua hai trong 2022 điểm trên.

Lời giải

Qua 2022 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng ta vẽ được:

$$2022 \cdot 2021 : 2 = 2043231 \text{ (đường thẳng)}$$

Do có 22 điểm thẳng hàng nên số đường thẳng bớt đi là: $22 \cdot 21 : 2 - 1 = 230$ (đường thẳng)

Vậy qua 2022 điểm trong đó chỉ có 22 điểm thẳng hàng ta vẽ được:

$$2043231 - 230 = 2043001 \text{ (đường thẳng)}$$

Bài 9: Trên tia Ox vẽ các điểm $M_1; M_2; M_3$. Nếu trong mặt phẳng chứa tia Ox vẽ thêm các điểm $M_4; M_5; M_6; \dots; M_{101}; M_{102}$. Trong các điểm $M_1; M_2; M_3; \dots; M_{101}; M_{102}$ có đúng 3 điểm thẳng hàng và cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Có tất cả bao nhiêu đường thẳng như thế? Tại sao?

Lời giải

Giả sử trong các điểm $M_1; M_2; M_3; \dots; M_{101}; M_{102}$ (1) không có ba điểm nào thẳng hàng.

Từ một điểm bất kỳ trong (1) ta vẽ được 101 đường thẳng qua các điểm còn lại trong (1).

Làm như thế với 102 điểm ta được $101 \cdot 102 = 10302$ (đường thẳng).

Nhưng mỗi đường thẳng đã được tính 2 lần nên tất cả có $10302 : 2 = 5151$ (đường thẳng).

Qua 3 điểm thẳng hàng chỉ vẽ được 1 đường thẳng. Nếu 3 điểm này không thẳng hàng sẽ vẽ được số đường thẳng là: $3 \cdot 2 : 2 = 3$ (đường thẳng).

Vì trong (1) có đúng ba điểm thẳng hàng nên số đường thẳng giảm đi là $3 - 1 = 2$ (đường thẳng)

Vậy số đường thẳng cần tìm là: $5151 - 2 = 5149$ (đường thẳng).

Dạng 3: Tính số giao điểm của các đường thẳng

I. Phương pháp giải

- Hai đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm (1 giao điểm).
- Nếu có n đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy.

Ta thấy cứ một đường thẳng trong n đường thẳng đã cho cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo thành $n-1$ giao điểm.

Vì có n đường thẳng nên số giao điểm sẽ là : $n(n-1)$ (giao điểm)

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên số giao điểm thực tế là : $n(n-1):2$ (giao điểm).

Vậy có n đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy thì số giao điểm là: $\frac{n(n-1)}{2}$.

* **Chú ý:** Nếu biết số giao điểm thì tìm được số đường thẳng.

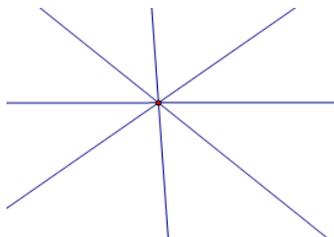
II. Bài toán

Bài 1: Vẽ bốn đường thẳng đôi một cắt nhau. Số giao điểm (của hai đường thẳng hay nhiều đường thẳng) có thể là bao nhiêu?

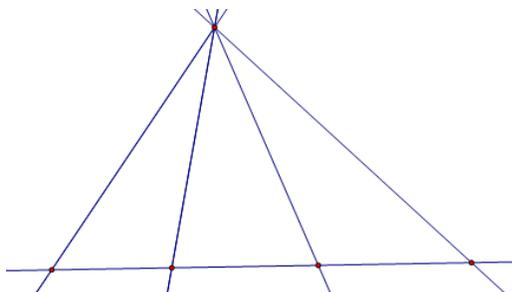
Lời giải

Khi vẽ bốn đường thẳng có thể xảy ra các trường hợp sau:

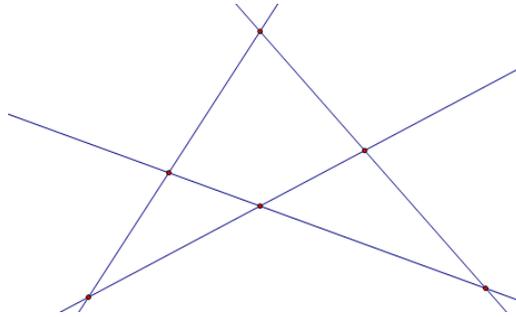
a) Bốn đường thẳng đó đồng quy: có một giao điểm.



b) Có ba đường thẳng đồng quy, còn đường thẳng thứ tư cắt ba đường thẳng đó: có 4 giao điểm.



c) Không có ba đường thẳng nào đồng quy (đôi một cắt nhau): có 6 giao điểm.

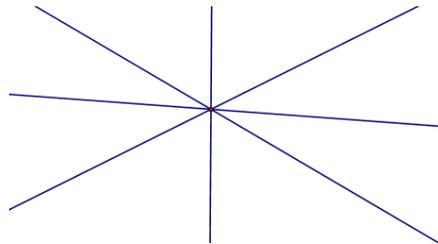


Bài 2: Trên mặt phẳng có bốn đường thẳng. Số giao điểm của các đường thẳng có thể bằng bao nhiêu?

Lời giải

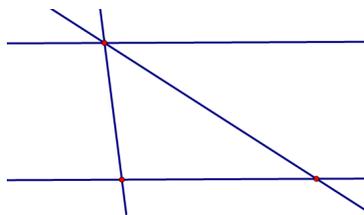
Bài toán đòi hỏi phải xét đủ các trường hợp:

a) Bốn đường thẳng đồng quy: có 1 giao điểm.

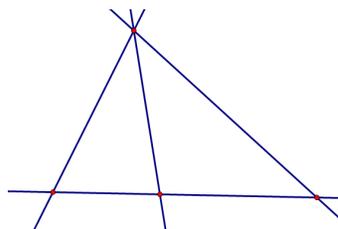


b) Có đúng ba đường thẳng đồng quy:

Có hai đường thẳng song song: 3 giao điểm.

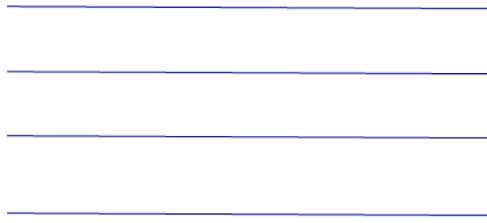


Không có hai đường thẳng nào song song: 4 giao điểm.

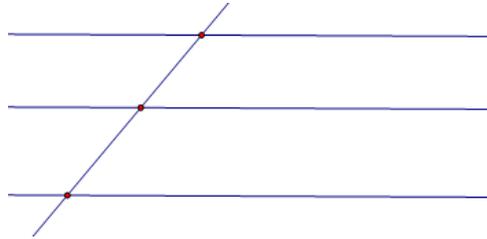


b) Không có ba đường thẳng nào đồng quy.

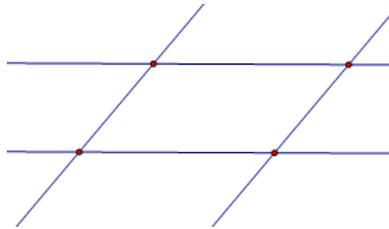
Bốn đường thẳng song song: 0 giao điểm.



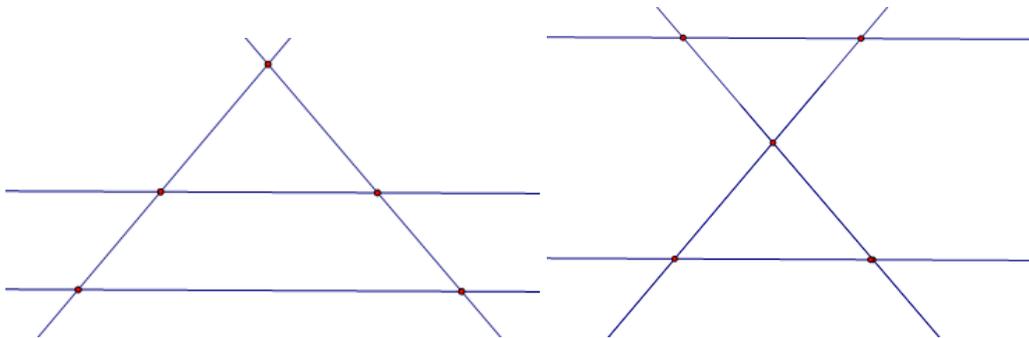
Có đúng ba đường thẳng song song: 3 giao điểm.



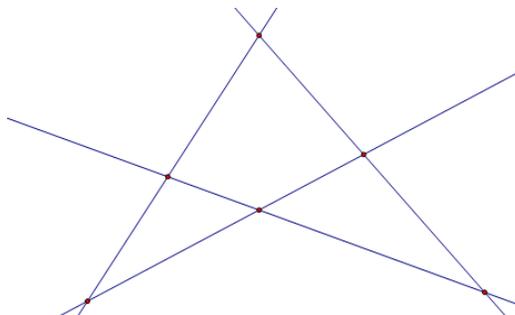
Có hai cặp đường thẳng song song: 4 giao điểm.



Có đúng một cặp đường thẳng song song: 5 giao điểm.



Không có hai đường thẳng nào song song: 6 giao điểm.



Bài 3: Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Tính số giao điểm của chúng.

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 100 đường thẳng còn lại nên tạo ra 100 giao điểm.

Có 101 đường thẳng nên có: $101 \cdot 100 = 10100$ (giao điểm).

Do mỗi giao điểm được tính hai lần nên số giao điểm là: $10100 : 2 = 5050$ (giao điểm)..

Vậy số giao điểm là 5050 (giao điểm).

Bài 2: Cho 2006 đường thẳng trong đó bất kì 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2005 đường thẳng còn lại tạo nên 2005 giao điểm. Mà có 2006 đường thẳng nên có: $2005 \cdot 2006$ giao điểm. Nhưng mỗi giao điểm được tính 2 lần.

Vậy số giao điểm thực tế là: $2005 \cdot 2006 : 2 = 2011015$ (giao điểm).

Bài 3: Cho n đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 780. Tính n .

Lời giải

Trong n đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, số giao điểm của các đường thẳng đó là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Mà số giao điểm là 780, nên: $\frac{n(n-1)}{2} = 780 \Leftrightarrow n(n-1) = 780 \cdot 2 \Leftrightarrow n(n-1) = 1560$.

Vậy $n = 40$.

Dạng 4. Xác định tia, hai tia đối nhau, hai tia trùng nhau

I. Phương pháp giải

Để xác định tia, hai tia đối nhau hay trùng nhau, cần lưu ý các điều sau:

- Để nhận biết tia cần để ý tới gốc và phần đường thẳng bị chia ra bởi gốc.
- Hai tia đối nhau hoặc hai tia trùng nhau đều phải có điều kiện chung gốc. Mỗi điểm nằm trên đường thẳng là gốc chung của hai tia đối nhau.
- Hai tia trùng nhau là hai tia chung gốc và chung phần đường thẳng bị chia ra bởi gốc.

II. Bài toán

Bài 1: Vẽ hai tia Ox , Oy đối nhau. Lấy điểm M thuộc tia Ox , điểm N và điểm K thuộc tia Oy sao cho N nằm giữa hai điểm O và K . Vì sao có thể khẳng định được :

- Hai tia OM , ON đối nhau.
- Hai tia OM , OK đối nhau.

Lời giải



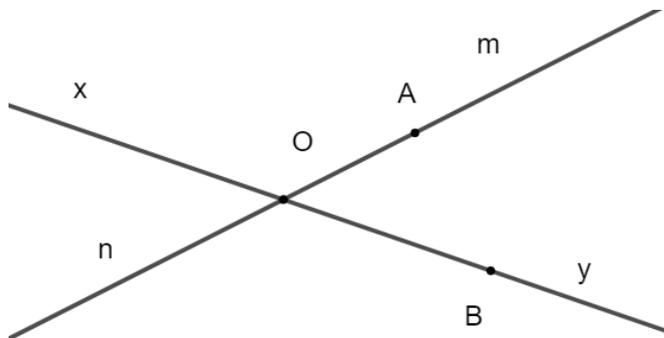
- Điểm M thuộc tia Ox ; điểm N thuộc tia Oy . Vậy tia OM trùng với tia Ox ; tia ON trùng với tia Oy . Do hai tia Ox , Oy đối nhau nên hai tia OM , ON đối nhau (1)
- Điểm N nằm giữa hai điểm O và K nên hai tia ON và OK trùng nhau (2).

Từ (1) và (2) suy ra hai tia OM , OK đối nhau.

Bài 2: Vẽ hai đường thẳng xy và mn cắt nhau tại O .

- Kể tên các tia đối nhau.
- Trên tia On lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B . Kể tên các tia trùng nhau.

Lời giải



Hình 1

1) Các tia đối nhau là :

+ Tia Ox là tia đối của tia Oy ;

+ Tia Om là tia đối của tia On .

2) Các tia trùng nhau là :

+ Tia OA trùng tia On ;

+ Tia OB trùng tia Oy .

Bài 3:

Cho điểm O và B nằm trên đường thẳng xy . Tìm vị trí điểm A để điểm O nằm giữa hai điểm A và B .



Lời giải



Hình 2

Muốn có điểm O nằm giữa hai điểm A và B , thì ba điểm O, A, B phải thẳng hàng. Mà

+ O và B nằm trên đường thẳng xy , vậy A phải nằm trên đường thẳng xy .

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

+ O nằm giữa B và A , nên A phải thuộc tia đối của tia OB . Vậy A phải nằm trên tia Ox .

Từ đó suy ra cách tìm điểm A là điểm bất kì trên tia Ox .

Bài 4: Cho điểm A thuộc đường thẳng xy . Lấy điểm O thuộc tia Ax , điểm C thuộc tia Ay .

- Tìm các tia đối của tia Ax .
- Tìm các tia trùng với tia Ax .
- Trên hình vẽ có bao nhiêu tia? (Hai tia trùng nhau chỉ kể là một tia)

Lời giải



- Các tia đối của tia Ax là tia AC và Ay (Hai tia này chỉ là một).
- Tia trùng với tia Ax là tia AB .
- Trên hình vẽ có tất cả có 6 tia, đó là: Tia Bx , tia By , tia Ax , tia Ay , tia Cx , tia Cy .

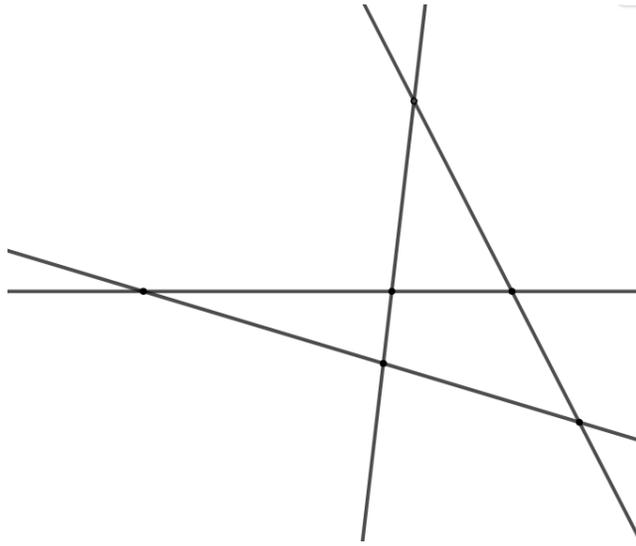
Bài 5: Trên tia Ox lấy 2021 điểm khác điểm O . Có bao nhiêu tia trùng với tia Ox trong hình vẽ?

Lời giải

Với mỗi điểm khác điểm O trên tia Ox ta được một tia gốc O trùng với tia Ox .

Do đó, trên tia Ox có 2021 điểm khác điểm O thì có 2021 tia gốc O trùng với tia Ox .

Bài 6: Cho bốn đường thẳng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Trên hình có bao nhiêu tia?



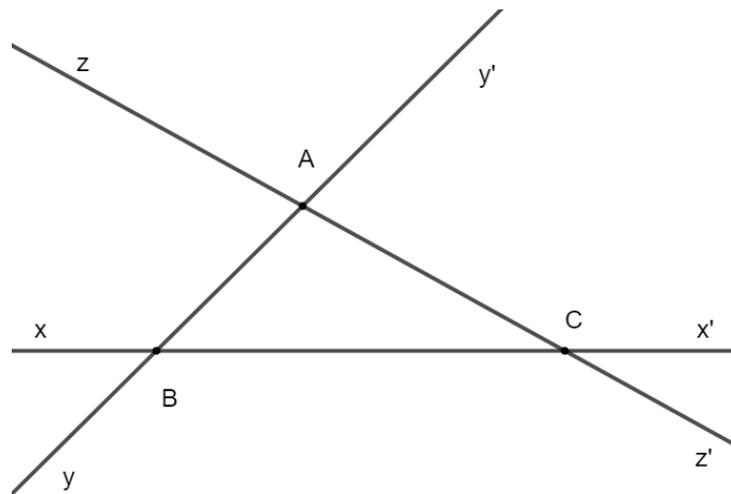
Lời giải

Cứ hai đường thẳng bất kì (trong bốn đường thẳng đã cho) cắt nhau sẽ tạo ra bốn tia.

Số cách chọn ra hai đường thẳng trong bốn đường thẳng là: $\frac{4.3}{2} = 6$ (cách)

Do đó trên hình vẽ có số tia là: $4.6 = 24$ (tia)

Bài 7: Cho ba đường thẳng xx' , yy' , zz' cắt nhau đôi một tạo thành ba giao điểm A , B , C trong đó A là giao điểm của yy' và zz' ; B là giao điểm của xx' và yy' ; C là giao điểm của xx' và zz' .

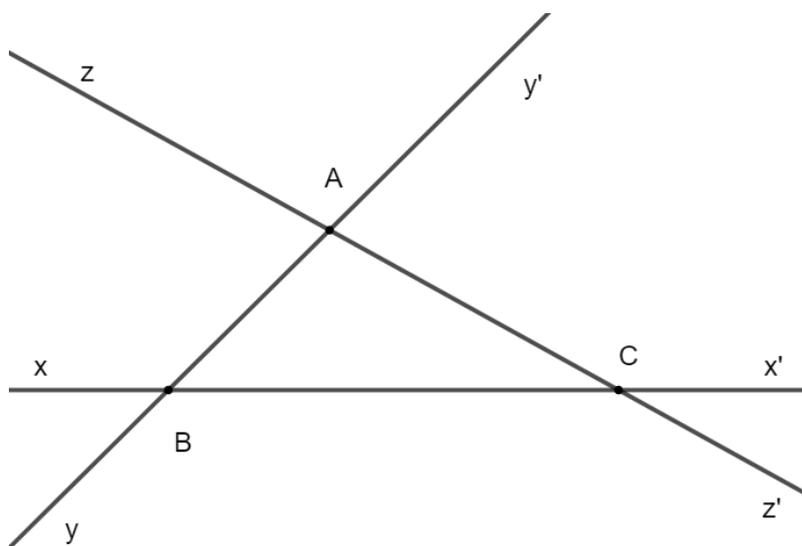


a) Trên hình vẽ có bao nhiêu tia? Kể tên các tia đó.

b) Có bao nhiêu cặp tia đối nhau? Kể tên các tia đó.

c) Kể tên các tia trùng nhau.

Lời giải



a) Tại mỗi giao điểm A , B , C có 4 tia nên trên hình vẽ có 12 tia.

+ Các tia gốc A : Ay , Ay' , Az , Az' .

+ Các tia gốc B : Bx , Bx' , By , By' .

+ Các tia gốc C : Cx , Cx' , Cz , Cz' .

b) Có 6 cặp tia đối nhau:

Bx và Bx' ; By và By' ; Az và Az' ; Ay và Ay' ; Cx và Cx' ; Cz và Cz' .

c) Các tia trùng nhau

+ Các tia trùng nhau gốc A : AB và Ay ; AC và Az' .

+ Các tia trùng nhau gốc B : BC và Bx' ; BA và By' .

+ Các tia trùng nhau gốc C : CA và Cz ; CB và Cx .

Dạng 5. Xác định điểm nằm giữa hai điểm

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

I. Phương pháp giải

Để xác định điểm nằm giữa hai điểm khác, ta sử dụng lưu ý nếu hai tia OA và OB là hai tia đối nhau thì điểm O nằm giữa hai điểm A và B .

II. Bài toán

Bài 1: Cho điểm O nằm giữa hai điểm A và B ; điểm M nằm giữa hai điểm A và O ; điểm N nằm giữa hai điểm B và O .

- Nêu tên các tia trùng nhau gốc O .
- Chứng tỏ rằng điểm O nằm giữa hai điểm M và N .

Lời giải



a) Điểm M nằm giữa hai điểm A và O nên hai tia OM và OA trùng nhau (1)

Điểm N nằm giữa hai điểm B và O nên hai tia ON và OB trùng nhau (2)

b) Điểm O nằm giữa hai điểm A và B nên hai tia OA và OB đối nhau (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra hai tia OM , ON đối nhau do đó điểm O nằm giữa hai điểm M và N .

Bài 2: Trên đường thẳng xy lấy một điểm O . Lấy điểm A trên tia Ox , điểm B trên tia Oy (A và B khác điểm O).

- Trong ba điểm A , B , O điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?
- Lấy điểm M nằm giữa O và A . Giải thích vì sao điểm O nằm giữa hai điểm M và B .

Lời giải



a) Vì điểm O thuộc đường thẳng xy nên Ox và Oy là hai tia đối nhau. Điểm $A \in Ox$, $B \in Oy$ nên hai tia OA và OB đối nhau, do đó điểm O nằm giữa A và B .

b) Điểm M nằm giữa hai điểm O và A nên hai tia OA và OM trùng nhau. (1)

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

Mặt khác, hai tia OA và OB đối nhau. (2)

Nên từ (1) và (2) suy ra hai tia OM và OB đối nhau.

Do đó điểm O nằm giữa hai điểm M , B .

Bài 3: Cho tia Ox và hai điểm A , B sao cho OA và OB đều là tia đối của tia Ox .

- Nêu nhận xét vị trí hai tia OA và OB .
- Nhận xét vị trí ba điểm O , A , B .
- Có thể khẳng định điểm A nằm giữa O và B không?

Lời giải



Trường hợp 1



Trường hợp 2

- Vì tia OA và tia OB đều là tia đối của tia Ox nên hai tia OA và OB trùng nhau.
- Vì theo câu tia OA và tia OB trùng nhau nên ba điểm O , A , B thẳng hàng.
- Không thể khẳng định điểm A nằm giữa hai điểm O và B .

Bài 4: Cho ba điểm A , B , C sao cho điểm C nằm giữa hai điểm A và B .

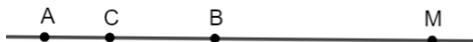
- Vẽ điểm M thuộc tia CB sao cho điểm M nằm giữa hai điểm C và B .
- Vẽ điểm M thuộc tia CB sao cho điểm B nằm giữa C và M .
- Giải thích vì sao trong cả hai câu a và b điểm C nằm giữa hai điểm A và M .

Lời giải

a)



b)



c) Điểm M thuộc tia CB và M không trùng C nên tia CB và CM trùng nhau (1)

Điểm C nằm giữa A và B nên CA và CB là hai tia đối nhau (2)

Từ (1) và (2) suy ra các tia CM và CA đối nhau nên điểm C nằm giữa hai điểm A và M .

Bài 5: Cho bốn điểm A, B, C, D sao cho B nằm giữa A và C , điểm A nằm giữa hai điểm B và D . Vì sao điểm B nằm giữa hai điểm D và C .

Lời giải



Vì điểm B nằm giữa hai điểm A và C nên BA và BC là hai tia đối nhau (1)

Vì điểm A nằm giữa hai điểm B và D nên BA và BD là hai tia trùng nhau (2)

Từ (1) và (2) ta có BC và BD là hai tia đối nhau do đó điểm B nằm giữa D và C .

Dạng 6. Xác định vị trí của một điểm di động trên tia.

I. Phương pháp giải

Dựa vào vị trí tương đối giữa tia với tia, tia với đường thẳng, đoạn thẳng.

II. Bài toán

Bài 1:

Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A khác O , trên tia Oy lấy điểm B khác O . Gọi M là điểm di động trên xy . Xác định vị trí của M để:

a) Hai tia OM và OB trùng nhau.

b) Hai tia MA và MB đối nhau.

Lời giải

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

a) Để hai tia OM và OB trùng nhau thì điểm M thuộc tia Oy



b) Để điểm hai tia MA và MB đối nhau thì điểm M nằm giữa A và B , không trùng với điểm A và điểm B



Bài 2: Cho hai điểm cố định O , A và đường thẳng xy . Đường thẳng xy đi qua điểm O , điểm A không thuộc xy . M là điểm bất kì trên xy , vẽ tia Az đi qua điểm M . Xác định vị trí điểm M để:

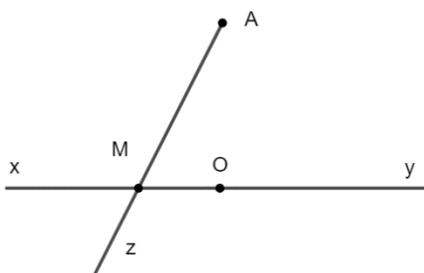
a) Tia Az cắt tia Ox mà không cắt tia Oy .

b) Tia Az cắt tia Oy mà không cắt tia Ox .

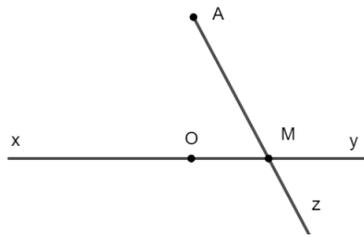
c) Tia Az vừa tia Ox vừa cắt tia Oy .

Lời giải

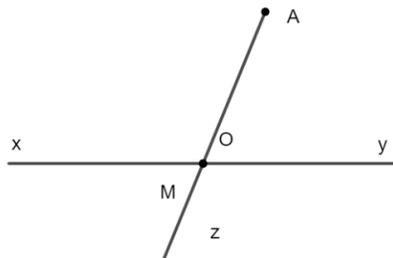
a) Tia Az cắt tia Ox mà không cắt tia Oy thì điểm M thuộc tia Ox và điểm M không trùng điểm O .



b) Tia Az cắt tia Oy mà không cắt tia Ox thì điểm M thuộc tia Oy và điểm M không trùng điểm O .



c) Tia Az vừa cắt tia Ox vừa cắt tia Oy thì điểm M trùng với điểm O .



∞HẾT∞

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC
CHỦ ĐỀ 2: ĐOẠN THẲNG, ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG, TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

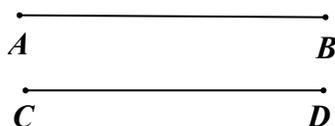
1. ĐOẠN THẲNG, ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG.

1. Đoạn thẳng là hình gồm điểm A , điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B .

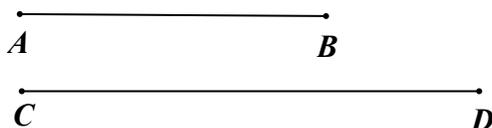


2. Mỗi đoạn thẳng có một độ dài. Độ dài đoạn thẳng là một số dương.

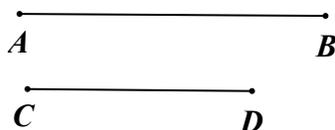
3. $AB = CD \Leftrightarrow AB$ và CD có cùng độ dài.



$AB < CD \Leftrightarrow$ độ dài đoạn thẳng AB nhỏ hơn độ dài đoạn thẳng CD .



$AB > CD \Leftrightarrow$ độ dài đoạn thẳng AB lớn hơn độ dài đoạn thẳng CD .



4. Điểm nằm giữa hai điểm:



Nếu điểm M nằm giữa điểm A và điểm B thì $AM + MB = AB$.

Ngược lại, nếu $AM + MB = AB$ thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B .

Nếu $AM + MB \neq AB$ thì điểm M không nằm giữa A và B .



CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

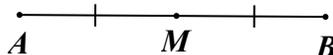
Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B ; điểm N nằm giữa hai điểm M và B thì $AM + MN + NB = AB$

2. VẼ ĐOẠN THẲNG CHO BIẾT ĐỘ DÀI

1. Trên tia Ox bao giờ cũng vẽ được một và chỉ một điểm M sao cho $OM = a$ (đơn vị dài).
2. Trên tia Ox , $OM = a$, $ON = b$ nếu $0 < a < b$ hay $OM < ON$ thì điểm M nằm giữa hai điểm O và N .
3. Trên tia Ox có 3 điểm M , N , P , $OM = a$; $ON = b$, $OP = c$ nếu $0 < a < b < c$ hay $OM < ON < OP$ điểm N nằm giữa hai điểm M và P .

3. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG

1. Trung điểm của đoạn thẳng là điểm nằm giữa hai đầu đoạn thẳng và cách đều hai đầu đoạn thẳng đó.



2. Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì:

Điểm M nằm giữa hai điểm A , B và $MA = MB = \frac{AB}{2}$.

3. Nếu M nằm giữa hai đầu đoạn thẳng AB và $MA = \frac{AB}{2}$ thì M là trung điểm của đoạn AB .

4. Mỗi đoạn thẳng có 1 trung điểm duy nhất.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng và chứng minh điểm nằm giữa.

I. Phương pháp giải

➤ Để tính độ dài đoạn thẳng ta thường sử dụng các nhận xét sau:

- Nếu điểm M nằm giữa điểm A và điểm B thì $AM + MB = AB$. Ngược lại, nếu $AM + MB = AB$ thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B .
- Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B ; điểm N nằm giữa hai điểm M và B thì $AM + MN + NB = AB$.
- Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $MA = MB = \frac{AB}{2}$.

➤ Để chứng minh điểm nằm giữa hai điểm ta thường sử dụng các nhận xét sau:

- Nếu $AM + MB = AB$ thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B .
- Trên tia Ox , $OM = a$, $ON = b$ nếu $0 < a < b$ hay $OM < ON$ thì điểm M nằm giữa hai điểm O và N .

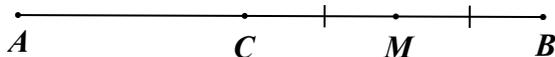
CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

- Nếu tia OM và tia ON là hai tia đối nhau thì điểm O nằm giữa hai điểm M và N .

II. Bài toán

Bài 1: Cho đoạn thẳng $AB = 7$ cm. Gọi C là điểm nằm giữa A và B , $AC = 3$ cm. M là trung điểm của BC . Tính BM .

Lời giải:



Vì điểm C nằm giữa hai điểm A và B

$$\text{Nên } AC + BC = AB \Rightarrow 3 + BC = 7$$

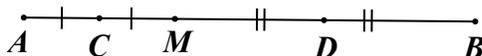
$$\text{Suy ra } BC = 7 - 3 = 4 \text{ (cm)}$$

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng BC

$$\text{Nên } BM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm).}$$

Bài 2: Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm. M là điểm nằm giữa hai điểm A và B . Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AM và MB . Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Lời giải:



Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B nên $AM + MB = AB$

Vì C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AM và MB nên ta có:

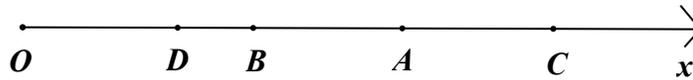
$$CM = \frac{AM}{2}, MD = \frac{MB}{2}.$$

Vì M nằm giữa A và B , C nằm giữa A và M , D nằm giữa M và B , suy ra M nằm giữa C và D

$$\text{Do đó } CD = CM + MD = \frac{AM}{2} + \frac{MB}{2} = \frac{AM + MB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm).}$$

Bài 3: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 5$ cm, $OD = 2$ cm, $BC = 4$ cm và độ dài đoạn AC gấp đôi độ dài đoạn BD . Tính độ dài các đoạn BD, AC .

Lời giải:



Vì A nằm giữa B và C nên $BA + AC = BC \Rightarrow BA + AC = 4 \Rightarrow AC = 4 - AB$ (1)

Vì A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và $D \Rightarrow B$ nằm giữa A và D .

Trên tia Ox , ta có $OD < OA$ ($2 < 5$)

Nên điểm D nằm giữa hai điểm O và A .

Suy ra : $OD + DA = OA$

$\Rightarrow 2 + DA = 5$

$\Rightarrow DA = 3$ (cm).

Vì B nằm giữa hai điểm A và D

Nên $DB + BA = DA$

$\Rightarrow DB + BA = 3$

$\Rightarrow BD = 3 - AB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AC - BD = 1$ (3)

Theo đề ra: $AC = 2BD$ thay vào (3)

Ta có $2BD - BD = 1$

$\Rightarrow BD = 1$ (cm)

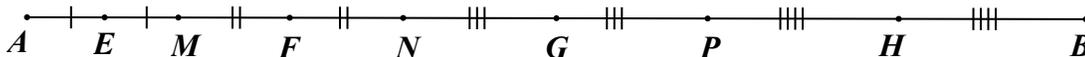
$\Rightarrow AC = 2BD$

$\Rightarrow AC = 2$ (cm)

Vậy $AC = 2$ (cm), $BD = 1$ (cm).

Bài 4: Đoạn thẳng $AB = 36$ cm được chia thành bốn đoạn thẳng có độ dài không bằng nhau theo thứ tự là các đoạn thẳng AM , MN , NP và PB . Gọi E , F , G , H theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM , MN , NP , PB . Biết độ dài của đoạn thẳng $EH = 30$ cm. Tính độ dài của đoạn thẳng FG .

Lời giải:



CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

Vì đoạn thẳng AB được chia thành bốn đoạn thẳng có độ dài không bằng nhau theo thứ tự là các đoạn thẳng AM , MN , NP , PB nên suy ra các điểm M , N , P nằm giữa hai điểm A , B theo thứ tự M nằm giữa A và N , N nằm giữa M và P , P nằm giữa N và B .

Mặt khác: E , F , G , H theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM , MN , NP , PB nên điểm E nằm giữa hai điểm A và H , điểm H nằm giữa hai điểm E và B .

Do đó ta có: $AE + EH + HB = AB$

Mà $AB = 36$, $EH = 30$.

Suy ra: $AE + 30 + HB = 36$

$$\Rightarrow AE + HB = 36 - 30 = 6 \quad (1)$$

Mà $AE = \frac{AM}{2}$ và $HB = \frac{PB}{2}$ (do E và H là trung điểm của AM và PB) (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$AE + HB = \frac{AM}{2} + \frac{PB}{2} = \frac{AM + PB}{2} = 6$$

$$\Rightarrow AM + PB = 12 \text{ (cm)}.$$

Vì các điểm M , N , P nằm giữa hai điểm A , B theo thứ tự M nằm giữa A và N , N nằm giữa M và P , P nằm giữa N và B nên ta có: $AM + MP + PB = AB$

Suy ra: $MP = AB - (AM + PB) = 36 - 12 \Rightarrow MP = 24 \text{ (cm)}$.

Mặt khác F , G lần lượt là trung điểm của MN , NP nên ta có: $FN = \frac{MN}{2}$; $NG = \frac{NP}{2}$

Do đó ta có: $FN + NG = \frac{MN}{2} + \frac{NP}{2} = \frac{MN + NP}{2}$ (*)

Theo đề bài, thứ tự các điểm chia và thứ tự trung điểm các đoạn thẳng thì N là điểm nằm giữa hai điểm F , G và N là điểm nằm giữa hai điểm M , P .

Do đó ta có: $FN + NG = FG$, $MN + NP = MP$

Thay vào (*) ta có: $FG = \frac{MP}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ (cm)}$

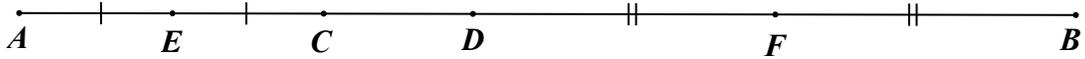
Vậy độ dài đoạn thẳng FG là 12 (cm).

Bài 5: Đoạn thẳng AB có độ dài 28 cm được chia thành ba đoạn thẳng không bằng nhau theo thứ tự AC , CD và DB . Gọi E , F là trung điểm của đoạn thẳng AC , DB . Biết độ dài đoạn $EF = 16$ cm.

Tìm độ dài đoạn CD .

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

Lời giải:



Đoạn AB được chia thành ba đoạn theo thứ tự AC , CD và DB .

Vậy hai điểm C , D nằm giữa hai điểm A và B .

$$\text{Vì } E \text{ là trung điểm của } AC \text{ nên } AE = \frac{AC}{2} \quad (1)$$

$$F \text{ là trung điểm của } DB \text{ nên } FB = \frac{DB}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có: } AE + FB = \frac{AC}{2} + \frac{DB}{2} \Rightarrow AE + FB = \frac{AC + DB}{2}$$

Vì điểm E và điểm F nằm giữa hai điểm A , B và điểm E nằm giữa hai điểm A , F

$$\text{Nên: } AE + EF + FB = AB \Rightarrow AE + FB = AB - EF$$

$$\text{Suy ra } AE + FB = \frac{AC + DB}{2} = 28 - 16 = 12$$

$$\text{Suy ra: } AC + DB = 24 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy đoạn } CD = AB - (AC + DB) = 28 - 24 = 4 \text{ (cm)}$$

Bài 6: Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C . Biết E là trung điểm của đoạn thẳng CA , F là trung điểm của đoạn thẳng CB .

a) Chứng tỏ rằng độ dài đoạn CB lớn hơn độ dài đoạn CA .

b) Tìm độ dài đoạn EF .

Lời giải:



a) Điểm C thuộc tia đối của tia AB nên điểm A nằm giữa hai điểm B , C

$$\text{Suy ra } BC = BA + AC$$

$$\text{Mà } BA, AC, BC > 0$$

Suy ra độ dài đoạn CB lớn hơn độ dài đoạn CA .

$$\text{b) Vì } F \text{ là trung điểm của đoạn } CB, \text{ nên: } CF = \frac{CB}{2} \quad (1)$$

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

Vì E là trung điểm của đoạn CA , nên : $CE = \frac{CA}{2}$ (2)

Mà $CA < CB$ (câu a), nên $CE < CF$, chứng tỏ điểm E nằm giữa hai điểm C, F

Suy ra : $CF = CE + EF$

$$\Rightarrow EF = CF - CE \quad (3)$$

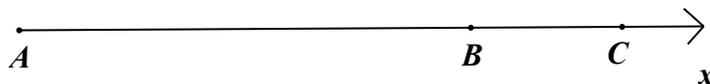
Thay (1) và (2) vào (3), ta có : $EF = \frac{CB}{2} - \frac{CA}{2} = \frac{CB - CA}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (cm).

Vậy $EF = 3$ (cm).

Bài 7: Vẽ tia Ax . Trên tia Ax xác định hai điểm B và C sao cho B nằm giữa A, C và $AC = 8$ cm, $AB = 3BC$. Tính độ dài các đoạn AB, BC .

(Đề thi HSG huyện Hưng Hà 2020-2021)

Lời giải:



Vì điểm B nằm giữa hai điểm A, C nên $AB + BC = AC$

Mà $AB = 3BC$, $AC = 8$ cm

Suy ra: $3BC + BC = 8$

$$\Rightarrow 4BC = 8$$

$$\Rightarrow BC = 2 \text{ (cm)}$$

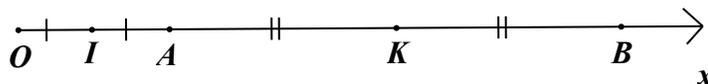
Do đó: $AB = 2.3 = 6$ (cm).

Vậy $AB = 6$ (cm), $BC = 2$ (cm).

Bài 8: Trên tia Ox lấy các điểm A và B sao cho $OA = 2$ cm, $OB = 8$ cm. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA , K là trung điểm của đoạn thẳng AB . Tính độ dài các đoạn thẳng AB, IK .

(Đề thi HSG huyện Nông Công 2020 - 2021)

Lời giải:



Trên tia Ox , ta có $OA < OB$ ($2 < 8$) nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B .

Do đó: $OA + AB = OB$

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

$$\Rightarrow 2 + AB = 8$$

$$\Rightarrow AB = 8 - 2 = 6 \text{ (cm)}$$

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng OA

$$\text{Nên } OI = IA = \frac{OA}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (cm)}$$

Vì K là trung điểm của đoạn thẳng AB

$$\text{Nên } AK = KB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

Mà điểm A nằm giữa hai điểm O và B , điểm I nằm giữa hai điểm O và A , K nằm giữa hai điểm A và B nên suy ra A nằm giữa hai điểm I và K .

$$\text{Suy ra: } AI + AK = IK$$

$$\Rightarrow IK = 1 + 3 = 4 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } AB = 6 \text{ (cm), } IK = 4 \text{ (cm)}$$

Bài 9: Cho ba điểm A, O, B sao cho $OA = 2$ cm, $OB = 3$ cm và $AB = 5$ cm. Lấy điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho $OM = 1$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AM ?

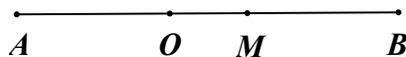
(Đề thi HSG huyện Hoa Lư 2020-2021)

Lời giải:

Vì $OA + OB = AB$ do $2 + 3 = 5$ nên điểm O nằm giữa hai điểm A và B .

$\Rightarrow O$ nằm trên đường thẳng AB và hai tia OA, OB đối nhau.

+) Trường hợp 1: M nằm trên tia OB



Ta có: OM và OA là hai tia đối nhau nên O nằm giữa A và M

$$\text{Khi đó: } AM = AO + OM = 2 + 1 = 3 \text{ (cm)}$$

+) Trường hợp 2: M nằm trên tia OA



CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

Trên tia OA , ta có $OM < OA$ (do $1 < 2$) nên điểm M nằm giữa hai điểm O và A

Khi đó: $OM + MA = OA$

$$\Rightarrow AM = OA - OM = 2 - 1 = 1 \text{ (cm)}$$

Vậy $AM = 3$ (cm), $AM = 1$ (cm).

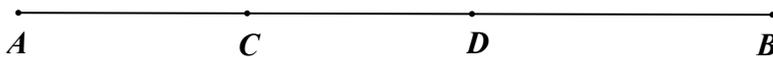
Bài 10: Cho đoạn thẳng AB biết $AB = 10$ cm. Lấy 2 điểm C, D trên đoạn AB (C, D không trùng với A, B) sao cho $AD + BC = 13$ cm.

1. Chứng minh rằng: Điểm C nằm giữa hai điểm A và D .

2. Tính độ dài đoạn thẳng CD .

(Đề thi HSG huyện Gia Bình 2020-2021)

Lời giải:



1) Vì điểm C nằm trên đoạn AB nên điểm C nằm giữa hai điểm A, B

Suy ra $AC + CB = AB$

$$\Rightarrow AC + CB = 10$$

$$\Rightarrow AC = 10 - CB \quad (1)$$

Theo bài ra ta có: $AD + BC = 13$

$$\Rightarrow AD = 13 - BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AC < AD$.

Trên tia AB có $AC < AD$ nên điểm C nằm giữa hai điểm A và D .

2) Vì điểm C nằm giữa A và D nên $AC + CD = AD$

Ta có:

$$AD + BC = 13$$

$$\Rightarrow AC + CD + BC = 13$$

$$\Rightarrow (AC + BC) + CD = 13$$

$$\Rightarrow AB + CD = 13$$

$$\Rightarrow CD = 13 - AB$$

$$\Rightarrow CD = 13 - 10 = 3 \text{ (cm)}$$

Vậy $CD = 3$ (cm)

Dạng 2: Chứng minh một điểm là trung điểm của một đoạn thẳng, chứng minh đẳng thức độ dài có liên quan.

I. Phương pháp giải

Để chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta thường làm như sau:

Cách 1. Bước 1: Chứng tỏ điểm M nằm giữa A và B .

Bước 2: Chứng tỏ $MA = MB$.

Cách 2. Chứng minh $MA = MB = \frac{AB}{2}$

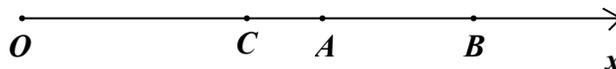
Cách 3. Bước 1: Chứng tỏ điểm M nằm giữa A và B .

Bước 2: Chứng tỏ $MA = \frac{AB}{2}$ hoặc $MB = \frac{AB}{2}$.

II. Bài toán

Bài 1: Gọi A và B là hai điểm trên tia Ox sao cho $OA = 4$ cm, $OB = 6$ cm. Trên tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 3$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB và AC .

Lời giải:



Trên tia Ox , ta có: $OA < OB$ ($4 < 6$) nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B

Suy ra $AB + OA = OB \Rightarrow AB = OB - OA$;

Mà $OA = 4$ cm, $OB = 6$ cm

Nên $AB = 6 - 4 = 2$ (cm)

Trên tia BA , ta có $BA < BC$ ($2 < 3$) nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C

Suy ra $AC + BA = BC$

$\Rightarrow AC = BC - BA$

Mà $BC = 3$ cm, $AB = 2$ cm.

Do đó: $AC = 3 - 2 = 1$ (cm)

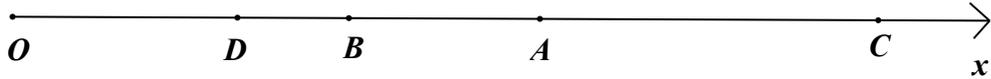
Vậy $AB = 2$ (cm), $AC = 1$ (cm).

Bài 2: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7$ cm, $OD = 3$ cm, $BC = 8$ cm và $AC = 3BD$.

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

- a) Tính độ dài AC .
b) Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Lời giải:



a) Đặt $BD = x$ (cm) $\Rightarrow AC = 3x$ (cm)

Trên tia Ox có $OD < OA$ (vì $3 < 7$) Nên điểm D nằm giữa hai điểm O và A

Suy ra: $OD + DA = OA$

$\Rightarrow DA = OA - OD = 7 - 3 = 4$ (cm)

Vì điểm B nằm giữa hai điểm D và C , điểm A nằm giữa hai điểm B và C

Nên điểm B nằm giữa hai điểm D và A .

Suy ra $DB + BA = DA$

$\Rightarrow DB + BA = 4$

$\Rightarrow x + BA = 4$ (1)

Vì A nằm giữa B và C nên: $BA + AC = BC$ hay $3x + BA = 8$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $(3x + BA) - (x + BA) = 8 - 4$

$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow AC = 3.2 = 6$ (cm)

Vậy $AC = 6$ (cm)

b) Theo (1) ta có: $x + BA = 4$ mà $x = 2 \Rightarrow BA = 2$.

Mà $BD = x = 2 \Rightarrow BD = BA$.

Mặt khác điểm B nằm giữa 2 điểm D và A .

Suy ra B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Bài 3: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 3$ cm và $ON = 7$ cm.

- a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .
b) Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng OP .
c) Trong trường hợp M nằm giữa O và P . Chứng tỏ rằng P là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Lời giải:

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC



a) Trên tia Ox , ta có: $OM < ON$ ($3 < 7$) nên M nằm giữa hai điểm O và N

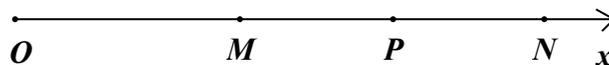
$$\Rightarrow OM + MN = ON$$

$$\Rightarrow 3 + MN = 7$$

$$\Rightarrow MN = 7 - 3 = 4 \text{ (cm)}$$

Vậy $MN = 4$ (cm).

b) TH1: P nằm giữa M và N .



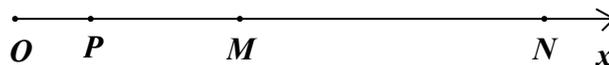
Vì P nằm giữa M và N mà M nằm giữa hai điểm O và N

Nên M nằm giữa O và P

$$\Rightarrow OP = OM + MP$$

$$\Rightarrow OP = 3 + 2 = 5 \text{ (cm)}$$

TH2: P nằm giữa O và M .



Vì P nằm giữa O và M

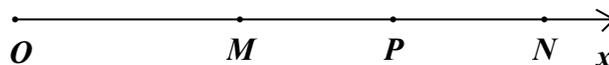
Nên $OM = OP + PM$

$$\Rightarrow 3 = OP + 2$$

$$\Rightarrow OP = 1 \text{ (cm)}$$

c) Vì M nằm giữa O và P nên $MO + MP = OP$

$$\Rightarrow OP = 3 + 2 = 5 \text{ (cm)}$$



Trên tia Ox , ta có $OP < ON$ ($5 < 7$) nên P nằm giữa O và N

$$\Rightarrow OP + PN = ON$$

$$\Rightarrow 5 + PN = 7$$

$$\Rightarrow PN = 2 \text{ (cm)}$$

Do đó: $MP = PN$ (1)

Trên tia Ox , ta có: $OM < OP < ON$ ($3 < 5 < 7$) nên P nằm giữa M và N (2)

Từ (1) và (2) suy ra P là trung điểm của MN

Bài 4: Cho các điểm A, B, C nằm trên cùng một đường thẳng. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC . Chứng tỏ rằng: $BC = 2MN$. Bài toán có mấy trường hợp, hãy chứng tỏ từng trường hợp đó?

Lời giải:

- Trường hợp 1: Hai điểm B, C ở cùng phía với A , tức là hai tia AB, AC trùng nhau.



* Trường hợp này có thể chia làm hai trường hợp nhỏ là : $AB > AC, AC > AB$ (hai trường hợp chứng minh tương tự).

Giả sử: $AC > AB$.

$$\text{Vì } N \text{ là trung điểm của } AC, \text{ nên: } AN = NC = \frac{AC}{2} \quad (1)$$

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm của } AB, \text{ nên: } AM = MB = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$AN - AM = \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC - AB}{2} \quad (3)$$

Ta xét $AC > AB$, nên điểm B nằm giữa hai điểm A và C .

$$\text{Suy ra: } AC = AB + BC \Rightarrow BC = AC - AB \quad (4)$$

$AB < AC \Rightarrow AM < AN$ nên điểm M nằm giữa hai điểm A và N .

$$\text{Suy ra: } AN = AM + MN \Rightarrow MN = AN - AM \quad (5)$$

$$\text{Thay (4) và (5) vào (3), ta có: } MN = \frac{BC}{2} \text{ hay } BC = 2MN$$

* Trường hợp 2: Hai tia AB và AC đối nhau

Mà điểm M thuộc tia AB , điểm N thuộc tia AC

Nên AM và AN là hai tia đối nhau

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC



$$M \text{ là trung điểm của } AB, \text{ nên: } AM = MB = \frac{AB}{2} \quad (6)$$

$$N \text{ là trung điểm của } AC, \text{ nên: } AN = NC = \frac{AC}{2} \quad (7)$$

Từ (6) và (7) có:

$$AM + AN = \frac{AB + AC}{2} \quad (8)$$

Vì AB, AC là hai tia đối nhau, nên điểm A nằm giữa hai điểm B, C .

$$\text{Suy ra: } BC = BA + AC \quad (9)$$

Vì M và N thuộc hai tia đối nhau AB, AC nên điểm A nằm giữa hai điểm M, N

$$\text{Suy ra: } MN = AM + AN \quad (10)$$

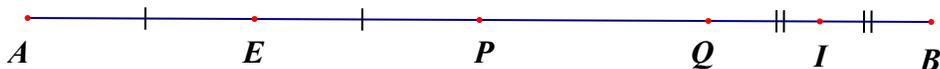
Thay (9) và (10) vào (8), ta có: $MN = \frac{BC}{2}$ hay $BC = 2MN$.

Bài 5: Đoạn thẳng AB có độ dài bằng a được chia thành ba đoạn thẳng bởi hai điểm chia P, Q theo thứ tự là đoạn AP, PQ, QB sao cho $AP = 2PQ = 2QB$. Tìm khoảng cách giữa:

a) Điểm A và điểm I với I là trung điểm của QB .

b) Điểm E và điểm I với E là trung điểm của đoạn AP .

Lời giải:



a) Đoạn AB được chia thành ba đoạn theo thứ tự AP, PQ, QB nên suy ra

$$AB = AP + PQ + QB.$$

$$\text{Mà } AP = 2PQ = 2QB \quad (1)$$

$$\text{Suy ra: } PQ = QB \quad (2)$$

$$\text{Vậy } AB = 2QB + PQ + QB = 4QB \quad (3)$$

Vì I là trung điểm của QB , nên : $QI = IB = \frac{QB}{2}$ (4)

I là trung điểm của QB , mà Q nằm giữa hai điểm A, B nên I cũng nằm giữa hai điểm A, B .

Suy ra: $AB = AI + IB$ (5)

Từ (3) ta có:

$$AB = 4QB \Rightarrow QB = \frac{AB}{4} \Rightarrow \frac{QB}{2} = \frac{AB}{8} \Rightarrow IB = QI = \frac{QB}{2} = \frac{AB}{8}$$
 (6)

Thay (6) vào (5) có:

$$AB = AI + \frac{AB}{8}$$

$$\Rightarrow AI = AB - \frac{AB}{8} = \frac{8AB - AB}{8}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{7AB}{8} = \frac{7a}{8} \text{ (cm)}$$

b) Theo (3) ta có: $AB = 4QB$.

Theo (1) ta có: $2QB = AP$.

Vậy ta suy ra: $AB = 2AP \Rightarrow AP = \frac{AB}{2}$

Mà E là trung điểm của AP , nên $EP = \frac{AP}{2} = \frac{AB}{4}$. (7)

mà $PQ = QB$,

Vậy : $PQ = QB = \frac{AB}{4}$. (8)

Theo đầu bài, đoạn AB được chia thành ba đoạn thẳng theo thứ tự AP, PQ, QB

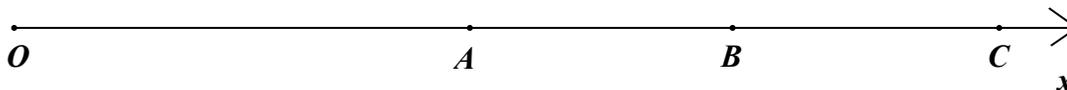
Suy ra $EI = EP + PQ + QI$ (9)

Thay (6), (7), (8) vào (9) có: $EI = \frac{AB}{4} + \frac{AB}{4} + \frac{AB}{8}$

$$\Rightarrow EI = \frac{5AB}{8} \Rightarrow EI = \frac{5a}{8} \text{ (cm)}.$$

Bài tập 6: Trên tia Ox vẽ các điểm A, B, C sao cho $OA = 12\text{cm}$, $OB = 19\text{cm}$, $OC = 26\text{cm}$. Điểm B có là trung điểm của đoạn thẳng AC hay không? Vì sao?

Lời giải:



Trên tia Ox ta có $OA < OB$ ($12 < 19$) nên A nằm giữa hai điểm O và B

Suy ra: $OA + AB = OB$

$$\Rightarrow AB = OB - OA = 19 - 12 = 7 \text{ (cm)} \quad (1)$$

Trên tia Ox ta có $OB < OC$ ($19 < 26$) nên điểm B nằm giữa hai điểm O và C

Suy ra: $OB + BC = OC$

$$\Rightarrow BC = OC - OB = 26 - 19 = 7 \text{ (cm)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB = BC$. (3)

Mặt khác Trên tia Ox ta có $OA < OB < OC$ ($12 < 19 < 26$)

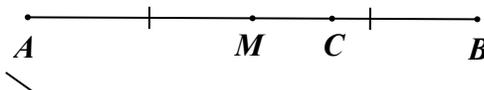
suy ra điểm B nằm giữa hai điểm A và C . (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow B$ là trung điểm của đoạn thẳng AC .

Bài tập 7: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm M của nó. Chứng tỏ rằng nếu C là điểm thuộc đoạn thẳng

MB thì $CM = \frac{CA - CB}{2}$.

Lời giải:



Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và C nên: $CA = MA + CM$ (1)

Vì điểm C nằm giữa hai điểm M và B nên: $CM + CB = MB \Rightarrow CB = MB - CM$ (2)

Vì M là trung điểm của AB nên $MA = MB = \frac{AB}{2}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được: $CA - CB = 2CM$

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

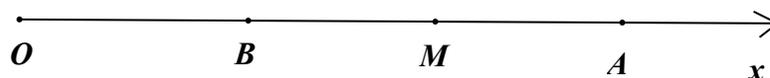
Suy ra: $CM = \frac{CA - CB}{2}$

Bài tập 8: Trên tia Ox xác định các điểm A và B sao cho $OA = a$ (cm), $OB = b$ (cm).

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB , biết $b < a$.

b) Xác định điểm M trên tia Ox sao cho $OM = \frac{1}{2}(a + b)$.

Lời giải:



a) Trên tia Ox , ta có: $OB < OA$ (do $b < a$) nên điểm B nằm giữa điểm O và điểm A .

Suy ra: $OB + AB = OA$

Suy ra: $AB = OA - OB = a - b$.

b) Vì M nằm trên tia Ox và

$$OM = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{a + b}{2} = \frac{2b + a - b}{2} = b + \frac{a - b}{2} = OB + \frac{OA - OB}{2} = OB + \frac{1}{2}AB$$

$\Rightarrow M$ là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = BM$.

Bài 9:

1. Trên tia Oy , lấy điểm M và H sao cho $OM = 5$ cm, $OH = 10$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng HM . Điểm M có là trung điểm của đoạn thẳng OH không? Vì sao?

2. Cho đoạn thẳng AB . Điểm C thuộc tia đối của tia BA . Gọi M , N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC . Chứng minh rằng: $CM = \frac{CA + CB}{2}$ và $MN = \frac{BC}{2}$.

(Đề thi HSG huyện Ninh Bình 2020-2021)

Lời giải:

1) Chứng minh được M nằm giữa O và H .



Ta có $OM + MH = OH \Rightarrow MH = 10 - 5 = 5$ cm

Điểm M có là trung điểm của đoạn thẳng OH vì: M nằm giữa O và H và $MH = MO (= 5$ cm)

CHUYÊN ĐỀ ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐOẠN THẲNG VÀ TAM GIÁC

2) Chứng minh rằng: $CM = \frac{CA+CB}{2}$ và $MN = \frac{BC}{2}$.



Vì M là trung điểm của AB , điểm C thuộc tia đối của tia BA nên M nằm giữa A và C .

Suy ra: $CA = CM + AM$

$$\Rightarrow CM = AC - AM \quad (1)$$

Lại có B nằm giữa M và C

$$\Rightarrow CM = CB + BM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2CM = AC - AM + BC + MB = AC + BC$ (do $AM = MB$)

$$\text{Vậy } CM = \frac{CA+CB}{2}$$

Lại có N là trung điểm của $AC \Rightarrow CN = \frac{AC}{2}$

Có $AB < AC$, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và $AC \Rightarrow AM < AN$

$\Rightarrow M$ nằm giữa A và $N \Rightarrow AN = AM + MN$

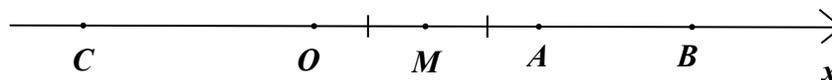
$$\Rightarrow MN = AN - AM = \frac{AC - AB}{2} = \frac{BC}{2}$$

Bài 10: Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho $OA = 3$ cm, $OB = 5$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB .

b) Trên tia đối của tia Ox lấy điểm C sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng AC . Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA sao cho $OM = \frac{1}{2}OA$. Hỏi M có là trung điểm của đoạn thẳng BC không? Vì sao?

Lời giải:



a) Trên tia Ox có $OA < OB$, ($3 < 5$) nên điểm A nằm giữa hai điểm B và O .

Suy ra $OA + AB = OB$

$$\Rightarrow AB = OB - OA$$

$$\Rightarrow AB = 5 - 3 = 2 \text{ (cm)}$$

Vậy $AB = 2 \text{ (cm)}$.

b) Vì điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AC nên $OC = OA = 3 \text{ (cm)}$.

Vì điểm M thuộc đoạn thẳng OA và $OM = \frac{1}{2}OA$

Nên điểm M là trung điểm của đoạn thẳng OA .

Suy ra $OM = MA = 3 : 2 = 1,5 \text{ (cm)}$.

Vì hai điểm C, M nằm trên hai tia đối nhau gốc O nên điểm O nằm giữa hai điểm C, M .

Suy ra: $CO + OM = CM$

$$\Rightarrow 3 + 1,5 = CM$$

$$\Rightarrow CM = 4,5 \text{ (cm)}$$

Trên tia Ox có $OM < OB (1,5 < 5)$ nên điểm M nằm giữa hai điểm O và B .

Suy ra: $OM + MB = OB$

$$\Rightarrow MB = OB - OM$$

$$\Rightarrow MB = 5 - 1,5 = 3,5 \text{ (cm)}$$

Ta thấy $MB \neq MC (3,5 \neq 4,5)$ nên điểm M không là trung điểm của đoạn thẳng BC .